İNVOLÜSYONLU HALKALARDA TÜREVLER

Selma GÜLYAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
1996

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

İNVOLÜSYONLU HALKALARDA TÜREVLER

Selma GÜLYAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
1996

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ' NE

Bu çalışma, jürimiz tarafindan, Matematik Ana Bilim Dalı' nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Kazım KAYA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Neşet AYDIN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Muharrem SOYTÜRK

Üye :...

Üye :...

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

09/10/1996

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Fuat ÖNDER

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan " Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu " adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNVOLÜSYONLU HALKALARDA TÜREVLER

Selma GÜLYAZ
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Neşet AYDIN

Karekteristiği 2 den farklı türevli asal halkalarda bazı komütatiflik koşullarını inceleyen makalelerin özetlenmesi ve S ve K kümeleri involüsyonlu bir R asal halkasının sırasıyla simetrik ve skew-simetrik elemanlarının kümesi olmak üzere, d türevi için bulunan bazı sonuçların (σ,τ)-türev için uygulanmasını amaçlayan bu çalışmada aşağıdaki yol izlenmiştir.

Halkalarla ilgili bazı temel bilgiler I. bölümde verilmiştir.

II. Bölümde türevli asal halkalar ve involüsyonlu asal halkalar üzerinde komütatiflik koşullarını inceleyen bazı makaleler özetlenmiştir.

III. Bölümde R karekteristiği 2 den farklı olan involüsyonlu R asal halka, S ve K sırasıyla R halkasının simetrik ve skew-simetrik elemanlarının kümesi, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olmak üzere

(i) $d(K)\subseteq C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar

(ii) $a\in K$ için $\tau(a)d(K)=(0)$ (veya $d(K)\sigma(a)=(0)$) ise $a=0$ veya R halkası S_4 özelliğini sağlar.

IV. Bölümde, R karekteristiği 2 den farklı involüsyonlu bir asal halka, d bir (σ,τ)-türev ve S simetrik elemanlarının kümesi olmak üzere S kümesi üzerinde d, (σ,τ)-türevi için elde edilen sonuçlar α-türev için incelendi.

R karekteristiği 2 den farklı değişmeli olmayan bir asal halka, $*:R\rightarrow R$ bir involüsyon ve $0\neq d:R\rightarrow R$ bir türev olsun. I, R halkasının $I = I^{*}$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir ideali olsun. $L =\{ x\in I \mid xd(S\cap I)=0\}$ kümesi tanımlansın. S, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan ve $L\neq(0)$ ise L kümesinin a elemanı için $a^{*}(S\cap I)a=0$ eşitliğinin sağlandığı Herstein tarafından 1982 de ispatlandı [10].

V. Bölümde, yukarıdaki teorem d türevi yerine (σ, τ)-türev alınarak bir genelleştirme yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İnvolüsyonlu asal halka,(σ, τ)-Türev, α-Türev.

SUMMARY

MsC Thesis

ON DERIVATION OF RINGS WITH INVOLUTION

Selma GÜLYAZ
Graduate School of Natural and Applied
Sciences of Department of Mathematies
Advisor : Ass. Prof. Dr. Neşet AYDIN

In this work, the papers studying some commutativity conditions on the prime rings of characteristic not 2 with derivation are summarized. S and K being respectively the sets of symmetric and skew-symmetric elements of sets of a prime ring R, some results previously obtained for arbitrary derivation were studied with the application for (σ,τ)- derivatives in mind. To do end the following steps were taken.

Some general information about rings have been given in chapter I.

In chapter II, some papers that search commutativity conditions on prime rings with derivations and involutions.

In chapter III, Let R be a prime ring with involution of characteristic not 2, S and K are the sets of symetric and skew-symetric elements of R, respectively, a non-zero (σ,τ)- derivation d satisfies the following results are investigated.

(i) If $d(K)\subseteq C_{\sigma,\tau}$ then R satisfies S_4

(ii) Let $a\in K$ if $\tau(a)d(K)=(0)$ (or $d(K)\sigma(a)=(0)$) then either $a=0$ or R satisfies S_4

In chapter IV, Let R be a prime ring with involution of characteristic not 2, d is a (σ,τ)- derivation and S is a set of symetric elements of R. Some results that given d, (σ,τ)- derivations of S are investigated for α-derivations.

Let R be a noncommutative prime ring of characteristic not 2 and let * is an involution from R to R, and $0 \neq d: R \rightarrow R$ be a derivation. Let I be a non-zero ideal of R which satisfies the condition $I = I^*$. In addition, let a set L be defined as $L = \{ x \in I \mid xd(S \cap I) = 0 \}$. $S \not\subset Z$ and $L \neq (0)$ then for $a \in L$ it is shown that $a^*(S \cap I)a = (0)$ is satisfied. This theorem was proved by Herstein in 1982 [10]

Finally, in chapter V, the above theorem is generalized using d, (σ, τ)-derivation instead of derivation.

Key words: Prime ring with involution, (σ, τ)-derivation, α-derivation., *Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Neşet AYDIN' a ve ayrıca değerli hocam Doç. Dr. Hatice KANDAMAR' a içten teşekkürlerimi sunarım.*

GİRİŞ

R bir halka, $d : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ sağlanıyorsa, d dönüşümüne R halkasının bir ***türev*** denir. x ve y R halkasının iki elemanı olmak üzere $xy - yx$ elemanı komütatör çarpanı olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir. Benzer biçimde X ve Y, R halkasının iki alt kümesi ise her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $xy - yx$ elemanlarından oluşan küme $[X, Y]$ ile gösterilir. R halkasının, her $y \in R$ için $[x, y] = 0$ koşulunu sağlayan x elemanlarının oluşturduğu kümeye halkanın ***merkezi*** denir ve Z ile gösterilir.

$\sigma, \tau: R \to R$ iki dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ koşulunu sağlayan R halkasının d toplamsal dönüşümüne ***(σ,τ)-türev*** denir. Burada τ, R halkasının özdeşlik dönüşümü olarak alındığında d toplamsal dönüşümüne ***zayıf σ-türev*** aynı zamanda σ endomorfizması ise d ye ***σ-türev*** adı verilir. R halkasının özdeşlik dönüşümü 1 ile gösterilirse R halkası üzerinde tanımlanan her d türevi bir 1-türev ve aynı zamanda (1, 1)-türev olduğu açıktır.

Bu çalışmada R karekteristiği 2 den farklı bir asal halka, $\sigma, \tau : R \to R$ iki otomorfizma olarak alınacak, $x, y \in R$ için $x\sigma(y) - yx$ ve $x\sigma(y) - \tau(y)x$ elemanları sırasıyla $[x, y]_\sigma$, $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilecektir.

Yukarıdaki gösterimler altında $C_\sigma = \{x \in R \mid [x, y]_\sigma = 0 , \forall y \in R\}$, $C_{\sigma,\tau} = \{x \in R \mid [x, y]_{\sigma,\tau} = 0, \forall y \in R\}$ kümelerine sırasıyla R halkasının ***σ- merkezi*** ve ***(σ,τ)- merkezi*** denir.

$[U, R] \subset U$ koşulunu sağlayan R halkasının U toplamsal alt grubuna ***Lie ideal*** denir.

a, $b \in R$ olmak üzere

1) $a^{**} = a$
2) $(a + b)^* = a^* + b^*$
3) $(ab)^* = b^* a^*$

koşullarını sağlayan R den R ye * dönüşümüne R halkasında bir ***involüsyon***, R halkasına da ***involüsyonlu halka*** denir.

$S=\{a\in R \mid a^*=a\}$ kümesine R halkasının ***simetrik elemanlarının kümesi***, $K=\{a\in R \mid a^*=-a\}$ kümesine R halkasının ***skew-simetrik elemanlarının kümesi*** denir. R halkasının $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ elemanları için

$$S_{2n}(x_1, x_2, \ldots x_{2n}) = \sum_{\sigma\in S_{2n}} (-1)^n x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}$$

standart özdeşliği sağlanıyorsa R halkasına ***S_{2n} özelliğini sağlar*** denir.

Değişik koşullar altında bir halkanın komütatifliği incelenmiştir. Bu çalışmada, bu koşullardan bazıları altında bir halkanın komütatifliği incelenirken hangi aşamalardan geçtiği, koşullar üzerinde hangi genelleştirmelerin yapıldığı mümkün olduğu kadar tarih sırasıyla özetlenecektir. Bu koşullardan bazıları aşağıda verilmiştir.

a) $a \in R$ için $ad(R) = (0)$

b) $\forall x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$

c) $[d(R), d(R)] = (0)$

d) $[d(R), a] = (0)$

e) $d(R) \subset Z$

f) $d^2(R) = (0)$

g) $0 \neq d_1 : R \to R$ ve $0 \neq d_2 : R \to R$ iki türev olmak üzere $d_1d_2(R) = (0)$

Bir taraftan bu koşullarda R halkası yerine sırasıyla onun bir ideali, tek yanlı ideali ve Lie ideali alınarak, diğer taraftan yine aynı koşullarda d türevi yerine sırasıyla α-türev, $(1,\tau)$- türev ve (σ,τ)-türev alınarak halkanın komütatifliği incelenmiştir.

Ayrıca R karekteristiği 2 den farklı bir involüsyonlu asal halka, S ve K kümeleri sırasıyla bu halkanın simetrik ve skew-simetrik elemanlarının kümesi olmak üzere bir taraftan yukarıdaki koşulların bazılarında R halkası yerine sırasıyla S ve K kümeleri alınarak, diğer taraftan d türevi yerine sırasıyla α-türev ve (σ,τ)-türev alınarak halkanın komütatifliği incelenmiştir.

Söz konusu koşullar altında halkanın komütatifliği ile ilgili bazı çalışmalara ilişkin örnekler aşağıda verilmiştir.

d_1 ve d_2 karekteristiği 2 den farklı R asal halkanın iki türevi olmak üzere d_1d_2 de bir türev ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olduğu E. C. POSNER tarafindan 1957 yılında ispatlandı [23].

I.N. HERSTEIN 1978 yılında, d karekteristiği 2 den farklı R asal halkasının sıfirdan farklı bir türevi olmak üzere (c) koşulu altında halkanın komütatif olduğunu gösterdi [8]. Ayrıca HERSTEIN $[a, d(R)] = (0)$ koşulunu sağlayan halkanın bir a elemanının merkez tarafindan kapsandığını göstererek yukarıdaki teoremini genelleştirdi [9]. Yine HERSTEIN' ın yukarıdaki teoremi (c) koşulu yerine $[d(R), d(R)] \subseteq Z$ koşulu altında R halkasının komütatifliğini kanıtlayan P.H. LEE ve T. K. LEE tarafindan genelleştirildi [19]. Aynı teorem, U, R halkasının bir Lie ideali ve althalka olmak üzere her $u \in U$ için $[d(u), u] \in Z$ koşulu altında halkanın komütatifliğini ispatlayan R. AWTAR tarafindan da farklı bir biçimde genelleştirilmiştir [2].

J.BERGEN ve arkadaşları 1981 yılında, d karekteristiği 2 den farklı bir R asal halkasının sıfirdan farklı türevi, U, R nin sıfirdan farklı bir Lie ideali olmak üzere (e), (f) ve (g) koşullarından biri sağlanıyorsa U Lie idealinin merkez tarafindan kapsandığını gösterdiler [6].

1984 yılında d ve U sırasıyla karekteristiği 2 den farklı bir R asal halkasının sıfirdan farklı türevi ve ideali olmak üzere, her $u \in U$ için $[d(u), u]_{\sigma,\tau} = 0$ iken R halkasının komütatif olduğunu ispatlayan Y. HİRANO ve arkadaşı [14] bu teoremini 1988 yılında K. KAYA, U ideali yerine tek yanlı ideal ve her $u \in U$ için $[d(u), u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ koşulunu alarak genelleştirmiştir [17].

1992 yılında d yine karekteristiği 2 den farklı bir R asal halkasının sıfirdan farklı (σ,τ)-türevi ve U, R nin sıfirdan farklı bir ideali olmak üzere $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau}=(0)$ iken R halkasının komütatif olduğunu kanıtlayan N. AYDIN ve K. KAYA yukarıda verilen I. N. HERSTEIN' ın teoremini genelleştirdiler [5].

1982 yılında I. N. HERSTEIN, d 2-torsion free involüsyonlu yarı-asal halkanın sıfirdan farklı bir türevi, S bu halkanın simetrik elemanlarının kümesi olmak üzere $d(S) \subset Z$ iken S kümesinin merkez tarafindan kapsandığını kanıtlamıştır [10].

d karekteristiği 2 den farklı involüsyonlu R asal halkanın sıfirdan farklı bir türevi, K bu halkanın skew-simetrik elemanlarının kümesi olmak üzere $d(K) \subset Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar olduğunu kanıtlayan J. S. Lin' in [22], bu teoremini 1988 yılında J. C. Chang d türevi yerine sıfirdan farklı δ, bir (σ,τ)-türevini alarak genelleştirmiştir [7]. 1994 yılında aynı teoremi $d(S) \subseteq Z$ koşulu yerine $d(S) \subset C_{\sigma,\tau}$ koşulunu alarak genelleştiren N. AYDIN aynı zamanda $a \in S$, $b \in R$ olmak üzere $\tau(a)\,\tau(S)b = (0)$ veya S kümesinin her s elemanı için $\tau(a)\tau(s)b + b\sigma(s)\,\sigma(a) = 0$ koşullarından biri sağlandığında $a = 0$ veya $b = 0$, $\tau(a)d(S) = (0)$ koşulu sağlandığında ise $a = 0$ veya $S \subset Z$ olduğunu kanıtlamıştır [4].

d karekteristiği 2 den farklı involüsyonlu R asal halkasında sıfirdan farklı bir (σ,τ)-türev, S ve K kümeleri sırasıyla bu halkanın simetrik ve skew-simetrik elemanlarının kümesi olmak üzere çalışmanın III. bölümünde yer alan aşağıdaki ifadeler ispatlanmıştır.

1) $d(K) = (0)$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

2) $d(K) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

3) $a \in K$, $b \in R$ için $\tau(a)\tau(K)b = (0)$ (veya $b\sigma(K)\,\sigma(a) = (0)$) ise $a=0$ veya $b = 0$

4) $a \in K$ için $\tau(a)d(K) = (0)$ ise $a = 0$ veya R halkası S_4 özelliğini sağlar.

5) $a \in K$, $b \in R$ ve her $k \in K$ elemanları için $\tau(a)\tau(k)b + b\sigma(k)\sigma(a) = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$

6) $\sigma \neq \tau$ ve her $x \in R$ $d(x)=\tau(x) - \sigma(x)$ olsun. $d(S) \subseteq Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

d karekteristiği 2 den farklı involüsyonlu R asal halkasında sıfirdan farklı bir α-türev, S bu halkanın simetrik elemanlarının kümesi olmak üzere çalışmanın IV. bölümünde yer alan aşağıdaki ifadeler incelendi.

i) $d(S) \subseteq C_\alpha$ ise $S \subseteq Z$

ii) $a \in S$ ve $ad(S) = (0)$ ise $a = 0$ veya $S \subseteq Z$

iii) $a\in S$, $b\in R$ ve her $s\in S$ için, $asb+b\alpha(s)\,\alpha(a) = 0$ ise $a=0$veya $b=0$

iv) $S\not\subset Z$, $a\in S$ ve $a^2=0$ için $[d(S),a]_\alpha = (0)$ ise $a = 0$

v) $S\not\subset Z$ ve $[d(S), S]_\alpha = (0)$ ise S de nilpotent eleman yoktur.

R karekteristiği 2 den farklı değişmeli olmayan bir asal halka $* :R\rightarrow R$ bir involüsyon, $0\neq d:R\rightarrow R$ bir türev olsun. R halkasının involüsyonu kendisine eşit olan elemanlarının kümesi S ile gösterilmek üzere $L =\{ x\in I \mid xd(S\cap I)=0\}$ kümesi tanımlansın. Bu gösterimler altında Herstein, I.N. [10], I, R halkasının $I = I^*$ koşulunu sağlayan sıfirdan farklı bir ideali olmak üzere S merkez tarafindan kapsanmıyor ve $L\neq(0)$ ise L kümesinin her a elemanı için $a^*(S\cap I)a=0$ eşitliğinin sağlandığını ispatlamıştır.

Bu çalışmada önemli bir yer tutan V. Bölümde ise I. N. HERSTEIN' ın yukarıdaki teoremi d türevi yerine d, (σ, τ)-türevi alınarak genelleştirilmiştir.

I. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

Tanım 1.1: R bir halka ve A, B, P onun idealleri olsun. $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının ***asal ideali*** denir.

Teorem 1.28: R bir halka ve P onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) P asal idealdir.

(2) $\forall$ a, b $\in$ R için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dır.

(3) $\forall$ a, b $\in$ R için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dır.

(4) U, V R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

(5) U, V R halkasının iki sağ ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : P asal ideal olsun. $\forall$a, b$\in$R için $aRb \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $RaRbR \subseteq P$ olur. Buradan $RaRRbR \subseteq P$ olur. P asal ideal olduğu için $RaR \subseteq P$ veya $RbR \subseteq P$ bulunur. (a) = A olsun. $A^3 \subseteq RaR \subseteq P$ ve yine P asal ideal olduğundan $A^2 \subseteq P$ veya $A \subseteq P$ olur. Böylece $A = (a) \subseteq P$ elde edilir. Buradan $a \in P$ bulunur. Benzer şekilde $b \in P$ gösterilir.

(2) $\Rightarrow$(3) : $\forall$ a, b $\in$ R için $aRb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. Kabul edelim ki $(a)(b) \subseteq P$ olsun. Bu durumda; $aRb \subseteq (a)(b) \subseteq P$ olduğundan $aRb \subseteq P$ olur. Hipotezden $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) $\Rightarrow$(4) : $\forall$ a, b $\in$ R için $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. U, V R halkasının iki sol ideali ve $UV \subseteq P$ olsun. $U \not\subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u \in U$ ve $u \notin P$ olacak biçimde bir u elemanı vardır. Keyfi bir $v \in V$ alalım. $(u)(v) \subseteq UV + UVR \subseteq P$ dir. Bu durumda hipotezden $u\in P$ veya $v\in P$ olur.

(3) $\Rightarrow$(5): Benzer şekilde gösterilir.

(4) $\Rightarrow$(1) : Tanımdan (4) $\Rightarrow$(1) ve (5) $\Rightarrow$(1) olduğu açıktır.

Tanım 1.3: (0) ideali asal ideal olan halkaya ***asal halka*** denir.

Uyarı : R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) R asal halkadır.

(2) $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Tanım 1.4 : R bir halka, A ve Q R halkasının iki ideali olsun. $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ise Q idealine R halkasının ***yarı-asal ideali*** denir. Her asal ideal yarı-asal idealdir.

Teorem 1.5 : R bir halka, Q onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) Q yarı-asal idealdir.

(2) $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(3) $a \in R$ için $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(4) U, R halkasının bir sağ ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

(5) U, R halkasının bir sol ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

Tanım 1.6 : R bir halka olsun.

(1) $\forall\ a \in R$ için, $na = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise böyle n'lerin en küçüğüne R halkasının ***karakteristiği*** denir ve ***char R = n*** ile gösterilir.

(2) R bir halka ve m sıfırdan farklı bir tamsayı olsun. $x \in R$ için $mx = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa R halkasına ***m-torsion free halka*** denir.

(3) $a \in R$ için, $a^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise a elemanına halkanın ***nilpotent elemanı*** denir. $a^n = 0$ fakat $a^{n-1} \neq 0$ ise n ye a nın ***nilpotentlik indeksi*** denir.

(4) B, R halkasının bir ideali olsun. B nin her elemanı nilpotent ise B ye R halkasının ***nil ideali*** denir.

(5) A, R halkasının bir ideali olsun. A nın keyfi olarak alınan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemanları için $a_1, a_2, \ldots, a_n = 0$ ise A ya R nin ***nilpotent ideali*** denir. Her nilpotent ideal nil idealdir.

Tanım 1.7 : Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya ***yarı-asal halka*** denir.

Tanım 1.8 : I, R nin bir ideali $I \neq (0)$ ve $I \neq R$ ise I' ya ***proper ideal*** denir.

Tanım 1.9 : R bir halka olsun. $R^2 \neq (0)$ ve R nin proper idealleri yok ise R halkasına bir ***basit halka*** denir.

Tanım 1.10 : A, R halkasının bir alt kümesi olmak üzere, $r(A)=\{y \in R \mid xy=0, \forall x \in A\}$ ve $\ell(A)=\{y \in R \mid yx=0, \forall x \in A\}$ kümelerine sırasıyla A kümesinin ***sağ ve sol sıfılıyanı*** denir.

Önerme 1.11 : R bir asal halka olsun. Buna göre R halkasının sıfırdan farklı her sağ (sol) idealinin sağ (sol) sıfılıyanı sıfırdır.

İspat : $(0) \neq B$, R nin bir sağ ideali olsun. O zaman $BR \subset B$ dir. Böylece $x \in r(B)$ ise $Bx = (0)$ dir. Her $y \in B$ için $yRx \subset Bx = (0)$ olur ve buradan

$$yRx = (0) \ , \ \forall y \in B$$

bulunur. R asal halka olduğundan ve $B \neq (0)$ olmasından $x = 0$ elde edilir. O halde $r(B) = (0)$ olur.

Tanım 1.12: X, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $C_R(X)=\{a \in R \mid xa = ax \ , \forall x \in X\}$ kümesine X in R deki ***merkezleştiricisi*** denir. $\{x \in R \mid xy = yx \ , \forall y \in R\}$ kümesine ise R halkasının ***merkezi*** denir ve Z ile gösterilir.

Önerme 1.13 : R asal halka olsun. $ab, b \in Z$ ise $b = 0$ veya $a \in Z$ dir.

İspat: $ab, b \in Z$ olsun. $\forall x \in R$ için $xab = abx = axb$ olur. Buradan

$$(ax-xa)b=0 \ , \quad \forall x \in R \qquad (1)$$

elde edilir. (1) de x yerine xy, $y \in R$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (axy-xya)\, b = axyb - xyab \\ &= axyb - xayb + xayb - xyab \\ &= (ax-xa)\, yb + x\,(ay-ya)\, b \end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin ikinci terimi (1)' den dolayı sıfırdır. Böylece

$$(0) = (ax-xa)\, Rb \ , \quad \forall x \in R \qquad (2)$$

olduğu görülür. R asal halka olduğu için

$$b = 0 \quad \text{veya} \quad a \in Z$$

bulunur.

Önerme 1.14:[12 , Lemma 1.1.4] R bir yarı-asal halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $a(ax-xa) = 0$ oluyorsa $a \in Z$ dir.

İspat: $x, r \in R$ için hipotezden;

$$a(a(xr) - (xr)a) = 0 \qquad (3)$$

olur. $a(xr) - (xr)a = (ax-xa)r + x(ar-ra)$ olduğu (3) de yerine yazılır ve yine (3) eşitliği kullanılırsa;

$$ax(ar-ra) = 0, \quad \forall x, r \in R$$

elde edilir. Bu ise

$$(ar-ra)R(ar-ra) = (0) \quad \forall r \in R$$

olduğunu verir. R yarı-asal halka olduğundan $\forall r \in R$ için $ar = ra$ elde edilir. Böylece $a \in Z$ bulunur.

Önerme 1.15: [12 , Lemma 1.1.6] R yarı - asal halka olsun. a elemanı R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini merkezleştirsin. Bu taktirde $a \in Z$ dir.

İspat : a, R halkasının sıfırdan farklı I sağ idealini merkezleştirsin. Her $x \in R$ için $ax \in I$ dır. Hipotezden, $a(ax) = (ax)a = a(xa)$ olur. Buradan her $x \in R$ için $a(ax - xa) = 0$ elde edilir. Bu ise Önerme 1.14 den $a \in Z$ demektir.

Tanım 1.16: R bir halka ve A, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. $\forall a, b \in A$ için $ab - ba \in A$ ($ab + ba \in A$)oluyorsa A ya R nin ***Lie (Jordan) alt halkası*** denir.

Tanım 1.17: A, R halkasının bir Lie (Jordan) alt halkası ve $U \subset A$ toplamsal alt grubu olsun. her $u \in U$ ve her $a \in A$ için $ua - au \in U$ ($ua + au \in U$) oluyorsa, U ya A nın bir ***Lie (Jordan)ideali*** denir.

Tanım 1.18 : X ve Y, R halkasının iki alt kümesi olsun. $[X, Y]$ ile $xy - yx$, $x \in X$, $y \in Y$ elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup gösterilir.

Tanım 1.19: Tanım 1.18 e göre R halkasının U toplamsal alt grubu için $[U , R] \subseteq U$ ise U ya R nin bir ***Lie ideali*** denir.

Tanım 1.20: $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesi ***komütatör çarpımı*** olarak adlandırılır ve $[x , y]$ ile gösterilir. Ayrıca

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

eşitliğine ***Jacobi özdeşliği*** denir.

Önerme 1.21 : [13, Lemma 1.1] R bir halka ve $\rho \neq 0$ onun bir sağ ideali olsun. $\forall a \in \rho$ için $a^n = 0$ olacak biçimde sabit bir n pozitif tamsayısı varsa, bu taktirde R nin sıfırdan farklı bir nilpotent ideali vardır.

Tanım 1.22: R bir halka olsun. a, $b \in R$ için $ab = 0$ olduğunda $a=0$ veya $b=0$ ise R ye ***sıfır bölensiz*** bir halka denir.

Tanım 1.23 : Sıfır bölensiz, birimli ve değişmeli olan halkaya bir ***tamlık bölgesi*** denir.

Önerme 1.24:[13 , Teorem 1.5] R halkası sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve $2x = 0$ iken $x=0$ olan bir halka olsun. Kabul edelim ki $(0) \neq U$, R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olsun. O zaman $U \subseteq Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Önerme 1.25: (Brauer trick): Bir G toplamsal grubu iki öz alt grubunun bileşimi olarak yazılamaz.

İspat: A ve B, G nin iki öz alt grubu olmak üzere $G= A \cup B$ olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki $G \neq A$ olsun. Bu durumda $G=B$ olduğunu görmeliyiz. $G \neq A$ olduğundan $x \in G$ ve $x \notin A$ olacak biçimde en az bir x elemanı vardır. Öte yandan $G= A \cup B$ olduğundan $x \in B$ dir. İddiamız $G \subset B$ dir. Eğer $G \not\subset B$ olsaydı $y \in G$ ve $y \notin B$ olacak biçimde en az bir y elemanı vardır. $G = A \cup B$ olduğundan $y \in A$ olur.

$x + y \in B$ dir. Gerçekten $x+y \notin B$ olsaydı $G = A \cup B$ olduğundan $x+y \in A$ dır. $y \in A$ ve A toplamsal alt grup olduğundan $x \in A$ olurdu ki bu $x \notin A$ alınışıyla çelişir. O halde $x+y \in B$ dir. $x \in B$ ve B toplamsal olduğundan $y \in B$ olur ki bu da $y \notin B$ oluşuyla çelişir. O halde $G \not\subset B$ olamaz. $G \subset B'$ dir. Böylece $G = B$ olur.

Tanım 1.26: R bir asal halka olsun. U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $f: U \to R$ bir sağ R-modül homomorfizması olmak üzere; M ile bütün (U,f) şeklindeki ikililerin kümesini gösterelim. M üzerinde

" $(U,f) \sim (V,g) \Leftrightarrow$ R nin sıfırdan farklı bir $M \subseteq U \cap V$ ideali üzerinde $f=g$"

denklik bağıntısını tanımlayalım. M nin denklik sınıflarının kümesi **Q** olsun. **Q** kümesi

$$\overline{(U,f)}+\overline{(V,g)}=\overline{(U\cap V,f+g)}\ ,\ \overline{(U,f)}\,\overline{(V,g)}=\overline{(VU,fg)}$$

ikili işlem ile R yi kapsayan bir asal halkadır.

(1) **Q** nın merkezi **C** ile gösterilir ve **C** ye R nin **genişletilmiş merkezi** (extended centroid) denir. **C** bir cisimdir.

(2) **S=RC** ye R nin **Q** daki **merkezi kapanışı** (central closure) denir. S, R yi kapsayan bir asal halkadır.

Tanım 1.27 :R bir halka ve * :$R\rightarrow R$ bir dönüşüm olsun. Buna göre, $a,b\in R$ için

1) $a^{**} = a$

2) $(a+b)^* = a^* + b^*$

3) $(ab)^* = b^* a^*$

koşullarını sağlıyorsa * dönüşümüne R halkasında bir ***involüsyon*** denir ve R halkasına da bir ***involüsyonlu halka*** denir. $S=\{a\in R \mid a^*=a\}$ kümesine R halkasının ***simetrik elemanlarının kümesi***, $K=\{a\in R \mid a^*= -a\}$ kümesine R halkasının ***skew- simetrik elemanlarının kümesi*** denir.

R herhangi bir halka olsun. R halkasının $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ elemanları için

$$S_{2n}(x_1, x_2, \ldots x_{2n}) = \sum_{\sigma\in S_{2n}} (-1)^n x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}$$

standart özdeşliği sağlanıyorsa R halkasına ***S_{2n} özelliğini sağlar*** denir.

Teorem 1.28 :[12, Teorem 2.1.5] R involüsyonlu bir yarı-asal halka olsun. Bu durumda $S\subset Z$ veya $\overline{S}$, S kümesi tarafından üretilen alt halka olmak üzere, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar. $S\subset Z$ olması durumda R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Önerme 1.29 : $a\in K$ için $aKa=(0)$ ise $a=0$ dır.

İspat : Her $x\in R$ için $x - x^* \in K$ dır. Ozaman $a(x-x^*)a=0$, buradan

$$axa=ax^*a \quad , \quad \forall x\in R \qquad (1)$$

elde edilir. Her $x\in R$ için $(xax^*)^* = -xax^*$ olduğundan $xax^*\in K$ olur. Hipotez ve (1) eşitliği kullanılarak

$$0=a(xax^*)a=axax^*a=axaxa$$

olur ve böylece

$$(aR)^3 = 0$$

elde edilir. R asal halka olduğundan aR=(0) olur. Önerme 1.11 den $a = 0$ bulunur.

NOT : 1) R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka olsun. Bu taktirde herhangi bir $x \in R$ için, x/2 R halkasında bir formal gösterim olmak üzere,

$$x = \frac{x + x^*}{2} + \frac{x - x^*}{2}$$

yazılabileceğinden $R = S + K$ alabiliriz. $x \in S \cap K$ ise $x^* = -x$ ve $x^* = x$ olduğundan $2x = 0$ olur. char $\neq 2$ olduğu kullanılarak $x = 0$ bulunur. Bu her $x \in S \cap K$ elemanı için yapılabileceğinden $S \cap K = \{0\}$ elde edilir.

2) $\overline{S}$, S kümesi tarafından üretilen alt halka olmak üzere $\overline{S}$, R nin bir Lie idealidir. Çünkü: $\forall\, s \in S$, $r \in R$ için $r^* + r \in S$ ve $sr + r^*s \in S$ dir. S tarafından üretilen alt halka $\{ \sum s_{i_1} s_{i_2} \ldots\ldots s_{i_n} \mid s_{i_j} \in S \}$ olduğundan, her $s \in S$ ve $r \in R$ için $(r^* + r)s \in S$ olması kullanılarak

$$sr - rs = sr + r^*s - r^*s - rs = (sr + r^*s) - (r^* + r)s \in \overline{S}$$

bulunur. Böylece $[\overline{S}, R] \subset \overline{S}$ elde edilir. O halde $\overline{S}$, R halkasının bir Lie idealidir.

2. BÖLÜM

TÜREVLİ HALKALAR

Bu bölümde çalıştığımız konu ile ilgili daha önce yayınlanan makalelerin özetleri, yazar adı ve yayınladığı yıl belirtilerek bir sıra içinde ispatsız olarak vereceğiz.

1. Türevli Halkalar

Posner, E. C., 1957

Tanım 2.1.1 : R bir halka ve $d: R \to R$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar varsa d ye R de bir ***türev*** denir. $\forall x, y \in R$ için

1) $d(x + y) = d(x) + d(y)$
2) $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

Önerme 2.1.2: R bir asal halka, $d:R\to R$ halkasının bir türevi ve $a \in R$ olsun. Buna göre her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ (veya $d(x)a = 0$) oluyorsa $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Önerme 2.1.3: R bir asal halka olsun. p, q, r $\in$ R elemanları $\forall a \in R$ için $paqar = 0$ olacak biçimde ise bu taktirde p, q, r elemanlarından en az biri sıfırdır.

Teorem 2.1.4: R karakteristiği 2 'den farklı olan bir asal halka ve d_1, d_2, R halkasının iki türevi olsun. d_1d_2, R halkasının bir türevi ise $d_1 = 0$ veya $d_2= 0$ dır.

Önerme 2.1.5: R bir asal halka, $d : R \to R$ bir türev olsun. Bu taktirde her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ oluyorsa $a = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Önerme 2.1.6: A bir Lie halka, I, A halkasının bir ideali olsun. Eğer $d \in A$ ve her $x \in I$ için $dx.x=0$ oluyorsa o zaman her $a \in R$ ve her $x \in I$ için $(da.x)\, x=0$ olur. (Her $x \in I$ için $dx.x = 0$ koşulunu sağlayan $d \in R$ elemanlarının kümesi A'nın bir idealidir.)

Teorem 2.1.7: R bir asal halka, d, R halkasının bir türevi olsun. Buna göre her $a \in R$ için $ad(a)-d(a)a \in Z$ ise bu taktirde $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Herstein, I.N., 1978

Teorem 2.1.8: R herhangi bir halka, $d : R \to R$ bir türev ve $d^3 \neq 0$ olsun. O zaman her $r \in R$ için $d(r)$ elemanları tarafından üretilen A alt halkası R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 2.1.9: R bir asal halka, $d : R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Her $x, y \in R$ için $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ ise bu taktirde

i) Eğer char $R \neq 2$ ise R halkası komütatif tamlık bölgesidir.

ii) Eğer char $R = 2$ ise R halkası komütatif veya R halkası merkezi üzerinde 4-boyutlu basit cebirdir.

Herstein, I. N., 1979

Teorem 2.1.10: R bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $a \in R$ elemanı her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ olacak biçimde ise bu taktirde

i) char $R \neq 2$ ise $a \in Z$ dir. (Z, R halkasının merkezidir.)

ii) char$R = 2$ ise $a^2 \in Z$ dir. Üstelik $a \notin Z$ ise $\lambda \in C$ (R halkasının genişletilmiş merkezi) olmak üzere $\forall x \in R$ için $d(x) = (\lambda a)x - x(\lambda a)$ dır.

Lee, P.H. ve Lee, T.K., 1981

Bu makale boyunca R halkası karakteristiği 2 den farklı olan asal halka ve Z, R halkasının merkezi olarak alınacaktır.

Teorem 2.1.11: R bir asal halka, $0 \neq d:R \to R$ bir türev char$R \neq 2$ ve $a \in R$ olsun. $[a,d(R)] \subseteq Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Teorem 2.1.12: R bir asal halka ,$0 \neq d : R \to R$ bir türev ve char$R \neq 2$ olsun. $[d(R), d(R)] \subset Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 2.1.13: R bir asal halka ,$0 \neq d : R \to R$ bir türev ve char$R \neq 2$ olsun. $d^2(R) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 2.1.14: d_1 ve d_2 R asal halkasının sıfırdan farklı iki türevi ve char$R \neq 2$ olsun. $d_1 d_2 (R) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 2.1.15: R bir asal halka, $0 \neq d : R \rightarrow R$ bir türevi ve char$R \neq 2$ olsun. Her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Herstein, I.N. , 1970

Önerme 2.1.16: R yarı-asal ,2-torsion free bir halka ve T, R halkasının Lie ideali olsun. Buna göre $[T, T] \subset Z$ ise bu taktirde $T \subseteq Z$ olur.

Önerme 2.1.17: R yarı-asal, 2-torsion free bir halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. $t \in R$ elemanı [U, U] nun her elemanı ile komütatif ise bu taktirde t, U Lie idealinin her elemanı ile komütatiftir.

Teorem 2.1.18: R yarı - asal, 2-torsion free halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. Buna göre $t \in R$ her $u \in U$ için $tu - ut$ elemanlarını komüt ederse t, U Lie idealinin tüm elemanlarını komüt eder.

Awtar , R. ,1973

Önerme 2.1.19: R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. $[u, d(u)] \in Z$ ve $u^2 \in U$ ise bu taktirde her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ olur.

Önerme 2.1.20: R bir asal halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde her $u \in U$ ve her $r \in R$ için $[[d(r), u], u] \in Z$ olur. Üstelik her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ ise her $r \in R$ için $[[d(r), u], u] = 0$ olur.

Önerme 2.1.21: R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve U, R nin bir Jordan ideali olsun. Her $u \in U$ için $u\, d(u) = d(u)u = 0$ ise bu taktirde $U = 0$ dır.

Teorem 2.1.22: R karakteristiği 2 ve 3 den farklı olan bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.1.23: R karakteristiği 3 den farklı olan bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ve $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.1.24: R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, d, R nin sıfırdan farklı bir türevi ve U, bir Jordan ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.1.25: R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, d, R nin sıfırdan farklı bir türevi olsun. U, R halkasının bir alt halkası ve Lie (Jordan) ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise U komütatiftir.

Bergen, J., Herstein, I.N. ve Kerr, J.W., 1981

Bu makale boyunca R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka, U , R halkasının bir Lie ideali ve Z, R halkasının merkezi olarak alınmıştır.

Önerme 2.1.26: $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali ise bu taktirde R halkasının $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

Önerme 2.1.27: $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali ise $C_R(U) = Z$ dir.

Önerme 2.1.28: $C_R([U, U]) = C_R(U)$ dur.

Önerme 2.1.29: $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali olsun. $aUb=0$ ise $a=0$ veya $b=0$ dır.

Önerme 2.1.30: U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d(U)=0$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Önerme 2.1.31: U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d(U) \subset Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Önerme 2.1.32: U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $t \in R$ için $td(U) = 0$ (veya $d(U)t = 0$) ise bu taktirde $t = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.1.33: U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu taktirde $d^2(U)=0$ ise $U \subseteq Z$ dir.

Sonuç 2.1.34: R, 2-torsion free bir yarı-asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Bir $a \in R$ için $[a, [a,U]] = 0$ ise bu taktirde $[a, U] = 0$ dır.

Teorem 2.1.35: $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu taktirde $C_R(d(U)) = Z$ dir.

Yazar çalışmasının bundan sonraki kısmında $0 \neq d: R \to R$ bir türev, $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali, $V = [U,U]$ ve $W = [V,V]$ olarak almıştır.

Önerme 2.1.36: $d^3 \neq 0$ ve $\overline{d(V)}$, R halkasının sıfırdan farklı sol λ ve sıfırdan farklı sağ δ idealini kapsarsa bu taktirde $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Önerme 2.1.37: I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre $\overline{d(U)}$, R nin sıfırdan farklı sağ ve sıfırdan farklı sol ideallerini kapsamıyor ise bu taktirde, $[c, I] \subset \overline{d(U)}$ olduğunda $c \in Z$ dir.

Önerme 2.1.38: $d^2(U)^2 = 0$ ise $d^3(W) = 0$ dır.

Önerme 2.1.39: $d^3(U) = 0$ ise $d^3 = 0$ dır.

Teorem 2.1.40: R bir asal halka, char$R \neq 2$, $U \not\subset Z$ R halkasının bir Lie ideali ve $d : R \to R$ bir türev ve $d^3 \neq 0$ olsun. Bu taktirde $\overline{d(U)}$, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 2.1.41: $U \not\subset Z$ olan R halkasının bir Lie ideali ve δ, d, R halkasının türevleri olsunlar. Eger $\delta d(U) = 0$ ise o zaman $\delta = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lee,P.H. ve Lee,T.K. , 1983

Bu makale boyunca R, char$R \neq 2$ olan bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olarak alınacaktır.

Önerme 2.1.42: d, R halkasının sıfırdan farklı türevi, $d(Z) \neq 0$ ve $a \in R$ için $[a, d(U)] \subseteq Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ olur.

Teorem 2.1.43: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $d^2(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.1.44: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ için $[a, d(U)] \subseteq Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.1.45: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu taktirde $[d(U), d(U)] \subseteq Z$ ise $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.1.46: d ve δ , R nin sıfırdan farklı iki türevi olsun. $d\delta(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.1.47: R, char$R \neq 2$ asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev ve U, R nin bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(U)] \in Z$ ise $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.1.48: R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, $0\neq d:R\rightarrow R$ bir türev ve , R nin bir Lie ideali olsun. $a \in R$ ve $ad(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $a = 0$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Awtar,R. , 1984

Teorem 2.1.49: R, charR≠2 asal halka, $0\neq d$, R halkasının türevi, $U \not\subset Z$ olan R nin bir Lie ideali ve $d^2(U) \subseteq Z$ olsun. $a\in R$ için $d(a) = 0$ ve $[a, d(U)] \subset Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Teorem 2.1.50: R, charR≠2 asal halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. $a \in R$ elemanı, her $u \in U$ için $[a, [a, u]] \in Z$ olacak biçimde ise bu taktirde $[a, U] =0$ olur. Üstelik $U\not\subset Z$ ise $a\in Z$ dir.

Teorem 2.1.51: R yarı-asal, 2 - torsion free halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. $a \in R$ elemanı, her $u \in U$ için $[a, [a, u]] \in Z$ olacak biçimde ise bu taktirde $[a, U] = 0$ dır.

Teorem 2.1.52: R, charR≠2 olan bir asal halka ve $U\not\subset Z$ olan R halkasının bir Lie ideali olsun. $a\in R$ elemanı, her $u \in U$ için $[a, d(u)] \in Z$ olacak biçimde ise bu taktirde $d = 0$ veya $a \in Z$ dir.

Teorem 2.1.53: R, charR≠2 olan bir asal halka ve U, R nin Lie ideali olsun. d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $d^2(U)\subset Z$ ise bu taktirde $U\subset Z$ dir.

Teorem 2.1.54: R, charR≠2 asal halka ve $U\not\subset Z$ olan R halkasının bir Lie ideali olsun. δ, d , R nin iki türevi ve $\delta d(U)\subset Z$ ise bu taktirde $\delta = 0$ veya $d = 0$ dır.

Terome 2.1.55: R, charR≠2 asal halka, d, R nin sıfırdan farklı bir türevi ve U, R nin Lie ideali olsun. Her $u\in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise o zaman $U\subset Z$ dir.

Hongan ,M. 1985

Bu makale boyunca R karakteristiği 2'den farklı asal halka, C ,R halkasının merkezi, $0 \neq d: r\rightarrow r'$ bir $\sigma: R\rightarrow R$ örten dönüşümü ile tanımlanmış yarı-türev ve $\sigma d = d\sigma$ olarak alınmıştır. U, R halkasının Lie ideali ve $W = [U, U]$, $S=[W,W]$ olmak üzere;

(1-U) $U \subseteq C$

(2-U) $U' \subseteq C$

(3-U) $U'' \subseteq C$

(4-U) $[U', U'] \subseteq C$

(5-U) $[a, U'] \subseteq C$ olacak biçimde bir $a \in R / C$ vardır.

(6-U) $aU' \subseteq C$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir $a \in R$ vardır.

(7-U) $[u, u'] \in C, \quad \forall u \in U$

(8-U) $\delta\sigma = \sigma\delta$ ve $(U')^* \subseteq C$ olacak şekilde, $\tau : R \to R$ bire-bir fonksiyonu ile tanımlanmış $0 \neq \delta : R \to R$, $r \to r^*$ yarı-türevi vardır.

Teorem 2.1.56: (1-U), (1-W), (1-S) ve (2-U) denktirler ve (3-U) - (8-U) dan herhangi biri gerçekleniyor ise bu taktirde $\sigma(U) \subseteq Z$ dir..

Önerme 2.1.57: (1) $W' \subseteq [U, U'] + [\sigma (U), U'] \subseteq U + \sigma (U)$ dur. Özel olarak $U' \subseteq C$ ise $W' = 0$ dır.

(2) Eğer $U' = 0$ ise o zaman $U \subseteq C$ dir.

(3) $a' = 0$ olan her $a \in R$ için $\sigma (a) = a$ dır.

Önerme 2.1.58: (1-U), (1-W), (1-S) ve (2-U) denktirler.

Önerme 2.1.59: $aU' = 0$ (veya $U' a = 0$) olacak biçimde bir sıfırdan farklı $a \in R$ var ise bu taktirde $U \subseteq C$ dir.

Önerme 2.1.60: $U'' = 0$ ise bu taktirde $U \subset C$ dir.

Önerme 2.1.61: 1) $C' \neq 0$ ve $a \in R / C$ için $[a, U'] \subseteq C$ ise bu taktirde $U \subseteq C$ dir.

2)Bir $a \in R /C$ için $[a, U'] = 0$ ise o zaman $\sigma (U) \subseteq C$ dir.

Önerme 2.1.62: $\sigma (U) \not\subset C$ ve $U''' = 0$ ise bu taktirde $R''' = 0$ dır.

Sonuç 2.1.63 : R değişmeli olmayan bir halka ve σ bir bire-bir dönüşüm ise bu taktirde (2-S) - (8-S) den herbiri (1-U) ile denktir.

2. (σ,τ) - türevli Halkalar

Tanım 2.2.1 : R bir asal halka , $d:R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. $\sigma, \tau:R \to R$ iki dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$$

ise d ye R halkanın ***(σ,τ)- türev*** denir.

Hirano, Y. ve Tominaga, H. 1984

Yazar çalışmasında σ ve τ, R halkasının iki otomorfizması olmak üzere $d:R\to R$, $d:r\to r'$ ile tanımlanmış bir (σ,τ)-türevi, $C_{\sigma,\tau}=\{c\in R \mid c\sigma(x)=\tau(x)c, \forall x \in R\}$, $[x, y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$ ve $(x, y)_{\sigma,\tau}=x\sigma(y) + \tau(y)x$ olarak almıştır.

Önerme 2.2.2: R bir asal halka, $0\neq d:R\to R$ bir $(\sigma,1)$-türevi ve $U\neq(0)$, R halkasının bir ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $[u', u] = 0$ olması için gerek ve yeter koşul R halkası komütatiftir.

Önerme 2.2.3: R bir asal halka, $0\neq d:R\to R$ bir (σ,τ)-türevi ve $U\neq(0)$, R halkasının bir ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu taktirde R halkası komütatif ve $\sigma = \tau$.

Teorem 2.2.4: R bir asal halka, $0 \neq d$, R'nin bir (σ,τ)- türevi, $\mathrm{char}R \neq 2$ ve $U \neq (0)$ R'nin bir ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

Argaç, N. Kaya, A ve Kısır, A. 1987

Bu çalışma boyunca R bir asal halka, I sıfırdan farklı bir sağ ideali ve σ, τ R halkasının iki otomorfizmi olarak almıştır. $[U]_{\sigma,\tau} = \{u\in U \mid [u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}\}$ ve $(U)_{\sigma,\tau} = \{u\in U \mid (u', u)_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}\}$ olarak tanımlanmıştır.

Aşağıdaki koşulları düşünelim.

a) R komütatiftir ve $\sigma = \tau$ dır.

a*) R komütatif, $\mathrm{char}R \neq 2$ ve $\sigma = \tau$ dır.

b) Her $a \in I$ için $[a', a]_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

c) Her $a \in I$ için $(a', a)_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

d) $I = [I]_{\sigma,\tau}$, yani her $a \in I$ için $[a', a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dır.

e) $I = (I)_{\sigma,\tau}$,yani her $a \in I$ için $(a', a)_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$

f) $I = [I]_{\sigma,\tau} \cup (I)_{\sigma,\tau}$

Teorem 2.2.5: R, charR≠2 olan bir asal halka, 0≠d, R'nin bir (σ,τ)-türevi, ve I ≠ (0), R'nin bir sağ ideali olsun. Bu taktirde (a) ile (b) ve (a^*) ile (c) denktirler.

Teorem 2.2.6: 0≠d:R→R bir (1,τ)-türevi olsun.

1) $a, b \in [I]_\tau$ ($a, b \in (I)_\tau$) olsun. Buna göre $a + b \in [I]_\tau$ ($a + b \in (I)_\tau$) olması için gerekli ve koşul $a - b \in [I]_\tau$ ($a - b \in (I)_\tau$) dır.

2) $b \in (I)_\tau$ ise $[b', b]_\tau = 0$

3) $a, b \in [I]_\tau$ olsun. (f) gerçekleniyor ve charR ≠ 3 ise $a - b \in [I]_\tau$ veya $a, b, a + b \in (I)_\tau$ dır. Özel olarak , $a \in I - (I)_\tau$ ve $b \in [I]_\tau$ ise $a + b \in [I]_\tau$ dır.

4) $I \neq [I]_\tau$ ise her $b \in I - [I]_\tau$ için $b^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı yoktur.

Önerme 2.2.7: 0≠d, R nin bir (1,τ)-türevi, charR≠2 ve (f) sağlasın. Buna göre

1) $b \in I - [I]_\tau$ ise $(b^2)' = \tau(b^2)\, b' = b'\, b^2 = 0$ ve $b^2 \neq 0$ dır.

2) $Z \cap I \neq (0)$ ise (d) sağlanır.

3) $b \in I - [I]_\tau$ ve x R , x' = 0 olsun. Bu taktirde $\tau(b)b'\, xb = 0$ dır.

Teorem 2.2.8: R, charR≠ 2 olan bir asal halka, 0≠d, R'nin bir (σ,τ)-türevi ve I ≠ (0), R'nin bir sağ ideali olsun. Bu taktirde (a), (b), (d) ve (e) denktirler.

Önerme 2.2.9: R, charR≠3 olan bir asal halka, 0≠d, R'nin bir (1,τ)-türevi ve I ≠ (0), R'nin bir ideali olsun. Bu taktirde (a), (b), (d), (e) ve (f) denktirler.

Teorem 2.2.10:R, charR≠2 olan bir asal halka, 0≠d, R'nin bir (σ,τ)-türevi ve I ≠ (0), R'nin bir ideali olsun. Bu taktirde (a), (b), (d) ve (e) denktirler.

Kaya, K. 1988

Yazar bu çalışmada σ ve τ dönüşümlerini R halkasının iki otomorfizması olarak almıştır.

Önerme 2.2.11: R bir asal halka, d: r→ r' ile tanımlanmış bir (σ,τ) - türevi ve U≠(0), R halkasının bir ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $(u', u)_{\sigma,\tau} = 0$ ise R halkası komütatiftir.

Önerme 2.2.12: R bir asal halka, $0\neq d:R\rightarrow R$ bir (σ,τ)-türevi ve $U\neq(0)$, R halkasının bir sağ ideali olsun. Buna göre $u \in U$ için

i) $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise R halkası komütatiftir.

ii) $(u, u)_{\sigma,\tau} = 0$ ise R halkası komütatiftir.

Üstelik $\sigma = \tau$ dır.

Önerme 2.2.13: R bir asal halka ve a, b $\in$R olsun. b, ab $\in C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $b = 0$ dır.

Önerme 2.2.14: R bir asal halka, $0\neq d$, R'nin bir (σ,τ)- türevi, char$R \neq 2$ ve $U \neq (0)$ R'nin bir sağ ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

Aydın, N. ve Kaya, K. , 1992

Bu çalışma boyunca R, char$R\neq2$ olan bir asal halka, U sıfırdan farklı bir ideali, d, R halkasının (σ,τ)-türevi ,$C_{\sigma,\tau} =\{c\in R| c\sigma(x)=\tau(x)c$, her $x\in R\}$ kümesi ve Z, R halkasının merkezi olarak alınmıştır.

Önerme 2.2.15: U, R halkasının sağ ideali ve $d(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

Önerme 2.2.16: $0\neq d$, R halkasının (σ,τ)- türevi, U, R halkasının sağ ideali olsun. Buna göre $d(U) \subset Z$ ise o zaman R halkası komütatiftir.

Önerme 2.2.17: $(0) \neq U$, R halkasının bir ideali ve $a\in R$ olsun. Buna göre $a\in R$ için $ad(U) = (0)$ (veya $d(U)a = (0)$) ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Önerme 2.2.18: d_1 , R halkasının (σ,τ)- türevi ve d_2 , R halkasının türevi olsun. $d_1d_2 (R) = 0$ ise o zaman $d_1 = 0$ veya $d_2= 0$ dır.

Teorem 2.2.19: R bir asal halka, $0 \neq d : R \rightarrow R$, R halkasının bir (σ,τ)-türevi ve U sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre $a \in R$ için $[d(U), a]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

Teorem 2.2.20: R bir asal halka, $0 \neq d : R \rightarrow R$, R halkasının (σ,τ)-türevi ve U ideali olsun. $[d(U), d(U)]_{\sigma,\tau}= (0)$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Önerme 2.2.21: $0\neq d$, R halkasının (σ,τ) - türevi ve U ideali olsun. Buna göre $a \in R$ için $ad(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise o zaman $a = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Önerme 2.2.22: $0 \neq d$, R halkasının (σ,τ) türevi ve $a \in R$ olsun. Buna göre $[d(R), a]_{\sigma,\tau} \subseteq C_{\sigma,\tau}$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

Teorem 2.2.23: R bir asal halka ve $0 \neq d : R \rightarrow R$, R halkasının (σ,τ)-türevi olsun. Buna göre $[d(R), d(R)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise o zaman R halkası komütatiftir.

Kandamar ,H. ve Kaya ,K. , 1992

Bu makale boyunca R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, (σ,τ)-türevi olarak alınacaktır.

Önerme 2.2.24: $d(U) = (0)$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Önerme 2.2.25: $U \not\subset Z$, $t \in R$ olsun. $td(U) = (0)$ (veya $d(U)t = (0)$) ise bu taktirde $t = 0$ dır.

Önerme 2.2.26: $d(U) \subset Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$

Teorem 2.2.27 : d, R nin sıfırdan farklı (σ,τ)-türevi , $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ ve U sıfırdan farklı Lie ideali için $d(U) \subset U$ olsun. Buna göre $d^2(U) = 0$ ise $U \subset Z$ dir.

Önerme 2.2.28: $a \in R$; $U \not\subset Z$ ve $[U, a] \subset Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Teorem 2. 2.29: $[U, d(U)] \subset Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

3. α - türevli Halkalar

Kaya , K. , 1988

Tanım : R bir asal halka, $0 \neq \alpha : R \to R$ bir dönüşüm ve $d: R \to R$ bir toplamsal fonksiyon olsun. Buna göre her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)\alpha(y) + xd(y)$ ise d ye R halkasının bir ***zayıf-α - türevi*** denir. Üstelik α endomorfizm ise d ye bir ***α - türevi*** denir.

Her türev bir α - türevdir. Dolaysıyla bir zayıf-α - türevdir. R de bir d, (σ,τ) - türevi varsa bu taktirde $\tau^{-1}d : R \to R$ bir $\alpha = \tau^{-1}\sigma : R \to R$ türevdir. $C_\alpha = \{c \in R \mid c\alpha(x) = xc , \forall x \in R\}$, $[x,y]_\alpha = x\alpha(y) - yx$ olarak tanımlanır. Ayrıca $[x,yz]_\alpha = y[x,z]_\alpha + [x,y]_\alpha\alpha(z)$ ve $[xy,z]_\alpha = x[y,z]_\alpha + [x,z]_\alpha y$ bağıntıları vardır.

Önerme 2.3.1: R bir asal halka ise bu taktirde R deki sıfırdan farklı her zayıf-α - türev bir α - türevdir.

Önerme 2.3.2: R bir asal halka, $d:R \to R$ α-türev ve $a \in R$ olsun. Buna göre

1) $(0) \neq U$, R nin bir sağ ideali ve $d(U) = (0)$ ise $d = 0$ dır.

2) $(0) \neq U$, R nin bir sağ ideali ve $a \in R$ için $ad(U) = (0)$ ise $a=0$ veya $d=0$.

3) $d(R)a = (0)$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

4) $(0) \neq U$, R nin bir sağ ideali ve $\forall u \in U$ için $[a,u]_\alpha = 0$ ise $\forall x \in R$ için $[a,x]_\alpha = 0$ dır.

5) $a \in C_\alpha$ ve $ab \in C_\alpha$, $b \in R$ ise $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

NOT : Yazar çalışmasının bundan sonraki kısmında R yi bir asal halka ve $0 \neq \alpha : R \to R$ örten olmak üzere, $0 \neq d : R \to R$ bir zayıf-α - türev olarak alınmıştır.

Önerme 2.3.3: $(0) \neq U$, R nin bir sağ ideali ve $d(U) \subseteq C_\alpha$ ise R komütatiftir.

Önerme 2.3.4: $(0) \neq U$, R nin bir ideali , $\alpha(U) \neq (0)$, $charR \neq 2$ ve $d\alpha = \alpha d$ olsun. Buna göre $a \in R$ için $[a, d(U)]_\alpha = (0)$ ise $a \in C_\alpha$ dır.

Teorem 2.3.5 : $(0) \neq U$, R nin bir ideali, $charR \neq 2$ ve $d\alpha = \alpha d$ olsun. Buna göre $[d(U), d(U)]_\alpha = (0)$ ise R komütatiftir.

Önerme2.3.6 :$g:R \rightarrow R$ bir dönüşüm , $d_1:R \rightarrow R$ bir g-türev , $d_2:R \rightarrow R$ α-türev, $d_2\alpha=\alpha d_2$ ve char$R\neq 2$ olsun. Buna göre $d_1d_2=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ dir.

Önerme 2.3.7 :Her $y \in R$ için, $d(y)y = yd(y)$ ise R komütatiftir.

Teorem 2.3.8 : R, char$R \neq 2$ bir asal halka ve $d\alpha=\alpha d$ olsun. Buna göre, $a\in R$ için $ad(R) \subset C_\alpha$ ise $a = 0$ veya R komütatiftir.

4. İnvolüsyonlu Halkalar

Tanım: R bir halka ve $*:R \to R$ bir dönüşüm olsun. Buna göre , $a,b \in R$ için

1) $a^{**} = a$
2) $(a+b)^* = a^* + b^*$
3) $(ab)^* = b^* a^*$

koşullarını sağlıyorsa * dönüşümüne R halkasında bir ***involüsyon*** denir ve R halkasına bir ***involüsyonlu halka*** denir. $S = a \in R \mid a^* = a \}$ kümesine R halkasının ***simetrik elemanlarının kümesi,***. $K = \{a \in R \mid a^* = -a\}$ kümesine R halkasının ***skew-simetrik elemanlarının kümesi*** denir.

Not : R herhangi bir halka olsun. R halkasının $x_1, x_2, ...x_{2n}$ elemanları için

$$S_{2n}(x_1, x_2, ...x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^n x_{\sigma(1)} ......x_{\sigma(2n)}$$

standart özdeşliği sağlanıyorsa R halkasına ***S_{2n} özelliğini sağlar*** denir.

R halkası S_{2n} özelliğini sağlar $\Leftrightarrow$ R merkezi üzerinde en fazla n^2 boyutlu basit cebir içinde bir order' dır.

Herstein , I.N. , 1982

Önerme 2.4.1: R nilpotent idealleri olmayan bir halka, $L \neq (0)$, R halkasının bir sol ideali ve $0 \neq a \in L$ için Ra, R nin bir minimal sol ideali olsun. Buna göre L nin kendiside R halkasının bir minimal sol idealidir.

Önerme 2.4.2 : R nilpotent idealleri olmayan, 2-torsion free halka olsun. Buna göre $a \in S$ ve $a S a = 0$ ise bu taktirde $a = 0$ dır.

Yazar çalışmasının bundan sonraki kısmında, R asal halka , char$R \neq 2$, C ile R nin genişletilmiş merkezini ve $Q = RC$, R halkanın merkezi kapanışı göstermiştir.

Önerme 2.4.3 : $0 \neq a$, $0 \neq b \in R$ ve $a S b = 0$ ise bu taktirde Qb, Q nin bir minimal ideali, $e^2 = e$ olmak üzere $Qb = Qe$ ve $eQe = Ce$ dir. Üstelik, $b^* Sb = aSa^* = 0$, $a^* a = 0$ ve $bb^* = 0$ dır.

Önerme 2.4.4 : R asal halka ve *, R nin merkezi kapanışı üzerinde bir involüsyon olsun. Buna göre $0 \neq a \in R$ ve aSa, C üzerinde sonlu boyutlu ise bu taktirde R, minimal sağ ideali bulunan bir pirimitif halkadır.

Önerme 2.4.5 : $0 \neq d: R \to R$ bir türev ve $d(S) = 0$ ise $S \subseteq Z$ dir.

Sonuç 2.4.6 : $0 \neq d: R \to R$ bir türev ve $d(S) \subseteq Z$ ise $S \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.4.7 : R değişmeli olmayan bir involüsyonlu asal halka, $S \not\subset Z$ ve $0 \neq d: R \to R$ bir türev, $I = I^* \neq (0)$, R halkasının bir ideali ve $L = \{ x \in I \mid xd(S \cap I) = (0)\}$ olsun. Buna göre, $L \neq (0)$ ise bu taktirde verilen $a \in L$ için $a^*(S \cap I)a = 0$ dır. Özel olarak, R yerine R halkasının merkezi kapanışı ve $L \neq (0)$ ise L, R halkasının bir minimal sol idealidir, böylece primitiftir. $e^2 = e$ olmak üzere $L = Re$ ve $eRe = Ce$ dir.

İspat : $S_0 = S \cap I$ olsun. Her $a \in L$ için $ad(S_0) = (0)$ dır. Her $x \in I$ için $x^* \in I^* = I$ olduğundan $x + x^* \in I$ dır. Ayrıca $x + x^* \in S$ olmasından $x + x^* \in S \cap I = S_0$ bulunur. Böylece $a \in L$ için $ad(x + x^*) = 0$ olur. Buradan

$$ad(x) = -ad(x^*) \ , \quad \forall a \in L, \forall x \in I \qquad (1)$$

bulunur. $L \neq (0)$ olduğundan L de, her $t \in S_0$ için $ad(t) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir a elemanı vardır. (1) eşitliğinde x yerine tx, $t \in S_0$, yazılır ve (1) no'lu eşitlik ile $ad(t) = 0$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a\,d(tx) + a\,d((tx)^*) \\ &= ad(t)x + a\,td(x) + ad(x^*)\,t + a\,x^*d(t) \\ &= a\,td(x) - ad(x)\,t + a\,x^*d(t) \end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$atd(x) = ad(x)t - ax^*d(t) \quad , \forall x \in I,\ t \in S_0 \qquad (2)$$

elde edilir. (2) eşitliğinde x yerine a^*y, $y \in I$, yazılır ve $ad(t) = 0$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a\,td(a^*y) - ad(a^*y)t + a(a^*y)^*d(t) \\ &= a\,td(a^*y) - ad(a^*y)t + ay^*ad(t) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$atd(a^*y) = ad(a^*y)t \quad , \forall x \in I,\ t \in S_0 \qquad (3)$$

elde edilir. $a^*(S \cap I)a \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda a^*S_0a da sıfırdan farklı olacak biçimde bir b elemanı vardır ve $x \in S_0$ için $b = a^*xa$ yazılır. Buradan

$$b^* = (a^*xa)^* = a^*xa = b$$

olur. $b^* = b$ olduğundan $b \in S$ ve öte yandan $b \in I$ olduğundan $b \in S \cap I = S_0$ olur. $b\, d(S_0) = a^* x a d(S_0) = (0)$ olduğundan $b \in L$ dir. $b \in S_0$ ve $b \in L$ olmasından $b \in S_0 \cap L$ bulunur. Böylece

$$a^* S_0 a \subseteq S_0 \cap L$$

olur. Bu durumda

$$0 \neq b = b^* \in a^* S_0 a \subseteq S_0 \cap L$$

olur. $b \in I$ ve $bd(S_0) = (0)$ olduğundan benzer işlemler R halkası yerine I idealini düşünerek yapılır. O halde

$$b\, t\, d(b\, y) = b\, d(by)\, t \quad , \forall y \in I \ , t \in S_0 \tag{4}$$

bulunur. $b \in S_0$ için $bd(b) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0 = b(td(by) - d(by)t)$$
$$= b(td(b)y + tbd(y) - d(b)yt - bd(y)t)$$

ve böylece

$$b(td(b)y + tbd(y) - bd(y)t) = 0 \ , \ \forall y \in I \, , t \in S_0 \tag{5}$$

elde edilir. Özel olarak $y \in S_0$ alınır ve $bd(S_0) = (0)$ olduğu kullanılırsa $0 = btbd(y) = bbd(y)t$ bulunur. (5) ifadesinden her $y, t \in S_0$ için $btd(b)y = 0$ olur. Böylece

$$b\, S_0\, d(b)\, S_0 = (0) \tag{6}$$

elde edilir. R değişmeli ve 4-boyutlu basit cebir olmadığından, I idealide değişmeli ve 4-boyutlu basit cebir değildir. Şimdi I idealini halka olarak düşünüldüğünde I halkasının simetrik elemanlarının kümesi S_0 olur. Teorem 1.28 den

$$S_0 \subset Z(I) \quad \text{veya} \quad \overline{S}_0 , \text{ I nın sıfırdan farklı bir idealini kapsar.}$$

bulunur. $S_0 \subset Z(I)$ ise bu taktirde Teorem1.28 den R halkası S_4 özelliğini sağlar. Böylece I, 4-boyutlu basit cebir olur, dolayısıyla R de 4-boyutlu basit cebirdir. Bu ise hipotezimizle çelişir. O halde $\overline{S}_0$, I halkasının sıfırdan farklı bir J idealini kapsar. Bu durumda (6) eşitliğinden $bS_0d(b)J=(0)$ olur. Önerme 1.11 den

$$bS_0\, d(b) = (0)$$

elde edilir. Özel olarak $bJd(b)=(0)$ yazılır. $b \neq 0$ ve I asal halka olduğundan

$$d(b) = 0$$

bulunur. $b^* = b \in a^* S_0 a$ olduğundan

$$d(a^* S_0 a) = (0) \tag{7}$$

elde edilir. (5) ifadesinde $d(b) = 0$ olması kullanılırsa

$$b(bd(y)t - tbd(y)) = 0 \quad , \forall y \in I,\ t \in S_0 \tag{8}$$

bulunur. $z \in I$ için. $zb \in I$ dır. (8) de y yerine zb yazılır ve (8) eşitliği ile $d(b) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= b\,(b\,d(zb)\,t\ - t\,b\,d(zb)) \\ &= b\,b\,d(z)\,b\,t\ + b\,b\,z\,d(b)\,t\ - b\,t\,b\,d(z)\,b\ - b\,t\,b\,z\,d(b) \\ &= b\,b\,d(z)\,b\,t\ - b\,t\,b\,d(z)\,b \\ &= b\,b\,d(z)\,b\,t\ - b\,b\,d(z)\,t\,b \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$b^2\, d(z)\,(tb - bt) = 0 \qquad , \forall\, z \in I,\ t \in S_0 \tag{9}$$

elde edilir. $u \in S_0$, $x \in R$ için $ux \in I$ dır. (9) da z yerine ux yazılır ve $bd(u) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= b^2\, d(ux)\,(tb - bt) \\ &= b^2\, d(u)\,x\,(tb - bt) + b^2 u\, d(x)\,(tb - bt) \\ &= b^2 u\, d(x)\,(tb - bt) \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$b^2 S_0\, d(R)\,(tb - bt) = 0$$

bulunur. Eğer **$d(R)(tb - bt) \neq 0$ ise;** Önerme 2.4.3 den $b^2 S_0 (b^2)^* = 0$ dır. $b^2 = (b^2)^*$ olduğundan $b^2 S_0 b^2 = 0$ olur ve Önerme 2.4.2 den $b^2 = 0$ bulunur. Bu durumda (8) no' lu ifadeden

$$b\,t\,b\,d(y) = 0 \quad , \forall y \in I \quad , t \in S_0$$

elde edilir. Yani,

$$bS_0 bd(I) = 0$$

dir. $A_0 = \{x \in R \mid xd(I) = (0)\}$ kümesi R halkasının bir idealidir. R asal halka ve $d(I) \neq (0)$, Önerme 2.1.32 den

$$b\, S_0\, b = 0$$

elde edilir. I bir halka ve S_0, I halkasının simetrik elemanlarının kümesi olarak alınırsa Önerme 2.4.2 den $b = 0$ dır. Bu durumda $a^* S_0 a = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $d(R)[b, t] = (0)$ olmalıdır. $0 \neq d$ olduğundan Önerme 2.1.2 den

$$[b, t] = 0 \ , \quad \forall t \in S_0$$

elde edilir. b, S_0 merkezler dolayısıyla $\overline{S}_0$ yi merkezler. $J \subset \overline{S}_0$ olduğundan b elemanı J yi merkezler. Böylece Önerme 1.15 kullanılarak $b \in Z$ olur. $bd(S_0) = (0)$, $b \in Z$, $d(S_0) \neq (0)$ ve R asal halka olduğundan $b = 0$ bulunur. Bu $b \neq 0$ seçilişiyle çelişir. O halde $a^* S_0 a = (0)$ olmalıdır.

Lee, T. K., 1985

Bu makalede R bir asal halka, char$R \neq 2$, $0 \neq d: R \to R$ bir türev ve $*: R \to R$ bir involüsyon, S, R halkasının simetrik elemanlarının kümesi ve K, R nin skew-simetrik elemanlarının kümesi olarak alınmıştır. Z ile halkanın merkezi ve C ile halkanın genişletilmiş merkezi gösterilmiştir.

Tanım: $S \subset Z$ ise ** birinci çeşit (fisrt kind)* denir.

Teorem 2.4 8 : R, S_4 özelliğini sağlamayan halka ve $d : R \to R$ bir türev olsun. Buna göre $a \in S$ ve $\forall s \in S$ için $[a, d(s)] = 0$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Önerme 2.4.9: a , nilpotent eleman ise $a = 0$ dır.

Önerme 2.4.10: $d(a) = 0$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

C; R halkasının genişletilmiş merkezini göstermek üzere;

Önerme 2.4.11: $a \notin Z$ ise bu taktirde $d(C) = 0$ dır.

Önerme 2.4.12: $\alpha \notin Z$ ise bu taktirde * birinci çeşit, $\forall \alpha \in C$ için $\alpha = \alpha^*$ dır.

Yazar bu çalışmasının bundan sonraki kısımlarında $a \notin Z$ kabul etmiştir.

Önerme 2.4.13: char$R = p > 0$, ise $a^p \notin Z$ dir.

$\delta : R \to R$ $a \in R$ ile belirlenen iç türev olmak üzere;

Önerme 2.4.14: $\forall s \in S$ için $\delta^2(s)d(a) = d(a)\delta^2(s)$.

Önerme2.4.15: $t \in S$ için $td(a) = d(a)t = 0$ ise bu taktirde $\delta^2(t) = 0$ dır.

Önerme2.4.16: $\delta^4(S) = 0$ ve $\delta^5(R) = 0$.

Teorem 2.4.17: R, S_4 özelliğini sağlamayan halka ve $0 \neq d : R \to R$ bir türev olsun. Buna göre $a \in S$ ve her $s \in S$ için $[a, d(s)] \in Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Lın , J.S. , 1986

Önerme 2.4.18:. $S^2 \subseteq Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat : Her $s \in S$ için hipotezden $sS \subseteq Z$ ve $s^2 \in S$ olduğundan $s^2S \subseteq Z$ dir. $s(sS) \subseteq s^2S \subseteq Z$ olduğundan $s(sS) \subseteq Z$ olur. Önerme 1.11 den

$s \in Z$ veya $sS = 0$

bulunur. $sS = 0$ ise Önerme 2.4.2 den $s = 0$ olur. Böylece her iki durumda $s \in Z$ elde edilir. O halde $S \subseteq Z$ dir. Teorem 1.28 den R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Önerme 2.4 .19: $K^2 \subseteq Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Sonuç 2.4.20 : $[K , K] \subseteq Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat : $[K , K] \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[k,m] \neq 0$ olacak şekilde $k, m \in K$ vardır. $kmk \in K$ olduğundan, hipotezden $[k, kmk] = k[k ,m] k = k^2 [k ,m] \in Z$ olur. $[k,m] \neq 0$ olması ve Önerme 1.11 uygulanırsa $k \in K$ için $k^2 \in Z$ bulunur. Burada $k^2 \in Z$ ve $[k, m] \in Z$ olduğu kullanılırsa $0 = [k^2, m] = 2k[k, m]$ elde edilir. char$R \neq 2$ olduğundan $k[k, m]=0$ olur. $0 \neq [k ,m] \in Z$ olması ve R asal halka olduğundan $k=0$ olur. Bu durumda yine $[k,m]=0$ olacağı için bu kabulümüzle çelişir. O halde $[K, K]=(0)$ olmalıdır. $\overline{K}^2$, R halkasının bir Lie ideali ve değişmeli alt halkasıdır. Böylece Önerme 1.24 uygulanırsa $\overline{K}^2 \subseteq Z$ elde edilir. $K^2 \subseteq \overline{K}^2 \subseteq Z$ buradan $K^2 \subseteq Z$ olur. Önerme 2.4.19 den R halkası S_4 özelliğini sağlar.

A, R nin boş kümeden farklı alt kümesi $C_R(A)=\{x \in R \mid ax=xa, \forall a \in A \}$ kümesi A nin R deki merkezleştiricidir. U, R halkasının bir Lie ideali ise ozaman $C_R(U)$, R nin alt halkası ve Lie idealidir.

Önerme 2.4.21: R halkası S_4 özelliğini sağlamazsa $C_R(S^2) = Z$ dir.

İspat: S^2 , R nin Lie ideali olduğundan $C_R(S^2)$, R nin alt halkası ve Lie idealidir. Önerme 1.24 den

$C_R(S^2) \subseteq Z$ veya $C_R(S^2)$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

$C_R(S^2) \subseteq Z$ ise; $S^2 \subseteq Z$ Önerme 2.4.18 den R halkası S_4 özelliğini sağlar. Bu hipotezimizle çelişir. O halde $C_R(S^2)$, R nin sıfırdan farklı bir I idealini kapsar. S^2, I idealini merkezler o zaman Önerme 1.15. dan S^2, R halkasını merkezler ,yani $S^2 \subseteq Z$ olur. Önerme 2.4.18 den R halkası S_4 özelliğini sağlar. Bu hipotezimizle çelişir. Dolayısıyla $S^2 \not\subset Z$ dir. S^2, R nin Lie ideali olduğundan Önerem 2.1.27 den $C_R(S^2) = Z$ dir.

Önerme 2.4.22: R halkası S_4 özelliğini sağlamazsa $C_R(K^2) = Z$ dir.

İspat : K^2 , R nin Lie ideali olduğundan $C_R(K^2)$, R nin alt halkası ve Lie idealidir. Önerme 1.24 den

$C_R(K^2) \subseteq Z$ veya $C_R(K^2)$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

$C_R(K^2) \subseteq Z$ ise; $K^2 \subseteq Z$ Önerme 2.4.19 den R halkası S_4 özelliğini sağlar. Bu hipotezimizle çelişir. O halde $C_R(K^2)$, R nin sıfırdan farklı bir I idealini kapsar. K^2, I idealini merkezler o zaman Önerme 1.15. dan K^2, R halkasını merkezler, yani $K^2 \subseteq Z$ olur. Önerme 2.4.19 den R halkası S_4 özelliğini sağlar. Bu hipotezimizle çelişir. Dolayısıyla $K^2 \not\subset Z$ dir. K^2 , R nin Lie ideali olduğundan Önerem 2.1.27 den $C_R(K^2) = Z$ dir.

Önerme 2.4.23: $0 \neq d$ ve $d(S) \subseteq Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat : $d(S) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. $s \in S$ için $s^2 \in S$ olduğundan $d(s^2) \in Z$ dir. $d(s) \in Z$ olduğu kullanılırsa, $d(s^2) = d(s)s + sd(s) = 2sd(s)$ ve $charR \neq 2$ olduğundan $s\, d(s) \in Z$ bulunur. $d(s) \in Z$ ve R asal halka olduğu için, Önerme 1.13 den

$$s \in Z \quad \text{veya} \quad d(s) = 0 \quad , \forall s \in S \qquad (1)$$

olur. Sabit bir $s \in S$ için $d(s) \neq 0$ ise $s \in Z$ dir. Öte yandan $d(S) \neq (0)$ olduğundan, $d(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t \in S$ vardır ve (1) den $t \in Z$ dir. Buna göre **d(s)=0 ise;** $d(s+t) = d(s) + d(t) = d(t) \neq 0$ dır. Dolayısıyla (1) no'lu eşitlikten $s + t \in Z$ dir. Yani, $s \in Z$ dir. Böylece (1) deki her iki durumda da $s \in Z$ bulunur. O halde $S \subseteq Z$ dir. Teorem 1.28 den R halkası S_4 özelliğini sağlar.

$d(S) = 0$ ise; her $x \in R$ için $x + x^* \in S$ olduğundan $0 = d(x + x^*) = d(x) + d(x^*)$ bulunur. Buradan

$$d(x) = -d(x^*) \ , \forall x \in R \qquad (2)$$

elde edilir. Her $x \in R$ ve $s \in S$ için $sx+x^*s \in S$ olur. $d(S)=(0)$ olması ve (2) no'lu eşitlik kullanılırsa

$$0 = d(sx + x^* s) = d(s)\, x + s\, d(x) + d(x^*)\, s + x^*\, d(s)$$
$$= sd(x) + d(x^*)s = sd(x) - d(x)s$$

olur. Böylece

$$[d(R), s] = (0) \ , \quad \forall s \in S$$

elde edilir. Teorem 2.1.10(i) uygulanarak $S \subseteq Z$ bulunur. Teorem 1.28. den R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Önerme 2.4.24: $0 \neq d$ ve $d(K) \subseteq Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat : $d(K) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. $d(a) \neq 0$ olacak biçimde bir $a \in K$ var. $k \in [K,K] \subseteq K$ alalım. Bu durumda $k=[t,m]$ olacak biçimde $t, m \in K$ elemanları vardır. Üstelik $d(t), d(m) \in Z$ olduğundan $d(k) = d([t,m]) = [d(t), m] - [d(m), t] = 0$ olur. Böylece her $k \in [K,K]$ için $d(k) = 0$ bulunur. Öte yandan $aka \in K$ olduğundan, $d(aka) \in Z$ dir. Bu eleman $d(a) \in Z$ ve $d([K, K])=(0)$ kullanılarak açılırsa

$$d(aka) = d(a)ka + akd(a) = (ak + ka)\, d(a) \in Z$$

olur. $0 \neq d(a) \in Z$ olması ve Önerme 1.13 den kullanılarak

$$ak + ka \in Z \ , \quad \forall k \in [K , K]$$

elde edilir. Buradan $ak + ka \in Z$ olduğundan $d(ak + ka) \in Z$ dir. Bu ifade $d(a) \in Z$ ve $d([K, K])=(0)$ kullanılarak açılırsa

$$d(ak + ka) = d(ak) + d(ka) = d(a)k + kd(a) = 2kd(a)$$

bulunur. Char$R \neq 2$ olduğu için $kd(a) \in Z$ elde edilir. $0 \neq d(a) \in Z$ olması ve Önerme 1.13 de kullanılarak her $k \in [K, K]$ için $k \in Z$ bulunur. Böylece $[K, K] \subseteq Z$ elde edilir. Sonuç 2.4.20 den R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Şimdi $d(K) = (0)$ olduğu durumu inceleyelim. Her $x \in R$ için $x - x^* \in K$ olduğu için $0 = d(x - x^*) = d(x) - d(x^*)$ bulunur. Yani,

$$d(x) = d(x^*) \ , \forall x \in R \qquad (3)$$

elde edilir. Her $k \in K$, $x \in R$ için, $kx + x^*k \in K$ dır. Her $k \in K$ için $d(k) = 0$ olması ve (3) eşitliği kullanılırsa,

$$0 = d(kx + x^*k) = kd(x) + d(x^*)k = kd(x) + d(x)k$$

olur ve buradan

$$kd(x) + d(x)\,k = 0\ ,\ \ \forall k \in K,\ x \in R \qquad (4)$$

elde edilir. Her $k, m \in K$, $x \in R$ için (4) kullanılarak

$$\begin{aligned}[d(x)\,,\,km] &= k[d(x)\,,\,m] + [d(x)\,,\,k]m \\ &= kd(x)m - kmd(x) + d(x)\,km - kd(x)\,m \\ &= (kd(x) + d(x)\,k)m - k(\,md(x) + d(x)m) = 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$[d(x), km] = 0 \quad ,\ \ \forall k, m \in K, x \in R$$

elde edilir. Teorem 2.1.10(i) uygulanarak $K^2 \subseteq Z$ olduğu görülür. Önerme 2.4.19 dan R halkası S_4 özelliğini sağlar olduğu elde edilir.

Önerme 2.4.25: $a \in K$ ve $b \in R$ için $aKb = (0)$ (veya $bKa = (0)$) ise bu taktirde $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : Her $k \in K$, $x \in R$ için $kx + x^*k \in K$ olduğundan $0 = a\,(\,kx + x^*k\,)b = akxb + ax^*kb$ bulunur. Bu eşitlikte x yerine ay, $y \in R$, yazılırsa

$0 = akayb + a(ay)^*kb = akayb - ay^*akb = akayb$ olur. Buradan

$$a\,ka\,y\,b = 0\ ,\quad \forall k \in K\ ,\ y \in R$$

olur ve böylece

$$aKaRb = (0)$$

elde edilir. R asal halka olduğundan

$$aKa = (0) \qquad \text{veya} \qquad b = 0$$

bulunur. Eğer $b \neq 0$ ise $a\,K\,a = 0$ olur. Önerme 1.29 dan $a = 0$ bulunur.

Önerme 2.4.26: R halkası S_4 özelliğini sağlamayan bir asal halka ve $d \neq 0$ R nin bir türevi olsun. $a \in K$ için $ad(K)=(0)$ (veya $d(K)a=(0)$) ise bu taktirde $a=0$ dır.

İspat: $d(K)=(0)$ olduğu durumda Önerme 2.4.24 den R halkası S_4 özelliğini sağlar bu ise hipotez ile çelişir. O halde $d(K) \neq (0)$ olmalıdır. Her $x \in R$ için $x - x^* \in K$ dir. Hipotezimizden $0 = a\,d(x - x^*) = a\,d(x) - ad(x^*)$ olmasından

$$a\,d(x) = ad(x^*)\ ,\ \forall\, x \in R \qquad (5)$$

elde edilir. $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Her $k \in K$ için $ak - ka \in K$ olması ve $ad(k)=0$ olması kullanılırsa.

$$0 = ad(ak - ka) = ad(a)k + aad(k) - ad(k)a - akd(a) = - akd(a)$$

bulunur. Böylece

$$aKd(a) = (0)$$

elde edilir. Önerme 2.4.25 den

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad d(a) = 0$$

olur. Dolayısıyla $d(a) = 0$ bulunur. Her $k \in K$, $x \in R$ için $kx + x^* k \in K$ ve $ad(k)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 = ad(kx + x^*k) &= ad(kx) + ad(x^*k) \\ &= ad(k)x + akd(x) + ad(x^*)k + a x^* d(k) \\ &= akd(x) + ad(x^*) k + a x^* d(k) \end{aligned}$$

olur. Bu ifadesinde (5) eşitliği kullanılırsa

$$akd(x) + ad(x) k + a x^* d(k) = 0 , \forall x \in R \text{ ve } k \in K \qquad (6)$$

elde edilir. (6) eşitliğinde x yerine ax yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= akd(ax) + ad(ax) k + a(ax)^* d(k) \\ &= akd(a)x + akad(x) + ad(a) xk + aad(x) k - ax^* ad(k) \end{aligned}$$

bulunur. $a \in K$, $d(a) = 0$ ve $ad(k) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$akad(x) + aad(x) k = 0 , \ \forall x \in R, \ k \in K \qquad (7)$$

olduğu görülür. (7) eşitliğinde x yerine xa yazılır ve $d(a) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= akad(xa) + aad(xa) k \\ &= akad(x) a + akaxd(a) + aad(x) ak + aaxd(a) k \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$akad(x) a + aad(x) ak = 0 , \ \forall x \in R , \ k \in K \qquad (8)$$

bulunur. (7) eşitliğini sağdan a ile çarpılırsa

$$akad(x) a + aad(x)ka = 0 , \ \forall x \in R, \ k \in K \qquad (9)$$

olur. (9) eşitliğinden (8) eşitliği çıkarılırsa

$$a^2d(x)[a, k] = 0, \ \forall x \in R , \ k \in K \qquad (10)$$

elde edilir. (10) eşitliğinde x yerine mx, $m \in K$, yazılır ve $ad(k)=0$ olması kullanılırsa

$$0 = a^2d(mx)\,[a,k] = a^2(d(m)\,x + md(x))\,[a,k] = a^2md(x)\,[a,k]$$

olur. Böylece

$$a^2Kd(x)[a,k] = (0)\ ,\quad \forall x \in R,\ k \in K \qquad (11)$$

bulunur. (11) eşitliğini soldan a ile çarpılırsa

$$a^3Kd(x)[a,k] = (0)\ ,\quad \forall\, x \in R,\ k \in K$$

olduğu görülür. Önerme 2.4.25 uygulanırsa

$$a^3 = 0 \quad \text{veya} \quad d(R)[a,k] = (0)\,,\quad \forall\, k \in K$$

elde edilir. **d(R)[a, k] = (0) ise ;** bu taktirde Önerme 2.1.2 den $[a,K] = (0)$ olur. Her $k_1, k_2 \in K$ için $[a, k_1k_2] = [a, k_1]k_2 + k_1[a, k_2] = 0$ olur. Buradan $[a, K^2] = (0)$ olur. Yani, $a \in C_R(K^2)$ dir. K^2, R halkasının Lie ideali ve R halkası S_4 özelliğini sağlamayan olduğundan Önerme 2.4.22 kullanılarak $C_R(K^2) = Z$ elde edilir. Böylece $a \in Z$ olur. $ad(K) = (0)$, $d(K) \neq (0)$ ve R asal halka olduğundan $a = 0$ bulunur. Bu ise $a \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $a^3 = 0$ olmalıdır. (7) eşitliğini soldan a ile çarpılırsa

$$a^2kad(x) - a^3\,d(x)k = 0,\ \forall\, x \in R\,,\ k \in K \qquad (12)$$

olur. (12) eşitliğinde $a^3 = 0$ kullanılırsa

$$a^2Kad(R) = (0)$$

elde edilir. Bu taktirde Önerme 2.1.2 den

$$a^2Ka = (0)$$

bulunur. $a \neq 0$ olması ve Önerme 2.4.25 uygulanırsa $a^2 = 0$ olur. Bu durumda (7) eşitliğinden

$$aKad(R) = (0)\quad ,\quad \forall\ k \in K$$

olur. Önerme 2.1.2 den $aKa = (0)$ bulunur. Böylece Önerme 1.29 uygulanılırsa $a = 0$ elde edilir. Bu varsayımızla çelişir. O halde $a = 0$ olur.

Önerme 2.4.27: $a \in S$ ve $b \in R$ için $aSb = (0)$ (veya $bSa = (0)$), ise bu taktirde $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : Her $s \in S$, $x \in R$ için $sx + x^*s \in S$ ve $aSb = (0)$ olması kullanılırsa

$$0 = a(sx + x^*s)b = asxb + ax^*sb$$

bulunur. Bu eşitlikte x yerine ay, $y \in R$, yazılır ve $aSb = (0)$ olduğu kullanılırsa

$$0 = asayb + a(ay)^* sb = asayb + ay^* asb = asayb$$

olur. Buradan

$$a\,S\,a\,R\,b = (0)$$

bulunur. R asal halka olduğundan

$$aS\,a = (0) \quad \text{veya} \quad b = 0 \ \text{dır.}$$

olur. Eğer $b \neq 0$ ise $aSa = (0)$ elde edilir. Böylece Önerme 2.4.2 den $a = 0$ bulunur.

Önerme 2.4.28: R halkası S_4 özelliğini sağlamayan bir asal halka ve $d \neq 0$ olsun. $a \in S$ için $ad(S) = (0)$ (veya $d(S)a = (0)$) ise bu taktirde $a = 0$ dır.

İspat : $d(S) = (0)$ olsa Önerme 2.4.5 den R halkası S_4 özelliğini sağlar olacağından bu hipotezle çelişir. O halde $d(S) \neq (0)$ olmalıdır. Her $x \in R$ için $x + x^* \in S$ dir. Hipotezden $0 = a\,d(x + x^*) = a\,d(x) + ad(x^*)$ olur. Buradan

$$a\,d(x) = -\,ad(x^*) \ , \quad \forall x \in R \tag{13}$$

bulunur. $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Her $s \in S$ için $as + sa \in S$ olması ve $ad(s) = 0$ kullanılarak, $0 = a\,d(a\,s + s\,a) = ad(a)s + a\,ad(s) + a\,d(s)a + asd(a) = asd(a)$ elde edilir. Böylece

$$a\,S\,d(a) = (0)$$

bulunur. Önerme 2.4.27 den

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad d(a) = 0$$

olur. Dolayısıyla $d(a) = 0$ elde edilir. Her $s \in S$, $x \in R$ için $sx + x^* s \in S$ ve $ad(s) = 0$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 = ad(sx + x^* s) &= ad(sx) + ad(x^* s) \\ &= ad(s)x + asd(x) + ad(x^*)s + a\,x^* d(s) \\ &= asd(x) + ad(x^*)\,s + a\,x^* d(s) \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede (13) eşitliği kullanılarak

$$asd(x) - ad(x)s + ax^* d(s) = 0, \ \forall x \in R \text{ ve } s \in S \tag{14}$$

elde edilir. (14) eşitliğinde x yerine ax yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= asd(ax) - ad(ax)s + a(ax)^* d(s) \\ &= asd(a)\,x + asad(x) - ad(a)xs - aad(x)s + ax^* ad(s) \end{aligned}$$

bulunur. $a \in S$, $d(a) = 0$ ve $ad(s) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$asad(x) - aad(x)s = 0\ , \ \forall x \in R,\ s \in S \tag{15}$$

olduğu görülür. (15) eşitliğinde x yerine xa yazılır ve $d(a) = 0$ olduğu kulanılırsa

$$0 = asad(xa) - aad(xa)s$$
$$= asad(x)a + asaxd(a) - aad(x)as - aaxd(a)s$$

olur ve böylece

$$asad(x)a - aad(x)as = 0 , \ \forall x \in R , s \in S \qquad (16)$$

bulunur. (15) eşitliği sağdan a ile çarpılırsa

$$asad(x)a - aad(x)sa = 0 , \ \forall x \in R , \ s \in S \qquad (17)$$

olur. (17) eşitliğinden (16) eşitliği çıkarılırsa

$$aad(x)as - aad(x)sa = 0$$

olduğu görülür. Yani,

$$a^2 d(x)[a,s] = 0 , \ \forall x \in R, s \in S \qquad (18)$$

elde edilir. (18) eşitliğinde x yerine mx, $m \in S$, yazılır ve her $s \in S$ $ad(s)=0$ olması kullanılırsa

$$0 = a^2 d(mx)[a,s] = a^2(d(m)x + md(x))[a,s] = a^2 md(x)[a,s]$$

olur. Böylece

$$a^2 S d(x)[a,s] = (0) , \ \forall x \in R \text{ ve } s \in S$$

bulunur. Önerme 2.4 27 uygulanarak

$$a^2 = 0 \quad \text{veya} \quad d(R)[a,s] = (0) , \ \forall s \in S$$

elde edilir. **$d(R)[a,s] = (0)$ ise;** bu taktirde Önerme 2.1.2 den $[a, S] = (0)$ olur. Her $s_1, s_2 \in S$ için $[a, s_1 s_2] = [a, s_1]s_2 + s_1[a, s_2] = 0$ olur. Buradan $[a, S^2] = (0)$ elde edilir. Yani, $a \in C_R(S^2)$ dir. S^2, R nin bir Lie ideali ve R halkası S_4 özelliğini sağlamayan olduğundan Önerme 2.4.21 den $C_R(S^2)=Z$ elde edilir. Buradan $a \in Z$ olur. $ad(S)=(0)$, $d(S) \neq (0)$ ve R asal halka olduğundan $a=0$ bulunur. Bu ise $a \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $a^2 = 0$ olmalıdır. Bu durumda (15) eşitliğinden

$$aSad(R) = (0) , \ \forall s \in S$$

bulunur. Önerme 2.1.2 den $aSa = (0)$ olur. Önerme 2.4.2 den $a = 0$ elde edilir. Bu $a \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $a = 0$ dır.

Önerme 2.4.29 : $a \in S$, $b \in R$ ve her $s \in S$ için $asb + bsa = 0$ ise bu taktirde $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Önerme 2.4.29 : $a \in S$, $b \in R$ ve her $s \in S$ için $asb + bsa = 0$ ise bu taktirde $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $a \in S$ olduğundan, her $s \in S$ için $sas \in S$ dir. O halde $asasb = -bsasa$ olur. Hipotezden $asb = -bsa$ olduğundan

$$asasb = -bsasa = asbsa$$

olur. Öte yandan

$$asasb = -asbsa$$

elde edilir. Buradan $2asbsa = 0$ bulunur. $\mathrm{Char}R \neq 2$ olduğundan

$$asbsa = 0 \quad , \quad \forall s \in S \qquad (19)$$

elde edilir. (19) eşitliğinde s yerine $s + t$, $t \in S$, yazılır ve yine (19) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (a(s+t))b\,((s+t)a) \\ &= asbsa + asbat + atbsa + atbta \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$asbta + atbsa = 0 \quad , \quad \forall s,t \in S \qquad (20)$$

elde edilir. (20) eşitliği sağdan ta ile çarpılırsa

$$asbtata + atbsata = 0 \quad , \quad \forall s,t \in S \qquad (21)$$

bulunur. (21) eşitliğinin birinci terime, her $s \in S$ için $asb = -bsa$ ve (19) eşitliği uygulanırsa $asbtata = -asatbta = 0$ olur. Böylece (21) eşitliğinden

$$atbsata = 0 \quad , \quad \forall s, t \in S$$

elde edilir. Yani,

$$atb\,S\,ata = (0) \quad , \quad \forall t \in S$$

olur. Önerme 2.4.27 den

$$atb = 0 \quad \text{veya} \quad ata = 0$$

elde edilir. Şimdi, $A = \{s \in S \mid asb = 0\}$ ve $B = \{s \in S \mid asa = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B, S nin iki toplamsal alt grubudur. Üstelik $S = A \cup B$ dir. Burada Önerme 1.25 uygulanırsa

$$S = A \quad \text{veya} \quad S = B$$

olduğu görülür. $a \neq 0$ olduğundan $S=B$ olamaz. O halde $S=A$ olmalıdır. Yani,

$$aSb = (0)$$

elde edilir. Önerme 2.4.27 den $a=0$ veya $b=0$ olur.

Chang , J. C. , 1988

Önerme 2.4.30: $0\neq\delta:R\rightarrow R$ bir (α,β)- türev ve $\delta(S)=(0)$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat: R halkası S_4 özelliğini sağlamayan bir asal halka olduğunu kabul edelim. Teorem 1.28 den $S\subset Z$ veya $\overline{S}$, R nin sıfırdan farklı idealini kapsar. R halkası S_4 özelliğini sağlamadığından Teorem 1.28 den $S\not\subset Z$ dır. O halde $\overline{S}$, R halkasının sıfırdan farklı bir I idealini kapsar. $\overline{S}$, S tarafından üretilen alt halka olmak üzere $\delta(S)=(0)$ olduğundan $\delta(\overline{S})=(0)$ olur. Böylece $0\neq I\subset\overline{S}$ buradan $\delta(I)=(0)$ elde edilir. Önerme 2.2.15 den $\delta=0$ bulunur. Bu $0\neq\delta$ olmasıyla çelişir. O halde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Önerme 2.4.31: $0\neq\delta:R\rightarrow R$ bir (α,β)- türev ve $\delta(K)=(0)$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat: R halkası S_4 özelliğini sağlamayan bir asal halka olduğunu kabul edelim. $\overline{K}^2$, K^2 tarafından üretilen alt halka olsun. $\overline{K}^2$, R nin althalkası ve Lie ideali olduğundan Önerme 1.24 den $\overline{K}^2\subset Z$ veya $\overline{K}^2$, R nin sıfırdan farklı idealini kapsar. R halkası S_4 özelliğini sağlamadığından Önerme 2.4.19 dan $K^2\not\subset Z$ olur. O halde $\overline{K}^2$, R nin sıfırdan bir I idealini kapsar. $\overline{K}^2$, K^2 tarafından üretilen alt halka ve $\delta(K)=(0)$ olduğundan $\delta(\overline{K}^2)=(0)$ dir. Böylece $(0)\neq I\subset\overline{K}^2$ olduğundan $\delta(I)=(0)$ olur. Önerme 2.2.15 den $\delta=0$ bulunur. Bu $0\neq\delta$ olmasıyla çelişir. O halde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Teorem 2.4.32: $\alpha\neq 1$, R halkasının bir otomorfizması ve her $x\in R$ için $\delta(x)=\alpha(x)-x$ olsun. $\delta(S)\subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat : Her $s\in S$ için $s^2\in S$ dir. Hipotezden dolayı $\delta(s^2)\in Z$ olur.

$$\delta(s^2)=\alpha(s)\,\delta(s)+\delta(s)\,s=\alpha(s)\,\delta(s)+s\,\delta(s)$$
$$=(\alpha(s)+s)\,\delta(s)$$

olur ve böylece $(\alpha(s)+s)\delta(s)\in Z$ bulunur. Buradan $\delta(s)\in Z$ ve Önerme 1.13 den

$$\alpha(s)+s\in Z \quad \text{veya} \quad \delta(s)=0 \;, \forall\, s\in S$$

bulunur. $A = \{ s \in S \mid \alpha(s) + s \in Z \}$ ve $B = \{ s \in S \mid \delta(s) = 0 \}$ kümeleri tanımlansın. S nin iki toplamsal alt gruplarının birleşimi olarak yazılır. Önerme 1.25 den

$$S = A \text{ veya } S = B$$

elde edilir. Eğer **S=B ise;** bu taktirde her $s \in S$ için $\delta(s)=0$ Önerme 2.4.30 dan R halkası S_4 özelliğini sağlar. Eğer **S=A ise;** her $s \in S$ için $\alpha(s)+s \in Z$ dir. Hipotezden her $s \in S$ için $\delta(s) = \alpha(s) - s \in Z$ ve Z alt halka olduğundan $\alpha(s) + s - (\alpha(s) - s) \in Z$ olur. $CharR \neq 2$ olduğundan $S \subseteq Z$ Teorem 1.28 den R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Sonuç 2.4.33: $\alpha \neq \beta$, R halkasının otomorfizmaları ve her $x \in R$ için $\delta(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ olsun. $\delta(S) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Teorem 2.4.34: $\alpha \neq 1$, R halkasının bir otomorfizması ve her $x \in R$ için $\delta(x) = \alpha(x) - x$ olsun. $\delta(K) \subseteq Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Sonuç : $\alpha \neq \beta$, R halkasının iki otomorfizması ve her $x \in R$ için $\delta(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ olsun. $\delta(K) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Önerme 2.4.35: $a \in R$ ve $aK \subseteq Z$ ise $a=0$ veya R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat: $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Her $k \in K$, $x \in R$ için $kx + x^*k \in K$ olduğundan hipotezden

$$a(kx + x^*k) \in Z \ , \forall\, k \in K,\ x \in R$$

olur. Bu ifadede x yerini ah, $h \in K$, yazılırsa

$$a(kah + (ah)^*k) = akah - aha^*k \in Z$$

olur. $ak \in Z$, $ah \in Z$ ve Z alt halka olduğundan $akah \in Z$ dir. Böylece $ah \in Z$ olmasından

$$a^*kah \in Z \ , \ \forall\, k, h \in K$$

elde edilir. $a^*kah \in Z$, $ah \in Z$ olduğundan Önerme 1.13 den

$$a^*k \in Z \text{ veya } ah = 0 \ , \forall\, k, h \in K \qquad (1)$$

Eğer **ah=0 ise** , h yerine $kx^* + xk$ elemanı yazılır ve $aK = 0$ olduğunu kullanılırsa

$$0 = a(kx^* + xk) = akx^* + axk$$

elde edilir. $a \neq 0$ ve R asal halka olduğundan, her $k \in K$ için $k = 0$ olur, buradan $K = 0$ bulunur. $R = S + K$ olduğundan $R = S$ olur.

Her $x, y \in R = S$ için R halka olduğundan $x y \in R = S$ dir. S kümesinin tanımından $xy = (xy)^* = y^* x^* = yx$ olur. Böylece R halkası değişmeli olur. Dolayısıyla $S \subseteq R \subseteq Z$ olur. Teorem 1.28 den R halkası S_4 özelliğini sağlar.O halde $ah \neq 0$ oduğundan (1) den $a^* k \in Z$ olur. $a^* k \in Z$ olduğundan her $t \in K$ için $0 = [a^* k, t] = a^* k\, t - t a^* k$ olur. Bu ifadenin her iki tarafına * dönüşümü uygulanırsa

$$0 = (a^* kt - ta^* k)^* = tka - kat = [ka, t]$$

bulunur. Dolayısıyla $I_{ka}: R \to R$, $x \to [ka, x]$, ka ile tanımlanan iç türev olsun. Bu durumda $I_{ka}(K) = 0$ olur. Önerme 2.4.24 den

R halkası S_4 özelliğini sağlar veya $ka \in Z$, $\forall k \in K$

Eğer her $k \in K$ için $ka \in Z$ ise; $ak \in Z$ ve Z alt halka olduğundan $ak - ka \in Z$ olur.

$$[a,k] \in Z, \forall k \in K \qquad (2)$$

bulunur. $I_a: R \to R$, $x \to [a, x]$, a ile tanımlanan iç türev olmak üzere (2) eşitliğinden $I_a(K) \subseteq Z$ olur. Önerme 2.4.24 den

R halkası S_4 özelliğini sağlar veya $a \in Z$

olur. Eğer **$a \in Z$ ise;** hipotezden $aK \subseteq Z$ idi. Dolayısıyla $Ka \subseteq Z$ olur. Böylece Önerme 1.13 den

$a = 0$ veya $K \subseteq Z$

olur. $a \neq 0$ kabul edildiği için $K \subseteq Z$ dir. Dolayısıyla $K^2 \subseteq Z$ olur. Önerme 2.4.19 dan R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Teorem 2.4.36: $0 \neq \delta: R \to R$ bir (α,β)-türev, her $x \in R$ için $\alpha(\delta(x)) = \delta(\alpha(x))$ ve $\beta(\delta(x)) = \delta(\beta(x))$ olsun. $\delta(K) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Aydın, N., 1991

Yazar bu çalışması boyunca, R bir asal halka, $\mathrm{char}R \neq 2$, $0 \neq d: R \to R$ bir (σ,τ)-türev, $*: R \to R$ bir involüsyon ve $S = \{ x \in R \mid x^* = x \}$ kümesi gösterilecektir.

Önerme 2.4.37 : $d(S) = (0)$ ise bu taktirde $S \subseteq Z$ dir.

İspat : Her $x \in R$ için $x + x^* \in S$ olduğundan , $0 = d(x + x^*) = d(x) + d(x^*)$ olur ve dolayısıyla

$$d(x) = - d(x^*) \ , \quad \forall x \in R \qquad (1)$$

elde edilir. (1) de x yerine sx , $s \in S$, yazılırsa

$$d(sx) = - d((sx)^*) = - d(x^* s)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$d(sx) = d(s)\sigma(x) + \tau(s)d(x) = \tau(s)d(x)$$
$$- d(x^* s) = - d(x^*)\sigma(s) - \tau(x^*)d(s) = - d(x^*)\sigma(s)$$

olduğundan (1) kullanılarak

$$\tau(s)d(x) = - d(x^*)\sigma(s) = d(x)\sigma(s)$$

elde edilir. Yani,

$$[d(x), s]_{\sigma,\tau} = 0 \quad , \forall s \in S \text{ ve } x \in R$$

bulunur. Önerme 2.2.19 dan $S \subseteq Z$ dir.

Önerme 2.4 .38 : $d(S) \subseteq C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $S \subseteq Z$ dir.

İspat : $d(S) = (0)$ ise Önerme 2.4.37 den $S \subseteq Z$ dir. O halde $d(S) \neq (0)$ olduğu durumu inceleyelim Her $s \in S$ için $s^2 \in S$ olduğundan, $d(s^2) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. $d(s^2) = d(s)\sigma(s) + \tau(s)d(s) = \tau(s)d(s) + \tau(s)d(s) = 2\tau(s)d(s)$ olur. $CharR \neq 2$ olduğundan

$$\tau(s)d(s) \in C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Burada $d(s) \in C_{\sigma,\tau}$ ve Önerme 2.2.13 den

$$d(s) = 0 \text{ veya } \tau(s) \in Z \qquad (2)$$

olur. Sabit bir $s \in S$ için $d(s) \neq 0$ ise $s \in Z$ dir. Öte yandan $d(S) \neq (0)$ olduğundan, $d(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t \in S$ vardır ve (2) eşitliğinden $t \in Z$ dir. Buna göre **d(s)=0 ise;** $d(s + t) = d(s) + d(t) = d(t) \neq 0$ dır. Dolayısıyla (2) no'lu eşitlikten $s + t \in Z$ olur. Yani, $s \in Z$ elde edilir. Böylece (2) eşitliğinde her iki durumda da $s \in Z$ bulunur. O halde $S \subseteq Z$ dir .

Önerme 2.4 .39: $a \in S$, $b \in R$ ve $\tau(a)\tau(S)b = (0)$ (veya $b\sigma(S)\sigma(a) = (0)$) ise bu taktirde $a = 0$ veya $b = 0$ dir.

İspat : τ, R nin bir otomorfizması olduğu için $\tau(c) = b$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır. O halde $(0) = \tau(a)\tau(S)b = \tau(a)\tau(S)\tau(c) = \tau(aSc)$ dır. Böylece

$aSc = (0)$

bulunur. Önerme 2.4.27 den $a = 0$ veya $c = 0$ dir. Yani,

$a = 0$ veya $b = 0$ olur.

Teorem 2.4.40 : $a \in S$ için $\tau(a)d(S) = (0)$ ise bu taktirde $a = 0$ veya $S \subseteq Z$.

İspat : Her $s \in S$ için $as + sa \in S$ olur. $\tau(a)d(S) = (0)$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a)d(as + sa) \\ &= \tau(a)d(a)\sigma(s) + \tau(a)\tau(a)d(s) + \tau(a)d(s)\sigma(a) + \tau(a)\tau(s)d(a) \\ &= \tau(a)\tau(s)d(a) \end{aligned}$$

bulunur ve böylece

$$\tau(a)\tau(S)d(a) = 0$$

elde edilir. Önerme 2.4.39 dan

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad d(a) = 0$$

olur. Dolayısıyla $d(a) = 0$ olur. Her $x \in R$ için $x + x^* \in S$ ve $\tau(a)d(S) = (0)$ olması kullanılırsa

$0 = \tau(a)d(x + x^*) = \tau(a)d(x) + \tau(a)d(x^*)$ olur ve böylece

$$\tau(a)d(x) = -\tau(a)d(x^*) \quad , \forall x \in R \qquad (3)$$

elde edilir. Her $s \in S$ ve $x \in R$ için $sx + x^*s \in S$ olur. $\tau(a)d(S) = (0)$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a)d(sx + x^*s) = \tau(a)d(sx) + \tau(a)d(x^*s) \\ &= \tau(a)d(s)\sigma(x) + \tau(a)\tau(s)d(x) + \tau(a)d(x^*)\sigma(s) + \tau(a)\tau(x^*)d(s) \\ &= \tau(a)\tau(s)d(x) + \tau(a)d(x^*)\sigma(s) + \tau(a)\tau(x^*)d(s) \end{aligned}$$

ifadesinde (3) eşitliği kullanılarak

$$\tau(a)\tau(s)d(x) - \tau(a)d(x)\sigma(s) + \tau(a)\tau(x^*)d(s) = 0, \ \forall x \in R, \ s \in S \qquad (4)$$

elde edilir. (4) eşitliğinde x yerine ax yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a)\tau(s)d(ax) - \tau(a)d(ax)\sigma(s) + \tau(a)\tau((ax)^*)d(s) \\ &= \tau(a)\tau(s)d(a)\sigma(x) + \tau(a)\tau(s)\tau(a)d(x) - \tau(a)d(a)\sigma(x)\sigma(s) \\ &\quad - \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(s) + \tau(a)\tau(x^*)\tau(a)d(s) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $a \in S$, $d(a) = 0$ ve $\tau(a)d(s) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\tau(a)\tau(s)\tau(a)d(x) - \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(s) = 0, \ \forall x \in R, \ s \in S \qquad (5)$$

olur. (5) de x yerine xa yazılır ve $d(a) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0 = \tau(a)\,\tau(s)\tau(a)d(xa) - \tau(a)\tau(a)d(xa)\sigma(s)$$
$$= \tau(a)\tau(s)\tau(a)d(x)\sigma(a) + \tau(a)\,\tau(s)\tau(a)\tau(x)d(a) - \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(a)\sigma(s)$$
$$- \tau(a)\tau(a)\tau(x)d(a)\sigma(s)$$

bulunur ve böylece

$$\tau(a)\tau(s)\tau(a)d(x)\sigma(a) - \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(a)\sigma(s) = 0,\ \forall x\in R,\ s\in S \qquad (6)$$

olduğu görülür. (5) eşitliği sağdan $\sigma(a)$ ile çarpılırsa

$$\tau(a)\tau(s)\tau(a)d(x)\sigma(a) - \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(s)\sigma(a)=0,\ \forall x\in R,\ s\in S \qquad (7)$$

bulunur. (7) eşitliğinden (6) eşitliği çıkarılırsa

$$\tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(a)\sigma(s) - \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(s)\,\sigma(a)= 0$$

olur ve böylece

$$\tau(a^2)d(x)\sigma(\,[a,s]\,) = 0\ ,\quad \forall\, x \in R,\ s\in S \qquad (8)$$

elde edilir. (8) x yerine tx, $t\in S$, yazılır ve $\tau(a)d(S)=(0)$ olması kullanılırsa

$$0 = \tau(a^2)d(tx)\sigma([a,s]) = \tau(a^2)(d(t)\sigma(x) + \tau(t)d(x))\sigma([a,s])$$
$$= \tau(a^2)\tau(t)d(x)\sigma([a,s])$$

bulunur. Buradan

$$\tau(a^2)\tau(S)d(x)\sigma([a,s]) = (0)\quad ,\quad \forall\, x\in R,\ s\in S$$

elde edilir. Önerme 2.4.39 dan

$$a^2 = 0 \quad \text{veya} \quad d(R)\sigma(\,[a,s]\,) = (0),\quad \forall s\in S$$

elde edilir. $\mathbf{a^2= 0}$ **ise** ; bu taktirde (5) eşitliğinden

$$\tau(aSa)d(R) =(0)\quad ,\quad \forall\ s\in S$$

olur. Önerme 2.2.17 den $aSa=(0)$ olur. Önerme 2.4.2 den $a = 0$ elde edilir

$\mathbf{d(R)\sigma([a,s]) = (0)}$ **ise** ; bu taktirde Önerme 2.2.17 den $[a,S]=(0)$ olur. Dolayısıyla $I_a : R \to R$, $x \to [a,x]$, a ile tanımlanan iç türev olmak üzere, $I_a(S) = (0)$ dır. Bu ise Önerme 2.4.5 $S \subseteq Z$ veya $a \in Z$ demektir.

$\mathbf{a\in Z}$ **ise;** $\tau(a)\in Z$ dir. Hipotezimize göre $\tau(a)d(S) = (0)$ ve R asal halka olduğundan $a = 0$ veya $d(S) = (0)$ elde edilir. Dolayısıyla Önerme 2.4.37 den

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad S \subseteq Z \ \text{dir.}$$

Önerme 2.4.41: $a\in S$, $b\in R$ ve her $s\in S$ için $\tau(a)\tau(s)b + b\sigma(s)\sigma(a) = 0$ ise bu taktirde $a = 0$ veya $b = 0$ dir.

İspat : $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $a \in S$ olduğunda, her $s \in S$ için $sas \in S$ dir. O halde $\tau(a)\tau(sas)b = -b\sigma(sas)\sigma(a) = -b\sigma(s)\sigma(a)\sigma(s)\sigma(a)$ olur. Hipotezimize göre $\tau(a)\tau(s)b = -b\sigma(s)\sigma(a)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tau(a)\tau(sas)b &= -b\sigma(s)\sigma(a)\sigma(s)\sigma(a)\\ &= \tau(a)\tau(s)b\sigma(s)\sigma(a) = \tau(as)b\sigma(sa)\end{aligned}$$

olur. Öte yandan,

$$\begin{aligned}\tau(a)\tau(sas)b &= \tau(a)\tau(s)\,\tau(a)\tau(s)b\\ &= -\tau(as)b\sigma(s)\,\sigma(a) = -\tau(as)b\sigma(sa)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $2\tau(a)\tau(s)b\sigma(s)\sigma(a) = 0$ olur. $\mathrm{Char}R \neq 2$ olduğundan,

$$\tau(as)b\sigma(sa) = 0 \quad , \quad \forall s \in S \qquad (9)$$

olduğu görülür. (9) eşitliğinde s yerine $s+t$, $t \in S$, yazılır ve yine (9) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}0 &= \tau(a(s+t))b\sigma((s+t)a)\\ &= \tau(as)b\sigma(sa) + \tau(as)b\sigma(ta) + \tau(at)b\sigma(sa) + \tau(at)b\sigma(ta)\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\tau(as)b\sigma(ta) + \tau(at)b\sigma(sa) = 0\,,\ \forall s,t \in S \qquad (10)$$

elde edilir. (10) eşitliğini sağdan $\sigma(ta)$ ile çarpılırsa

$$\tau(as)b\sigma(ta)\sigma(ta) + \tau(at)b\sigma(sa)\sigma(ta) = 0 \ , \quad \forall s,t \in S \qquad (11)$$

bulunur. (11) eşitliğinde birinci terimde, her $s \in S$ için $\tau(a)\tau(s)b = -b\sigma(s)\sigma(a)$ olması ve (9) eşitliği kullanılırsa

$$\tau(as)b\sigma(ta)\sigma(ta) = \tau(as)b\sigma(t)\sigma(a)\sigma(ta) = -\tau(as)\tau(at)b\sigma(ta) = 0$$

olur. Böylece (11) eşitliğinden

$$\tau(at)b\sigma(sa)\sigma(ta) = 0 \quad , \quad \forall s,t \in S$$

elde edilir. τ, R halkasının bir otomorfizması olduğundan, $\tau(c) = b$ olacak biçimde bir $c \in R$ vardır. Bu yukarıda yerine yazılırsa

$$\tau(atc)\sigma(S)\sigma(ata) = 0 \quad , \quad \forall\, t \in S$$

olur. Böylece Önerme 2.4.39 dan

$$atc = 0 \quad \text{veya} \quad ata = 0$$

elde edilir. Şimdi, $A=\{s\in S \mid asc=0\}$ ve $B=\{s\in S \mid asa=0\}$ tanımlansın, S yi iki toplamsal alt grubunun birleşimi olarak $S = A\cup B$ yazabiliriz. Burada Önerme 1.25 uygulanırsa

$$S = A \text{ veya } S = B$$

olduğu görülür. $a \neq 0$ olduğundan $S=B$ olamaz. O halde $S=A$ olmalıdır. Yani,

$$asc = 0 \quad , \forall s\in S$$

elde edilir. Dolayısıyla Önerme 2.4.27 den $a=0$ veya $b=0$ olur.

Önerme 2.4.42: $S \not\subset Z$, $a\in S$ ve $a^2 = 0$ için $[d(S), a]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise bu taktirde $a = 0$ dır.

İspat : $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Hipoteze göre her $s \in S$ için $d(s)\sigma(a) = \tau(a)d(s)$ dir. Buna göre, her $s\in S$ için $s^2\in S$ olduğundan

$$0 = [d(s^2), a]_{\sigma,\tau} = [d(s)\sigma(s) + \tau(s)d(s), a]_{\sigma,\tau}$$
$$= d(s)\sigma(s)\sigma(a) + \tau(s)d(s)\sigma(a) - \tau(a)d(s)\sigma(s) - \tau(a)\tau(s)d(s)$$

ifadesinden

$$d(s)\sigma([s,a]) + \tau([s,a])d(s) = 0 \quad , \quad \forall s\in S \qquad (12)$$

bulunur. (12) de s yerine s+a yazılırsa

$$0 = d(s+a)\sigma([s+a, a]) + \tau([s+a, a])d(s+a)$$
$$= (d(s) + d(a))\sigma([s, a]) + \tau([s, a])(d(s) + d(a))$$
$$=d(s)\sigma([s, a]) + d(a)\sigma([s, a]) + \tau([s, a])d(s) + \tau([s, a])d(a)$$

olur ve bu son eşitliğe (12) eşitliği uygulanırsa

$$d(a)\sigma([s, a]) + \tau([s, a])d(a) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik açılırsa

$$d(a)\sigma(sa)-d(a)\sigma(as)+\tau(sa)d(a)-\tau(as)d(a)=0 , \forall s\in S \qquad (13)$$

olur. Öte yandan $a\in S$ ve $a^2=0$ olduğundan $0=d(a^2)=d(a)\sigma(a)+\tau(a)d(a)=2\tau(a)d(a)$ bulunur. $\mathrm{Char}R \neq 2$ olduğundan $d(a)\sigma(a)=\tau(a)d(a)=0$ elde edilir. Buna göre (13) tekrar düzenlenirse

$$d(a)\sigma(sa) - \tau(as)d(a) = 0 \quad , \forall s\in S \qquad (14)$$

elde edilir. Her $s, t\in S$ için $sat + tas \in Z$ olduğundan

$$0 = [d(sat + tas), a]_{\sigma,\tau} =[d(sat), a]_{\sigma,\tau} + [d(tas), a]_{\sigma,\tau}$$

$$= [\ d(s)\sigma(at) + \tau(s)d(a)\sigma(t) + \tau(s)\tau(a)d(t),\ a]_{\sigma,\tau}$$

$$+ [\ d(t)\sigma(as) + \tau(t)d(a)\sigma(s) + \tau(t)\tau(a)d(s),\ a]_{\sigma,\tau}$$

$$= d(s)\sigma(ata) + \tau(s)d(a)\sigma(ta) + \tau(sa)d(t)\sigma(a) - \tau(a)d(s)\sigma(at) - \tau(as)d(a)\sigma(t)$$

$$- \tau(asa)d(t) + d(t)\sigma(asa) + \tau(t)d(a)\sigma(sa) + \tau(ta)d(s)\sigma(a) - \tau(a)d(t)\sigma(as)$$

$$-\tau(at)d(a)\sigma(s) - \tau(ata)d(s)$$

olur. Bu son eşitlik $\tau(a)$ ile soldan çarpılır ve $\tau(a^2) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0 = \tau(a)d(s)\sigma(ata) + \tau(as)d(a)\sigma(ta) + \tau(asa)d(t)\sigma(a) + \tau(a)d(t)\sigma(asa)$$

$$+ \tau(at)d(a)\sigma(sa) + \tau(ata)d(s)\sigma(a)$$

elde edilir. Burada $d(s)\sigma(a) = \tau(a)d(s)$ ve $a^2 = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\tau(as)d(a)\sigma(ta) + \tau(at)d(a)\sigma(sa) = 0 \quad , \forall\ s,t \in S \qquad (15)$$

olur. (15) eşitliğine (14) eşitliği uygulanırsa

$$\tau(a)\tau(s)\tau(at)d(a) + \tau(at)d(a)\sigma(s)\sigma(a) = 0 \quad , \forall\ s,t \in S$$

bulunur. Dolayısıyla $a \neq 0$ olması ve Önerme 2.4.41 kullanılarak

$$\tau(at)d(a) = 0 \quad , \forall\ t \in S$$

elde edilir. Bu ise

$$\tau(a)\ \tau(S)d(a) = (0)$$

demektir. Böylece $a \neq 0$ olması ve Önerme 2.4.39 dan $d(a) = 0$ bulunur. Öte yandan, her $s, t \in S$ için $[[a, s], t] \in S$ dir. Bu elemana d türevi uygulanılır ve $d(a)=0$ ile $[d(s), a]_{\sigma,\tau}=0$ olması kullanılırsa

$$d([[a, s], t]) = [d([a, s]),\ t]_{\sigma,\tau} - [d(t), [a, s]]_{\sigma,\tau}$$

$$= [[d(a), s]_{\sigma,\tau} - [d(s), a]_{\sigma,\tau},\ t]_{\sigma,\tau} - [d(t), [a, s]]_{\sigma,\tau} = -[d(t), [a, s]]_{\sigma,\tau}$$

ifadesinden

$$0 = [d([[a, s], t]),\ a]_{\sigma,\tau} = [[d(t), [a, s]]_{\sigma,\tau},\ a]_{\sigma,\tau}$$

olur. Bu son eşitliğe $[[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} = [x, [y, z]]_{\sigma,\tau} + [[x, z]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau}$ özdeşliği uygulanılırsa

$$0 = [d(t), [[a, s], a]]_{\sigma,\tau} - [[d(t), a]_{\sigma,\tau}, [a, s]]_{\sigma,\tau}$$

$$= [d(t), [[a, s], a]]_{\sigma,\tau}$$

$$= [\ d(t), (asa - sa^2 - a^2s + asa)]_{\sigma,\tau}$$

olur. $a^2=0$ olduğu için $0 = 2[\, d(t), asa]_{\sigma,\tau}$ ve char$R\neq 2$ olmasından $[d(t), asa]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Böylece

$$0 = [d(t), asa]_{\sigma,\tau} = \tau(a)[d(t), sa]_{\sigma,\tau} + [d(t), a]_{\sigma,\tau}\sigma(sa)$$

$$= \tau(a)[d(t), sa]_{\sigma,\tau} = \tau(a)(\tau(s)[d(t), a]_{\sigma,\tau} + [d(t), s]_{\sigma,\tau}\sigma(a))$$

$$= \tau(a)\, [d(t), s]_{\sigma,\tau}\sigma(a)$$

bulunur. Buradan $0 = \tau(a)d(t)\sigma(s)\sigma(a) - \tau(a)\tau(s)d(t)\sigma(a)$ ve böylece

$$\tau(as)d(t)\sigma(a) = \tau(a)d(t)\sigma(sa)\ , \quad \forall\, s,t\in S \tag{16}$$

elde edilir. Özel olarak

$$\tau(as)d(s)\sigma(a) = \tau(a)d(s)\sigma(sa)\ , \quad \forall\, s \in S \tag{17}$$

olduğu görülür. Öte yandan $a^2 = 0$ olduğundan $0 = d(s^2)\sigma(a^2)$ dir. Buna göre

$$0 = d(s^2)\sigma(a^2) = \tau(a)d(s^2)\sigma(a)$$

$$= \tau(a)(\, d(s)\sigma(s) + \tau(s)d(s))\sigma(a)$$

$$= \tau(a)d(s)\sigma(s)\sigma(a) + \tau(a)\tau(s)d(s)\sigma(a)$$

ifadesinden

$$\tau(as)d(s)\sigma(a) = -\,\tau(a)d(s)\sigma(sa)\ , \quad \forall\, s \in S \tag{18}$$

bulunur. (17) eşitliği ile (18) eşitliği toplanır ve char$R\neq 2$ olduğunu düşünürsek

$$\tau(as)d(s)\sigma(a) = 0\ , \ \forall\, s \in S \tag{19}$$

elde edilinir. (16) eşitliği soldan $\tau(at)$ ile çarpılır ve $d(s)\sigma(a)=\tau(a)d(s)$ olması kullanılırsa

$$\tau(at)\tau(as)d(t)\sigma(a) = \tau(at)\tau(a)d(t)\sigma(sa) = \tau(at)\, d(t)\sigma(asa)$$

olur. Burada (19) eşitliği kullanılırsa

$$\tau(at)\tau(as)d(t)\sigma(a) = 0 \quad , \ \forall\, s, t\in S$$

bulunur ve böylece

$$\tau(ata)\, \tau(S)\, d(t)\sigma(a) = 0 \quad , \ \forall t\in S$$

olduğu görülür. Bu ise Önerme 2.4.39 dan

$$ata = 0 \quad \text{veya} \quad d(t)\sigma(a) = 0 \quad , \ \forall t\in S$$

demektir. Bu durumda S, $S_1=\{s\in S|\ asa=0\}$ ve $S_2=\{s\in S|\ d(s)\sigma(a)=0\}$ iki toplamsal alt grubunun birleşimi olarak $S=S_1\cup S_2$ yazabiliriz. Burada Önerme 1.25 uygulanırsa

$d(s)\sigma(a)=\tau(a)d(s)$ olduğundan $\tau(a)d(s)=0$ olur. $S\not\subset Z$ olduğu için Teorem 2.4.40 den $a = 0$ olur..

Teorem 2.4.43: $S \not\subset Z$ ve $[d(S), S]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise bu taktirde S de nilpotent eleman yoktur.

İspat : $b\in S$ nilpotent ise bu taktirde $b^n = 0$, $b^{n-1} \neq 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı vardır. $b\in S$ olduğundan $a=b^{n-1}\in S$ dir. Üstelik $a^2=0$ ve hipotezden $[d(S), a]_{\sigma,\tau} = 0$ dir. Dolayısıyla Önerme 2.4.42 den $a = 0$ olur. Yani, $b^{n-1}=0$ olur. Bu ise varsayımız ile çelişir. O halde S de sıfırdan farklı nilpotent eleman yoktur.

3.BÖLÜM

(σ,τ)-TÜREVLİ ve İNVOLÜSYONLU HALKALAR

1) R karekteristiği 2 den farklı olan involüsyonlu bir asal halka, $d:R\to R$ bir türev olmak üzere

i) $d(K)\subseteq Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar [22].

ii) $a\in K$ için $ad(K)=0$ ise $a=0$ veya R halkası S_4 özelliğini sağlar [22].

olduğu daha önce ispatlandı.

2) R karekteristiği 2 den farklı olan involüsyonlu bir asal halka, $\alpha, \beta:R\to R$ iki otomomorfizma $0\neq\delta:R\to R$ bir (α,β)-türev olmak üzere

i) $\alpha\neq\beta$ ve her $x\in R$ için $\delta(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ olsun. $\delta(S)\subseteq Z$ ise R halkası S_4 özelliğini sağlar [7].

olduğu daha önce kümesel olarak gösterildi.

Bu bölümde, R, karekteristiği 2 den farklı involüsyonlu bir asal halka, $\sigma, \tau:R\to R$ iki otomorfizma, $0\neq d:R\to R$ bir (σ,τ)-türev, $K=\{x\in R \mid x^*=-x\}$ kümesi R halkasının skew-simetrik elemanlarının kümesi ve $S=\{x\in R \mid x^*=x\}$ kümesi R halkasının simetrik elemanlarının kümesi olmak üzere yukarıda verilen problemler incelenmiştir.

Aşağıdaki bağıntılar sık sık kullanılacaktır. Her $x, y, z\in R$ için

(1) $[x, yz]_{\sigma,\tau}=\tau(y)[x, z]_{\sigma,\tau}+[x, y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$

(2) $d([x, y])=[d(x), y]_{\sigma,\tau}-[d(y), x]_{\sigma,\tau}$

Uyarı :1) $[K,K]=0$ ise bu taktirde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat: Her $k, m\in K$için $[k,m]=0$ olsun. Burada $I_k:R\to R$, $k\in K$ ile belirlenen bir iç türev olmak üzere $I_k(K)=0$ olur. Önerme 2.4.24 den

R halkası S_4 özelliğini sağlar veya $k\in Z$, $\forall k\in K$

bulunur. $K\subseteq Z$ olduğundan $K^2\subseteq Z$ olur. Önerme 2.4.19 dan dolayı R halkası S_4 özelliğini sağlar. Her iki durumda da R halkası S_4 özelliğini sağlar.

2) $[S, S]=0$ ise bu taktirde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat: Her $s, t \in S$ için $[s,t] = 0$ olsun. Burada $I_s: R \to R$, $s \in S$ ile belirlenen bir iç türev olmak üzere $I_s(S) = 0$ olur. Önerme 2.4.23 den

$$S \subseteq Z \quad \text{veya} \quad s \in Z \ , \forall s \in S$$

elde edilir. Her iki durumda da $S \subseteq Z$ dir. Teorem 1.28 den R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Önerme 3.1.: $d(K) = (0)$ ise bu taktirde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat: Her $x \in R$ için $x - x^* \in K$ olduğundan, $0 = d(x - x^*) = d(x) - d(x^*)$ bulunur ve dolayısıyla

$$d(x) = d(x^*) \ , \qquad \forall x \in R \qquad (1)$$

elde edilir. Her $x \in R$, $k \in K$ için $kx + x^*k \in K$ olduğundan,

$$0 = d(kx + x^*k) = d(kx) + d(x^*k)$$
$$= d(k)\sigma(x) + \tau(k)d(x) + d(x^*)\sigma(k) + \tau(x^*)d(k)$$

olduğu görülür. $d(K)=(0)$ olması ve (1) no'lu eşitlik kullanılırsa

$$\tau(k)d(x) + d(x)\sigma(k) = 0 \ , \quad \forall x \in R \ , k \in K \qquad (2)$$

elde edilir. Her $k, t \in K$ için $[d(x), kt]_{\sigma,\tau}$ elemanı (1) no'lu özdeşlik kullanılarak açılırsa

$$\begin{aligned}[d(x), kt]_{\sigma,\tau} &= \tau(k)[d(x), t]_{\sigma,\tau} + [d(x), k]_{\sigma,\tau}\sigma(t) \\ &= \tau(k)d(x)\sigma(t) - \tau(k)\tau(t)d(x) + d(x)\sigma(k)\sigma(t) - \tau(k)d(x)\sigma(t) \\ &= (d(x)\sigma(k) + \tau(k)d(x))\sigma(t) - \tau(k)(d(x)\sigma(t) + \tau(t)d(x)) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$[d(R), kt]_{\sigma,\tau} = (0) \quad , \ \forall k, t \in K$$

bulunur. Buraya Önerme 2.2.19 uygulanırsa her $k, t \in K$ için $kt \in Z$ dir. Böylece $K^2 \subseteq Z$ olur. Önerme 2.4.19 dan R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Önerme 3.2: $d(K) \subseteq C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat: $d(K) = (0)$ ise Önerme 3.1 den R halkası S_4 özelliğini sağlar. O halde $d(K) \neq (0)$ olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda $d(a) \neq 0$ olacak biçimde bir $a \in K$ vardır. $k \in [K,K] \subseteq K$ alalım. Bu durumda $k=[t,m]$ olacak biçimde $t, m \in K$ elemanları vardır. Üstelik $d(t), d(m) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan,
$d(k) = d([t,m]) = [d(t), m]_{\sigma,\tau} - [d(m), t]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Böylece

$$d(k) = 0 , \qquad \forall k \in [K,K] \qquad (3)$$

bulunur. Öte yandan $aka \in K$ olduğundan, $d(aka) \in C_{\sigma,\tau}$ dir. Bu eleman $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ ve (3) no'lu eşitlik kullanılarak açılırsa;

$$\begin{aligned} d(aka) &= d(a)\sigma(ka) + \tau(a)d(k)\sigma(a) + \tau(ak)d(a) \\ &= d(a)\sigma(ka) + \tau(ak)d(a) \\ &= \tau(ka)d(a) + \tau(ak)d(a) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\tau(ka + ak)d(a) \in C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Böylece $0 \neq d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olması ve Önerme 2.2.13 kullanılarak

$$ka + ak \in Z \qquad , \forall k \in [K,K] \qquad (4)$$

bulunur. $ka + ak$ elemanına türev uygulanır ve (3) no'lu eşitlik ile $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} d(ka + ak) &= d(ka) + d(ak) \\ &= d(k)\sigma(a) + \tau(k)d(a) + d(a)\sigma(k) + \tau(a)d(k) \\ &= \tau(k)d(a) + d(a)\sigma(k) \\ &= \tau(k)d(a) + \tau(k)d(a) = 2\,\tau(k)d(a) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $ka + ak \in Z$ olduğundan her $t \in K$ için $[ka + ak, t] = 0$ olur ve bu eşitliğe türev uygulanır, (2) no'lu özdeşliğe göre açılır ve $d(K) \subseteq C_{\sigma,\tau}$ olması kullanılırsa

$$0 = d([ka + ak, t]) = [d(ka + ak), t]_{\sigma,\tau} - [d(t), ka + ak]_{\sigma,\tau}$$

bulunur ve buradan

$$[d(ka + ak), t]_{\sigma,\tau} = 0 \qquad , \forall k \in [K, K] \quad , \quad t \in K$$

elde edilir. $d(ka + ak) = 2\,\tau(k)\,d(a)$, $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 = [d(ka + ak), t]_{\sigma,\tau} &= d(ka + ak)\sigma(t) - \tau(t)d(ka + ak) \\ &= 2\tau(k)d(a)\sigma(t) - 2\tau(t)\tau(k)d(a) \\ &= 2\tau(k)\tau(t)d(a) - 2\tau(t)\tau(k)d(a) \\ &= 2\tau(kt - tk)d(a) \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\tau(kt - tk)d(a) \in C_{\sigma,\tau} \quad , \forall k \in [K , K] , t \in K$$

bulunur. $0 \neq d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olması ve Önerme 2.2.13 kullanılarak

$$[k,t] \in Z \quad , \forall k \in [K, K], t \in K \qquad (5)$$

elde edilir. $I_k : R \to R$, $x \to [k, x]$, $k \in K$ ile belirlenen iç türev olmak üzere, (5) no' lu eşitlikten $I_k(K) \subseteq Z$ olur. Bu durumda Önerme 2.4.24 den

R halkası S_4 özelliğini sağlar veya $k \in Z$, $\forall k \in [K, K]$

elde edilir. Eğer **her $k \in [K,K]$ için $k \in Z$ ise;** bu taktirde $[K,K] \subseteq Z$ olur. Böylece Sonuç 2.4.20 den R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Önerme 3.3: $a \in K$, $b \in R$ ve $\tau(a)\tau(K)b = (0)$ (veya $b\sigma(K)\sigma(a) = (0)$) ise bu taktirde $a = 0$ veya $b = 0$ dir.

İspat : τ, R nin bir otomorfizması olduğu için $\tau(c) = b$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır. O halde $(0) = \tau(a)\tau(K)b = \tau(a)\tau(K)\tau(c) = \tau(aKc)$ olur. Böylece

$$aKc = (0)$$

bulunur. Önerme 2.4.25 den $a=0$ veya $c=0$ olur. Yani, $a = 0$ veya $b = 0$ dir.

$b\sigma(K)\sigma(a)=(0)$ olduğu durumuna bakalım. τ, R nin bir otomorfizması olduğu için, $\sigma(c)=b$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır. O halde $(0) = b\sigma(K)\sigma(a) = \sigma(c)\sigma(K)\sigma(a) = \sigma(cKa)$ olur. Böylece

$$cKa = (0)$$

bulunur. Önerme 2.4.25 den $a = 0$ veya $c = 0$ olur. Yani, $a = 0$ veya $b = 0$ dir.

Teorem 3.4: $a \in K$ için $\tau(a)d(K) = (0)$ ise $a = 0$ veya R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat: Her $k \in K$ için $ak - ka \in K$ olduğundan, $\tau(a)d(K) = (0)$ olduğu kullanılırsa

$$0 = \tau(a)d(ak - ka) = \tau(a)d(a)\sigma(k) + \tau(a)\tau(a)d(k) - \tau(a)d(k)\sigma(a) - \tau(a)\tau(k)d(a)$$
$$= -\tau(a)\tau(k)d(a)$$

bulunur. Yani,

$$\tau(a)\tau(K)d(a) = 0$$

elde edilir. Önerme 3.3 den

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad d(a) = 0$$

olur. Dolayısıyla $d(a) = 0$ bulunur. Her $x \in R$ için $x - x^* \in K$ ve $\tau(a)d(K) = (0)$ olduğundan, $0 = \tau(a)d(x - x^*) = \tau(a)d(x) - \tau(a)d(x^*)$ olur. Buradan

$$\tau(a)d(x) = \tau(a)d(x^*) , \quad \forall x \in R \tag{6}$$

yazılır. Her $k \in K$ ve $x \in R$ için $kx + x^*k \in K$ ve $\tau(a)d(K)=(0)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a)d(kx + x^*k) = \tau(a)d(kx) + \tau(a)d(x^*k) \\ &= \tau(a)d(k)\sigma(x) + \tau(a)\tau(k)d(x) + \tau(a)d(x^*)\sigma(k) + \tau(a)\tau(x^*)d(k) \\ &= \tau(a)\tau(k)d(x) + \tau(a)d(x^*)\sigma(k) + \tau(a)\tau(x^*)d(k) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadede (6) no'lu eşitlik kullanılırsa, her $x \in R$, $k \in K$ için

$$\tau(a)\tau(k)d(x) + \tau(a)d(x)\sigma(k) + \tau(a)\tau(x^*)d(k)=0 \tag{7}$$

elde edilir. (7) no'lu eşitlikte x yerine ax yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a)\tau(k)d(ax) + \tau(a)d(ax)\sigma(k) + \tau(a)\tau((ax)^*)d(k) \\ &= \tau(a)\tau(k)d(a)\sigma(x) + \tau(a)\tau(k)\tau(a)d(x) + \tau(a)d(a)\sigma(x)\sigma(k) \\ &\qquad + \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(k) - \tau(a)\tau(x^*)\tau(a)d(k) \end{aligned}$$

bulunur. $a \in K$, $d(a) = 0$ ve $\tau(a)d(k) = 0$ olduğu kullanılırsa, son eşitlikten

$$\tau(a)\tau(k)\tau(a)d(x) + \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(k) = 0 , \quad \forall x \in R, k \in K \tag{8}$$

bulunur. (8) no'lu eşitlikte x yerine xa yazılır ve $d(a) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a)\tau(k)\tau(a)d(xa) + \tau(a)\tau(a)d(xa)\sigma(k) \\ &= \tau(a)\tau(k)\tau(a)d(x)\sigma(a) + \tau(a)\tau(k)\tau(a)\tau(x)d(a) + \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(a)\sigma(k) \\ &\qquad + \tau(a)\tau(a)\tau(x)d(a)\sigma(k) \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\tau(a)\tau(k)\tau(a)d(x)\sigma(a)+\tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(a)\sigma(k) = 0, \quad \forall x \in R, k \in K \tag{9}$$

elde edilir. (8) no'lu eşitliği sağdan $\sigma(a)$ ile çarpılırsa

$$\tau(a)\tau(k)\tau(a)d(x)\sigma(a)+\tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(k)\sigma(a)=0, \quad \forall x \in R, k \in K \tag{10}$$

olduğu görülür. (9) eşitliğinden (10) eşitliği çıkarılırsa

$$\tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(a)\sigma(k) - \tau(a)\tau(a)d(x)\sigma(k)\sigma(a)= 0$$

bulunur. Yani,

$$\tau(a^2)d(x)\sigma([a,k]) = 0 , \quad \forall x \in R, k \in K \tag{11}$$

elde edilir. (11) no'lu eşitlikte x yerine tx, $t \in K$, yazılır ve $\tau(a)d(K) = (0)$ olduğu kullanılırsa

$$0 = \tau(a^2)d(tx)\sigma([a,k]) = \tau(a^2)(d(t)\sigma(x) + \tau(t)d(x))\sigma([a,k])$$
$$= \tau(a^2)\tau(t)d(x)\sigma([a,k])$$

olur. Yani ,

$$\tau(a^2)\tau(K)d(x)\sigma([a,k]) = (0) \quad , \quad \forall x \in R,\ k \in K$$

bulunur. Bu ifade soldan $\tau(a)$ ile çarpılırsa

$$\tau(a^3)\tau(K)d(x)\sigma(\,[a,k]\,) = (0) \quad , \quad \forall x \in R,\ k \in K$$

olduğu görülür. $a^3 \in K$ olduğundan, burada Önerme 3.3 uygulanırsa

$$a^3 = 0 \quad \text{veya} \quad d(R)\sigma(\,[a,k]\,) = 0\,, \quad \forall\ k \in K$$

elde edilir. Eğer **a^3=0 ise ;** bu taktirde (8) eşitliği soldan $\tau(a)$ ile çarpılır ve a^3=0 olduğu kullanılırsa

$$\tau(a^2)\tau(k)\tau(a)d(x) + \tau(a^3)d(x)\sigma(k) = 0 \ , \ \forall x \in R,\ k \in K$$

olur ve böylece

$$\tau(a^2Ka)d(R) = (0)\,, \quad \forall k \in K$$

elde edilir. Önerme 2.2.17 den $a^2Ka = 0$ bulunur. Önerme 2.4.25 uygulanırsa

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad a^2 = 0$$

olduğu görülür. Her iki durumda $a^2 = 0$ dir. Bu taktirde (8) eşitliğinden

$$\tau(aKa)d(R) = (0)\,, \quad \forall\ k \in K$$

bulunur. Önerme 2.2.17 den aKa = (0) olur. Buraya Önerme 1.29 uygulanırsa a=0 elde edilir. Eğer **d(R)σ([a,k]) = (0) ise;** bu taktirde Önerme 2.2.17 den [a,K]=(0) bulunur. Dolayısıyla $I_a : R \to R,\ x \to [a,x]$, a ile tanımlanan iç türev olmak üzere, $I_a(K)$=(0) dır. Bu ise Önerme 2.4.24 den

a ∈ Z veya R halkası S_4 özelliğini sağlar

elde edilir. **a∈Z ise ;** $\tau(a) \in Z$ dir. Böylece $\tau(a)d(K) = (0)$, $\tau(a) \in Z$ ve R asal halka olduğundan a = 0 veya d(K) = 0 elde edilir. Dolayısıyla Önerme 3.1 den

a = 0 veya R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Teorem 3.5 : $a \in K$ için $d(K)\sigma(a) = (0)$ ise a = 0 veya R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat: Her $k \in K$ için $ak - ka \in K$ olması ve $d(K)\sigma(a) = (0)$ kullanılrsa

$$0 = d(ak - ka)\sigma(a) = d(a)\sigma(k)\sigma(a) + \tau(a)d(k)\sigma(a) - d(k)\sigma(a)\sigma(a) + \tau(k)d(a)\sigma(a)$$
(–)

$= d(a)\sigma(k)\sigma(a)$

olur. Yani,

$$d(a)\,\sigma(K)\,\sigma(a) = (0)$$

elde edilir. Önerme 3.3 den

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad d(a) = 0$$

olur. Dolayısıyla $d(a) = 0$ dır. Her $x \in R$ için $x - x^* \in K$ ve $d(K)\sigma(a)=(0)$ olduğundan,

$0 = d(x - x^*)\sigma(a) = d(x)\sigma(a) - d(x^*)\sigma(a)$ olur. Buradan

$$d(x)\sigma(a) = d(x^*)\sigma(a) \ , \forall\, x \in R \tag{12}$$

yazılır. Her $k \in K$ ve $x \in R$ için $kx^* + xk \in K$ ve $d(K)\sigma(a)=0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &= d(kx^* + xk)\sigma(a) = d(kx^*)\sigma(a) + d(xk)\sigma(a) \\ &= d(k)\sigma(x^*)\sigma(a) + \tau(k)d(x^*)\sigma(a) + d(x)\sigma(k)\sigma(a) + \tau(x)d(k)\sigma(a) \\ &= d(k)\sigma(x^*)\sigma(a) + \tau(k)d(x^*)\sigma(a) + d(x)\sigma(k)\sigma(a) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadede (12) eşitliği kullanılırsa

$$d(k)\sigma(x^*)\sigma(a)+\tau(k)d(x)\sigma(a)+d(x)\sigma(k)\sigma(a)=0 \ , \ \forall x \in R,\ k \in K \tag{13}$$

elde edilir. (13) eşiliğinde x yerine xa yazılır ve $d(a)=0$, $d(K)\sigma(a)=(0)$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d(k)\sigma((xa)^*)\sigma(a) + \tau(k)d(xa)\sigma(a) + d(xa)\sigma(k)\sigma(a) \\ &= - d(k)\sigma(ax^*)\sigma(a) + \tau(k)d(x)\sigma(a)\sigma(a) + \tau(k)\tau(x)d(a)\sigma(a) \\ &\qquad + d(x)\sigma(a)\,\sigma(k)\,\sigma(a) + \tau(x)d(a)\,\sigma(k)\,\sigma(a) \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\tau(k)d(x)\sigma(a)\sigma(a) + d(x)\sigma(a)\sigma(k)\sigma(a) = 0 \ , \quad \forall x \in R,\ k \in K \tag{14}$$

bulunur. (14) eşitliğinde x yerine ax yazılır ve $d(a)=0$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(k)d(ax)\sigma(a)\sigma(a) + d(ax)\sigma(a)\,\sigma(k)\,\sigma(a) \\ &= \tau(k)d(a)\sigma(x)\sigma(a)\sigma(a) + \tau(k)\tau(a)d(x)\sigma(a)\sigma(a) \\ &\qquad + d(a)\sigma(x)\sigma(a)\sigma(k)\sigma(a) + \tau(a)d(x)\sigma(a)\sigma(k)\sigma(a) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise

$$\tau(k)\tau(a)d(x)\sigma(a^2) + \tau(a)d(x)\sigma(aka) = 0 \ , \ \forall x \in R,\ k \in K \tag{15}$$

demektir. (14) eşitliğini sağdan $\tau(a)$ ile çarpılırsa

$$\tau(a)\tau(k)d(x)\sigma(a^2) + \tau(a)d(x)\sigma(aka) = 0 \quad , \ \forall x \in R,\ k \in K \qquad (16)$$

olur.(16) eşitliğinden (15) eşitliği çıkarılırsa

$$\tau(a)\tau(k)d(x)\sigma(a^2) - \tau(k)\tau(a)d(x)\sigma(a^2) = 0$$

bulunur. Yani,

$$\tau([a,k])d(x)\sigma(a^2) = 0 \quad , \ \forall x \in R,\ k \in K \qquad (17)$$

elde edilir. (17) eşitliğinde x yerine xt, $t \in K$, yazılır ve $d(K)\sigma(a)=(0)$ olması kullanılırsa

$$0 = \tau([a,k])d(xt)\sigma(a^2) = \tau([a,k])(d(x)\sigma(t) + \tau(x)d(t))\sigma(a^2)$$
$$= \tau([a,k])d(x)\sigma(t)\sigma(a^2)$$

olduğu görülür. Yani

$$\tau([a,k])d(x)\sigma(t)\sigma(a^2) = 0 \quad , \ \forall x \in R,\ k \in K$$

olur. Bu ifadeyi soldan $\sigma(a)$ ile çarpılırsa

$$\tau([a,k])d(x)\sigma(K)\sigma(a^3) = (0) \quad , \ \forall x \in R,\ k \in K$$

bulunur. $a^3 \in K$ olduğundan, Önerme 3.3 den

$$a^3 = 0 \quad \text{veya} \quad \tau([a,k])d(R) = (0) \ , \ \forall\ k \in K$$

elde edilir. **$a^3 = 0$ ise;** bu taktirde (14) eşitliğini $\sigma(a)$ ile sağdan çarpılır ve $a^3=0$ olduğu kullanılırsa

$$\tau(k)d(x)\sigma(a^3) + d(x)\sigma(a)\sigma(k)\sigma(a^2) = 0 \ , \ \forall x \in R,\ k \in K$$

olur ve böylece

$$d(R)\sigma(aKa^2) = (0) \ , \quad \forall\ k \in K$$

olur. Önerme 2.2.17 den $aKa^2 = (0)$ bulunur ve Önerme 2.4.25 den

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad a^2 = 0$$

elde edilir. Her iki durumda $a^2 = 0$ dir. Bu taktirde (14) den

$$d(R)\sigma(aKa) = (0)$$

bulunur. Önerme 2.2.17 $aKa = (0)$ bulunur. Buraya Önerme 1.29 uygulanırsa $a = 0$ elde edilir. Eğer **$\tau([a,k])d(R) = (0)$ ise;** bu taktirde Önerme 2.2.17 den $[a,K] = (0)$ olur.

Dolayısıyla $I_a : R \to R$, $x \to [a, x]$, a ile tanımlanan iç türev olmak üzere, $I_a(K)=(0)$ olur. Bu ise Önerme 2.4.24 den

R halkası S_4 özelliğini sağlar veya $a \in Z$

olduğu görülür. **a∈Z ise;** $\sigma(a) \in Z$ dir. $d(K)\sigma(a) = (0)$, $\sigma(a) \in Z$ ve R asal halka olduğundan a=0 veya d(K)= (0) elde edilir. Dolayısıyla Önerme 3.1 den

a = 0 veya R halkası S_4 özelliğini sağlar.

Önerme 3.6 : $a \in K$, $b \in R$ ve her $k \in K$ için $\tau(a)\tau(k)b + b\sigma(k)\sigma(a) = 0$ ise bu taktirde a = 0 veya b = 0 dir.

İspat: $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $a \in K$ olduğunda, her $k \in K$ için $kak \in K$ dir. Hipotezden $\tau(a)\tau(kak)b = -b\sigma(kak)\sigma(a) = -b\sigma(k)\sigma(a)\sigma(k)\sigma(a)$ olur. Bu ifadede $\tau(a)\tau(k)b = -b\sigma(k)\sigma(a)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tau(a)\tau(kak)b &= -b\sigma(k)\sigma(a)\sigma(k)\sigma(a)\\ &= \tau(a)\tau(k)b\sigma(k)\sigma(a)\\ &= \tau(ak)b\sigma(ka)\end{aligned}$$

olur. Öte yandan,

$$\tau(a)\tau(kak)b = \tau(a)\tau(k)\tau(a)\tau(k)b = -\tau(ak)b\sigma(k)\sigma(a) = -\tau(ak)b\sigma(ka)$$

olur. Bu durumda $2\tau(a)\tau(k)b\sigma(k)\sigma(a) = 0$ ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan

$$\tau(ak)b\sigma(ka) = 0 \ , \quad \forall k \in K \qquad (18)$$

elde edilir. (18) eşitliğinde k yerine k+t, $t \in K$, yazılır ve yine (18) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}0 &= \tau(a(k+t))b\sigma((k+t)a)\\ &= \tau(ak)b\sigma(ka) + \tau(ak)b\sigma(ta) + \tau(at)b\sigma(ka) + \tau(at)b\sigma(ta)\end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\tau(ak)b\sigma(ta) + \tau(at)b\sigma(ka) = 0 \ , \quad \forall k,t \in K \qquad (19)$$

elde edilir. (19) eşitliğini sağdan $\sigma(ta)$ ile çarpılırsa

$$\tau(ak)b\sigma(ta)\sigma(ta) + \tau(at)b\sigma(ka)\sigma(ta) = 0 \ , \quad \forall k,t \in K \qquad (20)$$

bulunur. (20) eşitliğinin birinci terimine, her $k \in K$ için $\tau(a)\tau(k)b = -b\sigma(k)\sigma(a)$ olduğu ve (18) eşitliği kullanılırsa $\tau(ak)b\sigma(ta)\sigma(ta) = \tau(ak)b\sigma(t)\sigma(a)\sigma(ta) = -\tau(ak)\tau(at)b\sigma(ta) = 0$ olur. Bu ifade (20) eşitliğinde kullanılırsa

$$\tau(at)b\sigma(ka)\sigma(ta) = 0 \ , \quad \forall k,t \in K$$

elde edilir. τ, R nin bir otomorfizma olduğundan, $\tau(c) = b$ olacak biçimde bir $c\in R$ vardır. Buna göre son ifadede

$$\tau(atc)\sigma(K)\sigma(ata) = 0 \ , \quad \forall\, t\in K$$

bulunur. Önerme 3.3 den

$$atc = 0 \quad \text{veya} \quad ata = 0$$

elde edilir. Şimdi, $A=\{k\in K|\ akc=0\}$ve $B=\{k\in K|\ aka=0\}$ kümeleri olarak tanımlanırsa, A ve B, K nın iki toplamsal alt grubu ve $K=A\cup B$ yazabiliriz. Burada Önerme 1.25 uygulanırsa

$$K = A \ \text{veya} \ K = B$$

olduğu görülür. $a \neq 0$ olduğundan K=B olamaz. O halde K=A olmalıdır. Yani,

$$akc = 0 \ , \forall\, k\in K$$

elde edilir. Dolayısıyla Önerme 2.4.25 den a=0 veya b=0 olur.

Teorem 3.7: $\tau \neq \sigma$, R halkasının iki otomorfizması ve her $x\in R$ için $d(x)= \tau(x) - \sigma(x)$ olsun. $d(S) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası S_4 özelliğini sağlar.

İspat : Her $s \in S$ için $s^2 \in S$ dir. Hipotezden dolayı $d(s^2) \in Z$ olur.

$$d(s^2) = d(s)\sigma(s) + \tau(s)d(s) = \sigma(s)d(s) + \tau(s)d(s)$$
$$= (\sigma(s) + \tau(s))d(s)$$

olur ve böylece $(\sigma(s) + \tau(s))d(s)\in Z$ bulunur. Buradan $d(s)\in Z$ ve Önerme 1.13 den $(\sigma(s) + \tau(s)) \in Z$ veya $d(s) = 0 \ , \forall\, s \in S$

bulunur. $A = \{ s\in S \mid \sigma(s) + \tau(s)\in Z \}$ ve $B=\{ s\in S \mid d(s)=0 \}$ kümeleri tanımlansın. S nin iki toplamsal alt gruplarının birleşimi olarak yazılır. Burada Önerme 1.25 den

$$S = A \qquad \text{veya} \qquad S = B$$

elde edilir. Eğer **S = B ise;** bu taktirde her $s\in S$ için $d(s)=0$ Önerme 2.4.30 den $S\subset Z$ olur. Teorem 1.28 den R halkası S_4 özelliğini sağlar. Eğer **S=A ise;** her $s\in S$ için $\sigma(s) + \tau(s)\in Z$ dir. Hipotezden her $s\in S$ için $d(s)=\tau(s) - \sigma(s) \in Z$ ve Z alt halka olduğundan, $\tau(s) - \sigma(s) - (\sigma(s) + \tau(s)) \in Z$ olur. $CharR \neq 2$ olduğundan her $s \in S$ için $\tau(s) \in Z$ elde edilir. Dolayısıyla $S \subseteq Z$ olur. Teorem 1.28 den R halkası S_4 özelliğini sağlar.

4. BÖLÜM

α-TÜREVLİ ve İNVOLÜSYONLU HALKALAR

R bir asal halka ve $0\neq d:R\to R$ bir türev olmak üzere 1986 yılında Lin, J.S. [22] de

i) $d(S)\subseteq Z$ ise $S\subseteq Z$

ii) $a\in S$ ve $ad(S)=0$ ise $a=0$ veya $S\subseteq Z$

iii) $a\in S$, $b\in R$ ve her $s\in S$ için $asb+bsa=0$ ise $a=0$veya $b=0$

olduğunu ispatladı.

R bir asal halka ve $0\neq d:R\to R$ bir (σ,τ)-türev olmak üzere 1994 yılında Aydın, N. [4] de

i) $d(S)\subseteq C_{\sigma,\tau}$ ise $S\subseteq Z$

ii) $a\in S$ ve $\tau(a)d(S)=0$ ise $a=0$ veya $S\subseteq Z$

iii) $a\in S$, $b\in R$ ve her $s\in S$ için,$\tau(a)\tau(s)b+b\sigma(s)\sigma(a)=0$ ise $a=0$veya $b=0$

iv) $S\not\subset Z$, $a\in S$ ve $a^2=0$ için $[d(S),a]_{\sigma,\tau}=0$ ise $a=0$

v) $S\not\subset Z$ ve $[d(S),S]_{\sigma,\tau}=0$ ise S de nilpotent eleman yoktur.

olduğunu ispatladı.

Bu bölümde, R karekteristiği 2 den farklı involüsyonlu bir asal halka, α: $R\to R$ otomorfizma $0\neq d:R\to R$ bir türev, $*:R\to R$ bir involüsyon olarak alınacaktır. Ayrıca R halkasının involüsyonu kendisine eşit olan elemanlarının kümesi S ile gösterilecektir.

Önerme 4.1 : $d(S)=0$ ise bu takdirde $S\subseteq Z$ dir.

İspat: Her $x\in R$ için $x+x^*\in S$ olduğundan, $0=d(x+x^*)=d(x)+d(x^*)$ olur ve böylece

$$d(x)=-d(x^*)\ ,\ \forall x\in R \tag{1}$$

elde edilr. (1) de x yerine sx, $s\in S$, yazılırsa

$$d(sx)=-d((sx)^*)=-d(x^*s)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$d(sx) = d(s)\alpha(x) + sd(x) = sd(x)$$

$$-d(x^*s) = -d(x^*)\alpha(s) - x^*d(s) = -d(x^*)\alpha(s)$$

olduğundan (1) eşitliği kullanılarak $sd(x) = -d(x^*)\alpha(s) = d(x)\alpha(s)$ elde edilir. Yani,

$$[d(x), s]_\alpha = 0 \quad , \forall s\in S,\ x\in R$$

bulunur. Önerme 2.2.22 de $\tau = 1$ alınarak uygulanırsa, $S \subseteq Z$ elde edilir.

Önerme 4.2 : $d(S) \subseteq C_\alpha$ ise bu taktirde $S \subseteq Z$ dir.

İspat: $d(S) = (0)$ ise Önerme 4.1 den $S \subseteq Z$ dir. O halde $d(S)\neq(0)$ olduğu durumu inceleyelim. Her $s\in S$ için $s^2\in S$ olduğundan, $d(s^2)\in C_\alpha$ dir. $d(s^2) = d(s)\alpha(s) + sd(s) = sd(s) + sd(s) = 2sd(s)$ bulunur. $CharR \neq 2$ olduğundan

$$sd(s) \in C_\alpha$$

elde edilir. $0 = [sd(s), x]_\alpha = sd(s)\alpha(x) - xsd(s)$ ve $d(s) \in C_\alpha$ olması kullanılarak $0 = sxd(s) - xsd(s) = [s, x]d(s)$, $\forall\ x\in R$, bulunur. Bu ifadede x yerine xy, $y\in R$, yazılır ve $[s,x]d(s) = 0$ olması kullanılırsa $0 = [s,xy]d(s) = x[s,y]d(s) + [s,x]yd(s)$ olur ve buradan

$$(0) = [s,x]Rd(s) \quad , \quad \forall\ x\in R$$

elde edilir. R asal halka olduğundan,

$$d(s) = 0 \ \text{ veya } \ s\in Z \qquad (2)$$

elde edilir. Sabit bir $s\in S$ için $d(s)\neq 0$ ise $s\in Z$ dir. Öte yandan $d(S)\neq(0)$ olduğundan, $d(t)\neq 0$ olacak şekilde bir $t\in S$ vardır ve (2) eşitliğinden $t\in Z$ dir. Buna göre **$d(s)=0$ ise;** $d(s + t)=d(s) + d(t)=d(t)\neq 0$ bulunur. Dolayısıyla (2) no'lu eşitlikten $s+ t\in Z$ olur. Yani, $s\in Z$ dir. Böylece (2) no'lu eşitlikte her iki durumda da $s\in Z$ bulunur. O halde $S \subseteq Z$ dir.

Önerme 4.3: $a\in S$, $b\in R$ ve $b\alpha(S)\alpha(a) = (0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ dir.

İspat : α, R nin bir otomorfizması olduğu için, $\alpha(c) = b$ olacak şekilde bir $c\in R$ vardır. O halde $(0) = b\alpha(S)\alpha(a) = \alpha(c)\alpha(S)\alpha(a) = \alpha(cSa)$ olur. Böylece

$$cSa=(0)$$

bulunur. Önerme 2.4.27 den $a=0$ veya $c=0$ olur. Yani, $a=0$ veya $b=0$ dir.

Teorem 4.4 : $a \in S$ için $ad(S) = (0)$ ise bu taktirde $a = 0$ veya $S \subseteq Z$ dir.

İspat: Her $s \in S$ için $as + sa \in S$ olması ve $ad(S) = (0)$ kullanılırsa

$$0 = ad(as + sa) = ad(a)\alpha(s) + a\,ad(s) + a\,d(s)\alpha(a) + asd(a) = asd(a)$$

bulunur. Yani,

$$a\,S\,d(a) = (0)$$

elde edilir. Önerme 2.4.27 den

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad d(a) = 0$$

olur. Dolayısıyla $d(a)=0$ bulunur. Her $x \in R$ için $x + x^* \in S$ olduğundan,

$0 = ad(x + x^*) = ad(x) + ad(x^*)$ olur. Buradan

$$ad(x) = -\,ad(x^*) \quad , \forall\, x \in R \tag{3}$$

elde edilir. Her $s \in S$ ve $x \in R$ için $sx + x^*s \in S$ ve $ad(S)=0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &= ad(sx + x^*s) = ad(sx) + ad(x^*s) \\ &= ad(s)\alpha(x) + asd(x) + ad(x^*)\alpha(s) + ax^*d(s) \\ &= asd(x) + ad(x^*)\alpha(s) + ax^*d(s) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadede (3) eşitliğini kullanılarak

$$asd(x) - ad(x)\alpha(s) + ax^*d(s) = 0 \quad , \forall x \in R,\ s \in S \tag{4}$$

elde edilir. (4) eşitliğinde x yerine ax yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= asd(ax) - ad(ax)\alpha(s) + a(ax)^*d(s) \\ &= asd(a)\alpha(x) + asad(x) - ad(a)\alpha(x)\alpha(s) - aad(x)\alpha(s) + ax^*ad(s) \end{aligned}$$

bulunur. $a \in S$, $d(a) = 0$ ve $a\,d(s) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$asad(x) - aad(x)\alpha(s) = 0 \quad , \forall\, x \in R,\ s \in S \tag{5}$$

elde edilir. (5) eşitliğinde x yerine xa yazılır ve $d(a) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= asad(xa) - aad(xa)\alpha(s) \\ &= asad(x)\alpha(a) + asaxd(a) - aad(x)\alpha(a)\alpha(s) - aaxd(a)\alpha(s) \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$asad(x)\alpha(a) - aad(x)\alpha(a)\alpha(s) = 0 \quad , \forall\, x \in R,\ s \in S \tag{6}$$

olduğu görülür. (5) eşitliğini sağdan $\alpha(a)$ ile çarpılırsa

$$asad(x)\alpha(a) - aad(x)\alpha(s)\alpha(a) = 0\ , \ \forall\, x\in R,\ s\in S \qquad (7)$$

elde edilir. (7) eşitliğinden (6) eşitliği çıkarılırsa

$$aad(x)\alpha(a)\alpha(s) - aad(x)\alpha(s)\alpha(a) = 0$$

bulunur. Buradan

$$a^2d(x)\alpha([a,s]) = 0\ , \ \forall x\in R,\ s\in S \qquad (8)$$

elde edilir. (8) eşitliğinde x yerine tx, $t\in S$, yazılır ve ad(S)=(0) olması kullanılırsa

$$0 = a^2d(tx)\alpha([a,s]) = a^2(d(t)\alpha(x) + td(x))\alpha([a,s]) = a^2td(x)\alpha([a,s])$$

olduğu görülür. Yani,

$$a^2\, Sd(x)\alpha([a,s]) = (0)\ , \ \forall x\in R,\ s\in S$$

elde edilir. Önerme 2.4.27 uygulanırsa

$$a^2 = 0 \ \text{ veya } \ d(R)\alpha([a,s]) = (0)\ , \ \forall\, s\in S$$

bulunur. **$a^2 = 0$ ise ;** bu taktirde (5) eşitliğinden

$$aSad(R) = (0)\ , \ \forall\, s\in S$$

olur. Önerme 2.3.2-(2) den aSa = (0) olur. Buraya Önerme 2.4.2 uygulanırsa a=0 elde edilir. Eğer **d(R)α([a,s]) = (0) ise;** bu taktirde Önerme 2.3.2-(3) [a,S]=(0) olur. Dolayısıyla $I_a : R \to R,\ x \to [a,x]$, a ile tanımlanan iç türev olmak üzere, $I_a(S)=(0)$ dır. Bu ise Önerme 2.4.5 den $S \subseteq Z$ veya $a\in Z$ demektir.

$a\in Z$ ise; ad(S)=(0) ve R asal halka olduğundan a=0 veya d(S) = (0) elde edilir. Dolayısıyla Önerme 4.1 den

$$a = 0 \ \text{ veya } \ S \subseteq Z \ \text{ dir.}$$

Önerme 4.5: $a\in S$, $b\in R$ ve her $s\in S$ için $asb + b\alpha(s)\alpha(a)=0$ ise bu taktirde a=0 veya b=0 dir.

İspat : $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $a\in S$ olduğunda, her $s\in S$ için $sas\in S$ dir. Hipotezden $asasb = - b\alpha(sas)\alpha(a) = - b\alpha(s)\alpha(a)\alpha(s)\alpha(a)$ olur. Bu ifadede

$asb = - b\alpha(s)\alpha(a)$ olduğu kullanılırsa

$$asasb = - b\alpha(s)\alpha(a)\alpha(s)\alpha(a) = asb\alpha(s)\alpha(a) = asb\alpha(sa)$$

olur. Fakat diğer taraftan ,

$$asasb = asb\alpha(s)\,\alpha(a) = - asb\alpha(sa)$$

dır. Bu durumda $2asb\alpha(s)\alpha(a) = 0$ bulunur. $CharR \neq 2$ olduğundan

$$asb\alpha(sa) = 0 \ , \quad \forall s \in S \qquad (9)$$

elde edilir. (9) eşitliğinde s yerine $s+t$, $t\in S$, yazılır ve yine (9) eşitliği kullanılırsa

$0 = (a(s + t))b\alpha((s + t)a)$

$= asb\alpha(sa) + asb\alpha(at) + atb\sigma(sa) + atb\alpha(t)\, \alpha(a)$

olur ve böylece

$$asb\alpha(ta) + atb\alpha(sa) = 0 \ , \quad \forall s, t \in S \qquad (10)$$

elde edilir. (10) eşitliğini sağdan $\alpha(ta)$ ile çarpılırsa

$$asb\alpha(ta)\alpha(ta) + atb\alpha(sa)\alpha(ta) = 0 \ , \quad \forall s,t \in S \qquad (11)$$

bulunur. (11) eşitliğinin birinci terime, her $s\in S$ için $asb = -b\alpha(s)\alpha(a)$ ve (9) eşitliği uygulanılırsa, $asb\alpha(ta)\alpha(ta) = asb\alpha(t)\alpha(a)\alpha(ta) = -asatb\alpha(ta) = 0$

olur. Böylece (11) eşitliğinde kullanılırsa

$$atb\alpha(sa)\, \alpha(ta) = 0 \ , \quad \forall s,t \in S$$

elde edilir. Buradan

$$atb\, \alpha(S)\, \alpha(ata) = 0 \ , \quad \forall t \in S$$

olur. Önerme 4.3 den

$$atb = 0 \quad \text{veya} \quad ata = 0$$

elde edilir. Şimdi, $A=\{s\in S \mid asb=0\}$ ve $B=\{s\in S \mid asa=0\}$ olarak tanımlanırsa, S yi iki toplamsal alt grubunun birleşimi olarak $S = A\cup B$ yazılabilir. Burada Önerme 1.25 uygulanırsa

$$S = A \quad \text{veya} \quad S = B$$

olduğu görülür. $a \neq 0$ olduğundan $S=B$ olamaz. O halde $S=A$ olmalıdır. Yani,

$$asb = 0 \quad , \forall\, s\in S$$

elde edilir. Dolayısıyla Önerme 2.4.27 den $a=0$ veya $b=0$ olur.

Önerme 4.6 : $S \not\subset Z$, $a\in S$ ve $a^2=0$ için $[d(S), a]_\alpha = 0$ ise $a = 0$ dır.

İspat: $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Hipoteze göre $d(s)\alpha(a) = ad(s)$ dir. Buna göre, her $s\in S$ için $s^2\in S$ olduğundan

$0 = [d(s^2), a]_\alpha = [d(s)\alpha(s) + sd(s), a]_\alpha$

$= d(s)\alpha(s)\alpha(a) + sd(s)\alpha(a) - ad(s)\alpha(s) - asd(s)$

ifadesinden

$$d(s)\alpha([s,a]) + [s,a]d(s) = 0\,, \quad \forall s\in S \qquad (12)$$

bulunur. (12) eşitliğinde s yerine s+a yazılırsa

$$\begin{aligned}0 &= d(s+a)\alpha([s+a, a]) + [s+a, a]d(s+a)\\ &= (d(s) + d(a))\alpha([s,a]) + [s,a](d(s) + d(a))\\ &= d(s)\alpha([s,a]) + d(a)\alpha([s,a]) + [s,a]d(s) + [s,a]d(a)\end{aligned}$$

olur ve bu son eşitliğe (12) eşitliği uygulanırsa

$$d(a)\alpha([s,a]) + [s,a]d(a) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik açılırsa

$$d(a)\alpha(sa) - d(a)\alpha(as) + sad(a) - asd(a) = 0 \qquad (13)$$

bulunur. Öte yandan $a\in S$ ve $a^2 = 0$ olduğundan $0=d(a^2)=d(a)\alpha(a)+ ad(a)=2ad(a)$ olur ve $charR\neq 2$ olduğundan $d(a)\alpha(a)=ad(a)=0$ elde edilir. Buna göre (13) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$d(a)\alpha(sa) - asd(a) = 0\,, \quad \forall s\in S \qquad (14)$$

elde edilir. Her $s, t\in S$ için $sat + tas\in Z$ olduğundan

$$\begin{aligned}0 &= [d(sat + tas), a]_\alpha = [d(sat), a]_\alpha + [d(tas), a]_\alpha\\ &= [d(s)\alpha(at) + sd(a)\alpha(t) + sad(t), a]_\alpha + [d(t)\alpha(as) + td(a)\alpha(s) + tad(s), a]_\alpha\\ &= d(s)\alpha(ata) + sd(a)\alpha(ta) + sad(t)\alpha(a) - ad(s)\alpha(at) - asd(a)\alpha(t) - asad(t)\\ &\quad + d(t)\alpha(asa) + td(a)\alpha(sa) + tad(s)\alpha(a) - ad(t)\alpha(as) - atd(a)\alpha(s) - atad(s)\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitliği a ile soldan çarpılır ve $a^2 = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}0 &= ad(s)\alpha(ata) + asd(a)\alpha(ta) + asad(t)\alpha(a) + ad(t)\alpha(asa)\\ &\quad + atd(a)\alpha(sa) + atad(s)\alpha(a)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $d(s)\alpha(a) = ad(s)$ olduğu kullanılırsa

$$asd(a)\alpha(ta) + atd(a)\alpha(sa) = 0 \quad , \forall\, s,t\in S \qquad (15)$$

olur. (15) eşitliğine (14) uygulanırsa

$$asatd(a) + atd(a)\alpha(s)\alpha(a) = 0 \quad , \forall\, s,t\in S$$

bulunur. Dolayısıyla Önerme 4.5 den

$$a = 0 \text{ veya } atd(a) = 0 \quad , \forall\, t\in S$$

olur. Dolayısıyla her $t\in S$ için $atd(a) = 0$ elde edilir. Bu ise

$$aSd(a) = (0)$$

demektir. Böylece Önerme 2.4.27 den $d(a) = 0$ bulunur. Diğer taraftan, her s, $t \in S$ için $[[a,s], t] \in S$ dir. Bu elemana d türevi uygulanır, $d(a)=0$ ve $[d(s), a]_\alpha=0$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} d([[a,s], t]) &= [d([a,s]), t]_\alpha - [d(t), [a, s]]_\alpha \\ &= [\,[d(a), s]_\alpha - [d(s), a]_\alpha, t]_\alpha - [d(t), [a, s]]_\alpha \\ &= -[d(t), [a, s]]_\alpha \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $0 = [d([[a, s], t]), a]_\alpha = [[d(t), [a, s]]_\alpha, a]_\alpha$ elde edilir. Bu son eşitliğe $[[x, y]_\alpha, z]_\alpha = [x, [y, z]]_\alpha + [[x, z]_\alpha, y]_\alpha$ özdeşliği uygulanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [d(t), [[a, s], a]]_\alpha - [[d(t), a]_\alpha, [a, s]]_\alpha \\ &= [d(t), [[a, s], a]]_\alpha \\ &= [d(t), (asa - sa^2 - a^2s + asa)]_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. $a^2= 0$ olduğu için $0=2[d(t), asa]_\alpha$ olur. $\mathrm{Char}R\neq 2$ olduğundan $[d(t), asa]_\alpha=0$ elde edilir. Bu ifade açılır ve $[d(S), a]_\alpha= (0)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 = [d(t), asa]_\alpha &= a[d(t), sa]_\alpha + [d(t), a]_\alpha\sigma(sa) \\ &= a[d(t), sa]_\alpha \\ &= ad(t)\alpha(sa) - asad(t) \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$asd(t)\alpha(a) = ad(t)\alpha(sa) \quad , \quad \forall s,t\in S \tag{16}$$

elde edilir. Özel olarak

$$asd(s)\alpha(a) = ad(s)\alpha(sa) \quad , \quad \forall s\in S \tag{17}$$

dir. Öte yandan $a^2 = 0$ olduğundan $0 = d(s^2)\alpha(a^2)$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} 0 = d(s^2)\alpha(a^2) &= ad(s^2)\alpha(a) \\ &= a(d(s)\alpha(s) + sd(s))\alpha(a) \\ &= ad(s)\alpha(s)\alpha(a) + asd(s)\alpha(a) \end{aligned}$$

ifadesinden

$$asd(s)\alpha(a) = - ad(s)\alpha(sa) \quad , \quad \forall s\in S \tag{18}$$

bulunur. (17) eşitliği ile (18) eşitliği toplanır ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğu uygulanırsa

$$asd(s)\alpha(a) = 0 \quad , \quad \forall s\in S \tag{19}$$

elde edilinir. (16) eşitliğini soldan at ile çarpılır ve $[d(s), a]_\alpha=0$ olması kullanılırsa, $atasd(t)\alpha(a) = atad(t)\alpha(sa) = atd(t)\alpha(asa)$ olur. Burada (19) eşitliği kullanılırsa

$$atasd(t)\alpha(a) = 0 \quad , \quad \forall\, s,t \in S$$

bulunur. Yani,

$$ataSd(t)\alpha(a) = 0 \quad , \quad \forall t \in S$$

olur. Bu ise Önerme 2.4.27 den

$$ata = 0 \quad \text{veya} \quad d(t)\alpha(a) = 0 \quad , \quad \forall t \in S$$

demektir. Bu durumda S , $S_1 = \{s \in S \mid asa = 0\}$ ve $S_2 = \{s \in S \mid d(s)\alpha(a) = 0\}$ toplamsal alt gruplarının birleşimi olarak $S = S_1 \cup S_2$ yazabiliriz. Burada Önerme 1.25 uygulanırsa

$$S = S_1 \quad \text{veya} \quad S = S_2$$

olduğu görülür. Varsayımıza göre $a \neq 0$ olduğundan $S \neq S_1$ dir. O halde $S = S_2$ olmalıdır. Yani, her $s \in S$ için $d(s)\alpha(a)=0$ olur. Böylece her $s \in S$ için $d(s)\alpha(a)=ad(s)$ olduğundan, $ad(s) = 0$ olur. $S \not\subset Z$ olduğu için Teorem 4.4 den $a = 0$ elde edilir. Bu $a\neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $a=0$ dır.

Teorem 4.7: $S \not\subset Z$ ve $[d(S), S]_\alpha = 0$ ise bu taktirde S de nilpotent eleman yoktur.

İspat : $b \in S$ nilpotent ise bu taktirde $b^n = 0$, $b^{n-1} \neq 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı vardır. $b \in S$ olduğundan $a = b^{n-1} \in S$ dir. Üstelik $a^2=0$ ve hipotezden $[d(S), a]_\alpha = 0$ dir. Dolayısıyla Önerme 4.6 dan $a=0$ dır. Yani, $b^{n-1}=0$ olur. Bu ise varsayımız ile çelişir. O halde S de sıfırdan farklı nilpotent eleman yoktur .

5. BÖLÜM

İNVOLÜSYONLU ASAL HALKALARDA (σ,τ)-TÜREVİ ÜZERİNE BİR TEOREM

R karekteristiği 2 'den farklı değişmeli olmayan bir asal halka, $*:R\to R$ bir involüsyon, $0\neq d:R\to R$ bir türev olsun. R halkasının involüsyonu kendisine eşit olan elemanlarının kümesi S ile gösterilmek üzere $L=\{x\in I \mid xd(S\cap I)=0\}$ kümesi tanımlansın. Bu gösterimler altında Herstein, I.N. [10], I, R halkasının $I=I^*$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere S merkez tarafindan kapsanmıyor ve $L\neq(0)$ ise L kümesinin a elemanı için $a^*(S\cap I)a=0$ eşitliğinin sağlandığını ispatlamıştır.

Bu bölümde yukarıdaki ifadede R halkasının d türevi yerine, (σ,τ) - türev alınarak bir genelleştirme yapılmıştır.

Teorem: R değişmeli olmayan involüsyonlu bir asal halka, $\sigma,\ \tau:R\to R$ iki otomorfizma, ve $0\neq d:R\to R$ bir (σ,τ)- türev, $(0)\neq I=I^*$, R halkasının bir ideali ve $L=\{x\in I \mid \tau(x)d(S\cap I)=0\}$ olsun. Buna göre $S\not\subset Z$ ve $L\neq(0)$ ise verilen $a\in L$ için $a^*(S\cap I)a=(0)$ olur..

İspat : $S_0=S\cap I$ olsun. Her $a\in L$ için $\tau(a)d(S_0)=(0)$ dır. Her $x\in I$ için $x^*\in I^*=I$ olduğundan $x+x^*\in I$ dır. Ayrıca $x+x^*\in S$ olmasından $x+x^*\in S\cap I=S_0$ bulunur. Böylece $a\in L$ için $\tau(a)\,d(x+x^*)=0$ olur. Buradan

$$\tau(a)d(x)=-\tau(a)d(x^*)\quad,\ \forall a\in L,\ x\in I \qquad (1)$$

elde edilir. $L\neq(0)$ olduğundan L de her $t\in S_0$ için $\tau(a)d(t)=0$ olacak şekilde sıfirdan farklı bir a elemanı vardır. (1) eşitliğinde x yerine tx, $t\in S_0$, yazılır ve $\tau(a)d(t)=0$ olması ile (1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}0&=\tau(a)d(tx)+\tau(a)d((tx)^*)\\&=\tau(a)d(t)\sigma(x)+\tau(a)\tau(t)d(x)+\tau(a)d(x^*)\sigma(t)+\tau(a)\tau(x^*)d(t)\\&=\tau(a)\tau(t)d(x)-\tau(a)d(x)\sigma(t)+\tau(a)\tau(x^*)d(t)\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\tau(a)\tau(t)d(x) = \tau(a)d(x)\sigma(t) - \tau(a)\tau(x^*)d(t) \quad , \forall x \in I,\ t \in S_0 \qquad (2)$$

elde edilir. (2) eşitliğinde x yerine a^*y, $y \in I$, yazılır ve $\tau(a)d(t)= 0$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a)\tau(t)d(a^*y) - \tau(a)d(a^*y)\sigma(t) + \tau(a)\tau((a^*y)^*)d(t) \\ &= \tau(a)\tau(t)d(a^*y) - \tau(a)d(a^*y)\sigma(t) + \tau(a)\tau(y^*)\tau(a)d(t) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\tau(a)\tau(t)d(a^*y) = \tau(a)d(a^*y)\sigma(t) \quad , \forall x \in I,\ t \in S_0 \qquad (3)$$

elde edilir. $a^*(S \cap I)a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda a^*S_0a da sıfırdan farklı olacak şekilde bir b elemanı vardır ve $x \in S_0$ için $b=a^*xa$ yazılır. Buradan

$$b^* = (a^* x\, a)^* = a^* x\, a = b$$

olur. $b^* = b$ olduğundan $b \in S$ ve öte yandan $b \in I$ olduğundan $b \in S \cap I = S_0$ olur. $\tau(a)d(S_0) = (0)$ olması kullanılarak $\tau(b)d(S_0) = \tau(a^*xa)d(S_0) = (0)$ elde edilir. Buradan $b \in L$ olur. $b \in S_0$ ve $b \in L$ olmasından $b \in S_0 \cap L$ bulunur. Böylece

$$a^* S_0\, a \subseteq S_0 \cap L$$

bulunur. Bu durumda

$$0 \neq b = b^* \in a^*S_0a \subseteq S_0 \cap L$$

olur. $b \in I$ ve $\tau(b)d(S_0) = (0)$ benzer işlemler R halkası yerine I ideali için düşünerek yapılır. Bu durumda $x \in I$ için $x + x^* \in S \cap I = S_0$ olduğundan, $b \in L$ için

$$\tau(b)d(x) = -\tau(b)d(x^*) \quad , \forall b \in L,\ x \in I \qquad (4)$$

elde edilir. (4) de x yerine tx, $t \in S_0$, yazılır ve $\tau(b)d(t) = 0$ olması ile (4) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(b)d(tx) + \tau(b)d((tx)^*) \\ &= \tau(b)d(t)\sigma(x) + \tau(b)\tau(t)d(x) + \tau(b)d(x^*)\sigma(t) + \tau(b)\tau(x^*)d(t) \\ &= \tau(b)\tau(t)d(x) - \tau(b)d(x)\sigma(t) + \tau(b)\tau(x^*)d(t) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\tau(b)\tau(t)d(x) = \tau(b)d(x)\sigma(t) - \tau(b)\tau(x^*)d(t) \quad , \forall x \in I,\ t \in S_0 \qquad (5)$$

$$= \tau(b)\tau(t)d(b^*y) - \tau(b)d(b^*y)\sigma(t) + \tau(b)\tau(y^*)\tau(b)d(t)$$

elde edilir. Böylece

$$\tau(b)\tau(t)d(b^*y) = \tau(b)d(b^*y)\sigma(t) \quad , \quad \forall y \in I,\ t \in S_0$$

bulunur. $b^* = b \in a^* S_0 a$ olduğundan,

$$\tau(b)\tau(t)d(by) = \tau(b)d(by)\sigma(t) \quad , \quad \forall\, y \in I\ ,\ t \in S_0 \qquad (6)$$

olduğu görülür. $b \in S_0$ için $\tau(b)d(b) = 0$ olması kullanılarak (6) eşitliği açılırsa

$$0 = \tau(b)(\tau(t)d(by) - d(by)\sigma(t))$$

$$= \tau(b)(\tau(t)d(b)\sigma(y) + \tau(t)\tau(b)d(y) - d(b)\sigma(y\,t) - \tau(b)d(y)\sigma(t))$$

olur ve buradan

$$\tau(b)(\tau(b)d(y)\sigma(t)-\tau(t)d(b)\sigma(y)-\tau(t)\tau(b)d(y))=0,\ \forall y \in I,\ t \in S_0 \qquad (7)$$

elde edilir. Özel olarak $y \in S_0$ alınır ve $\tau(b)d(S_0)=(0)$ olduğu kullanılırsa $0=\tau(b)\tau(t)\tau(b)d(y) = \tau(b)\tau(b)d(y)\sigma(t)$ bulunur. (7) eşitliğinde her $y,\ t \in S_0$ için $\tau(b)\tau(t)d(b)\sigma(y) = 0$ olur. Böylece

$$\tau(b)\tau(S_0)d(b)\sigma(S_0) = 0$$

olduğu görülür. R değişmeli ve 4-boyutlu basit cebir olmadığından, I idealide değişmeli ve 4-boyutlu basit cebir değildir. Şimdi I ideali halka olarak düşünüldüğünde, I halkasının simetrik elemanlarının kümesi S_0 olur. Teorem1.28 den

$$S_0 \subset Z(I) \quad \text{veya} \quad \overline{S}_0,\ I \text{ nın sıfırdan farklı bir idealini kapsar}$$

bulunur. $S_0 \subset Z(I)$ ise bu taktirde, Teorem1.28 den I halkası S_4 özelliğini sağlar. Böylece I, 4-boyutlu basit cebir olur, dolayısıyla R de 4-boyutlu basit cebirdir. Bu ise hipotezimizle çelişir. O halde $\overline{S}_0$, I halkasının sıfırdan farklı bir J idealini kapsar. Bu durumda yukarıdaki eşitlikten

$$\tau(b)\tau(S_0)d(b)\sigma(J) = (0)$$

elde edilir. Önerme 1.11 den $\tau(b)\tau(S_0)d(b) = (0)$ bulunur. Özel olarak

$$bJ\sigma^{-1}(d(b)) = (0)$$

yazılır. $b \neq 0$ ve I asal halka olduğundan

$$d(b) = 0$$

bulunur. $b^* = b \in a^* S_0\, a$ olduğundan yazılır. $b \neq 0$ ve I asal halka olduğundan

$$d(b) = 0$$

bulunur. $b^* = b \in a^*S_0 a$ olduğundan

$$d(a^*S_0a) = 0$$

elde edilir. (7) ifadesinde $d(b) = 0$ olması kullanılırsa

$$\tau(b)(\tau(b)d(y)\sigma(t) - \tau(t)\tau(b)d(y)) = 0 \quad , \forall y \in I,\ t \in S_0 \qquad (8)$$

bulunur. $z \in I$ için $zb \in I$ dır. (8) eşitliğinde y yerine zb yazılır ve (8) eşitliği ile $d(b) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(b)(\tau(b)d(zb)\sigma(t) - \tau(t)\tau(b)d(zb)) \\ &= \tau(b)\tau(b)(d(z)\sigma(b) + \tau(z)d(b))\sigma(t) - \tau(b)\tau(t)\tau(b)(d(z)\sigma(b) + \tau(z)d(b)) \\ &= \tau(b)\tau(b)d(z)\sigma(b)\sigma(t) - \tau(b)\tau(t)\tau(b)d(z)\sigma(b) \\ &= \tau(b)\tau(b)d(z)\sigma(b)\sigma(t) - \tau(b)\tau(b)d(z)\sigma(t)\sigma(b) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\tau(b^2)d(z)\sigma(tb - bt) = 0 \quad , \ \forall z \in I,\ t \in S_0 \qquad (9)$$

elde edilir. $u \in S_0$, $x \in R$ için $ux \in I$ dır. (9) eşitliğinde z yerine ux yazılır ve $\tau(b)d(u) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(b^2)d(ux)\sigma(tb - bt) \\ &= \tau(b^2)(d(u)\sigma(x) + \tau(u)d(x))\sigma(tb - bt) \\ &= \tau(b^2)\tau(u)d(x)\sigma(tb - bt) \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\sigma^{-1}(\tau(b^2))\sigma^{-1}(\tau(S_0))\, \sigma^{-1}(d(x))[t, b] = (0) \ , \quad \forall x \in R,\ \ t \in S_0 \qquad (10)$$

bulunur. $t \in I$ olduğundan, her $x \in R$ için $\sigma^{-1}(d(x))[t, b] \in I$ olur. $\sigma^{-1}\tau = \varphi$ dersek

$$\varphi(b^2)\varphi(S_0))\sigma^{-1}(d(x))[t, b] = (0)$$

olur. $b^2 \in S_0$ olduğundan Önerme 2.4.39 dan

$$b^2 = 0 \quad \text{veya} \quad d(R)\sigma([t, b]) = (0)$$

elde edilir. Eğer $\mathbf{b^2 = 0}$ **ise ;** bu taktirde (8) eşitliğinden

$$\tau(bS_0b)d(I) = (0)$$

bulunur. $d \neq 0$ olduğu için $d(I) \neq (0)$ dır. Böylece yukarıdaki eşitliğe Önerme 2.2.17 uygulanırsa

$$bS_0b = (0)$$

elde edilir. I bir halka ve S_0, I halkasının simetrik elemanlarının kümesi olarak alınırsa. Önerme 2.4.2 den b=0 dır. Bu durumda $a^*S_0a=(0)$ olur. Bu $a^*S_0a\neq(0)$ olmasıyla çelişiir. O halde $d(R)\sigma([t, b]) = (0)$ olmalıdır. $d \neq 0$ olduğundan Önerme 2.2.17 den

$$[b, t] = 0 \quad , \forall\ t\in S_0$$

elde edilir. b, S_0 merkezler, dolayısıyla $\overline{S}_0$ yi merkezler. $J \subseteq \overline{S}_0$ olduğundan b elemanı J yi merkezler. Böylece Önerme 1.15 kullanılarak $b\in Z$ olur. $\tau(b)d(S_0)=(0)$, $b\in Z$ ve R asal halka olduğundan

$$b=0 \quad \text{veya} \quad d(S_0) =(0)$$

elde edilir. $b\neq 0$ olduğundan $d(S_0) =(0)$ olur. Önerme 2.4.37 den $S_0 \subseteq Z$ olur. Teorem 1.28 den I halkası S_4 özelliğini sağlar. Böylece I, 4-boyutlu basit cebir olur, dolayısıyla R de 4-boyutlu basit cebirdir. Bu ise hipotezimizle çelişir. O halde $a^*S_0a = (0)$ olmalıdır.

ÖZGEÇMİŞ

Selma GÜLYAZ 1970 yılında Sivas'da doğdu. İlk, orta ve liseyi Sivas' da bitirdi. 1989 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandı ve 1993 yılında mezun oldu. 1994 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümününde araştırma görevlisi olarak işe başladı. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen burada çalışmaktadır.

KAYNAKLAR

1. ARGAÇ, N. KAYA, A. and KISIR. A. : (σ,τ)-Derivations in Prime Rings. Math. J. Okayama Univ. 29 (1987), 173-177
2. AWTAR, R. : Lie and Jordan Structure in Prime Rings with Derivations. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 41, No: 1, (1973), 67-74
3. AWTAR, R. : Lie Structure in Prime Rings with Derivations. Publ. Math. Debrecen 31, (1984), 209-215
4. AYDIN, N. : (σ,τ)-Derivations in Prime Rings with İnvolution. Doğa- Tr. J. of Math. 18(1994), 249 -254(IV. National Math. Symposium, Antakya, 1991)
5. AYDIN, N. ve KAYA, K. : Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ) - Derivations. Doğa- Tr. J. of Math. 16(1992), 169-176
6. BERGEN, J. , HERSTEIN, I. N. and KERR, J.W. :Lie Ideals and Derivation of Prime Rings. J. of Algebra 71, 259-267, (1981)
7. CHANG, J. C. : On (α,β)-Derivations of Prime Rings with Involution. Chinese J. Math. 16(2)(1988), 129-135
8. HERSTEIN, I. N. : A Note on Derivations. Canad Math. Bull. Vol. 21(3), (1978), 369-370
9. HERSTEIN, I. N. : A Note on Derivations II Canad Math. Bull. Vol. 21(4), (1979), 509-511
10. HERSTEIN, I.N. : A Theorem on Derivations of Prime Ring with Involution Can. J. Math. , Vol. XXXIV, No. 2 (1982), pp. 356-369
11. HERSTEIN, I.N. : On the Lie Structure of an Associative Rings. Journal of Algebra 14, 561-571, (1970)
12. HERSTEIN. , I. N.: Rings with Involution. University of Chicago Press, Chicago, 1976

13.HERSTEIN., I. N.: Topics in Ring Theory. University of Chicago Press, Chicago, 1969

14.HİRONA, Y. and TOMİNAGA, H. :Some Commutativity Theorems for Prime Rings with Derivations and Differentially Semiprime Rings. Math. J. Okayama Univ. 26(1984), 101-108

15.HONGAN, M. :Lie Ideals and Semi-derivations of Prime Rings. Math. J. Okoyama Univ. 27, (1985), 13-17

16.KANDAMAR, H. ve KAYA, K :Lie ideals and (σ-τ)-Derivation in Prime Rings. Hacettepe Bulletin of Natural Sciens and Engineering (1992), Vol 21, 29-33

17.KAYA, K. : On (σ,τ)-Derivations of Prime Rings. Doğa- TU Mat. D. C. 12(2), (1988), 42-45

18.KAYA, K. : On Prime Rings with α-Derivation. Doğa- TU Mat. D. C. 12(2), (1988), 46-51

19.LEE, P. H and LEE, T. K. : On Derivations of Prime Rings. Chinese J. Math. Vol.9(2), (1981), 107-110

20.LEE, P. H. and LEE, T. K. : Lie Ideals of Prime Rings with Derivations. Bull. Institute of Math. Acedemia Sinica 11, (1983), pp. 75-79

21.LEE, T. K. : On Derivations of Prime Rings with Involution (I). Chinese J. Math. Vol.13(3), (1985), 179-186

22.LIN, J. S. : On Derivations of Prime Rings with Involution. Chinese J. Math. Vol.14(1), (1986), 37-51

23.POSNER, E.C. : Derivations in Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8(1957), 1093-1100