FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNDE TANIMLI OLAN ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN ÇEŞİTLİ SÜREKLİLİKLERİ ÜZERİNE

İdris ZORLUTUNA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1996

65190

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNDE TANIMLI OLAN ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN ÇEŞİTLİ SÜREKLİLİKLERİ ÜZERİNE

İdris ZORLUTUNA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
1996

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ' NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Ana Bilim Dalı' nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Doç.Dr.Yalçın KÜÇÜK:..........................

Üye :Yrd.Doç.Dr.Mustafa YILDIRIM..............

Üye :Yrd.Doç.Dr.Metin AKDAĞ.......................

Üye :...

Üye :...

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

. . / . . / 1996

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr.Necati ÇELİK

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan " Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu " adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

SUMMARY

GİRİŞ 1

1. BÖLÜM - ÖN BİLGİLER 3

2. BÖLÜM - δ-SÜREKLİ FUZZY ÇOĞUL FONKSİYONLARIN BAZI KARAKTERİZASYONLARI 16

1) Üstten ve Alttan δ-Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar 16

2) Fuzzy δ-Kapalı Grafiklilik ve Üstten δ-Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar 23

3. BÖLÜM - KUVVETLİ θ-SÜREKLİ ve HEMEN HEMEN KUVVETLİ FUZZY ÇOĞUL FONKSİYONLAR 26

1) Kuvvetli θ-Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar 26

2) Hemen Hemen Kuvvetli θ-Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar 31

4. BÖLÜM - HEMEN HEMEN ZAYIF SÜREKLİ ve HEMEN HEMEN H-SÜREKLİ FUZZY ÇOĞUL FONKSİYONLAR 41

1) Hemen Hemen Zayıf Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar 41

2) Hemen Hemen H-Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar 52

3) F.a(ü).y Süreklilik, F.a(ü).z Süreklilik, F.a(ü).h.h.z Süreklilik, F.a(ü).h.h.H-Süreklilik arasındaki ilişkiler 55

KAYNAKLAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY ÇOĞUL FONKSİYONLARIN ÇEŞİTLİ SÜREKLİLİKLERİ ÜZERİNE

İdris ZORLUTUNA
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Doç. Dr. Yalçın KÜÇÜK

Fuzzy çoğul fonksiyonlar için, fuzzy δ-süreklilik, fuzzy θ-sürekliliğin hemen hemen kuvvetli ve kuvvetli türleri ile fuzzy hemen hemen zayıf süreklilik ve fuzzy hemen hemen H-süreklilik kavramları için karakterizasyonlar vermeyi amaçlayan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde ön bilgiler ile bu alanda yapılmış çalışmalardan bazı önemli tanım ve teoremler, bunlara ilişkin kaynaklar verildi. İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise tezin özgün çalışmaları sunuldu.

İkinci bölümde, ilk kez Noiri`nin 1980 yılında tek değerli fonksiyonlar için verdiği ve daha sonra Özbakır (1994) tarafından fuzzy çoğul fonksiyonlarda tanımlanan δ-süreklilik için, ağların fuzzy R-yakınsamasıda kullanılarak yeni karakterizasyonlar verildi. Daha sonra bir fuzzy çoğul fonksiyonun fuzzy δ-sürekliliği ile onun grafik fonksiyonunun δ-sürekliliği ve grafiğinin δ-kapalılığı arasındaki ilişkiler incelendi.

Üçüncü bölümde, ilk kez Long ve Herrington (1981)`ın verdiği kuvvetli θ-süreklilik ve yine ilk kez Noiri ve Kang (1984) tarafından verilen hemen hemen

kuvvetli θ-süreklilik kavramları fuzzy çoğul fonksiyonlar için incelendi. Bu süreklilik türleri için yeni karakterizasyonlar verildi. Bir fuzzy çoğul fonksiyonun fuzzy kuvvetli θ-sürekliliği ve hemen hemen kuvvetli θ-sürekliliği ile onun grafik fonksiyonunun fuzzy kuvvetli θ-sürekliliği ve hemen hemen kuvvetli θ-sürekliliği arasındaki ilişkiler incelendi. Bu tür sürekli fuzzy çoğul fonksiyonların koruduğu topolojik özellikler üzerinde duruldu.

Dördüncü bölümde, ilk kez Jankoviç (1978)`ın tanımladığı hemen hemen zayıf süreklilik ve Husain (1966)`ın tanımladığı hemen hemen H-süreklilik fuzzy çoğul fonksiyonlara genişletilerek, karakterizasyonları üzerinde çalışıldı. Bu tür sürekli fuzzy çoğul fonksiyonlar ile fuzzy yarı sürekli ve fuzzy hemen hemen sürekli fuzzy çoğul fonksiyonlar arasındaki ilişkiler incelenerek bunlara ait ters örnekler verildi. Son olarak bu bölümde ele alınan fuzzy çoğul fonksiyon türleri arasındaki ilişkiler toplu halde şema ile verildi.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy çoğul fonksiyon, Fuzzy süreklilik, Fuzzy δ-Süreklilik, Fuzzy kuvvetli θ-Süreklilik, Fuzzy hemen hemen kuvvetli θ-Süreklilik, Fuzzy hemen hemen zayıf Süreklilik, Fuzzy hemen hemen H-Süreklilik.

SUMMARY

MsC Thesis

ON SOME CONTINUITY OF MULTIFUNCTIONS
DEFINED ON FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

İdris ZORLUTUNA
Graduate School of Natural and Applied
Sciences of Department of Mathematics
Advisor : Asso. Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

This study is composed of four main parts. The main purpose of the study is to present characterizations for fuzzy multifunctions, fuzzy δ-continuity, almost-strongly and strongly sorts of fuzzy θ-continuity as well as for almost-H-continuity and almost-weak continuity.

In the first part, preliminary information, some main theorems and definitions from important works in this field have been provided. The remaining parts have been devoted to the original analysis.

The second part contains new characterizations of d-continuity of fuzzy multifunctions. In this approach, we made use of R-convergence of nets. Besides, the relationship of fuzzy δ-continuity of fuzzy multifunction with its graphic function's δ-continuity and δ-closedness of its graphic has been examined.

In the third part, strongly-θ-continuity and almost-strongly-θ-continuity have been analyzed for fuzzy multifunction. New characterizations for these kinds of continuities have been provided. The relationship of fuzzy strongly-θ-continuity

closedness of its graphic has been examined. The same relationship has been analyzed for almost-strongly-θ-continuity. Topological characteristics of these kinds of fuzzy multifunctions have been emphasized.

In the fourth part, almost-weak-continuity and almost-H-continuity have been generalized for fuzzy multifunctions and its characterizations have been studied. The relationship of these continuities with almost and semi-continuities of fuzzy multifunctions has been analyzed, and counter examples have been given. The relationships among the continuities that have been analyzed in this part have been presented in tabular form.

Keywords: Fuzzy multifunction, fuzzy continuity, Fuzzy δ-continuity, Fuzzy strongly θ-continuity, Fuzzy almost strongly θ-continuity, Fuzzy almost weakly continuity, Fuzzy almost H-continuity

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmam sırasında beni aydınlatan danışman hocam sayın Doç.Dr.Yalçın KÜÇÜK'e, çalışmam sırasında istisnasız bir şekilde yardımlarını esirgemeyen sayın Doç.Dr.Mahide KÜÇÜK'e ve ihtiyaç duyduğum her türlü materyalin karşılanması için elinden gelen her şeyi yapan sayın Yrd.Doç.Dr.Metin AKDAĞ'a ayrıca Matematik bölümü elemanlarına en içten teşekkürlerimi sunarım.

İdris ZORLUTUNA

GİRİŞ

Fuzzy mantığı ilk kez 1965 yılında Zadeh tarafında verilen fuzzy (belirtisiz) küme tanımıyla ortaya çıkmıştır. Daha sonra bir çok araştırmacının bu kavram üzerinde çalışmaya başlaması, matematikte yeni dalların oluşmasına sebeb olmuştur. Bunun sonucu olarakta, gerçek dünyamızda zaten var olan belirtisizlik kavramı matematiksel olarak denenmeye başlanmış ve görüntü işleme, robotik, denetim mühendisliği, bilgisayar mühendisliği, bilgi-işlem,... vb gibi günlük hayatımıza kadar giren konularda yararlı uygulamalar bulmuştur.

Belirtisiz kümeler kavramı kullanılarak oluşturulan gelişmelere parelel olarak, bir çok araştırmacı, belirtisiz topolojik uzaylar, belirtisiz düzgün uzaylar, belirtisiz topolojik gruplar, belirtisiz topolojik vektör uzayları ve belirtisiz ölçümler gibi konularda çalışmalar yapmaktadır. Bu yönde 1968 yılında Chang fuzzy topolojik uzay fikrini ortaya attı. Bundan sonra klasik topolojide önemli rol oynayan bir çok topolojik kavramın fuzzy topolojiye göre düzenlenmesi gereği duyuldu. Bu anlamda ilk olarak 1981`de Azad, fuzzy topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar üzerinde çalışmıştır. Daha sonraları klasik topolojiden bildiğimiz bir çok süreklilik türü, değişik araştırmacılar tarafından fuzzy topolojiye aktarılmıştır.

Papageorgio`nun 1985 yılında fuzzy çoğul fonksiyon tanımını ortaya atması, bu tür çalışmalara yeni bir boyut kazandırmıştır. Bu konuda ilk olarak Mukherjee ve Malakar 1991 yılında çakışığımsı kavramını kullanarak fuzzy çoğul fonksiyonlarda yarı-süreklilik, hemen hemen süreklilik ve zayıf süreklilik kavramlarını incelemişlerdir. Daha sonra Özbakır 1994 yılında hazırlamış olduğu doktora tezinde, fuzzy çoğul fonksiyonlar için bir çok süreklilik kavramını tanımlayarak bunlar için çeşitli karakterizasyonlar vermiştir.

Biz Özbakır (1994) tarafından fuzzy çoğul fonksiyonlar için tanımlanan fuzzy δ-sürekli çoğul fonksiyon, fuzzy kuvvetli θ-sürekli ve hemen hemen kuvvetli θ-sürekli çoğul fonksiyonlar için yeni karakterizasyonlar vererek, bu tür sürekli çoğul fonksiyonların grafik fonksiyonları, kısıtlanmış fonksiyonları ve uygulamaları üzerinde durduk. Bunlara ek olarak fuzzy hemen hemen zayıf sürekli çoğul fonksiyon, fuzzy hemen hemen H-sürekli çoğul fonksiyon kavramları üzerinde çalışmalar yaptık. Bunların hemen hemen, zayıf ve yarı türleri arasında bazı geçişleri bulup genelleştirmeye yarayabilecek bazı önemli teorem ve sonuçlar elde ettik. Tezin sonunda, Mukherjee ve Malakar (1991) ile verilen fuzzy çoğul fonksiyonların tezin son bölümünde verilen fuzzy çoğul fonksiyonlar ile ilişkilerini toplu olarak bir şema ile gösterdik.

1.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1.1.Fuzzy Küme, Fuzzy Nokta, Fuzzy q-Komşuluk Kavramları

1.1.1.Tanım: $X \neq \phi$ bir küme ve $I = [0,1]$ kapalı aralık olsun. $\alpha : X \to I$ dönüşümlerinin kümesi I^X olmak üzere, I^X in her elemanına, X`in bir *fuzzy kümesi* denir (Zadeh, 1965). Fuzzy kümeleri A,B,β,μ,... gibi latin harfleriyle göstereceğiz.

$\alpha \in [0,1]$ olmak üzere C_α ile, her $x \in X$ için $C_\alpha(x) = \alpha$ olan sabit fuzzy kümesini göstereceğiz. Bir μ kümesinin $x \in X$ noktasındaki değeri μ(x) ile ve kümeler için kullanılan kapsama, birleşim, kesişim ve tümleyen sembolleri yerine fuzzy kümeler için sırasıyla $\leq$, $\vee$, $\wedge$, ' sembolleri kullanacağız.

1.1.2.Tanım: X içindeki herhangi μ fuzzy kümesi için *μ`nın tümleyeni* her $x \in X$ için $\mu'(x) = 1 - \mu(x)$ olarak tanımlanır ve $\mu' = 1 - \mu$ şeklinde gösterilir (Zadeh, 1965).

1.1.3.Tanım: Herhangi α ve β fuzzy kümeleri için aşağıdakiler vardır.

$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\alpha(x) \leq \beta(x)$

$\alpha = \beta \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\alpha(x) = \beta(x)$

$\mu = \alpha \vee \beta \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\mu(x) = \max\{\alpha(x), \beta(x)\}$

$\mu = \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\mu(x) = \min\{\alpha(x), \beta(x)\}$

Daha genel olarak, fuzzy kümelerin bir $\mu = \{\mu_i \mid i \in I\}$ ailesi için, $\beta = \vee \mu_i$ birleşim kümesi ile $\alpha = \wedge \mu_i$ kesişim kümesi $x \in X$ için sırasıyla, $\beta(x) = \sup\{\mu_i(x)\}$, $\alpha(x) = \inf\{\mu_i(x)\}$ şeklinde tanımlanır (Chang, 1968).

1.1.4.Tanım: $x \in X$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. X içindeki x_α *fuzzy noktası,*

$$x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

olarak tanımlanan X içindeki fuzzy kümesidir.

x_α fuzzy noktasının sıfırdan farklı değer aldığı tek x noktasına x_α`nın dayanağı (support) ve $\alpha$`yada x_α`nın değeri (value) denir (Ming and Ming,1980).

1.1.5.Tanım: x_α bir fuzzy nokta ve μ bir fuzzy küme olmak üzere $\alpha \leq \mu(x)$ ise $x_\alpha \in \mu$` dür (Ming and Ming,1980).

1.1.6.Tanım: x_α bir fuzzy nokta ve μ bir fuzzy küme olmak üzere $\alpha+\beta(x)>1$ ise, x_α ile β *çakışığımsıdır* (quasi-coincident) denir ve $x_\alpha q\beta$ ile gösterilir (Ming and Ming,1980).

1.1.7.Tanım: A ve B iki fuzzy küme olsun, bir $x \in X$ için $A(x) + B(x) > 1$ ise, A ve B *çakışığımsıdır* denir ve bu durum AqB ile gösterilir (Ming and Ming,1980). Eğer çakışığımsı değilseler $A \not{q} B$ yazacağız.

1.1.8.Tanım: X içindeki fuzzy kümelerin bir ailesi τ_X olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise, τ_X`e X üzerinde bir *fuzzy topoloji*, (X,τ_X) ikilisine de *fuzzy topolojik uzay (kısaca f t u)* denir (Chang, 1968).

i) $0,1 \in \tau_X$

ii) $\alpha, \beta \in \tau_X$ ise, bu halde $\alpha \wedge \beta \in \tau_X$

iii) Her $i \in I$ için $\alpha_i \in \tau_X$ ise, bu halde $\vee_{i\in I}\alpha_i \in \tau_X$

1.1.9.Tanım: (X,τ_X) fuzzy topolojik uzay ve $\mu \in I^X$ olsun.int(μ) = $\vee\{\beta | \beta \leq \mu$, β fuzzy açık $\}$ şeklinde tanımlanan int(μ) kümesine, *μ`nün içi*, cl($\mu$) = $\wedge\{\beta | \mu \leq \beta$, $\beta$ fuzzy kapalı $\}$ şeklinde tanımlanan cl($\mu$) kümesine de *$\mu$`nün kapanışı* denir (Azad, 1981).

1.1.10.Tanım: (X,τ_X) fuzzy topolojik uzay ve $B \in I^X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır (Azad, 1981).

a) $(\text{int}(B))' = \text{cl}(B')$

b) $(\text{cl}(B))' = \text{int}(B')$

1.1.11.Tanım: (X,τ_X) fuzzy topolojik uzay, x_α bir fuzzy nokta ve $B\in I^X$ olsun. $x_\alpha qU \leq B$ olacak biçimde bir U fuzzy açık kümesi var ise, B`ye x_α'nın *q-komşuluğudur* denir (Ming and Ming, 1980).

1.1.12.Teorem: (X,τ_X) fuzzy topolojik uzay, x_α bir fuzzy nokta ve $B\in I^X$ olsun. $x_\alpha \in cl(B)$ olması için gerek ve yeterli koşul x_α'nın her q-komşuluğunun B ile çakışığımsı olmasıdır (Ming and Ming, 1980).

1.1.13.Önerme: A ve B iki fuzzy küme olsun. $A \leq B$ olması için gerek ve yeterli koşul A ile B' kümelerinin çakışığımsı olmamasıdır. Özellikle, $x_\alpha \in A$ olması için gerek ve yeterli koşul $x_\alpha \not{q} A'$ olmasıdır (Ming and Ming, 1980).

1.1.14.Tanım: (Y,τ_Y) fuzzy topolojik uzay ve $B\in I^Y$ olsun. $B = int(cl(B))$ ($B=cl(int(B))$) ise B kümesine *fuzzy regüler açık* (*regüler kapalı*) küme denir (Azad, 1981).

1.1.15.Teorem: (Y,τ_Y) fuzzy topolojik uzay olmak üzere;(Azad, 1981)
a) Bir fuzzy açık kümenin kapanışı fuzzy regüler kapalı kümedir.
b) Bir fuzzy kapalı kümenin içi fuzzy regüler açık kümedir.

1.2. Bazı Tanımlar

1.2.1.Tanım: (X,τ_X) bir topolojik uzay, $A\subseteq X$ bir alt küme ve $x\in X$ olsun.

a) x noktasının her bir U açık komşuluğu için $int(cl(U))\cap A\neq\phi$ ise x noktası A kümesinin *δ-kapanış noktasıdır* denir. A`nın bütün δ-kapanış noktalarının birleşimi A`nın δ-kapanışı olarak isimlendirilir ve δ-cl(A) ile gösterilir. A = δ-cl(A) ise A kümesine *δ-kapalı küme* denir. δ-kapalı kümenin tümleyeni *δ-açık küme* olarak tanımlanır (Noiri, 1980).

X`teki bütün δ-açıkların (δ-kapalıların) kümesini δ-O(X) (δ-C(X)) ile göstereceğiz.

b) x noktasının her bir U açık komşuluğu için $cl(U) \cap A \neq \phi$ ise x noktası A kümesinin *θ-kapanış noktasıdır* denir. A`nın bütün θ-kapanış noktalarının birleşimi A`nın θ-kapanışı olarak isimlendirilir ve θ-cl(A) ile gösterilir. A = θ-cl(A) ise A kümesine *θ-kapalı küme* denir. θ-kapalı kümenin tümleyeni *θ-açık küme* olarak tanımlanır (Velico, 1968).

X`teki bütün θ-açıkların (θ-kapalıların) kümesini θ-O(X) (θ-C(X)) ile göstereceğiz

1.2.2.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u ve x_α bir fuzzy nokta olsun.

a) x_α`nın her bir μ fuzzy regüler açık q-komşuluğu β fuzzy kümesi ile çakışığımsı ise $x_\alpha$ fuzzy noktası β fuzzy kümesinin *fuzzy δ-kapanış noktasıdır* denir. β`nın bütün fuzzy δ-kapanış noktalarının birleşimi β`nın fuzzy δ-kapanışı olarak isimlendirilir ve δ-cl(β) ile gösterilir. β = δ-cl(β) ise β kümesine *fuzzy δ-kapalı küme* denir. fuzzy δ-kapalı kümenin tümleyeni *fuzzy δ-açık küme* olarak tanımlanır.

Bir fuzzy regüler açık küme aynı zamanda bir fuzzy δ-açık kümedir (Mukherjee and Sinha, 1990).

b) x_α`nın her bir μ fuzzy açık q-komşuluğu için cl(μ) kümesi β fuzzy kümesi ile çakışığımsı ise $x_\alpha$ fuzzy noktası β fuzzy kümesinin *fuzzy θ-kapanış noktasıdır* denir. β`nın bütün fuzzy θ-kapanış noktalarının birleşimi β`nın fuzzy θ-kapanışı olarak isimlendirilir ve θ-cl(β) ile gösterilir. β = θ-cl(β) ise β kümesine *fuzzy θ-kapalı küme* denir. fuzzy θ-kapalı kümenin tümleyeni *fuzzy θ-açık küme* olarak tanımlanır (Mukherjee and Sinha, 1990).

1.2.3.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u ve x_α bir fuzzy nokta olsun.

a) $\beta \leq \mu$ olacak şekilde x_α`nın bir β fuzzy regüler açık q-komşuluğu var ise, μ fuzzy kümesine x_α fuzzy noktasının *fuzzy δ-komşuluğudur* denir (Mukherjee and Sinha, 1990).

b) $\beta \leq \mu$ olacak şekilde x_α`nın bir β fuzzy kapalı q-komşuluğu var ise, μ fuzzy kümesine x_α fuzzy noktasının *fuzzy θ-komşuluğudur* denir (Mukherjee and Sinha, 1990).

1.2.4.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u ve x_α bir fuzzy nokta olsun.

a) $x_\alpha q\beta \leq \text{int}(\text{cl}(\beta)) \leq \mu$ olacak şekilde x_α`nın bir $\beta$ fuzzy açık q-komşuluğu var ise, $x_\alpha$ fuzzy noktasına $\mu$ fuzzy kümesinin *fuzzy δ-iç noktasıdır* denir. $\mu$`nün tüm fuzzy δ-iç noktalarının birleşimine μ`nün fuzzy δ-içi denir ve δ-int(μ) ile gösterilir (Çoker ve Eş, 1990).

b) $x_\alpha q\beta \leq \text{cl}(\beta) \leq \mu$ olacak şekilde x_α`nın bir $\beta$ fuzzy açık q-komşuluğu var ise, $x_\alpha$ fuzzy noktasına $\mu$ fuzzy kümesinin *fuzzy θ-iç noktasıdır* denir. $\mu$`nün tüm fuzzy θ-iç noktalarının birleşimine μ`nün fuzzy θ-içi denir ve θ-int(μ) ile gösterilir (Çoker ve Eş, 1990).

Bu tanımlardan sonra $1 - \delta\text{-int}(\mu) = \delta\text{-cl}(1-\mu)$ ve $1 - \theta\text{-int}(\mu) = \theta\text{-cl}(1-\mu)$ olduğu görülür (Çoker ve Eş, 1990).

1.2.5.Tanım: (X,τ_X) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ bir alt küme olsun.

a) A kümesinin her bir $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$açık örtüsünden, $A \subseteq \cup\{\text{int}(\text{cl}(U_{\alpha i})) \mid i=1,2,\ldots,n\}$ olacak biçimde sonlu bir alt örtü seçilebilirse, A kümesine *yakın kapalı (N-closed) küme* denir (Carnahan, 1972).

b) A kümesinin her bir $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$açık örtüsünden, $A \subseteq \cup\{\text{cl}(U_{\alpha i}) \mid i=1,2,\ldots,n\}$ olacak biçimde sonlu bir alt örtü seçilebilirse, A kümesine *H-küme* (H-set) denir (Noiri, 1979).

1.2.6.Tanım: (X,τ_X) bir topolojik uzay olsun. X`in her bir $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$açık örtüsünden, $X \subseteq \cup\{\text{cl}(U_{\alpha i}) \mid i=1,2,\ldots,n\}$ olacak biçimde sonlu bir alt örtü seçilebilirse, (X,τ_X) topolojik uzayına *hemen hemen kompakt (almost compact) uzay* denir (Noiri, 1979).

1.2.7.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u olsun. Y'in her bir $\{U_\alpha \mid \alpha\in I\}$açık örtüsünden, $Y \subseteq \vee\{cl(U_{\alpha i}) \mid i=1,2,...,n\}$ olacak biçimde sonlu bir alt örtü seçilebilirse, (Y,τ_Y) fuzzy topolojik uzayına *fuzzy hemen hemen kompakt (fuzzy almost compact) uzay* denir (Di Concilo and Gerla, 1984).

1.2.8.Tanım: (X,τ_X) bir topolojik uzay olsun. X'in her bir $\{U_\alpha \mid \alpha\in I\}$önaçık örtüsünden, $X \subseteq \cup\{U_{\alpha i} \mid i=1,2,...,n\}$ olacak biçimde sonlu bir alt örtü seçilebilirse, (X,τ_X) topolojik uzayına *kuvvetli kompakt (strongly compact) uzay* denir (Mashour ve ark., 1984).

1.2.9.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u olsun. Y'in her bir $\{U_\alpha \mid \alpha\in I\}$açık örtüsünden, $Y \subseteq \vee\{U_{\alpha i} \mid i=1,2,...,n\}$ olacak biçimde sonlu bir alt örtü seçilebilirse, (Y,τ_Y) fuzzy topolojik uzayına *fuzzy kompakt (fuzzy compact) uzay* denir(Wong, 1973).

1.2.10.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u olsun.

a) Y içindeki her μ fuzzy regüler açık kümesi ve μ ile çakışığımsı olan her x_α fuzzy noktası için, $x_\alpha q\beta \leq cl(\beta) \leq \mu$ olacak şekilde bir β fuzzy regüler açık kümesi var ise, Y uzayına *fuzzy hemen hemen (h.h.) regüler uzay (fuzzy almost regular space)* denir (Mukherjee and Sinha, 1990).

b) Y içindeki her μ fuzzy açık kümesi, her α için $cl(U_\alpha) \leq \mu$ olan U_α fuzzy açık kümelerinin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, Y uzayına *fuzzy regüler uzay (fuzzy regular space)* denir (Hutton and Reilly, 1980).

1.2.11.Tanım: (X,τ_X) bir topolojik uzay, $A\subseteq X$ bir alt küme olsun. $A\subseteq int(cl(A))$ ise A kümesine *önaçık (preopen) küme* denilir. Önaçık kümenin tümleyeni *önkapalı küme* olarak tanımlanır. A kümesini kümesini kapsayan önkapalı kümelerin arakesitine A'nın önkapanışı denir ve pcl(A) ile gösterilir. A kümesinde kapsanan önaçıkların birleşimine A'nın öniçi denir ve pint(A) ile gösterilir (Njastad, 1965).

X`teki bütün önaçıkların (önkapalıların) kümesini PO(X) (PC(X)) ile göstereceğiz ve PO(X,x) ile $\{U \in PO(X) \mid x \in U\}$ kümesini ifade edeceğiz.

1.2.12.Önerme: (X,τ_X) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ bir alt küme olsun. Bu halde, $X\text{-}pcl(A) = pint(X\text{-}A)$ dır (Noiri and Valeriu, 1993).

1.2.13.Önerme: (X,τ_X) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ bir alt küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır (El-Deeb ve ark., 1983).

a) $x \in pcl(A) \Leftrightarrow$ her $U \in PO(X,x)$ için $U \cap A \neq \phi$

b) A önkapalıdır $\Leftrightarrow A = pcl(A)$

c) $pcl(A) = A \cup cl(int(A))$

1.2.14.Tanım: (X,τ_X) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ bir alt küme olsun.

a) A kümesi için, $B \subseteq A \subseteq cl(B)$ olacak biçimde bir $B \in \tau_X$ varsa A`ya *yarı-açık (semi-open)* küme denir (Levine, 1963).

b) A kümesi için, $int(B) \subseteq A \subseteq B$ olacak biçimde bir $B \in \tau_X$ varsa A`ya *yarı-kapalı (semi-closed)* küme denir (Levine, 1963).

(X,τ_X) uzayındaki bütün yarı-açıkların (yarı-kapalıların) kümesi SO(X) (SC(X)) ile gösterilecektir.

1.2.15.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u ve $A \in I^Y$ olsun.

a) A kümesi için, $B \leq A \leq cl(B)$ olacak biçimde bir $B \in \tau_Y$ varsa A`ya *fuzzy yarı-açık (fuzzy semi-open)* küme denir(Azad, 1981).

b) A kümesi için, $int(B) \leq A \leq B$ olacak biçimde bir $B \in \tau_Y$ varsa A`ya *fuzzy yarı-kapalı (fuzzy semi-closed)* küme denir (Azad, 1981).

1.2.16.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u ve $\mu \in I^Y$ olsun.

$scl(\mu) = \wedge\{\beta \mid \mu \leq \beta,\ \beta$ fuzzy yarı-kapalı $\}$

$sint(\mu) = \vee\{\beta \mid \beta \leq \mu,\ \beta$ fuzzy yarı-açık $\}$

olarak tanımlanan kümeler sırasıyla μ`nün *fuzzy yarı-kapanışı* ve $\mu$`nün *fuzzy yarı içi* olarak adlandırılır (Yalvaç, 1988).

1.2.17.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u ve x_α bir fuzzy nokta olsun. $x_\alpha q\beta \leq \mu$ olacak şekilde x_α`nın bir $\beta$ fuzzy yarı-açık kümesi var ise, $\mu$ fuzzy kümesine $x_\alpha$`nın *yarı q-komşuluğu* denir (Ghosh, 1990).

1.2.18.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u, x_α bir fuzzy nokta olsun ve $\mu \in I^Y$ olsun. x_α`nın her bir fuzzy yarı-açık yarı q-komşuluğu $\mu$ ile çakışığımsı ise, $x_\alpha$`ya μ`nün *fuzzy yarı-kapanış noktası* denir. $\mu$`nün tüm fuzzy yarı-kapanış noktalarının birleşimi μ`nün *fuzzy yarı-kapanışı* olarak adlandırılır. (Ghosh, 1990).

1.2.19.Önerme: (Mashhour ve ark., 1982) (X,τ_X) bir topolojik uzay, U ve X_o X`in alt kümeleri olsunlar. Bu halde;

a) $U \in PO(X)$ ve $X_o \in SO(X) \Rightarrow U \cap X_o \in PO(X_o)$

b) $U \in PO(X_o)$ ve $X_o \in PO(X) \Rightarrow U \in PO(X)$

1.2.20.Tanım: (X,τ_X) bir topolojik uzay olsun. $A \subseteq X$ alt kümesi için $A \subseteq int(cl(int(A)))$ ise A kümesine bir *α-küme* denir (Njastad, 1965).

1.2.21.Önerme: (X,τ_X) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

A, α-kümedir $\Leftrightarrow$ A, yarı açık ve önaçık kümedir (Noiri, 1984).

1.2.22.Tanım: (X,τ_X) bir topolojik uzay ve $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ X uzayında bir ağ olsun.

a) x_o`ı bulunduran her bir U regüler açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_o$ iken $x_\alpha \in U$ olacak şekilde bir $\alpha_o \in I$ var ise, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x_o noktasına *δ-yakınsaktır* denir (Noiri, 1980).

b) x_o`ı bulunduran her bir U θ-açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_o$ iken $x_\alpha \in U$ olacak şekilde bir $\alpha_o \in I$ var ise, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x_o noktasına *θ-yakınsaktır* denir.

c) x_o'ı bulunduran her bir U açık kümesi için, $\alpha \geq \alpha_o$ iken $x_\alpha \in cl(U)$ olacak şekilde bir $\alpha_o \in I$ var ise, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x_o noktasına *r-yakınsaktır* denir.

1.2.23.Tanım: (Y,τ_Y) bir f t u ve $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ Y uzayında bir ağ olsun. x_o fuzzy noktasının her bir U fuzzy regüler açık q-komşuluğu için, $\alpha \geq \alpha_o$ iken $x_\alpha qU$ olacak şekilde bir $\alpha_o \in I$ var ise, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x_o fuzzy noktasına *fuzzy R-yakınsaktır* denir (Allam and Zahran, 1992).

1.3.Fuzzy Çoğul Fonksiyonlarda Fuzzy Yarı-Süreklilik, Fuzzy Hemen Hemen Süreklilik ve Fuzzy Zayıf süreklilik

1.3.1.Tanım: (X,τ) bir alışılmış topolojik uzay ve (Y,τ_Y) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için $F(x)$ bir fuzzy küme olacak şekilde bir $F:(X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fonksiyonuna *fuzzy çoğul fonksiyon* denir (Papageorgiou, 1985).

Bundan böyle X üzerinde alışılmış bir τ topolojisinin ,Y üzerinde ise bir τ_Y fuzzy topolojisinin var olduğunu kabul edeceğiz. $F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul fonksiyonunu kısaca $F : X \to Y$ olarak göstereceğiz..

1.3.2.Tanım: μ bir fuzzy küme olmak üzere, bir $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için *alt ters (lower inverse)* ve *üst ters (upper inverse) görüntüler* sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır(Mukherjee and Malakar, 1991) :

$F^-(\mu) = \{x \in X \mid F(x)\ q\ \mu\}$, $F^+(\mu) = \{x \in X \mid F(x) \leq \mu\}$

1.3.3.Teorem: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon ve $\beta \in I^Y$ fuzzy küme olsun. Bu halde, $F^-(1-\beta) = X - F^+(\beta)$ dır (Mukherjee and Malakar, 1991).

1.3.4.Tanım: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon ve $x \in X$ olsun(Mukherjee and Malakar, 1991).

a) $x \in F^+(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $U \subseteq F^+(\mu)$ (yani , $\forall z \in U$ için $F(z) \leq \mu$) olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F' ye x noktasında *fuzzy üstten yarı-sürekli (fuzzy upper semi-continuous) çoğul fonksiyon* diyeceğiz. Bu durumu kısaca f.ü.y - sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $U \subseteq F^-(\mu)$ (yani , $\forall z \in U$ için $F(z)\, q\, \mu$) olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F' ye x noktasında *fuzzy alttan yarı-sürekli (fuzzy lower semi-continuous) çoğul fonksiyon* diyeceğiz. Bu durumu kısaca f.a.y - sürekli olarak göstereceğiz.

c) F fuzzy çoğul fonksiyonu her $x \in X$ noktasında f.(ü).a.yarı-sürekli ise, F'ye X üzerinde f.(ü)a.yarı-süreklidir diyeceğiz.

1.3.5.Teorem: F: X→Y fuzzy çoğul fonksiyonun f.ü.y-sürekli olması için gerek ve yeterli koşul her $\mu \in \tau_Y$ için $F^+(\mu)$ kümesinin X içinde açık olmasıdır (Papageorgiou, 1985).

1.3.6.Teorem: F: X→Y fuzzy çoğul fonksiyonun f.a.y-sürekli olması için gerek ve yeterli koşul her $\mu \in \tau_Y$ için $F^-(\mu)$ kümesinin X içinde açık olmasıdır (Mukherjee and Malakar, 1991).

1.3.7.Tanım: F: X→Y fuzzy çoğul fonksiyon ve $x \in X$ olsun (Mukherjee and Malakar, 1991).

a) $x \in F^+(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $U \subseteq F^+(\, int(cl(\mu)))$ (yani , $\forall z \in U$ için $F(z) \leq (\, int\, (cl(\mu)))$) olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F' ye x noktasında *fuzzy üstten hemen hemen sürekli (fuzzy upper almost continuous) çoğul fonksiyon* diyeceğiz. Bu durumu kısaca f.ü.h.h sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $U \subseteq F^-(\, int\, (cl(\mu)))$ (yani , $\forall z \in U$ için $F(z)\, q\, int(cl(\mu)))$) olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F 'ye x noktasında *fuzzy alttan hemen hemen sürekli (fuzzy lower almost continuous) çoğul fonksiyon* diyeceğiz. Bu durumu kısaca f.a.h.h sürekli olarak göstereceğiz.

c) F fuzzy çoğul fonksiyonu her $x \in X$ noktasında f.(ü).a.h.h sürekli ise, F'ye X üzerinde f.(ü)a.h.h süreklidir diyeceğiz.

1.3.8.Teorem: $F{:}X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonunu için aşağıdakiler denktir (Mukherjee and Malakar, 1991).

a) F f.ü.h.h süreklidir,

b) Y\`deki her μ fuzzy açığı için $F^{+}(\mu) \subseteq intF^{+}(int(cl(\mu)))$,

c) Y\`deki her μ fuzzy regüler açığı için $F^{+}(\mu)$ kümesi X içinde açıktır,

d) Y\`deki her μ fuzzy açığı için $F^{+}(int(cl(\mu)))$ kümesi X içinde açıktır,

e) Y\`deki her β fuzzy kapalısı için $cl(F^{-}(cl(int(\beta)))) \subseteq F^{-}(\beta)$,

f) Y\`deki her β fuzzy regüler kapalısı için $F^{-}(\beta)$ kümesi X içinde kapalıdır,

g) Her bir $x \in X$ ve X içinde x\`e yakınsayan her bir $\{S_n \mid n \in (D,>)\}$ ağı ve $x \in F^{+}(\mu)$ olan Y\`deki herhangi bir μ fuzzy regüler açık kümesi için, bu ağ sonunda $F^{+}(\mu)$ içindedir.

1.3.9.Teorem: $F{:}X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir (Mukherjee and Malakar, 1991).

a) F f.a.h.h süreklidir,

b) Y\`deki her μ fuzzy açığı için $F^{-}(\mu) \subseteq intF^{-}(int(cl(\mu)))$,

c) Y\`deki her μ fuzzy regüler açığı için $F^{-}(\mu)$ kümesi X içinde açıktır,

d) Y\`deki her μ fuzzy açığı için $F^{-}(int(cl(\mu)))$ kümesi X içinde açıktır,

e) Y\`deki her β fuzzy kapalısı için $cl(F^{+}(cl(int(\beta)))) \subseteq F^{+}(\beta)$,

f) Y\`deki her β fuzzy regüler kapalısı için $F^{+}(\beta)$ kümesi X içinde kapalıdır,

g) Her bir $x \in X$ ve X içinde x\`e yakınsayan her bir $\{S_n \mid n \in (D,>)\}$ ağı ve $x \in F^{-}(\mu)$ olan Y\`deki herhangi bir μ fuzzy regüler açık kümesi için, bu ağ sonunda $F^{-}(\mu)$ içindedir.

1.3.10.Tanım: $F{:}\ X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon ve $x \in X$ olsun (Mukherjee and Malakar, 1991).

a) $x \in F^{+}(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $U \subseteq F^{+}(cl(\mu))$ (yani , $\forall z \in U$ için $F(z) \leq cl(\mu)$) olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F' ye x noktasında *fuzzy üstten zayıf sürekli (fuzzy upper weakly continuous) çoğul fonksiyon* diyeceğiz. Bu durumu kısaca f.ü.z sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^{-}(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $U \subseteq F^{-}(cl(\mu))$ (yani , $\forall z \in U$ için $F(z)q\, cl(\mu)$) olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F 'ye x noktasında *fuzzy alttan zayıf sürekli (fuzzy lower weakly continuous) çoğul fonksiyon* diyeceğiz. Bu durumu kısaca f.a.z sürekli olarak göstereceğiz.

c) F fuzzy çoğul fonksiyonu her $x \in X$ noktasında f.(ü)a.z sürekli ise, F 'ye X üzerinde f.(ü)a.z süreklidir diyeceğiz.

1.3.11.Teorem: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonun f.ü(a).z sürekli olması için gerek ve yeterli koşul her $\mu \in I^Y$ için $F^{+}(\mu) \subseteq intF^{+}(cl(\mu))$ ($F^{-}(\mu) \subseteq intF^{-}(cl(\mu))$) olmasıdır (Mukherjee and Malakar, 1991).

1.3.12.Tanım: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. X'teki her $U \in \tau$ ve her $x \in U$ için F(x) kümesi fuzzy önaçık ise F'ye *noktasal fuzzy önaçık (Pointwise fuzzy preopen) çoğul fonksiyon* denir (Mukherjee and Malakar, 1991).

1.3.13.Teorem: (Y,τ_Y) bir f t u olsun. Herhangi bir μ fuzzy kümesi ve herhangi bir β fuzzy açık kümesi için $\mu \not{q} \beta$ ise $cl(\mu) \not{q} \beta$ dır (Mukherjee and Malakar, 1991).

1.3.14.Tanım: (X, τ) alışılmış topolojik uzay ve (Y, τ_Y) f t u olsun. (X, τ) topolojik uzayında herhangi bir $A \subseteq X$ alt kümesinin karakteristik fonksiyonu bir fuzzy küme olarak düşünülebilir. Bu durumda $U \in \tau$ ve $V \in \tau_Y$ için UxV fuzzy kümesi,

$$(UxV)\,(x,y) = \begin{cases} V(y), & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$ olarak tanımlanır.

Bu kümeler XxY üzerinde τ x τ_Y için bir taban oluştururlar (Mukherjee and Malakar, 1991).

1.3.15.Tanım: F: X$\rightarrow$Y fuzzy çoğul fonksiyonu için *grafik fonksiyonu* G(F) : X $\rightarrow$ XxY, $x_1(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$ olmak üzere ,G(F)(x) = x_1 x F(x) olarak tanımlanır. x_1xF(x) için {x}xF(x) kullanılacak (Mukherjee and Malakar,1991).

1.3.16.Tanım: x_α ve y_α sırasıyla X ve Y üzerinde fuzzy noktalar öyleki $x_\alpha \in \mu$, $y_\alpha \in \beta$ ve $\mu \in I^X, \beta \in I^Y$ olsun. Bu durumda $[x,y]_\alpha \in \mu \times \beta$, $[x,y]_\alpha$, X x Y 'de dayanağı (x,y) ve değeri α olan fuzzy noktadır (Ajmal and Sarma,1992).

2.BÖLÜM

δ - SÜREKLİ FUZZY ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

2.1.Üstten ve Alttan δ - Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar

Bu kesimde, ağların fuzzy R-yakınsaması da kullanılarak δ-sürekli fuzzy çoğul fonksiyonlar için bir çok karakterizasyon verildi. Ayrıca kısıtlanmış fuzzy çoğul fonksiyon ile bileşke fuzzy çoğul fonksiyonun δ-sürekliliği üzerinde de duruldu.

2.1.1.Tanım: (X, τ) alışılmış topolojik uzay, (Y, τ_Y) f t u ve $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun (Özbakır, 1994).

a) $x \in F^+(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $int(cl(U)) \subseteq F^+(int(cl(\mu)))$ (yani , $\forall z \in int(cl(U))$ için $F(z) \leq (int(cl(\mu)))$) olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F'ye x noktasında *fuzzy üstten δ - sürekli (fuzzy upper δ - continuous) çoğul fonksiyon* diyeceğiz. Bu durumu kısaca f.ü.δ - sürekli olarak göstereceğiz.

b) $x \in F^-(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $int(cl(U)) \subseteq F^-(int(cl(\mu)))$ (yani, $\forall z \in int(cl(U))$ için $F(z) q (int(cl(\mu)))$) olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise F 'ye x noktasında *fuzzy alttan δ - sürekli (fuzzy lower δ - continuous) çoğul fonksiyon* diyeceğiz. Bu durumu kısaca f.a.δ - sürekli olarak göstereceğiz.

c) F fuzzy çoğul fonksiyonu her $x \in X$ noktasında f.(ü).a.δ - sürekli ise, F'ye X üzerinde f.(ü)a.δ - süreklidir diyeceğiz.

2.1.2.Teorem: Bir $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.a.δ- süreklidir,

2) Herhangi bir $V \in RO(Y)$ ve $F(x)qV$ olan her bir $x \in X$ için en az bir $U \in RO(X,x) = \{U \in RO(X) \mid x \in U\}$ vardır öyleki $U \subseteq F^-(V)$,

3) Her bir β fuzzy kümesi için δ - $cl(F^+(\beta)) \subset F^+(\delta - cl(\beta))$,

4) $K \in \delta - C(Y)$ ise $F^+(K) \in \delta - C(X)$,

5) $V \in \delta - O(Y)$ ise $F^-(V) \in \delta - O(X)$,

6) $V \in RO(Y)$ ise $F^-(V) \in \delta - O(X)$,

7) $V \in RC(Y)$ ise $F^+(V) \in \delta - C(X)$,

8) Her $B \in I^Y$ için , $F^-(\delta\text{-int}(B)) \subseteq \delta\text{-int}(F^-(B))$,

9) Her bir $y_0 \in F(x_0)$ ve x_0'a δ - yakınsayan her bir $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı için , $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının bir $(z_\beta)_{\beta \in J}$ alt ağı var ve $y_\beta \in F(z_\beta)$ olan $(y_\beta)_{(\beta, V) \in J} \subseteq Y$ ağı y_0'a fuzzy R - yakınsar.

İspat:(1) $\Rightarrow$ (2): F f.a.δ- sürekli olsun. $F(x)qV$ olan $V \in RO(Y)$ alalım.(1)'den dolayı x'in bir U açık komşuluğu vardır öyleki $int(cl(U)) \subseteq F^-(int(cl(V))) = F^-(V)$ olur. $Int(cl(U)) = W$ seçersek $W \in RO(X,x)$ elde edilir.

(2)$\Rightarrow$(3):$x \in \delta\text{-cl}(F^+(\beta))$ olsun ve $y_\alpha \in F(x)$ alalım.y_α'nın fuzzy regüler açık q - komşuluğu μ için $F(x)q\,\mu$ dür. (2)'den dolayı $U \subseteq F^-(\mu)$ olan $U \in RO(X,x)$ vardır. Öte yandan $x \in \delta\text{-cl}(F^+(\beta))$ olduğundan bu U için $int(cl(U)) \cap F^+(\beta) \neq \varnothing$. O halde en az bir $z \in U \cap F^+(\beta) \neq \varnothing$ için $z \in F^-(\mu)$ ve $F(z) \leq \beta$ olduğundan $\beta\, q\, \mu$ olur. Bu ise $y_\alpha \in \delta\text{-cl}(\beta)$ olduğunu verir. Buradan $x \in F^+(\delta\text{-cl}(\beta))$ dır.

(6)$\Rightarrow$(1): $x \in F^-(V)$ olan $V \in \tau_Y$ alalım. $V \leq int(cl(V))$ olduğundan $x \in F^-(int(cl(V)))$ ve $int(cl(V)) \in RO(Y)$, (6) dan dolayı $F^-(int(cl(V))) \in \delta - O(X)$ olur. O halde en az bir $U \in RO(X,x)$ için $U = int(cl(U)) \subseteq F^-(int(cl(V)))$.

(5) $\Rightarrow$(8): $\beta \in I^Y$alalım. Bir kümenin δ-içi tanımından, $\delta\text{-int}(\beta) \leq \beta$ ve $F^-(\delta\text{-int}(\beta)) \subseteq F^-(\beta)$ olur. Hipotezden $F^-(\delta\text{-int}(\beta)) \in \delta - O(X)$ olduğundan $F^-(\delta\text{-int}(\beta)) = \delta\text{-int}(F^-(\delta\text{-int}(\beta))) \subseteq \delta\text{-int}(F^-(\beta))$ elde edilir.

(8)$\Rightarrow$(5): $\beta \in I^Y$ için $F^-(\delta\text{-int}(\beta)) \subseteq \delta\text{-int}(F^-(\beta))$ olsun ve $V \in \delta$ - O(Y) alalım. Hipotezden $F^-(\delta\text{-int}(V)) = F^-(V) \subseteq \delta\text{-int}(F^-(V)) \Rightarrow F^-(V) \in \delta$ - O(X) elde edilir.

(1)$\Rightarrow$(9): (1) - sağlansın. $x \in X$, $y_v \in F(x)$ keyfi verilsinler. x noktasına δ - yakınsayan bir $(x_\alpha)_{\alpha \in S}$ ağı alalım. $y_v q V$ olan herhangi bir V fuzzy açığını alalım. F, $x \in X$ 'te f.a.δ - sürekli oldugundan x'in en az bir U açık komşuluğu vardır öyleki $\text{int}(\text{cl}(U)) \subset F^-(\text{int}(\text{cl}(V)))$. Öte yandan $(x_\alpha)_{\alpha \in S}$ ağı x'e δ - yakınsak olduğundan bu int(cl(U)) için en az bir $\alpha_0 \in S$ vardır öyleki $\forall \alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha \in \text{int}(\text{cl}(U))$. Yani $\alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha \in F^-(\text{int}(\text{cl}(V)))$. $y_v\, qV$ olan her $V \in \tau_Y$ için $I_V = \{\alpha_0 \in S \mid \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in F^-(\text{int}(\text{cl}(V)))\}$ ve $\mathfrak{I} = \{(\alpha, V) \mid V \in \tau_Q(y_v), \alpha \in I_V\}$ kümelerini tanımlayalım. $(\alpha', V') \geq (\alpha, V) \Leftrightarrow \alpha' \geq \alpha$ ve $V' \subseteq V$ şeklinde tanımlanan ' $\geq$ ' bağıntısı $\mathfrak{I}$ - üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. $\varphi: \mathfrak{I} \rightarrow S$, $\varphi((\beta,V)) = \beta$ olarak tanımlanan φ artandır ve S üzerinde kofinaldir, bu nedenle φ, $(x_\alpha)_{\alpha \in S}$ ağının bir alt ağıdır, bu alt ağı bir $(z_\beta)_{(\beta,V) \in \mathfrak{I}}$ ile gösterelim. Diğer taraftan herhangi bir $(\beta,V) \in \mathfrak{I}$ için $\beta \geq \beta_0$ olduğunda $x_\beta \in F^-(\text{int}(\text{cl}(V)))$ olur. Buradan $F(z_\beta)$ q int(cl(V)) ve $F(x_\beta)$ q int(cl(V)) olur. $F(z_\beta)$ q int(cl(V)) olduğundan en az bir $y_\beta \in F(z_\beta)$ için $F(z_\beta)(y_\beta) + \text{int}(\text{cl}(V))(y_\beta) > 1$ olur. $F(z_\beta)(y_\beta) = u_\beta$ diyelim. $(y_\beta)u_\beta$ fuzzy noktasını kısaca (y_β) ile göstereceğiz. Bu şekildeki y_β ları alırsak $(y_\beta)_{(\beta,V) \in \mathfrak{I}}$ ağı $y_v \in Y$ fuzzy noktasına fuzzy R - yakınsar. Bunu görmek için yqint(cl(V_0)) olan $V_0 \in \tau_Y$ alalım. $V_0 \in \tau_Y$ olduğundan $\beta_0 = \varphi((\beta_0, V_0))$ olan en az bir $\beta_0 \in S$ vardır öyleki y_{β_0} q int(cl(V)). Eğer $(\beta,V) \geq (\beta_0,V_0)$ ise $\beta \geq \beta_0$ ve $V \subseteq V_0$ dır. Buradan $F(z_\beta)$q int(cl(V)) ve $F(x_\beta)$q $\text{int}(\text{cl}(V)) \leq \text{int}(\text{cl}(V_0)) \Rightarrow F(x_\beta)$q int(cl($V_0$)). Bu yüzden y_βq int(cl(V_0)) olur. Bu ise $(y_\beta)_{(\beta,V) \in \mathfrak{I}}$ ağının $y_v \in Y$ fuzzy noktasına fuzzy R - yakınsadığını verir .

(9)$\Rightarrow$(1): (10) doğru olsun fakat (1) doğru olmasın. Yani $x \in F^-(V)$ olan en az bir $V \in \tau_Y$ ve x'in her U açık komşuluğu için $\text{int}(\text{cl}(U)) \not\subset F^-(\text{int}(\text{cl}(V)))$ olsun. Bu durumda en az bir $x_U \in \text{int}(\text{cl}(U))$ vardır öyleki $x_U \notin F^-(\text{int}(\text{cl}(V)))$. T(x) x'in komşuluklar sistemi olmak üzere $(x_U)_{U \in T(x)}$ ağı, açıktır ki $x \in X$ noktasına δ - yakınsar. $y \in Y$ fuzzy noktalarını yqV olan $y \in F(x)$ lerden seçersek (10)'dan dolayı $(x_U)_{U \in T(x)}$ ağının bir $(z_w)_{w \in W}$ alt ağı vardır ve $y_w \in F(z_w)$ için $(y_w)_{w \in W}$ ağı y -

fuzzy noktasına fuzzy R - yakınsar. Bu yüzden $yqV \leq int(cl(V))$ için $w_0' \in W$ vardır öyleki $w \geq w_0'$ iken $y_w q int(cl(V))$ olur. Diğer taraftan $(z_w)_{w \in W}$ ağı $(x_U)_{U \in T(x)}$ ağının bir alt ağı olduğundan $h: W \rightarrow T(x)$ fonksiyonu vardır öyleki $z_w = x_{h(w)}$ ve her bir $U \in T(x)$ için en az bir $w_0'' \in W$ vardır öyleki $h(w_0'') \geq U$ olur. Eğer $w \geq w_0''$ ise $h(w) \geq h(w_0'') \geq U$ olur . $w_0 \in W$ 'yı $w_0 \geq w_0'$ ve $w_0 \geq w_0''$ olarak alırsak $w \geq w_0$ için $y_w q int(cl(V))$ olur. $(x_U)_{U \in T(x)}$ ağının tanımından dolayı $F(x_{h(w)}) \not{q} int(cl(V))$ ve $F(z_w) \not{q} int(cl(V))$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla F , f.a. δ - sürekli olmalıdır.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) denklikleri Özbakır (1994)'da gösterildiği için kanıt biter.

2.1.3.Teorem: F: $X \rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.ü.δ - süreklidir,

2) Herhangi bir $V \in RO(Y)$ ve $F(x) \leq V$ olan her bir $x \in X$ için x'in bir regüler açık U - komşuluğu vardır öyleki $F(U) \leq V$,

3) $V \in RO(Y)$ ise $F^+(V) \in \delta - O(X)$,

4) $V \in \delta - O(Y)$ ise $F^+(int(cl(V))) \in \delta - O(X)$,

5) $K \in \delta - C(Y)$ ise $F^-(cl(int(K))) \in \delta - C(X)$,

6) $K \in RC(Y)$ ise $F^-(K) \in \delta - C(X)$,

7) Her $x \in X$ noktasına δ-yakınsayan her bir $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı ve $F(x) \leq V$ olan her bir V fuzzy açık kümesi için bir $\alpha_0 \in I$ vardır öyleki her $\alpha \geq \alpha_0$ için $F(x_\alpha) \leq int(cl(V))$.

İspat: (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4)$\Leftrightarrow$(5)$\Leftrightarrow$(6) denkliklerinin kanıtı 2.1.3.Teorem'e benzerdir. Biz sadece (1)$\Leftrightarrow$(7) denkliğini ispatlayalım.

(1)$\Rightarrow$(7): $x \in X$, $V \in \delta - O(Y)$ öyleki $F(x) \leq V$ alalım ve $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x noktasına δ-yakınsasın. (1) 'den dolayı x'in bir U açık komşuluğu vardır öyleki $F(int(cl(U))) \leq int(cl(V))$. Buradan $U \in \tau(x)$ ve $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x'e δ-yakınsak olduğundan, bir $\alpha_0 \in I$ vardır öyleki her $\alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha \in int(cl(U)) \subseteq F^+ int(cl(V))$. O halde her $\alpha \geq \alpha_0$ için $F(x_\alpha) \leq int(clV))$.

(7)$\Rightarrow$(1): Hipotez doğru olsun fakat (1) doğru olmasın. Bu durumda $F(x) \leq V$ olan her V fuzzy açık kümesi ve her bir $U \in \tau(x)$ için $F(int(cl(U))) \nleq int(cl(V))$ yani bir $x_U \in int(cl(U))$ vardır öyleki $F(x_U) \nleq int(cl(V))$ olur. Bu şekildeki x_U'lar T(x) yönlendirilmiş kümesi (kapsama bağıntısı) ile X içinde bir ağ oluşturur. Bu $(x_U)_{U\in T(x)}$ ağı x noktasına δ - yakınsar. Fakat bütün $U \in T(x)$'ler için $F(x_U) \nleq int(cl(V))$ olur. Bu ise hipotezle çelişir.

2.1.4.Tanım: $F:X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. Her bir $x \in X$ için F(x) kümesi Y f t u'nın kompakt bir alt kümesi ise F fonksiyonuna fuzzy nokta kompakt çoğul fonksiyon denir.

2.1.5.Teorem: $F:X \to Y$ fuzzy nokta kompakt çoğul fonksiyon ve kabul edelimki Y fuzzy h.h. regüler uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1) F f.ü.δ - süreklidir,
2) $W \in \delta$ - O(Y) ise $F^+(W) \in \delta$ - O(X),
3) $V \in \delta$ - C(Y) ise $F^-(V) \in \delta$ - C(X),
4) Her bir $\beta \in I^Y$ fuzzy kümesi için $\delta\text{-cl}(F^-(\beta)) \subseteq F^-(\delta\text{-cl}(\beta))$,
5) Her bir $A \in I^Y$ fuzzy kümesi için $F^+(\delta\text{-int}(A)) \subseteq \delta\text{-int}(F^+(A))$.

İspat: (1)$\Rightarrow$(2): $W \in \delta$ - O(Y) öyleki $F(x) \leq W$ olsun. W - fuzzy δ - açık küme olduğundan her bir $y_\alpha \in W$ için bir $\beta_{y\alpha}$ -fuzzy açığı vardır öyleki $yq\beta_{y\alpha} \leq int(cl(\beta_{y\alpha})) \leq W = \vee\{ int(cl(\beta_{y\alpha})) \mid y_\alpha \in W\}$. Öte yandan Y - fuzzy h.h - regüler uzay olduğundan bir $\mu_{y\alpha}$ fuzzy regüler açığı vardır öyleki $y_\alpha q\mu_{y\alpha} \leq cl(\mu_{y\alpha}) \leq int(cl(\beta_{y\alpha})) \leq W$. W - fuzzy δ - açık küme olduğundan $W = \vee\{\mu_{y\alpha} \mid y_\alpha \in W, y_\alpha q\mu_{y\alpha}\}$. Buradan $F(x) \leq W = \vee\{\mu_{y\alpha} \mid y_\alpha \in W, y_\alpha q\mu_{y\alpha}\}$ olur. F fuzzy nokta kompakt çoğul fonksiyon olduğundan $y_{\alpha 1}, y_{\alpha 2}, \ldots, y_{\alpha n}$ fuzzy noktaları vardır öyleki $i = 1.....n$ için $y_{\alpha i} \in W$ ve $F(x) \leq \vee\{\mu_{y\alpha i} \mid i=1,2,....,n\}$. Böylece, $F(x) \leq \vee\{\mu_{y\alpha i} \mid i=1,2,....,n\} \leq int(cl(\vee\{\mu_{y\alpha i} \mid i=1,2,....,n\})) \leq W$ olur. $A = int(cl(V\{\mu_{y\alpha i} \mid i=1,2,....,n\}))$ dersek $A \in RO(Y)$ olur ve F f.ü.δ - sürekli olduğundan x'in en az bir U - regüler açık komşuluğu vardır öyleki $U \subseteq F^{+}(A) \subseteq F^{+}(W)$. Buradan $F^{+}(W)$ X 'te δ - açık küme olur.

(2)$\Rightarrow$(3): $V \in \delta - C(Y)$ alalım. $1 - V \in \delta - O(Y)$ 'dir. (2)'den dolayı $F^{+}(1-V) \in \delta - O(X)$. 1.3.3.Teorem 'den dolayı $X - F^{+}(1-V) = F^{-}(V) \in \delta - C(X)$ olur.

(3)$\Rightarrow$(4): $\beta \in I^{Y}$ bir fuzzy küme olsun. Bir kümenin δ-kapanış tanımından, $\beta \leq \delta$-cl(β) ve $F^{-}(\beta) \subseteq F^{-}(\delta\text{-cl}(\beta))$ olur. (3)'ten dolayı $F^{-}(\delta\text{-cl}(\beta)) \in \delta\text{-}C(X)$ elde edilir. Buradan $\delta\text{-cl}(F^{-}(\beta)) \subseteq \delta\text{-cl}(F^{-}(\delta\text{-cl}(\beta))) = F^{-}(\delta\text{-cl}(\beta))$ bulunur.

(4)$\Rightarrow$(5): $A \in I^{Y}$ bir fuzzy küme olsun. $1-A \in I^{Y}$ 'de bir fuzzy kümedir. (4) ' ten dolayı $\delta\text{-cl}(F^{-}(1-A)) \subseteq F^{-}(\delta\text{-cl}(1-A))$. Buradan $X - F^{-}(\delta\text{-cl}(1-A)) \subseteq X - (\delta\text{-}\ \text{cl}(F^{-}(1-A)))$ yani $X - F^{-}(1-(\delta\text{-int}(A))) \subseteq \delta\text{-int}(X - F^{-}(1-A))$ bu ise 1.3.3.Teorem'den $F^{+}(\delta\text{-int}(A)) \subseteq \delta\text{-int}(F^{+}(A))$ olduğunu verir.

(5)$\Rightarrow$(1): $V \in RO(Y)$ ve $x \in F^{+}(V)$ alalım. Regüler açıklar δ - açık olduğundan ve (5)'ten dolayı $F^{+}(\delta\text{-int}(V)) = F^{+}(V) \subseteq \delta\text{-int}(F^{+}(V))$dır. Dolayısıyla $F^{+}(V) \in \delta - O(X)$ olur. Buradan $x \in F^{+}(V)$ için en az bir tane $U \in RO(X,x)$ vardır öyleki $U \subseteq F^{+}(V)$ olur.

2.1.6.Önerme: (X,τ) ve (Z,τ_Z) alışılmış topolojik uzaylar (Y, τ_Y) f t u olsun. F: $X \to Z$ çoğul fonksiyon ve G: $Z \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

1) Her $V \in \tau_Y$ için $(GoF)^{-}(V) = F^{-}(G^{-}(V))$

2) Her $V \in \tau_Y$ için $(GoF)^{+}(V) = F^{+}(G^{+}(V))$

İspat:(1): $F^{-}(G^{-}(V)) = \{ x \in X \mid F(x) \cap G^{-}(V) \neq \varnothing\} = \{ x \in X \mid F(x) \cap \{z \in Z \mid G(z)qV \}\} = \{x \in X \mid z \in F(x),\ G(z)qV \} = \{x \in X \mid G(F(x))qV \} = (GoF)^{-}(V)$ olur.

(2): $(GoF)^{+}(V) = \{x \in X \mid (GoF)(x) \leq V \} = \{x \in X \mid F(x) \leq G^{+}(V) \} = F^{+}(G^{+}(V))$

2.1.7.Teorem: Eğer $F:X\rightarrow Z$ a.δ - sürekli çoğul fonksiyon ve $G:Z\rightarrow Y$ f.a. δ - sürekli çoğul fonksiyon ise $GoF: X\rightarrow Y$ f.a.δ - sürekli çoğul fonksiyondur.

İspat: $V \in \delta - O(Y)$ olsun. G, f.a.δ - sürekli olduğundan $G^{-}(V) \in \delta - O(Z)$ ve F, a.δ - sürekli olduğundan, $F^{-}(G^{-}(V)) = (GoF)^{-}(V) \in \delta - O(X)$ elde edilir. Bu yüzden GoF, f.a.δ - süreklidir.

2.1.8.Önerme: (X,τ) topolojik uzay, $A \subset X$ bir açık küme ve $U \subset X$ bir regüler açık küme olsun. Bu durumda $W=A\cap U$ A'da regüler açık kümedir.

İspat: (Küçük, 1995)

2.1.9.Teorem: $F:X\rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonsiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

1) F, f.a.(ü).δ - sürekli ve $A \subseteq X$ açık alt küme ise $F|_A: A\rightarrow Y$ f.a.(ü).δ - süreklidir.

2) $\Phi=\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ X'in regüler açık örtüsü olsun. F, f.a.(ü). δ - süreklidir $\Leftrightarrow$ her $\alpha\in I$ için $F_\alpha = F|_{U_\alpha}: U_\alpha\rightarrow Y$ çoğul fonksiyonları f.a.(ü). δ - süreklidirler.

İspat: (1): 2.1.9.Önerme ve f.a(ü). δ- sürekliliğin tanımından açıktır.

(2): $(\Rightarrow)$ F, f.a.δ - sürekli ve $\alpha \in I$ sabit, $x \in U_\alpha$ ve $V \in RO(Y)$ alalım öyleki $F_\alpha(x)qV$ olsun. $F(x)=F_\alpha(x)$ ve F, f.a.δ - sürekli olduğundan en az bir $U_0 \in RO(X,x)$ vardır öyleki $U_0 \subseteq F^{-}(V)$. $U=U_0\cap U_\alpha$ alırsak, $U \in RO(X,x)$ olur. Buradan $U\subseteq F^{-}(V)\cap U_\alpha = F_\alpha^{-}(V)$ olur. Dolayısıyla F_α, f.a.δ - süreklidir.

$(\Leftarrow)$Her $\alpha\in I$ için F_α, f.a.δ - sürekli olsun. $x \in X$ ve sabit bir $V \in RO(Y)$ alalım öyleki $F(x)qV$ olsun. Bu durumda en az bir $\alpha \in I$ için $x \in U_\alpha$, $F(x) = F_\alpha(x)$; $F_\alpha(x)qV$ ve F_α, f.a.δ - sürekli olduğundan en az bir $U \in RO(U_\alpha)$ vardır öyleki $U \subseteq F_\alpha^{-}(V)=F^{-}(V)\cap U_\alpha$. İki regüler açığın arakesiti regüler açık olduğundan $W \in RO(X)$ alalım öyleki $U=U_\alpha\cap W$ olsun. Bu durumda $U \in RO(X)$ olur. Buradan $x \in X$'te F, f.a.δ-süreklidir.

Benzer şekilde f.ü.δ - süreklilik içinde ispat yapılabilir.

2.2.Fuzzy δ-Kapalı Grafiklilik ve Üstten δ-Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar

Bu kesimde, fuzzy çoğul fonksiyonun grafiğinin δ-kapalılığı ile grafik fonksiyonunun δ-sürekliliği üzerinde duruldu.

2.2.1.Tanım: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. Her bir $x \in X$ için $F(x)$, Y'de fuzzy kapalı bir küme ise F 'e fuzzy nokta kapalı çoğul fonksiyon denilir.

2.2.2.Önerme: Herhangi bir $\mu \in I^Y$ fuzzy kümesi ve λ fuzzy açık kümesi için $cl(\mu)q\lambda$ ise $\mu q\lambda$ olur.

İspat: $cl(\mu)q\lambda$ ve $\mu \not{q}\lambda$ olsun. $cl(\mu)q\lambda$ olduğundan en az bir $x \in X$ için $cl(\mu)(x)+\lambda(x)>1$ dir. Bu durumda $\alpha = cl(\mu)\ (x)$ seçersek λ, x_α'nın bir açık q-komşuluğu olur öyleki $\mu \not{q}\lambda$ dır. Buradan $x_\alpha \notin cl(\mu)$ olur. Bu ise $x_\alpha(x) \nleq cl(\mu)(x)$ yani $\alpha \nleq cl(\mu)(x)=\alpha$ olur ki bu çelişkidir. O halde $cl(\mu)q\lambda$ iken $\mu q\lambda$ olmak zorundadır.

2.2.3.Teorem: $F:X \to Y$ f. nokta kapalı çoğul fonksiyon olsun. Eğer F, f.ü.δ - sürekli ve Y -fuzzy regüler uzay ise o zaman G(F) fuzzy δ - kapalıdır.

İspat: Kabul edelimki $\delta\text{-}cl(G(F)) \not\subset G(F)$ olsun. Yani $(x,y) \in \delta\text{-}cl(G(F))$ fakat $(x,y) \notin G(F)$ olsun. Buradan $y \notin F(x)$'tir ve Y fuzzy regüler uzay olduğundan (Sinha, 1992) $V_1, V_2 \in \tau_Y$ vardır öyleki yqV_1, $F(x) \leq V_2$ ve $V_1 \not{q} V_2$ olur. $F(x) \leq V_2$ ve F, f.ü.δ - sürekli olduğundan en az bir $U \in \tau(x)$ vardır öyleki $x \in int(cl(U)) \subseteq F^+(int(cl(V_2)))$. Öte yandan $yqV_1 \leq int(cl(V_1)) \Rightarrow yqint(cl(V_1))$dır. Bu durumda int(cl(U))xint(cl(V_1)) regüler açıktır. İddiamız; int(cl(U))xint(cl(V_1)), (x,y) 'nin regüler açık q-komşuluğudur ve (int(cl(U))xint(cl(V_1))) $\not q$ G(F) dır. Gerçekten (int(cl(U)) x int(cl(V_1)))(x,y)+(x,y)(x,y) = int(cl(V_1))(y)+y(y) >1, bu durumda (int(cl(U))xint(cl(V_1)))q(x,y) olur. Şimdi kabul edelimki G(F)q(int(cl(U))x int(cl(V_1))) olsun. Bu, çarpım küme tanımından ancak x $\in$ U'lar ve y $\in$ F(x) için mümkün olabilir. Bu durumda G(F)(x,y)+(int(cl(U))xint(cl(V_1)))(x,y) > 1 $\Rightarrow$ ({x}xF(x))(x,y)+(int(cl(U)) x int(cl(V_1)))(x,y)>1 $\Rightarrow$ (F(x))(y)+(int(cl(V_1))) (y) > 1 $\Rightarrow$ F(x)qint(cl(V_1)) $\Rightarrow$cl(V_1)qF(x) olur. Buradan cl(V_1)qF(x) $\leq$ V_2 ve 2.2.2.Önerme`den V_1qV_2 olur ki bu ise $V_1 \not q V_2$ ile çelişir. O halde G(F)$\not q$(int(cl(U)) x int(cl(V_1))) olmalıdır. Bu ise (x,y) $\in$ δ-cl(G(F)) ile çelişir. Buradan (x,y) $\in$ G(F) bulunur.

2.2.4.Teorem: F :X→Y fuzzy çoğul fonksiyon olsun. G(F) :X→XxY f.ü.δ -sürekli ise F fuzzy çoğul fonksiyonuda f.ü.δ -süreklidir.

İspat: G(F) f.ü.δ - sürekli olsun. x$\in$X ve F(x) $\leq$ V olan V fuzzy açığını alalım. XxV, XxY uzayında açıktır ve G(F)(x) $\leq$ XxV dir. G(F) f.ü.δ -sürekli olduğundan, G(F)(int(cl(U))) $\leq$ int(cl(XxV)) = Xxint(cl(V)) olan x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Bu durumda z$\in$int(cl(U)) ve herhangi bir y$\in$Y için, [F(z)](y) = [G(F)(z)](z,y) $\leq$ (Xxint(cl(V)))(z,y) = int(cl(V))(y) olur. Buradan her y$\in$Y için [F(z)](y) $\leq$ int(cl(V))(y), yani herhangi bir z$\in$int(cl(U)) için F(z) $\leq$ int(cl(V)) olur ki bu F`nin f.ü.δ -sürekliliğini verir.

2.2.5.Teorem: F :X→Y fuzzy çoğul fonksiyon olsun. G(F) :X→XxY f.a.δ -sürekli ise F fuzzy çoğul fonksiyonuda f.a.δ -süreklidir.

İspat: G(F) f.a.δ - sürekli olsun. x$\in$X ve F(x)qV olan V fuzzy açığını alalım. y$\in$$[F(x)]_0 \cap [V]_0$ için, [F(x)](y) + V(y) > 1 dir. Buradan [G(F)(x)](x,y) + (XxV)(x,y) = [F(x)](y) + V(y) > 1 olur. Yani, G(F)(x)q(XxV) dir ve XxV, XxY uzayında açıktır. G(F) f.a.δ -sürekli olduğundan, her z$\in$int(cl(U)) için,

$G(F)(z)q\,int(cl(XxV)) = Xxint(cl(V))$...(*) olan x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Biz şimdi bütün $z \in int(cl(U))$ lar için $F(z)q\,int(cl(V))$ olduğunu görelim. Bir $z_0 \in int(cl(U))$ için $F(z_0) \not q\, int(cl(V))$ olsun. Bu durumda her $y \in Y$ için $[F(z_0)](y) + int(cl(V(y))) \leq 1$ elde edilir. Herhangi bir $(r,s) \in XxY$ için, $[G(F)(z_0)](r,s) + int(cl(XxV))(r,s) = [F(z_0)](s) + V(s) \leq 1$ olur ki bu (*) ile çelişir. Bu durumda her $z \in int(cl(U))$ için $F(z)q\,int(cl(V))$, yani $int(cl(U)) \subseteq F^-(int(cl(V)))$ olur ki bu F`nin f.a.δ -sürekliliğini verir.

2.2.6.Tanım: (Y,τ_Y) f t u ve $A \in I^Y$ olsun. A'nın Y'deki fuzzy açıklardan oluşan her bir$\{U_\alpha \mid \alpha \in B\}$ fuzzy açık örtüsüden $A \subseteq \vee\{ int(cl(U_\alpha)) \mid \alpha=1,...,n \}$ olacak biçimde sonlu bir alt örtü seçilebilirse, A'ya *fuzzy yakın kapalı küme* denir.

2.2.7.Teorem: Y fuzzy hemen hemen regüler uzay $F: X \to Y$ fuzzy nokta kompakt ve f.ü.δ - sürekli çoğul fonksiyon olsun. Eğer A X' te yakın kapalı ise F(A) Y'de fuzzy yakın kapalıdır.

İspat: $A \subseteq X$ yakın kapalı olsun ve Φ, F(A)'nın regüler açık örtüsü olsun. Eğer $a \in A$ ise $F(a) \leq \vee\Phi$. Böylece Φ, F(a) 'nın regüler açık örtüsüdür. F(a) kompakt olduğundan Φ 'nın sonlu bir $\Phi_{n(a)}$ alt ailesi vardır öyleki $F(a) \leq \vee\Phi_{n(a)} = V_a$ olur. $V_a \in \delta - O(Y)$ ve F, f.ü.δ - sürekli olduğundan $F^+(V_a) \in \delta - O(X)$. Bu yüzden bir regüler açık U_a kümesi vardır öyleki $a \in U_a \subseteq F^+(V_a)$. $\varphi=\{U_a \mid a \in A\}$ A'nın regüler açık örtüsüdür. A X'te yakın kapalı olduğundan A kümesinin $a_1,a_2,...,a_n$ noktaları vardır öyleki $A \subseteq \cup\{U_{ai} \mid a_i \in A,\ i=1,2,...,n\}$. Biz buradan $F(A) \leq F(\cup\{U_{ai} \mid a_i \in A,\ i=1,2,...,n\} \leq \vee\{V_{ai} \mid a_i \in A, i=1,2,...,n\} \leq \vee\{\vee\Phi_{n(ai)} \mid a_i \in A, i=1,2,...,n \}$ elde ederiz. Böylece F(A) , Y 'de fuzzy yakın kapalıdır.

3.BÖLÜM

KUVVETLİ θ - SÜREKLİ VE HEMEN HEMEN KUVVETLİ θ - SÜREKLİ FUZZY ÇOĞUL FONKSİYONLAR

3.1. Kuvvetli θ -Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar

Fuzzy çoğul fonksiyonların kuvvetli θ-sürekliliği için bir çok karakterizasyonun verildiği bu kesimde, bileşke fonksiyonun kuvvetli θ-sürekliliği ve fuzzy çoğul fonksiyonun kuvvetli θ-sürekliliği ile grafiğinin θ-kapalılığı ve grafik fonksiyonunun kuvvetli θ-sürekliliği arasındaki ilişkiler de incelendi.

3.1.1.Tanım: (X,τ) alışılmış topolojik uzay, (Y,τ_Y) f t u ve $F:X\to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun (Özbakır, 1994).

a) $x\in F^{+}(\mu)$ olan her $\mu\in\tau_Y$ için $cl(U)\subseteq F^{+}(\mu)$ (yani,her $z\in cl(U)$ için $F(z)\leq\mu$)olacak şekilde x noktasının U açık komşuluğu varsa F`ye x noktasında *fuzzy üstten kuvvetli θ -sürekli (fuzzy upper strongly θ -continuous) çoğul fonksiyon* denir. Bu durum f.ü.k.θ -sürekli olarak gösterilecektir.

b) $x\in F^{-}(\mu)$ olan her $\mu\in\tau$ için $cl(U)\subseteq F^{-}(\mu)$ (yani,her $z\in cl(U)$ için $F(z)q\mu$) olacak şekilde x noktasının U açık komşuluğu varsa F`ye x noktasında *fuzzy alttan kuvvetli θ -sürekli (fuzzy lower strongly θ -continuous) çoğul fonksiyon* denir. Bu durum f.a.k.θ -sürekli olarak gösterilecektir.

c) F fuzzy çoğul fonksiyonu her $x\in X$ noktasında f.ü(a).k.θ -sürekli ise F`ye X üzerinde f.ü(a).k.θ -süreklidir denir.

3.1.2.Teorem: $F: X\to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.ü.k.θ -süreklidir,

2) Her $K\in\tau_Y^{k}$ için $F^{-}(K)\in\theta\text{-}C(X)$,

3) Her $V\in\tau_Y$ için $F^{+}(V)\in\theta\text{-}O(X)$,

4) Her bir $x \in X$, x`e θ -yakınsayan her $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı ve $F(x) \leq V$ olan her V fuzzy açık kümesi için en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır öyleki her $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \leq V$.

İspat:(1)$\Rightarrow$(2): $K \in \tau_Y^k$ için $x \in \theta\text{-cl}(F^-(K))$ fakat $x \notin F^-(K)$ olsun. Bu durumda $F(x) \not q K \Rightarrow F(x) \leq 1-K$ olur. 1-K fuzzy açık ve F f.ü.k.θ -sürekli olduğundan $cl(U) \subseteq F^+(1-K) = X-F^-(K)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $cl(U) \cap F^-(K) = \phi$ olur ki bu $x \in \theta\text{-cl}(F^-(K))$ ile çelişir. Dolayısıyla $x \in F^-(K)$ olmalıdır. Yani $F^-(K)$ X`te θ -kapalıdır.

(2)$\Rightarrow$(3): $V \in \tau_Y$ alalım. $1-V \in \tau_Y^k$ `dır ve (2)`den dolayı $F^-(1-V) \in \theta\text{-}C(X)$ olur. Buradan 1.3.3.Teorem`den $X- F^-(1-V) = F^+(V) \in \theta\text{-}O(X)$ elde edilir.

(3)$\Rightarrow$(4): $x \in X$ ve $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı x noktasına θ -yakınsasın. $F(x) \leq V$ olan V fuzzy açık kümesini alalım. Hipotezden $F^+(V)$ X`te θ -açık kümedir. $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı x noktasına θ -yakınsak olduğundan en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır öyleki her $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x \in F^+(x_\alpha)$ olur. Bu ise her $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \leq V$ olduğunu verir.

(4)$\Rightarrow$(1):Kabul edelim ki (1) doğru olmasın. Yani $x \in X$, $x \in F^+(V)$ olan bir V fuzzy açığı ve x noktasının her U açık komşuluğu için $x \in cl(U) \not\subset F^+(V)$ olsun. Bu durumda $x_{cl(U)} \in cl(U)$ noktası vardır öyleki $x_{cl(U)} \notin F^+(V)$ dir. $D = \{(x_{cl(U)}, U) \mid U \in \tau(x), x_{cl(U)} \in cl(U), x_{cl(U)} \notin F^+(V)\}$ kümesi $(x_{cl(U)}, U_1) \leq (x_{cl(U)}, U) \Leftrightarrow cl(U) \subseteq cl(U_1)$ şeklinde tanımlanan bağıntı ile yönlendirilmiş bir kümedir. $g : D \rightarrow X$ fonksiyonu bir ağdır ve bu $(x_{cl(U)})_{(xcl(U),U)\in D}$ ağı x noktasına θ-yakınsar. Fakat bütün $(x_{cl(U)}, U) \in D$ ler için $x_{cl(U)} \notin F(V)$`dir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde F f.ü.k.θ -sürekli olmalıdır.

3.1.3.Teorem: F: X $\rightarrow$Y fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.a.k.θ -süreklidir,

2) Her $K \in \tau_Y^k$ için $F^+(K) \in \theta\text{-}C(X)$,

3) Her $V \in \tau_Y$ için $F^-(V) \in \theta\text{-}O(X)$,

4) Her bir $x \in X$, x`e θ -yakınsayan her $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı ve $F(x)qV$ olan her V fuzzy açık kümesi için en az bir $\alpha_0 \in I$ öyleki her $\alpha\geq\alpha_0$ iken $F(x_\alpha)qV$.

İspat:(1)⇒(2): $K\in\tau_Y^k$ için $x \in \theta$ -cl($F^+(K)$) fakat $x\notin F^+(K)$ olsun. Bu durumda $F(x)\nleq K \Rightarrow F(x)q1-K$ olur. 1-K fuzzy açık ve F f.a.k.θ -sürekli olduğundan $cl(U) \subseteq F^-(1-K) = X- F^+(K)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $cl(U) \cap F^+(K) = \phi$ olur ki bu $x \in \theta$ -cl($F^+(K)$) ile çelişir. Dolayısıyla $x \in \theta$ -cl($F^+(K)$) iken $x\in F^+(K)$ olmalıdır. Yani $F^+(K)$ X`te θ -kapalıdır.

(2)⇒(3): $V\in\tau_Y$ alalım. $1-V\in\tau_Y^k$ `dır ve (2)`den dolayı $F^+(1-V)\in\theta$ -C(X) olur. Buradan 1.3.3.Teoremden $X- F^+(1-V) = F^-(V)\in\theta$ -O(X).

(3)⇒(4): $x\in X$ ve $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı x noktasına θ -yakınsasın. $F(x)qV$ olan V fuzzy açık kümesini alalım. Hipotezden $F^-(V)$ X`te θ -açık kümedir. $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı x noktasına θ -yakınsak olduğundan en az bir $\alpha_0\in I$ vardır öyleki her $\alpha\geq\alpha_0$ iken $x_\alpha\in F^-(x)$ olur. . Bu ise her $\alpha\geq\alpha_0$ iken $F(x_\alpha)\ q\ V$ olduğunu verir.

(4)⇒(1):Kabul edelim ki (1) doğru olmasın. Yani $x\in X$, $x\in F^-(V)$ olan bir V fuzzy açığı ve x noktasının her bir U açık komşuluğu için $x\in cl(U) \not\subset F^-(V)$ olsun. Bu durumda $x_{cl(U)}\in cl(U)$ noktası vardır öyleki $x_{cl(U)}\notin F^-(V)$ dir. $D=\{(x_{cl(U)},U) \mid U\in\tau(x), x_{cl(U)}\in cl(U), x_{cl(U)}\notin F^-(V)\}$ kümesi $(x_{cl(U)},U_1) \leq (x_{cl(U)},U) \Leftrightarrow cl(U) \subseteq cl(U_1)$ şeklinde tanımlanan bağıntı ile yönlendirilmiş bir kümedir. $g : D \to X$ fonksiyonu bir ağdır ve bu $(x_{cl(U)})_{(xcl(U),U)\in D}$ ağı x noktasına θ-yakınsar. Fakat bütün $(x_{cl(U)},U)\in D$ ler için $x_{cl(U)} \notin F^-(V)$`dir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde F f.a.k.θ -sürekli olmalıdır.

3.1.4.Teorem: $F:X \to Y$ fuzzy nokta kapalı çoğul fonksiyon, Y fuzzy regüler uzay ve F f.ü.k.θ -sürekli çoğul fonksiyon ise G(F) Y`de θ - kapalıdır.

İspat: Kabul edelimki $(x,y) \in \theta$ -cl(G(F)) fakat $(x,y) \notin$ G(F) olsun. Buradan $y \notin F(x)$'tir ve Y - fuzzy regüler uzay olduğundan yqV_1, $F(x) \leq V_2$ ve $V_1 \not{q} V_2$ olacak şekilde $V_1, V_2 \in \tau_Y$ vardır. $F(x) \leq V_2$ ve F, f.ü.k.θ -sürekli olduğundan $x \in cl(U) \subseteq F^{+}(cl(V_2))$ olacak şekilde en az bir $U \in \tau(x)$ vardır. Öte yandan $yqV_1 \leq cl(V_1) \Rightarrow yq\, cl(V_1)$. Bu durumda U x V_1 , (x,y) 'nin açık q-komşuluğudur ve $cl(UxV) = cl(U) \times cl(V_1) \not{q} G(F)$ dir. Gerçekten $(cl(U)xcl(V_1))\,(x,y)+(x,y)(x,y) = cl(V_1)\,(y)+y(y) > 1$ bu durumda $(cl(U)) \times cl(V_1))q\,(x,y)$ olur. Şimdi kabul edelimki $G(F)q(cl(U) \times cl(V_1))$ olsun. Bu, çarpım küme tanımından ancak $x \in U$'lar ve $y \in F(x)$ için mümkün olabilir. Bu durumda $G(F)(x,y)+(cl(U) \times cl(V_1))(x,y) > 1 \Rightarrow (\{x\}xF(x))(x,y)+(\,cl(U) \times cl(V_1)\,)(x,y)>1 \Rightarrow (F(x))(y)+\,(cl(V_1))\,(y)>1 \Rightarrow F(x)q\, cl(V_1) \Rightarrow$ 2.2.2.Önerme`den V_1qV_2 olur ki bu ise $V_1 \not{q} V_2$ ile çelişir. O halde $G(F)\not{q}(cl(U) \times cl(V_1))$ olmalıdır. Ancak bu $(x,y) \in \theta$ -cl(G(F)) oluşu ile çelişir. Buradan $(x,y) \in G(F)$ olur. Dolayısıyla G(F) θ -kapalıdır.

3.1.5.Teorem: F $:X \to Z$ ü(a).k.θ -sürekli çoğul fonksiyon ve G $:Z \to Y$ f.ü(a).k.θ -sürekli çoğul fonksiyon olsun. Bu durumda GoF $:X \to Y$ f.ü.(a).k.θ - sürekli çoğul fonksiyondur.

İspat: $K \leq Y$ bir fuzzy kapalı küme olsun. G, f.ü.k.θ -sürekli olduğundan $G^{-}(K) \in \theta$ -C(Z) ve dolayısıyla $G^{-}(K) \in C(Z)$. F, ü.k.θ -sürekli olduğundan $F^{-}(G^{-}(K)) \in \theta$ -C(X) olur. 2.1.7.Önerme`den $F^{-}(G^{-}(K)) = (GoF)^{-}(K) \in \theta$ -C(X) olur. Dolayısıyla GoF f.ü.k.θ -süreklidir.

Benzer şekilde f.a.k.θ -süreklilik içinde ispat yapılabilir.

3.1.6.Teorem: F $:X \to Y$ fuzzy nokta kompakt ve f.ü.k.θ -sürekli çoğul fonksiyon olsun. $A \subseteq X$ kümesi X`te bir H-küme ise F(A) Y`de fuzzy kompakt`tır.

İspat: $A \subseteq X$ bir H-küme olsun ve Φ, F(A)'nın açık örtüsü olsun. $a \in A$ ise $F(a) \leq \vee\Phi$. Böylece Φ, F(a) 'nın bir açık örtüsüdür. F(a) kompakt olduğundan

Φ 'nın $F(a) \leq \vee \Phi_{n(a)} = W_a$ olacak şekilde sonlu bir $\Phi_{n(a)}$ alt ailesi vardır. $W_a \in \tau_Y$ ve F, f.ü.k.θ -sürekli olduğundan $a \in U_a \subseteq F^+(W_a)$ olacak şekilde $U_a \in \tau(a)$ vardır. $\varphi = \{U_a \mid a \in A\}$ A'nın bir açık örtüsüdür ve A X'te H-küme olduğundan $A \subseteq \cup\{cl(U_{ai}) \mid i=1,2,...,n\}$ olacak şekilde $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ noktaları vardır. Buradan $F(A) \leq F(\cup\{cl(U_{ai}) \mid a_i \in A,\ i=1,2,...,n\} \leq \vee\{W_{ai} \mid a_i \in A, i=1,2,...,n\} \leq \vee\{\Phi_{n(ai)} \mid a_i \in A, i=1,2,...,n\}$ elde edilir. Böylece F(A) , Y 'de fuzzy kompakt`tır.

3.1.7.Sonuç: $F : X \to Y$ fuzzy nokta kompakt ve f.ü.k.θ -sürekli çoğul fonksiyon olsun. X hemen hemen kompakt ise Y kompakt`tır.

İspat: Önceki teoremden açık.

3.1.8.Teorem: Her $\alpha \in I$ için $F_\alpha : X \to Y_\alpha$ fuzzy çoğul fonksiyonlar olsunlar. $F : X \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ fuzzy çoğul fonksiyonu her $x \in X$ için $F(x) = \prod_{\alpha \in I} F_\alpha(x)$ olarak tanımlansın. F f.ü.k.θ -sürekli ise her bir $\alpha \in I$ için F_α f.ü.k.θ -süreklidir.

İspat: $x \in X$ ve $\beta \in I$ alalım. V, Y_β fuzzy uzayında $F_\beta(x)$`i kapsayan bir fuzzy açık olsun. Bu durumda $p_\beta$ $\beta$. izdüşüm dönüşümü olmak üzere $p_\beta^{-1}(V) = V x \prod_{\alpha \neq \beta} Y_\alpha$ kümesi $\prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ fuzzy çarpım uzayında F(x)`i kapsayan bir fuzzy açıktır. F f.ü.k.θ -sürekli olduğundan $F(cl(U)) \leq p_\beta^{-1}(V)$ olacak şekilde x`in bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $p_\beta(F(cl(U))) = F_\beta(cl(U)) \leq p_\beta(\ p_\beta^{-1}(V)\ ) \leq V$ olur. Dolayısıyla F_β, her $\beta \in I$ ve her $x \in X$ için f.ü.k.θ -süreklidir.

3.1.9.Sonuç: $F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. $G(F) : X \to XxY$ f.ü.k.θ -sürekli ise F, f.ü.k.θ -süreklidir.

İspat: $G(F) : X \to XxY$, $G(F)(x) = \{x\} x\ F(x)$, $I : X \to X$ birim dönüşüm olmak üzere $(G(F))(x) = I(x)xF(x)$ olarak tanımlanırsa önceki teoremden F, f.ü.k.θ -sürekli olur.

3.1.10.Teorem: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. G(F) f.ü.k.θ -sürekli ise X uzayı regüler uzaydır.

İspat: G(F) f.ü.k.θ -sürekli ve U x'i kapsayan bir açık küme olsun. Buradan $(G(F))(x) \leq U x Y$ alabiliriz ve G(F) $x \in X$'te f.ü.k.θ -sürekli olduğundan $G(F)(cl(U_1)) \leq U x Y$ olan $U_1 \in \tau(x)$ vardır. Buradan $x \in U_1 \subseteq cl(U_1) \subseteq U$ olur ki bu X uzayının regüler uzay olduğunu verir.

3.2. Hemen Hemen Kuvvetli θ - Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar

Bu kesimde, ağların fuzzy R-yakınsaklığı da kullanılarak hemen hemen kuvvetli θ-sürekli fuzzy çoğul fonksiyonlar için karakterizasyonlar verildi. Fuzzy çoğul fonksiyonun hemen hemen kuvvetli θ-sürekliliği ile grafik fonksiyonunun hemen hemen kuvvetli θ-sürekliliği arasındaki ilişkiler incelendi.

3.2.1.Tanım: (X,τ) alışılmış topolojik uzay, (Y,τ_Y) f t u ve $F: X \to Y$ fuzz çoğul fonksiyon olsun (Özbakır, 1994).

a) $x \in F^+(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $cl(U) \subseteq F^+(int(cl(\mu)))$ (yani,her $z \in cl(U)$ için $F(z) \leq int(cl(\mu))$)olacak şekilde x noktasının U açık komşuluğu varsa F'ye x noktasında *fuzzy üstten hemen hemen kuvvetli θ -sürekli (fuzzy upper almost strongly θ -continuous) çoğul fonksiyon* denir. Bu durum f.ü.h.h.k.θ -sürekli olarak gösterilecektir.

b) $x \in F^-(\mu)$ olan her $\mu \in \tau$ için $cl(U) \subseteq F^-(int(cl(\mu)))$ (yani,her $z \in cl(U)$ için $F(z) q int(cl(\mu))$) olacak şekilde x noktasının U açık komşuluğu varsa F'ye x noktasında *fuzzy alttan hemen hemen kuvvetli θ -sürekli (fuzzy lower almost strongly θ-continuous) çoğul fonksiyon* denir. Bu durum f.a.h.h.k.θ -sürekli olarak gösterilecektir.

c) F fuzzy çoğul fonksiyonu her $x \in X$ noktasında f.ü(a).h.h.k.θ -sürekli ise, F`ye X üzerinde f.ü(a).h.h.k.θ -süreklidir denir.

3.2.2.Teorem: F: $X \rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.a.h.h.k.θ -süreklidir,

2) Her $K \in RC(Y)$ için $F^{+}(K) \in \theta$ -C(X),

3)Her bir $x \in X$ ve F(x) q V olan her $V \in RO(Y)$ için x`in bir U açık komşuluğu vardır öyleki her $z \in cl(U)$ için F(z) q V dır,

4) Her $\mu \in RO(Y)$ için $F^{-}(\mu) \in \theta$ -O(X).

İspat: (1)$\Rightarrow$(2): $K \in RC(Y)$, $x \in \theta$ -cl(F^{+}(K)) ve $x \notin F^{+}(K)$ olsun. Bu durumda $F(x) \nleq K$ yani F(x) q (1-K) dır. F, f.a.h.h.k.θ -sürekli olduğundan $cl(U) \subseteq F^{-}(1\text{-}K)$ olan x`in bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $cl(U) \cap (X\text{-}F^{-}(1\text{-}K)) = \phi$ ve 1.3.3.Teorem`den $cl(U) \cap F^{+}(K) = \phi$ olur ki bu $x \in \theta$ -cl(F^{+}(K)) oluşu ile çelişir. Dolayısıyla θ -cl(F^{+}(K)) $\subseteq F^{+}(K)$ olmalıdır. Yani $F^{+}(K)$ X`te θ -kapalı olmalıdır.

(2)$\Rightarrow$(3): $x \in X$ ve F(x)qV olan V fuzzy regüler açık kümesini alalım. $1\text{-}V \in RC(Y)$ olduğundan (2)`den dolayı $F^{+}(1\text{-}V)$ X`te θ -kapalıdır ve $x \notin \theta$ -cl(F^{+}(1-V)) dir. θ -kapanış tanımından x`in en az bir U açık komşuluğu için $cl(U) \cap F^{+}(1\text{-}V) = \phi \Rightarrow cl(U) \subseteq X\text{-}F^{+}(1\text{-}V) = F^{-}(V)$ olur. Böylece her $z \in cl(U)$ için F(z)qV dır.

(3)$\Rightarrow$(1): $x \in X$ ve F(x)qV olan V fuzz açığını alalım.F(x)qV $\leq$ int(cl(V)) ve int(cl(V)) regüler açıktır. (3)`ten dolayı $cl(U) \subseteq F^{-}$(int(cl(V))) olan x`in bir U açık komşuluğu vardır. Buradan F, f.a.h.h.k.θ -süreklidir.

(2)$\Rightarrow$(4): $\mu \in RO(Y)$ alalım. $1\text{-}\mu \in RC(Y)$`dir ve (2)`den dolayı $F^{+}(1\text{-}\mu) \in \theta$ -C(X) olur. Dolayısıyla 1.3.3.Teoremden $X\text{-}F^{+}(1\text{-}\mu) = F^{-}(\mu) \in \theta$ -O(X) elde edilir.

(4)$\Rightarrow$(2): $K \in RC(Y)$ alalım. $1\text{-}K \in RO(Y)$'dir ve (4)'ten dolayı $F^-(1\text{-}K) \in \theta\text{-}O(X)$ olur. Dolayısıyla 1.3.3.Teoremden $X\text{-}F^-(1\text{-}K) = F^+(K) \in \theta\text{-}C(X)$ olur.

3.2.3.Teorem: $F: X \rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.a.h.h.k.θ -süreklidir,

2) Her bir $y \in F(x)$ ve x'e r-yakınsayan her $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı için, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının bir $(z_\beta)_{\beta \in J}$ alt ağı vardır ve $y_\beta \in F(z_\beta)$ olan $(y_\beta)_{\beta \in J}$ ağı y fuzzy noktasına fuzzy R-yakınsar,

3) Her $B \in I^Y$ için $x_0 \in \theta\text{-}cl(F^+(B)) \Rightarrow x_0 \in F^+(\delta\text{-}cl(B))$.

İspat: (1)$\Rightarrow$(2): Kabul edelim ki F, $x_0 \in X$ noktasında f.a.h.h.k.θ -sürekli olsun ve $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x_0 noktasına r-yakınsasın. $x_0 \in F^-(V)$, $y \in F(x_0)$ ve yqV olan V fuzzy regüler açığını alalım. F, $x_0 \in X$ 'te f.a.h.h.k.θ -sürekli olduğundan $x \in cl(U)$ iken F(x)qV olan x_0'ın bir U açık komşuluğu vardır. Öte yandan $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı x_0'a r- yakınsak olduğundan bu U için en az bir $\alpha_0 \in I$ vardır öyleki her $\alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha \in cl(U)$ olur. Yani $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in F^-(int(cl(V))) = F^-(V)$ dir. yqV olan herhangi bir $V \in RO(Y)$ için $I_V = \{\alpha_0 \in I \mid \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in F^-(V)\}$ ve $\mathfrak{I} = \{(\alpha, V) \mid V \in RO(Y), \alpha \in I_V\}$ kümelerini tanımlayalım. $(\alpha', V') \geq (\alpha, V) \Leftrightarrow \alpha' \geq \alpha$ ve $V' \subseteq V$ şeklinde tanımlanan " $\geq$ " bağıntısı $\mathfrak{I}$ - üzerinde bir yönlendirmedir. $\varphi : \mathfrak{I} \rightarrow I$, $\varphi((\beta,V)) = \beta$ olarak tanımlanan φ artandır ve I üzerinde kofinaldir. Bu nedenle φ, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağının bir alt ağıdır, bu alt ağı bir $(z_\beta)_{\beta \in \mathfrak{I}}$ ile gösterelim. Diğer taraftan herhangi bir $\beta^* \in \mathfrak{I}$ için $F(z_{\beta^*})q\,int(cl(V))$ ve $F(x_{\beta^*})q\,int(cl(V)) = V$ alabiliriz. $F(z_\beta)q\,V$ koşulunu sağlayan $y_\beta \in F(z_\beta)$'ları alalım. Bu durumda $(y_\beta)_{\beta \in \mathfrak{I}}$ ağı $y \in Y$ fuzzy noktasına fuzzy R-yakınsar. Bunu görmek için yqV_0 olan $V_0 \in RO(Y)$ alalım. $\beta_0 = (\alpha_0, V_0) \in \mathfrak{I}$ ve $y_{\beta_0}\,q\,int(cl(V_0)) = V_0$ olan bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Buradan $(\beta,V) \geq (\beta_0,V_0)$ ise $\beta \geq \beta_0$ ve $V \subseteq V_0$ dır. Böylece $F(z_\beta)q\,int(cl(V))$ ve $F(x_\beta)q\,int(cl(V)) \leq int(cl(V_0)) \Rightarrow F(x_\beta)q\,int(cl(V_0))$ dur. Bu yüzden $y_\beta q\,int(cl(V_0))$ olur. Bu ise $(y_\beta)_{\beta \in \mathfrak{I}}$ ağının $y \in Y$ fuzzy noktasına fuzzy R- yakınsadığını verir.

(2)$\Rightarrow$(1): Kabul edelim ki F, x_0 noktasında f.a.h.h.k.θ -sürekli olmasın. Yani $x_0 \in F^-(V)$ olan bir $V \in \tau_Y$ var olsun öyleki x_0'ın her U açık komşuluğu için $cl(U) \not\subset$

$F^-(int(cl(V)))$ olsun. Bu durumda en az bir $x_U \in cl(U)$ noktası vardır öyleki $x_U \notin F^-(int(cl(V)))$. $T(x_0)$ x_0'ın komşuluklar sistemi olmak üzere $(x_U)_{U\in T(x0)}$ ağı, açıktır ki $x_0 \in X$ noktasına r- yakınsar. $y_0 \in Y$ fuzzy noktalarını $y_0 qV$ olan $y_0 \in F(x_0)$ lerden seçersek (2)'den dolayı $(x_U)_{U\in T(x0)}$ ağının bir $(z_w)_{w\in W}$ alt ağı vardır ve $y_w \in F(z_w)$ için $(y_w)_{w\in W}$ ağı y_0 fuzzy noktasına fuzzy R- yakınsar. Bu yüzden $y_0 qV \leq int(cl(V))$ için $w_0' \in W$ vardır öyleki $w \geq w_0'$ iken $y_w q int(cl(V))$ olur. Diğer taraftan $(z_w)_{w\in W}$ ağı $(x_U)_{U\in T(x0)}$ ağının bir alt ağı olduğundan, $x_{h(w)} = z_w$ olan $h : W \to T(x_0)$ fonksiyonu vardır ve her bir $U \in T(x_0)$ için en az bir $w_0'' \in W$ vardır öyleki $h(w_0'') \geq U$ olur. $w \geq w_0''$ ise $h(w) \geq h(w_0'') \geq U$ olur. $w_0 \in W$ 'yı $w_0 \geq w_0'$ ve $w_0 \geq w_0''$ olarak alırsak $w \geq w_0$ için $y_w q int(cl(V))$ olur. $(x_U)_{U\in T(x0)}$ ağının tanımından dolayı $F(x_{h(w)}) \not q int(cl(V))$ ve $F(z_w) \not q int(cl(V))$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla F, x_0`da f.a.h.h.k.θ -sürekli olmalıdır.

(1)$\Rightarrow$(3): $B \in I^Y$, $x \in \theta\text{-}cl(F^+(B))$ ve $x \notin F^+(\delta\text{-}cl(B))$ olsun. Bu durumda $F(x) \nleq \delta\text{-}cl(B) \Rightarrow F(x) \nleq cl(B)$ olur. Yani, $F(x) q 1\text{-}cl(B)$ dır. F f.a.h.h.k.θ-sürekli olduğundan $cl(U) \subseteq F^-(1\text{-}cl(B))$ olan x`in bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $cl(U) \cap (X\text{-}F^-(1\text{-}cl(B)) = \phi$ ve 1.3.3.Teorem`den $cl(U) \cap (F^+(cl(B)) = \phi$ dolayısıyla $cl(U) \cap F^+(B) = \phi$ olur ki bu $x \in \theta\text{-}cl(F^+(B))$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla $x \in \theta\text{-}cl(F^+(B))$ iken $x \in F^+(\delta\text{-}cl(B))$ olmalıdır.

(3)$\Rightarrow$(1) $K \in RC(Y)$ alalım. $K \in \delta\text{-}C(Y)$ dir ve hipotezden, $\theta\text{-}cl(F^+(K)) \subseteq F^+(\delta\text{-}cl(K)) = F^+(K)$ olur. Bu ise 3.2.2.Teorem`den F`nin f.a.h.h.k.θ-sürekliliğini verir.

3.2.4.Teorem: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.a.h.h.k.θ -süreklidir,

2) Her bir $x \in X$ ve $y_\alpha \in F(x)$ olan y_α fuzzy noktalarının her μ fuzzy δ -komşuluğu için $F^-(\mu)$ x noktasının θ -komşuluğudur,

3) Her bir $x \in X$ ve $y_\alpha \in F(x)$ olan y_α fuzzy noktalarının her β fuzzy δ -komşuluğu için x noktasının bir U açık komşuluğu vardır öyleki her $z \in cl(U)$ için $F(z)\, q\, \beta$ dır,

4) Her $B \in I^Y$ için $\theta\text{-cl}(F^+(B)) \subseteq F^+(\delta\text{-cl}(B))$,

5) $B \in \delta\text{-C}(Y) \Rightarrow F^+(B) \in \theta\text{-C}(X)$,

6) $B \in \delta\text{-O}(Y) \Rightarrow F^-(B) \in \theta\text{-O}(X)$,

7) Her $B \in I^Y$ için $F^-(\delta\text{-int}(B)) \subseteq \theta\text{-int}(F^-(B))$ dır.

İspat: (1)⇒(2): $x \in X$, $y_\alpha \in F(x)$ alalım. y_α fuzzy noktasının fuzzy δ -komşuluğu μ olsun. δ -komşuluk tanımı gereğince $int(cl(\beta)) \leq \mu$ olacak şekilde y_α`nın β fuzzy açık q -komşuluğu vardır. F, f.a.h.h.k.θ -sürekli olduğundan $cl(U) \subseteq F^-(int(cl(\beta)) \subseteq F^-(\mu)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla $F^-(\mu)$ x noktasının θ -komşuluğudur.

(2)⇒(3): $x \in X$, $y_\alpha \in F(x)$ alalım. y_α fuzzy noktasının fuzzy δ -komşuluğu μ olsun. (2)`den dolayı $F^-(\mu)$ x noktasının $\theta$ -komşuluğudur, yani ; $x \in U \subseteq cl(U) \subseteq F^-(\mu)$ olan $U \in \tau(x)$ vardır öyleki her $z \in cl(U)$ için $F(z) q \mu$` dür.

(3)⇒(1): $x \in X$ ve $F(x)qV$ olan $V \in RO(Y)$ alalım. $V \in \delta\text{-O}(Y)$`dır ve $y_\alpha \in F(x)$ olan bazı $y_\alpha$ fuzzy noktaları için V $y_\alpha$ fuzzy noktalarının $\delta$ -komşuluğudur. Hipotezden x noktasının bir U açık komşuluğu için, $z \in cl(U)$ iken $F(z)qV$ sağlanır. Bu ise 3.2.2.Teorem`den F`nin f.a.h.h.k.θ -sürekliliğini verir.

(1)⇒(4): $x \in \theta\text{-cl}(F^+(B))$ alalım. 3.2.3.Teorem`den (1)⇔(4) denkliğine bağlı olarak $x \in F^+(\delta\text{-cl}(B))$ dir.

(4)⇒(5): $B \in \delta\text{-C}(Y)$ olsun. Buradan $B = \delta\text{-cl}(B)$ ve hipotezden dolayı $\theta\text{-cl}(F^+(B)) \subseteq F^+(\delta\text{-cl}(B)) = F^+(B)$. Böylece $F^+(B)$ θ -kapalı olur.

(5)⇒(6): $B \in \delta\text{-O}(Y)$ alalım. $1\text{-}B \in \delta\text{-C}(Y)$ ve (6)`dan dolayı $F^+(1\text{-}B) \in \theta\text{-C}(X)$. Dolayısıyla $X - F^+(1\text{-}B) = F^-(B) \in \theta\text{-O}(X)$ olur.

(6)$\Rightarrow$(7): $B \in I^Y$ alalım. δ -int(B) $\in \delta$ -O(Y) ve (7)`den dolayı $F^-(\delta$ -int(B)) $\subseteq F^-$ (B) olduğundan $F^-(\delta$ -int(B)) $\subseteq \theta$ -int(F^- (B)) olur.

(7)$\Rightarrow$(1): $G \in$ RO(Y) alalım. $G = \delta$ -int(G)`dir ve (8)`den dolayı F^- (G) $\subseteq \theta$ -int(F^- (G)). Bu ise F^- (G)`nin $\theta$ -açık olduğunu söyler. Dolayısıyla 3.2.2.Teorem`den F, f.a.h.h.k.θ -süreklidir.

3.2.5.Teorem: F: X$\rightarrow$Y fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.ü.h.h.k.θ -süreklidir,

2) Herhangi bir $V \in$ RO(Y) ve $F(x) \leq V$ olan her bir $x \in X$ için $F(cl(U)) \leq V$ olacak şekilde x'in U açık komşuluğu vardır,

3) $V \in$ RO(Y) ise $F^+(V) \in \theta$ - O(X),

4) $V \in \delta$ - O(Y) ise F^+(int(cl(V))) $\in \theta$ - O(X),

5) $K \in \delta$ - C(Y) ise F^-(cl(int(K))) $\in \theta$ - C(X),

6) $K \in$ RC(Y) ise $F^-(K) \in \theta$ - C(X).

İspat: (1)$\Rightarrow$(2): F, f.ü.h.h.k.θ -sürekli olsun. $V \in$ RO(Y) ve $F(x) \leq V$ alalım. F`nin f.ü.h.h.k.$\theta$ -sürekliliğinden cl(U) $\subseteq F^+$ (int(cl(V))) = $F^+$ (V) olacak şekilde x`in bir U açık komşuluğu vardır. Bu ise isteneni verir.

(2)$\Rightarrow$(3): $V \in$ RO(Y) ve $x \in F^+$ (V) ise hipotezden dolayı $x \in$ cl(U) $\subseteq F^+$ (V) olan x`in bir U açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla $F^+$ (V) $\in \theta$ - O(X)`tır.

(3)$\Rightarrow$(4):$V \in \delta$ - O(Y) alalım. int(cl(V)) $\in$ RO(Y)`dir ve (3)`ten dolayı F^+ (int(cl(V))) $\in \theta$ - O(X)`tir.

(4)$\Rightarrow$(5): $K \in \delta$ - C(Y) olsun. 1-K $\in \delta$ - O(Y)`dir ve (4)`ten dolayı F^+ (int(cl(1-K))) $\in \theta$ - O(X) olur. Böylece 1.3.3.Teorem`den X- F^+ (int(cl(1-K))) = F^- (cl(int(K))) $\in \theta$ - C(X) olur.

(5)$\Rightarrow$(6): $K \in RC(Y)$ olsun. $K \in \delta - C(Y)$ olur ve hipotezden $F^-(cl(int(K))) = F^-(K) \in \theta - C(X)$ olur.

(6)$\Rightarrow$(3): $V \in RO(Y)$ olsun. Bu durumda $1\text{-}V \in RC(Y)$ olur. Hipotezden ve 1.3.3.Teorem`den $X\text{-}F^-(1\text{-}V) = F^+(V) \in \theta - O(X)$ olur.

(3)$\Rightarrow$(1):$V \in \tau_Y$ ve $F(x) \leq V$ alalım. $V \leq int(cl(V))$`dir ve hipotezden $x \in F^+(int(cl(V))) \in \theta - O(X)$ olur. Bu ise $x \in U \subseteq cl(U) \subseteq F^+(int(cl(V)))$ olan en az bir U açığının var olduğunu söyler. Dolayısıyla F, f.ü.h.h.k.θ -süreklidir.

3.2.6.Teorem: $F:X \rightarrow Y$ fuzzy nokta kompakt çoğul fonksiyon ve Y fuzzy h.h. regüler uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1) F f.ü.h.h.k.θ -süreklidir,
2) $W \in \delta - O(Y)$ ise $F^+(W) \in \theta - O(X)$,
3) $K \in \delta - C(Y)$ ise $F^-(K) \in \theta - C(X)$,
4) Her bir $\beta \in I^Y$ fuzzy kümesi için $\theta\text{-}cl(F^-(\beta)) \subseteq F^-(\delta\text{-}cl(\beta))$,
5) Her bir $\mu \in I^Y$ fuzzy kümesi için $F^+(\delta\text{-}int(\mu)) \subseteq \theta\text{-}int(F^+(\mu))$.

İspat:(1)$\Rightarrow$(2): $W \in \delta - O(Y)$ öyleki $F(x) \leq W$ olsun. W fuzzy δ - açık küme olduğundan her bir $y \in W$ için $yq\beta_y \leq int(cl(\beta_y)) \leq W = \vee\{ int(cl(\beta_y)) \mid y \in W \}$ olacak şekilde bir β_y fuzzy açığı vardır. Öte yandan Y fuzzy h.h - regüler uzay olduğundan $yqint(cl(\beta_y))$ için $yq\mu_y \leq cl(\mu_y) \leq int(cl(\beta_y)) \leq W$ olacak şekilde bir μ_y fuzzy regüler açığı vardır. W fuzzy δ - açık küme olduğundan $W = \vee\{\mu_y \mid y \in W, yq\mu_y\}$ olarak yazılır. Buradan $F(x) \leq W = \vee\{\mu_y \mid y \in W, yq\mu_y\}$ olur. $\vee\{\mu_y \mid y \in W, yq\mu_y\}$ ailesi F(x)`in regüler açık dolayısıyla açık bir örtüsü ve F fuzzy nokta kompakt çoğul fonksiyon olduğundan $F(x) \leq \vee\{\mu_{y_i} \mid i=1,2,...,n\}$ olan $y_1,y_2,...,y_n \in W$ fuzzy noktaları vardır. Böylece $F(x) \leq \vee\{\mu_{y_i} \mid i=1,2,...,n\} \leq int(cl(\vee\{\mu_{y_i} \mid i=1,2,....,n\})) \leq W$ olur. $A = int(cl(\vee\{\mu_{y_i} \mid i=1,2,...,n\}))$ dersek $A \in RO(Y)$ olur ve F f.ü.h.h.k.θ -sürekli olduğundan $cl(U) \subseteq F^+(A) \subseteq F^+(W)$ olacak şekilde x'in en az bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $F^{+}(W)$ X 'te θ - açık küme olur.

(2)$\Rightarrow$(3): $K \in \delta$ - C(Y) alalım. 1-K $\in \delta$ - O(Y) 'dir. (2)'den dolayı F^{+}(1-K) $\in \theta$ - O(X)`tir. 1.3.3.Teorem`den dolayı X-F^{+}(1-K) = F^{-}(K) $\in \delta$ - C(X) olur.

(3)$\Rightarrow$(4): $\beta \in I^{Y}$ bir fuzzy küme olsun. $\beta \leq \delta$ -cl(β) $\in \delta$ -C(Y) ve $F^{-}(\beta) \subseteq F^{-}(\delta$ -cl(β))dır, (3)'ten dolayı $F^{-}(\delta$ -cl(β)) $\in \theta$ -C(X) olduğundan θ -cl($F^{-}(\beta)$) $\subseteq \theta$ - cl($F^{-}(\delta$ -cl(β))) = $F^{-}(\delta$-cl(β)) bulunur.

(4)$\Rightarrow$(5): A $\in I^{Y}$ bir fuzzy küme olsun. 1-A $\in I^{Y}$ 'de bir fuzzy kümedir. (4) ' ten dolayı θ -cl(F^{-}(1-A)) $\subseteq$ F^{-}(δ-cl(1-A)) olur. Buradan 1.2.4.Tanım`dan X - $F^{-}$($\delta$-cl(1-A)) $\subseteq$ X -($\theta$ - cl($F^{-}$(1-A))) yani X - $F^{-}$(1-($\delta$-int(A))) $\subseteq \theta$ -int(X - $F^{-}$(1-A)) olur. Bu ise 1.3.3.Teorem`den F^{+}(δ -int(A)) $\subseteq \theta$ -int(F^{+}(A)) olmasını gerektirir.

(5)$\Rightarrow$(1): V $\in$ RO(Y) ve x $\in F^{+}$(V) alalım. Regüler açıklar δ - açık olduğundan ve (5)'ten dolayı F^{+}(δ-int(V)) = F^{+}(V) $\subseteq \theta$ -int(F^{+}(V)) olur ki bu F^{+}(V) $\in \theta$ - O(X) olduğunu söyler. Dolayısıyla önceki teoremden F, f.ü.h.h.k.θ -süreklidir.

3.2.7.Teorem: F: X$\rightarrow$Y fuzzy çoğul fonksiyon olsun. F, f.ü.h.h.k.θ - süreklidir $\Leftrightarrow$ her x $\in$ X noktasına r-yakınsayan her bir $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı ve F(x)$\leq$ V olan her bir V fuzzy açık kümesi için bir $\alpha_0 \in I$ vardır öyleki her $\alpha \geq \alpha_0$ için $F(x_\alpha) \leq$ int(cl(V)) dir.

İspat:($\Rightarrow$): x$\in$X, V $\in \tau_Y$ öyleki F(x) $\leq$ V alalım ve $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı x-noktasına r-yakınsasın. (1) 'den dolayı F(cl(U)) $\leq$ int(cl(V)) olacak şekilde x'in bir U açık komşuluğu vardır. Buradan U$\in\tau$(x) ve $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı x'e r-yakınsak olduğundan, bir α_0 $\in$I vardır öyleki her $\alpha\geq\alpha_0$ için $x_\alpha\in$ cl(U) $\subseteq F^{+}$(int(cl(V))) olur. O halde her $\alpha\geq\alpha_0$ için $F(x_\alpha) \leq$ int(clV)) dir.

($\Leftarrow$): Hipotez doğru olsun fakat kabul edelim ki F, f.ü.h.h.k.θ sürekli olmasın. Bu durumda $F(x) \leq V$ olan V fuzzy açık kümesi ve her bir $U \in \tau(x)$ için $cl(U) \not\subset F^+ (int(cl(V)))$ yani $x_U \in cl(U)$ ve $x_U \notin F^+ (int(cl(V)))$ olan x_U noktası var olsun. T(x) x noktasının komşuluklar sistemi olmak üzere bu şekildeki x_U'lar T(x) yönlendirilmiş kümesi (kapsama bağıntısı) ile X içinde bir ağ oluşturur ve bu $(x_U)_{U \in T(x)}$ ağı x noktasına r- yakınsar. Fakat bütün $U \in T(x)$'ler için $F(x_U) \not\leq int(cl(V))$ olur. Bu ise hipotezle çelişir.

3.2.8.Teorem: $F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. $G(F) : X \to XxY$ f.ü(a).h.h.k.θ -sürekli ise F fuzzy çoğul fonksiyonuda f.ü(a).h.h.k.θ -süreklidir.

İspat: Biz sadece f.ü.h.h.k.θ -süreklilik için ispat yapacağız. F.a.h.h.k.θ -süreklilik içinde benzer ispat yapılabilir. G(F) f.ü.h.h.k.θ - sürekli olsun. $x \in X$ ve $F(x) \leq V$ olan V fuzzy açığını alalım. XxV, XxY uzayında açıktır ve $G(F)(x) \leq XxV$ dir. G(F) f.ü.h.h.k.θ -sürekli olduğundan, $G(F)(cl(U)) \leq int(cl(XxV)) = Xxint(cl(V))$ olan x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Bu durumda $z \in cl(U)$ ve herhangi bir $y \in Y$ için, $[F(z)](y) = [G(F)(z)](z,y) \leq (Xxint(cl(V))(z,y) = int(cl(V))(y)$ olur. Buradan her $y \in Y$ için $[F(z)](y) \leq int(cl(V))(y)$ yani herhangi bir $z \in cl(U)$ için $F(z) \leq int(cl(V))$ olur ki bu F`nin f.ü.h.h.k.θ -sürekliliğidir.

3.2.9.Teorem: Y fuzzy hemen hemen regüler uzay $F: X \to Y$ fuzzy nokta kompakt ve f.ü.δ - sürekli çoğul fonksiyon olsun. Eğer A X' te H-küme ise F(A) Y'de fuzzy yakın kapalıdır.

İspat: $A \subseteq X$ bir H-küme olsun ve Φ, F(A)'nın regüler açıklardan oluşan bir örtüsü olsun. $a \in A$ ise $F(a) \leq \vee\Phi$. Böylece Φ, F(a) 'nın regüler açık dolayısıyla açık bir örtüsüdür. F(a) kompakt olduğundan Φ 'nın sonlu bir $\Phi_{n(a)}$ alt ailesi vardır öyleki $F(a) \leq \vee\Phi_{n(a)} = W_a$ dır. $W_a \in \delta - O(Y)$ ve F, f.ü.h.h.k.θ -sürekli olduğundan $a \in U_a \subseteq cl(U_a) \subseteq F^+ (W_a)$ olacak şekilde a`nın bir açık $U_a$ komşuluğu vardır. $\varphi = \{U_a \mid a \in A\}$ A'nın bir açık örtüsüdür. A X'te H-küme olduğundan $A \subseteq \cup\{cl(U_{ai}) \mid a_i \in A, i=1,2,...,n\}$ olcak şekilde A`nın $a_1,a_2,...,a_n$ noktaları vardır.

Buradan $F(A) \leq F(\cup\{cl(U_{ai}) \mid a_i \in A , i=1,2,...,n\} \leq \vee\{W_{ai} \mid a_i \in A, i=1,2,....,n\} \leq \vee\{\vee\Phi_{n(ai)} \mid a_i \in A, i=1,2,...,n \}$ elde edilir. Böylece F(A) , Y 'de fuzzy yakın kapalıdır.

4.BÖLÜM

HEMEN HEMEN ZAYIF SÜREKLİ VE HEMEN HEMEN H-SÜREKLİ FUZZY ÇOĞUL FONKSİYONLAR

4.1.Hemen Hemen Zayıf Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar

Hemen hemen zayıf süreklilik kavramının fuzzy çoğul fonksiyonlar için tanımlandığı bu kesimde, bu süreklilik için bazı karakterizasyonlar verildi. Üstten ve alttan hemen hemen zayıf sürekli fuzzy çoğul fonksiyonlar için örnekler verilerek zayıf sürekli ve yarı sürekli fuzzy çoğul fonksiyonlar ile aralarındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca hemen hemen zayıf sürekli fuzzy çoğul fonksiyon ile grafik fonksiyonunun ve kısıtlanmış fonksiyonunun hemen hemen zayıf sürekliliği arasındaki ilişkiler üzerinde de duruldu.

4.1.1 Tanım: (X,τ) alışılmış topolojik uzay, (Y,τ_Y) f t u ve $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun.

a) $x \in F^{+}(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $x \in int(cl(F^{+}(cl(V))))$ ise F x noktasında *fuzzy üstten hemen hemen zayıf süreklidir (fuzzy upper almost weakly continuous)* denir. Biz bu durumu kısaca f.ü.h.h.z. sürekli ile göstereceğiz.

b) $x \in F^{-}(\mu)$ olan her $\mu \in \tau_Y$ için $x \in int(cl(F^{-}(cl(V))))$ ise F x noktasında *fuzzy alttan hemen hemen zayıf süreklidir (fuzzy lower almost weakly continuous)* denir. Biz bu durumu kısaca f.a.h.h.z. sürekli ile göstereceğiz.

c) F fuzzy çoğul fonksiyonu her $x \in X$ noktasında f.ü(a).h.h.z. sürekli ise F fuzzy çoğul fonksiyonuna X üzerinde f.ü(a).h.h.z. süreklidir denir.

4.1.2.Örnek: $X = \{a,b,c\}$ üzerinde $\tau = \{X,\phi,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$ topolojisini ve $Y = [0,1]$ üzerinde $\tau_Y = \{C_0,C_1,C_{2/3}\}$ fuzzy topolojisini alalım. $F:X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu $F(a) = C_{1/3}$, $F(b) = C_{4/5}$, $F(c) = C_{1/2}$ olarak tanımlansın.

$a \in F^+(V)$ için, $F(a) \leq C_{2/3}$ olduğundan $cl(C_{2/3}) = C_1$ elde edilir. Buradan da $a \in int(cl(F^+(C_1))) = X$ olur. Dolayısıyla F $a \in X$ noktasında f.ü.h.h.z. süreklidir.

$b \in F^+(V)$ için, $F(b) \leq C_1$ olduğundan $cl(C_1) = C_1$ elde edilir. Buradan da $b \in int(cl(F^+(C_1))) = X$ olur. Dolayısıyla F $b \in X$ noktasında f.ü.h.h.z. süreklidir.

$c \in F^+(V)$ için, $F(c) \leq C_{2/3}$ olduğundan $cl(C_{2/3}) = C_1$ elde edilir. Buradan da $c \in int(cl(F^+(C_1))) = X$ olur. Dolayısıyla F $c \in X$ noktasında f.ü.h.h.z. süreklidir.

Bu yüzden F X üzerinde f.ü.h.h.z. süreklidir.

4.1.3.Örnek: $X = \{a,b,c\}$ üzerinde $\tau = \{X,\phi,\{b\}\}$ topolojisini ve $Y = [0,1]$ üzerinde $\tau_Y = \{C_0,C_1,C_{3/4}\}$ fuzzy topolojisini alalım. $F:X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu $F(a) = C_{2/3}$, $F(b) = C_{1/5}$, $F(c) = C_{1/3}$ olarak tanımlansın.

$a \in F^-(V)$ için, $F(a)qC_{3/4}$ olduğundan $cl(C_{3/4}) = C_1$ elde edilir. Buradan $a \in int(cl(F^-(C_1))) = X$ olur . Dolayısıyla F $a \in X$ noktasında f.a.h.h.z. süreklidir.

$b \in F^-(V)$ için, $F(b)qC_1$ olduğundan $cl(C_1) = C_1$ elde edilir. Buradan $b \in int(cl(F^-(C_1))) = X$ olur. Dolayısıyla F $b \in X$ noktasında f.a.h.h.z. süreklidir.

$c \in F^-(V)$ için, $F(c)qC_1$ olduğundan $cl(C_1) = C_1$ elde edilir. Buradan $c \in int(cl(F^-(C_1))) = X$ olur. Dolayısıyla F $c \in X$ noktasında f.a.h.h.z. süreklidir.

Bu yüzden F X üzerinde f.a.h.h.z. süreklidir.

4.1.4.Teorem: $F:X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.ü.h.h.z. süreklidir,

2) Her $V \in \tau_Y$ için $F^+(V) \subseteq int(cl(F^+(cl(V))))$,

3) Her $V \in \tau_Y$ için $cl(int(F^-(V))) \subseteq F^-(cl(V))$,

4) Her $V \in \tau_Y$ için $pcl(F^-(V)) \subseteq F^-(cl(V))$,

5) Her $V \in \tau_Y$ için $F^+(V) \subseteq pint(F^+(cl(V)))$,

6) Her bir $x \in X$ ve $F(x) \leq V$ olan her V fuzzy açık kümesi için $F(U) \leq cl(V)$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır.

İspat:(1)$\Rightarrow$(2): $V \in \tau_Y$ ve $x \in F^+(V)$ olsun. Hipotezden, $x \in int(cl(F^+(cl(V))))$ olur. Dolayısıyla $F^+(V) \subseteq int(cl(F^+(cl(V))))$ 'dir.

(2)$\Rightarrow$(3): $V \in \tau_Y$ olsun. 1-cl(V) fuzzy açık kümedir ve (2)`den dolayı $F^+(1\text{-}cl(V)) \subseteq int(cl(F^+ cl(1\text{-}cl(V))))) \subseteq int(cl(F^+(1\text{-}V)))$. Buradan $X\text{-}F^-(cl(V)) \subseteq int(cl(X\text{-}F^-(V))) = X\text{-}cl(int(F^-(V))) \Rightarrow cl(int(F^-(V))) \subseteq F^-(cl(V))$ olur.

(3)$\Rightarrow$(4): $V \in \tau_Y$ alalım. 1.2.13.Önermeden $pcl(F^-(V)) = F^-(V) \cup cl(int(F^-(V))) \subseteq F^-(cl(V))$ olur.

(4)$\Rightarrow$(5): $V \in \tau_Y$ alalım. Dolayısıyla $1\text{-}cl(V) \in \tau_Y$ olur. Hipotezi kullanırsak, $X\text{-}pint(F^+(cl(V))) = pcl(X\text{-}F^+(cl(V))) = pcl(F^-(1\text{-}cl(V))) \subseteq F^-(cl(1\text{-}cl(V))) \subseteq F^-(1\text{-}V) = X\text{-}F^+(V)$ olur. Buradan $F^+(V) \subseteq pint(F^+(cl(V)))$ bulunur.

(5)$\Rightarrow$(6): $x \in X$ ve $F(x) \leq V$ olan $V \in \tau_Y$ alalım. Bu durumda $x \in F^+(V) \subseteq pint(F^+(cl(V)))$ ve dolayısıyla $U \subseteq F^+(cl(V))$ yani $F(U) \leq cl(V)$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır.

(6)$\Rightarrow$(1): $x \in X$ ve $F(x) \leq V$ olan $V \in \tau_Y$ alalım. Hipotezden $F(U) \leq cl(V)$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır. Buradan $x \in U \subseteq int(cl(U)) \subseteq int(cl(F^+(cl(V))))$ olur.

4.1.5.Teorem: $F: X \rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.a.h.h.z. süreklidir,
2) Her $V \in \tau_Y$ için $F^-(V) \subseteq int(cl(F^-(cl(V))))$,
3) Her $V \in \tau_Y$ için $cl(int(F^+(V))) \subseteq F^+(cl(V))$,
4) Her $V \in \tau_Y$ için $pcl(F^+(V)) \subseteq F^+(cl(V))$,
5) Her $V \in \tau_Y$ için $F^-(V) \subseteq pint(F^-(cl(V)))$,
6) Her bir $x \in X$ ve $F(x)qV$ olan her V fuzzy açığı için, $u \in U$ için $F(u)qcl(V)$ olan bir $U \in PO(X,x)$ vardır.

İspat:(1)$\Rightarrow$(2):$V \in \tau_Y$ ve $x \in F^-(V)$ olsun. (1)`den $x \in int(cl(F^-(cl(V))))$ olur.

(2)$\Rightarrow$(3): $V \in \tau_Y$ alalım. 1-cl(V)$\in \tau_Y$ olur ve (2)`den $F^-(1\text{-}cl(V)) \subseteq int(cl(F^-(cl(1\text{-}cl(V))))) \subseteq int(cl(F^-(1\text{-}V))) = int(cl(X\text{-}F^+(V))) \Rightarrow X\text{-}F^+(cl(V)) \subseteq int(cl(X\text{-}F^+(V))) = X\text{-}cl(int(F^+(V))) \Rightarrow cl(int(F^+(V))) \subseteq F^+(cl(V))$ olur.

(3)$\Rightarrow$(4): $V \in \tau_Y$ alalım. 1.2.13.Önermeden ve (3)`ten dolayı $pcl(F^+(V)) = F^+(V) \cup cl(int(F^+(V))) \subseteq F^+(cl(V))$ olur.

(4)$\Rightarrow$(5): $V \in \tau_Y$ alalım. 1-cl(V) kümeside fuzzy açıktır. Hipotezden $pcl(F^+(1\text{-}cl(V))) \subseteq F^+(cl(1\text{-}cl(V))) \subseteq F^+(1\text{-}V)$ olur. Buradan $X\text{-}F^+(1\text{-}V) \subseteq pint(X\text{-}F^+(1\text{-}cl(V)))$ dir.Dolayısıyla $F^-(V) \subseteq pint(F^-(cl(V)))$ olur.

(5)$\Rightarrow$(6): $x \in X$ ve F(x)qv olan V fuzzy açığını alalım. (5)`ten $x \in F^-(V) \subseteq pint(F^-(cl(V))$. Dolayısıyla $U \subseteq F^-(cl(V))$ olacak şekilde bir $U \in PO(X,x)$ vardır. Buradan her $u \in U$ için F(u)qcl(V) olduğu görülür.

(6)$\Rightarrow$(1): $x \in X$ ve $x \in F^-(V)$ olan V fuzzy açığını alalım. Hipotezden, her $u \in U$ için F(u)qcl(V) olan $U \in PO(X,x)$ vardır. Yani, $x \in U \subseteq F^-(cl(V))$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır. Buradan $x \in int(cl(F^-(cl(V))))$ olur.

4.1.6.Teorem: $F: X \rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.ü.h.h.z. süreklidir,
2) Y`deki her W fuzzy kapalısı için $cl(int(F^-(int(W)))) \subseteq F^-(W)$,
3) Y`deki her W fuzzy kapalısı için $pcl(F^-(int(W))) \subseteq F^-(W)$,
4) Y`deki her B fuzzy kümesi için $pcl(F^-(int(cl(B)))) \subseteq F^-(cl(B))$,
5) Y`deki her B fuzzy kümesi için $F^+(int(B)) \subseteq pint(F^+(cl(int(B))))$.

İspat:(1)$\Rightarrow$(2): W Y`de bir fuzzy kapalı küme olsun. 1-W fuzzy açıktır ve 4.1.4.Teorem`den $X\text{-}F^-(W) = F^+(1\text{-}W) \subseteq int(cl(F^+(cl(1\text{-}W)))) = int(cl(F^+(1\text{-}int(W)))) = int(cl(X\text{-}F^-(int(V)))) = X\text{-}cl(int(F^-(int(W))))$ olur. Buradan $cl(int(F^-(int(W)))) \subseteq F^-(W)$`dir.

(2)$\Rightarrow$(3): W Y`de fuzzy kapalı bir küme olsun. 1.2.13.Önermeden pcl(F^-(int(W))) = F^-(int(W)) $\cup$ cl(int(F^-(int(W)))) $\subseteq$ F^-(W) bulunur.

(3)$\Rightarrow$(4): Açık

(4)$\Rightarrow$(5): B $\in$ I^Y olsun. Bu durumda hipotezi de kullanırsak, X-pint(F^+(cl(int(B)))) = pcl(X-F^+(cl(int(B)))) = pcl(F^-(1-cl(int(B)))) = pcl(F^-(int(cl(1-B)))) $\subseteq$ F^-(cl(1-B)) = X-F^+(int(B)) olur. Buradan F^+(int(B)) $\subseteq$ pint(F^+(cl(int(B))) bulunur.

(5)$\Rightarrow$(1): V Y`de herhangi bir açık küme olsun. Hipotezden, F^+(V) $\subseteq$ pint(F^+(cl(V)) olur ve buradan 4.1.4.Teorem kullanılırsa F f.ü.h.h.z. sürekli olduğu görülür.

4.1.7.Teorem: F :X$\rightarrow$Y fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.a.h.h.z. süreklidir,
2) Y`deki her W fuzzy kapalısı için cl(int(F^+(int(W)))) $\subseteq$ F^+(W),
3) Y`deki her W fuzzy kapalısı için pcl(F^+(int(W))) $\subseteq$ F^+(W),
4) Y`deki her B fuzzy kümesi için pcl(F^+(int(cl(B)))) $\subseteq$ F^+(cl(B)),
5) Y`deki her B fuzzy kümesi için F^-(int(B)) $\subseteq$ pint(F^-(cl(int(B)))).

İspat:(1)$\Rightarrow$(2): W Y`de fuzzy kapalı olsun. 1-W $\in$ $\tau_Y$ olur ve 4.1.5.Teorem`den F^-(1-W) $\subseteq$ int(cl(F^-(cl(1-W)))) = int(cl(X-F^+(int(W)))) olur. Buradan X-F^+(W) $\subseteq$ X-cl(int(F^+(int(W))))`dir. Dolayısıyla cl(int(F^+(int(W)))) $\subseteq$ F^+(W) olur.

(2)$\Rightarrow$(3): W Y`de fuzzy kapalı küme olsun. 1.2.13.Önerme ve hipotezden pcl(F^+(int(W))) = F^+(int(W)) $\cup$ cl(int(F^+(int(W)))) $\subseteq$ F^+(W) olur.

(3)$\Rightarrow$(4): Açık.

(4)$\Rightarrow$(5): B Y`de bir fuzzy küme olsun. Hipotezden, X-pint(F^- (cl(int(B)))) = pcl(X- F^- (cl(int(B))) = pcl(F^+ (int(cl(1-B)))) $\subseteq F^+$ (cl(1-B)) = X-F^- (int(B)) olur ki buradan F^- (int(B)) $\subseteq$ pint(F^- (cl(int(B)))) dir.

(5)$\Rightarrow$(1): $x\in X$ ve F(x)qV olan V fuzzy açığını alalım.(5)`ten $x\in F^-$ (V) $\subseteq$ pint($F^-$ (cl(V))) olur. Bu durumda U $\subseteq F^-$ (cl(V)) olacak şekilde en az bir U $\in$ PO(X,x) vardır. Dolayısıyla 4.1.5.Teorem`den F f.a.h.h.z. süreklidir.

4.1.8.Sonuç: $F : X \rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu f.a(ü).z. sürekli ise F f.a(ü).h.h.z. süreklidir.

4.1.9.Sonuç: $F : X \rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu f.a(ü).y. sürekli ise F f.a(ü).z. süreklidir. Dolayısıyla F f.a(ü).h.h.z. süreklidir

Aşağıdaki örnekler bu son iki sonucun terslerinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

4.1.10.Örnek: X = {a,b,c} üzerinde $\tau = \{X,\phi,\{b,c\}\}$ topolojisini ve Y = [0,1] üzerinde $\tau_Y = \{C_0,C_1,C_{2/5}\}$ fuzzy topolojisini alalım. F:X$\rightarrow$Y fuzzy çoğul fonksiyonu $F(a) = C_{4/11}$, $F(b) = C_{7/8}$, $F(c) = C_{1/3}$ olarak tanımlansın.

$a\in F^+$ (V) için, F(a) $\leq C_{2/5}$ olduğundan $cl(C_{2/5}) = C_{3/5}$ elde edilir. Buradan da $a\in$int(cl(F^+ ($C_{3/5}$))) = int(cl({a,c})) = X olur. Dolayısıyla F $a\in X$ noktasında f.ü.h.h.z. süreklidir.

$b\in F^+$ (V) için, F(b) $\leq C_1$ olduğundan $cl(C_1) = C_1$ elde edilir. Buradan da $b\in$int(cl(F^+ (C_1))) = X olur. Dolayısıyla F $b\in X$ noktasında f.ü.h.h.z. süreklidir.

$c\in F^+$ (V) için, F(c) $\leq C_{2/5}$ olduğundan $cl(C_{2/5}) = C_{3/5}$ elde edilir. Buradan da $c\in$int(cl(F^+ ($C_{3/5}$))) = X olur. Dolayısıyla F $c\in X$ noktasında f.ü.h.h.z. süreklidir.

Bu yüzden F X üzerinde f.ü.h.h.z. süreklidir. Fakat $a \in X$ noktasında f.ü.z. sürekli değildir. $a \in F^{+}(V)$ için, $F(a) \leq C_{2/5}$ olduğundan $cl(C_{2/5}) = C_{3/5}$ ve $a \in U \subseteq F^{+}(C_{3/5})$ olan $U \in \tau(a)$ yoktur.

4.1.11.Örnek: $X = \{a,b,c\}$ üzerinde $\tau = \{X,\phi,\{a\}\}$ topolojisini ve $Y = [0,1]$ üzerinde $\tau_Y = \{C_0,C_1,C_{5/11}\}$ fuzzy topolojisini alalım. $F{:}X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu $F(a) = C_{3/4}$, $F(b) = C_{7/11}$, $F(c) = C_{1/3}$ olarak tanımlansın.

$a \in F^{-}(V)$ için, $F(a)qC_{5/11}$ olduğundan $cl(C_{5/11}) = C_{6/11}$ elde edilir. Buradan $a \in int(cl(F^{-}(C_{6/11}))) = X$ olur. Dolayısıyla F $a \in X$ noktasında f.a.h.h.z. süreklidir.

$b \in F^{-}(V)$ için, $F(b)qC_{5/11}$ olduğundan $cl(C_{5/11}) = C_{6/11}$ elde edilir. Buradan $b \in int(cl(F^{-}(C_{6/11}))) = X$ olur. Dolayısıyla F $b \in X$ noktasında f.a.h.h.z. süreklidir.

$c \in F^{-}(V)$ için, $F(c)qC_1$ olduğundan $cl(C_1) = C_1$ elde edilir. Buradan $c \in int(cl(F^{-}(C_1))) = X$ olur. Dolayısıyla F $c \in X$ noktasında f.a.h.h.z. süreklidir.

Bu yüzden F X üzerinde f.a.h.h.z. süreklidir. Fakat F f.a.z. sürekli değildir. $b \in F^{-}(V)$ için, $F(b)qC_{5/11}$ olduğundan $cl(C_{5/11}) = C_{6/11}$ elde edilir. Buradan $b \in U \leq F^{-}(C_{6/11}) = \{a,b\}$ olan $U \in \tau(b)$ yoktur.

4.1.12.Örnek: $X = \{a,b,c\}$ üzerinde $\tau = \{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojisini ve $Y = [0,1]$ üzerinde $\tau_Y = \{C_0,C_1,C_{1/4}\}$ fuzzy topolojisini alalım. $F{:}X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu $F(a) = C_{1/2}$, $F(b) = C_{3/4}$, $F(c) = C_{1/5}$ olarak tanımlansın.

$a \in F^{+}(V)$ için, $F(a) \leq C_1$ olduğundan $cl(C_1) = C_1$ elde edilir. Buradan da $a \in X \subseteq F^{+}(C_1) = X$ olur. Dolayısıyla F $a \in X$ noktasında f.ü.z. süreklidir.

$b \in F^{+}(V)$ için, $F(b) \leq C_1$ olduğundan $cl(C_1) = C_1$ elde edilir. Buradan da $b \in X \subseteq F^{+}(C_1) = X$ olur. Dolayısıyla F $b \in X$ noktasında f.ü.z. süreklidir.

$c \in F^{+}(V)$ için, $F(c) \leq C_{1/4}$ olduğundan $cl(C_{1/4}) = C_{3/4}$ elde edilir. Buradan da $c \in X \subseteq F^{+}(C_{3/4}) = X$ olur. Dolayısıyla F $c \in X$ noktasında f.ü.z. süreklidir.

Bu yüzden F X üzerinde f.ü.z. süreklidir. Fakat $F^{+}(C_{1/4}) = \{c\} \notin \tau$ olduğundan 1.3.5.Teorem`den F f.ü.y. sürekli değildir.

4.1.13.Örnek: $X = \{a,b\}$ üzerinde $\tau = \{X,\phi,\{b\}\}$ topolojisini ve $Y = [0,1]$ üzerinde $\tau_Y = \{C_0,C_1,C_{3/4}\}$ fuzzy topolojisini alalım. $F:X\rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu $F(a) = C_{2/3}$, $F(b) = C_{1/4}$ olarak tanımlansın.

$a\in F^{-}(V)$ için, $F(a)qC_{3/4}$ olduğundan $cl(C_{3/4}) = C_1$ elde edilir. Buradan $a\in X \subseteq F^{-}(C_1) = X$ olur. Dolayısıyla F $a\in X$ noktasında f.a.z. süreklidir.

$b\in F^{-}(V)$ için, $F(b)qC_1$ olduğundan $cl(C_1) = C_1$ elde edilir. Buradan $b\in\{b\} \subseteq F^{-}(C_1) = X$ olur. Dolayısıyla F $b\in X$ noktasında f.a.z. süreklidir.

Bu yüzden F X üzerinde f.a.z. süreklidir. Fakat F f.a.y. sürekli değildir. $C_{5/11} \in \tau_Y$ için $F^{-}(C_{5/11}) \notin \tau$ olduğunda 1.3.6.Teorem`den F f.a.y. sürekli değildir.

4.1.14.Önerme: $F:X\rightarrow Y$ fuzzy çoğul fonksiyon ve $G(F):X\rightarrow XxY$ onun grafik fonksiyonu olsun. A X`te bir alt küme ve B Y`de bir fuzzy küme olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $(G(F))^{+}(AxB) = A \cap F^{+}(B)$

b) $(G(F))^{-}(AxB) = A \cap F^{-}(B)$

İspat:(a): $x\in(G(F))^{+}(AxB)$ ise $(G(F))(x)\leq AxB$ olur. Bu durumda $x\in A$ ve her $y\in Y$ için $[F(x)](y) = [G(F)(x)](x,y)\leq(AxB)(x,y) = B(y)$ olur ki buradan her $y\in Y$ için $[F(x)](y)\leq B(y)$ olduğundan $x\in F^{+}(B)$ olur. Dolayısıyla $x\in A\cap F^{+}(B)$ dir.

Tersine, $x\in A\cap F^{+}(B)$ olsun. Bu durumda $x\in A$ ve $F(x) \leq B$ dir. Buradan $x\in A$ ve her $y\in Y$ için $[G(F)(x)](x,y) = [F(x)](y) \leq B(y) = (AxB)(x,y)$ olur. Dolayısıyla $G(F)(x) \leq AxB$ ve $x\in(G(F))^{+}(AxB)$ olur.

(b): $x\in(G(F))^{-}(AxB)$ olsun. Bu yüzden $G(F)(x)q(AxB)$ dir. Buradan $x\in A$ ve her $y\in Y$ için, $[G(F)(x)](x,y) + (AxB)(x,y) = [F(x)](y) + B(y) > 1$ olur. Dolayısıyla $x\in F^{-}(B)$ ve $x\in A\cap F^{-}(B)$ dir.

Tersine, $x\in A\cap F^{-}(B)$ olsun. Buradan $x\in A$ ve $x\in F^{-}(B)$ dir. Bu durumda $y\in[F(x)]_0\cap[B]_0$ için $[F(x)](y) + B(y) > 1$ olur. Buradan $x\in A$ ve her $y\in Y$

için $[G(F)(x)](x,y) + (AxB)(x,y) = [F(x)](y) + B(y) > 1$ dir ve dolayısıyla $G(F)(x)q$ (AxB) yani $x \in (G(F))^{-}(AxB)$ olur.

4.1.15.Teorem: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. $G(F): X \to XxY$ f.ü.h.h.z. sürekli ise F fuzzy çoğul fonksiyonuda f.ü.h.h.z. süreklidir.

İspat: $G(F): X \to XxY$ f.ü.h.h.z. sürekli olsun. $x \in X$ ve $F(x) \leq V$ olan V fuzzy açığını alalım. XxV, XxY uzayında açık kümedir ve $G(F)(x) \leq XxV$ dir. G(F) f.ü.h.h.z. sürekli olduğundan, $G(F)(U) \leq cl(XxV) = Xxcl(V)$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır. Buradan $U \subseteq (G(F))^{+}(Xxcl(V))$ ve 4.1.14.Önermeden $U \subseteq F^{+}(cl(V))$ olur ki bu F`nin f.ü.h.h.z. sürekliliğini verir.

4.1.16.Teorem: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. $G(F): X \to XxY$ f.a.h.h.z. sürekli ise F fuzzy çoğul fonksiyonuda f.a.h.h.z. süreklidir.

İspat: $G(F): X \to XxY$ f.a.h.h.z. sürekli olsun. $x \in X$ ve $F(x)\ q\ V$ olan V fuzzy açığını alalım. XxV, XxY uzayında açık kümedir ve $G(F)(x)\ q\ XxV$ dir. G(F) f.ü.h.h.z. sürekli olduğundan her $u \in U$ için, $G(F)(u) \leq cl(XxV) = Xxcl(V)$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır. Buradan $U \subseteq (G(F))^{-}(Xxcl(V))$ ve 4.1.14.Önermeden $U \subseteq F^{-}(cl(V))$ olur ki bu F`nin f.a.h.h.z. sürekliliğini verir.

4.1.17.Tanım: $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. $sclF: X \to Y$ fonksiyonu, her $x \in X$ için $(sclF)(x) = scl(F(x))$ olarak tanımlanır.

4.1.18.Önerme: (Y,τ_Y) bir f t u olsun. Herhangi bir $A \in I^Y$ ve $B \in SO(Y)$ için $scl(A)qB$ ise AqB dir.

İspat: $scl(A)qB$ fakat $A\not{q}B$ olsun. Bu yüzden en az bir $y \in Y$ için $[scl(A)](y) + B(y) > 1$ dir. $\alpha = [scl(A)](y)$ alırsak, B y_α fuzzy noktasının bir yarı açık yarı q-komşuluğu olur öyleki $A\not q B$ dir. Buradan $y_\alpha \notin scl(A)$ yani $\alpha \nleq scl(A)(y) = \alpha$ olur ki bu çelişkidir.

4.1.19.Önerme: $F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. Bu durumda her $V \in SO(Y)$ için $F^-(V) = (sclF)^-(V)$ dir.

İspat: $V \in SO(Y)$ ve $x \in (sclF)^-(V)$ alalım. Bu yüzden $(sclF)(x)qV$ ve dolayısıyla $scl(F(x))qV$ olur. 4.1.18.Önermeden, $F(x)qV$ ve $x \in F^-(V)$ olur.

Tersine, $x \in F^-(V)$ ise $F(x)qV$ dolayısıyla $scl(F(x))qV$ olur. Buradan $(sclF)(x)qV$ yani $x \in (sclF)^-(V)$ elde edilir.

4.1.20.Önerme: $F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonunun f.a.h.h.z. sürekli olması için gerek ve yeterli koşul $sclF : X \to Y$ fonksiyonunun f.a.h.h.z. sürekli olmasıdır.

İspat:($\Rightarrow$): Kabul edelimki F f.a.h.h.z. sürekli olsun. $x \in X$ ve $(sclF)(x)qV$ olan V fuzzy açığını alalım. 4.1.19.Önerme`den $F(x)qV$ olur. 4.1.5.Teorem`den, her $u \in U$ için $F(u)qcl(V)$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır. Yine 4.1.19.Önermeden, $cl(V) \in SO(Y)$ olduğundan, $U \subseteq F^-(cl(V)) = (sclF)^-(cl(V))$ olur. Buradan her $u \in U$ için $(sclF)(u)qV$ olur ki bu sclF`nin f.a.h.h.z. sürekli olduğunu verir.

($\Leftarrow$):sclF f.a.h.h.z. sürekli olsun. $x \in X$ ve $F(x)qV$ olan V fuzzy açığını alalım. 4.1.19.Önermeden, $(sclF)(x)qV$ ve sclF f.a.h.h.z. sürekli olduğundan, her $u \in U$ için $(sclF)(u)qcl(V)$ olacak şekilde bir $U \in PO(X,x)$ vardır. Yine $cl(V) \in SO(Y)$ olduğundan, 4.1.19.Önerme`den $U \subseteq (sclF) - (cl(V)) = F^-(cl(V))$ olur ki buradan her $u \in U$ için $F(u)qcl(V)$ olduğu görülür. Dolayısıyla F f.a.h.h.z. süreklidir.

4.1.21.Önerme: $F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu f.ü(a).h.h.z. sürekli ve $X_0 \in SO(X)$ olsun. Bu durumda $F|_{X_0} : X_0 \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonuda f.ü(a).h.h.z. süreklidir.

İspat: Biz sadece f.ü.h.h.z. süreklilik için ispat yapacağız. f.a.h.h.z. süreklilik içinde benzer ispat yapılır.

$x \in X$ ve $(F|_{X0})(x) \leq V$ olan V fuzzy açığını alalım. $(F|_{X0})(x) = F(x)$ olduğundan ve F f.ü.h.h.z. sürekli olduğundan, $F(U) \subseteq cl(V)$ olacak şekilde $U \in PO(X,x)$ vardır. 1.2.19.Önerme`den $U_0 = U \cap X_0$ alınırsa, $U_0 \in PO(X_0,x)$ olur ve $(F|_{X0})(U_0) = F(U_0) \subseteq F(U) \subseteq cl(V)$ elde edilir.

4.1.22.Önerme: $F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $F|_{X0}:X_0 \to Y$ f.(ü)a.h.h.z. sürekli olacak şekilde bir $X_0 \in PO(X,x)$ varsa F f.(ü)a.h.h.z. süreklidir.

İspat: Biz sadece f.a.h.h.z. süreklilik için ispat yapacağız. f.ü.h.h.z. süreklilik içinde benzer ispat yapılır.

$x \in X$ ve $F(x)qV$ olan V fuzzy açığını alalım. Hipotezden, $F|_{X0}:X \to Y$ f.a.h.h.z. sürekli olacak şekilde bir $X_0 \in PO(X,x)$ vardır. Buradan bazı $U_0 \in PO(X_0,x)$ ler için, $z \in U_0$ iken $(F|_{X0})(z)qcl(V)$ olur. 1.2.19.Önerme`den, $U_0 \in PO(X,x)$ tir ve $(F|_{X0})(U_0) = F(U_0)qcl(V)$ olur ki bu da bize F`nin f.a.h.h.z. sürekliliğini verir.

4.1.23.Teorem: $\{U_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ X uzayının α-kümelerden oluşan bir örtüsü olsun.$F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu f.ü(a).h.h.z. süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in \Delta$ için $F|_{U\alpha}:U_\alpha \to Y$ f.(ü)a.h.h.z. süreklidirler.

İspat: Önceki iki önermenin sonucudur.

4.1.24.Teorem: $F : X \to Y$ fuzzy nokta kompakt ve f.ü.h.h.z. sürekli çoğul fonksiyon olsun. X kuvvetli kompakt uzay ise Y fuzzy h.h.kompakt uzaydır..

İspat: $\{W_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ Y`nin açık örtüsü olsun. Her bir $x \in X$ için, F(x) kompakt olduğundan, $F(x) \leq \vee\{W_\alpha | \alpha \in \Delta_x\}$ olacak şekilde $\Delta$`nın sonlu bir Δ_x alt ailesi vardır. $\mu_x = \vee\{W_\alpha \mid \alpha\in\Delta_x\}$ dersek, F f.ü.h.h.z. sürekli olduğundan, $F(U_x) \leq cl(\mu_x)$ olacak şekilde bir $U_x \in PO(X,x)$ vardır. Bu durumda $\{U_x \mid x\in X\}$ ailesi X uzayının bir önaçık örtüsüdür ve X kuvvetli kompakt olduğundan, $X = \cup\{U_{xi} \mid i = 1,2,\ldots,n\}$ olacak şekilde X'in $x_1,x_2,\ldots,x_n$ noktaları vardır. Bu yüzden, $Y = F(X) = F(\cup\{U_{xi} \mid i= 1,2,\ldots,n\}) \leq \vee\{\mu_{xi} \mid i=1,2,\ldots,n\} \leq \vee\{\vee_{\alpha\in\Delta xi}cl(W_\alpha) \mid i=1,2,\ldots,n\}$ elde edilir. Böylece Y fuzzy h.h.kompakt uzaydır.

4.2. Hemen Hemen H-Sürekli Fuzzy Çoğul Fonksiyonlar

Bu kesimde, hemen hemen H-süreklilik kavramı fuzzy çoğul fonksiyonlar için tanımlanarak, karakterizasyonları verildi. Üstten ve alttan hemen hemen H-sürekli fuzzy çoğul fonksiyonlar için örnekler verilerek hemen hemen zayıf sürekli fuzzy çoğul fonksiyonlar ile aralarındaki ilişkiler incelendi.

4.2.1.Tanım: (X,τ) alışılmış topolojik uzay, (Y,τ_Y) f t u ve $F: X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyon olsun.

a) $x \in F^+(\mu)$ olan her $\mu\in\tau_Y$ için $x\in int(cl(F^+(V)))$ ise F x noktasında *fuzzy üstten hemen hemen H-süreklidir (fuzzy upper almost H-continuous)* denir. Biz bu durumu kısaca f.ü.h.h.H- sürekli ile göstereceğiz.

b) $x \in F^-(\mu)$ olan her $\mu\in\tau_Y$ için $x\in int(cl(F^-(V)))$ ise F x noktasında *fuzzy alttan hemen hemen H-süreklidir (fuzzy lower almost H-continuous)* denir. Biz bu durumu kısaca f.a.h.h.H-sürekli ile göstereceğiz.

c) F fuzzy çoğul fonksiyonu her $x\in X$ noktasında f.ü(a).h.h.H-sürekli ise F fuzzy çoğul fonksiyonuna X üzerinde f.ü(a).h.h.H-süreklidir denir.

4.2.2.Örnek: $X = \{a,b,c\}$ üzerinde $\tau = \{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ topolojisini ve $Y = [0,1]$ üzerinde $\tau_Y = \{C_0,C_1,C_{2/3}, C_{4/11}\}$ fuzzy topolojisini alalım. $F:X\to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu $F(a) = C_{1/2}$, $F(b) = C_{3/4}$, $F(c) = C_{1/3}$ olarak tanımlansın.

$a\in F^+(V)$ için, $F(a) \leq C_{2/3}$ dir. Buradan da $a\in int(cl(F^+(C_{2/3}))) = int(cl(\{a,c\})) = X$ olur. Dolayısıyla F $a\in X$ noktasında f.ü.h.h.H-süreklidir.

$b \in F^{+}(V)$ için, $F(b) \leq C_1$ dir. Buradan da $b \in int(cl(F^{+}(C_1))) = X$ olur. Dolayısıyla F $b \in X$ noktasında f.ü.h.h.H-süreklidir.

$c \in F^{+}(V)$ için, $F(c) \leq C_{2/3}$ ve $F(c) \leq C_{4/11}$. Her iki durumuda incelersek, $c \in int(cl(F^{+}(C_{2/3}))) = int(cl(\{a,c\})) = X$ ve $c \in int(cl(F^{+}(C_{4/11}))) = int(cl(\{c\})) = \{b,c\}$ elde edilir. Dolayısıyla F $c \in X$ noktasında f.ü.h.h.H-süreklidir.

Bu yüzden F X üzerinde f.ü.h.h.H-süreklidir.

4.2.3.Örnek: $X = \{a,b,c\}$ üzerinde $\tau = \{X,\phi,\{b\},\{b,c\}\}$ topolojisini ve $Y = [0,1]$ üzerinde $\tau_Y = \{C_0,C_1,C_{1/4},C_{2/3}\}$ fuzzy topolojisini alalım. $F{:}X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu $F(a) = C_{2/5}$, $F(b) = C_{3/4}$, $F(c) = C_{2/7}$ olarak tanımlansın.

$a \in F^{-}(V)$ için, $F(a)qC_{2/3}$ olduğundan, $a \in int(cl(F^{-}(C_{2/3}))) = int(cl(\{a,b\})) = X$ olur. Dolayısıyla F $a \in X$ noktasında f.a.h.h.H-süreklidir.

$b \in F^{-}(V)$ için, $F(b)qC_{2/3}$ olduğundan, $b \in int(cl(F^{-}(C_{2/3}))) = X$ olur. Dolayısıyla F $b \in X$ noktasında f.a.h.h.H-süreklidir.

$c \in F^{-}(V)$ için, $F(c)qC_1$ olduğundan, $c \in int(cl(F^{-}(C_1))) = X$ olur. Dolayısıyla F $c \in X$ noktasında f.a.h.h.z. süreklidir.

Bu yüzden F X üzerinde f.a.h.h.H-süreklidir.

4.2.4.Teorem: $F{:}X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.ü.h.h.H-süreklidir,

2) Her V fuzzy açığı için $F^{+}(V) \in PO(X)$,

3) Her bir $x \in X$ ve $F(x) \leq V$ olan her V fuzzy açığı için $F(U) \leq V$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır.

İspat:(1)⇒(2): $x \in X$ ve $F(x) \leq V$ için, (1)`den dolayı $x \in int(cl(F^{+}(V)))$ olur. Buradan $F^{+}(V) \subseteq int(cl(F^{+}(V)))$ elde edilir.

(2)⇒(3): $x \in X$ ve $F(x) \leq V$ olan V fuzzy açığını alalım. (2)`den dolayı $F^{+}(V) \in PO(X)$ yani $x \in F^{+}(V)$ için $U \subseteq F^{+}(V)$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır.

(3)$\Rightarrow$(1): $x \in X$ ve $F(x) \leq V$ olan V fuzzy açığını alalım. (3)`den dolayı $U \subseteq F^+(V)$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır. Buradan $x \in U \subseteq int(cl(U)) \subseteq int(cl(F^+(V)))$ elde edilir.

4.2.5.Teorem: $F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

1) F f.a.h.h.H-süreklidir,

2) Her V fuzzy açığı için $F^-(V) \in PO(X)$,

3) Her bir $x \in X$ ve $F(x)\, q\, V$ olan her V fuzzy açığı için, $z \in U$ iken $F(z)\, q\, V$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır.

İspat:(1)$\Rightarrow$(2): $x \in X$ ve $F(x)\, q\, V$ için, (1)`den dolayı $x \in int(cl(F^-(V)))$ olur. Buradan $F^-(V) \subseteq int(cl(F^-(V)))$ elde edilir.

(2)$\Rightarrow$(3): $x \in X$ ve $F(x)\, q\, V$ olan V fuzzy açığını alalım. (2)`den dolayı $F^-(V) \in PO(X)$ yani $x \in F^-(V)$ için $U \subseteq F^-(V)$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır.

(3)$\Rightarrow$(1): $x \in X$ ve $F(x)\, q\, V$ olan V fuzzy açığını alalım. (3)`den dolayı, $z \in U$ iken $F(z) q V$ olan olan $U \in PO(X,x)$ vardır. Buradan $U \subseteq F^-(V)$ ve $x \in U \subseteq int(cl(U)) \subseteq int(cl(F^-(V)))$ elde edilir.

4.2.6.Sonuç: $F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu f.ü(a).h.h.H-sürekli ise F f.ü(a).h.h.z. süreklidir.

Aşağıdaki örnekler bu sonucun tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

4.2.7.Örnek: 4.1.2.örneği alalım. F, f.ü.h.h.z. sürekli olduğu halde a noktasında f.ü.h.h.H-sürekli değildir. Gerçekten, $a \in F^+(V)$ olan, $F(a) \leq C_{2/3}$ için $a \notin int(cl(F^+(C_{2/3}))) = int(cl(\{a,c\})) = \{c\}$

4.2.8.Örnek: 4.1.3.örneği alalım. F, f.a.h.h.z. sürekli olduğu halde a noktasında f.a.h.h.H-sürekli değildir. Gerçekten, $a \in F^-(V)$ olan, $F(a)\ q\ C_{3/4}$ için $a \notin int(cl(F^-(C_{3/4}))) = int(cl(\{a,c\})) = \phi$ tur.

4.2.9.Sonuç: $F : X \to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu f.ü(a).y. sürekli ise F f.ü(a).h.h.H - süreklidir.

Aşağıdaki örnekler bu sonucun tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

4.2.10.Örnek: 4.2.2.örneği alalım. F, f.ü.h.h.H-sürekli olduğu halde f.ü.y sürekli değildir. Gerçekten 1.3.5.Teorem`den $C_{2/3} \in \tau_Y$ fakat $F^+(C_{2/3}) = \{a,c\} \notin \tau$ dur.

4.2.11.Örnek: 4.2.3.örneği alalım. F, f.a.h.h.H-sürekli olduğu halde f.a..y sürekli değildir. Gerçekten 1.3.6.Teorem`den $C_{2/3} \in \tau_Y$ fakat $F^-(C_{2/3}) = \{a,b\} \notin \tau$ dur.

4.3.F.a(ü).y Süreklilik, F.a(ü).z Süreklilik, F.a(ü).h.h.z Süreklilik, F.a(ü).h.h.H-Süreklilik Arasındaki İlişkiler

Bu kesimde, 4.1 ve 4.2 kesimlerde bahsedilen fuzzy çoğul fonksiyon türleri arasındaki ilişkiler incelenerek elde edilen sonuçlara ters örnekler verildi. Bu tür sürekliliklerin hangi koşullar altında birbirlerini gerektirdikleri araştırılarak, sonuçlar toplu halde şema ile verildi.

4.2.6.sonucun tersinin doğruluğu hem Y uzayının fuzzy regüler uzay olması durumunda hemde F fuzzy çoğul fonksiyonunun fuzzy noktasal önaçık olması durumunda görülmüş ve aşağıdaki teoremlerle ifade edilmiştir.

4.3.1.Teorem: $F : X \to Y$ f.a.h.h.z. sürekli ve Y fuzzy regüler uzay ise F f.a.h.h.H-süreklidir.

İspat: $x \in X$ ve $F(x)qV$ olan V fuzzy açığını alalım. $y_\alpha \in Y$ için, $\alpha = [F(x)](y)$ olarak alırsak, $y_\alpha qV$ olur ve Y fuzzy regüler uzay olduğundan, $y_\alpha qW \leq cl(W) \leq V$ olacak şekilde W fuzzy açığı vardır. F f.a.h.h.z. sürekli olduğundan her $z \in U$ için $F(z)qcl(W) \leq V$ olan $U \in PO(X,x)$ vardır. Buradan $x \in U \subseteq int(cl(U)) \subseteq int(cl(F^-(V)))$ elde edilir.

4.3.2.Teorem: $F : X \to Y$ f.a.h.h.z. sürekli ve noktasal fuzzy önaçık çoğul fonksiyon ise F f.a.h.h.H-süreklidir.

İspat: $x \in X$ ve $F(x)qV$ olan V fuzzy açığını alalım. F f.a.h.h.z. sürekli olduğundan, her $z \in U$ için $F(z)qcl(V)$ olacak şekilde bir $U \in PO(X,x)$ vardır. Kabul edelim ki $F(z)\not{q}V$ olsun. 1.3.13.Önermeden $cl(F(z))\not{q}V$ dir. Buradan $int(cl(F(z)))\not{q}V$ ve yine aynı önermeden $int(cl(F(z)))\not{q}cl(V)$ elde edilir. F noktasal fuzzy önaçık olduğundan $F(z) \leq int(cl(F(z)))\not{q}cl(V)$ ve buradan $F(z)\not{q}cl(V)$ elde edilir ki bu F`nin f.a.h.h.z. sürekliliği ile çelişir.

4.3.3.Teorem: $F : X \to Y$ f.ü.h.h.z. sürekli ve her V fuzzy açığı için $F^+(cl(V)) \subseteq cl(F^+(V))$ (veya, F f.ü.z. sürekli) olan fuzzy çoğul fonksiyon ise F f.ü.h.h.H-süreklidir.

İspat: Y`de V fuzzy açığını alalım. F f.ü.h.h.z. sürekli olduğundan, 4.1.4.Teorem`den, $F^+(V) \subseteq int(cl(F^+(cl(V))))$ dir ve hipotezden $F^+(V) \subseteq int(cl(F^+(V)))$ elde edilir ki bu $F^+(V) \in PO(X)$ olduğunu verir.Dolayısıyla, 4.2.4.Teorem`den, F f.ü.h.h.H-süreklidir.

4.2.9.sonucun tersinin doğruluğu, Y uzayının fuzzy regüler uzay olması ve F fuzzy çoğul fonksiyonunun Y`deki her V fuzzy açığı için $cl(F^-(V) \subseteq F^-(cl(V))$ özelliğini sağlaması durumunda aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

4.3.4.Teorem: $F: X \rightarrow Y$ f.a.h.h.H-sürekli, Y fuzzy regüler uzay ve F, her V fuzzy açığı için $cl(F^-(V) \subseteq F^-(cl(V))$ özelliğine sahipse f.a.y. süreklidir.

İspat: $x \in X$ ve $F(x)qV$ olan V fuzzy açığını alalım. $\alpha = [F(x)](y)$ olmak üzere y_α fuzzy noktası için, $y_\alpha qV$ olur ve Y fuzzy regüler olduğundan, $y_\alpha qW \leq cl(W) \leq V$ olan W fuzzy açığı vardır. F f.a.h.h.z. sürekli olduğundan, $x \in int(cl(F^-(W)))$ elde edilir. $cl(F^-(W) \subseteq F^-(cl(W))$ olduğundan $U = int(cl(F^-(W)))$ seçilirse istenen gerçekleşir.

4.1.8.sonucun tersinin doğruluğu, F fuzzy çoğul fonksiyonu f.a(ü).h.h.z. sürekli iken, aynı zamanda f.ü(a).h.h sürekli olması durumunda aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

4.3.5.Teorem: $F: X \rightarrow Y$ f.ü.h.h.z.sürekli ve f.a.h.h sürekli ise F f.ü.z. süreklidir.

İspat: V fuzzy açık küme olsun. 4.1.4.Teorem'den F f.ü.h.h.z. sürekli olduğundan, $F^+(V) \subseteq int(cl(F^+(cl(V))))$ dır. Buradan cl(V) regüler kapalı olduğundan 1.3.9.Teorem'den $F^+(cl(V))$ X'te kapalıdır. Bu durumda $F^+(V) \subseteq int(F^+(cl(V)))$ elde edilir ki bu ise 1.3.11.Teorem'den f.ü.z. sürekliliği verir.

4.3.6.Teorem: $F: X \rightarrow Y$ f.a.h.h.z.sürekli ve f.ü.h.h sürekli ise F f.a.z. süreklidir.

İspat: V fuzzy açık küme olsun. 4.1.5.Teorem'den F f.a.h.h.z. sürekli olduğundan, $F^-(V) \subseteq int(cl(F^-(cl(V))))$ elde edilir. Buradan cl(V) regüler kapalı olduğundan 1.3.8.Teorem'den $F^-(cl(V))$ X'te kapalıdır. Bu durumda $F^-(V) \subseteq int(F^-(cl(V)))$ elde edilir ki bu ise 1.3.11.Teorem'den f.a.z. sürekliliği verir.

4.1.9.sonucun tersinin doğruluğu, Y fuzzy uzayının fuzzy regüler uzay olması durumunda görülmüş ve aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

4.3.7.Teorem: F :X→Y f.a.z.sürekli ve Y fuzzy regüler uzay olsun. Bu durumda F f.a.y. süreklidir.

İspat: F f.a.z. sürekli olsun. $x \in X$ ve $F(x)qV$ olan V fuzzy açığını alalım. $\alpha = [F(x)](y)$ olmak üzere y_α fuzzy noktası için, $y_\alpha qV$ olur ve Y fuzzy regüler olduğundan, $y_\alpha qW \leq cl(W) \leq V$ olan W fuzzy açığı vardır. F f.a.z. sürekli olduğundan, x noktasının bir U açık komşuluğu için, $U \subseteq F^{-}(cl(W)) \subseteq F^{-}(V)$ elde edilir. Bu ise istenendir.

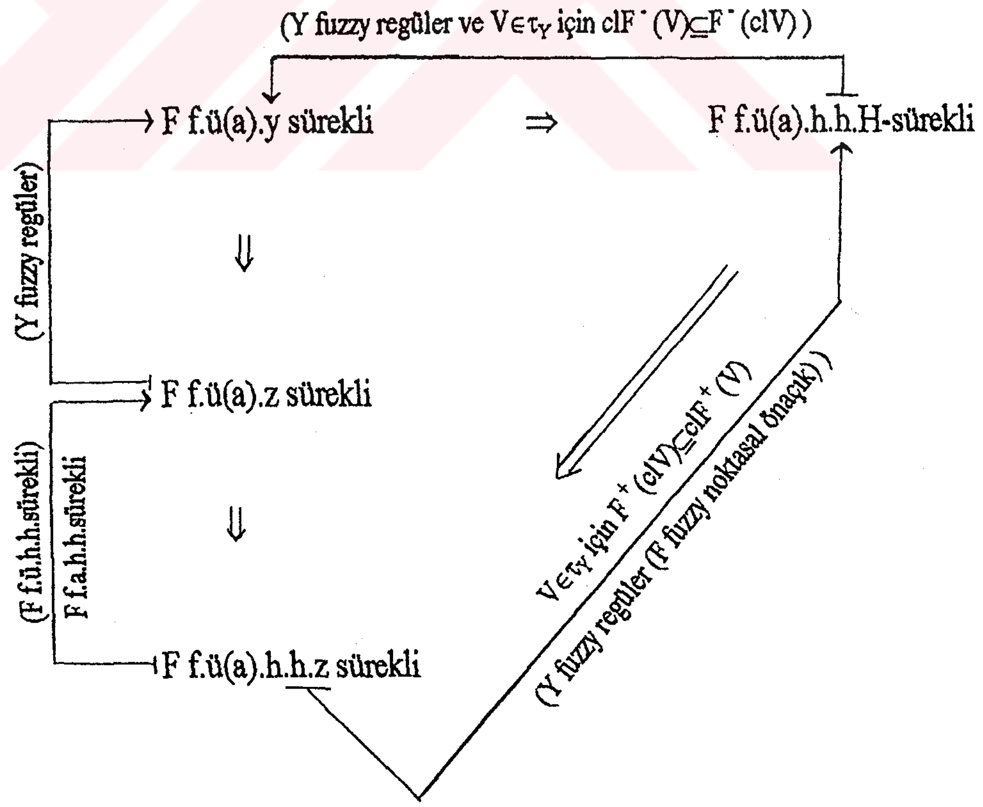
F f.ü(a).y sürekli ⇒ F f.ü(a).h.h.H-sürekli

⇓

F f.ü(a).z sürekli

⇓

F f.ü(a).h.h.z sürekli



ÖZGEÇMİŞ

İdris ZORLUTUNA 1972 yılında Edirne`nin Meriç ilçesinde doğdu. İlk, ve orta öğrenimini burada, lise öğrenimini ise Edirne`de tamamladı. 1989 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandı ve 1993 yılında mezun oldu. 1994 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümününde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen burada çalışmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] AJMAL, N. and SARMA, R. D.; 1992, *Various fuzzy topological notions and fuzzy almost continuity*, Fuzzy sets and systems, 50, 209-223.

[2] ALLAM, A.A and ZAHRAN, A.A.; 1992, *On fuzzy δ-continuity and α-near compactness in fuzzy topological spaces*, Fuzzy sets and systems, 50, 103-112.

[3] AZAD, K. K.; 1981, *On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity*, J. Math. And. Appl. 82, 14-32.

[4] CARNAHAN, D.; 1972, *Locally nearly compact spaces*, Boll. Un. Mat. Ital.,(4)6, 146-155.

[5] CHANG, C.L.; 1968, *Fuzzy topological spaces*, J. Math. Anal. Appl., 245, 182-190.

[6] ÇOKER, D. and EŞ, H.; 1990, *On some strongs forms of fuzzy continuity,* Doğa-Tr.J.of Math. 14, 26-38.

[7] Dİ CONCİLO, A. and GERLA, G.; 1984, *Almost compactness in fuzzy topological spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 13, 187-192.

[8] El-Deeb, N., Hasanein, I.A., Mashour, A.S.,Noiri, T., 1983, *On p-reguler spaces*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie, 27(75), 311-315.

[9] GHOSH, B.; 1990, *Semi-continuous and semi-closed mapping and semi-connectedness in fuzzy setting*, Fuzzy Sets and Systems, 35, 345-355.

[10] HUTTON, B. and REILLY, I.; 1980, *Seperation axioms in fuzzy topological spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 3, 93-104.

[11] KÜÇÜK, Y.; AKDAĞ, M.; *Çoğul Değerli Fonksiyonların H-Almost süreklilikleri Üzerine*, 1993, Cumhuriyet Üniv. Fen Bilimleri Dergisi, sayı 15.

[12] KÜÇÜK, Y.; 1995, *On Some Characterizations of δ - continuous Multifunctions*, Demonstratio Math, No: 3, 587-595.

[13] LEVINE, N.; 1963, *Semi open sets and semi continuity in toplogical spaces,* Amer. Math. Monthly, 70, 36-41.

[14] MASHHOUR, A.S., HASANEİN, I.A, EL-DEEB, S.N.; 1982,*A note on semi-continuity and pre-continuity*, Indian J. Pure Appl. Mathm.13,1119-1123.

[15] MASHHOUR, A.S., Abd El-Monsef, M.E., Hasenein, I.A., Noiri, T., 1984, *Strongly compact spaces*, Delta J. Sci., 8, 30-46.

[16] MUKHERJEE, M.N. and SINHA, S.P.; 1990, *On some near fuzzy continuous functions between fuzzy topological spaces*, Fuzzy sets and systems, 34, 245-254.

[17] MUKHERJEE, M. N. and MALAKAR, S.; 1991, *On almost continuous and weakly continuous fuzzy multifunctions*, Fuzzy sets and systems 41, 113-125.

[18] NJASTAD O.; 1965, *On some classes of nearly open sets*, Pacific J. Math., 15, 961-970.

[19] NOIRI, T.; 1975, *N-closed sets and almost-closed Mappings*, Glasnik Matematicki, Vol 10, (30), 341-345.

[20] NOIRI, T.; 1979, *Properties of H continuous functions*, Res. Rep. of Yatsushiro Nat. Coll. of Tech.. 1.

[21] NOIRI, T.; 1980, *On δ-continuous functions*, J. Korean Math. Soc., 16.

[22] NOIRI, T.; 1984, *On α-continuous functions*, Casopis Pest.Math., 109, 118-126.

[23] NOIRI, T., POPA, V.; 1993, *Almost weakly continuous multifunctions*, Demonstratio Mathematica, Vol 26, No 2, 363-380.

[24] ÖZBAKIR, O.; 1994, *Doktora Tezi*, Ege Üniversitesi.

[25] PAPAGEORGIOU, N.S.; 1985, *Fuzzy topology and Fuzzy Multifunctions*, J.Math. and. appl, 109, 397-425.

[26] MİNG, P.P and MİNG, L.Y; 1980, *Fuzzy topology, I.Neigbourhood structure of a fuzzy point and moore-smith convergence*, J.Math.Anal., 76, 571-599.

[27] SINHA, S. P.; 1992, *Seperation axioms in fuzzy topological spaces*, Fuzzy sets and systems, 45, 261-270.

[28] WONG, C.K.; 1973, *Covering properties of fuzzy topological spaces*, Journal of Math. Analy. and Appl., 43, 697-704.

[29] YALVAÇ, T.H.; 1988, *Semi-interior and semi-closure of a fuzzy sets*, Journal of Math. Analy. and Appl., 132, 356-364.

[30] ZADEH, L.A.; 1965, *Fuzzy sets, Informa. and Control*, 8, 338-353.