

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

KARA DELİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN
İ. Sevinç TUNCEL

DANIŞMAN
Doç. Dr. İhsan YILMAZ

ÇANAKKALE – 2004

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

KARA DELİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN
İ. Sevinç TUNCEL

DANIŞMAN
Doç. Dr. İhsan YILMAZ

ÇANAKKALE - 2004

**Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürlüğüne,**

**Bu araştırma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans
Tezi olarak kabul edilmiştir.**

Başkan :

Üye :

Üye :

Kod No :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylım.

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	III
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IV
1. GİRİŞ.....	1
2. TEZİN KONUSU VE AMACI.....	6
3. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	7
4. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
4.1.Kara Delik Çözümleri	9
4.1.1 Schwarzschild Çözümü	10
4.1.2.Reissner –Nördstrom Çözümü	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.2
4.1.3. Kerr Çözümü	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.4
4.1.4 Kerr-Newmann Çözümü	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.1
5. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	23
5.1 Einstein Alan Denklemleri.....	23
5.2 Alan Denklemlerinin Çözümleri.....	24
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	27
ÖZET.....	29
SUMMARY.....	30
TEŞEKKÜR.....	31
KAYNAKLAR.....	32

ÖZ

Bu çalışmada, bazı kara delik çözümleri verilmiştir. Sonra da evrenin ilk anlarında ortaya çıktığı varsayılan ve 1-boyutlu nesnelere olan yüklü sicim bulutunun, statik küresel simetrik bir yıldız modelinde kara delik oluşumu incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kara Delik, Konformal Kollinasyonlar, Sicim

ABSTRACT

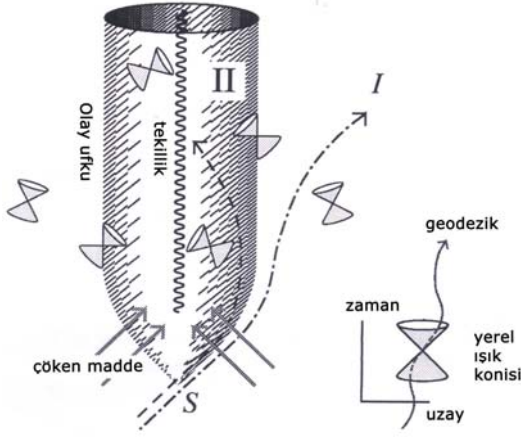
In this study, some black holes solutions has been given. Then black hole formation of the charged string cloud, one dimensional object and assumed that they occured in the initial ages of the universe, has been studied.

Key Words: Black Holes, Conformal Collinations, String

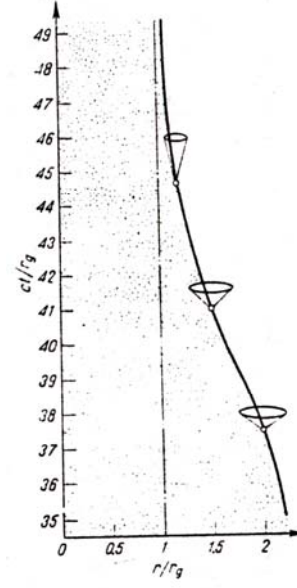
SİMGELER VE KISALTMALAR

- i) Signatür -2 $(-, -, -, +)$ ' dır.
- ii) $(')$, $('')$ sırasıyla r 'ye göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerdir.
- iii) $a, b, i, k, \alpha, \beta, \mu, \nu$ alt indisleri $1, 2, 3, 4$ değerlerini alırlar.
- iv) ρ, x, y, z alt indisleri sırasıyla ρ, x, y ve z' ye göre türevleri gösterir.
- v) $(;)$ kovaryant türevi gösterir.

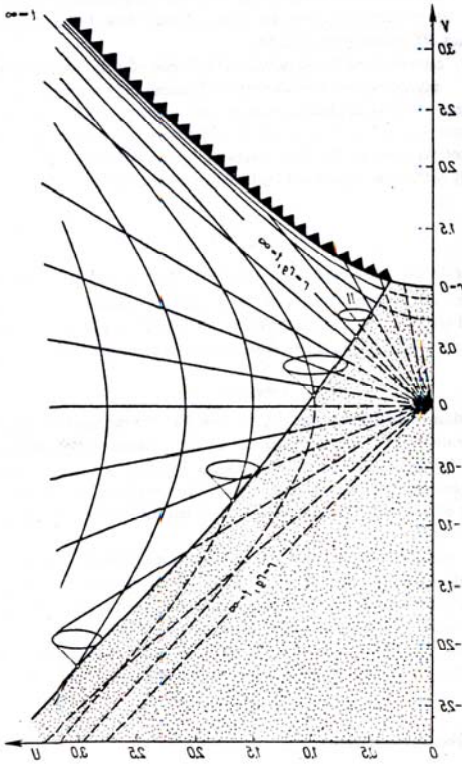
ŞEKİLLER DİZİNİ



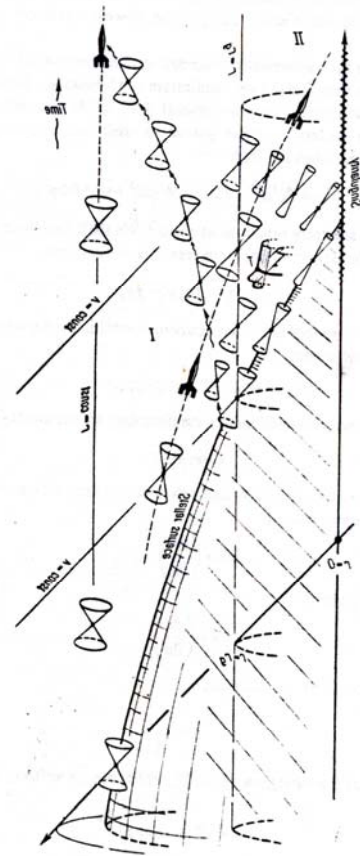
Şekil 1. Bir kara deliğin uzay-zamanı (Hoof, 2004)



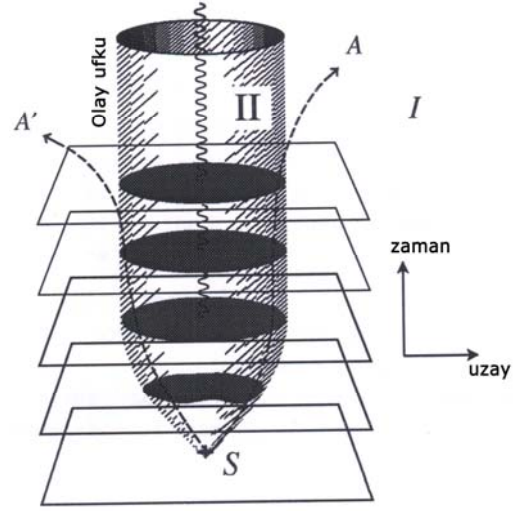
Şekil 2. Uzak bir gözlemci tarafından görülen bir yıldızın gravitasyonel çökmesi (Demianski, 1985)



Şekil 3. Kruskal koordinatlarındaki bir yıldızın gravitasyonel çökmesi (Demianski, 1985)



Şekil 4. Roket üzerinde bir yıldızın çökmesini izleyen gözlemci (Demianski, 1985)



Şekil 5. Bir kara deliğin olay ufku (Hooft, 2004)

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi yıldızlarda insanlar gibi doğarlar, büyürler ve ölürlür. Bir yıldızın evrimini (doğma, büyüme ve ölme) onun ilk kütlesi belirlemektedir. Yıldızların evrimleri için gerekli olan enerji termo-nükleer reaksiyonlar sonucu üretilmektedir. Termo-nükleer reaksiyonlar, yıldızın basıncına ve dolayısıyla sıcaklığına bağlıdır. Bilindiği gibi ideal gaz yasasına göre basınç ile sıcaklık arasında doğrusal bir ilişki vardır. Yani yıldız içindeki basınç arttıkça sıcaklıkta artmaktadır. Bu yüzden termo-nükleer reaksiyonlar sonucu yıldız enerjilerini sağlayan elementler yanma sırasına göre, H (Hidrojen), He (Helyum), C (Karbon), O (Oksijen) ve Si (Silikon) dur. Yıldız çekirdeklerindeki bu termo-nükleer reaksiyonlar Fe (Demir) atomuna kadar devam etmektedir.

Küçük kütleli yıldızlar çok yavaş evrim geçirirler. Bu tip yıldızların H (Hidrojen) yanmasını başlatabilmek için gerekli olan sıcaklık ve basıncı oluşturmaları çok zaman alır. Termonükleer tepkimeler başladığında da yakıtı tüketme hızı çok yavaştır. Bunun tam tersine büyük kütleli yıldızların evrimi hızla gerçekleşir. Yıldızın merkezinde hidrojen yanmaya başladığında yıldız dengeye ulaşır. Bu denge çekimsel çökmenin gaz basıncına eşitlenmesiyle sağlanır. Merkezde hidrojen yandıkça helyum oluşur ve buradaki hidrojen bir süre sonra biter. Bu aşamada denge bozulur ve çekimsel çökme merkezde helyum yakabilecek sıcaklık ve basınç sağlanıncaya kadar tekrar başlar. Merkezde hidrojen yanmaya başladığında yıldız Kırmızı Dev aşamasındadır. Bir süre sonra bu helyumda biter. Yıldız kararsız hale gelir ve genişip büzölmeye başlar. Bu genişip büzölmelerle yıldız kütlelerinin büyük bölümünü uzaya fırlatır.

Küçük kütleli yıldızlar yaşamlarının sonunda arkalarında gezegenimsi bulutsu bırakırlar. Daha fazla nükleer yakıtı kalmayınca da Gezegenimsi Bulutsunun merkezindeki ölü yıldız büzölmeye başlar. Bu süreç sonunda ortaya çıkan yozlaşmış elektron basıncı yıldızın daha çok büzölmesini önler. Yozlaşmış elektron basıncı, kütlesi güneş kütlelerinin 1.4 katı kadar olan ölü yıldızların basıncını dengeleyebilir. Boyutlarının küçüklüğünden dolayı bu yıldızlara Beyaz Cüce adı verilir. Tüm beyaz

cücelerın kütlesi 1.4 güneş kütlesinden küçük olmalıdır. Bu sınıra Chandrasekhar Sınırı denir.

Büyük kütleli yıldızlar Kırmızı Dev evresine geldiklerinde merkezlerinde Hidrojen ve Helyum yakmaktadırlar. Ama büyük kütleleri nedeniyle daha yüksek düzeydeki termonükleer tepkimeleri de başlatabilirler. Büyük kütleli bir yıldızın basıncı, merkezdeki sıcaklığı 700 milyon dereceye kadar yükseltir ve Karbon yanması başlar. Daha sonra sıcaklık 1 milyar dereceye ulaştığında Oksijen yanmaya başlar. Her iki durumda da tepkimeler çekirdekte Karbon ve Oksijen tükeninceye kadar sürer. Oksijen yanmasının artığı silikondur. Basınç merkezdeki sıcaklığı 3 milyar dereceye yükselttiğinde Silikon yanmaya başlar. Silikon artığı Fe (Demir)'dir. Ama Demir, merkezdeki sıcaklık ve basınç ne olursa olsun termonükleer tepkimeye girmez. Bu nedenle büyük kütleli bir yıldız yaşamının sonuna doğru demirce zengin bir çekirdek ve çevresinde çeşitli termonükleer tepkimelerin devam ettiği ince katmanlardan oluşur. Bu demir çekirdeğin kütlesi 1.5 güneş kütlesine ulaştığında oluşan basınç altında elektronlar demir atomu çekirdeklerinin içine itilir. Elektronlarla protonlar birleşerek nötron oluşturur. Yıldız şiddetle çöker. Çöken çekirdekten yayılan şok dalgası dışarı doğru yayılırken yıldız tümüyle parçalanır. Yıldız bir Süpernova olmuştur. Sonuç olarak büyük kütleli bir yıldızın nötronca zengin çekirdeği küçük bir hacme sıkıştırıldığında yozlaşmış nötron basıncı oluşur. Bu basınç daha fazla büzölmeye engel olur. Ölü yıldız bir Nötron Yıldızına dönüşmüştür. Yozlaşmış nötron basıncı, kütleleri güneş kütlesinin 2.5 katından daha çok olan yıldızların basıncını dengeleyemez. Bu nedenle nötron yıldızlarının kütleleri bu sınır değerinden küçük olmak zorundadır.

Güneş kütlesinin 2.5 katından büyük olan yıldızlar ölümleri sırasında çok büyük çekimsel çökmeye uğrarlar. Bu nedenle ölmekte olan yıldız kendi basıncı altında çöker, büzölür. Ölü yıldız bir Kara Deliğe dönüşmüştür.

Şimdi gravitasyonel çökmeyi ve bu çökme sırasında oluşan olayları inceleyelim.

Yıldızların yaşamlarını onların başlangıç kütleleri ve dolayısıyla gravitasyonel çökmeleri belirlediğinden dolayı gravitasyonel çökmeyi incelemek için karşılıklı olarak

sadece gravitasyonel olarak etkileşen parçacıklardan oluşmuş küresel simetrik bir toz bulutunu göz önüne alalım. Böyle bir sistemin içinde basınç sıfırdır ve bu yüzden sistem dengede değildir. Başlangıç şartlarına bağlı olarak bu tür bir bulut ya büzülecek yada genişleyecektir. Schwarzschild uzay-zamanında uzaktaki bir gözlemci tarafından görülen bulut yarıçapının zamanla değişimi (yani çap doğrultusundaki zamansal goevezikler)

$$\frac{dr}{dt} = c(1 - r_g/r) \sqrt{1 - \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0}}$$

denklemleri ile verilir. Bu denklem Oppenheimer-Snyder tarafından aşağıdaki şekilde çözülmüştür.

$$r = \frac{r_0}{2}(1 + \cos \eta),$$

$$ct = r_g \ln \left[\frac{\left(\frac{r_0}{r_g} - 1\right)^{1/2} + \tan \frac{\eta}{2}}{\left(\frac{r_0}{r_g} - 1\right)^{1/2} - \tan \frac{\eta}{2}} \right] + r_g \left(\frac{r_0}{r_g} - 1\right)^{1/2} \left[\eta + \frac{r_0}{2r_g}(\eta + \sin \eta) \right]$$

iken $\tan \frac{\eta}{2} \rightarrow \left(\frac{r_0}{r_g} - 1\right)$, $ct \rightarrow \infty$ burada r_g bulutun gravitasyonel yarıçapını göstermektedir. Uzaktaki bir gözlemciye göre bulut yüzeyinin gravitasyonel yarıçapa büzülmesi için sonlu bir zaman geçecektir.

Yüzey ile birlikte hareket eden bir gözlemci, bu işlemi farklı görecektir. Bu gözlemcinin saatine göre bulut yüzeyinin gravitasyonel yarıçapa ulaştıktan sonraki zaman sonludur ve aşağıdaki bağıntıya eşittir.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{c} \int_0^\infty \left[c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right]^{1/2} dt \\ &= \frac{r_0}{2c} \left(\frac{r_0}{r_g}\right)^{1/2} \arccos \left(\frac{2r_g}{r_0} - 1\right) + \frac{r_0}{c} \left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Yüzeyle birlikte hareket eden bir gözlemciye göre büzülme işlemi bulut yarıçapı sıfır, bulut yoğunluğu sonsuz olana kadar devam edecektir. Bu son safhada sadece yoğunluk değil aynı zamanda uzayın eğriliği de sonsuza gidecektir. Eğriliğin sonsuz olduğu bu uzay-zaman bölgesine Tekillik (singularite) denir (Şekil 1).

Uzaktaki bir gözlemci için (Şekil 2), gravitasyonel kuvvetlerin sebep olduğu büzülme işlemi, sonsuz bir zamandan sonra yarıçapı gravitasyonel yarıçapa eşit olan küresel simetrik bir nesnenin oluşumuna sebep olacaktır. Bu tür bir nesneye Kara Delik denir. Bu tür bulutun daha sonraki evriminin ne olacağını bilinmesi için uzak bir gözlemci yerine bulutla birlikte hareket etmek gerekir. Böyle olduğunu düşünecek olursak bu tür bir bulutun içindeki gravitasyonel alan Friedman metriği ile dışındaki alan ise Schwarzschild metriği ile tanımlanmaktadır.

Schwarzschild ve Kruskal koordinatları arasındaki ilişkiyi kullanırsak bulutun evrimini genişletilmiş Schwarzschild uzay-zamanında görebiliriz. $r=r_g$ yüzeyi uzayı tamamen farklı özellikli iki bölgeye ayırmaktadır (Şekil 4). Bu yüzden bulutun evrimini Kruskal diyagramında göstermek uygundur.

I. bölgede ($r>r_g$) (Şekil 4) uzaktaki bir gözlemciye bilgi gidebilir. Halbuki bu durumda II. bölgeden ($r<r_g$) I. bölgeye bilgi akışı yoktur. $r=r_g$ sınırı null yüzeydir. Bunun anlamı ise her bir noktada bu yüzey ışık konisine teğettir. Bu tür özelliklere sahip yüzeye Olay Ufku denir. I. bölge statik bölgedir ve bu bölgede zamansal Killing vektörleri oluşur. II. bölge statik değildir ve bu bölgede bu tür bir vektör oluşmaz.

Merkezden çap doğrultusunda uzağa gönderilen ışık sinyalleri güçlü gravitasyonel alanda bükülür ve merkeze doğru geriye döner. Hatta bütün zamansal geodezikler ve çizgiler daha fazla eğilir ve bunlar sonlu öz zamandan sonra merkez tekiliğine yönelirler.

Rokette hareket eden bir gözlemciyi düşünecek olursak (Şekil 4), eğer gözlemci II. bölgeye girecek olursa asla bu bölgeden çıkamayacaktır. Çünkü, sonlu bir zamandan sonra, roket gravitasyonel alan tarafından hızlı bir şekilde merkezi bir tekilliğe çekilecektir ve dışarıdaki bir gözlemci bu gözlemci hakkında hiçbir bilgi sahibi olamayacaktır. Bulut ile birlikte hareket eden (komoving) gözlemcinin bakış açısından bakılacak olursa, küresel tozun gravitasyonel çökmesi esnasında iki durum ayırt edilebilir. Birincisi, bulut olay ufku (horizon) oluncaya kadar büzülür ve bu oluşum zamanı hiçbir şey tarafından ayırt edilemez. İkinci basamak büzülmedir ki bunun sonunda yıldız merkezinde gerçek fiziksel tekillik oluşur. Yani yoğunluk ve eğrilik sonsuza yaklaşır. Küresel simetrik toz bulutunun çökmesi durumunda sadece merkezi kısmın çökmesi göz önüne alınmaktadır ve yıldız tarafından oluşturulan basınç ve ışınım boşlanmaktadır. Eğer ışınım ve basınç boşlanmayacak olursa, bu durumda yıldızın adyabatik çökmesi göz önüne alınmalıdır. Bu durum, burada incelenmeyecektir.

2. TEZİN KONUSU VE AMACI

Evrenin ilk anlarındaki fiziksel durum kozmolojinin çözüm bekleyen önemli problemlerinden biridir. Büyük patlamadan sonra evrenin birçok evre geçirdiği ve bu evre geçişleri sırasında monopoller, domainwalls ve sicimler gibi çeşitli topolojik yapıların olduğu bilinmektedir (Kibble, 1976). Bu topolojik yapılardan sicimler, kozmolojik açıdan çok önemlidir. Çünkü, evrenin ilk anlarında sicimlerin varlığı bugünkü gözlemlerle çelişmemektedir.

Bilindiği gibi evrende madde dağılımında bazı kümeleşmeler vardır. Yıldızlar galaksilerde, galaksiler kümeler içinde ve kümeler süper kümeler içinde gruplaşmıştır. Evrenin ilk anlarında ortaya çıktığına inanılan 1- boyutlu nesnelere olan sicimlerin evrenin ilk anlarında gravitasyonel merceklemler olarak etki yaptıklarına ve galaksi oluşumuna yol açan yoğunluk değişimlerine sebep oldukları düşünülmektedir.

Bunlara ilave olarak sicimlerin evrende oluşan ilk kara delik oluşumlarına sebep olduklarına inanılmaktadır (Vilenkin ve Shellard, 1994).

Bu çalışmanın amacı; küresel simetrik bir uzay-zamanda yüklü sicimler ele alınarak Einstein alan denklemlerini elde etmek ve denklemlere tam çözümler araştırmak ve aynı zamanda bu sicimlerin kara delik oluşum özelliklerini incelemektir.

Einstein Alan Denklemleri 10 tane ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemden oluştuğu için bunların tam çözümlerini elde etmek oldukça zordur. Bununla birlikte bu denklemlerin çözülmesinde uzay-zamanın ve/veya madde enerji dağılımının sahip olabilecekleri simetritler büyük kolaylık sağlamaktadır.

Bu nedenle bu çalışmada denklemlere çözümler bulmak için uzay-zaman geometrisine ait konformal simetritler kullanılmıştır. Elde edilen çözümlerin geometrik ve fiziksel özellikleri tartışılmıştır.

3. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Genel Relativite Teorisi, yayınlandığı 1915 yılından beri evrenin global ölçekteki yapısını büyük bir hassasiyetle izah edebilen en tutarlı teoridir. Bu teorinin temel denklemleri olan ve Einstein alan denklemleri olarak adlandırılan denklemlere yeni çözümler bulmak ve bunları yorumlamak temel bilimcilerin hala üzerinde durdukları önemli birkaç konudan biridir. Bu denklemler, 10 tane ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden oluştuğu için onların exact (tam) çözümlerini elde etmek oldukça zordur. Bununla birlikte, bu denklemlerin çözülmesinde uzay-zamanın ve/veya madde-enerji dağılımının sahip olabileceği simetriler büyük kolaylık sağlar (Hawking ve Israel, 1979; Kramer, et al, 1980). Bu simetrilere bazıları geometriye ve/veya madde-enerji dağılımına ilişkin konformal simetridir.

Bir metrik uzaydaki bazı geometrik nesnelerin $\bar{x}^a = x^a + \varepsilon \xi^a(x^b)$ dönüşümü altındaki davranışlarıyla belirlenen bazı önemli simetri özellikleri vardır. Bu simetrilere birçoğu fiziksel ve/veya geometrik anlama sahiptirler. Bu nedenle, Riemann uzayında tanımlanmış olan Einstein alan denklemlerinin çözümlerinin bulunmasında Riemann uzayına ait simetri özelliklerinden yararlanılması ana yöntemlerden biridir.

Konformal simetridir;

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \psi(x^c) g_{ab} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanan bağıntılardır. Burada $\psi(x^c)$ skaler fonksiyon, g_{ab} Riemann uzayında tanımlı metrik tensör ve $\xi = \xi^a(x^b) \frac{\partial}{\partial x^a}$ simetriyi doğuran vektör alanıdır.

$\mathcal{L}_\xi g_{ab}$; g_{ab} metrik tensörün ξ vektör alanı yönündeki Lie türevi olup;

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\bar{g}_{ab} - g_{ab}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada \bar{g}_{ab} , çizgili koordinatlardaki metrik tensördür. Eğer $\psi_{,ab} \neq 0$ ise ξ^a ya Konformal Killing vektör; $\psi_{,ab} = 0$ ve $\psi_{,a} \neq 0$ ise ξ^a ya Special Konformal Killing vektör, $\psi_{,a} = 0$ ise ξ^a ya Homotetik vektör ve $\psi = 0$ ise ξ^a ya Killing vektör denir.

Bu simetrilerle ilgili olarak, birçok önemli araştırma yapılmıştır. Bunlardan madde-enerji dağılımına ilişkin olanlardan bazıları homotetik vektör (HV) kabul eden ideal akışkanlar (Cahill ve Taub,1971; Wainwright ve Yaremovich,1976; McIntosh, 1976), konformal killing vektörler (CKV) kabul eden ideal ve anizotropik akışkanlar (Herrera, et al.1985; Herrera ve Ponce de Leon,1985; Maartens, et al.1986), konformal killing vektörler (CKV) ve inheritance simetriler kabul eden anizotropik akışkanlar (Mason ve Tsamparlis,1985; Mason ve Maartens,1987; Saridakis ve Tsamparlis,1991; Coley ve Tupper,1989) ve uzay-zaman simetrilerine ilişkin bazıları da inheritance konformal killing vektörler (ICKV) (Coley ve Tupper,1990a; 1990b; 1990c; Coley, 1991; Coley ve Czapora,1992; Duggal,1993; Carot, et al.1994) ve eğrilik inheritance simetrilerdir (CIS) (Duggal,1992; Sharma ve Duggal, 1994).

Sicimlere ait simetri özellikleri ise çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir (Yavuz ve Yılmaz, 1997; Yılmaz ve ark, 1999; Yılmaz, 2001; Baysal ve ark,2002; Baysal ve Yılmaz,2002).

Yüklü sicimlerin silindirik simetrik uzay-zamanda kara delik oluşumu Kim, et al.(1997) tarafından, sicimlerin Schwarzschild tipi Kara Delik oluşumu Akhmedov (2000) tarafından incelenmiştir.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

4.1. Kara Delik Çözümleri

Gravitasyonel etkileşmeleri ve dolayısıyla büyük ölçekte evrenin yapısını açıklayan genel relativite teorisinin temel denklemleri olan Einstein alan denklemleri;

$$G_{\mu\nu} : R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu} \quad (2)$$

şeklindedir. Burada

$g_{\mu\nu}$: Uzay-zamanın metrik potansiyeli olup simetrik ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) bir tensörü,

$T_{\mu\nu}$: Kozmik madde dağılımını tanımlayan enerji-momentum tensörü,

$G_{\mu\nu}$: Uzay - zamanın geometrisini veren Einstein alan tensörü,

$R_{\mu\nu}$: Ricci tensörü,

R : ($g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$) Ricci skaleri, Λ : Kozmolojik sabit,

χ : ($\frac{8\pi G}{c^4}$) sabittir.

Bu alan denklemlerinin sol yanı uzay geometrisiyle sağ yanı ise madde ve madde dağılımıyla (enerji-momentum tensörü ile) ilgilidir. Bu denklemler, ikinci mertebeden lineer olmayan karmaşık kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan bir sistem olduklarından çözümleri oldukça zordur. Bu yüzden geometri kısmına homojenlik, izotropi, küresel, silindirik, düzlemsel simetri, durum denklemi gibi bazı özel fiziksel ve matematiksel koşullardan biri, birkaçı veya bunların bir kombinasyonu yüklenerek; madde ile ilgili kısımda vakum, ideal akışkan, viskoz akışkan, ısı akışı, elektromanyetik alan ve sicim gibi fiziksel niceliklerden bir, birkaçı veya bunların bir kombinasyonu eklenerek çözümleri elde edilmeye çalışılır.

Bu bağlamda, küresel simetrik ve silindirik simetrik uzay-zamanlar için Einstein alan denklemlerinin sırasıyla vakum ve manyetik alanlı çözümleri elde

edilerek, çeşitli kara delik çözümlerinin nasıl bulunduğu hakkında bilgi vermeye çalışalım.

4.1.1. Schwarzschild Çözümü

Statik küresel simetrik uzay-zaman için yay elemanı;

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3)$$

şeklindedir. Burada ν ve λ , r ' ye bağlı fonksiyonlardır. $[r, \theta, \varphi, t]$ ise küresel koordinatlardır.

(3) denklemleri verilen statik küresel simetrik yay elemanı için metrik tensörün bileşenleri aşağıdaki şekildedir.

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu(r)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Einstein alan denklemlerinin sağ tarafındaki enerji-momentum tensörü $T_{\mu\nu}=0$ alınarak (2) ve (3) denklemlerinden G^{μ}_{ν} Einstein alan tensörünün bileşenleri:

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (5)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) = 0 \quad (6)$$

$$G_4^4 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (7)$$

şeklinde bulunur. Burada (') ve (') sırasıyla r' ye göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri göstermektedir. (5) ve (7) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad (8)$$

elde edilir. Bu denklemin integrali alınırsa

$$\lambda = -\nu \quad (9)$$

bulunur. Burada integral sabiti $r \rightarrow \infty$ için asimptotik düzlük elde etmek için sıfır alınmıştır. (7) ve (8) denklemi;

$$\frac{d}{dr}(e^{-\lambda}r) = 1 \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir. (10) denklemini çözümünden de;

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{c_1}{r} \quad (11)$$

elde edilir. Burada c_1 integrasyon sabitidir. Bunun değeri de sınır şartlarından ve Newton potansiyelinden (yani $\nabla^2\phi = 0$ ile verilen Laplace denkleminin çözümü olan

$\phi = 1 - \frac{2GM}{r}$) yararlanılarak;

$$c_1 = -2GM \quad (12)$$

olarak elde edilir. Burada M , gravitasyonu oluşturan cismin kütlesi ve G , gravitasyonel çekim sabitidir. (9), (11) ve (12) denklemlerinden $e^{\nu(r)}$ ve $e^{\lambda(r)}$ fonksiyonlarının ifadeleri;

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (13)$$

şeklinde elde edilir. Bulunan (13) ifadesi (3) de yerine yazılırsa;

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (14)$$

şeklinde Schwarzschild çözümü elde edilir.

4.1.2. Reissner –Nordström Çözümü

Yüklü kara delik çözümü elde etmek için (2) denklemiyle verilen Einstein alan denklemlerinin sağ tarafındaki madde yerine

$$T_{ik} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ F_{i\alpha} F_k^\alpha - \frac{1}{4} g_{ik} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right\} \quad (15)$$

elektro-manyetik alanı temsil eden enerji-momentum tensörü alınır. Burada A_i kovaryant dörtlü-potansiyeller olmak üzere,

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (16)$$

şeklinde tanımlanan elektromanyetik alan tensörüdür. Elektro-manyetik alan için

$A_i = (0, 0, 0, -\frac{Q}{r})$ şeklinde seçilirse, (2), (3) ve (15) denklemlerinden; Einstein alan denklemleri

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = -E^2 \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) = E^2 \quad (18)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = E^2 \quad (19)$$

elde edilir. Burada E , elektrik alan yoğunluğudur. (17) ve (19) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad (20)$$

elde edilir. Bu denklemin integrali alınır

$$\lambda = -\nu \quad (21)$$

bulunur. Yine burada integral sabiti $r \rightarrow \infty$ için asimptotik düzlük elde etmek için sıfır alınmıştır. (19) denkleminin integralinden;

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{c_1}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (22)$$

elde edilir. Burada c_1 , integral sabiti olup, Q ise yük yoğunluğudur. (21) ve (22) den;

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 + \frac{c_1}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (23)$$

şeklinde elde edilir. (23) denklemi (14) denklemindeki Schwarzschild metriği ile karşılaştırılırsa $c_1 = -2GM$ elde edilir. Bu ifade (23) de yerine yazılırsa;

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (24)$$

elde edilir. Bulunan (24) ifadesi (3) de yerine yazılırsa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (25)$$

yüklü kara delikler için Reissner-Nordström çözümü elde edilir.

4.1.3. Kerr Çözümü

Silindirik simetrik uzay-zaman için yay elemanı,

$$ds^2 = f dt^2 - 2k dt d\phi - l d\phi^2 - e^\mu (d\rho^2 + dz^2) \quad (26)$$

şeklindedir. Burada (ρ, z, ϕ, t) silindirik koordinatlar olmak üzere f, k, l ve μ metrik potansiyelleri ise ρ ve z koordinatlarına bağlıdır.

Boşluk için $(T_{\mu\nu} = 0)$ Einstein alan denklemleri;

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (27)$$

şeklindedir. (26) metriği için (27) denkleminin üç bileşeni aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$2e^\mu D^{-1} R_{44} = (D^{-1} f_\rho)_\rho + (D^{-1} f_z)_z + D^{-3} f (f_\rho l_\rho + f_z l_z + k_\rho^2 + k_z^2) = 0 \quad (28 a)$$

$$-2e^\mu D^{-1} R_{43} = (D^{-1} k_\rho)_\rho + (D^{-1} k_z)_z + D^{-3} k (f_\rho l_\rho + f_z l_z + k_\rho^2 + k_z^2) = 0 \quad (28 b)$$

$$-2e^\mu D^{-1} R_{33} = (D^{-1} l_\rho)_\rho + (D^{-1} l_z)_z + D^{-3} l (f_\rho l_\rho + f_z l_z + k_\rho^2 + k_z^2) = 0 \quad (28 c)$$

(28 a, b, c) denklemlerinden;

$$e^\mu D^{-1} (l R_{44} - 2k R_{43} - f R_{33}) = D_{\rho\rho} + D_{zz} = 0 \quad (29)$$

denklemini bulunur. (29) denkleminin sağ tarafı yani Laplace denklemini çözülürse;

$$D(\rho, z) = (c_1 e^{k\rho} + c_2 e^{-k\rho})(A \sin kz + B \cos kz) \quad (30)$$

elde edilir. Herhangi bir kompleks fonksiyon reel ve sanal kısma ayrılabilirdiğinden yukarıdaki fonksiyon $\sum(\rho + iz)$ şeklindeki kompleks bir fonksiyonun reel kısmı, $E(\rho, z)$ ise sanal kısmı olsun. Yani;

$$\sum(\rho + iz) = D(\rho, z) + iE(\rho, z) \quad (31)$$

olsun. Cauchy-Riemann eşitliğinden $(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x})$ ve (31) denkleminde

$$D_\rho = E_z, \quad D_z = -E_\rho \quad (32)$$

bulunur. (ρ, z) sisteminden $(\bar{\rho}, \bar{z})$ sistemine

$$\bar{\rho} = D(\rho, z), \quad \bar{z} = E(\rho, z) \quad (33)$$

bağıntıları ile geçilecek olursa, (32) denkleminde;

$$(d\bar{\rho})^2 + (d\bar{z})^2 = (D_\rho^2 + E_\rho^2)(d\rho^2 + dz^2) \quad (34)$$

elde edilir. Bu denklemden $(d\rho^2 + dz^2)$ 'yi çekip her iki tarafı e^μ ile çarparsak

$$e^{\bar{\mu}} = e^\mu (D_\rho^2 + E_\rho^2)^{-1} \quad (35)$$

elde edilir.

Tüm $f, k, l, \bar{\mu}$ fonksiyonlarının $(\bar{\rho}, \bar{z})$ 'ye bağlı olduğunu varsayılır ve (33) denklemini kullanılırsa;

$$D^2 = fl + k^2 = \rho^2 \quad (36)$$

elde edilir. Einstein alan denklemlerinin diğer terimleri;

$$2R_{11} = -\mu_{\rho\rho} - \mu_{zz} + \rho^{-1}\mu_\rho + \rho^{-2}(f_\rho l_\rho + k_\rho^2) = 0 \quad (37 a)$$

$$2R_{12} = \rho^{-1}\mu_z + \frac{1}{2}\rho^{-2}(f_\rho l_z + f_z l_\rho + 2k_\rho k_z) = 0 \quad (37 b)$$

$$2R_{22} = -\mu_{\rho\rho} - \mu_{zz} + \rho^{-1}\mu_\rho + \rho^{-2}(f_z l_z + k_z^2) = 0 \quad (37 c)$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$f^{-1}k = \omega \quad (38)$$

şeklinde tanımlanıp, bu denklem ve (36) denklemi (28 a,b) denklemlerinde kullanılırsa,

$$f(f_{\rho\rho} + f_{zz} + \rho^{-1}f_\rho) - f_\rho^2 - f_z^2 + \rho^{-2}f^4(\omega_\rho^2 + \omega_z^2) = 0 \quad (39 a)$$

$$f(\omega_{\rho\rho} + \omega_{zz} + \rho^{-1}\omega_\rho) + 2f_\rho\omega_\rho + 2f_z\omega_z = 0 \quad (39 b)$$

denklemleri elde edilir. Denklem (37 a) dan (37 c) çıkarılıp, (36) ve (38) denklemleri kullanılırsa;

$$\mu_\rho = -f^{-1}f_\rho + \frac{1}{2}\rho f^{-2}(f_\rho^2 - f_z^2) - \frac{1}{2}\rho^{-1}f^2(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) \quad (40 a)$$

elde edilir. (37 b)' de (36) ve (38) kullanıldığında da;

$$\mu_z = -f^{-1}f_z + \rho f^{-2}f_\rho f_z - \rho^{-1}f^2\omega_\rho\omega_z \quad (40 b)$$

elde edilir. (39 b) denklemi;

$$(\rho^{-1} f^2 \omega_\rho)_\rho + (\rho^{-1} f^2 \omega_z)_z = 0 \quad (41)$$

şeklinde yazılabilir.

$$u_\rho = -\rho^{-1} f^2 \omega_z, \quad u_z = \rho^{-1} f^2 \omega_\rho \quad (42)$$

şekilde tanımlanıp (39 a) da kullanılırsa;

$$f \nabla^2 f - f_\rho^2 - f_z^2 + u_\rho^2 + u_z^2 = 0 \quad (43 a)$$

bulunur. (42) deki u fonksiyonu için Laplace denklemi ve (42) denklemi kullanılarak;

$$f \nabla^2 u = 2 f_\rho u_\rho + 2 f_z u_z \quad (43 b)$$

elde edilir. (40 a,b) den de;

$$\mu'_\rho = \frac{1}{2} \rho f^{-2} (f_\rho^2 - f_z^2) + \frac{1}{2} \rho f^{-2} (u_\rho^2 - u_z^2) \quad (44 a)$$

$$\mu'_z = \rho f^{-2} f_\rho f_z + \rho f^{-2} (u_\rho u_z) \quad (44 b)$$

bulunur. Herhangi bir H kompleks fonksiyonunu;

$$H = f + iu \quad (45)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$(\operatorname{Re} H) \nabla^2 H = H_\rho^2 + H_z^2 \quad (46)$$

şeklinde olur. Burada ∇^2 silindirik koordinatlardaki Laplace operatörüdür.

Bilinmeyen H fonksiyonunu başka bir bilinmeyen ξ fonksiyonu cinsinden;

$$H = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad (47)$$

şeklinde tanımlanabilir. (46) ve (47) denklemlerinden;

$$(\xi \xi^* - 1) \nabla^2 \xi = 2 \xi^* (\xi_\rho^2 + \xi_z^2) \quad (48)$$

elde edilir. Burada ξ^* , ξ' nin kompleks eşleniğidir. (ρ, z) silindirik koordinatlardan sferoidal (x, y) koordinatlara

$$\rho = (x^2 - 1)^{1/2} (1 - y^2)^{1/2}, \quad z = xy \quad (49)$$

dönüşümleriyle geçilebilir. (49) dan x ve y için çözersek;

$$R^{(\pm)} = [\rho^2 + (z \pm 1)^2]^{1/2} \quad (50 a)$$

bulunur. (49) ve (50 a) kullanılarak x ve y ;

$$x = \frac{1}{2}(R^{(+)} + R^{(-)}), \quad y = \frac{1}{2}(R^{(+)} - R^{(-)}) \quad (50 b)$$

şeklinde bulunur. (48) denklemini x ve y cinsinden;

$$\begin{aligned} & (\xi \xi^* - 1) [(x^2 - 1) \xi_{xx} + 2x \xi_x + (1 - y^2) \xi_{yy} - 2y \xi_y] \\ & = 2 \xi^* [(x^2 - 1) \xi_x^2 + (1 - y^2) \xi_y^2] \end{aligned} \quad (51)$$

şeklinde yazılabilir. (48) ve (51) denklemleri (39 a, b) Einstein alan denklemlerinin Ernest formlarıdır. (42) ve (44 a, b) denklemleri x ve y cinsinden

$$\omega_x = (1 - y^2)f^{-2}u_y, \quad \omega_y = (1 - x^2)f^{-2}u_x \quad (52)$$

$$\mu'_x = \frac{(1 - y^2)f^{-2}}{2(x^2 - y^2)} \left[\begin{array}{l} x(x^2 - 1)(f_x^2 + u_x^2) + x(y^2 - 1)(f_y^2 + u_y^2) \\ - 2y(x^2 - 1)(f_x f_y + u_x u_y) \end{array} \right] \quad (53 a)$$

$$\mu'_y = \frac{(x^2 - 1)f^{-2}}{2(x^2 - y^2)} \left[\begin{array}{l} y(x^2 - 1)(f_x^2 + u_x^2) + y(y^2 - 1)(f_y^2 + u_y^2) \\ - 2x(1 - y^2)(f_x f_y + u_x u_y) \end{array} \right] \quad (53 b)$$

şeklinde yazılabilir. (51) denkleminin çözümünün;

$$\xi = px - iqy \quad (54)$$

olduğunu varsayalım. Burada p ve q sabitler olmak üzere, $p^2 + q^2 = 1$ şeklindedir. Denklem (45), (47) ve (54) den;

$$f = \frac{p^2 x^2 + q^2 y^2 - 1}{(px + 1)^2 + q^2 y^2}, \quad u = \frac{-2qy}{(px + 1)^2 + q^2 y^2} \quad (55)$$

elde edilir. Denklem (52) ve (55) den;

$$\omega = \frac{2qp^{-1}(1 - y^2)(px + 1)}{p^2 x^2 + q^2 y^2 - 1} + \omega_0 \quad (56)$$

elde edilir. Burada ω_0 bir sabittir. Denklem (53 a, b) den A keyfi bir sabit olmak üzere

$$e^{\mu'} = \frac{A(x^2 p^2 + q^2 y^2 - 1)}{x^2 - y^2} \quad (57)$$

elde edilir. (57) , (55) ve $e^{\mu'} = fe^{\mu}$ tanımından;

$$e^{\mu} = \frac{A[(px+1)^2 + q^2y^2]}{x^2 - y^2} \quad (58)$$

denklemini elde edilir. Şimdi x ve y ye bağlı r ve θ koordinatlarını;

$$px + 1 = pr \quad , \quad y = r \cos \theta \quad (59)$$

ve p ve q ' ya bağlı m ve a sabitlerini;

$$p^{-1} = m \quad , \quad p^{-1}q = a \quad , \quad m^2 - a^2 = 1 \quad (60)$$

şeklinde tanımlayalım. Kerr çözümünün kütle ve açısal momentumu sırasıyla m ve ma şeklinde olacaktır. Kerr çözümünü Boyer ve Lindquist (1967) koordinatları cinsinden yazmak için (26) metriğini;

$$ds^2 = f dt^2 - 2k dt d\phi - l d\phi^2 - e^{\mu} (d\rho^2 + dz^2) \quad (26)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. (49), (59) ve (60) denklemlerinin yardımıyla ρ ve z (59) denkleminin tanımlanan r, θ cinsinden;

$$\rho = (r^2 - 2mr + a^2)^{1/2} \sin \theta \quad , \quad z = (r - m) \cos \theta \quad (61)$$

şeklinde verilir. (59) ve (61) denklemlerinin kullanılmasıyla, (58) denklemini;

$$e^{\mu} = \frac{a}{m^2} \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{(r - m)^2 + (a^2 - m^2) \cos^2 \theta} \quad (62)$$

şeklinde yazılabilir. (61) denkleminin diferansiyeli alınırsa;

$$d\rho^2 + dz^2 = \left[\frac{(r-m)^2 + (a^2 - m^2)\cos^2\theta}{(r^2 - 2mr + a^2)^{-1} dr^2 + d\theta^2} \right] \quad (63)$$

elde edilir. (38) denkleminde (59) ve (60) ifadeleri kullanılırsa;

$$k = 2amr \sin^2\theta (r^2 + a^2 \cos^2\theta)^{-1} \quad (64)$$

elde edilir. (36) denkleminde yerine yazalım.

$$l = 2ma^2r \sin^4\theta (r^2 + a^2 \cos^2\theta)^{-1} + (r^2 + a^2)\sin^2\theta \quad (65)$$

denklemleri elde edilir. Son satırda bahsedilen benzerlikten (62) ve (65) denklemlerinin birleştirilmesinden Kerr çözümünün standart formunu;

$$ds^2 = \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi^2 - c^2 dt^2 + \frac{2mr}{\Sigma} (a \sin^2\theta d\phi - c dt)^2 \quad (66)$$

şeklinde bulunur (Kerr,1963). Burada; $\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta$, $\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2$ dir. Burada; m , kütle ve ma , kaynağın açısal momentumudur (Islam,1985).

4.1.4. Kerr-Newmann Çözümü

Dönen yüklü kara delik çözümü elde etmek için Einstein alan denklemlerinin sağ tarafındaki madde yerine (15) denkleminde tanımlanan elektromanyetik alan, sol taraftaki uzay-zaman yerine (26) metriği ile tanımlanan uzay-zaman alınır, Einstein alan denklemleri;

$$f \nabla^2 f - f_\rho^2 - f_z^2 + \rho^{-2} f^4 (\omega_\rho^2 + \omega_z^2) = 2f (\Phi_\rho^2 + \Phi_z^2 + \Phi_\rho'^2 + \Phi_z'^2) \quad (67 a)$$

$$f \Delta \omega + 2f_\rho \omega_\rho + 2f_z \omega_z = 4\rho f^{-1} (\Phi_z' \Phi_\rho - \Phi_\rho' \Phi_z) \quad (67 b)$$

$$f \nabla^2 \Phi = f_\rho \Phi_\rho + f_z \Phi_z + \rho^{-1} f (\omega_z \Phi_\rho' - \omega_\rho \Phi_z') \quad (67 c)$$

$$f \nabla^2 \Phi' = f_\rho \Phi'_\rho + f_z \Phi'_z + \rho^{-1} f (\omega_\rho \Phi_z - \omega_z \Phi_\rho) \quad (67 d)$$

$$\text{Burada; } \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \text{ve} \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \text{dir.}$$

Aynı zamanda yukarıdaki denklemler elde edilirken (16) denklemindeki (A_1, A_2, A_3, A_4) 4-lü potansiyellerin, Φ ve Φ' skaler alanlar ve f, ω metrik fonksiyonlar cinsinden;

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = 0 \quad \frac{\partial A_3}{\partial \rho} &= \omega \Phi_\rho + \rho f^{-1} \Phi'_z \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} &= \omega \Phi_z - \rho f^{-1} \Phi'_\rho, \quad A_4 = \Phi \end{aligned} \quad (68)$$

karşılıkları kullanılmıştır. $\Phi = \Phi' = 0$ olduğunda (67 a), (67 b) denklemleri (39 a, b) denklemlerine indirgenir.

Kerr çözümü için yapılan işlemler bu denklemler için yapılırsa;

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[1 - (2mr - e^2) \Sigma^{-1} \right] dt^2 - \sin^2 \theta \left[r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta (2mr - e^2) \Sigma^{-1} \right] d\phi^2 \\ & - 2a \sin^2 \theta (2mr - e^2) \Sigma^{-1} d\phi dt - \Sigma (\Delta^{-1} dr^2 + d\theta^2) \end{aligned} \quad (69)$$

şeklindeki Kerr - Newmann çözümü elde edilir. Burada;

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv r^2 + a^2 + e^2 - 2mr$$

şeklindedir. Yukarıdaki çözüm $e = 0$ olduğunda (66) denkleminde verilen Kerr çözümüne dönüşür (Islam,1985).

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

5.1 Einstein Alan Denklemleri

Statik küresel simetrik uzay-zaman için metrik;

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (70)$$

şeklindedir. Burada koordinatlar, $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\phi$ ve $x^4=t$ şeklindedir. Yüklü sicim toz bulutu için Einstein alan denklemleri;

$$G_b^a = R_b^a - \frac{1}{2} \delta_b^a R = 8\pi \left[\rho_s (u^a u_b - x^a x_b) - \frac{1}{4\pi} (F_{bc} F^{ac} - \frac{1}{4} \delta_b^a F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \right] \quad (71)$$

şeklindedir. Burada ρ_s sicim bulutun gerilim yoğunluğu, u_a zamansal 4-lü birim hız vektörü, x^a sicim bulutunun yönünü gösteren uzaysal birim vektördür.

$$u^a = \delta_4^a e^{\frac{-\nu}{2}} \quad \text{ve} \quad x^a = \delta_1^a e^{\frac{-\lambda}{2}} \quad \text{dir.}$$

F_{ab} ise elektromanyetik alan tensörüdür ve A_a 4-lü potansiyeller cinsinden

$$F_{ab} = A_{a;b} - A_{b;a} = A_{a,b} - A_{b,a}$$

şeklinde tanımlanır. 4-lü potansiyel A_a $(0,0,0\phi(r))$ şeklinde seçilebilir. (70), (71) denklemlerinden ve Maxwell denklemlerinden Einstein alan denklemleri;

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi \rho_s + E^2 \quad (72)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi \rho_s + E^2 \quad (73)$$

$$\frac{e^{-\lambda}}{2} \left(v' + \frac{v'^2}{2} + \frac{v' - \lambda'}{r} - \frac{v'\lambda'}{2} \right) = E^2 \quad (74)$$

$$[r^2 E(r)]' = 4\pi\rho_e r^2 \quad (75)$$

şeklinde bulunur. Burada (') r ' ye göre türevi gösterir. ρ_e , yük yoğunluğunu ve E ise elektrik alan yoğunluğunu gösterir. Ve

$$\begin{aligned} F_{41}F^{41} &= -E^2 \\ E(r) &= e^{-\left(\frac{v+\lambda}{2}\right)} \phi'(r) \\ \phi'(r) &= F_{14} = -F_{41} \end{aligned} \quad (76)$$

olarak bulunur. (75) denkleminin integrali alınırsa $E = \frac{Q}{r^2}$ bulunur. Burada

$$Q = \int_0^r \rho_e r^2 dr \text{ dir.}$$

5.2 Alan Denklemlerinin Çözümleri

Burada alan denklemlerinin çözümünü elde etmek için (1) denklemini ile tanımlanan konformal simetrikler kullanılacaktır. (1) ve (70) denklemlerinden;

$$\xi^1 v' = \psi \quad (77)$$

$$\xi^4 = c = \text{sabit}, \quad \xi^2 = \text{sabit}, \quad \xi^3 = \text{sabit} \quad (78)$$

$$\xi^1 = \frac{\psi r}{2} \quad (79)$$

$$\lambda' \xi^1 + 2\xi_{,1}^1 = \psi \quad (80)$$

denklemleri elde edilir. Burada (,) parçalı türevi göstermektedir. Bu denklemler çözümlürse;

$$e^\nu = A^2 r^2 \quad (81)$$

$$\psi = B e^{-\lambda/2} \quad (82)$$

$$\xi^a = c \delta_0^a + \left(\frac{\psi r}{2}\right) \delta_1^a \quad (83)$$

Burada A ve B'ler integral sabitleridir. (80) ve (81) denklemi (72) ve (74) Einstein alan denklemlerinde yerine koyulursa;

$$8\pi\rho_s + E^2 = \left(\frac{1}{r^2}\right)\left(1 - \frac{\psi^2}{B^2}\right) - \frac{2\psi\psi'}{B^2 r} \quad (84)$$

$$8\pi\rho_s + E^2 = \left(\frac{1}{r^2}\right)\left(1 - \frac{3\psi^2}{B^2}\right) \quad (85)$$

$$E^2 = \frac{\psi^2}{B^2 r^2} + \frac{2\psi\psi'}{B^2 r} = \frac{\psi}{B^2 r} \left(\frac{\psi}{r} + 2\psi' \right) \quad (86)$$

bulunur.

(84) ve (85) denklemlerinin sol tarafı eşit olduğundan sağ tarafının eşit olması gerekir. Bu nedenle (84) ve (85) denklemlerinden

$$\psi = c_1 r \quad (87)$$

elde edilir. (87) denklemi (84)-(86) denklemlerinde kullanılırsa;

$$\rho_s = \frac{1}{8\pi} \left\{ -\frac{6c_1^2}{B^2} + \frac{1}{r^2} \right\} \quad (88)$$

$$E^2 = \frac{3c_1^2}{B^2} \quad (89)$$

elde edilir. Bu durumda (70) metriği

$$ds^2 = Ar^2 dt^2 - \frac{B^2}{c_1^2 r^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (90)$$

şeklinde olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

(90) denkleminde elde edilen çözümün nasıl bir Kara Delik oluşturacağını görmek için bu metrik ile yüklü kara delikleri temsil eden Reissner-Nordström metriğini (25) denklemi ile karşılaştırmamız gerekir. Bu nedenle, (90) metriğinin (25) metriği ile $r = r_0$ sınırında uyuşması gerekir. Bunun için $r = r_0$ 'da g_{ab} metrik potansiyeli ve F_{ab} elektro manyetik alan tensörü sürekli olmalıdır.

a) $r = r_0$ da g_{ab} gravitasyonel potansiyellerinin sürekli olması için (90) ve (25) denkleminin karşılaştırılmasından ($G=I$)

$$A^2 r_0^2 = \frac{c^2 r_0^2}{B^2} = 1 - \frac{2M}{r_0} + \frac{Q^2}{r_0^2} \quad (91)$$

olmalıdır.

b) $r = r_0$ da aynı zamanda F_{ab} elektro-manyetik alan tensörünün de sürekli olması için (89) denklemi ve $E(r_0) = Q/r_0^2$ denklemlerinden;

$$\frac{Q^2}{r_0^2} = \frac{3c^2 r_0^2}{B^2} \quad (92)$$

elde edilir. Bu ifade (91) denkleminde kullanılırsa;

$$\frac{M}{r_0} = \frac{1}{2} + \frac{c_1^2 r_0^2}{B^2} \quad (93)$$

veya (92) ve (93) denklemlerinden

$$M = \frac{r_0}{2} + \frac{1}{3} \frac{Q^2}{r_0} \quad (94)$$

olarak bulunur. (94) denkleminde görüleceği gibi toplam kütledeki artış yük yoğunluğu tarafından oluşturulmaktadır..

(92) ve (93) denklemleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} g_{ab}^{dış} &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \\ &= 1 - \frac{r_0}{r} - \frac{2c_1^2 r_0^3}{B^2 r} + \frac{3c^2 r_0^4}{B^2 r^4} = 0 \end{aligned} \quad (95)$$

elde edilir.

ÖZET

Bu çalışmada, öncelikle Schwarzschild, Reissnerr-Nordström, Kerr, Kerr-Newmann Kara Delik çözümleri özetlenmiştir. Daha sonra statik küresel simetrik uzay-zamanda yüklü sicim bulutu göz önüne alınarak Einstein alan denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlere tam çözümler elde etmek için uzay-zamana ait konformal simetriler kullanılmıştır. Son olarak ta elde edilen çözümler diğer çözümlerle karşılaştırılarak bu çözümlerin geometrik ve fiziksel özellikleri incelenmiştir.

SUMMARY

In this study, firstly, black hole solutions of Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr, Kerr-Newmann have been summarized. After then, Einstein field equations have been obtained by considering charged string in the static spherical symmetric space-time. Conformal symmetries belonging to this space-time have been used to get exact solutions for this equations. Finally, physical and geometrical features of these solutions have been examined by comparing obtained solutions with the other solutions.

TEŞEKKÜR

Lisans ve Y¼ksek lisans ¼ğrenimin boyunca alıŐmalarımda bana destek veren ve tezimin oluŐumunda her aşamada desteğini esirgemeyen danıŐmanım Doç. Dr. İhsan YILMAZ' a, bilgisayar programlarının hazırlanması, d¼zenlenmesi ve sonuçların analizi sırasında yardımlarını esirgemeyen sayın Doç. Dr. Uęur CAMCI' ya, Doç. Dr. H¼sn¼ BAYSAL' a ve Doç. Dr. İsmail TARHAN'a, araştırma konumdaki denklemlerin öz¼mlerinde beni yalnız bırakmayan ArŐ. Gör. Melis ULU ve ArŐ. Gör. Sezgin AYG¼N'e, ayrıca yazım aŐamasında bilgisayar desteği ile bana kolaylıklar sağlayan Levent ¼ZAę ve ArŐ. Gör. ¼zlem KOCAHAN' a t¼m samimiyetimle teşekkür etmeyi borç bilirim.

KAYNAKLAR

- Akhmedov, E. T., 2000. Int. Journal of Modern Physics, A 15, 1.
- Baysal, H. ve Yılmaz, İ., 2002. Class. Quantum Grav. 19, 6435.
- Baysal, H., Camcı, U., Yılmaz, İ., Tarhan, İ. ve Yavuz, İ., 2002. Int. J. Mod. Phys D 11, 463.
- Cahill, M.E. ve Taub, A.H., 1971. Communications in Mathematical Physics, 21, 1.
- Carot, J., da Costa, J. ve Vaz, E. .G. L. R., 1994. J. Math. Phys., 35, 4832.
- Coley, A. A. ve Tupper, B. O. J., 1989. J. Math. Phys., 30, 2616.
- Coley, A. A. ve Tupper, B. O. J., 1990a. Clas. Quantum Grav. 7, 1961.
- Coley, A. A. ve Tupper, B. O. J., 1990b. Gen. Rel. Grav., 22, 241.
- Coley, A. A. ve Tupper, B. O. J., 1990c. Clas. Quantum Grav. 7, 2195.
- Demianski, M., 1985. Relativistic Astrophysics. Pergamon Press.
- Duggal, K. L., 1992, J. Math. Phys., 33, 2989.
- Duggal, K. L., 1993, Acta Appl. Math., 31, 225.
- Hawking, S. W. ve Israel, W., 1979, General Relativity: An Einstein Centenary Survey, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Herrera, L., Jimenez, J., Leal, L., Ponce de Leon, Esculpi, M. Ve Galina, V., 1984, J. Mathematical Physics., 25, 3274.
- Herrera, L., ve Ponce de Leon, J., 1985, J. Math. Phys. , 26, 2302.

- Hooft, G., 2004. arXiv: gr-qc / 0401027.
- Islam, J., N., 1985. Rotating Fields in General Relativity, 25, 85.
- Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E., MacCallum, M. ve Schmutzer, E., 1980. Exact Solutions of Einstein's Field Equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Kim, N., Kim, Y. ve Kimm, K. 1997. qr-qc / 9707011
- Maartens, R., Mason, D. P. ve Tsamparlis, M., 1986, J. Math. Phys., 27, 2987.
- Mason, D. P. ve Tsamparlis, M., 1985. J. Math. Phys. 26, 2881.
- Mason, D. P. ve Maartens, R., 1987. J. Math. Phys., 28, 2182.
- McIntosh, C. B. G., 1976. Gen. Rel. Grav., 7, 199.
- Saridakis, E. ve Tsamparlis, M., 1991. J. Math. Phys., 32, 1541.
- Sharma, R. ve Duggal, K. L., 1994. Contemporary Mathematics,, 170, 215.
- Wainwright, J. ve Yaremovich, P. E. A., 1976. Gen. Rel. Grav., 7, 345.
- Yavuz, İ. ve Yılmaz, İ., 1997. Gen. Rel. Grav. 29, 1295.
- Yılmaz, İ., Tarhan, İ., Yavuz, İ., Baysal, H. ve Camcı, U., 1999. İnt. J. Mod. Phys. D8, 659.
- Yılmaz, İ., 2001. Int. J. Mod. Phys. D10, 681.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: İ. Sevinç TUNCEL

Doğum Yeri ve Yılı: İzmir / 1978

Adres: Pirireis Sitesi A / 4 Kepez / Çanakkale

Eğitim Durumu:

1984 – 1989: Namık Kemal İlkokulu / İzmir

1989 – 1992: Necatibey İlköğretim Okulu / İzmir

1992 – 1995: V. Vecdi Gönül Lisesi / İzmir

1996 – 2000: Çanakkale On Sekiz Mart Üniversitesi

Çalışma ve İlgi Alanları:

Bilgisayar Kullanım Deneyimi