47695

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

TÜREVLİ HALKALARDA
LİE İDEALLER

Öznur GÜLTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
1996

T.C.

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

TÜREVLİ HALKALARDA LİE İDEALLER

Öznur GÜLTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1996

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ' NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Ana Bilim Dalı' nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Kazım KAYA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Neşet AYDIN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Muharrem SOYTÜRK

Üye :...

Üye :...

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

09/07/1996

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Fuat ÖNDER

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan " Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu " adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Türevli Halkalarda Lie İdealler

Öznur GÜLTEKİN
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Neşet AYDIN

Karakteristiği 2 den farklı olan türevli asal halkalarda bazı komütatiflik koşullarını inceleyen makalelerin birarada özetlenmesi ve (σ,τ)-Lie idealler için verilen bazı sonuçların σ-Lie idealler için uygulanmasını amaçlayan bu çalışmada aşağıdaki yol izlenmiştir.

Halkalarla ilgili bazı temel bilgiler I. Bölümde verilmiştir.

II. Bölümde, türevli asal halkalarda komütatiflik koşullarını inceleyen bazı makaleler özetlenmiştir.

σ ve τ karakteristiği 2 den farklı bir asal halkanın iki otomorfizması olmak üzere (σ,τ)-Lie ideal için yapılan bazı sonuçların σ-Lie ideali için uyarlanması III. Bölümde yer almaktadır.

IV. Bölümde ise d, karakteristiği 2 den farklı bir R asal halkasının $\sigma d = d\sigma$ koşulunu sağlayan türevi, $\sigma:R \to R$ otomorfizma ve U, R nin bir σ-Lie ideali olmak üzere

i) $ad(U) = (0)$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z$

ii) $d^2(U) = (0)$ ise $U \subset Z$

olduğu gösterilmiştir.

SUMMARY

Msc Thesis

LIE IDEALS WITH DERIVATION RINGS

Öznur Gültekin
Cumhuriyet University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Yard. Doç. Dr. Neşet Aydın

The plan followed in this work, which aims at the study of some papers which investigated commutativity conditions in a prime rings with derivation of characteristic not 2 have been summarized and some results that given for (σ,τ)-Lie ideals have been applied to σ-Lie ideals.

Some general information about rings have been given in chapter I.

In chapter II. , some papers that search commutativity conditions on Lie ideals of rings with derivation have been summarized.

Under the conditions R is a prime ring of characteristic not 2, $\sigma:R\rightarrow R$ is an automorphism, some results that make for (σ,τ)-Lie ideals of R, applied to σ-Lie ideals of R in chapter III.

In chapter IV, Let R be a prime ring of characteristic not 2, $0\neq d:R\rightarrow R$ a derivation and $\sigma d = d\sigma$. The following conditions

i) If $ad(U) = 0$ then $a = 0$ or $U \subset Z$

ii) If $d^2(U) = 0$ then $U \subset Z$

have been investigated for σ-Lie ideals of R.

Key Words: Derivation, Lie ideal, (σ,τ)-Lie ideal.

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Neşet AYDIN' a ve ayrıca değerli hocam Doç. Dr. Hatice KANDAMAR' a içten teşekkürlerimi sunarım.

GİRİŞ

R bir halka, $d : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

koşulunu sağlıyor ise d dönüşümüne R halkasının bir ***türevi*** denir.

x ve y R halkasının iki elemanı olmak üzere $xy - yx$ elemanı ***komütatör çarpımı*** olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir. Benzer biçimde X ve Y, R halkasının iki alt kümesi ise her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $xy-yx$ elemanları tarafindan üretilen toplamsal alt grup $[X, Y]$ ile gösterilir. R halkasının her $y \in R$ elemanı için $[x, y] = 0$ koşulunu sağlayan x elemanlarının oluşturduğu kümeye R halkasının ***merkezi*** denir ve Z ile gösterilir.

U, R halkasının toplamsal alt grubu için; $[U, R] \subset U$ oluyorsa U ya R halkasının bir ***Lie ideali*** denir.

$\sigma, \tau : R \to R$ iki dönüşüm olmak üzere $x, y \in R$ için $x\sigma(y) - \tau(y)x$ elemanı $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilsin. $[U, R]_{\sigma,\tau} \subset U$ koşulu sağlanıyorsa U alt grubuna R halkasının bir ***(σ,τ)- sağ Lie ideali*** , $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ koşulu sağlanıyorsa U alt grubuna R halkasının bir ***(σ,τ)- sol Lie ideali*** , U, R halkasının hem (σ,τ)-sol ve hem de (σ,τ)-sağ Lie ideali ise U ya R nin bir ***(σ,τ)- Lie ideali*** denir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, σ ve τ R halkasının iki otomorfizması olarak alınacak, $x, y \in R$ için $x\sigma(y)-yx$ ve $x\sigma(y) -\tau(y)x$ elemanları sırasıyla $[x, y]_\sigma$ ve $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilecektir.

Yukarıdaki gösterimler altında $C_\sigma = \{ c \in R \mid [c, x]_\sigma = 0 \ \forall x \in R \}$ve $C_{\sigma,\tau} = \{ c \in R \mid [c, x]_{\sigma,\tau} = 0 \ \forall x \in R \}$kümelerine sırasıyla R halkasının ***σ- merkezi*** ve ***(σ,τ)- merkezi*** denir.

Çeşitli koşullar altında halkaların komütatifliği konusu birçok matematikçi tarafindan incelenmiştir. Bu çalışmada bu koşullardan bazıları altında bir halkanın komütatifliği incelenirken hangi aşamalardan geçtiği, koşullar üzerinde hangi genelleştirmelerin yapıldığı özetlenecektir. Bu koşullardan bazıları aşağıda verilmiştir:

a) $a \in R$ için $ad(R) = (0)$

b) $\forall x \in R$ için $[d(x), x] \in Z$

c) $[d(R), d(R)] = (0)$

d) $[a, d(R)] = (0)$

e) $d(R) \subset Z$

f) $d^2(R) = (0)$

g) $0 \neq d_1 : R \to R$ ve $0 \neq d_2 : R \to R$ iki türev olmak üzere $d_1 d_2(R) = (0)$

h) $U \not\subset Z$ olan bir Lie ideal ise bu taktirde R halkasının $[R, M] \subset U$ ve $[R, M] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

ı) $[a, U] = (0)$ ise $a \in Z$ veya $U \subset Z$ dir.

k) $aUb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Yukarıdaki koşullardan birini sağlayan halkaların komütatifliği incelenirken bir taraftan bu koşullarda R halkası yerine sırayla onun bir ideali, tek yanlı ideali ve lie ideali , diğer taraftan ise d türevi yerine yarı-türev, α-türev ve (σ,τ)-türev alınarak genelleştirmeler yapılmıştır.

Aşağıda söz konusu koşullar altında bir halkanın komütatifliği ile ilgili çalışmalara ilişkin örnekler mümkün olduğu kadar koşul koşul ele alınarak verilmiştir.

d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ için $ad(R) = (0)$ iken $a = 0$ olduğu E. Posner tarafından 1957 yılında gösterildi [22]. Daha sonra R karakteristiği 2 den farklı asal halka olmak üzere J. Bergen ve arkadaşları tarafından yukarıdaki teorem, R halkası yerine R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali alınarak genelleştirildi [8]. Lie ideal için ispatlanan bu teorem 1995 yılında (σ,τ)-Lie ideal için N. Aydın ve arkadaşı tarafından ispatlanmıştır [6].

E.C. Posner'ın 1957 yılında ispatladığı "d, R asal halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere (b) koşulu sağlanıyorsa R komütatiftir."[22], teoremi için 1981 yılında P. H. Lee ve arkadaşı halkanın karakteristiğini 2 den farklı alarak değişik bir ispat verdi [20]. Yine P. H. Lee ve arkadaşı U, R halkasının bir Lie ideali ve her $u \in U$ için $[d(u), u] \in Z$ koşulu altında $U \subset Z$ olduğunu göstererek yukarıdaki teoremi genelleştirdi [21].

I.N.Herstein 1978 yılında d, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere (c) koşulu altında R halkasının komütatif olduğunu gösterdi [11]. Ayrıca Herstein $[a , d(R)] = (0)$ koşulunu sağlayan a elemanının halkanın merkezinde olduğunu ispatladı [12]. Herstein' ın bu teoremi $[a , d(R)] \subset Z$ koşulu altında P. H. Lee ve arkadaşı [20] tarafından, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali olmak üzere $[a, d(U)]= 0$ koşulu altında ise J. Bergen ve arkadaşları [8] tarafından genelleştirildi. Daha sonra P.H. LEE ve arkadaşı $[a , d(U)] \subset Z$ iken $a \in Z$ olduğunu kanıtlayarak Bergen ve arkadaşlarının yukarıdaki teoremini genelleştirdi [21].

1978 yılında I. N. Herstein'ın [11] "d, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d(R) \subset Z$ koşulu sağlanıyorsa R halkası komütatiftir." , teoremi için J. Bergen ve arkadaşları R halkası yerine onun bir U Lie idealini alarak $d(U) \subset Z$ iken $U \subset Z$ olduğunu ispatladılar [8]. 1995 yılında ise Lie ideal için ispatlanan bu teorem N. Aydın ve arkadaşı tarafından R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali için genelleştirildi [6].

R, karakteristiği 2 den farklı asal halka ve d, R nin sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d^2(R) \subset Z$ koşulu altında R halkasının komütatif olduğu 1981 de P.H. Lee ve arkadaşı tarafından gösterildi [20]. J. Bergen ve arkadaşları tarafından (f) koşulunda R halkası yerine onun bir U Lie ideali alınarak $U \subset Z$ olduğu ispatlandı [8].1995 yılında ise N. Aydın ve arkadaşı bu teoremi U' yu R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali alarak genelleştirdiler [6].

E. C. Posner karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halkada iki türevin bileşkesi de bir türev oluyorsa o zaman bu türevlerden en az birinin sıfır olduğunu ispatladı [22]. 1981 yılında P. H. Lee ve arkadaşı R halkasının sıfırdan farklı d_1 ve d_2 iki türevi olmak üzere d_1d_2 (R) $\subset$ Z iken R halkasının komütatif olduğunu gösterdi [20].1981 yılında J.Bergen ve arkadaşlarının [8], $d_1d_2(U)=0$ iken $U\subset Z$ olduğunu kanıtladıkları teorem P. H. Lee ve arkadaşı tarafindan d_1d_2 $(U)\subset Z$ koşulu altında ispatlanarak genelleştirildi [21].

J. Bergen ve arkadaşları U, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının merkezi tarafindan kapsanılmayan bir Lie ideali ise bu taktirde R halkasının $[R, M] \subset U$ ve $[R, M] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M idealinin var olduğunu gösterdiler [8]. Bu teorem N. Aydın ve arkadaşı tarafindan R asal halkasının merkezi ve (σ,τ)-merkezi tarafindan kapsanılmayan bir (σ,τ)- Lie ideali için genelleştirildi [5].

1981 yılında J. Bergen ve arkadaşlarının [8] karakteristiği 2 den farklı R asal halkası için ispatladığı (ı) koşulu N. Aydın ve arkadaşı tarafindan U Lie ideali yerine, (σ,τ)-Lie ideal alınarak genelleştirildi [5]. Ayrıca N. Aydın ve arkadaşı 1994 yılında J. Bergen ve arkadaşlarının [8] R halkasının bir U Lie ideali için ispatlamış oldukları (k) koşulunu, U' yu (σ,τ)-Lie ideal alarak genelleştirdiler [5].

Bu çalışmanın III. ve IV. bölümlerinde R, karakteristiği 2 den farklı asal halka , σ: $R\to R$ bir otomorfizma , d, R halkasının $d\sigma = \sigma d$ koşulunu sağlayan bir türevi ve U bir σ-Lie ideali olmak üzere aşağıda sıralanan ifadeler ispatlandı.

1) U, σ - sağ Lie ideal ve $[U, a] = (0)$ ise $a \in Z$ veya $U \subset C_\sigma$

2) U, σ - sağ Lie ideal ve $[U, U]_\sigma \subset C_\sigma$ ise $U \subset Z$ veya $U \subset C_\sigma$

3) U, σ - sağ Lie ideal ve $[U, a]_\sigma \subset C_\sigma$ ise $a \in Z$ veya $U \subset C_\sigma$

4) $aU = (0)$ (veya $Ua = (0)$)

i) U, σ - sağ Lie ideal ise $a = 0$ veya $U \subset C_\sigma$

ii) U, σ- sol Lie ideal ise $a = 0$ veya $U \subset Z$

5) U, R halkasının merkezi ve σ- merkezi tarafindan kapsanılmayan bir σ- Lie ideali olsun. Bu taktirde R halkasının $[R, M]_\sigma \subset U$ ve $[R, M]_\sigma \not\subset C_\sigma$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır.

6) $a, b \in R$ için $aUb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ veya $U \subset Z$

7) $d(U)a = (0)$ (veya $ad(U) = (0)$) ise $a = 0$ veya $U \subset Z$

8) $d(U) \subset C_\sigma$ ise $U \subset Z$

9) $d^2(U) = (0)$ ise $U \subset Z$

I. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

Tanım 1.1: R bir halka ve A, B, P onun idealleri olsun. $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının ***asal ideali*** denir.

Teorem 1.2: R bir halka ve P onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) P asal idealdir.

(2) $\forall$ a, b $\in$ R için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) $\forall$ a, b $\in$ R için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(4) U, V R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

(5) U, V R halkasının iki sağ ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : P asal ideal olsun. $\forall a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $RaRRbR \subseteq P$ olur. P asal ideal olduğu için $RaR \subseteq P$ veya $RbR \subseteq P$ bulunur.Diğer taraftan $(a) = A$ olmak üzere $A^3 \subseteq RaR \subseteq P$ olduğu açıktır. Yine P asal ideal olduğundan $A^2 \subseteq P$ veya $A \subseteq P$ olur. Yani $A = (a) \subseteq P$ elde edilir. Böylece $a \in P$ bulunur. Benzer şekilde $b \in P$ olduğu gösterilir.

(2) $\Rightarrow$(3) : $\forall$ a, b $\in$ R için $aRb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. $(a)(b) \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $aRb \subseteq (a)(b) \subseteq P$ olduğundan $aRb \subseteq P$ olur. Hipotezden $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) $\Rightarrow$(4) : $\forall$ a, b $\in$ R için $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. U, V R halkasının iki sol ideali ve $UV \subseteq P$ ve $U \not\subset P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u \in U$ ve $u \notin P$ olacak biçimde bir u elemanı vardır. Keyfi bir $v \in V$ alalım.

$(u)(v) \subseteq UV + UVR \subseteq P$ dir. Hipotezden ve $u \notin P$ olduğundan $v \in P$ bulunur. Bu V sol idealinin her v elemanı için tekrarlanırsa $V \subseteq P$ elde edilir.

(3) ⇒(5): Benzer şekilde gösterilir.

(4) ⇒(1) : Tanımdan (4) ⇒(1) ve (5) ⇒(1) olduğu açıktır.

Tanım 1.3: (0) ideali asal ideal olan halkaya ***asal halka*** denir.

Önerme 1.4: R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) R asal halkadır.

(2) $a, b \in R$ için $aRb = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

(3) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

(4) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 1.5: R bir halka, A ve Q, R halkasının iki ideali olsun. $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ise Q idealine R halkasının ***yarı-asal ideali*** denir.

Teorem 1.6: R bir halka, Q onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) Q yarı-asal idealdir.

(2) $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(3) $a \in R$ için $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(4) U, R halkasının bir sağ ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

(5) U, R halkasının bir sol ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

Tanım 1.7: R bir halka olsun.

(1) $\forall a \in R$ için, $na = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise böyle n'lerin en küçüğüne R halkasının ***karakteristiği*** denir ve ***char R = n*** ile gösterilir.

(2) $a \in R$ için, $a^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise a elemanına halkanın ***nilpotent elemanı*** denir. $a^n = 0$ fakat $a^{n-1} \neq 0$ ise n ye a nın ***nilpotentlik indeksi*** denir.

(3) B, R halkasının bir ideali olsun. B nin her elemanı nilpotent ise B ye R halkasının ***nil ideali*** denir.

(4) A, R halkasının bir ideali olsun. A nın keyfi olarak alınan $a_1,a_2,\ldots,a_n$ elemanları için $a_1.a_2.\ldots.a_n = 0$ ise A ya R nin ***nilpotent ideali*** denir. Her nilpotent ideal nil idealdir.

Tanım 1.8: Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya ***yarı-asal halka*** denir.

Tanım 1.9: R bir halka ve $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. $x \in R$ için $mx = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa R halkasına ***m-torsion free halka*** denir.

Tanım 1.10: X, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $C_R(X) = \{a \in R \mid xa = ax, \forall x \in R\}$ kümesine X in R deki ***merkezleştiricisi*** denir. $\{x \in R \mid xy = yx, \forall y \in R\}$ kümesine ise R halkasının ***merkezi*** denir ve Z ile gösterilir.

Önerme 1.11 : R asal halka olsun. $ab, b \in Z$ ise $b = 0$ veya $a \in Z$ dir.

İspat: $ab, b \in Z$ olsun. $\forall x \in R$ için $xab = abx = axb$ olur. Buradan

$$(ax-xa)\ b=0 \qquad \forall x \in R \qquad (1)$$

elde edilir. (1) eşitliğinde x yerine xy, $y \in R$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (axy-xya)\ b = axyb - xyab \\ &= axyb - xayb+xayb - xyab \\ &= (ax-xa)\ yb + x\ (ay-ya)\ b \end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin ikinci terimi (1)'den dolayı sıfırdır. Böylece

$$(ax-xa)\ Rb = (0) \quad \forall x \in R \qquad (2)$$

olduğu görülür. R asal halka olduğu için (2) den

$$b = 0 \quad \text{veya} \quad a \in Z$$

bulunur.

Önerme 1.12:[15 , Lemma 1.1.4] R bir yarı-asal halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $a(ax-xa) = 0$ oluyorsa $a \in Z$ dir.

İspat: $x, r \in R$ için hipotezden;

$$a(a(xr) - (xr)\, a) = 0 \qquad (3)$$

olur. $a(xr) - (xr)\, a = (ax\text{-}xa)\, r + x\, (ar\text{-}ra)$ olduğu (3) eşitliğinde yerine yazılır ve yine (3) eşitliği kullanılırsa

$$ax\, (ar\text{-}ra) = 0 \quad \forall\, x, r \in R$$

elde edilir. Bu ise

$$(ar\text{-}ra)\, R\, (ar\text{-}ra) = (0) \qquad \forall\, r \in R$$

olduğunu verir. R yarı-asal halka olduğundan $\forall r \in R$ için $ar = ra$ elde edilir. Böylece $a \in Z$ bulunur.

Önerme 1.13: [15 , Lemma 1.1.6] R yarı - asal halka olsun. a elemanı R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini merkezleştirsin. Bu taktirde $a \in Z$ dir.

İspat: a, R halkasının sıfırdan farklı I sağ idealini merkezleştirsin. $\forall\, x \in R$ için $ax \in I$ dır. Hipotezden, $a(ax) = (ax)a = a(xa)$ olur. Buradan $0 = a(ax - xa)$ $\forall x \in R$ elde edilir. Bu ise Önerme 1.12 den $a \in Z$ demektir.

Tanım 1.14: R bir halka ve A, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. $\forall a, b \in A$ için $ab - ba \in A$ ($ab + ba \in A$)oluyorsa A ya R nin ***Lie (Jordan) alt halkası*** denir.

Tanım 1.15: A, R halkasının bir Lie (Jordan) alt halkası ve $U \subset A$ toplamsal alt grubu olsun. $\forall u \in U$ ve $\forall a \in A$ için $ua - au \in U$ ($ua + au \in U$) oluyorsa, U ya A nın bir ***Lie (Jordan)ideali*** denir.

Tanım 1.16 : X ve Y R halkasının iki alt kümesi olsun. [X , Y] ile $xy - yx$, $x \in X$, $y \in Y$ elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup gösterilir.

Tanım 1.17: Tanım 1.16 ya göre R halkasının U toplamsal alt grubu için $[U , R] \subseteq U$ ise U ya R nin bir ***Lie ideali*** denir.

Tanım 1.18: $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesi ***komütatör çarpımı*** olarak adlandırılır ve $[x , y]$ ile gösterilir. Ayrıca

$$[[x , y] , z] + [[y , z] , x] + [[z , x] , y] = 0$$

eşitliğine ***Jacobi özdeşliği*** denir.

Tanım 1.19: R bir halka, σ , τ :R→R iki dönüşüm olsun. x, y∈R için $x\sigma(y) - \tau(y)x$ ifadesi $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilsin. R nin bir U toplamsal alt grubu için

(1) $[U,R]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U ya R halkasının ***(σ,τ) - sağ Lie ideali*** denir.

(2) $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U ya R halkasının ***(σ,τ) - sol Lie ideali*** denir.

(3) U, R halkasının hem (σ,τ) - sağ Lie ideali ve hem de (σ,τ) - sol Lie ideali ise U 'ya R halkasının ***(σ,τ) - Lie ideali*** denir.

R halkasının her Lie ideali 1, R nin özdeşlik dönüşümü olmak üzere (1,1)-sağ (sol, iki yanlı) Lie idealidir.

Tanım 1.20: $C_{\sigma,\tau} = \{c\in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c, \forall x\in R\}$ kümesine R halkasının ***(σ,τ)- merkezi*** denir.

Tanım 1.21: R bir halka ve d:R→R toplamsal bir dönüşüm olsun. x, y ∈ R olmak üzere

(1) $d(xy) = d(x)\,y + x\,d(y)$ ise d ye R halkasının bir ***türevi*** denir.

(2) g: R →R bir fonksiyon olmak üzere

$d(xy) = d(x)y + g(x)\,d(y) = d(x)\,g(y) + x\,d(y)$ ve $gd = dg$

ise d ye ***g ile belirlenen bir yarı-türev*** denir.

(3) $0 \neq \alpha$: R →R bir endomorfizma olmak üzere $d(xy) = d(x)\,\alpha(y) + xd(y)$ ise d ye bir ***α- türev*** denir.

(4) σ ve τ R halkasının iki otomorfizması ve $d(xy) = d(x)\,\sigma(y) + \tau(x)\,d(y)$ ise d ye bir ***(σ,τ) - türev*** denir.

Önerme 1.22: [14 , Teorem 1.5] R halkası sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve $2x = 0$ iken $x=0$ olan bir halka olsun. Kabul edelim ki $(0) \neq U$, R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olsun. O zaman $U \subseteq Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat: Kabul edelim ki U alt halkası değişmeli olmasın. O zaman $xy - yx \neq 0$ olacak şekilde x, y∈U elemanları vardır. Herhangi r∈R için $x(yr) - (yr)x \in U$ olur. Öte yandan

$$x(yr) - (yr)x = (xy-yx)r + y(xr - rx) \in U$$

dır. Bu ifadede y , xr-rx $\in U$ ve U alt halka olduğundan $y(xr - rx) \in U$ olur. Böylece her $r \in R$ için $(xy - yx) r \in U$ bulunur. Yani

$$(xy-yx) R \subset U \qquad (4)$$

dır. U Lie ideal olduğundan her $r, s \in R$ için

$$((xy-yx)r) s - s((xy-yx)r) \in U$$

olur. Bu ifadenin ilk terimi (4) ten dolayı U nun elemanıdır. Böylece

$$R(xy-yx) R \subset U$$

elde edilir. $R(xy-yx)R = (0)$ ise $(R(xy-yx))^2 = (0)$ olur. Bu durumda R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali olmadığı için $xy - yx = 0$ bulunur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $R(xy-yx)R \neq (0)$ dır.

Şimdi kabul edelim ki U değişmeli alt halka olsun. Biz $U \subseteq Z$ olduğunu görmeliyiz. $a \in U$, $x \in R$ için $ax-xa \in U$ ve U değişmeli halka olduğundan

$$a(a(xy) - (xy)a) = (a(xy) - (xy)a)a$$

yazılır. Bu ifade U halkasının değişmeli olduğu kullanılarak açılırsa

$$2(ax-xa)(ay-ya) = 0 \quad \forall x, y \in R$$

bulunur. Hipotezden

$$(ax-xa)(ay-ya) = 0 \quad \forall x, y \in R$$

demektir. Bu ifadede y yerine yx yazılırsa

$$(ax-xa) R (ax-xa) = 0 \quad \forall x \in R$$

elde edilir. Yani $(R(ax - xa))^2 = 0$ $\forall x \in R$ bulunur. Bu ise R halkasınında sıfırdan farklı nilpotent ideal bulunmadığından ,$\forall x \in R$ için $ax - xa = 0$ olur. Böylece $a \in Z$ olduğu görülür. Bunu her $a \in U$ için yapabileceğimizden $U \subseteq Z$ bulunur.

Önerme 1.23 (Brauer trick): Bir G toplamsal grubu iki öz alt grubunun bileşimi olarak yazılamaz.

İspat: A ve B, G nin iki öz alt grubu olmak üzere $G = A \cup B$ olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki $G \neq A$ olsun. Bu durumda $G=B$ olduğunu görmeliyiz. $G \neq A$ olduğundan $x \in G$ ve $x \notin A$ olacak biçimde en az bir x elemanı vardır. Öte yandan $G = A \cup B$ olduğundan $x \in B$ dir. İddiamız $G \subset B$ dir. Eğer $G \not\subset B$ olsaydı $y \in G$ ve $y \notin B$ olacak biçimde en az bir y elemanı vardır. $G = A \cup B$ olduğundan $y \in A$ olur.

$x + y \in B$ dir. Gerçekten $x+y \notin B$ olsaydı $G = A \cup B$ olduğundan $x+y \in A$ olurdu. $y \in A$ ve A toplamsal alt grup olduğundan $x \in A$ olurdu ki bu $x \notin A$ alınışıyla çelişir. O halde $x+y \in B$ 'dir. $x \in B$ ve B toplamsal olduğundan $y \in B$ olur ki bu da $y \notin B$ oluşuyla çelişir. O halde $G \not\subset B$ olamaz. Yani $G \subset B$ 'dir. Böylece $G = B$ olur.

Tanım 1.24: R bir asal halka olsun. U, R nın sıfırdan farklı bir ideali ve $f:U \to R$ bir sağ R-modül homomorfizması olmak üzere; M ile bütün (U,f) şeklindeki ikililerin kümesini gösterelim. M üzerinde

"$(U,f) \sim (V,g) \Leftrightarrow$ R nin sıfırdan farklı bir $W \subseteq U \cap V$ ideali üzerinde $f = g$"

denklik bağıntısını tanımlayalım. M nin denklik sınıflarının kümesi **Q** olsun. **Q** kümesi

$$\overline{(U,f)} + \overline{(V,g)} = \overline{(U \cap V, f+g)} \quad , \quad \overline{(U,f)}\,\overline{(V,g)} = \overline{(VU, fg)}$$

ikili işlemleri ile R yi kapsayan bir asal halkadır.

(1) **Q** nın merkezi **C** ile gösterilir ve **C** ye R nin ***genişletilmiş merkezi*** (extended centroid) denir. C bir cisimdir.

(2) **S = RC** ye R nin **Q** daki ***merkezi kapanışı*** (central closure) denir. S , R yi kapsayan bir asal halkadır.

Önerme 1.25: [9 , Lemma 2.3] R bir asal halka olsun. R halkasının d, f, g ve h türevleri için

$d(x)\, g(y) = h(x)\, f(y) \quad \forall\, x, y \in R$

olsun. Eğer $d \neq 0$, $f \neq 0$ ise o zaman $\forall\, x \in R$ için $g(x) = \lambda f(x)$ ve $h(x) = \lambda d(x)$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ vardır.

II. BÖLÜM

TÜREVLİ HALKALAR VE LİE İDEALLER

Bu bölümde türevli halkalarla ilgili daha önceden yayınlanmış olan bazı makaleler ispatsız olarak verilecektir.

2.1. Türevli Halkalar

Posner, E. C , 1957

Tanım 2.1.1: R bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $xay = 0$ iken $x = 0$ veya $y = 0$ oluyorsa R halkasına asal halka denir.

Lemma 2.1.2: R bir asal halka, $d:R \to R$ halkasının bir türevi ve $a \in R$ olsun. Buna göre her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ (veya $d(x)a = 0$) oluyorsa $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 2.1.3: R bir asal halka olsun. $p, q, r \in R$ elemanları $\forall a \in R$ için $paqar = 0$ olacak biçimde ise bu taktirde p, q, r elemanlarından en az biri sıfırdır.

Teorem 2.1.4: R karakteristiği 2 'den farklı olan bir asal halka ve d_1 , d_2 R halkasının iki türevi olsun. d_1d_2, R halkasının bir türevi ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Lemma 2.1.5: R bir asal halka, $d : R \to R$ bir türev olsun. Bu taktirde her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ oluyorsa $a = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 2.1.6: A bir Lie halka, I, A halkasının bir ideali olsun. Eğer $d \in A$ ve her $x \in I$ için $dx.x=0$ oluyorsa o zaman her $a \in R$ ve her $x \in I$ için $(da.x) x=0$ olur. (Her $x \in I$ için $dx.x = 0$ koşulunu sağlayan $d \in R$ elemanlarının kümesi A' nın bir idealidir.)

Teorem 2.1.7: R bir asal halka, d, R halkasının bir türevi olsun. Buna göre her $a \in R$ için $ad(a)-d(a)a \in Z$ ise bu taktirde $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Herstein, I. N., 1978

Teorem 2.1.8: R herhangi bir halka, $d : R \to R$ bir türev ve $d^3 \neq 0$ olsun. O zaman her $r \in R$ için $d(r)$ elemanları tarafından üretilen A alt halkası R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 2.1.9: R bir asal halka, $d : R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Her $x, y \in R$ için $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ ise bu taktirde

i) Eğer char $R \neq 2$ ise R halkası komütatif tamlık bölgesidir.

ii) Eğer char $R = 2$ ise R halkası komütatif veya R halkası merkezi üzerinde 4-boyutlu basit cebirdir.

Herstein, I. N., 1979

Teorem 2.1.10: R bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $a \in R$ elemanı her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ olacak biçimde ise bu taktirde

i) char $R \neq 2$ ise $a \in Z$ dir. (Z, R halkasının merkezidir.)

ii) char$R = 2$ ise $a^2 \in Z$ dir. Üstelik $a \notin Z$ ise $\lambda \in \mathbf{C}$ (R halkasının genişletilmiş merkezi) olmak üzere $\forall\, x \in R$ için $d(x) = (\lambda a)x - x(\lambda a)$ dır.

Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1981

Bu makale boyunca R halkası karakteristiği 2 den farklı olan asal halka ve Z, R halkasının merkezi olarak alınacaktır.

Teorem 2.1.11: R bir asal halka, $0 \neq d: R \to R$ bir türev, char$R \neq 2$ ve $a \in R$ olsun. $[a, d(R)] \subseteq Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Teorem 2.1.12: R bir asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev ve char$R \neq 2$ olsun. $[\, d(R), d(R)\,] \subset Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 2.1.13: R bir asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev ve char$R \neq 2$ olsun. $d^2(R) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 2.1.14: d_1 ve d_2 R asal halkasının sıfırdan farklı iki türevi ve char$R \neq 2$ olsun. $d_1 d_2 (R) \subseteq Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 2.1.15: R bir asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türevi ve char$R \neq 2$ olsun. Her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

2.2. Halkalarda Lie İdealler

Herstein, I. N., 1970

Lemma 2.2.1: R yarı-asal, 2-torsion free bir halka ve T, R halkasının Lie ideali olsun. Buna göre $[T, T] \subset Z$ ise bu taktirde $T \subseteq Z$ olur.

Lemma 2.2.2: R yarı-asal, 2-torsion free bir halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. $t \in R$ elemanı $[U, U]$ nun her elemanı ile komüt ederse bu taktirde t, U Lie idealinin her elemanı ile komüt olur.

Teorem 2.2.3: R yarı - asal, 2-torsion free halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. Buna göre $t \in R$ her $u \in U$ için tu - ut elemanlarını komüt ederse t, U Lie idealinin tüm elemanlarını komüt eder.

Bergen, J., Herstein, I. N. ve Kerr, J. W., 1981

Bu makale boyunca R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve Z, R halkasının merkezi olarak alınmıştır.

Lemma 2.2.4: $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali ise bu taktirde R halkasının $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

Lemma 2.2.5: $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali ise $C_R(U) = Z$ dir.

Lemma 2.2.6: $C_R([U, U]) = C_R(U)$ dur.

Lemma 2.2.7: $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali olsun. $aUb=0$ ise $a=0$ veya $b=0$ dır.

Lemma 2.2.8: U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d(U)=0$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.9: U, R nin bir Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d(U) \subset Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.10: : U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $t \in R$ için $td(U) = 0$ (veya $d(U)t = 0$) ise bu taktirde $t = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.11: U, karakteristiği 2 den farklı olan R asal halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu taktirde $d^2(U) = 0$ ise $U \subseteq Z$ dir.

Sonuç 2.2.12: R, 2-torsion free olan bir yarı-asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Bir $a \in R$ için $[a, [a,U]] = 0$ ise bu taktirde $[a, U] = 0$ dır.

Teorem 2.2.13: $U \not\subset Z$, karakteristiği 2 den farklı olan R asal halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu taktirde $C_R(d(U))=Z$ dir.

Yazar çalışmasının bundan sonraki kısmında $0 \neq d:R \to R$ bir türev, $U \not\subset Z$, R halkasının bir Lie ideali, $V = [U,U]$ ve $W = [V,V]$ olarak almıştır.

Lemma 2.2.14: $d^3 \neq 0$ ve $\overline{d(V)}$, R halkasının sıfırdan farklı sol λ ve sıfırdan farklı sağ δ idealini kapsarsa bu taktirde $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Lemma 2.2.15: I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre $\overline{d(U)}$, R nin sıfırdan farklı sağ ve sıfırdan farklı sol ideallerini kapsamıyor ise bu taktirde, $[c, I] \subset \overline{d(U)}$ olduğunda $c \in Z$ dir.

Lemma 2.2.16: $d^2(U)^2 = 0$ ise $d^3(W) = 0$ dır.

Lemma 2.2.17: $d^3(U) = 0$ ise $d^3 = 0$ dır.

Teorem 2.2.18: R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan asal halka, $0 \neq d:R \to R$ bir türev ve $d^3 \neq 0$, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali olsun. Bu taktirde $\overline{d(U)}$, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 2.2.19: R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan asal halka, $U \not\subset Z$ olan R halkasının bir Lie ideali ve δ, d, R, halkasının türevleri olsunlar. Eğer $\delta d(U) = 0$ ise o zaman $\delta = 0$ veya $d = 0$ dır.

Kaya, K. , 1988

Yazar bu çalışmasında σ ve τ dönüşümlerini R halkasının iki otomorfizmi olarak almıştır.

Lemma 2.2.20: R bir asal halka, d: r→ r' ile tanımlanmış sıfırdan farklı bir (σ,τ) - türevi ve $U \neq (0)$, R halkasının bir ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $(u', u)_{\sigma,\tau} = 0$ ise R halkası komütatiftir.

Lemma 2.2.21: R bir asal halka, $0 \neq d:R \to R$ bir (σ,τ)-türevi ve $U \neq (0)$, R halkasının bir sağ ideali olsun. Buna göre $u \in U$ için

i) $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise R halkası komütatiftir.

ii) $(u, u)_{\sigma,\tau} = 0$ ise R halkası komütatiftir. Üstelik $\sigma = \tau$ dır.

Lemma 2.2.22: R bir asal halka ve a, b $\in$R olsun. b, ab $\in C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $b = 0$ dır.

Lemma 2.2.23: R bir asal halka, $0 \neq d$, R nin bir (σ,τ)- türevi, char$R \neq 2$ ve $U \neq (0)$ R nin bir sağ ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

Teorem 2.2.24: R, bir asal halka, char$R\neq 2$, $0 \neq d$: r→ r' bir (σ,τ)-türev ve $U \neq (0)$, R nin bir sağ ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Aydın, N. ve Kaya, K. , 1992

Bu çalışma boyunca R, char$R\neq 2$ olan bir asal halka, U, sıfırdan farklı bir ideali, d, R halkasının (σ,τ)-türevi, $C_{\sigma,\tau} = \{c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c$, her $x \in R\}$ kümesi ve Z, R halkasının merkezi olarak alınmıştır.

Lemma 2.2.25: U, R halkasının sağ ideali ve $d(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

Lemma 2.2.26: $0\neq d$, R halkasının (σ,τ)- türevi, U, R halkasının sağ ideali olsun. Buna göre $d(U) \subset Z$ ise o zaman R halkası komütatiftir.

Lemma 2.2.27: $(0) \neq U$, R halkasının bir ideali ve $a \in R$ olsun. Buna göre $a \in R$ için $ad(U) = 0$ (veya $d(U)a = 0$) ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 2.2.28: d_1 , R halkasının (σ,τ)- türevi ve d_2 , R halkasının türevi olsun. $d_1 d_2 (R) = 0$ ise o zaman $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Teorem 2.2.29: R bir asal halka, $0 \neq d : R \rightarrow R$, R halkasının bir (σ,τ)-türevi ve U sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre $a \in R$ için $[d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

Teorem 2.2.30: R bir asal halka, $0 \neq d : R \rightarrow R$, R halkasının (σ,τ)-türevi ve $0 \neq U$ bir ideali olsun. $[d(U), d(U)]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Lemma 2.2.31: $0 \neq d$, R halkasının (σ,τ) - türevi ve U ideali olsun. Buna göre $a \in R$ için $ad(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise o zaman $a = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 2.2.32: $0 \neq d$, R halkasının (σ,τ) türevi ve $a \in R$ olsun. Buna göre $[d(R), a]_{\sigma,\tau} \subseteq C_{\sigma,\tau}$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

Teorem 2.2.33: R bir asal halka ve $0 \neq d : R \rightarrow R$, R halkasının (σ,τ)-türevi olsun. Buna göre $[d(R), d(R)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise o zaman R halkası komütatiftir.

Kaya, K., 1991

Yazar bu makalede R halkasını karakteristiği 2 den farklı asal halka ve $\sigma,\tau : R \rightarrow R$ iki otomorfizma olarak almıştır.

Lemma 2.2.34: $d_1 : R \rightarrow R$ bir (σ,τ)- türev ve α, R nin bir halka otomorfizmi olmak üzere $d_2 : R \rightarrow R$ bir (α,α)-türev, $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_1\alpha = \alpha d_1$ olsun. Buna göre $d_2(U) \subset U$ ve $d_1 d_2(U) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dir.

İspat: $u, v \in U$ için $0 = d_1 d_2(uv) = d_1(d_2(u)\alpha(v) + \alpha(u)d_2(v))$ $= \tau(d_2(u))d_1(\alpha(v)) + d_1(\alpha(u))\sigma(d_2(v))$ olur. Yani

$$d_1(\alpha(u))\sigma(d_2(v)) + \tau(d_2(u))d_1(\alpha(v)) = 0, \ \forall u, v \in U \qquad (1)$$

bulunur. (1) eşitliğinde u yerine $d_2(u)$ alınırsa

$$\tau(d_2^2(u))\, d_1(\alpha(v)) = 0, \ \forall u, v \in U \qquad (2)$$

elde edilir. $\alpha(U) \neq (0)$, R nin bir ideali olduğundan $d_1 \neq 0$ ise (2) ve Lemma 2.2.27 den $d_2^2(U) = 0$ bulunur. O halde $\forall u, v \in U$ için $0 = d_2^2(uv) = d_2(d_2(u)\alpha(v) + \alpha(u)d_2(v))$ $= \alpha(d_2(u))d_2(\alpha(v)) + d_2(\alpha(u))\alpha(d_2(v)) = 2d_2(\alpha(u))d_2(\alpha(v))$ elde edilir. $CharR \neq 2$ olduğundan

$$d_2(\alpha(U))\, d_2(U) = 0 \qquad (3)$$

bulunur. Lemma 2.2.27 ve (3) den $d_2(\alpha(U)) = 0$ ve dolayısıyla $d_2 = 0$ olur.

Sonuç 2.2.35: $U \neq (0)$, R nin bir ideali ve $a, b \in U$ olsun. Buna göre, $\forall x \in U$ için, $[a, [b,x]]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in C_{\sigma,\tau}$ veya $b \in Z$ dir.

İspat : $d_1 : R \to R$, $d_1(x) = [a,x]_{\sigma,\tau}$ olarak tanımlandığında R halkasının bir (σ,τ)-türevi ve $d_2 : R \to R$, $d_2(x) = [b,x]$ olarak tanımlandığında R halkasının bir türevidir. Üstelik $d_2(U) \subset U$ ve $d_1 d_2(U) = 0$ dir. Böylece Lemma 2.2.34 kullanılarak $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir. Bu ise $a \in C_{\sigma,\tau}$ veya $b \in Z$ demektir.

Lemma 2.2.36: $0 \neq d: R \to R$ bir (σ,τ)- türev ve $U \neq (0)$, R nin bir ideali olsun. $a \in U$ için $[d(U), a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

İspat : $C_{\sigma,\tau} \ni [d(a^2), a]_{\sigma,\tau} = [d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a), a]_{\sigma,\tau}$

$= d(a)\sigma(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a)\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma(a) - \tau(a)\tau(a)d(a)$

$= [d(a), a^2]_{\sigma,\tau} = \tau(a)[d(a), a]_{\sigma,\tau} + [d(a), a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) = 2\tau(a)[d(a), a]_{\sigma,\tau}$

ifadesinde $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğu kullanılırsa,

$$\tau(a)[d(a), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Bu ifadeye Lemma 2.2.22 uygulanırsa

$$\tau(a) \in Z \text{ veya } [d(a), a]_{\sigma,\tau} = 0 \qquad (4)$$

elde edilir. Eğer $[d(a), a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise her $u \in U$ için $C_{\sigma,\tau} \ni [d([a,u]),a]_{\sigma,\tau} = [[d(a),u]_{\sigma,\tau} - [d(u), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}$ olur. Böylece

$$[[d(a), u]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall u \in U \qquad (5)$$

bulunur. (5) eşitliğinde u yerine au alınırsa,

$$\tau(a)[[d(a), u]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \quad \forall u \in U$$

olur. Lemma 2.2.22'den

$$a \in Z \text{ veya } [[d(a), u]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} = 0, \quad \forall u \in U \qquad (6)$$

elde edilir. $[[d(a), u]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise;

Bu ifadeye $[x, [y, z]]_{\sigma,\tau} + [[x, z]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau} - [[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} = 0$ özdeşliği uygulanır ve (4) eşitliği kullanılırsa, her $u \in U$ için

$$0 = [\,[d(a),u]_{\sigma,\tau},a\,] = [d(a),[u,a]\,]_{\sigma,\tau} + [\,[d(a),a\,]_{\sigma,\tau},u\,]_{\sigma,\tau}$$
$$= [d(a),[a,u]]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Şimdi, $x \in R$ için $d_{d(a)}(x) = [d(a), x]_{\sigma,\tau}$ ile tanımlanan $d_{d(a)}$ dönüşümü bir (σ,τ)-türev ve $d_a(x) = [a\,,\,x]$ ile tanımlanan d_a dönüşümü bir türevdir. Üstelik $d_a(U) \subset U$ ve $d_a\, d_{d(a)}(U) = 0$ dir. Böylece Lemma 2.2.34 den $d_{d(a)} = 0$ veya $d_a = 0$ bulunur. Yani,

$$d(a) \in C_{\sigma,\tau} \text{ veya } a \in Z$$

elde edilir. Eğer $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ ise her $u \in U$ için $[d(au),a]_{\sigma,\tau} = [d(a)\sigma(u)+\tau(a)d(u)\,,\,a]_{\sigma,\tau}$ $= d(a)\sigma(u)\sigma(a) + \tau(a)d(u)\sigma(a) - \tau(a)\,d(a)\,\sigma(u) - \tau(a)\,\tau(a)\,d(u)$ olur. $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan buradan,

$$d(a)\,\sigma([u,a]) + \tau(a)\,[d(u), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}\,, \forall u \in U \qquad (7)$$

elde edilir. Böylece

$$0 = [d(a)\,\sigma([u,a]) + \tau(a)\,[d(u), a]_{\sigma,\tau}\,,\,a\,]_{\sigma,\tau}$$
$$= d(a)\,\sigma([u,a])\sigma(a) + \tau(a)\,[d(u), a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma([u,a])$$
$$- \tau(a)\tau(a)[d(u)\,,\,a]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Burada $d(a)$, $[d(u), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa, $\forall u \in U$ için

$$d(a)\sigma([[u, a], a])=0$$

elde edilir. $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$d(a)R\sigma([[u, a], a]) = (0)$$

ve buradan R halkasının asal olması kullanılarak

$$d(a) = 0 \text{ veya } [a, [a,U]\,] = 0$$

bulunur. **$[a, [a,U]\,] = 0$ ise**; bu taktirde $x \in R$ için $I_a(x) = [a,x]$ ile tanımlanan bir iç türev olmak üzere $I_a^2(U) = 0$ demektir. Lemma 2.2.34 den $I_a = 0$ bulunur. Bu ise $a \in Z$ olduğunu verir. **$d(a) = 0$ ise;** bu taktirde (7) den $\forall u \in U$ için $\tau(a)[d(u), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Burada R nin asal halka ve $[d(u), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olması kullanılarak

$$a \in Z \text{ veya } [d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0$$

elde edilir. $[d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise Teorem 2.2.29' dan $a \in Z$ olur.

Lemma 2.2.37: $0 \neq d: R \rightarrow R$ bir (σ,τ)- türev ve $U \neq (0)$, R nin bir ideali olsun. $d(U) \subset U$ ve $[d(U), d(U)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

İspat : Lemma 2.2.36 dan $d(U) \subset Z$ dir. Dolayısıyla Lemma 2.2.26 dan R komütatiftir.

Teorem 2.2.38: $0 \neq d_1: R \rightarrow R$ bir (σ,τ) - türev ve $0 \neq d_2: R \rightarrow R$ bir türev olsun. $U \neq (0)$, R nin bir ideali ve $d_2(U) \subset U$ olsun. Buna göre $d_1d_2(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R komütatiftir.

İspat : Her $u, v \in U$ için $d_1d_2([u,d_2(v)]) = d_1([d_2(u), d_2(v)] - [d_2^2(v), u])$ $= [d_1(u), d_2^2(v)]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ve dolayısıyla,

$$[d_1(U), d_2^2(U)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau} \tag{8}$$

olur. $d_2(U) \subset U$ ve $d_1 \neq 0$ olduğu Lemma 2.2.36 da kullanılarak, (8) den $d_2^2(U) \subset Z$ elde edilir. Buna göre $\forall\, u, v \in U$ için $Z \ni d_2^2([u,v]) = d_2([d_2(u), v] - [d_2(v), u]) =$ $-[d_2(v), d_2(u)] + [d_2(u), d_2(v)]) = 2[d_2(u), d_2(v)]$ ifadesinden $\mathrm{char} R \neq 2$ olduğu kullanılarak $[d_2(U), d_2(U)] \subset Z$ elde edilir. Lemma 2.2.37 den R halkası komütatiftir.

Teorem 2.2.39: U, R nin bir (σ,τ)- sağ Lie ideali olsun. $[U,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dir.

İspat : $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu kabul edelim. Buna göre $a \in U$ ve $a \notin C_{\sigma,\tau}$ $b \in U$ ve $b \notin Z$ olacak biçimde a ve b elemanları vardır. Her $x \in R$ için $[a, x]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan hipotezden

$$[[a,x]_{\sigma,\tau}, b]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \quad \forall x \in R$$

olur. Öte yandan $[[a,x]_{\sigma,\tau},b]_{\sigma,\tau} = [a,[x,b]]_{\sigma,\tau} + [[a,b]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau}$ ve $[a,b]_{\sigma,\tau} \in [U,U]_{\sigma,\tau}$ olması kullanılarak son eşitlikten

$$[[a,x]_{\sigma,\tau},b]_{\sigma,\tau} = [a,[x,b]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau} \tag{9}$$

elde edilir. $d_a : R \to R$, $d_a(x) = [a,x]_{\sigma,\tau}$ bir (σ,τ)-türev ve $d_b : R \to R$, $d_b(x) = [b,x]$, b elemanı ile belirlenen bir iç türevdir. Üstelik $a \notin C_{\sigma,\tau}$ ve $b \notin Z$ olduğundan d_a ve d_b sıfırdan farklıdır.Böylece (9) eşitliğinden

$$d_a d_b(R) \subset C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Bu ise Teorem 2.2.38 den R halkası komütatif demektir.Yani $U \subset Z$ ki bu bir çelişkidir.

Sonuç 2.2.40: $M \neq (0)$, R halkasinin bir ideali ve $[M,R]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R komütatiftir.

İspat: M, R nin bir (σ,τ)-sağ Lie idealidir. Hipotezden $[M,M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ dir. Buna göre, Teorem 2.2.39 dan $M \subset Z$ veya $M \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Böylece R halkasının komütatif olduğu elde edilir.

Sonuç 2.2.41: Her x, y, $z \in R$ için $[[x,y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} = 0$ ise R komütatiftir.

İspat : Hipotezden $[R,R]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Dolayısıyla Sonuç 2.2.40 dan R komütatiftir.

Teorem 2.2.42: U, karakteristiği 2 den farklı olan R asal halkasının hem sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve hem de alt-halkası ise bu taktirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya U, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat: $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu varsayalım. $[U,U]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu taktirde Teorem 2.2.39 dan $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dir. Bu kabulümüzle çelişir. O halde $[U,U]_{\sigma,\tau} \neq 0$ dır. Her $u, v \in U$ ve $y \in R$ için $U \ni [u, \tau^{-1}(v)y]_{\sigma,\tau} = v[u,y]_{\sigma,\tau} + [u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)$ ifadesinden $[U, \tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau} R \subset U$ bulunur. Buna göre $\forall\, u, v \in U$ ve $x, y \in R$ için $[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau} x\sigma(y) - \tau(y)[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau} x \in U$ olur. Buradan

$$R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau} R \subset U$$

elde edilir. **$R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau} R = 0$ ise;** bu taktirde $[U, \tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau} = 0$ dir. Dolayısıyla $\forall u,v \in U$ ve $x \in R$ için $0 = [[u,x]_{\sigma,\tau}, \tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau} = [[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} + [u,[x,\tau^{-1}(v)]]_{\sigma,\tau}$ ifadesinden

$$[u,[x,\tau^{-1}(v)]]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall\, u,v \in U, x \in R$$

bulunur. $d_u : R \to R$, $d_u(x) = [u,x]_{\sigma,\tau}$ ve $d_{\tau^{-1}(v)} : R \to R$, $d_{\tau^{-1}(v)}(x) = [\tau^{-1}(v), x]$ ile tanımlanan d_u ve $d_{\tau^{-1}(v)}$ dönüşümleri sırasıyla R halkasının bir (σ,τ)-türevi ve $\tau^{-1}(v)$ ile belirlenen iç türevi bulunur. Üstelik $d_u d_{\tau^{-1}(v)}(R) = 0$ dir. Bu ise Lemma 2.2.34 den $d_u = 0$ veya $d_{\tau^{-1}(v)} = 0$ olur. Yani, $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya $U \subset Z$ olur. Çelişki.

Aydın, N. ve Kandamar, H. , 1994

Bu makale boyunca R, char$R \neq 2$ olan bir asal halka olarak alınmıştır.

Lemma 2.2.43: U, R nin (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $a \in R$ için $[U,a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat : $a \notin Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $u \in U$ ve $u \notin C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde bir u elemanı vardır. Her $x \in R$ için hipotezden;

$$0 = [[u,a]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = [u, [a, x]]_{\sigma,\tau} + [\, [u, x]_{\sigma,\tau} , a]_{\sigma,\tau}$$

ve $[\, [u, x]_{\sigma,\tau} , a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$[u, [a, x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. $d_u(x) = [u,x]_{\sigma,\tau}$ R halkasının bir $(\sigma\text{-}\tau)$ - türevi ve $d_a(x) = [a,x]$ bir türevi olmak üzere yukarıdaki ifadeden

$$d_u d_a(R) \subset C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. $u \notin C_{\sigma,\tau}$ ve $a \notin Z$olduğu için $d_u \neq 0$ ve $d_a \neq 0$ dır. Buna göre Teorem 2.2.38 den R komütatif olur ki bu $a \notin Z$ alınışıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Lemma 2.2.44: $a \in R$ ve $aU = 0$ (veya $Ua = 0$) olsun.

a) Eğer U, (σ,τ) - sol Lie ideal ise o zaman $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

b) Eğer U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ise o zaman $a = 0$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat : a) $\forall\, x,y \in R$, $u \in U$ için $0 = a[xy, u]_{\sigma,\tau} = ax\,[y,u]_{\sigma,\tau} + a\,[x,u]_{\sigma,\tau}\, y = ax\,[y,\sigma(u)\,]$ olduğundan $(0) = aR\,[R, \sigma(U)]$ bulunur. R asal halka olduğundan

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad U \subset Z$$

elde edilir. Şimdi $\forall x, y \in R$ ve $u \in U$ için $Ua = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $0 = [xy, u]_{\sigma,\tau}a = x[y,u]_{\sigma,\tau}a + [x, \tau(u)]ya = [x, \tau(u)]ya$ olduğundan $[R,\tau(u)]Ra = (0)$ olur. R asal halka olduğundan

$$a \in Z \quad \text{veya} \quad U \subset Z$$

bulunur.

b) $\forall x, y \in R$ ve $u \in U$ için $0 = a[u, xy]_{\sigma,\tau} = a\tau(x)[u, y]_{\sigma,\tau} + a[u,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y) = a\tau(x)[u,y]_{\sigma,\tau}$ olduğundan $aR[U, R]_{\sigma,\tau} = (0)$ bulunur. R asal halka olduğundan

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad U \subset C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $Ua = 0$ olması durumunda $[u, xy]_{\sigma,\tau} = \tau(x)[u, y]_{\sigma,\tau} + [u, x]_{\sigma,\tau}\tau(y)$ özdeşliği kullanılarak istenen görülür.

Teorem 2.2.45: U, karakteristiği 2 den farklı R asal halkasının bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Buna göre $[U, a] = 0$ ise $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dir.

İspat : $x \in R$, $u \in U$ için $0 = [[u,x]_{\sigma,\tau}, a] = [u\sigma(x) - \tau(x)u, a] = u\sigma(x)a - \tau(x)ua - au\sigma(x) + a\tau(x)u$ olur. Buradan

$$u[\sigma(x), a] = [\tau(x), a]u \quad ,\forall x \in R, \forall u \in U \tag{10}$$

elde edilir. (10) eşitliğinde x yerine xy yazılırsa

$$0 = [u, x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y), a] + [\tau(x), a][u, y]_{\sigma,\tau}, \quad \forall x,y \in R, \forall u \in U \tag{11}$$

bulunur. (11)' de y yerine $\sigma^{-1}(a)$ alınırsa $[\tau(x), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Bu son eşitlikte x yerine xy yazılırsa

$$[\tau(R), a]R[U, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = (0) \tag{12}$$

elde edilir. R asal halka olduğundan (12) den

$$a \in Z \quad \text{veya} \quad [U, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = (0)$$

bulunur. Lemma 2.2.43 den $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

$(0) \neq U$, R nin bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $T(U) = \{a \in R \mid [R, a]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ tanımlayalım. $U \subset T(U)$ olduğu açıktır. Üstelik T(U), R halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkasıdır.

Lemma 2.2.46: R bir halka ve U sıfırdan farklı (σ,τ) -sol Lie ideali olsun. O zaman $R[T(U), \sigma(T(U))] \subset T(U)$ ve $[T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$ olur.

İspat : $u,v\in T(U)$, $x\in R$ için T(U) alt halka olduğundan $[u, [x, v]_{\sigma,\tau}]\in T(U)$ ve böylece $[u, [x,v]_{\sigma,\tau}] = ux\sigma(v) - u\tau(v)x - x\sigma(v)u + \tau(v)xu$ eşitliği kullanılarak

$$[u, [x, v]_{\sigma,\tau}] + [xu, v]_{\sigma,\tau} = u[x, v]_{\sigma,\tau} - x[\sigma(v), u] \in T(U)$$

elde edilir. $u[x, v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olduğundan

$$R[T(U), \sigma(T(U))] \subset T(U)$$

olur. Öte yandan $[ux,v]_{\sigma,\tau} = u[x,v]_{\sigma,\tau} + [u, \tau(v)]x \in T(U)$ ve $u[x,v]_{\sigma,\tau}\in T(U)$ olduğundan $[T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$ bulunur.

Lemma 2.2.47: U sıfırdan farklı (σ,τ)-Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve a, $b\in R$ olsun. Bu taktirde $aT(U)b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : $u\in U$, $v\in T(U)$ ve $y\in R$ alalım. O zaman $[uby,v]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan $0 = a[uby,v]_{\sigma,\tau}b$ olur. Bu ifade açılırsa

$$a\tau(T(U))UbRb = (0)$$

elde edilir. R asal halka olduğundan

$$a\tau(T(U))Ub = (0) \text{ veya } b = 0 \tag{13}$$

olur. $\forall x \in R$, $u \in U$, $v \in T(U)$ için (13) ten $0 = a\tau(v)[u, x]_{\sigma,\tau}b = a\tau(v)u\sigma(x)b - a\tau(v)\tau(x)ub$ bulunur. Burada x yerine $\sigma^{-1}(bx)$ yazılırsa

$$0 = a\tau(v)\sigma(\sigma^{-1}(bx))b - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(bx))ub$$

$$= a\tau(v)ubxb - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub$$

elde edilir. Böylece (13) eşitliği kullanılarak

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))RUb = (0)$$

bulunur. R halkası asal olduğundan

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0 \text{ veya } Ub = (0) \tag{14}$$

olur. Ub= 0 ise Lemma 2.2.44 den b=0 olur. Ohalde

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0 \quad \forall v \in T(U) \tag{15}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda Lemma 2.2.46 dan $[U,\tau(T(U))]R \subset T(U)$ olduğu için

$$[R,[U,\tau(T(U)]R]_{\sigma,\tau} \subset [R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U \subset T(U)$$

elde edilir. Böylece $\forall x, y \in R$, $u \in U$ ve $v \in T(U)$ için, $[\tau(x),[u,\tau(v)]y]_{\sigma,\tau} = \tau(x)\sigma([u,\tau(v)]y) - \tau([u,\tau(v)]y)\tau(x) \in U$ olur. $0 = a\,[\tau(x),[u,\tau(v)]y]_{\sigma,\tau}b$ olduğundan bu ifade açılırsa

$$0 = a\tau(x)\sigma([u,\tau(v)]y)b - a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x)b \qquad (16)$$

bulunur.(16) eşitliğinde x yerine $x\sigma^{-1}(b)z$, $z \in R$, yazılırsa

$$0 = a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u,\tau(v)]y)b$$
$$- a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)b \qquad (17)$$

elde edilir. $[u,\tau(v)]yx \in T(U)$ olduğundan

$$a\tau([u,\tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b)) \in a\tau(T(U)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0$$

olur. Bu durumda (17) eşitliğinden

$$aR\tau(\sigma^{-1}(b))R\sigma([u,\tau((v)]Rb = 0$$

yazılır. R asal halka olduğu için

$$a = 0 \text{ veya } b = 0 \text{ veya } [U,\tau(U)] = (0)$$

elde edilir. $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Teorem 2.2.45 'den $[U,\tau(U)] \neq 0$ dır. O halde $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Teorem 2.2.48: U, (σ,τ)-Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman R halkasının $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır.

İspat : U , R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali olduğundan Lemma 2.2.43 den $[T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U)$ ve $R[T(U),\sigma(T(U))] \subset T(U)$ olur. T(U), R halkasının alt halkası olduğu için

$$M = R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U)$$

olur. **Eğer M = (0) ise;** R halkası asal olduğundan

$$[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U)] = 0$$

elde edilir. $\forall u, v, w, z \in T(U)$ için

$$[u, \sigma(v)]\,[w, \tau(z)] = 0 \qquad (18)$$

olur. (18) eşitliğinde w yerine wt, $t \in T(U)$ yazılırsa

$$[u, \sigma(v)]\, T(U)\, [t, \tau(z)] = 0$$

bulunur. Lemma 2.2.47 den

$$[U, \sigma(T(U))] = (0) \text{ veya } [U, \tau(T(U))] = (0)$$

elde edilir. $U \subset T(U)$ olduğundan özel olarak $[U, \sigma(U)] = (0)$ veya $[U, \tau(U)] = (0)$ olur. Bu durumda Teorem 2.2.45' den $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur ki bu hipotezle çelişir. O halde $M \neq (0)$ dır. Öte yandan $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset [R, T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U$ dur.

Şimdi kabul edelim ki $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman R 'yi (σ,τ)-Lie ideal olarak alırsak, Lemma 2.2.43' den $M \subset Z$ veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.Buradan R komütatif halka veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ olur ki bu ise $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ oluşuyla çelişir. O halde $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

Sonuç 2.2.49: U sıfırdan farklı (σ,τ)-Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Buna göre $a, b \in R$ için $aUb = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : Teorem 2.2.48 den

$$[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U \text{ veya } [R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$$

olacak şekilde R nin sıfırdan farklı bir M ideali vardır. $\forall x \in R$, $u \in U$ ve $m \in M$ için $0 = a\,[x, \tau^{-1}(u)\, \tau^{-1}(b)\, m]_{\sigma,\tau}\, b$ ifadesi açılırsa

$$aR(\sigma(\tau^{-1}(u)\, \tau^{-1}(b))\, \sigma(m)\, b = (0)$$

olur. R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } \sigma(\tau^{-1}(Ub))\, \sigma(M)\, b = 0$$

bulunur. Eğer $\sigma(\tau^{-1}(Ub))\, \sigma(M)\, b = 0$ ise o zaman $Ub = 0$ veya $b = 0$ olur. Lemma 2.2.44' den $b = 0$ olur.

Aydın, N. , 1996

Bu makale boyunca R asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizması ve C genişletilmiş merkezi olarak alınmıştır.

Lemma 2.2.50: U, (σ,τ)-sol Lie ideal olsun. $U\subset Z$ ise $\forall u\in U$ için $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R halkası komütatiftir.

İspatı: $\forall x\in R$, $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ dur. $\sigma(u)$, $\tau(u)$, $[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ olduğundan $[x,u]_{\sigma,\tau} = x\sigma(u) - \tau(u)x = x(\sigma(u) - \tau(u))\in Z$ dir. R asal halka olduğu için R komütatif veya $\forall\ u\in U$ için $\sigma(u) = \tau(u)$ bulunur.

Teorem 2.2.51: U, R asal halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali, $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman $\forall u\in U$ için $\sigma(u) = \tau(u)$ veya R halkası komütatiftir.

İspat: $\forall x\in R$, $u\in U$ için $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Lemma 2.2.22 den $u\in Z$ veya $[x,u]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. $L = \{u\in U \mid u\in Z\}$ ve $K=\{u\in U \mid [R, u]_{\sigma,\tau}= 0\}$ kümelerini tanımlayalım. L ve K, U Lie idealinin toplamsal alt grupları ve $U=K\cup L$ olduğundan Önerme 1.23 den $U = L$ veya $U = K$ olmalıdır. Eğer $U = K$ ise

$$0 = [xy, u]_{\sigma,\tau} = x\,[y, \sigma(u)] \qquad \forall x,y\in R$$

olur. R halkasının asallığından $U\subset Z$ olur ki Lemma 2.2.50 den $U\subset Z$ ise $\forall u\in U$ için $\sigma(u) = \tau(u)$ veya R halkası komütatif olmalıdır.

Lemma 2.2.52: R asal halka, U, R halkasının bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $a\in R$ için $[a, U] = 0$ ise o zaman her $u\in U$ için $\tau(u) + \sigma(u)\in Z$ veya $a\in Z$ olur.

İspat : $a\notin Z$ olduğunu kabul edelim. $\forall x\in R$ ve $\forall u\in U$ için $[\tau(u)\,x, u]_{\sigma,\tau} = \tau(u)\,[x, u]_{\sigma,\tau}\in U$ ve böylece $0 = [\tau(u)\,[x, u]_{\sigma,\tau}, a]$ olmasından

$$0 = [\tau(u), a]\,[x, u]_{\sigma,\tau} \tag{19}$$

bulunur. (19) eşitliğinde x yerine xy yazılırsa

$$[\tau(u), a]\,x\,[y, \sigma(u)] = 0 \quad \forall\ x, y\in R$$

olur. R halkası asal olduğundan

$$[\tau(u), a]=0 \text{ veya } u\in Z$$

bulunur. Buradan her $u\in U$için $[\tau(u), a]=0$ ve böylece

$$[\tau(U), a]=0 \tag{20}$$

elde edilir. $u\in U$, $x, y\in R$ için $0= [[x,u]_{\sigma,\tau}, a]$ açılır ve (20) eşitliği kullanılırsa

$$\tau(u)\,[x,a]=a\,x\,\sigma(u) - x\sigma(u)a \qquad \forall\ x\in R,\ \forall\ u\in U \tag{21}$$

ve (21) de x yerine $v \in U$ yazılarak $U[\sigma(v),a] = 0$, $\forall v \in U$ olur. Lemma 2.2.44 den

$$[\sigma(U), a] = 0 \qquad (22)$$

bulunur. (21) ve (22) birlikte kullanılırsa

$$0 = [x, a]\,\sigma(u) + \tau(u)\,[a, x] \quad \forall x \in R, \forall u \in U \qquad (23)$$

elde edilir. (23) te x yerine xy yazıp (23) eşitliği yeniden kullanılırsa;

$$[x, \tau(u)]\,[y, a] = [a, x]\,[y, \sigma(u)] \ \forall x \in R$$

olur. Önerme 1.25 den $\lambda \in C$ için

$$\lambda\,[x, \sigma(u)] = [x,a] = \lambda\,[\tau(u), x] \quad \forall x \in R \qquad (24)$$

yazılır. (24) 'ten $\tau(u) + \sigma(u) \in Z \quad \forall u \in U$ elde edilir.

Lemma 2.2.53: R bir asal halka, U, R halkasının bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $a \in R$ için $[a, U] = 0$ ve $[a, U]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu taktirde $a = 0$ veya $\forall u \in U$ için $\tau(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

İspat : $u_0 \in U$ için $\sigma(u_0) \neq \tau(u_0)$ olduğunu kabul edelim. $\sigma(u_0)-\tau(u_0) \neq 0$ olduğundan Lemma 2.2.52 kullanılarak $a \in Z$ veya $\forall u \in U$ için $\tau(u) + \sigma(u) \in Z$ bulunur. Eğer $a \in Z$ ise

$0 = [a, u_0]_{\sigma,\tau} = a\sigma(u_0) - \tau(u_0)\,a = a(\sigma(u_0) - \tau(u_0))$ olur. R asal halka olduğundan $a = 0$ elde edilir.

Teorem 2.2.54: R asal halka, U (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $[U, U]_{\sigma,\tau} = 0$ ve $[U, U] = 0$ ise o zaman $U \subset Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $U \not\subset Z$ olsun. Lemma 2.2.53 den her $u \in U$ elemanı için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur. $[xv, u]_{\sigma,\tau} = [x, \tau(u)]\,v \in U$ olduğundan hipotez gereği

$$0 = [w, [x, \tau(u)]\,v] = [w, [x, \tau(u)]]\,v \quad \forall x \in R, \forall u, v, w \in U$$

olur. Buradan $(0) = [w, [x, \tau(u)]]\,U$ olması kullanılarak Lemma 2.2.44 den

$$[w, [x, \tau(u)]] = 0 \quad \forall x \in R, \forall u, w \in U$$

bulunur. I_W ve $I_{\tau(u)}$ sırasıyla w ve $\tau(u)$ elemanlarıyla belirlenen R halkasının iç türevleri olsunlar. O zaman, yukarıdaki ifadeden $I_W I_{\tau(u)}(R) = 0$ olduğundan Teorem 2.1.4 den $U \subset Z$ olur ki bu kabulümüzle çelişir.

Lemma 2.2.55: R asal halka U, R halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkası olsun. O zaman $\forall u\in U$ için $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ve sol idealini kapsar.

İspat : $u_0\in U$ için $\sigma(u_0) + \tau(u_0)\notin Z$ olduğunu kabul edelim. $x\in R$, $v\in U$ için $[xu_0 , v]_{\sigma,\tau}= x [u_0 , \sigma(v)] + [x, v]_{\sigma,\tau} u_0 \in U$ olur. Bu ifadenin ikinci terimi U alt halkasının elemanı olduğundan $\forall x \in R$, $\forall v\in U$ için $x[u_0, \sigma(v)] \in U$ bulunur. Böylece

$$R [u_0 , \sigma (U)] \subset U$$

elde edilir. Eğer $R[u_0,\sigma(U)]=0$ ise R asal halka olduğundan $[u_0,\sigma(U)]=0$ ve böylece $[\sigma^{-1}(u_0), U] = 0$ olur. Lemma 2.2.52'den $u_0\in Z$ olur. Bu durumda $\sigma(u_0)+\tau(u_0)\in Z$ olacağı için kabulümüzle çelişir.

Benzer şekilde $[ux, v]_{\sigma,\tau} = u [x, v]_{\sigma,\tau} + [u, \tau (v)] x \in U$ olduğu kullanılarak U nun R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini kapsadığı görülür.

Teorem 2.2.56: R asal halka, U, R nin (σ,τ)-sol Lie ideali ve $\sigma(v)+\tau(v)\notin Z$ olacak biçimde bir $v \in U$ olsun. O zaman R halkasının sıfırdan farklı bir A sol ve sıfırdan farklı bir B sağ idealleri vardır ve $[R , A]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R , B]_{\sigma,\tau}\subset U$ fakat $[R, A]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ ve $[R, B]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ dir.

İspat : $T= \{x\in R \mid [R, x]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ kümesinin R halkasının hem (σ,τ)-sol Lie ideali ve hem de alt halkası olduğunu biliyoruz. Üstelik $U\subset T$ idi. $U\not\subset Z$ olduğundan $T \not\subset Z$ dir. Lemma 2.2.55 den T, R halkasının sıfırdan farklı A sol ve B sağ idealini kapsar. T kümesinin tanımından $[R, A]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R, B]_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğu açıktır. **Eğer $[R, A]_{\sigma,\tau} \subset Z$ ise**; $[\tau(a)x, a]_{\sigma,\tau} = \tau(a) [x, a]_{\sigma,\tau} \in Z$ olacağından $a\in Z$ veya $[x, a]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Eğer $[x, a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise x yerine xy yazılırsa

$$[x, \tau (a)]y = 0 \quad \forall x, y \in R, \forall a \in A$$

elde edilir. Bu durumda R halkasının asallığından $\forall a \in A$ için $a\in Z$, olur. Böylece $A \subset Z$ bulunur. O zaman $\forall x, y \in R$, $\forall a \in A$ için $0 = [x, ya] = [x,y] a$ olur. Bu durumda $a = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Benzer şekilde $[x\sigma(b), b]_{\sigma,\tau}= [x, b]_{\sigma,\tau} \sigma(b)$ eşitliği kullanılarak $[R, B]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ olduğu görülür.

Teorem 2.2.57: R asal halka, U, R nin bir (σ,τ)-sol Lie ideali, $v \in U$ için $\tau(v) + \sigma(v) \notin Z$ ve a, $b \in R$ olsun. $aUb = 0$ ise bu taktirde $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $b \neq 0$ olsun. Teorem 2.2.56'dan $[R, B]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R, B]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir B sağ ideali vardır. $\forall x \in R$, $\forall s \in B$ için hipotez gereği $0 = a\,[x, s]_{\sigma,\tau}\, b$ olur. Burada x yerine xy yazılırsa

$$0 = ax\,[y, s]_{\sigma,\tau}\, b + a\,[x, \tau(s)]yb$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede x yerine ub, $u \in U$ yazlırsa

$$0 = a\,[ub, \tau(s)]yb \qquad \forall y \in R, \forall u \in U, \forall s \in B$$

olur. R asal halka ve $b \neq 0$ olduğundan $\forall s \in B$, $\forall u \in U$ için $0 = a[ub, \tau(s)] = ub\tau(s) - a\tau(s)ub = a\tau(s)ub$ bulunur ve böylece $(0) = a\,\tau(B)Rub$ olur. R asal halka olduğundan

$$a\tau(B) = 0 \text{ veya } Ub = 0$$

elde edilir. Lemma 2.2.44 den $b \neq 0$ olduğu için $Ub \neq 0$ olur. Böylece yukarıdaki ifadeden $a\tau(B) = 0$ olmalıdır. Bu durumda $0 = a[x,s]_{\sigma,\tau}b = a\,x\,\sigma(s)b - a\tau(s)xb = ax\sigma(s)\,b$ olur. Böylece

$$a\,R\,\sigma(B)\,b = (0)$$

bulunur. $R\sigma(B)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $b \neq 0$ ve R asal halka olduğundan $a = 0$ elde edilir.

Lemma 2.2.58: R, karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, $\forall x \in R$ için $\sigma(x) - \tau(x) \in Z$ olsun. Bu taktirde $\sigma = \tau$ veya R halkası komütatiftir.

İspat: Kabul edelim ki R halkası komütatif olmasın. $\forall x, y \in R$ için

$$0 = [\sigma(x) - \tau(x), y] = [\sigma(x), y] - [\tau(x), y] \qquad (25)$$

olur. (25) de x yerine x^2 yazılır, (25) eşitliği ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olması kullanılırsa

$$(\sigma(x) - \tau(x))\,[\,\sigma(x), y] = 0$$

bulunur. $\sigma(x) - \tau(x) \in Z$ ve R halkasının asal olmasından

$$\sigma(x) = \tau(x) \text{ veya } x \in Z, \ \forall x \in R$$

olur. $K=\{x\in R \mid \sigma(x) = \tau(x)\}$ ve $L = \{x\in R \mid x\in Z\}$ kümeleri R halkasının toplamsal iki alt grubu ve $R= K\cup L$ olduğundan Önerme 1.23 den $R= K$ veya $R= L$ olmalıdır. R değişmeli olmayan bir halka kabul edildiği için $\forall x\in R$ için $\sigma(x) = \tau(x)$ bulunur.

Lemma 2.2.59 : R, char$R\neq 2$ olan bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sağ Lie ideal ve $U \subset Z$ olsun. Bu durumda $\sigma = \tau$ veya R halkası komütatiftir.

İspat : $\forall x\in R$, $\forall u\in U$ için $[u, x]_{\sigma,\tau} = u\,\sigma(x) - \tau(x)\,u = u\,(\sigma(x) - \tau(x)) \in Z$ olduğundan

$u = 0$ veya $\forall\, x \in R$ için $\sigma(x) - \tau(x) \in Z$

olur. $U \neq (0)$ olduğundan $\forall\, x \in R$ için $\sigma(x) - \tau(x) \in Z$ bulunur. Lemma 2.2.58 den $\sigma = \tau$ veya R halkası komutatif olur.

Teorem 2.2.60: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka U, sıfırdan farklı (σ,τ)- Lie ideal ve $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman $\sigma = \tau$ veya R halkası komütatiftir.

2.3. Türevli ve Lie İdealli Halkalar

Awtar , R. ,1973

Yazar bu çalışmasında d: $R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olarak almıştır.

Lemma 2.3.1: R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. $[u, d(u)] \in Z$ ve $u^2 \in U$ ise bu taktirde her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ olur.

Lemma 2.3.2: R bir asal halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde her $u \in U$ ve her $r \in R$ için $[[d(r), u], u] \in Z$ olur. Üstelik her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ ise her $r \in R$ için $[[d(r), u], u] = 0$ olur.

Lemma 2.3.3: R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve U , R nin bir Jordan ideali olsun. Her $u \in U$ için $u\, d(u) = d(u)u = 0$ ise bu taktirde $U = 0$ dır.

Teorem 2.3.4: R karakteristiği 2 ve 3 den farklı olan bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.5: R karakteristiği 3 den farklı olan bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U bir Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ve $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.6: R, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, d, R nin sıfırdan farklı bir türevi ve U, bir Jordan ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.7: R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, d, R nin sıfırdan farklı bir türevi olsun. U, R halkasının bir alt halkası ve Lie (Jordan) ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise U komütatiftir.

Lee,P. H. ve Lee, T. K. , 1983

Bu makale boyunca R, char$R \neq 2$ olan bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.8: d, R halkasının sıfırdan farklı türevi, $d(Z) \neq 0$ ve $a \in R$ için $[a, d(U)] \subseteq Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ olur.

Teorem 2.3.9: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $d^2(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.10: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ için $[a, d(U)] \subseteq Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.11: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu taktirde $[d(U), d(U)] \subseteq Z$ ise $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.12: d ve δ , R nin sıfırdan farklı iki türevi olsun. $d\delta(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.13: Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.14: $a \in R$ ve $ad(U) \subseteq Z$ ise $a = 0$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Awtar, R. , 1984

Teorem 2.3.15: R, char$R \neq 2$ asal halka, $0 \neq d$, R halkasının türevi, $U \not\subset Z$ olan R nin bir Lie ideali ve $d^2(U) \subseteq Z$ olsun. $a \in R$ için $d(a) = 0$ ve $[a, d(U)] \subset Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Teorem 2.3.16: R, char$R \neq 2$ asal halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. $a \in R$ elemanı , her $u \in U$ için $[a, [a, u]] \in Z$ olacak biçimde ise bu taktirde $[a, U] = 0$ olur. Üstelik $U \not\subset Z$ ise $a \in Z$ dir.

Teorem 2.3.17: R yarı-asal, 2 - torsion free halka ve U, R halkasının Lie ideali olsun. $a \in R$ elemanı, her $u \in U$ için $[a, [a, u]] \in Z$ olacak biçimde ise bu taktirde $[a, U] = 0$ dır.

Teorem 2.3.18: R, char$R \neq 2$ olan bir asal halka ve $U \not\subset Z$ olan R halkasının bir Lie ideali olsun. $a \in R$ elemanı, her $u \in U$ için $[a, d(u)] \in Z$ olacak biçimde ise bu taktirde $d = 0$ veya $a \in Z$ dir.

Teorem 2.3.19: R, char$R \neq 2$ olan bir asal halka ve U, R nin Lie ideali olsun. d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $d^2(U) \subset Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.20: R, char$R \neq 2$ asal halka ve $U \not\subset Z$ olan R halkasının bir Lie ideali olsun. δ, d , R nin iki türevi ve $\delta d(U) \subset Z$ ise bu taktirde $\delta = 0$ veya $d = 0$ dır.

Terome 2.3.21: R, char$R \neq 2$ asal halka, d, R nin sıfirdan farklı bir türevi ve U, R nin Lie ideali olsun. Her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise o zaman $U \subset Z$ dir.

Carini , L. , 1985

Bu makalede R yarı-asal, 2-torsion free halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R nin $d^2(U)=0$ ve $d(U) \subset U$ olan bir türevi olarak alınmıştır.

Lemma 2.3.22: $d([U, R]) = 0$ dır.

Lemma 2.3.23: $d(R)[U, R] = 0$ dır.

Teorem 2.3.24: R yarı-asal 2-torsion free halka, d, R halkasının bir türevi ve U Lie ideali olsun. $d^2(U) = 0$ ise bu taktirde $d(U) \subset Z$ dir.

Sonuç 2.3.25: R yarıasal, 2 -torsion free halka ve d, R halkasının bir iç türevi olsun. I, R nin bir ideali olmak üzere $d^2(I) = 0$ ise o zaman $d(I) = 0$ dır.

Sonuç 2.3.26: R yarı-asal, 2-torsion free halka ve U , R halkasının bir Lie ideali olsun. d, R nin $d^2(U) = 0$ olan bir iç türevi ise bu taktirde $d(U) = 0$ dır.

Hongan , M. (1985)

Bu makale boyunca R karakteristiği 2'den farklı asal halka, C ,R halkasının merkezi, $0 \neq d: r \to r'$ bir $\sigma: R \to R$ örten dönüşümü ile tanımlanmış bir yarı-türev, $\sigma d = d\sigma$, U, R nin Lie ideali , $W = [U, U]$ ve $S = [W, W]$ olarak alınmıştır.

(1-U) $U \subseteq C$

(2-U) $U' \subseteq C$

(3-U) $U'' \subseteq C$

(4-U) $[U', U'] \subseteq C$

(5-U) $[a, U'] \subseteq C$ olacak biçimde bir $a \in R \setminus C$ vardır.

(6-U) $aU' \subseteq C$ olacak biçimde sıfirdan farklı bir $a \in R$ vardır.

(7-U) $[u, u'] \in C$, $\forall u \in U$

(8-U) $\delta\sigma = \sigma\,\delta$ ve $(U')^* \subseteq C$ olacak şekilde , $\tau : R \to R$ bire-bir fonksiyonu ile tanımlanmış $0 \neq \delta : R \to R$, $r \to r^*$ yarı-türevi vardır.

Teorem 2.3.27: (1-U), (1-W), (1-S) ve (2-U) denktirler ve (3-U) - (8-U) dan herhangi biri gerçekleniyor ise bu taktirde $\sigma(U) \subseteq Z$ dir..

Lemma 2.3.28: (1) $W' \subseteq [U, U'] + [\sigma (U), U'] \subseteq U + \sigma (U)$ dur. Özel olarak $U' \subseteq C$ ise $W' = 0$ dır.

(2) Eğer $U' = 0$ ise o zaman $U \subseteq C$ dir.

(3) $a' = 0$ olan her $a \in R$ için $\sigma (a) = a$ dır.

Lemma 2.3.29: (1-U), (1-W), (1-S) ve (2-U) denktirler.

Lemma 2.3.30: $aU' = 0$ (veya $U' a = 0$) olacak biçimde bir sıfırdan farklı $a \in R$ var ise bu taktirde $U \subseteq C$ dir.

Lemma 2.3.31: $U'' = 0$ ise bu taktirde $U \subset C$ dir.

Lemma 2.3.32: 1) $C' \neq 0$ ve $a \in R\setminus C$ için $[a, U'] \subseteq C$ ise bu taktirde $U \subseteq C$ dir.

2)Bir $a \in R \setminus C$ için $[a, U'] = 0$ ise o zaman $\sigma (U) \subseteq C$ dir.

Lemma 2.3.33: $\sigma (U) \not\subset C$ ve $U''' = 0$ ise bu taktirde $R''' = 0$ dır.

Sonuç 2.3.34: R değişmeli olmayan bir halka ve σ bir bire-bir dönüşüm ise bu taktirde (2-S) - (8-S) den herbiri (1-U) ile denktir.

Aydın, N. ,1991

Bu makalede R, char$R\neq 2$ olan asal halka, d, R halkasının (σ,τ)-yarı-türevi, U sıfırdan farklı bir Lie ideali olarak alınmıştır.

Lemma 2.3.35: $d^2(U) = 0$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Lemma 2.3.36: $a \in R$ olsun. Buna göre $[d (U), a] = 0$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.37: $[d (U), d (U)] = 0$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Lemma 2.3.38: $U \not\subset Z$ ve $d^3(U) = 0$ ise bu taktirde $d^3 (R) = 0$ dır.

Lemma 2.3.39: $a \in R$ ve $d(Z) \neq 0$ olsun. Buna göre $[d(U), a] \subseteq Z$ ise $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Lemma 2.3.40: $d^2(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Lemma 2.3.41: $a \in R$ için $[d(U),a] \subseteq Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.42: $[d(U), d(U)] \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.43: d_1, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)-yarı-türevi ve d_2 sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d_1d_2(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.44: d_1 ve d_2 R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)-yarı türevleri olmak üzere $d_1d_2(U) \subseteq Z$ ise bu taktirde $U \subseteq Z$ dir.

Kandamar , H. ve Kaya , K. , 1992

Bu makale boyunca R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, (σ,τ)-türevi olarak alınmıştır.

Lemma 2.3.45: $d(U) = 0$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.3.46: $U \not\subset Z$, $t \in R$ olsun. $td(U) = 0$ (veya $d(U)t = 0$) ise bu taktirde $t = 0$ dır.

Lemma 2.3.47: $d(U) \subset Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.48 : d, R nin sıfırdan farklı (σ,τ)-türevi , $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ ve U sıfırdan farklı Lie ideali için $d(U) \subset U$ olsun. Buna göre $d^2(U) = 0$ ise $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.3.49: $a \in R$, $U \not\subset Z$ ve $[U, a] \subset Z$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

Teorem 2.3.50: $[U, d(U)] \subset Z$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Aydın , N. ve Soytük, M. , 1995

Yazar bu çalışması boyunca R, char$R \neq 2$ bir asal halka, $0 \neq d$, R nin türevi, σ, $\tau: R \to R$ iki otomorfizma ve $d\sigma = \sigma d$, $\tau d = d\tau$ olarak almıştır.

Lemma 2.3.51: U, R halkasının (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $U \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Teorem 2.3.52: U, R halkasının (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $d(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde R halkası komütatiftir.

Sonuç 2.3.53: U, R halkasının (σ,τ)- Lie ideali ve $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.3.54: U, R halkasının (σ,τ)- Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Buna göre $d(U)a = 0$ (veya $ad(U) = 0$) ise bu taktirde $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.3.55: U, R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali ve $d^2(U) = 0$ olsun. Bu taktirde $d(U) \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.56: U, R halkasının bir (σ,τ)-Lie ideali ve $d^2(U) = 0$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

III. BÖLÜM

ASAL HALKALARDA σ-LİE İDEALLER

R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, σ,τ: $R \to R$, iki halka otomorfizması ve U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-Lie ideali olmak üzere,

i) U, R halkasının $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olan bir (σ,τ)-Lie ideali ise bu taktirde R nin $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olan sıfırdan farklı bir M ideali vardır [5] .

ii) U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $[U, a] = 0$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dur [5] .

iii) U, R nin bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu taktirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya U , R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar [19] .

olduğu daha önce ispatlandı.

Bu bölümde yukarıda verilen teoremler karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halkanın σ-Lie idealine uygulanmıştır.

Tanım 3.1: R bir halka ve $\sigma : R \to R$ bir dönüşüm olsun. $x, y \in R$ için $x\sigma(y) - yx$ ifadesi $[x,y]_\sigma$ ile gösterilsin. U, R halkasının bir toplamsal alt grubu olmak üzere

i) $[U, R]_\sigma \subset U$ oluyorsa U ya R halkasının ***σ-sağ Lie ideali***,

ii) $[R, U]_\sigma \subset U$ oluyorsa U ya R halkasının ***σ-sol Lie ideali*** denir.

iii) U, R halkasının hem σ-sağ Lie ideali, hem de σ-sol Lie ideali oluyorsa U ya R halkasının ***σ-Lie ideali*** denir.

σ, R halkasının özdeşlik dönüşümü olarak alındığında her Lie idealin bir σ-Lie ideal olduğu açıktır.

Örnek 1: R= $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \middle| x,y,z,t \in I\right\}$ halkasının V= $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in I\right\}$ alt kümesini ele alalım. V, R halkasının bir toplamsal alt grubudur. σ: R $\rightarrow$ R

$\sigma\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & -y \\ -z & t \end{pmatrix}$ olarak tanımlansın. A= $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ve B = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ R

elemanları için,

$$\sigma\,(A+B) = \begin{pmatrix} x+a & -y-b \\ -z-c & t+d \end{pmatrix} = \sigma(A)+\sigma(B)$$

olduğundan σ toplamsal bir dönüşümdür. Üstelik,

$$\sigma\,(AB) = \begin{pmatrix} xa+yc & -xb-yd \\ -za-tc & zb+td \end{pmatrix} = \sigma(A)\sigma(B)$$

olduğundan σ bir halka homomorfizmasıdır. σ aynı zamanda 1-1 ve örten olduğundan R halkasının bir otomorfizmasıdır. Diğer taraftan,

A= $\begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \in$ V ve B = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ R elemanları için

$$[\,A, B]_\sigma = A\sigma(B) - BA = \begin{pmatrix} -cy-bz & -2bx+dy-ay \\ az-2cx-dz & -cy-bz \end{pmatrix} \in V$$

ve

$$[B,A]_\sigma = B\sigma(A) - AB = \begin{pmatrix} -bz-cy & -ay-dy \\ -dz-az & -bz-cy \end{pmatrix} \in V$$

olduğundan V, R halkasının σ-Lie idealidir. Üstelik;

$$[A, B] = \begin{pmatrix} cy-bz & dy-ay \\ az-dz & bz-cy \end{pmatrix} \notin V$$

olduğundan V, R halkasının bir Lie ideali değildir.

Örnek 2: R=$\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \middle| x,y,z,t \in I\right\}$ halkasını ve V=$\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| x,y \in I\right\}$ alt kümesini ele alalım. V kümesi R nin bir toplamsal alt grubudur. σ: R$\to$R dönüşümü

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-z & z-x+t-y \\ -z & z+t \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın. $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$ için

$$\sigma(A+B) = \begin{pmatrix} x+a-z-c & z+c-x-a+t+d-y-b \\ -z-c & z+c+t+d \end{pmatrix} = \sigma(A) + \sigma(B),$$

$$\sigma(AB) = \begin{pmatrix} ax+cy-az-ct & az+ct-ax-cy+bz+dt-bx-dy \\ -az-ct & az+ct+bz+dt \end{pmatrix} = \sigma(A).\sigma(B)$$

ve σ, 1-1 ve örten olduğundan σ: R $\to$R bir halka otomorfizmasıdır. Diğer taraftan $A=\begin{pmatrix} x & y \\ o & x \end{pmatrix} \in V$ ve $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$ elemanları için,

$$[B,A]_\sigma = \begin{pmatrix} -cy & -ay-dy \\ o & -cy \end{pmatrix} \in V$$

olduğundan V, R halkasının bir σ-sol Lie ideali olur. Fakat;

$$[A,B]_\sigma = \begin{pmatrix} -cx-cy & cx-ax+dx-2bx+dy+cy-ay \\ -2cx & cx-cy \end{pmatrix} \notin V$$

olmasından V, R halkasının σ-sağ Lie ideali değildir. Üstelik;

$$[A,B] = \begin{pmatrix} cy & dy-ay \\ o & -cy \end{pmatrix} \notin V$$

olduğundan V, R halkasının Lie ideali de değildir.

Örnek 3: R= $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \middle| x,y,z,t \in I\right\}$ halkasını ve T= $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & t \end{pmatrix} \middle| x,y,t \in I\right\}$ alt kümesini ele alalım. T, R halkasının toplamsal alt grubudur.

$$C=\begin{pmatrix} x & y \\ o & t \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix} \in T \text{ için } C.D=\begin{pmatrix} ax & ax+dy \\ o & dt \end{pmatrix} \in T$$

olduğundan T, R halkasının bir alt halkası olur.

Şimdi $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in I \right\}$ kümesini tanımlayalım. U kümesi T halkasının toplamsal alt grubudur. σ: R $\to$ R, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t & -z \\ -y & x \end{pmatrix}$ olarak tanımlandığında

$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ve $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$ elemanları için

$$\sigma(A+B)=\begin{pmatrix} t+d & -z-c \\ -y-b & x+a \end{pmatrix}=\sigma(A)+\sigma(B),$$

$$\sigma(A.B)=\begin{pmatrix} zb+td & -az-tc \\ -bx-dy & xa+yc \end{pmatrix}=\sigma(A)\sigma(B)$$

ve σ, 1-1, örten olduğundan σ bir halka otomorfizmasıdır.

$A=\begin{pmatrix} x & o \\ o & o \end{pmatrix} \in U,\ B=\begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix} \in T$ alalım.

$$[A, B]_\sigma=\begin{pmatrix} cx-ax & o \\ o & o \end{pmatrix} \in U$$

olur. Böylece U, T halkasının σ-sağ Lie idealidir. Fakat

$$[B, A]_\sigma=\begin{pmatrix} -ax & o \\ o & cx \end{pmatrix} \notin U$$

olduğu için U, T halkasının σ-sol Lie ideali değildir. Üstelik;

$$[B, A]=\begin{pmatrix} o & -bx \\ o & o \end{pmatrix} \notin U$$

olduğundan U, T halkasının Lie ideali de değildir.

Bu bölümde R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan asal halka, $C_\sigma = \{c \in R \mid c\sigma(x) = xc, \forall x \in R\}$ kümesi R halkasının σ-merkezi olarak alınacaktır. Z ile R halkasının merkezi gösterilecek ve aşağıdaki eşitlikler sık sık kullanılacaktır. $x, y, z \in R$ için;

(I) $[xy, z]_\sigma = x[y, z]_\sigma + [x, z]y = x[y, \sigma(z)] + [x, z]_\sigma y$

(II) $[x, yz]_\sigma = y[x, z]_\sigma + [x, y]_\sigma \sigma(z)$

(III) $[x, [y, z]]_\sigma + [[x, z]_\sigma, y]_\sigma - [[x, y]_\sigma, z]_\sigma = 0$

Lemma 3.2: U, R halkasının σ-sağ Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Buna göre $[U, a]_\sigma \subset C_\sigma$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subset C_\sigma$ dır.

İspat : Kabul edelim ki $a \notin Z$ ve $U \not\subset C_\sigma$ olsun. O zaman $u \in U$ ve $u \notin C_\sigma$ olacak şekilde bir u elemanı vardır. Hipotezden $[u,a]_\sigma \in C_\sigma$, $u \in U$ dur. Buna göre C_σ nin tanımından

$$[[u,a]_\sigma, x]_\sigma = 0, \quad \forall x \in R \tag{1}$$

bulunur. Öte yandan (III) no'lu özdeşlik kullanılarak

$$[u, [a,x]]_\sigma + [[u,x]_\sigma, a]_\sigma - [[u,a]_\sigma, x]_\sigma = 0$$

elde edilir. (1) no' lu eşitlikten dolayı bu ifade

$$[u, [a,x]_\sigma + [[u,x]_\sigma, a]_\sigma = 0 \tag{2}$$

olur. U, R halkasının σ-sağ Lie ideali olduğundan $[u, x]_\sigma \in U$ ve hipotezden dolayı $[[u, x]_\sigma, a]_\sigma \in C_\sigma$ dır. Böylece (2) no'lu eşitlikten

$$[u, [a,x]]_\sigma \in C_\sigma \quad \forall x \in R \tag{3}$$

bulunur. $d_a : R \to R$, $d_a(x) = [a,x]$ şeklinde tanımlayalım. d_a, R nin a ile belirlenen bir iç türevidir. $d_u : R \to R$, dönüşümü $d_u(x) = [u, x]_\sigma$ olarak tanımlandığında d_u, R halkasının u ile belirlenen bir $(\sigma,1)$ -iç türevi olur. Buna göre (3) no'lu ifadeden

$$d_u d_a(x) \in C_\sigma \quad \forall x \in R$$

yazılır. Burada, $d_a(R) \subset R$ ve $d_u d_a(R) \subset C_{\sigma,1}$ olduğundan Teorem 2.2.38 'den

$d_u = 0$ veya $d_a = 0$ veya R halkası komütatiftir.

elde edilir. $d_u = 0$ **ise** bu durumda $\forall x \in R$ için $[u,x]_\sigma = 0$ olur. C_σ kümesinin tanımından $u \in C_\sigma$ elde edilir. Bu ise $u \notin C_\sigma$ seçilişiyle çelişir. O halde $d_u \neq 0$ dır. $d_a = 0$ **ise** her $x \in R$ için $[a,x] = 0$ demektir. Yani $a \in Z$ olur. Bu ise $a \notin Z$ kabulümüzle çelişeceğinden $d_a \neq 0$ dır. O halde R komütatif bir halka olmalıdır. Bu durumda yine $a \in R \subset Z$ olacağı için çelişki olur. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece

$$a \in Z \text{ veya } U \subset C_\sigma$$

elde edilir.

Lemma 3.3: $a \in R$ ve $aU = (0)$ (veya $Ua = (0)$) olsun.

i) Eğer U, R halkasının σ-sol Lie ideali ise o zaman $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

ii) Eğer U, R halkasının σ-sağ Lie ideali ise o zaman $a = 0$ veya $U \subset C_\sigma$ dır.

İspat : $aU = 0$ olsun.

i) $x, y \in R$, $u \in U$ için U, R halkasının σ-sol Lie ideali olduğundan $[xy, u]_\sigma \in U$ olur. Hipotezden $0 = a\,[xy, u]_\sigma$ olur. (I) no'lu özdeşlik kullanılarak

$$0 = a\,x\,[y, \sigma(u)] + a\,[x, u]_\sigma\, y$$

elde edilir. $[x, u]_\sigma \in U$ olduğundan $a\,[x,u]_\sigma = 0$ olması kullanılarak yukarıdaki eşitlikten;

$$(0) = a\,R\,[y, \sigma(u)] \qquad \forall\, y \in R,\ \forall\, u \in U$$

bulunur. R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } [R, \sigma(u)] = (0), \qquad \forall\, u \in U$$

elde edilir. $\forall u \in U$ için $[R, \sigma(u)] = (0)$ olması durumunda $\sigma(U) \subseteq Z$ ve σ otomorfizma olduğundan $U \subseteq Z$ bulunur.

ii) U, σ-sağ Lie ideal olsun. Bu durumda $x, y \in R$ ve $u \in U$ için $[u, xy]_\sigma \in U$ olur. Hipotezden $0 = a\,[u, xy]_\sigma$ olur. (III) no'lu özdeşlik kullanılarak

$$0 = x\,[u,y]_\sigma + a\,[u, x]_\sigma\,\sigma(y).$$

elde edilir. Üstelik $[u, x]_\sigma \in U$ olduğundan hipotez gereği $a\,[u,x\,]_\sigma = 0$ olduğundan bu ifadeden

$$0 = a\,x\,[u,y]_\sigma \quad \forall\, x, y \in R, \forall\, u \in U$$

bulunur. Yani

$$a\,R\,[u,y]_\sigma = (0) \qquad \forall\, y \in R, \forall\, u \in U$$

olur. R asal halka olduğu için

$$a = 0 \quad \text{veya} \quad [u, R]_\sigma = (0), \forall\, u \in U$$

elde edilir. **$[u, R]_\sigma = (0)$ ise** C_σ kümesinin tanımından $\forall u \in U$ için $u \in C_\sigma$ olur. Böylece $U \subset C_\sigma$ bulunur.

Şimdi Ua= 0 olduğu durumda ispatı verelim .

i) U, σ-sol Lie ideal olduğundan $\forall\, x, y \in R$ için $[xy, u]_\sigma \in U$ olur. Hipotez kullanılarak $0 = [xy, u]_\sigma\, a$ yazılır. Bu ifadeye (I) no'lu özdeşlik uygulanarak

$$0 = x\,[y, u]_\sigma a + [x, u] y a$$

elde edilir. Burada $[y, u]_\sigma \in U$ olduğundan hipotezden $[y,u]_\sigma\, a = 0$ dır. Bu durumda yukarıdaki ifadeden

$$0 = [x, u]\, y\, a \quad \forall\, x, y \in R, \forall\, u \in U$$

elde edilir. Yani

$$[x,u]\, R\, a = (0) \quad \forall\, x \in R, \forall\, u \in U$$

bulunur. Burada R nin asal halka olduğu kullanılarak

$$[x,u] = 0 \text{ veya } a = 0\ \forall\, x \in R, \forall\, u \in U$$

olduğu görülür. Her $u \in U$ için **$[R, u]=(0)$** ise $u \in Z$ olur. Böylece $U \subset Z$ bulunur.

ii) U, σ-sağ Lie ideal olduğundan $\forall x, y \in R$ ve $\forall u \in U$ için $[u,xy]_\sigma \in U$ olur. Bu durumda $0 = [u,xy]_\sigma\, a$ dır. Burada (II) no'lu özdeşlik kullanılarak

$$0 = x\,[u,y]_\sigma\, a + [u,x]_\sigma \sigma(y)\, a$$

bulunur. U , σ-sağ Lie ideal olduğundan $[u,y]_\sigma \in U$ ve hipotezden $[u,y]_\sigma\, a = 0$ olduğu için yukarıdaki ifadeden

$$0 = [u,x]_\sigma \sigma(y)\, a \qquad \forall\, x, y \in R$$

elde edilir. σ nın otomorfizma olması kullanılarak

$$[u,x]_\sigma R\, a = (0) \qquad \forall x \in R, \forall u \in U$$

olduğu görülür. R bir asal halka olduğundan

$$[u,x]_\sigma = 0 \text{ veya } a = 0 \quad \forall x \in R, \forall u \in U$$

bulunur. Her $u \in U$ için $[u,R]_\sigma = (0)$ ise C_σ tanımından $u \in C_\sigma$ ve $U \subset C_\sigma$ bulunur.

Teorem 3.4: R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, $\sigma: R \to R$, halka otomorfizması, $(0) \neq U$, R halkasının merkezi ve σ-merkezi tarafından kapsanılmayan bir σ-Lie ideali olsun. Bu durumda R halkasının $[R, M]_\sigma \subset U$ fakat $[R,M]_\sigma \not\subset C_\sigma$ olan sıfırdan farklı bir M ideali vardır.

İspat: $T = \{x \in R \mid [R,x]_\sigma \subset U\}$ kümesini tanımlayalım. $U \neq (0)$ R nin bir σ-Lie ideali olduğundan $[R,U]_\sigma \subset U$ olur. O halde $U \subset T$ dir. $r \in R$, $x, y \in T$ için $[r, x\text{-}y]_\sigma = [r,x]_\sigma - [r,y]_\sigma$ ve U toplamsal alt grup olduğu için $[r, x\text{-}y]_\sigma \in U$ bulunur. Buradan $x\text{-}y \in T$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}[r, xy]_\sigma &= r\,\sigma(x)\,\sigma(y) - xyr \\ &= r\sigma(x)\,\sigma(y) - y\,r\,\sigma(x) + y\,r\,\sigma(x) - xyr \\ &= [r\sigma(x), y]_\sigma + [yr, x]_\sigma\end{aligned}$$

eşitliğinde $x,y \in T$ olduğundan $[r\sigma(x), y]_\sigma \in U$ ve $[yr, x]_\sigma \in U$ dur. U toplamsal alt grup olduğu için $[r, xy]_\sigma \in U$ bulunur. Böylece $xy \in T$ elde edilir. Yani T kümesi R halkasının bir alt halkasıdır. $x \in T$ ve $a,b \in R$ için (III) no'lu özdeşlikten

$$[a, [x,b]]_\sigma + [[a,b]_\sigma, x]_\sigma - [[a,x]_\sigma, b]_\sigma = 0$$

yazılır. Bu ifadede $x \in T$ olduğundan $[a, x]_\sigma \in U$ ve U, σ-Lie ideal olduğu için $[[a,x]_\sigma, b]_\sigma \in U$, $[[a,b]_\sigma, x]_\sigma \in U$ olur. U toplamsal alt grup için $[a, [x,b]]_\sigma \in U$ bulunur. O halde

$$[R, [T,R]]_\sigma \subset U$$

olur. Bu durumda T kümesinin tanımından; $[T, R] \subset T$ elde edilir. Böylece T, R halkasının bir Lie idealidir. R karakteristiği 2 den farklı asal halka ve T kümesi R halkasının hem Lie ideali ve hem de alt halkası olduğu için Önerme 1.22 ' den

$T \subset Z$ veya T, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

elde edilir. $U \subset T \subset Z$ olursa bu $U \not\subset Z$ kabulüyle çelişeceği için $T \not\subset Z$ dir. Bu durumda $(0) \neq M \subset T$ olan R halkasının bir ideali vardır. T kümesinin tanımından

$$[R,M]_\sigma \subset U$$

elde edilir. $[R, M]_\sigma \not\subset C_\sigma$ dir. Eğer $[R,M]_\sigma \subset C_\sigma$ olsaydı, R halkası σ-sağ Lie ideal olduğundan, Lemma 3.2' den $[R,M]_\sigma \subset C_\sigma$ iken $M \subset Z$ veya $R \subset C_\sigma$ elde edilir. $R \subset C_\sigma$ ise $U \subset R \subset C_\sigma$ olduğundan bu $U \not\subset C_\sigma$ oluşuyla çelişeceğinden $R \not\subset C_\sigma$ dır. O halde $M \subset Z$ dir. Bu ise $[R, M] = (0)$ demektir. $(0) \neq M$, R halkasının bir ideali olduğundan Önerme 1.13'ten $R \subset Z$ olur. Buradan $U \subset R \subset Z$ olur. Bu $U \not\subset Z$ oluşuyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani $[R,M]_\sigma \not\subset C_\sigma$ olmalıdır.

Sonuç 3.5: $(0) \neq U$, R halkasının merkezi ve σ-merkezi tarafından kapsanılmayan bir σ- Lie ideali olsun. $a, b \in R$ için $aUb = (0)$ ise o zaman $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_\sigma$ olduğundan Teorem 3.4' den R halkasında $[R,M]_\sigma \subset U$ fakat $[R,M]_\sigma \not\subset C_\sigma$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır. M , R halkasının ideali olduğundan $\forall x \in R$, $u \in U$, $m \in M$ için $ubm \in M$ dir. Bu durumda $[x, ubm]_\sigma \in U$ olur. Hipotezden

$$0 = a\,[x, ubm]_\sigma\, b$$

elde edilir. Burada (II) no'lu özdeşlik kullanılarak

$$0 = aub\,[x,m]_\sigma b + a\,[x, ub]_\sigma\, \sigma(m)\, b$$

olduğu görülür. $aUb = (0)$ olduğu kullanılırsa

$$0 = a\,[x, ub]_\sigma\, \sigma(m)\, b \quad \forall x \in R, \forall u \in U, \forall m \in M \qquad (4)$$

elde edilir. (4) no 'lu eşitliğe hipotez uygulanılarak

$$0 = ax\sigma(ub)\sigma(m)b - aubx\sigma(m)b = ax\sigma(ub)\,\sigma(m)\, b$$

ve böylece

$$aR\sigma(ub)\sigma(m)b = (0) \qquad \forall u \in U, \forall m \in M$$

elde edilir. R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } \sigma(ub)\sigma(m)b = 0 \quad \forall u \in U, \forall m \in M$$

bulunur. **$\sigma(Ub)\sigma(M)b = (0)$** ise; $0 \neq M$, R halkasının bir ideali ve σ bir otomorfizma olduğundan $\sigma(M) \neq 0$ R nin bir idealidir. R halkasının asal olduğu kullanılarak Önerme 1.4 (3) ve (4) 'den,

$$\sigma(Ub) = (0) \text{ veya } b = 0$$

bulunur. $Ub = (0)$ ise $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_\sigma$ olduğundan Lemma 3.3'den $b = 0$ bulunur.

Teorem 3.6: R, karakteristiği 2 den farklı olan asal halka, $\sigma : R \to R$ bir otomorfizma, U, R halkasının σ-sağ Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Buna göre $[U, a] = 0$ ise bu taktirde $a \in Z$ veya $U \subset C_\sigma$ dir.

İspat : $x \in R$ ve $u \in U$ alalım. U σ-sağ Lie ideal olduğundan $[u, x]_\sigma \in U$ dur. Böylece

$$0 = [[u, x]_\sigma, a] = [u\sigma(x) - xu, a] = [u\sigma(x), a] - [xu, a]$$
$$= u[\sigma(x), a] + [u,a]\sigma(x) + x[a, u] + [a,x]u$$

elde edilir. $[u, a]=0$ olduğu kullanılırsa yukarıdaki ifadeden

$$0 = u[\sigma(x), a] + [a, x]u \qquad \forall x \in R, \forall u \in U \tag{5}$$

Yani

$$u[\sigma(x), a] = [x, a]u \quad \forall x \in R, \forall u \in U \tag{6}$$

bulunur. (5) eşitliğinde x yerine xy, $y \in R$ yazılır ve (6) no'lu eşitlik kullanılırsa

$$0 = u[\sigma(xy), a] + [a, xy]u = u[\sigma(x)\sigma(y), a] + [a, xy]u$$
$$= u\sigma(x)[\sigma(y), a] + u[\sigma(x),a]\sigma(y) + x[a,y]u + [a, x]yu$$
$$= u\sigma(x)[\sigma(y),a] + u[\sigma(x),a]\sigma(y) - x[y,a]u - [x,a]yu$$
$$= u\sigma(x)[\sigma(y),a] + [x,a]u\sigma(y) - xu[\sigma(y),a] - [x,a]yu$$
$$= (u\sigma(x)-xu)[\sigma(y),a] + [x,a](u\sigma(y) - yu)$$

olur ve böylece

$$0 = [u,x]_\sigma[\sigma(y), a] + [x, a][u,y]_\sigma \quad \forall x, y \in R, \forall u \in U \tag{7}$$

eşitliği elde edilir. (7) eşitliğinde y yerine $\sigma^{-1}(a)$ yazılırsa

$$0 = [u,x]_\sigma[\sigma(\sigma^{-1}(a)), a] + [x,a][u, \sigma^{-1}(a)]_\sigma$$

ve buradan

$$0 = [x,a]\ [u, \sigma^{-1}(a)]_\sigma\ \forall x \in R,\ \forall u \in U \qquad (8)$$

olduğu görülür. (8) eşitliğinde x yerine xy, $y \in R$ yazılırsa

$$0 = [xy, a]\ [u, \sigma^{-1}(a)]_\sigma$$

$$= x\,[y, a]\ [u, \sigma^{-1}(a)]_\sigma + [x, a]y\ [u, \sigma^{-1}(a)]_\sigma$$

olur. Bu ifadenin ilk terimi (8)' den dolayı sıfırdır. Böylece

$$[x,a]\, R\, [u, \sigma^{-1}(a)]_\sigma = (0) \quad \forall x \in R, \forall u \in U$$

elde edilir. R asal halka olduğundan

$$[R,a] = (0) \text{ veya } [U, \sigma^{-1}(a)]_\sigma = (0)$$

bulunur. Bu ise

$$a \in Z \text{ veya } [U, \sigma^{-1}(a)]_\sigma = (0)$$

demektir. Kabul edelim ki $[U, \sigma^{-1}(a)]_\sigma = (0) \subset C_\sigma$ olsun. U σ-sağ Lie ideal olduğu için Lemma 3.2' den $\sigma^{-1}(a) \in Z$ veya $U \subset C_\sigma$ elde edilir. σ otomorfizma olduğundan $a \in Z$ veya $U \subset C_\sigma$ bulunur.

Sonuç 3.7: U, R halkasının σ-sağ Lie ideali ve U komütatif olsun. Bu taktirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_\sigma$ dır.

İspat : U komütatif olduğundan $[U, U] = 0$ dır. Teorem 3.6' dan $U \subset Z$ veya $U \subset C_\sigma$ olur.

Teorem 3.8: R karakteristiği 2 den farklı asal halka, $\sigma: R \to R$, bir halka otomorfizması, U, R halkasının $[U, U]_\sigma \subset C_\sigma$ olan bir σ-sağ Lie ideali ise bu taktirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_\sigma$ dir.

İspat : $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_\sigma$ olduğunu kabul edelim. O zaman $a \notin Z$ ve $b \notin C_\sigma$ olacak biçimde $a, b \in U$ elemanları vardır. U, σ-sağ Lie ideal olduğundan $\forall x \in R$ için $[a, x]_\sigma \in U$ olur. $b \in U$ olmak üzere

$$[[a, x]_\sigma, b]_\sigma \in C_\sigma \quad \forall x \in R$$

dir. (III) no'lu özdeşlik kullanılarak

$$[a, [x, b]]_\sigma + [[a,b]_\sigma, x]_\sigma - [[a,x]_\sigma, b]_\sigma = 0$$

bulunur. Bu ifadede $a, b \in U$ ve $[a,b]_\sigma \in C_\sigma$ olduğundan $[[a,b]_\sigma , x]_\sigma = 0$ olması kullanılarak;

$$[a, [x,b]]_\sigma = [[a,x]_\sigma ,b]_\sigma \in C_\sigma \quad \forall x \in R \tag{9}$$

elde edilir. $d_a : R \to R$, dönüşümü $d_a(x) = [a, x]_{\sigma,1}$ tanımlandığında R nin a elemanı ile belirlenen bir $(\sigma,1)$-iç türevi olur. $d_b : R \to R$, dönüşümü, $d_b(x) = [b, x]$ olarak tanımlandığında R halkasının b elemanı ile belirlenen bir iç türevi ve $d_b(R) \subset R$ dir. Üstelik $a \notin Z$ ve $b \notin C_\sigma$ kabul ettiğimiz için $d_a \neq 0$ ve $d_b \neq 0$ 'dır.Bu durumda (9) no'lu ifadeden

$$d_a d_b (R) \subset C_\sigma$$

elde edilir. Bu son ifadeye Teorem 2.2.38 uygulanırsa R halkasının komütatif olduğu elde edilir. Bu durumda $U \subset R \subset Z$ olur ki bu $U \not\subset Z$ kabulümüzle çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. $U \subset Z$ veya $U \subset C_\sigma$ dır.

Teorem 3.9: R karakteristiği 2 den farklı olan asal halka, $\sigma: R \to R$, halka otomorfizması, $(0) \neq U$, R halkasının σ-sağ Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu taktirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_\sigma$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat : $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_\sigma$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[U,U]_\sigma \neq 0$ dır. Eğer $[U,U]_\sigma = 0$ olsa U, σ-sağ Lie ideal ve $[U,U]_\sigma = 0 \subset C_\sigma$ olduğundan Lemma 3.2'den $U \subset Z$ veya $U \subset C_\sigma$ olur ki bu kabulümüzle çelişeceği için $[U,U]_\sigma \neq 0$ dır. $u, v \in U$, $y \in R$ alalım. U, σ-sağ Lie ideal olduğu için $[u, vy]_\sigma \in U$ olur. (II) no'lu özdeşlikten

$$[u, vy]_\sigma = v\,[u,y]_\sigma + [u, v]_\sigma\,\sigma(y)$$

yazılır. $v \in U$ ve U, σ-sağ Lie ideal olduğu için $[u, y]_\sigma \in U$ dur. Üstelik U, R halkasının alt halkası olduğundan $v\,[u,y]_\sigma \in U$ olur. U toplamsal alt grup olduğu için

$$[u, v]_\sigma \sigma(y) \in U \;, \quad \forall u, v \in U, \forall y \in R$$

bulunur. σ örten olduğu için

$$[u, v]_\sigma x \in U \;, \quad \forall u, v \in U \;, \forall x \in R \tag{10}$$

elde edilir. U, σ-sağ Lie ideal olduğu için $\forall y \in R$ için $[[u,v]_\sigma x, y]_\sigma \in U$ dur. Bu ifade açıldığında

$$[[u, v]_\sigma x, y]_\sigma = [u, v]_\sigma x \sigma(y) - y [u, v]_\sigma x$$

olur. (10) dan dolayı $[u, v]_\sigma x \sigma(y) \in U$ dur. Yine U toplamsal olduğundan

$$y [u, v]_\sigma x \in U, \quad \forall x, y \in R, \forall u, v \in U$$

bulunur ve böylece

$$R[U, U]_\sigma R \subset U$$

elde edilir. $\mathbf{M = R[U,U]_\sigma R} \subset U$ diyelim. M, R halkasının sıfırdan farklı bir idealidir. Eğer $M = R[U, U]_\sigma R = (0)$ ise R halkası asal halka olduğundan

$$[U,U]_\sigma = (0)$$

olur .Bu ise $[U,U]_\sigma \neq (0)$ olması ile çelişir. Böylece istenen görülmüş olur.

IV. BÖLÜM

TÜREVLİ ASAL HALKALARDA σ-LİE İDEALLER

R karakteristiği 2 den farklı olan asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-Lie ideali, σ, τ : $R \to R$, iki halka otomorfizması, $0 \neq d: R \to R$, bir türev ve $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ olmak üzere;

i) $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir [6].

ii) $d(U)a = 0$ (veya $ad(U) = 0$) ise $U \subset Z$ veya $a = 0$ dır [6].

iii) $d^2(U) = 0$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir [6].

Bu bölümde yukarıda verilen teoremler d, karakteristiği 2 den farklı olan bir R asal halkasının $\sigma d = d\sigma$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere U, σ-Lie ideali için uygulanmıştır.

$C_\sigma = \{ c \in R \mid c\sigma(x) = x c, \forall x \in R \}$ kümesi R halkasının σ-merkezidir.

Lemma 4.1: $a, b \in R$ için $ab, b \in C_\sigma$ ise o zaman $a \in Z$ veya $b = 0$ dır.

İspat : $\forall x \in R$ için $ab \in C_\sigma$ ve $b \in C_\sigma$ ve C_σ nın tanımından

$[ab, x]_\sigma = 0$ ve $[b,x]_\sigma = 0$

olur. (I) no'lu özdeşlik kullanılarak

$$0 = [ab, x]_\sigma$$
$$= a[b, x]_\sigma + [a, x]b$$

ve buradan

$$[a, x]b = 0 \quad \forall x \in R \tag{1}$$

bulunur. $b \in C_\sigma$ olduğu için $\forall y \in R$ için

$$b\sigma(y) = yb \tag{2}$$

olur. (1) no'lu eşitlik sağdan $\sigma(y)$ ile çarpılır ve (2) no'lu eşitlik kullanılırsa

$$0 = [a, x]b\sigma(y)$$

$= [a, x]\ yb$

ve böylece

$[a, x]\ R\, b = (0)\ ,\quad \forall\, x \in R$

elde edilir. R asal halka olduğu için

$[a, R] = (0)$ veya $b = 0$

bulunur. $[a,R] = 0$ ise $a \in Z$ olduğundan $a \in Z$ veya $b = 0$ elde edilir.

Lemma 4.2: U , R halkasının sıfırdan farklı bir σ-sol Lie ideali olsun.Bu durumda $U \subset C_\sigma$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

İspat : $x\in R$, $u\in U$ alalım. U, σ-sol Lie ideal olduğu için $[ux, u]_\sigma \in U$ olur. (I) no'lu özdeşlikten her $x \in R$ ve $u \in U$ için

$[ux, u]_\sigma = u\,[x, u]_\sigma + [u,u]\, x = u\,[x,u]_\sigma \in U$

elde edilir. Burada $u\,[x,u]_\sigma \in U \subset C_\sigma$ ve $[x,u]_\sigma \in U \subset C_\sigma$ olması kullanılarak Lemma 4.1' den

$[x,u]_\sigma = 0$ veya $u \in Z\ ,\quad \forall\, u \in U, \forall\, x \in R$

bulunur. $K = \{u\in U \mid [x,u]_\sigma = 0\}$ ve $L = \{u\in U \mid u \in Z\}$ kümelerini tanımlayalım. $U = K\cup L$ dir. $u, v \in K$ alalım. $[x,u]_\sigma = 0$ ve $[x, v]_\sigma = 0$ $\forall x \in R$ olur.

$[x, u\text{-}v]_\sigma = [x, u]_\sigma - [x,v]_\sigma = 0 - 0 = 0$

olduğundan $u - v \in U$ olur. Ohalde K, U 'nun toplamsal alt grubudur. $u, v \in L$ için $u, v \in Z$ ve Z toplamsal olduğundan $u\text{-}v \in Z$ olur. O zaman $u\text{-}v \in L$ yani L, U 'nun toplamsal alt grubudur. $U= K \cup L$ olduğundan Önerme 1.23' den $U = K$ veya $U = L$ olmalıdır. Eğer $U = K$ ise

$$[x,u]_\sigma = 0 \qquad \forall\, u \in U, \forall\, x \in R \tag{3}$$

olur. (3) eşitliğinde x yerine xy, $y\in R$ yazılır ve (I) no'lu özdeşlik kullanılırsa

$0 = [xy, u]_\sigma$

$= x\,[y,u]_\sigma + [x, u]\, y$

bulunur. Burada (3) ten dolayı $y \in R$, $u \in U$ için $[y, u]_\sigma = 0$, olduğu kullanılarak

$[x,u]\, R = (0)\ ,\quad \forall\, x \in R, \forall\, u \in U$

elde edilir. R asal halka olduğu için

$$[R, U] = (0)$$

ve böylece $U \subset Z$ olur.

. **Teorem 4.3:** R karakteristiği 2 den farklı asal halka , $0 \neq d: R \rightarrow R$, bir türev, $\sigma: R \rightarrow R$, halka otomorfizması ve $\sigma d = d\sigma$ olsun. U , R nin sıfırdan farklı bir σ-sağ Lie ideali ve $d(U) \subset C_\sigma$ ise bu taktirde $U \subset C_\sigma$ veya R halkası komütatiftir.

İspat : $\forall x \in R$, $\forall u \in U$ için U σ-sağ Lie ideal olduğu için $[u, x]_\sigma \in U$ dur. Hipotezden $d([u, x]_\sigma) \in C_\sigma$ dır. Yani

$$d(u\sigma(x)-xu) = d(u)\,\sigma(x)+ud(\sigma(x))-d(x)u-xd(u)$$

$$= [d(u),x]_\sigma + ud(\sigma(x))- d(x)u \in C_\sigma$$

bulunur. $d\sigma = \sigma d$ olduğu kullanılarak

$$[d(u),x]_\sigma + [u,d(x)]_\sigma \in C_\sigma$$

elde edilir. $[d(u),x]_\sigma = 0$ olduğundan

$$[u, d(x)]_\sigma \in C_\sigma , \quad \forall x \in R, \forall u \in U$$

bulunur ve buradan

$$[U, d(R)]_\sigma \subset C_\sigma$$

elde edilir. U, σ-sağ Lie ideal olduğu için Lemma 3.2' den

$$d(R) \subset Z \text{ veya } U \subset C_\sigma$$

olur. Eğer $d(R) \subset Z$ ise

$$[y, d(R)] = (0) , \quad \forall y \in R$$

olur. Teorem 2.1.10'dan R, $\mathrm{char}R \neq 2$ asal halka olduğu için $R \subset Z$ yani R halkasının komütatif olduğu elde edilir.

Sonuç 4.4: U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-Lie ideali olsun. Buna göre $d(U) \subset C_\sigma$ ise o zaman $U \subset Z$ dir.

İspat : U, σ-sağ Lie ideal olduğu için Teorem 4.3' den $U \subset C_\sigma$ ve U, aynı zamanda σ-sol Lie ideal olduğu için Lemma 4.2' den $U \subset Z$ elde edilir.

Lemma 4.5: U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ- Lie ideali, $0 \neq d:R \to R$ bir türev ve $a \in R$ olsun. Buna göre $d(U)a = 0$ (veya $ad(U) = 0$) ise bu taktirde $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat : $U \not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. Sonuç 4.4 'den $U \not\subset Z$ ise $d(U) \not\subset C_\sigma$ olacağından $d(U) \neq 0$ dır. U, σ-Lie ideal olduğundan her $x \in R$, $u \in U$ için $[ux, u]_\sigma \in U$ olur. (I) no'lu özdeşlik kullanılarak, $\forall x \in R$, $\forall u \in U$ için

$$\begin{aligned}[ux, u]_\sigma &= u\,[x,u]_\sigma + [u,u]\,x \\ &= u\,[x,u]_\sigma \in U ,\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $d(U)a = 0$ olmasından

$$0 = d(u\,[x,u]_\sigma\,)a = d(u)[x,u]_\sigma a + ud([x, u]_\sigma\,)a$$

olur. Yine $[x,u]_\sigma \in U$ olduğundan $d([x,u]_\sigma)a = 0$ dır. Bu durumda son eşitlikten

$$d(u)[x,u]_\sigma\, a = 0 \qquad \forall x \in R, \forall u \in U \tag{4}$$

elde edilir. (4) no'lu eşitlikte x yerine $xd(v)$, $v \in U$ yazılır, (I) no'lu özdeşlik ve hipotez kullanılırsa, $\forall x \in R$, $\forall u, v \in U$ için,

$$\begin{aligned}0 &= d(u)[x\,d(v), u]_\sigma\, a \\ &= d(u)\,x\,[d(v), u]_\sigma\, a + d(u)\,[x,u]\,d(v)\,a \\ &= d(u)\,x\,[d(v), u]_\sigma\, a\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece

$$d(u)\,R\,[d(v), u]_\sigma\, a = (0) \quad \forall u, v \in U \tag{5}$$

elde edilir. R asal halka olduğundan (5) den dolayı

$$d(u) = 0 \text{ veya } [d(v), u]_\sigma a = 0 \quad , \forall u, v \in U \tag{6}$$

bulunur. $K = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$ ve $L = \{u \in U \mid [d(v), u]_\sigma = 0, \forall v \in U\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L, U 'nun toplamsal iki öz alt grubudur. Çünkü: $u, w \in K$ için $d(u) = 0$, $d(w) = 0$ ve $d(u\text{-}w) = d(u) - d(w) = 0$ olduğundan $u\text{-}w \in K$ dır. Böylece K, U nun toplamsal alt grubudur. Benzer şekilde $u, w \in L$ elemanları için $[d(v), u]_\sigma\, a = 0$ ve $[d(v), w]_\sigma\, a = 0$ ve

$$[d(v), u\text{-}w]_\sigma\, a = [d(v), u]_\sigma\, a - [d(v), w]_\sigma\, a = 0$$

olduğundan $u - w \in L$ olur. O halde L de U nun bir alt grubudur. Üstelik (6) no'lu eşitlikten $U = K \cup L$ olduğu açıktır. Önerme 1.23 'den $U = L$ veya $U = K$ olmalıdır. $U = K$ olduğunu kabul edelim. $d(U) = 0 \subset C_\sigma$ olduğundan Sonuç 4.4 kullanılarak $U \subset Z$ olur. Bu ise $U \not\subset Z$ kabulümüzle çelişir. O halde $U = L$ olmalıdır. Bu durumda

$$[d(v), u]_\sigma a = 0, \qquad \forall u, v \in U \tag{7}$$

olur. (7) no'lu eşitlik açık yazılırsa

$$0 = d(v)\sigma(u)a - u\,d(v)a$$

bulunur. Burada $v \in U$ olduğundan hipotezden $d(v)a = 0$ olur. Böylece

$$d(v)\sigma(u)a = 0, \qquad \forall u, v \in U \tag{8}$$

elde edilir. σ otomorfizma olduğundan (8) no'lu eşitliğin her iki tarafından σ^{-1} uygulanırsa her $u, v \in U$ için

$$0 = \sigma^{-1}(d(v)\sigma(u)a)$$
$$= \sigma^{-1}(d(v))u\sigma^{-1}(a)$$

olur ve böylece

$$(0) = \sigma^{-1}(d(v))U\sigma^{-1}(a)$$

bulunur. Hipotezten $U \not\subset Z$ ve U, σ-sol Lie ideal olduğundan Lemma 4.2 'den $U \not\subset C_\sigma$ dır. Böylece Sonuç 3.5 kullanılarak $\forall v \in U$ için $d(v) = 0$ veya $a = 0$ elde edilir. Bu ise

$$d(U) = 0 \text{ veya } a = 0$$

demektir. $d(U) \neq 0$ olduğundan $a = 0$ bulunur.

Şimdi $ad(U) = 0$ olduğunu kabul edelim. $\forall x \in R$, $\forall u \in U$ için U, σ-Lie ideal olduğu için $[x\sigma(u), u]_\sigma \in U$ olur. (I) no'lu özdeşlikten $\forall x \in R$, $\forall u \in U$ için

$$[x\sigma(u), u]_\sigma = x[\sigma(u), \sigma(u)] + [x,u]_\sigma\,\sigma(u)$$
$$= [x,u]_\sigma\,\sigma(u) \in U$$

elde edilir. Hipotezden $ad(U) = 0$ olduğundan

$$0 = ad([x,u]_\sigma\sigma(u)) = a\,d([x,u]_\sigma)\sigma(u) + a[x,u]_\sigma\,d(\sigma(u))$$

yazılır. Burada $[x,u]_\sigma \in U$ ve hipotezden $ad([x,u]_\sigma) = 0$ olması kullanılarak

$$0 = a\,[x,u]_\sigma d\,(\sigma\,(u)) \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, u \in U \tag{9}$$

bulunur. (9) ' da x yerine d(v)x, v∈ U yazılır ve (I) no'lu özdeşlik kullanılırsa

$$0 = a\,[d\,(v)\,x,\ u]_\sigma\ d\,(\sigma\,(u))$$

$$= a\,d\,(v)\,[x,u]_\sigma\ d\,(\sigma\,(u)) + a\,[d\,(v),\,u]\,x\,d\,(\sigma\,(u))$$

olur ve hipotezden $v \in U$ için $a\,d\,(v) = 0$ olması kullanılarak

$$0 = a\,[d\,(v),\,u]\,x\,d\,(\sigma\,(u)) \qquad \forall\, x \in R\,, \forall\, u, v \in U$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$a\,[d\,(v),\,u]\,R\,d\,(\sigma\,(u)) = (0) \quad \forall\, u, v \in U$$

bulunur. R asal halka olduğundan

$$a\,[d\,(v),\,u] = 0 \quad \text{veya} \quad d\,(\sigma\,(u)) = 0\,, \ \forall\, u, v \in U$$

bulunur. Burada $\sigma d = d\sigma$ ve σ nın bir otomorfizma olması kullanılarak

$$a[d(U),u] = 0 \ \text{ veya } \ d\,(u) = 0 \qquad \forall\, u \in U$$

elde edilir. $K = \{u \in U \mid a\,[d\,(v),\,u] = 0\,,\ \forall v \in U\}$ ve $L = \{u \in U \mid d\,(u) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L, U 'nun iki toplamsal alt grubudur ve $U = K \cup L$ olduğundan Önerme 1.23 den $U = L$ veya $U = K$ olmalıdır. $U = L$ olması durumunda $d(U) = 0 \subset C_\sigma$ olduğundan Sonuç 4.4 'den $U \subset Z$ olur. Bu ise $U \not\subset Z$ kabulümüzle çelişir. O halde $U = K$ olmalıdır. Böylece

$$0 = a\,[d\,(v),\,u]\,, \qquad \forall\, u, v \in U$$

elde edilir. Bu ifade açılır ve $ad(v) = 0$ olması kullanılırsa

$$0 = ad\,(v)\,u - a\,u\,d\,(v)$$

$$= a\,u\,d\,(v)\,, \quad \forall u, v \in U$$

olur. Buradan

$$a\,U\,d\,(v) = (0)$$

elde edilir. $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_\sigma$ olduğu için Sonuç 3.5 uygulanarak

$$a = 0 \text{ veya } d\,(v) = 0 \quad \forall\, v \in U$$

bulunur.Eğer $d(U) = (0)$ ise Sonuç 4.4' den $U \subset Z$ bulunur. Bu ise $U \not\subset Z$ kabulümüz ile çelişir. Böylece $a = 0$ bulunur.

Not : U, R halkasının bir σ-sağ Lie ideali ve $d:R \to R$ bir türev olsun. Bu durumda $W = d(U) + U$ kümesi R halkasının bir σ-sağ Lie idealidir. Üstelik $d^2(U) = 0$ ise $d(W) \subseteq W$ ve $d^2(W) = 0$ dir.

İspat: $u, v \in U$ ve $x \in R$ için

$$[d(u) + v, x]_\sigma = [d(u), x]_\sigma + [v, x]_\sigma$$

$$= [d(u), x]_\sigma + [u, d(x)]_\sigma - [u, d(x)]_\sigma + [v, x]_\sigma$$

$$= d([u, x]_\sigma) - [u, d(x)]_\sigma + [v,x]_\sigma$$

olur. U, σ-sağ Lie ideal olduğu için $d([u,x]_\sigma) \in d(U)$, $[u, d(x)]_\sigma \in U$, $[v, x]_\sigma \in U$ olduğu kullanılarak yukarıdaki ifadeden

$$[d(u) + v, x]_\sigma \in d(U) + U \quad \forall u, v \in U, \forall x \in R$$

elde edilir. Böylece

$$[d(U) + U, R]_\sigma \subset d(U) + U$$

bulunur. Ayrıca $d(U) + U$ kümesi toplamsal grup olduğundan $d(U) + U$ kümesi R halkasının bir σ-sağ Lie ideali olur.

Şimdi $d^2(U) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$d(d(U) + U) = d^2(U) + d(U) = d(U) \subset d(U) + U$$

ve

$$d^2(d(U) + U) = d(d(U)) = d^2(U) = 0$$

elde edilir.

O halde bir U, σ-sağ Lie ideali için $d^2(U) = 0$ olması durumunda $d(U) \subset U$ kabul edebiliriz.

Lemma 4.6: U, R halkasının sıfırdan farklı bir σ-Lie ideali ve $d^2(U) = 0$ olsun. Bu taktirde $d(U) \subset Z$ dir.

İspat : $u \in U$, $x \in R$ için U, σ-Lie ideal olduğundan $[ux, u]_\sigma \in U$ olur. (I) no'lu özdeşlik kullanılarak, $\forall x \in R$, $\forall u \in U$ için

$$[ux, u]_\sigma = u[x,u]_\sigma + [u,u]x$$
$$= u[x,u]_\sigma \in U$$

elde edilir. $d^2(U) = 0$ olduğu kullanılarak, $\forall u \in U$ ve $x \in R$ için

$$0 = d^2(u\,[x,u]_\sigma) = d\,(d\,(u)\,[x,u]_\sigma + u\,d\,([x,u]_\sigma)$$
$$= d^2(u)\,[x,u]_\sigma + 2\,d\,(u)\,d\,([x,u]_\sigma) + u\,d^2([x,u]_\sigma)$$
$$= 2\,d\,(u)\,d\,([x,u]_\sigma)$$

bulunur. R halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan

$$0 = d\,(u)\,d\,([x,u]_\sigma)\,, \quad \forall u \in U, \forall x \in R \qquad (11)$$

bulunur. $d^2(U) = 0$ iken $d\,(U) \subset U$ olduğundan (11) de u yerine $u + d(v)$, $v \in U$ yazılır ve $d^2(U) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0 = d\,(u+d\,(v))\,d\,([x, u + d\,(v)]_\sigma)$$
$$= (\,d\,(u) + d^2(v))\,d\,([x,u]_\sigma + [x, d\,(v)]_\sigma)$$
$$= d\,(u)\,(\,d\,([x,u]_\sigma) + d\,([x, d\,(v)]_\sigma)$$
$$= d\,(u)\,d\,([x,u]_\sigma) + d\,(u)\,d\,([x, d\,(v)]_\sigma)$$

bulunur. Bu ifadenin ilk terimi (11)'den dolayı sıfırdır. Böylece

$$d\,(u)\,d\,([x, d\,(v)]_\sigma) = 0\,, \quad \forall u, v \in U, \forall x \in R$$

ve buradan

$$d\,(U)\,d\,(\,[x, d\,(v)\,]_\sigma) = (0)\;, \quad \forall x \in R, \forall v \in U \qquad (12)$$

olur. Lemma 4.5 kullanılarak (12) den

$$U \subset Z \text{ veya } d\,([x,d\,(v)\,]_\sigma) = 0\,, \quad \forall x \in R, \forall v \in U \qquad (13)$$

elde edilir. $U \subset Z$ ise o zaman $d(U) \subset U \subset Z$ olduğundan $d(U) \subset Z$ bulunur ve ispat biter. Her $x \in R$ ve $v \in U$ için $d(\,[x, d\,(v)]_\sigma\,) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu ifade $d^2(u)=0$ olduğu kullanılarak açılırsa $\forall x \in R$, $\forall v \in U$ için

$$0 = [d(x), d(v)]_\sigma \tag{14}$$

elde edilir. (14) no'lu eşitlikte x yerine xd(u) , $u \in U$ yazılır ve (I) no'lu özdeşlik kullanılırsa

$$0 = [d(xd(u)), d(v)]_\sigma = [d(x)\, d(u) + x\, d^2(u), d(v)]_\sigma$$
$$= [d(x)\, d(u), d(v)]_\sigma$$
$$= d(x)\, [d(u), d(v)]_\sigma + [d(x), d(v)]\, d(u)$$

bulunur. (14)'ten dolayı $[d(u), d(v)]_\sigma = 0$ dır. Böylece yukarıdaki eşitlikten

$$0 = [d(x), d(v)]\, d(u)\,, \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, u,v \in U$$

olur ve böylece

$$(0) = [d(x), d(v)]\, d(U)$$

ifadesi elde edilir. Burada Lemma 4.5 kullanılırsa

$$U \subset Z \text{ veya } [d(x), d(v)] = 0\ \forall\, x \in R,\ \forall\, v \in U$$

olduğu görülür. Yine $U \subset Z$ ise $d(U) \subset U \subset Z$ olduğundan ispat biter. Her $x \in R$ ve $u \in U$ için $[d(x), d(v)] = 0$ ise, bu durumda

$$(0) = [d(R), d(v)]\,, \quad \forall\, v \in U$$

olur. Buraya Teorem 2.1.10 uygulanırsa $\forall v \in U$ için $d(v) \in Z$ bulunur ve böylece $d(U) \subset Z$ elde edilir.

Teorem 4.7 : R, karakteristiği 2 den farklı asal halka , $\sigma : R \to R$ bir otomorfizma , $d : R \to R$ bir türev ve U, sıfırdan farklı bir σ-Lie ideal olsun. Buna göre $d^2(U) = 0$ ise bu taktirde $U \subset Z$ dir.

İspat : $U \not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. $u \in U$, $x \in R$ için $[ux\,,\, u]_\sigma \in U$ olduğundan

$$[ux, u]_\sigma = u\,[x,u]_\sigma + [u,u]\,x = u\,[x,u]_\sigma \in U$$

olur. $d^2(U) = 0$ olmasından, $\forall\, x \in R$, $\forall\, u \in U$ için

$$0 = d^2(u\,[x,u]_\sigma) = d(d(u)\,[x,u]_\sigma + u\, d([x,u]_\sigma))$$
$$= d^2(u)\,[x,u]_\sigma + 2\, d(u)\, d([x,u]_\sigma) + u\, d^2([x,u]_\sigma)$$

$= 2\, d(u)\, d([x,u]_\sigma)$

bulunur. char $R \neq 2$ olduğundan

$$0 = d(u)\, d([x,u]_\sigma), \quad \forall x \in R, \forall u \in U \tag{15}$$

elde edilir. (15) 'te u yerine $u + v$, $v \in U$ yazılır ve (15) eşitliği tekrar kullanılırsa

$$0 = d(u+v)\, d([x,u+v]_\sigma)$$

$$= (d(u) + d(v))\{ d([x,u]_\sigma) + d([x,v]_\sigma) \}$$

$$= d(u)\, d([x,u]_\sigma) + d(u)\, d([x,v]_\sigma) + d(v)\, d([x,u]_\sigma) + d(v)\, d([x,v]_\sigma)$$

ve böylece

$$0 = d(u)\, d([x,v]_\sigma) + d(v)\, d([x,u]_\sigma) \quad \forall x \in R, \forall u, v \in U \tag{16}$$

bulunur. (16) soldan d(u) ile çarpılarak

$$0 = d(u)^2 d([x,v]_\sigma) + d(u)\, d(v)\, d([x,u]_\sigma)$$

elde edilir. Lemma 4.6' dan $d^2(U) = 0$ iken $d(U) \subset Z$ olduğu için $d(u) \in Z$ olur. Böylece yukarıdaki son ifade

$$0 = d(u)^2 d([x,v]_\sigma) + d(v)\, d(u)\, d([x,u]_\sigma)$$

biçimine gelir. (15) ' ten dolayı $d(u)\, d([x,u]_\sigma) = 0$ olduğundan bu ifadeden

$$d(u)^2 d([x,v]_\sigma) = 0 \quad \forall u, v \in U, \forall x \in R \tag{17}$$

elde edilir. Yani

$$d(u)^2 d([R,U]_\sigma) = (0)$$

olur. Öte yandan $[x\sigma(v), v]_\sigma \in [R,U]_\sigma$ dır. Böylece (I) no'lu özdeşlik kullanılarak,

$$[x\sigma(v), v]_\sigma = x[\sigma(v), \sigma(v)] + [x,v]_\sigma\, \sigma(v) = [x,v]_\sigma\, \sigma(v) \in [R,U]_\sigma$$

elde edilir. (17) de $[x,v]_\sigma \in [R,U]_\sigma$ elemanı yerine $[x,v]_\sigma \sigma(v) \in [R,U]_\sigma$ elemanı yazılırsa

$$0 = d(u)^2 d([x,v]_\sigma \sigma(v)) = d(u)^2 d([x,v]_\sigma)\sigma(v)$$

$$+ d(u)^2 [x,v]_\sigma d(\sigma(v))$$

elde edilir. (17) 'den $d(u)^2 d([x,v]_\sigma) = 0$ olduğundan

$$d(u)^2 [x,v]_\sigma d(\sigma(v)) = 0, \quad \forall u, v \in U, \forall x \in R \tag{18}$$

eşitliği elde edilir. (18) 'de v yerine $v + w$, $w \in U$ yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d(u)^2[x, v+w]_\sigma d(\sigma(v+w)) \\ &= d(u)^2\{ [x, v]_\sigma + [x,w]_\sigma \} (d(\sigma(v)) + d(\sigma(w))) \\ &= (d(u)^2 [x,v]_\sigma + d(u)^2[x,w]_\sigma) (d(\sigma(v)) + d(\sigma(w))) \\ &= d(u)^2[x,v]_\sigma\, d(\sigma(v)) + d(u)^2[x,v]_\sigma\, d(\sigma(w)) \\ &\quad + d(u)^2 [x,w]_\sigma\, d(\sigma(v)) + d(u)^2[x,w]_\sigma\, d(\sigma(w)) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin ilk ve son terimleri (18) no'lu eşitlikten dolayı sıfırdır. Böylece $\forall u, v, w \in U$, $\forall x \in R$ için

$$d(u)^2 [x,v]_\sigma d(\sigma(w)) + d(u)^2 [x,w]_\sigma d(\sigma(v)) = 0 \tag{19}$$

elde edilir. (19) sağdan $d(\sigma(v))$ ile çarpılırsa

$$d(u)^2 [x,v]_\sigma d(\sigma(w))\, d(\sigma(v)) + d(u)^2 [x,w]_\sigma d(\sigma(v))^2 = 0 \tag{20}$$

bulunur. Lemma 4.6'dan $d^2(U) = 0$ iken $d(U) \subset Z$ idi. Üstelik hipotezden $d\sigma = \sigma d$ olduğundan $d(\sigma(v)) = \sigma(d(v))$ ve $d(v) \in Z$ olur. σ bir otormorfizma olduğundan $\sigma(d(v)) \in Z$ dir. Böylece $d(\sigma(v)) \in Z$ bulunur. Bu durumda (20) no'lu ifade

$$0 = d(u)^2[x,v]_\sigma d(\sigma(v))\, d(\sigma(w)) + d(u)^2[x,w]_\sigma d(\sigma(v))^2$$

biçiminde yazılır. Burada (18) no'lu ifade kullanılarak

$$d(u)^2 [x,w]_\sigma d(\sigma(v))^2 = 0, \quad \forall u,v,w \in U, \forall x \in R \tag{21}$$

elde edilir. (21) 'de x yerine $d([x,a]_\sigma)y$, $a \in U$, $y \in R$ yazılır ve (17) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d(u)^2[d([x,a]_\sigma)y, w]_\sigma d(\sigma(v))^2 \\ &= d(u)^2 d([x,a]_\sigma) [y,w]_\sigma d(\sigma(v)) + d(u)^2 [d([x,a]_\sigma), w]\, y\, d(\sigma(v))^2 \end{aligned}$$

ve buradan

$$0 = d(u)^2[d([x,a]_\sigma), w]\, y\, d(\sigma(v))^2 \tag{22}$$

bulunur. (22) no' lu ifade açılır ve (17) kullanılırsa $\forall a, u, v, w \in U, \forall x, y \in R$ için

$$0 = d(u)^2 d([x,a]_\sigma)\, w\, y\, d(\sigma(v))^2 + d(u)^2 w\, d([x,a]_\sigma)\, y\, d(\sigma(v))^2$$

$$= d(u)^2 w\, d([x,a]_\sigma)\, y\, d(\sigma(v))^2$$

ifadesi ve böylece

$$d(u)^2 w d([x,a]_\sigma) R\, d(\sigma(v))^2 = 0, \quad \forall a, u, v, w \in U, \forall x \in R$$

elde edilir. R asal halka olduğundan, $\forall a,u,v,w \in U$, $\forall x \in R$ için

$$d(u)^2 w\, d([x,a]_\sigma) = 0 \text{ veya } d(\sigma(v))^2 = 0 \qquad (23)$$

bulunur. Şimdi kabul edelim ki $\forall v \in U$ için $\mathbf{d(\sigma(v))^2 = 0}$ olsun.Bu durumda hipotezden $d\sigma = \sigma d$ olduğundan

$$0 = \sigma(d(v))\, \sigma(d(v) = \sigma(d(v).\, d(v)) = \sigma(d(v)^2)$$

olur. $\sigma(d(v)^2) = 0$ ve σ nın R nin otomorfizması olduğu kullanılırsa

$$d(v)^2 = 0 \qquad \forall v \in U$$

elde edilir. Bu durumda (23) no'lu ifadeden $\forall a,u,v, w \in U, \forall x \in R$ için

$$d(u)^2 w\, d([x,a]_\sigma) = 0 \text{ veya } d(v)^2 = 0$$

bulunur. Şimdi kabul edelim ki $\forall u,w,a \in U$, $\forall x \in R$ için $d(u)^2 w\, d([x,a]_\sigma) = 0$. Yani

$$d(u)^2 U\, d([x,a]_\sigma) = 0, \ \forall u, v \in U, \forall x \in R$$

olsun. $U \not\subset Z$ kabul ettiğimiz için Lemma 4.2'den $U \not\subset C_\sigma$ olur. Sonuç 3.5 den

$$d(u)^2 = 0 \text{ veya } d([x,a]_\sigma) = 0, \ \forall x \in R, \forall u,v \in U \qquad (24)$$

bulunur. Her $u \in U$ için $d(U)^2 = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall u, v \in U$ için

$$0 = d(u+v)^2 = (d(u) + d(v))^2$$

$$= d(u)^2 + d(u)\, d(v) + d(v)\, d(u) + d(v)^2$$

$$= d(u)\, d(v) + d(u)\, d(v)$$

ve burada Lemma 4.6 kullanılırsa

$$0 = 2\, d(u)\, d(v)$$

elde edilir. charR≠2 olduğundan, $\forall\, v \in U$ için

$$(0) = d(U)\, d(v)$$

bulunur. Lemma 4.5 den

$$U \subset Z \text{ veya } d(v) = 0\,, \quad \forall\, v \in U$$

olur. $\forall v \in U$ için $d(v) = 0$, ise $d(U) = 0 \subset C_\sigma$ olduğundan Sonuç 4.4 ' den $U \subset Z$ olur. Böylece her iki durumda da $U \subset Z$ olur ki bu $U \not\subset Z$ kabulümüzle çelişir.

O halde $d(U)^2 \neq 0$ dır. Bu durumda (24) 'ten

$$d([x,a]_\sigma) = 0 \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, a \in U \tag{25}$$

bulunur. Yani

$$d([R, U]_\sigma) = (0) \tag{26}$$

elde edilir. $x \in R$ ve $u \in U$ için $[x\sigma(u), u]_\sigma \in [R,U]_\sigma$ ve $[x\sigma(u), u]_\sigma = x[\sigma(u), \sigma(u)] + [x,u]_\sigma\sigma(u) = [x,u]_\sigma\sigma(u) \in [R,U]_\sigma$ olur. Böylece (26) no'lu eşitlikten

$$0 = d([x,u]_\sigma\sigma(u)) = d([x,u]_\sigma)\,\sigma(u) + [x,u]_\sigma\, d(\sigma(u))$$

ifadesi elde edilir.Burada (25) no'lu eşitlik kullanılarak

$$[x,u]_\sigma d(\sigma(u)) = 0 \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, u \in U \tag{27}$$

bulunur. (27) 'de x yerine xy, $y \in R$ yazılır ve (27) no'lu eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [xy,u]_\sigma d(\sigma(u)) \\ &= x\,[y,u]_\sigma d(\sigma(u)) + [x,u]\, y\, d(\sigma(u)) \\ &= [x,u]\, y\, d(\sigma(u)) \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$[x,u]\, R\, d(\sigma(u)) = (0)\,, \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, u \in U$$

elde edilir. R asal halka olduğundan

$$[x,u] = 0 \quad \text{veya} \quad d(\sigma(u)) = 0\,, \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, u \in U$$

bulunur. $\sigma d = d\sigma$ olması kullanılarak

$$u \in Z \text{ veya } d(u) = 0 \;, \quad \forall u \in U$$

elde edilir. $K = \{u \in U \mid u \in Z\}$ ve $L = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$ alt kümelerini tanımlayalım. K ve L, U 'nun toplamsal iki alt grubudur ve $U = K \cup L$ dir. Önerme 1.23'den $U = K$ veya $U = L$ olmalıdır. Eğer $U = K$ ise $U \subset Z$ olur ki bu $U \not\subset Z$ kabulümüzle çelişir. O halde $U = L$ olmalıdır. Böylece $d(U) = 0 \subset C_\sigma$ ise Sonuç 4.4'den $U \subset Z$ olduğundan, bu da kabulümüzle çelişir. Bu ise bize kabulümüzün yanlış olduğunu verir. Yani $U \subset Z$ olmalıdır.

ÖZGEÇMİŞ

Öznur GÜLTEKİN 1971 yılında Nevşehir' de doğdu. İlk ve ortaokulu Nevşehir' de , liseyi Samsun' da bitirdi. 1989 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nü kazandı ve 1993 yılında mezun oldu. 1994 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 1995 yılında Adnan Menderes Üniversitesi , Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümününde araştırma görevlisi olarak işe başladı. Halen burada çalışmaktadır.

KAYNAKLAR

1- AWTAR, R. : Lie and Jordan Structure in Prime Rings with Derivations. Proc. Amer. Math. Soc. Voll. 41, No: 1, (1973), 67-74

2- AWTAR, R. : Lie Structure in Prime Rings with Derivations. Publ. Math. Debrecen 31, (1984), 209-215

3- AYDIN, N. : (σ,τ)-Yarı-türevli Asal Halkalar ve Lie İdealler. C. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Fen Bilimleri Dergisi, 14-1991

4- AYDIN, N., KAYA, K. : Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ) - Derivations. Doğa- Tr. J.of Math. 16(1992), 169-176

5- AYDIN, N., KANDAMAR, H. : (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings. Doğa Tr. J. of Math. 18(2), (1994), 143-148

6- AYDIN, N., SOYTÜRK, M. : (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings with Derivation. Doğa-Tr. J. Math.(1995), 19-239-244

7- AYDIN, N. : On one sided (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings. Yayınlanacak.

8- BERGEN, J. , HERSTEIN, I. N. , KERR, J.W. :Lie Ideals and Derivation of Prime Rings. J. of Algebra 71, 259-267, (1981)

9- BRESAR., M. : Centralizing Mappings and Derivations in Prime Ring. J. of Algebra 156(1993), 385-394

10- CARINI, L. : Derivations on Lie Ideals in Semi-prime Rings. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Serie II, Tomo XXXIV(1985),122-126

11- HERSTEIN, I. N. : A Note on Derivations. Canad. Math. Bull.Vol. 21(3), (1987), 369-370

12- HERSTEIN, I. N. : A Note on Derivations II . Canad. Math.Bull. Vol. 22(4), (1979), 509-511

13- HERSTEIN, I.N. : On the Lie Structure of an Assosiative Rings. Journal of Algebra 14, 561-571, (1970) 14- HERSTEIN., I. N. : Topics in Ring Theory. Unıversity of Chicago Press, Chicago, 1969

15- HERSTEIN. , I. N. : Rings with Involution. University of Chicago Press, Chicago, 1976

16- HONGAN, M. : Lie Ideals and Semi-derivations of Prime Rings. J. Okoyama Unıv. 27, (1985), 13-17

17- KANDAMAR, H. , KAYA, K. : Asal Halkalarda (σ-τ)-Türev ve Lie İdealler. Hacettepe Bulletin of Natural Sciens and Engineering (1992), Vol 21, 29-33

18- KAYA, K. : On (σ-τ)-Derivation of Prime Rings. Doğa- TU: Mat. D. C. 12(12), (1988), 42-45

19- KAYA, K. : Asal halkalarda (σ-τ)-Sağ Lie İdealler. Proc. 4. National Math. Symposiom, Antakya 1991

20- LEE, P. H, LEE, T. K. : On Derivations of Prime Rings. Chines J. Math. Vol.9(2), (1981), 107-110

21- LEE, P. H., LEE, T. K. : Lie Ideals of Prime Rings with Derivations. Bull. Instute of Math. Acedemia Sinica II, (1983), pp. 75-79

22- POSNER, E.C. : Derivations in Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8(1957), 1093-1100