FOURİER SERİLERİNİN TOPLANABİLİRLİĞİ ÜZERİNE

Baki KESKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

2000

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

FOURİER SERİLERİNİN

TOPLANABİLİRLİĞİ ÜZERİNE

98108

Baki KESKİN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
2000

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Ana Bilim Dalı'nda yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Üye: Doç. Dr. Yüksel ERGÜN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Necati Çelik

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 01.01.1994 tarihinde C.Ü.Fen-Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan " Yüksek Lisans ve Doktora Tez Yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FOURİER SERİLERİNİN TOPLANABİLİRLİĞİ ÜZERİNE

Baki KESKİN

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustaf YILDIRIM

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Dizi uzayları, Matris dönüşümleri ve Fourier serisine ilişkin kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde H.P. Dikshit tarafından verilen Fourier serilerinin Nörlund toplanabilirliğine ilişkin bir dizi teorem verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise bir içerme teoremi verilmiş. Buna dayanılarak ikinci bölümde verilen bazı teoremlerin kısa ispatları tekrar ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise Fourier serilerinin Genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirliğine ilişkin teoremler ve ispatları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fourier serileri, Nörlund toplanabilme, Genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme, Fourier effektive, f-effektive, f-regüler L-regüler, Mutlak Nörlund Toplanabilme, total-effektive, K_α-effektive, K_α-regüler, üçgen matrisler, eşlenik serileri.

ABSTRACT

MsC Thesis

ON THE SUMMABİLİTY OF FOURİER SERIES

Baki KESKİN

Graduate School of Natural and Applied

Sciences of Department of Mathematics

Advisor: Ass. Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

This thesis of four chapters.

In the first chapter, short prelimanaries which related to sequence spaces, matrix transformations and Fourier series have been given.

In the second chapter, some theorems about the Nörlund summability of Fourier series given by H. P. Dikshit have been investigated.

In the third chapter, first, an inclusion theorem is given. And then using this theorem , some theorem of the second chapter are again investigated.

In the fourth chapter, the theorems and their proofs about the Generalized Nörlund summability of Fourier series are given.

Keywords: Fourier series, Nörlund summability, Generalized Nörlund summability, Fourier effektive, f-effektive, f-regular L-regular, Absolute Nörlund summability, total-effektive, K_α-effektive, K_α-regülar, triangular matrices, conjugate series.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM ve katkılarından dolayı Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Rauf EMİROV 'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

GİRİŞ

Fourier serileri ilk olarak 1747 de D. Alembert tarafından ortaya atılmış fakat o tarihlerde fazla ilgi görmemiştir. Daha sonra, Euler ve D. Bernoulli tarafından tekrar ele alınmasına rağmen, Fourier serilerinin çalışılmasının Fourier (1768-1830) tarafından başladığı kabul edilmiştir.

Fourier serilerinin yakınsaklığı ve bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin tekliği yıllarca çalışılmıştır. 1854 te Riemann tarafından $f(x)$ in Fourier serisinin $f(x)$ e yakınsaması için şartlar verilmiştir. 1881 yılında Jordan; f_1 ve f_2 monoton artan, $f = f_1 - f_2$ ve f sınırlı olmak üzere her $x \in [-\pi, \pi]$ için $f(x)$ in Fourier serisinin $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ ye yakınsadığını göstermiştir.

1905 yılında Fejer $f \in C[-\pi, \pi]$ olmak üzere $f(x)$ in Fourier serisinin Cesaro dizisi f ye düzgün yakınsak olduğunu göstermiştir. Riesz ise bu sonucu her $\alpha > 0$ sayısı için (C, α) ya genişletmiştir. Bundan sonra birçok araştırmacı benzer sonuçları garanti edecek şekilde yeterli koşullar koymuşlardır. Daha sonraki yıllarda bu şartları daha aza indirgemek için bir çok yayın yapılmış f nin süreklilik şartı yerine f ye bağlı olarak üretilmiş serilerin toplanabilirliği ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Bu tip çalışmaların başlangıcı, Hille ve Tamarkin (1932) olarak kabul edilir.

Bu çalışmada Fourier serilerinin Nörlund toplanabilirliğine ilişkin sonuçlar incelenmiştir.

1 Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Bu bölümde diger bölümlerinde kullanılacak olan bazı dizi uzayları ve bu dizi uzayları arasında tanımlı matris dönüşümleri ile ilgili tanımlar ve teoremler verilecektir.

1.1 Dizi Uzayları

Bu çalışmada kullanacağımız bazı dizi uzaylarının tanımlarını verelim.

Tanım 1.1.1 *Kompleks ya da reel terimli tüm dizilerin uzayını s, sınırlı diziler uzayını ℓ_∞, yakınsak diziler uzayını c, sıfıra yakınsak diziler uzayını c_0 ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p.inci kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayını ℓ_p ile göstereceğiz. Yani*

$$\ell_\infty := \{x = (x_n) \mid sup_n \mid x_n \mid < \infty \} \quad (1.1.1)$$

$$c := \{x = (x_n) \mid lim_n x_n = m, mevcut \} \quad (1.1.2)$$

$$c_0 := \{x = (x_n) \mid lim_n x_n = 0 \} \quad (1.1.3)$$

$$\ell_p := \{x = (x_n) \mid \sum_n \mid x_n \mid^p < \infty \} \quad (1.1.4)$$

dir. c,c_0 ve ℓ_∞ uzayları *(1.1.5)*

$$\| x \|_\infty = sup_n \mid x_n \mid \quad (1.1.5)$$

normuyla, ℓ_p uzayı

$$\| x \|_p = (\sum_n \mid x_n \mid^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.6)$$

normuyla birlikte birer Banach uzayıdırlar.

Tanım 1.1.2 *$A \subset R$ ve $F(A)$ da A üzerine tanımlı, reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.*

$$s : N \to F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi adı verilir.

Tanım 1.1.3 *(Noktasal Yakınsaklık) f_n dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır* $\Longleftrightarrow$ $\forall\epsilon > 0$ *ve herbir* $x \in A$ *için* $\exists n_0$ *öyle ki,* $\forall n > n_0$ *için*
$| f_n(x) - f(x) | < \epsilon$

Tanım 1.1.4 *(Düzgün Yakınsaklık) (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır* $\Longleftrightarrow$ $\forall\epsilon > 0$ *için* $\exists n_0$ *öyleki* $\forall n > n_0$ *ve* $\forall x \in A$ *için*

$| f_n(x) - f(x) | < \epsilon$

Teorem 1.1.5 *(f_n) dizisi $A \in s$ üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun*

$$s_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

biçiminde tanımlanan (s_n) dizisine $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. $\sum f_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul (s_n) dizisinin A üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır.

Teorem 1.1.6 *Eğer $\sum_n a_n^2$ mutlak yakınsak ve $\forall n > n_0$ için $| a_n | < 1$ ise $P_n = \prod_{r=n_0+1}^{n} (1 + a_r)$ kısmi çarpımları ile $s_n = \sum_{r=n_0+1}^{n} a_r$ kısmi toplamları*

$$P_n \sim e^{s_n}$$

şeklinde bağlantılıdır. (Knopp, 1947)

1.2 Matris Dönüşümleri

Bir matris dönüşümünün, c_0, c, ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ gibi dizi uzayları üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüm belirlemesi için gerekli ve yeterli koşullar bilinmekte olup, bunlar bu kısımda ispatsız olarak verilecektir.

$A = (a_{nk})$, $(n, k = 0, 1, 2, ...)$ *kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Verilen bir* $x = (x_n)$ *dizisi için*

$$y_n := A_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad (n = 0, 1, 2, ...) \qquad (1.2.1)$$

mevcut ise $Ax = (A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer X ve Y, s nin iki altcümlesi olmak üzere her $x \in X$ için $(A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcut ve $(A_n(x)) \in Y$ ise A matrisi X den Y ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A \in (X,Y)$ ile gösterilir. Toplamı veya limiti koruyan matrislerin sınıfı ise (X,Y,p) ile gösterilir.

Eğer $A \in (c,c)$ ise A ya konservatif, $A \in (c,c;p)$ ise A ya regüler matris denir. (1.2.1) serisi her n için yakınsak olacağından matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır. X ve Y birer normlu uzaylar olmak üzere $B(X,Y)$ ile X den Y ye tüm sınırlı lineer operatörlerin cümlesi ve $B(X)$ ile X den X e tüm sınırlı lineer operatörlerin cümlesi gösterilecektir.

Teorem 1.2.1 *$A \in B(\ell_\infty)$ olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty \qquad (1.2.4)$$

olmasıdır. (Maddox, 1970, sh.174)

Teorem 1.2.2 *$A \in B(\ell_1)$ olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\| A \|_{\ell_1} := sup_k \sum_n | a_{nk} | < \infty \qquad (1.2.5)$$

olmasıdır. (Maddox, 1970, sh.167)

Teorem 1.2.3 *$A \in B(c_0)$ olması için gerekli ve yeterli koşul*

(i) $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty$

(ii) $lim_n a_{nk} = 0$ *(her sabit k için)* (1.2.6)

özelliklerinin gerçeklenmesidir. (Maddox, 1970, sh.220)

Teorem 1.2.4 (Kojima-Schur) *$A \in B(c)$ olması için gerekli ve yeterli koşul*

(i) $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty$

(ii) Her k için $lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \alpha$ *(mevcut)* (1.2.7)

(iii) Her k için $lim_n a_{nk} = \alpha_k$ *(mevcut)* (1.2.8)

özelliklerinin gerçeklenmesidir. (Maddox, 1970, sh.170)

Tanım 1.2.5 (Toplanabilirlik Alanı) $A = (a_{nk})$, $(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$ *kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Bu durumda*

$$c_A := \{\ x \in s\ :\ Ax \in c\ \} \tag{1.2.9}$$

cümlesine A matrisinin yakınsaklık alanı(veya toplanabilirlik alanı) denir.

Eğer $c_A \subset c_B$ *ise B, A dan daha kuvvetlidir denir. Eğer* $c_A = c_B$ *ise A ile B eşkuvvetlidir denir.*

Tanım 1.2.6 (Normal Matris) *Eğer* $k > n$ *için* $a_{nk} = 0$ *ve her n için* $a_{nn} \neq 0$ *ise bu durumda A ya bir normal matris (veya alt üçgen matris) denir.*

Teorem 1.2.7 $A \in (c, c; p)$ *olması için gerekli ve yeterli koşul*

(i) $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k \mid a_{nk} \mid < \infty$

(ii) $lim_n a_{nk} = 0$ *(her sabit k için)*

(iii) $lim_n \sum_k a_{nk} = 1$ *(1.2.10)*

özelliklerinin gerçeklenmesidir. (Maddox, 1970, sh.165)

Tanım 1.2.8 *Bir* $x = (x_n)$ *dizisini, onun aritmetik ortalaması olan*

$$y = y_n = \frac{x_0 + x_1 + ... + x_n}{n+1} \tag{1.2.2}$$

dizisine dönüştüren operatöre Cesàro operatörü denir ve $(C, 1)$ *veya* C_1 *ile gösterilir. Açıkça bu operatöre karşılık gelen matris*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

ile verilir.

Teorem 1.2.9 $(C, 1)$*metodu regülerdir. (Goldberg, 1965)*

Tanım 1.2.10 $\sum a_n$ *reel sayı dizisi olsun. Eğer* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *olmak üzere ,* $s_n \to s(C,1)$ *ise* $\sum a_n$ *serisine* $(C,1)$ *toplanabilirdir denir ve* $\sum a_n = s(C,1)$ *şeklinde yazılır.*

Teorem 1.2.11 *Herhangi bir* $\sum a_n$ *serisi yakınsak ise* $\sum_n a_n$ *,* $(C,1)$ *toplanabilirdir ve* $\sum a_n = s = \sum a_n, (C,1) dir.$ *(Goldberg, 1965)*

Şimdi Cauchy anlamında yakınsak olmayan $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *serisini ele alalım.*

Örnek 1.2.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n, s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 0 & ,n \; cift \; ise \\ -1 & ,n \; tek \; ise \end{cases}$ *dir. Böylece*

$$t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \begin{cases} \frac{-1}{2} & ,n \; cift \; ise \\ \frac{-n}{2n-1} & ,n \; tek \; ise \end{cases} \longrightarrow \frac{-1}{2}$$

dir, yani $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{-1}{2}$ *,* $(C,1)$ *ve* $\sum_n(-1)^n = \dfrac{-1}{2}(C,1)$ *dir.*

Böylece Cauchy anlamında yakınsak olmayan $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *serisi* $\dfrac{-1}{2}$ *değerine* $(C,1)$ *yakınsak oldu.*

Teorem 1.2.13 $\sum_n a_n(C,1)$ *ve* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *ise* $\sum_n a_n < \infty$ *dir. [Goldberg, 1965, sh.]*

Tanım 1.2.14 *(***Nörlund Matrisleri***) Bu şekildeki limitleme tanımı ilk olarak G.F. Woroni tarafından, bazı* α *'lar için* $p_n > 0$ *ve* $n^{-\alpha}P_n$ *ifadesi sınırlı olacak şekilde verilmiştir. [Extension of the notion of the limit of the sum of terms of an infinite series (in Russian). Proceedings of the Eleventh Congress(1901) of Russian Naturalists and Physicians, St. Petersburg, 1902, pp. 60.61. Annotated English translation by J.D. Tamarkin, Annals of Mathematics, (2) vol 33(1932), pp. 422-428]*

Bu tanım, N.E. Nörlund tarafından [N.E. Nörlund , sur une application des functions permtables, Lunds Universities Arsskrift, (N.F.), avd. z, 16, No:3(1920)] daha sonra genelleştirilmiştir.

Daha sonra M.Riesz tarafından [G.H. Hardy, Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series, Proceedings of the London Mathematical Society, 2, vol.8(1910), 301-320] ' de

$$(R,p_\nu)-\lim x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_\nu}\sum_{k=0}^{n}p_kx_k \tag{1.2.11}$$

ile Riesz metodu tanımlanmıştır. Riesz metodunun Regülerlik koşulları;

$$(i)\quad \sum_{k=0}^{n}|p_k|<M\,|P_n| \tag{1.2.12}$$

$$(ii)\quad P_n\to\infty \tag{1.2.13}$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.15 *(p_n) ,$p_0=1$ ile bir kompleks dizi olsun. $P_n=\sum_{k=0}^{n}p_k$ alalım. Kabul edelim ki $\forall n$ için $P_n\neq 0$ olsun. $A=(N,p)$ Nörlund matrisi; $k>n$ için 0, $0\le k\le n$ için $a_{nk}=\dfrac{p_{n-k}}{P_n}$ formülü ile tanımlanır.*

Verilen bir (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}x_k \tag{1.2.14}$$

limiti mevcut ise (x_n) dizisine Nörlund Toplanabilirdir denir ve

$$(N,p_v)-\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}x_k \tag{1.2.15}$$

ile gösterilir.

$\sum x_n$ serisi için $s_n=\sum_{k=0}^{n}x_k$ olmak üzere, eğer $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}s_k=s$ ise $\sum x_n=s,(N,p)$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.16 *$A=(N,p)$ Nörlund ortalamasının konservatif olması için gerek ve yeter koşul*

(i) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{P_n}=\lambda$ *(mevcut),ve* *(1.2.16)*

(ii) Her n için $\sum_{k=0}^{n}|p_k|\le M\,|P_n|$ *(1.2.17)*

dır.

Ayrıca (N,p) metodunun regüler olması için gerek ve yeter kosul (i)' de $\lambda = 0$ olmasıdır.

ispat

$a_{n0} = \dfrac{p_n}{P_n} = 1 - \dfrac{P_{n-1}}{P_n}$ $(*)$ *dir. Buna göre;*

($:\Longrightarrow$) *A konservatif ise Teorem 1.2.5 in koşulları sağlanır.*

Teorem 1.2.5 in (iii) koşulundan $\forall k$ *için* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{P_n} = \alpha_k$ *(mevcut) ve Teorem 1.2.5 in (i) koşulundan,*

$$\| A \| = \sup_n \sum_k | a_{nk} | = \sup_n \frac{1}{| P_n |} \sum_{k=0}^{n} | p_k | < \infty \iff \frac{1}{| P_n |} \sum_{k=0}^{n} | p_k | = O(1)$$
$$\iff \sum_{k=0}^{n} | p_k | = O \, | P_n |$$

gerçeklenir.

($\Longleftarrow:$) *Kabul edelim ki Teoremimizin (i) ve (ii) şıkları gerçeklensin. (i) den $k = 0$ için* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{P_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n0} = \lambda$ *(mevcut).*

Aynı şekilde $\forall k$ *için* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} = a_k$ *mevcut olsun. Tümevarımdan dolayı* $a_{n,k+1} = \dfrac{p_{n-k-1}}{P_n} = \dfrac{p_{n-k-1}}{P_{n-1}} \dfrac{P_{n-1}}{P_n} =^{*'dan} a_{n-1,k} \dfrac{P_{n-1}}{P_n} \longrightarrow a_k(1-\lambda), (n \to \infty)$ *icin olur. Ayrıca*

$\sum\limits_{k=0}^{n} a_{nk} = \dfrac{1}{P_n} \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n-k} = \dfrac{1}{P_n} \sum\limits_{k=0}^{n} p_k = \dfrac{P_n}{P_n} = 1$ *olduğundan* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$ *dir.*

Nörlund Metodunda, eğer p_n pozitif reel sayı ise $\sum\limits_{k=0}^{n} | p_k | = O(| P_n |)$ *ifdesi otomatik olarak sağlanır ve* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{P_n} = 0$ *koşulu bu metodun regülerliği için gerek ve yeter koşuldur. (Hardy, 1949)*

(N,p_n) *ve* (N,q_n) *metotları regüler ise* $\dfrac{p_n}{P_n} \to 0$ *ve* $\dfrac{q_n}{Q_n} \to 0$ *dır.* $P(x) = \sum\limits_n P_n x^n$ *ve* $Q(x) = \sum\limits_n Q_n x^n$ *serileri* $| x | < 1$ *için yakınsaktır.*

$K(x) = \sum\limits_n k_n x^n = \dfrac{q(x)}{p(x)} = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ *şeklinde tanımlarsak, bu seri yeterince küçük x'ler için yakınsaktır.*

Şimdi şu teoremi verebiliriz.

Teorem 1.2.17 *(N,p_n) ve (N,q_n) metotları regüler ise H n den bağımsız olmak üzere $(N,p_n) \subset (N,q_n) \Longleftrightarrow$*

$$i) \quad |k_0|P_n + \ldots + |k_n|P_0 \leq HQ_n \tag{1.2.18}$$

$$ii) \quad \frac{k_n}{Q_n} \to 0 \tag{1.2.19}$$

dır. Eğer $P_n \to \infty$ ise (ii) şartına gerek yoktur. (Hardy,1949)

Tanım 1.2.18 *(**(C,k) Cesaro Metodu**)*

Eğer (N,p) Nörlund metodunda $p_n = \binom{n+k-1}{n}$ alınırsa $P_n = \binom{n+k}{n}$ olacaktır. Bu durumda (N,p) metodu (C,k) ile gösterilir ve (C,k)- Cesaro metodu denir.

Tanım 1.2.19 *$(C,1)$ matrisiyle (N,p_n) matrislerinin çarpımıyla tanımlanan ve genel terimi $0 \leq k \leq n$ olmak üzere $d_{nk} = \dfrac{1}{n+1}\sum_{r=k}^{n}\dfrac{p_{r-k}}{P_r}$ şeklinde verilen matrise $(C,1)(N,p_n)$ matrisi denir.*

$\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}$ olmak üzere $\{s_n\}$ dizisinin $(C,1)(N,p_n)$ ortalaması da:

$$t_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\sum_{r=k}^{n}\frac{p_{r-k}s_k}{P_r} = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{P_r}\sum_{k=0}^{r}p_{r-k}s_k \tag{1.2.20}$$

şeklinde olacaktır.

Tanım 1.2.20 *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi ve bu serinin $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisi verilmiş olsun. p ile $\{p_n\}$ ve q ile $\{q_n\}$ dizilerini gösterelim. Verilen iki p ve q dizisi için $(p*q)$*

$$(p*q)_n = \sum_{k=0}^{n}p_{n-k}q_k = \sum_{k=0}^{n}p_k q_{n-k} \tag{1.2.21}$$

şeklinde tanımlanır.

Bütün n' ler için $(p*q)_n \neq 0$ olduğunda $\{s_n\}$ dizisinin Genelleştirilmiş Nörlund dönüşümü $\{t_n^{p,q}\}$

$$t_n^{p,q} = \frac{1}{(p*q)_n}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}q_k s_k \tag{1.2.22}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n^{p,q} = s$ *ise* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *serisi veya* $\{s_n\}$ *dizisi* s *değerine* (N, p_n, q_n) *toplanabilirdir denir ve*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(N, p_n, q_n)$$

veya

$$s_n \to s(N, p_n, q_n) \tag{1.2.23}$$

ile gösterilir.

(N, p_n, q_n) *metodunun regülerliği için gerek ve yeter koşullar:*

$n \to \infty$ *iken bütün sabit* $k \geq 0$ *lar için*

i) $\quad \sum_{k=0}^{n} | p_{n-k} q_k | = O(| (p * q)_n |)$ (1.2.24)

ii) $\quad p_{n-k} = o(| (p * q)_n |)$ (1.2.25)

dir.(Borwein, 1958)

(N, p_n, q_n) *metodu her* n *için* $q_n = 1$ *alınırsa* (N, p_n) *Nörlund metodu elde edilebileceği açıktır. (Okuyama ve Ark.,1997)*

Lemma 1.2.21 *(Abel Lemması)* $\{p_n\}$ *bir dizi ve* $s_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$ *olmak üzere* $| s_k | \leq K$ *ve* $q_1 > q_2 > q_3 > ... > q_n > 0$ *ise* $| \sum_{k=1}^{n} p_k q_k | \leq K q_1$ *olur. (Notanson, 1974,sh. 273)*

1.3 Fourier Serileri

Tanım 1.3.1 $f \in L^2[-\pi, \pi]$ *olsun.*

$$\begin{cases} a_k &= \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, k = 1, 2, \ldots \\ b_k &= \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1.3.1}$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), (-\pi \leq x \leq \pi) \tag{1.3.2}$$

serisine f *fonksiyonunun Fourier serisi denir ve*

$$f \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

şeklinde yazılır.

Örnek 1.3.2 $f : [-\pi, \pi] \to R$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ *ise bu durumda*

$a_0 = 1$,$a_k = 0$ *ve* $b_k = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi} & ,k = 2n+1 \\ 1 & ,k = 2n \end{cases}$ *elde edilir, ve böylece*

$$f \cong \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)x$$

olacaktır.

$f(0) = 1$ *fakat seride* $f(0) = 1/2$ *olur. Yani* f *Fourier serisi* f*'e yakınsak değildir.*

Kabul edelim ki

$$f \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

şeklinde olsun.

Bu durumda a_k *ve* b_k *lar* f *nin Fourier katsayıları olmak üzere*

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx)$$

ise

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx dx \\
&+ \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx)) \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty}(\int_{-\pi}^{\pi}(a_k \cos kx \cos nx dx \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx)dx) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx)dx \\
&= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx)dx = a_n \begin{cases} \pi & ,n = 1, 2, \ldots \\ 2\pi & ,n = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $\quad a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ *elde edilir. Benzer şekilde*
$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$ *bulunur.*

Teorem 1.3.3 $f \in L[-\pi, \pi]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \to f(x) \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

olması için gerek ve yeter koşul $D_n(t) = \dfrac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(1/2)t} \quad (-\infty < t < \infty)$ *olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right] D_n(t)dt = 0$$

olmasıdır. (Goldberg, 1965)

İspat :

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\left[(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)f(t)dt)\cos(kx) \right. \\ &\left. +(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)f(t)dt)\sin(kx))\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt)\right] dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos k(t-x)\right] dt \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad &= \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt \\ &= \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(1/2)t} \quad (-\infty < t < \infty) \end{aligned}$$

olduğundan

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+1/2)(t-x)}{2\sin(1/2)(t-x)}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt$$

elde edilir. Buradaki D_n'e Dirichlet Çekirdeği denir. $D_n(t)$ tanımlı ve süreklidir. $u := x - t$ dersek $s_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)du$ olur. Eğer $f(x+2\pi) = f(x)$ (yani f, 2π periyotlu) ise f'yi $(-\infty, +\infty)$ aralığına genişletebiliriz. Bu yakınsama uç noktalara bağımlı değildir. $f(x+2\pi) = f(x)$ olduğundan $\displaystyle\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(x-u)D_n(u)du \right. \\ &\left. + \int_0^{\pi} f(x-u)D_n(u)\right\} du \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{\pi}^{0} f(x+t)D_n(-t)(-dt) + \int_0^{\pi} f(x-u)D_n(u)\right\} du \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} [f(x+u)+f(x-u)]D_n(u)du\right\} \end{aligned}$$

olacaktır. Örneğin $f=1$ *alınırsa* $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1.dx = 2$, $k \leq 1$ *ise* $a_k = b_k = 0$ *olur ve böylece*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 1$$

olacağından

$$s_n(x) = 1 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} 2D_n(u)du\right\}$$

ve

$$\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} D_n(u)du\right\} = 1$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafı $f \in L[-\pi,\pi]$ *ile çarparsak*

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)D_n(u)du$$

olur, buradan

$$s_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right]D_n(t)dt$$

olur. Böylece $f \in L[-\pi,\pi]$, $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ *olmak üzere*

$$s_n \to f \in L[-\pi,\pi] \iff \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right]D_n(t)dt = 0$$

olarak elde edilir. □

Teorem 1.3.4 $f \in L[-\pi,\pi]$ *olsun.* $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ f *'in Fourier serisinin kısmi toplamı olmak üzere*

$s_n(x) \longrightarrow f(x)$ $(C,1)$ *olması için gerek ve yeter kosul*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right] K_n(t)dt = 0$$

olmasıdır. Burada $K_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$ *dir. (Goldberg, 1965)*

İspat : *Teorem 1.3.3 den*

$x \in A \; := \left\{x \mid \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x)}{2} - f(x)\right] D_n(t)dt = 0\right\} \subset [-\pi,\pi]$ *ise*

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x), (C,1)$ *dir.* $A \subset B \subset [-\pi,\pi]$ *şeklinde*

$$B := \left\{x \mid \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x), (C,1)\right\}$$

kümesi arıyoruz demektir. $s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\, D_n(t)dt$ *olduğundan, buna göre* $s_n(x)$ *dizisi için*

$$\begin{aligned} t_n(x) = \frac{s_0(x)+s_1(x)+\ldots+s_{n-1}(x)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\, D_k(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\, K_n(t)dt \end{aligned}$$

Burada

$$K_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \frac{1}{2n\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})t = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2(\frac{t}{2})}$$

ifadesine Fejer Çekirdeği denir.

$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2n-1)\theta = \sum_{k=0}^{n}\sin(2k-1)\theta$ *idi. Özel olarak* $f = 1$ *alırsak* $s_0(x) = s_1(x) = \ldots = s_n(x) = 1$ *ve* $t_n(x) = 1$ *dir Böylece* $1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)dt$ *her zaman vardır.* $\forall f \in L[-\pi,\pi]$ *için* $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)K_n(t)dt$ *ve*

$t_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right] K_n(t)dt$ *olur. Buradan ise*

$$\frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x), (C,1) \Longleftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \mid t_n(x) - f(x) \mid = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right] K_n(t)dt = 0$$

olur.

Teorem 1.3.5 *Eğer* $f \in L[-\pi,\pi]$ *ve* $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ *ise* $n \in N$ *ve* $-\pi \leq t \leq \pi$ *için*

$$t_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(1 - \frac{k}{n})(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

dir. (Goldberg, 1965)

İspat : $t_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(t)$ *ve* $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ *için* $s_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ *ise*

$$\begin{aligned}
t_n(t) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{k}(a_i \cos it + b_i \sin it)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{na_0}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(a_i \cos it + b_i \sin it)\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{na_0}{2} + (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + (a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \ldots\right. \\
&+ \left.\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{na_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(a_k \cos kt + b_k \sin kt)\right\} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(1 - \frac{k}{n})(a_k \cos kt + b_k \sin kt)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Problem : *Eğer* $f \in C[-\pi,\pi]$ *ve* $M = \max_{-\pi \leq t \leq \pi} \mid f(t) \mid$ *ise* $\mid t_n(t) \mid \leq M$ *olacak şekilde* $M \in R^+$ *vardır. Fakat aynı şey* $s_n(t)$ *için geçerli değildir.*

Teorem 1.3.6 $f \in C[-\pi,\pi]$ *ise*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = f(x), (C,1)$$

dir. (Goldberg, 1965)

İspat : $f \in C[-\pi,\pi] \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \mid y - x \mid < \delta$ *iken* $\mid f(y) - f(x) \mid < \frac{\epsilon}{2}$ *olacak şekilde* $\delta(\epsilon) > 0$ *vardır. Bu* $\delta, 0 < \delta < \pi$ *olarak da seçilebilir. Eğer* $0 \leq t < \delta$ *ise*

$x \leq x+t < x+\delta$ ve $x-\delta < x-t \leq x$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x) \right| &\leq \frac{1}{2}[\ |f(x+t)-f(x)| + |f(x-t)-f(x)|\ ] \\ &< \frac{1}{2}(\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}) = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

O halde $n \in N$ ise

$$\left| \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x) \right] K_n(t)dt \right| < \frac{2}{\pi}\frac{\epsilon}{2}\int_0^\delta K_n(t)dt \ < \ \frac{\epsilon}{2} \quad (1.3.3)$$

Bu durumda $0 \leq t < \delta$ iken ispat biter.

Eğer $\delta \leq t \leq \pi$ ise

$$K_n(t) = \frac{\sin^2(nt/2)}{2n\sin^2(t/2)} \leq \frac{1}{2n\sin^2(\delta/2)}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right] K_n(t)dt \right| \\ &< \frac{1}{2n\sin^2(\delta/2)}\int_\delta^\pi \{\ |f(x+t)| + \ |f(x-t)|\ + 2\,|f(x)|\ \}\,dt \\ &\leq A.\tfrac{1}{n} \ < \ \tfrac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısı ile $\forall n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x) \right] K_n(t)dt \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{\pi}\int_0^\delta 1 \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x) \right] K_n(t)dt \right| \\ &+ \left| \frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x) \right] K_n(t)dt \right| < \ \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x) \right] K_n(t)dt = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt) = f(x), (C,1)$$

dir. □

Teorem 1.3.7 *Eğer* $f \in C[-\pi,\pi], f(-\pi)=f(\pi)$ *ise*
$s_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$ *ve* $t_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$
olmak üzere $(t_n), [-\pi,\pi]$ *üzerinde* f *e düzgün yakınsaktır.*

İspat : *f , $[-\pi,\pi]$ aralığında sürekli olduğundan (kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyon düzgün süreklidir) f düzgün süreklidir. O halde $\epsilon > 0$, $|\,y-x\,| < \delta$ iken $|\,f(y)-f(x)\,| < \epsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde δ , x 'e bağlı degıldır. $(-\pi \le x \le \pi)$ Teoremden(1.3.10) dan $\|\ f\ \| = \max_{-\pi\le x\le\pi} |\ f(x)\ |$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\right.\right. & \left.\left. f(x)\right]K_n(t)dt\right| \le \frac{1}{2n\pi\sin^2(\delta/2)}\int_{\delta}^{\pi}\{\,|\,f(x+t)\,| \\
& +|\,f(x-t)\,| + 2\,|\,f(x)\,|\,\}\,dt \\
& \le \frac{2}{n\pi\sin^2(\delta/2)}\,\|\ f\ \|\,(\pi-\delta)
\end{aligned}$$

olduğundan $[\delta,\pi]$ aralığında bulunan n_0, x e bağlı değildir. Böylece

$$|\,t_n(x)-f(x)\,| < \frac{2\,\|\ f\ \|\,(\pi-\delta)}{n\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

bulunur. Dolayısı ile her ϵ için $-\pi \le x \le \pi$ ise $n \le n_0$ için $|\,t_n(x)-f(x)\,| < \epsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde x den bağımsız n_0 vardır. Bu nedenle $(t_n(x))$, f e düzgün yakınsaktır.□

1.4 Fourier effektiflik

Notasyonlar : *Aksi söylenmedikçe işlemlerde aşağıdaki notasyonları kullanacağiz.*

$$\phi(t) = \varphi(t)=\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x),$$

$$\psi(t) = \psi_x(t)=f(x+t)-f(x-t),$$

$$\Phi(t) = \Phi_x(t)=\int_0^t |\,\varphi(u)\,|\,du,$$

$$\Psi(t) = \Psi_x(t) = \int_0^t \mid \psi(u) \mid du,$$

$$\Delta_n \mu_n = \mu_n - \mu_{n+1}$$

$$\tau = [1/t]$$

Burada $[1/t]$ *nin anlamı;* $1/t$ *nin içerdiği en büyük tamsayı (tamdeğer) dir.*

Bu bölümde effektiflikle ilgili tanım ve teoremleri vereceğiz. Öncelikle L , $\tilde{L}$, L' ,$\tilde{L}'$ *sembolleriyle gösterilecek olan dört farklı trigonometrik seriler sınıfı tanımlayacagız. Bu serilerin herbirisinin hemen heryerde tanımlı toplam-fonksiyonları olacak. Aynı sınıfa ait toplam-fonksiyonları için de aynı sembolleri kullanacağız.*

Şimdi bu sınıfları tanımlayalım:

L, $(-\pi, \pi)$ *aralığı üzerinde , ölçülebilir, Lebesque anlamında integrallenebilen,* 2π *periyotlu , periyodik fonksiyonlar sınıfı ile,*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx} \quad , \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

şeklindeki tüm Fourier Lebesque serilerinin sınıfını gösterecek.

$f(x)$ *in Fourier serisinin eşlenik serisi:*

$$-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} sgn(n) f_n e^{inx}$$

ve buna karşılık gelen hemen heryerde varolan toplam fonksiyonu:

$$\tilde{f}(x) \equiv -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot \frac{t}{2} dt$$

olmak üzere, bu şekildeki tüm seri veya fonksiyonların sınıfını $\tilde{L}$ *ile göstereceğiz.*

Eğer $f(x)$ *sınırlı salınımlı ise*

$$i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n f_n e^{inx}$$
$$i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid n \mid f_n e^{inx}$$

serileri sırasıyla L' ve $\widetilde{L}'$ sınıflarına aittirler. Bunlara karşılık gelen toplam fonksiyonları da sırasıyla $f'(x)$ ve

$$\widetilde{f}'(x) \equiv -\frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{\epsilon}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \left[\sin \frac{t}{2}\right]^{-2} dt$$

şeklinde olacaktır.

Effektivlik Problemi

A , (a_{mn}) üçgensel matrisiyle ve

$$y_m = \sum_{n=0}^{m} a_{mn} x_n$$

sonsuz eşitlikleri ile tanımlanan regüler toplanabilme metodu olsun. Burada A verilen bir $\{x_n\}$ dizisini yeni bir $\{y_n\}$ dizisine dönüştürür.

Şimdi $\mathcal{F}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{inx}$$

trigonometrik serileri sınıfı, ve $F(x)$ herbir seriye karşılık gelen genelleştirilmiş toplam-fonksiyonu olsun. İleride $\mathcal{F}$ yukarıda tanımladığımız dört sınıftan birisi olacak. Fakat burada daha genel bir durum ele alınacak.

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} F_k e^{ikx}$$

yazalım ve

$$x_n = F_n(x) \quad , \quad y_m = \tau_m(x, F)$$

alalım. Dolayısıyla

$$\tau_m(x, F) = \sum_{k=-m}^{+m} \left\{ \sum_{n=|k|}^{m} a_{mn} \right\} F_k e^{ikx}$$

olur.

E_F , $(-\pi, \pi)$ aralığında herbir $F(x) \subset \mathcal{F}$ fonksiyonu için tanımlanmış noktalar kümesidir. Öyle ki, herbir $x \subset E_F$ noktasında $F(x)$ sonlu değerler alır ve $F(x)$ in regülerlik şartı sağlanır.

Tanım 1.4.1 *Eğer*

$$\lim_{m\to\infty} \tau_m(x,F) = F(x)$$

ise, A toplanabilme metodu $(\mathcal{F},\ E_F)$*-effektiftir. Burada* $F(x) \subset \mathcal{F}$ *ve* $x \subset E_F$ *dir.*

Aşağıdaki tanımda,

$$\begin{aligned}
\chi(t) &\equiv f(x+t) + f(x-t) - 2tf'(x)\\
\chi_0(t) &\equiv \int_0^t \mid d_s\chi(s) \mid\\
\phi_0(t) &\equiv \int_0^t \mid d_s\phi(s) \mid
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu formüllerdeki $f(x)$ *sınırlı salınımlı fonksiyon olacak ve* $f'(x)$ *in sonlu bir sayı olarak var olmadığı ölçümü sıfır olan noktalar kümesi gözardı edilecektir.*

Tanım 1.4.2 $f(x)$ *in sonlu değerlere sahip olduğu* x *noktası,*
(i) Eğer $t \to 0$ *iken* $\phi(t) \to 0$ *ise* (F)*-regüler,*
(ii) Eğer $\Phi(t) = o(t)$ *ise* (L)*-regüler,*
(iii) Eğer bu noktada $f(x)$ *sürekli,* $\tilde{f}(x)$ *var ve sonlu ise* $(\tilde{F})$*-regüler,*
(iv) Eğer $\Psi(t) = o(t)$, $\tilde{f}$ *var ve sonlu ise* $\tilde{L}$*-regüler,*
(v) Eğer $(-\pi,\pi)$ *aralığında* $f(u)$ *sınırlı salınımlı,* $f'(x)$ *var ve sonlu, ve* $\chi_0(t) = o(t)$ *ise* (L')*-regüler,*
(vi) Eğer $(-\pi,\pi)$ *aralığında* $f(u)$ *sınırlı salınımlı,* $\tilde{f}'(x)$ *var ve sonlu, ve* $\phi_0(t) = o(t)$ *ise* $(\tilde{L}')$*-regüler*
dir denir.

$(-\pi,\pi)$ *aralığında verilen bir* $f(x)$ *fonksiyonuna göre* $(*)$*-regüler noktalar kümesini biz* $E(*;f)$ *ile göstereceğiz.*

Tanım 1.4.3 $(\mathcal{F}, E_F)$*-effektif olan A toplanabilme metodu*
(i) Eğer $\mathcal{F} = L$, $E_F = E(F;f)$ *ise* (F)*-effektif,*
(ii) Eğer $\mathcal{F} = L$, $E_F = E(L;f)$ *ise* (L)*-effektif,*
(iii) Eğer $\mathcal{F} = \tilde{L}$, $E_F = E(\tilde{F};f)$ *ise* $(\tilde{F})$*-effektif,*

(iv) Eğer $\mathcal{F} = \widetilde{L}$, $E_F = E(\widetilde{L}; f)$ *ise* $(\widetilde{L})$*-effektif,*

(v) Eğer $\mathcal{F} = L'$, $E_F = E(L'; f)$ *ise* (L')*-effektif,*

(vi) Eğer $\mathcal{F} = \widetilde{L}'$, $E_F = E(\widetilde{L}'; f)$ *ise* $(\widetilde{L}')$*-effektif,*

(vii) (i)-(vi) beraber gerçeklenirse Fourier effektif

dir denir.

Teorem 1.4.4 $\{p_n\}$ *pozitif, monoton azalan olmak üzere* (N, p_n) *Metodunun fourier effektif olması için gerek ve yeter koşul,* $n \to \infty$ *iken*

$$\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k}{k+1} = O(1) \tag{1.4.1}$$

olmasıdır.(Hille ve Ark. , 1932)

Teorem 1.4.5 *Yukarıdaki böyle* $\{p_n\}$*'ler için (1.4.1) ifadesi,* $\mu = \overline{\lim_{n}}\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k}{k+1}$ *olmak üzere* $0 < \theta < \frac{1}{\mu}$ *eşitsizliğini sağlayan* θ *'lar için,* (N, p)*'nin* (C, θ)*'dan daha kuvvetli* $((N, p) \supset (C, \theta))$ *olmasına denktir. (Karamata,1954)*

Teorem 1.4.6 $\forall\alpha > 0$ *için* (C, α) *Fourier effektiftir. Dolayısı ile (1.4.1) i sağlayan Nörlund matrislerinin Fourier effektif olması için gerek ve yeter koşul, bu matrislerin Cesaro Metodundan daha kuvvetli olmasıdır. (Bosanquet,1930)*

Şimdi de çok kullanılacak olan şu iki teoremi verelim.

Teorem 1.4.7 *(Riemann-Lebesque Teoremi)* f *fonksiyonu* $[a, b]$ *aralığında Lebesque anlamında integrallenebilir bir fonksiyon ise* $p \to \infty$ *iken,*

$$\int_a^b \psi(x)\sin px\,dx = o(1)$$

ve

$$\int_a^b \psi(x)\cos px\,dx = o(1)$$

dir. (Kolmogorov ve Ark.,1968, sh.398)

ispat : *$\psi(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise ($\psi(x) \in C^1[a,b]$)*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(x)\sin px dx = \lim_{p\to\infty}\left\{\left[-\psi(x)\frac{\cos px}{p}\right]_a^b + \int_a^b \psi'(x)\frac{\cos px}{p}dx\right\} = 0$$

olur. $C^1[a,b]$ $L[a,b]$ de yoğun olduğundan $\psi(x) \in L[a,b]$ fonksiyonu için bir $\psi_\epsilon(x) \in C^1[a,b]$ fonksiyonu vardır. Öyle ki;

$$\int_a^b \mid \psi(x) - \psi_\epsilon(x) \mid dx < \epsilon$$

dur. Buradan

$$\mid \int_a^b \psi(x)\sin px dx \mid \leq \mid \int_a^b [\psi(x) - \psi_\epsilon(x)]\sin px dx \mid + \mid \int_a^b \psi_\epsilon(x)\sin px dx \mid < \epsilon$$

olur. □

Teorem 1.4.8 *(Lebesque Teoremi) $f(x)$ in Fourier serisi $\Psi_x(t) = o(t)$ olduğunda her bir x noktasında $f(x)$ e $(C,1)$ toplanabilirdir. (Zygmund, 1959, sh.90)*

2 Fourier Serilerinin Nörlund Toplanabilirliği

$f(t)$ 2π periyotlu, periyodik, $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesque anlamında integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f(t)$'nin Fourier serisi

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \tag{2.0.1}$$

olsun.

Bu durumda (2.0.1) in eşlenik serisi;

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nt - a_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \tag{2.0.2}$$

olur.

2.1 Fourier Serilerinin Eşlenik Serisinin Nörlund Toplanabilirliği

Bu kısımda H.P. Dikshit'in 1962 ve 1965 yillarında yazmış olduğu makaleleri ele alacağız.

Şimdi Hardy ve Littlewood tarafından verilen aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.1.1 *Eğer $t \to 0^+$ iken*

$$\varphi(t) = o\left(\frac{1}{\log(\frac{1}{t})}\right) \tag{2.1.1}$$

ve $\delta > 0$ olmak üzere ,

$$A_n(x) = O(n^{-\delta}) \tag{2.1.2}$$

ise $\sum A_n(x)$ $f(x)$ e yakınsaktır. (Hardy, ve Ark.,1932)

1943 'de Iyengar, eğer sadece (2.1.1) sağlanıyorsa $\sum A_n(x)$ in $f(x)$ değerine $(N, \frac{1}{n+1})$ toplanabilir olduğunu göstermiştir.

Hardy ve Littlewood 1932 de aynı zamanda (2.1.1) koşulunun $t \to 0^+$ iken

$$\int_0^t |\varphi(u)|\, du = o\left(\frac{t}{\log(\frac{1}{t})}\right) \tag{2.1.3}$$

şeklinde daha hafif bir koşulla yer değiştirilebileceğini göstermişlerdir.
1948'de Siddiqi sadece (2.1.3) koşulunun kabulüyle $\sum A_n(x)$ *serisinin* $(N, \frac{1}{n+1})$ *toplanabilir olduğunu göstermiştir. Bu sonuç Iyengar'ın verdiği ispattan daha geneldir.*

Iyengar ve Siddiqi'nin bu sonuçları Pati tarafından aşağıdaki teoremle genelleştirilmiştir.

Teorem 2.1.2 (N, p_n) *reel, pozitif, monoton artmayan* $n \to \infty$ *iken* $P_n \to \infty$ *olacak şekilde* (p_n) *katsayılar dizisiyle tanımlanan regüler Nörlund Metodu ve*

$$n \to \infty \quad iken \qquad \log n = O(P_n)$$

olsun. Bu durumda, eğer

$$t \to 0^+ \quad iken \qquad \Phi(t) = o\left(\frac{t}{P_\tau}\right)$$

ise $f(t)$ *nin Fourier serisi* $t = x$ *de* $f(x)$ *e* (N, p_n) *toplanabilirdir. (Pati,1961)*

Şimdi bir noktadaki Fourier serilerinin eşlenik serisinin Nörlund toplanabilirliği için bir teorem ispatlayacağız.

Teorem 2.1.3 (p_n) *reel pozitif sabitlerin,* $n \to \infty$ *iken*

$$(i) \quad P_n \to \infty \quad , \quad (ii) \quad \log n = O(P_n)$$

koşullarını saglayan ve monoton artmayan bir dizisi ise (2.0.2) eşlenik serisi, $\tau = \left[\frac{1}{t}\right]$ *olmak üzere*

$$t \to 0^+ \quad iken \qquad \int_0^t |\, \psi(u) \,|\, du = o\left(\frac{t}{P_\tau}\right)$$

olduğunda

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(t) \cot \frac{t}{2} dt$$

değerine integralin var olduğu herbir x *noktasında* (N, p_n) *toplanabilirdir. (Dikshit, 1962)*

Teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız olacak;

Lemma 2.1.4 $0 \leq t \leq \pi$ *için*

$$|\sin nt| \leq n\,|\sin t| \tag{2.1.4}$$

dir. (Dikshit, 1962)

İspat tümevarımdan kolayca yapılabilir.

Lemma 2.1.5 *Eğer p_n nonnegatif ve artan değilse, K mutlak sabit olmak üzere,*

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \cos\left(n-\nu+\frac{1}{2}\right)\right| \leq KP_\tau$$

dir. (Dikshit, 1962)

Bu Lemma McFadden tarafından verilen aşağıdaki eşitsizliğin bir sonucudur.

Lemma 2.1.6 *Eğer p_n non-negatif ve artmayan ise $0 \leq a \leq b \leq \infty$, $0 \leq t \leq \pi$ ve herhangi n için*

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k e^{ikt}\right| \leq KP_\tau$$

dir.(Mcfadden, 1942)

İspat : $\tau = \left[\left|\frac{1}{t}\right|\right]$ *olsun. Abel kısmi toplama Formülünden dolayı*

$\left|\sum_{k=\tau}^{b} p_k e^{ikt}\right| \leq \max\left|\sum_{\nu=0}^{k} e^{-i\nu t}\right| \left\{\sum_{k=\tau}^{b-1}(p_k - p_{k-1} + p_\tau + p_b\right\} = 2p_\tau \max\left|\sum_{\nu=0}^{k} e^{-i\nu t}\right|$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=a}^{b} p_k e^{i(n-k)t}\right| &= \left|\sum_{k=a}^{\tau} e^{int} p_k e^{-ikt} + \sum_{k=\tau}^{b} e^{int} p_k e^{-ikt}\right| \\
&\leq \sum_{k=a}^{\tau} p_k + \left|\sum_{k=\tau}^{b} p_k e^{-ikt}\right| \leq P_\tau + 2p_\tau \max_{\tau+1\leq k\leq b}\left|\sum_{\nu=0}^{k} e^{-i\nu t}\right|
\end{aligned}$$

$$= P_\tau + 2p_\tau \max_{\tau+1\le k\le b} \left| \frac{1-e^{-i(k+1)t}}{1-e^{-it}} \right|$$

$$\le P_\tau + 4p_\tau \left| \frac{e^{it/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} \right|$$

$$= P_\tau + 2p_\tau(1/\sin(t/2))$$

$$\le P_\tau + Kt^{-1}p_\tau \le P_\tau + K(\tau+1)p_\tau$$

$$\le KP_\tau$$

elde edilir.

Şimdi Teorem (2.1.3) ün ispatını verelim.

İspat : *$\bar{s}_n$ (2.0.2) eşlenik serinin n. kısmi toplamını göstersin. Bu durumda,*

$$\widetilde{s}_n = \sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu \cos\nu t - a_\nu \sin\nu t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t) \left\{\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu t\right\} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t) \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} dt$$

olur. Buna bağlı olarak Nörlund ortalaması $\widetilde{t}_n$ olmak üzere;

$$\widetilde{t}_n = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_\nu \bar{s}_{n-\nu}}{P_n} = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_\nu}{P_n}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t) \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} dt$$

olur. Dolayısıyla

$$\widetilde{t}_n - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\cot\frac{t}{2}dt = -\int_0^\pi \psi(t) \left\{\frac{1}{2\pi P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \frac{\cos(n-\nu+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} dt\right\}$$

$$= -\int_0^\pi \psi(t)\widetilde{N}_n(t)dt$$

diyelim. Teoremi ispatlamak için

$$n \to \infty \quad iken \qquad \int_0^\pi \psi(t)\bar{N}_n(t)dt = o(1) \tag{2.1.5}$$

olduğunu göstermemiz gereklidir.

$$\int_0^\pi \psi(t)\bar{N}_n(t)dt = \left\{\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_\delta^\pi\right\}\psi(t)\bar{N}_n(t)dt \tag{2.1.6}$$
$$= \widetilde{I}_1 + \widetilde{I}_2 + \widetilde{I}_3$$

yazalım.

Eşlenik fonksiyonun Cauchy anlamında integrali var olduğundan

$$n \to \infty \quad iken \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\cot\frac{t}{2}dt = o(1) \tag{2.1.7}$$

olur.

Şimdi $0 \le t \le \pi$ aralığında düzgün olarak,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n-\nu+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} &= \frac{1}{2\pi P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \sum_{k=1}^{n-\nu} \sin kt \\ &= O\left(\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \sum_{k=1}^{n-\nu} |\sin kt|\right) \\ &= O\left(\frac{n}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu\right) \\ &= O(n)\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

elde edilir.

Buradan, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\cot\frac{t}{2}dt$ *ifadesini* $\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\widetilde{N}_n(t)dt$ *ifadesine eklenip çıkarılırsa* ($\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu = 1$ *olduğuna dikkat edilmelidir),*

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\bar{N}_n(t)dt &= -\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t) \; \frac{1}{2\pi P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n-\nu+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\cot\frac{t}{2}dt\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade de (2.1.7) de ve (2.1.8) de kullanılırsa

$$\widetilde{I}_1 = O\left\{n\int_0^{\frac{1}{n}} \mid \psi(t) \mid dt\right\} + o(1) \quad = O\left\{n.\Psi(\frac{1}{n}\right\} + o(1)$$

$$= o\left(\frac{1}{P_n}\right) + o(1) \qquad (2.1.9)$$

$$= o(1)$$

elde edilir.

(N, p_n) *metodu regüler olduğundan,* $n \to \infty$ *iken,*

$$\widetilde{I}_3 \;=\; \int_\delta^\pi \psi(t)\widetilde{N}_n(t)dt = \int_\delta^\pi \psi(t)\frac{1}{2\pi P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \frac{\cos(n-\nu+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt = o(1) \qquad (2.1.10)$$

dir.

Şimdi geriye $\widetilde{I}_2 = o(1)$ *olduğunu göstermek kalıyor. Bunun için biz öncelikle* $\widetilde{N}_n(t)$ *ifadesini düzenleyelim;*

Lemma 2.1.5 den

$$\bar{N}_n(t) = \frac{1}{2\pi P_n \sin\frac{t}{2}}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \cos(n-\nu+\frac{1}{2})t = O(\frac{P_\tau}{tP_n}) \qquad (2.1.11)$$

dir. Bu ifadeyi kullanarak,

$$\widetilde{I}_2 = \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \psi(t)\bar{N}_n(t)dt \quad = O\left\{\mid \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \psi(t)\bar{N}_n(t)dt \mid\right\}$$

$$= O\left\{\frac{1}{P_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \mid \psi(t) \mid \frac{P_\tau}{t}dt\right\}$$

elde edilir.

Şimdi bu bulduğumuz ifadeyi kullanarak kısmi integrasyon yapılıp, P_τ *nun da bir basamak fonksiyon olduğuna dikkat edilirse,*

$u = \dfrac{P_\tau}{t}$, $dv = | \psi(t) | \, dt$ *olmak üzere* $v = \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} | \psi(t) | \, dt = \Psi(t) \mid_{\frac{1}{n}}^{\delta}$ *ve* $du = -\dfrac{P_\tau}{t^2} dt$ *olacağından*

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} | \psi(t) | \frac{P_\tau}{t} dt - o(1) &= \left[\Psi(t) \frac{P_\tau}{t} \right]_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Psi(t) \frac{P_\tau}{t^2} dt \\
&= O(1) \; + \; o(1) \; + \; \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Psi(t) \frac{P_\tau}{t^2} dt \\
&= O(1) \; + \; o\left\{ \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t} \right\} \\
&= O(1) \; + \; o(\log \delta + \log n) \\
&= O(1) \; + \; o(1) \; + \; o(\log n) \\
&= O(1) \; + \; o(\log n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi hipotezimizde $n \to \infty$ *iken* $\log n = O(P_n)$ *olduğundan,*

$$\widetilde{I}_2 = O\left(\frac{1}{P_n}\right) + o\left(\frac{\log n}{P_n}\right) = o(1) \tag{2.1.12}$$

bulunur.

(2.1.6), (2.1.9), (2.1.10) ve (2.1.12) birleştirilirse ispat biter. □

Şimdi H.P. Dikshit'in 1965 yılında yazdığı makaleyi inceyeceğiz. Öncelikle teoremleri ispatlamak için gerekli olan lemmaları verelim;

Lemma 2.1.7 *$n \to \infty$ iken $0 \le t \le \pi$ aralığında düzgün olarak*

$$\frac{1}{2\pi P_n \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \left\{ \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(n - \nu + \frac{1}{2}\right) t \right\} = O(n)$$

dir

Lemma 2.1.8 *Eğer p_n negatif olmayan, artmayan ve*

$$\widetilde{N}_n(t) = \frac{1}{2\pi P_n \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \cos\left(n - \nu + \frac{1}{2}\right) t$$

ise, $n \to \infty$ *iken* $\frac{1}{n} < \delta \leq \pi$ *için*

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \psi(t)\widetilde{N}_n(t)dt = O\left\{\frac{1}{P_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \mid \psi(t) \mid \frac{P_\tau}{t}dt\right\}$$

dır.

Teorem 2.1.9 (N,p_n) *;* $\{p_n\}$ *reel, pozitif artmayan bir dizi olmak üzere*

(i) $n \to \infty$ *iken* $P_n \to \infty$ *, (ii)* $\lambda(t)$ *bir pozitif, monoton azalmayan bir fonksiyon olacak şekilde* $\lambda(n)\log n = O(P_n)$ *özelliklerini gerçekleyen bir Regüler Nörlund ortalamasını göstersin.*

$$t \to 0^+ \quad iken \quad ,\Psi(t) = \int_0^t \mid \psi(u) \mid du = o\left(\frac{\lambda(\frac{1}{t})t}{P_\tau}\right) \tag{2.1.13}$$

ise, bu durumda $f(t)$ *nin Fourier serisinin eşlenik serisi (2.0.2)*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\cot\frac{t}{2}dt$$

değerine integralin var olduğu herbir x *noktasında* (N,p_n) *toplanabilirdir. (Dikshit, 1965)*

İspat : *Bir önceki teoremde olduğu gibi teoremi ispatlamak için* $n \to \infty$ *iken*

$$\int_0^{\pi} \psi(t)\bar{N}_n(t)dt = o(1) \tag{2.1.14}$$

olduğunu göstermemiz gereklidir. Bunun için

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \psi(t)\bar{N}_n(t)dt &= \left\{\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right\}\psi(t)\widetilde{N}_n(t)dt \\ &= \widetilde{I}_1 \ + \ \widetilde{I}_2 \ + \ \widetilde{I}_3\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

yazalım.

Eşlenik fonksiyonun Cauchy anlamında integrali var olduğundan

$$n \to \infty \quad iken, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\cot\frac{t}{2}dt = o(1) \tag{2.1.16}$$

olur.

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\psi(t)\cot\frac{t}{2}dt$ *ifadesi* $\int_0^{\frac{1}{n}}\psi(t)\bar{N}_n(t)dt$ *ifadesine eklenip çıkarılırsa*

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_1=\int_0^{\frac{1}{n}}\psi(t)\bar{N}_n(t)dt &= -\int_0^{\frac{1}{n}}\psi(t)\frac{1}{2\pi P_n\sin(\frac{t}{2})}\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu\left\{\cos(\frac{t}{2})-\cos(n-\nu+\frac{1}{2})t\right\}dt\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\psi(t)\cot\frac{t}{2}dt\end{aligned}$$

Bu ifadede Lemma(2.1.7) ve (2.1.16) kullanılırsa,

$$\widetilde{I}_1=O\left\{n\int_0^{\frac{1}{n}}\mid\psi(t)\mid dt\right\}+o(1)=O\left\{n.\Psi(\frac{1}{n})\right\}+o(1)$$

(2.1.13) ve (ii) kabulü ile

$$\widetilde{I}_1=o\left(\frac{\lambda(n)}{P_n}\right)+o(1)=o(1) \tag{2.1.17}$$

elde edilir.

(N,p_n) *metodu regüler olduğundan,* $n\to\infty$ *iken,*

$$\widetilde{I}_3=\int_\delta^\pi\psi(t)\bar{N}_n(t)dt=\int_\delta^\pi\psi(t)\frac{1}{2\pi P_n\sin(\frac{t}{2})}\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu\left\{\cos(n-\nu+\frac{1}{2})t\right\}dt=o(1) \tag{2.1.18}$$

olacaktır.

Lemma 2.1.8 ile

$$\widetilde{I}_2=O\left\{\frac{1}{P_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\mid\psi(t)\mid\frac{P_\tau}{t}dt\right\}$$

dir.

Şimdi bu ifadeyi kullanarak önceki teoremde olduğu gibi kısmi integrasyon yapalım ve P_τ *nun da yine bir basamak fonksiyonu olduğunu göz önüne alarak (2.1.13) hipotezi ile ve* $\lambda(t)$ *monoton azalmayan olduğundan*

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\mid\psi(t)\mid\frac{P_\tau}{t}dt-o(P_n) &= \left[\Psi(t)\frac{P_\tau}{t^2}\right]_{\frac{1}{n}}^{\delta}+\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\Psi(t)\frac{P_\tau}{t^2}dt\\ &= O(1)+o(\lambda(n))+\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\Psi(t)\frac{P_\tau}{t^2}dt \text{ (2.1.13) } \textit{hipotezinden}\end{aligned}$$

$$= O(1) + o(\lambda(n)) + o\left\{\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\lambda(\frac{1}{t})}{t} dt\right\} \text{ (2.1.13) } \textit{hipotezinden}$$

$$= O(1) + o(\lambda(n)) \ + \ o\left\{\lambda(n) \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t}\right\})$$

$$= O(1) + o(\lambda(n)) + o(\lambda(n) \log(n)$$

olur. Şimdi hipotezimizde $n \to \infty$ iken $\lambda(n) \log n = O(P_n)$ olduğundan,

$$I_2^{\sim} = o(1) \ + \ O\left(\frac{1}{P_n}\right) + o\left\{\frac{\lambda(n)}{P_n}\right\} \quad + o\left\{\frac{\lambda(n)\log n}{P_n}\right\} = o(1) \tag{2.1.19}$$

olur. (2.1.17), (2.1.18) ve (2.1.19) dan ispat biter.

2.2 Fourier Serilerinin Üçgensel Matris Dönüşümüyle Toplanabilirliği

Teorem 2.2.1 *Eğer $t \to 0$ iken $\varphi_\alpha(t) = o(1)$ ise $t = x$'de $\forall \delta > 0$ ve $\alpha \geq 0$ için $f(t)$'nin Fourier serileri $(C, \alpha + \delta)$ toplanabilirdir. (Bosanquet, 1930)*

Teorem 2.2.2 $R_n = \dfrac{np_n}{P_n}$ *olmak üzere; eğer p_n dizisi $n \to \infty$ iken*

(i) $R_n = O(1)$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k \mid \Delta p_{k-1} \mid = O(\mid P_n \mid)$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\mid P_k \mid}{k} = O(\mid P_n \mid)$

koşullarını sağlıyorsa regüler (N, p_n) metodu Fourier efektiftir. (Hille ve Ark., 1932)

Eğer $t \to 0$ iken $\varphi(t) = o(1)$ ve $\{p_n\}$ dizisi (i)-(iii) koşullarını sağlıyor ise teorem 2.2.2 den $f(t)$ nin fourier serisi bir regüler (N, p_n) metoduyla toplanabilir olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 2.2.3 *Eğer R_n bir önceki teoremdeki gibi olmak üzere $t \to 0$ iken $\varphi_1(t) = o(1)$ ve negatif olmayan, monoton azalmayan p_n dizisi ,* *(i) $n \to \infty$ iken $p_n \to \infty$, (ii) $\{p_{n+1} - p_n\}$ artmayan , (iii) $R_n = O(1)$ ve (iv) $\sum_{k=1}^{n} \frac{|P_k|}{k^2} = O\left(\frac{|P_n|}{n}\right)$ koşulları sağlanıyor ise $f(t)$ nin Fourier serisi, $t = x$ noktasında (N, p_n) toplanabilirdir.(Dikshit, 1969(1))*

Teorem 2.2.4 *$t \to 0$ iken $\varphi_1(t) = o(1)$ ve negatif olmayan, monoton artmayan (p_n) dizisi ,*

$$S_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu}{\nu+1} = O(1)$$

ise $f(t)$'nin Fourier serisi $t = x$'de $(C,1)(N, p_n)$ toplanabilirdir. (Dikshit, 1969(1))

Uyarılar : *Kolayca görüleceği gibi eğer $\{p_n\}$ nonnegatif, ve azalmayan ise tümevarımdan $(n+1)p_n \geq P_n$ ve dolayısıyla $S_n = O(1)$ olduğu görülür. Eğer $R_n = O(1)$ ise*

$$\sum_{k=1}^{n} k \mid \Delta p_{k-1} \mid = -\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{k} (p_\mu - p_{\mu-1}) + n \sum_{\mu=1}^{n} (p_\mu - p_{\mu-1}) = O(P_n),$$

olur. Buradan biz Teorem 2.2.3 de kullanılan $\{p_n\}$ dizisinin aynı zamanda Teorem 2.2.2 nin de hipotezlerini sağladığını söyleyebiliriz.

Şimdi Teorem 2.2.3 ve Teorem 2.2.4 ün ispatında kullanacağımız aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 2.2.5 *Eğer negatif olmayan , monoton azalmayan $\{p_n\}$ dizisi (i) $\{p_{n+1} - p_n\}$ ve (ii)$R_n = O(1)$ koşullarını sağlıyorsa, $0 < t \leq \pi$ de düzgün olarak, $n \to \infty$ iken*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k (n-k) e^{ikt} = O(nP_\tau) + O(t^{-2} p_n)$$

dir. (H.P.Dikshit 1969(1))

İspat : *Abel Transformasyondan,*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(n-k)e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k \{p_k(n-k)\} \sum_{\nu=0}^{k} e^{i\nu t}$$

$$= \frac{1-e^{it}}{1-e^{it}} \sum_{k=0}^{n} \Delta_k \{p_k(n-k)\} \sum_{\nu=0}^{k} e^{i\nu t}$$

$$= (1-e^{it})^{-1} \{ \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \{p_k(n-k)\} \left[\sum_{\nu=0}^{k} e^{i\nu t} - \sum_{\nu=0}^{k} e^{i(\nu+1)t} \right] \}$$

$$= (1-e^{it})^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \{p_k(n-k)\} - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \{p_k(n-k)\} e^{i(k+1)t} \right]$$

$$= (1-e^{it})^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p_k(n-k) - \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(n-k-1) + \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(n-k)e^{i(k+1)t} + \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(n-k)e^{i(k+1)t} - \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}e^{i(k+1)t} \right]$$

$$= (1-e^{it})^{-1} \left[np_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\Delta p_k e^{i(k+1)t} - \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}e^{i(k+1)t} \right]$$

$$= (1-e^{it})^{-1} \left[np_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{k} \Delta p_\nu e^{i(\nu+1)t} - \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}e^{i(k+1)t} \right]$$

Dolayısıyla

$$| \sum_{k=0}^{n} p_k(n-k)e^{ikt} | \leq | 1-e^{it} |^{-1} \left[np_0 + \sum_{k=0}^{n-1} | \sum_{\nu=0}^{k} \Delta p_\nu e^{i(\nu+1)t} | + | \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}e^{i(k+1)t} | \right]$$

$$\leq Kt^{-1} \left[np_0 + K \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\tau} (p_{\nu+1}-p_\nu) + p_n \max_{1\leq \nu \leq n} | \sum_{k=1}^{\nu} e^{ikt} | \right]$$

Abel Lemma ve Lemma 2.1.6 dan, $\{p_{\nu+1}-p_\nu\}$ *nonnegatif, artmayan ve* $\{p_n\}$ *azalmayan olduğundan*

$$\le Kt^{-1}\left[np_0 + Knp_{\tau+1} + Kp_n t^{-1}\right]$$

$$\le Knt^{-1}p_{\tau+1} + Kt^{-2}p_n$$

$\{p_n\}$ azalmayan ve $R_n = O(1)$ olduğundan

(aynı zamanda $R_n = O(1) \longrightarrow \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{P_n + p_{n+1}}{P_n} = 1 + \frac{p_{n+1}}{P_n} = O(1)$ ' dir)

$$\le KnP_\tau + Kt^{-2}p_n$$

olur. Bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 2.2.6 *Eğer $\{p_n\}$ nonnegatif ve artmayan ise $n \to \infty$ iken $0 < t \le \pi$ aralığında düzgün olarak,*

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (\nu - k) p_k e^{i(\nu-k)t} = O(t^{-2}) + O\left(t^{-1}P_\tau \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{1}{P_\nu}\right) + O\left(\frac{nt^{-1}P_\tau}{P_{n+1}}\right)$$

olur. (Dikshit,1969(1))

İspat : *Abel dönüşümünü uygularsak,*

$$\sum_{k=0}^{\nu}(\nu - k) \quad \frac{1}{P_\nu} e^{i(\nu-k)t} = \sum_{\nu=k}^{n} \Delta_\nu \left(\frac{\nu-k}{P_\nu}\right) \sum_{\mu=k}^{\nu} e^{i(\mu-k)t} + \frac{n-k+1}{P_{n+1}} \sum_{\mu=k}^{n} e^{i(\mu-l)t}$$

$$= \frac{1-e^{it}}{1-e^{it}} \sum_{\nu=k}^{n} \Delta_\nu \left(\frac{\nu-k}{P_\nu}\right) \sum_{\mu=k}^{\nu} e^{i(\mu-k)t} + \frac{n-k+1}{P_{n+1}} \sum_{\mu=k}^{n} e^{i(\mu-l)t}$$

$$= (1-e^{it})^{-1} \sum_{\nu=k}^{n} \Delta_\nu \left(\frac{\nu-k}{P_\nu}\right) \left\{\sum_{\mu=k}^{\nu} e^{i(\mu-k)t} - \sum_{\mu=k}^{\nu} e^{i(\mu-k+1)t}\right\}$$

$$+ \frac{n-k+1}{P_{n+1}} \left\{\sum_{\mu=k}^{\nu} e^{i(\mu-k)t} - \sum_{\mu=k}^{\nu} e^{i(\mu-k+1)t}\right\}$$

$$= (1-e^{it})^{-1} [\sum_{\nu=k}^{n} \Delta_\nu \left(\frac{\nu-k}{P_\nu}\right) \left\{1 - e^{i(\nu-k+1)t}\right\}$$

$$+ \frac{n-k+1}{P_{n+1}} \left\{1 - e^{i(\nu-k+1)t}\right\}]$$

$$= (1-e^{it})^{-1}\Big[-\sum_{\nu=k}^{n} \frac{p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}}(\nu-k)e^{i(\nu-k+1)t}$$

$$+\sum_{\nu=k}^{n} \frac{1}{P_{\nu+1}} e^{i(\nu-k+1)t} - \frac{n-k+1}{P_{n+1}} e^{i(n-k+1)t}\Big]$$

Şimdi $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (\nu-k)p_k e^{i(\nu-k)t}$ *ifadesinde toplamın sırası değiştirilirse,*

$$\Big| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (\nu-k)p_k e^{i(\nu-k)t} \Big| = \Big| \sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{\nu=k}^{n} \frac{(\nu-k)}{P_\nu} e^{i(\nu-k)t} \Big|$$

$$\leq Kt^{-1}\Bigg[\Big| \sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{\nu=k}^{n} \frac{p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}}(\nu-k)e^{i(\nu-k+1)t} \Big|$$

$$+\Big| \sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{\nu=k}^{n} \frac{1}{P_{\nu+1}} e^{i(\nu-k+1)t} \Big|$$

$$+\frac{1}{P_{n+1}} \Big| \sum_{k=0}^{n} p_k (n-k+1) e^{i(n-k+1)t} \Big| \Bigg]$$

$$= \sum_1 + \sum_2 + \sum_3$$

diyelim.

Tekrar toplamın sırasını değiştirelim,

$$\sum_1 \leq Kt^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}} \Big| \sum_{k=0}^{\nu} p_k (\nu-k) e^{i(\nu-k+1)t} \Big|$$

$$\leq Kt^{-1} \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \frac{\nu p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\nu} p_k + Kt^{-1} \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{\nu p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}} \max_{0\leq\rho\leq\nu} \Big| \sum_{k=0}^{\rho} p_k e^{i(\nu-k+1)t} \Big|$$

(burada $\tau = 0$ *iken Abel lemmadan dolayı ilk toplam* 0 *olarak alındı)*

Lemma 2.1.6 ve $(\nu+1)\,p_\nu \leq P_\nu$ *olduğundan*

$$\leq Kt^{-1}(\tau) + Kt^{-1} P_\tau \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{1}{P_\nu}$$

$\leq Kt^{-2} + Kt^{-1}P_\tau \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{1}{P_\nu}$

Yani

$$\sum_{1} = O(t^{-2}) + O\left(t^{-1}P_\tau \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{1}{P_\nu}\right)$$

olur.

Benzer şekilde,

$$\sum_{2} = Kt^{-1} \mid \sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{\nu=k}^{n} \frac{1}{P_{\nu+1}} e^{i(\nu-k+1)t} \mid$$

$$\leq Kt^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_{\nu+1}} \mid \sum_{k=0}^{\nu} p_k e^{i(\nu-k+1)t} \mid$$

$$\leq Kt^{-1} \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \frac{1}{P_{\nu+1}} \mid \sum_{k=0}^{\nu} p_k e^{i(\nu-k+1)t} \mid + Kt^{-1} \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{1}{P_{\nu+1}} \mid \sum_{k=0}^{\nu} p_k e^{i(\nu-k+1)t} \mid$$

$$\leq Kt^{-1} \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \frac{P_\tau}{P_{\nu+1}} + Kt^{-1}P_\tau \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{1}{P_\nu}$$

$$\leq Kt^{-2} + Kt^{-1}P_\tau \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{1}{P_\nu}$$

Yani

$$\sum_{2} = O(t^{-2}) + O\left(t^{-1}P_\tau \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{1}{P_\nu}\right)$$

olur.

Son olarak aynı şekilde lemma 2.1.6 ve Abel lemmadan,

$$\sum_{3} = Kt^{-1}\frac{1}{P_{n+1}} \mid \sum_{k=0}^{n} p_k(n-k+1)e^{i(n-k+1)t} \mid \leq Kt^{-1}\frac{1}{P_{n+1}}n \mid \sum_{k=0}^{n} p_k e^{i(n-k+1)t} \mid$$

$\leq Kt^{-1}\frac{1}{P_{n+1}}nP_\tau$

olur. Yani

$$\sum_{3} = O\left(\frac{nt^{-1}P_\tau}{P_{n+1}}\right)$$

şeklindedir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi Teorem 2.2.3 ün ispatını verelim.

İspat : *$f(t)$ nin $t = x$ noktasındaki Fourier serisi için*

$$s_k(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}dt$$

elde edilir. Dolayısıyla eğer t_n, $\{s_k(x)\}$ serisinin (N, p_n) ortalaması ise

$$t_n - f(x) = \frac{1}{\pi P_n}\int_0^{\pi} \varphi(t)\left\{\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}\right\} dt$$

Burada kısmi integrasyon yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2} = u, \qquad \varphi(t)dt = dv \text{ alınırsa}$$

$$\Phi(t) \quad = v$$

$$du \quad = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\left(\frac{(k+1/2)\cos(k+1/2)t\sin t/2 - 1/2\cos t/2\sin(k+1/2)t}{sin^2 t/2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}k\frac{cos(k+1/2)t}{\sin t/2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\frac{\cos(k+1/2)t}{\sin t/2}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2\tan t/2}$$

olur. Buradan

$$t_n - f(x) \quad = \int_0^{\pi} \varphi(t)\left\{\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}\right\} dt$$

$$= \frac{\Phi_1(\pi)}{\pi P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(-1)^k - \frac{1}{\pi P_n}\int_0^{\pi}\frac{\Phi_1(t)}{\sin t/2}\left\{\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}k\cos(k+1/2)t\right\} dt$$

$$-\frac{1}{2\pi P_n}\int_0^{\pi}\frac{\Phi_1(t)}{\sin t/2}\left\{\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\cos(k+1/2)t\right\} dt$$

$$+\frac{1}{2\pi P_n}\int_0^{\pi}\frac{\Phi_1(t)}{\tan t/2}\left\{\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}\right\} dt$$

$$= L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

diyelim. Teoremi ispatlamak için $n \to \infty$ iken $j = 1, 2, 3, 4$ için $L_j = o(1)$ olduğunu göstememiz yeterlidir. $t \to 0$ iken $\Phi_1(t)\cot t/2 = o(1)$ olduğundan Teorem 2.2.2 den ve uyarıdan $n \to \infty$ iken $L_4 = o(1)$ olur.

$\{p_n\}$ dizisi nonnegatif, azalmayan ve $R_n = O(1)$ olduğundan $n \to \infty$ iken

$$\frac{1}{P_n} \mid \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(-1)^k \mid \leq K \frac{p_n}{P_n} = o(1)$$

olduğundan $n \to \infty$ iken $L_1 = o(1)$ olur.

Aynı zamanda $\{p_n\}$ dizisi nonnegatif ve $R_n = O(1)$ hipotezlerinden dolayı (N, p_n) metodunun regülerliğinden ve Riemann-Lebesque Teoremden $n \to \infty$ iken $L_3 = o(1)$'dir.

Son olarak $n \to \infty$ iken $L_2 = o(1)$ olduğunu göstermeliyiz. $t \to 0$ iken,

$$\frac{\Phi_1(t)}{\sin t/2} = o(1)$$

ve L_2 de oluşan çekirdek (kernel)

$$\frac{1}{\pi P_n} \left\{e^{-i(n+\frac{1}{2})t}\right\} \sum_{k=0}^{n} p_k(n-k)e^{ikt} =: M_n(t)$$

komplex değerli fonksiyonun reel kısmıdır.

Dolayısıyla $n \to \infty$ iken $L_2 = o(1)$ olduğunu göstermek için, $n \to \infty$ iken

$$I :\equiv \int_0^\pi g(t) M_n(t) dt = o(1)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.Burada $(t \to 0)$ iken $g(t) = o(1)$ dir.

$0 < \delta \leq \pi$ olacak şekildeki sabit δ için integrali

$$I = \left(\int_0^{n^{-1}} + \int_{n^{-1}}^{\delta} + \int_\delta^\pi\right) g(t) M_n(t) dt = I_1 + I_2 + I_3$$

şeklinde parçalayalım.

$$M_n(t) = O\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k(n-k)\right) = O(n)$$

olduğundan, $n \to \infty$ iken

$$I_1 = O\left(n \int_0^{n^{-1}} \mid g(t) \mid dt\right) = o(1)$$

elde ederiz.

$R_n = O(1)$ ve $n \to \infty$ iken $p_n \to \infty$ olması hipotezlerinden $0 < \delta \le t \le \pi$ aralığı için $n \to \infty$ iken Lemma 2.2.5 den

$$M_n(t) = O\left(\frac{n}{P_n}\right) + O\left(\frac{p_n}{P_n}\right) = O\left(\frac{1}{p_n}\right) + o(1) = o(1)$$

buluruz. Dolayısıyla $n \to \infty$ iken $I_3 = o(1)$ dir.

$t \to 0$ iken $g(t) = o(1)$ olduğundan $n \to \infty$ iken $I_2 = o(1)$ olduğunu göstermek için

$$I_2^* \equiv \int_{n^{-1}}^{\delta} | M_n(t) | \, dt \le K$$

olduğunu göstermeliyiz.

Lemma 2.2.5 , $R_n = O(1)$ ve $n \to \infty$ iken $\sum_{k=1}^{n} \frac{| Pk |}{k^2} = O\left(\frac{| Pn |}{n}\right)$ olmasından

$$\begin{aligned} I_2^* &\le K\frac{n}{P_n}\int_{n^{-1}}^{\delta} P(\frac{1}{t})dt + K\frac{p_n}{P_n}\int_{n^{-1}}^{\delta} t^{-2}dt \\ &= K\frac{n}{P_n}\int_{n^{-1}}^{\delta} \frac{P_s}{s^2}ds + KR_n \le K \end{aligned}$$

elde edriz. Dolayısıyla $n \to \infty$ iken $I_2 = o(1)$ dir.

Sonuç olarak bunlar birleştirilirse $n \to \infty$ iken $L_2 = o(1)$ olduğu ispatlanmış olur. Bu da ispatı tamamlar. □

Şimdi de Teorem 2.2.4 ü ispatlayalım.

İspat : *Eğer t'_n , $\{s_k(x)\}$ dizisinin $(C,1).(N,p_n)$ ortalamasını gösteriyorsa,*

$$\begin{aligned} t'_n - f(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k}^{n}\frac{p_{\nu-k}}{P_\nu}s_k(x) - f(x) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{k=0}^{\nu}p_{\nu-k}s_k(x) - f(x) \\ &= \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi}\varphi(t)\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{k=0}^{\nu}p_{\nu-k}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)}\right\}dt \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifadeye daha önce yapıldığı gibi kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
t_n' - f(x) &= \frac{\Phi_1(\pi)}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} p_{\nu-k}(-1)^k \\
&- \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\pi \frac{\Phi_1(t)}{\sin(t/2)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} p_{\nu-k} k \cos(k+1/2)t \right\} dt \\
&- \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^\pi \frac{\Phi_1(t)}{\sin(t/2)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} p_{\nu-k} \cos(k+1/2)t \right\} dt \\
&+ \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^\pi \frac{\Phi_1(t)}{\tan(t/2)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} p_{\nu-k} \frac{\sin[k+(1/2)t]}{\sin t/2} \right\} dt \\
&= C_1 + C_2 + C_3 + C_4
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teoremi ispatlamak için $n \to \infty$ *iken* $j = 1,2,3,4$ *için* $C_j = o(1)$ *olduğunu göstememiz yeterlidir.*

$\{p_n\}$ *dizisi nonnegatif ve artmayan olduğu için Abel lemmadan* $n \to \infty$ *iken* $P_n \to \infty$ *olması gerçeğiyle* $\nu \to \infty$ *iken*

$$
\frac{1}{P_\nu} \mid \sum_{k=0}^{\nu} p_{\nu-k}(-1)^k \mid \leq K \frac{p_0}{P_\nu} = o(1)
$$

dir. $(C,1)$ *metodunun regüler olmasından* $n \to \infty$ *iken* $C_1 = o(1)$ *dir*

$t \to 0$ *iken* $\dfrac{\Phi_1(t)}{\sin(t/2)} \cos t/2 = o(1)$ *ve* $(C,1)$ *ortalama regüler olduğundan Teorem 2.2.2 den* $n \to \infty$ *iken* $C_4 = o(1)$ *olduğu görülür.*

Riemann-Lebesque teorem ve $(C,1)$ *ile* (N,p) *metodlarının regüler olmasından* $n \to \infty$ *iken* $C_3 = o(1)$ *dir.*

Son olarak $t \to 0$ *iken* $\dfrac{\Phi_1(t)}{\sin(t/2)} = o(1)$ *olduğundan* $n \to \infty$ *iken* $C_2 = o(1)$ *olduğunu göstermek için*

$$
J_n(t) := \frac{e^{\frac{it}{2}}}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (\nu-k) p_k e^{i(\nu-k)t}
$$

ve $t \to 0$ *iken* $g(t) = o(1)$ *olmak üzere* $n \to \infty$ *iken*

$$E := \int_0^{\pi} g(t) J_n(t) dt = o(1)$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

Şimdi $0 < \delta \leq \pi$ *olacak şekilde sabit* δ *için*

$$E = \int_0^{\pi} = \left(\int_0^{n^{-1}} + \int_{n^{-1}}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) g(t) J_n(t) dt = E_1 + E_2 + E_3$$

şeklinde integrali parçalayalım.

$$| J_n(t) | < \frac{1}{(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (\nu - k) p_k \leq Kn$$

olduğundan $n \to \infty$ *iken*

$$E_1 = O\left(n \int_0^{n^{-1}} g(t) dt \right) = o(1)$$

dir.

$0 < \delta \leq t \leq \pi$ *aralığı için Lemma 2.2.6 dan* $n \to \infty$ *için* $P_n \to \infty$ *ve* $(C, 1)$ *metodu regüler olduğundan* $n \to \infty$ *iken*

$$J_n(t) = o(1) + O\left(\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{P_\nu} \right) + O\left(\frac{1}{P_{n+1}} \right) = o(1)$$

olur.Dolayısıyla

$$E_3 = o(1)$$

dir. $t \to 0$ *iken* $g(t) = o(1)$ *olduğundan* $n \to \infty$ *iken* $E_2 = o(1)$ *olduğunu ispatlamak için*

$$E_2^* = \int_{n^{-1}}^{\delta} | J_n(t) | dt \leq K$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

Lemma 2.2.6 ve $S_n = o(1)$ *olmasından*

$$E_2^* \leq \frac{K}{n+1}\int_{n^{-1}}^{\delta}\frac{dt}{t^2} + \frac{K}{n+1}\int_{n^{-1}}^{\delta}\frac{P(1/t)}{t}\left\{\sum_{\nu=[\frac{1}{t}]}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right\}dt$$

$$+\frac{K}{P_n}\int_{n^{-1}}^{\delta}\frac{P(1/t)}{t}dt$$

$$\leq K + \frac{K}{n+1}\int_{\delta^{-1}}^{n}\frac{P(s)}{s}\left\{\sum_{\nu=[s]}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right\}ds + K\frac{1}{P_n}\int_{\delta^{-1}}^{n}\frac{P(s)}{s}ds$$

$$\leq K + \frac{K}{n+1}\int_{\delta^{-1}}^{n}\frac{P_s}{s}\left\{\sum_{\nu=[s]}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right\}ds$$

Yani $E_2^* \leq K$ *dır. Şimdi* $S_n = o(1)$ *olduğundan,*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k}\sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{P_\nu} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{P_k}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}S_\nu \leq K$$

dir. Dolayısıyla $n \to \infty$ *iken* $E_2 = o(1)$ *olur. Bunları birleştirirsek* $C_2 = o(1)$ *olduğu görülür.*

Bu da ispatı tamamlar. □

Aşağıdaki teoremlerde l *sonlu bir sayı olmak üzere* $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - l$ *ve* S_n *Teorem 2.2.4 de kullanıldığı gibi olacaktır.*

$\{nB_n(x)\}$ *dizisinin* $(C,1)$ *toplanabilirliğini ve* $(N,\ 1/(n+1)).(C,1)$ *toplanabilirliklerini ele alarak Mohanty ve Nanda (1954) ve Vashney (1949) aşağıdaki sonuçları ispatlamışlardır.*

Teorem 2.2.7 $t \to 0$ *iken* $\psi(t) = o\left(\left\{\log\left(\frac{1}{t}\right)\right\}^{-1}\right)$
ve $0 < \delta < 1$ *için* $a_n = O(n^{-\delta})$, $b_n = O(n^{-\delta})$
ise $\{nB_n(x)\}$ *dizisi* $\frac{l}{\pi}$ *değerine* $(C,1)$ *toplanabilirdir.*

Teorem 2.2.8 *$t \to 0$ iken $\Psi(t) = o\left\{t\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1}\right\}$ ise*
$\{nB_n(x)\}$ dizisi $\frac{l}{\pi}$ değerine $(N,\ 1/(n+1)).(C,1)$ toplanabilirdir.

Silverman (1937) de yayınladığı makalesinin sonucundan $(C,1).(N,1/(n+1))$ toplanabilmenin $(N,1/(n+1)).(C,1)$ toplanabilmeden farklı olduğunu görülür. Fakat burada herhangi $\alpha > 0$ için $(N,1/(n+1))$ toplanabilmenin (C,α) toplanabilmeyi gerektirdiği görülür. Dolayısıyla (C) ele alındığında iyi bilinen sonuç $(C,1).(N,p_n)$ $(N,1/(n+1)).(C,1)$ kadar, uygun $\{p_n\}$ ler için $(C,1+\delta)$ toplanabilmeyi gerektirir. Bundan dolayı Teorem 2.2.8 in hipotezinin $\{nB_n(x)\}$ dizisinin $(C,1)(N,1/(n+1))$ toplanabilirliği için öncü olamasını beklemek doğaldır. Biraz sonra vereceğimiz Teorem 2.2.9 da $p_n = (n+1)^{-1}$ özel durumu için de bu doğrudur.

Şimdi H.P. Dikshit'in 1969 (2) da yayınladığı makaleden aşağıdaki Teoremleri verelim.

Teorem 2.2.9 *$\{p_n\}$ dizisi, nonnegatif, monoton artmayan ve $n \to \infty$ iken $\log n = O(P_n)$ koşullarını sağlasın. Bu durumda*

$$\text{eger} \quad t \to 0 \quad \text{iken} \quad \Psi(t) = o\left(\frac{t}{P_\tau}\right) \tag{2.2.1}$$

ise $\{nB_n(x)\}$ dizisi $\frac{l}{\pi}$ değerine $(C,1)(N,p_n)$ toplanabilirdir. (Dikshit, 1969 (2))

Teorem 2.2.10 *Eğer $t \to 0$ iken $\psi(t) = o(1)$ ve $\{p_n\}$ dizisi, $S_n = O(1)$ olacak şekilde nonnegatif, monoton artmayan bir dizi ise $\{nB_n(x)\}$ dizisi $\frac{l}{\pi}$ değerine $(C,1)(N,p_n)$ toplanabilirdir. (Dikshit,1969 (2))*

Lemma 2.2.11 *Eğer $\{p_n\}$ dizisi*
(i) $(n+1)p_n \le KP_n$, (ii) $S_n = O(1)$ koşullarını sağlıyor ise $n \to \infty$ iken $P_n \to \infty$ dir. (Dikshit, 1969(2))

İspat : *Lemmanın hipotezlerinden dolayı,*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)P_{k+1}} = O(\frac{1}{P_n})$$

olduğundan $n \to \infty$ *iken* $P_n \to \infty$ *olur.* $(n+1)p_n \le KP_n$ *hipotezinden de bu sonuç kolayca görülebilir.*

Lemma 2.2.12 $B_n(x) = b_n \cos nx \; - \; a_n \sin nx$ *olmak üzere*

$$B_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t) n \sin nt dt + \frac{l}{\pi}\{1-(-1)^n\}$$

olur

İspat : $B_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sin nt \cos nx - \cos nt \sin nx\right) dx$

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin n(t-x) dx$

(*burada* $u = x - t$ *donusumu yaparsak*)

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)\sin(-nu)(-du) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\sin(nu)(du)$

{ f *fonksiyonu* 2π *periyotlu olduğundan* $f(x+2\pi) = f(x)$ *o. ü.* f*'i* $(-\infty, +\infty)$ *aralığına genişletebiliriz. Bu yakınsama uç noktalara bağımlı değildir. O halde* $\displaystyle\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt$ *dir.* }

$= -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\sin nu du = -\dfrac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} + \int_0^\pi\right\} f(x-u)\sin nu du$

($u = -t$ *dönüşümü yaparsak)*

$= \dfrac{1}{\pi}\left\{-\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\sin nt dt - \int_0^\pi f(x-t)\sin(nt)(dt)\right\}$

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \{f(x+u) - f(x-t)\}\sin nt dt$

şeklinde yazılır. O halde,

$$nB_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t)\} n \sin nt dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t) - l + l\} n \sin nt dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t) n \sin nt dt + \frac{l}{\pi}\{1-(-1)^n\}$$

Şimdi Teorem 2.2.9 un ispatını verelim.

İspat : $t_n(x)$ *dizisi* $B_n(x)$ *dizisinin* (N, p_n) *ortalamasını göstersin. Bu durumda*

$$t_n(x) - \frac{l}{\pi} = \frac{1}{\pi P_n}\int_0^\pi \psi(t)\left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} k \sin kt\right) dt - \frac{l}{\pi P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(-1)^k$$

$\{p_n\}$ dizisi nonnegatif, artmayan ve $n \to \infty$ iken $P_n \to \infty$ olduğundan Abel lemmayı uygularsak,

$$t_n(x) - \frac{l}{\pi} = o(1) + \frac{1}{\pi P_n}\int_0^\pi \psi(t)\left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} k \sin kt\right) dt$$

elde ederiz.

$\{nB_n(x)\}$ dizisinin $(C,1)(N,p_n)$ ortalamasını $t'_n(x)$ olarak gösterirsek $(C,1)$ ortalamsının regülerliğinden

$$t'_n(x) - \frac{l}{\pi} = o(1) + \frac{1}{\pi(n+1)}\int_0^\pi \psi(t)\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{k=0}^{\nu} p_{\nu-k} k \sin kt\right\} dt$$

yazarız. Dolayısıyla Teoremi ispatlamak için $n \to \infty$ iken

$$g(n,t) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{k=0}^{\nu} p_k(\nu-k)\sin(\nu-k)t \tag{2.2.2}$$

olmak üzere

$$I \equiv \frac{1}{n+1}\int_0^\pi \psi(t) g(n,t) dt = o(1) \tag{2.2.3}$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$0 < \delta \leq \pi$ olacak şekilde yeterince küçük δ için

$$I = \frac{1}{n+1}\left\{\int_0^{n^{-1}} + \int_{n^{-1}}^{\delta} + \int_\delta^\pi\right\}\psi(t) g(n,t) dt = I_1 + I_2 + I_3 \tag{2.2.4}$$

şekline integrali parçalayalım.

$$| g(n,t) | = | \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{k=0}^{\nu} p_k(\nu-k)\sin(\nu-t)t | \leq \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{k=0}^{\nu} p_k(\nu-k) \leq Kn^2 \tag{2.2.5}$$

olduğu için, (2.2.1) hipotezinden $n \to \infty$ iken,

$$I_1 = O\left(n\int_0^{\frac{1}{n}} | \psi(t) | dt\right) = O\left(n\Psi\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{P_n}\right) = o(1) \tag{2.2.6}$$

olur.

$(C,1)$ metodu regüler ve $n \to \infty$ iken $P_n \to \infty$ oluduğundan,

$\delta \leq t \leq \pi$ aralığı için Lemma 2.2.6 göz önüne alınırsa $n \to \infty$ iken

$$\frac{1}{n} g(n,t) = O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right) + O\left(\frac{1}{P_n}\right) = o(1). \tag{2.2.7}$$

bulunur. Dolayısıyla $n \to \infty$ iken

$$I_3 = \frac{1}{n}\int_\delta^\pi \psi(t)g(n,t)dt = o(1)$$

elde edilir.

Son olarak $I_2 = o(1)$ olduğunu ispatlamak için $n \to \infty$ iken Lemma 2.2.6 den

$$I_2 = \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \psi(t)g(n,t)dt = O\left(\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} t^{-2} \mid \psi(t) \mid dt\right) \; + O\left(\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\mid \psi(t) \mid}{t}\left\{P_\tau \sum_{\nu=\tau}^{n} \frac{1}{P_\nu}\right\}\right)$$

$$+O\left(\frac{1}{P_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\mid \psi(t) \mid}{t} P_\tau dt\right)$$
$$= O(I_{21}) + O(I_{22}) + O(I_{23})$$

olur. Burada I_{21} ifadesine kısmi integrasyon uygularsak, yani
$u = t^{-2}, dv = \mid \psi(t) \mid dt$ dersek, $n \to \infty$ iken

$$I_{21} = \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} t^2 \mid \psi(t) \mid dt \;\; = \frac{1}{n}\left[t^{-2}\Psi(t)\right]_{n^{-1}}^{\delta} + \frac{2}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \psi(t)t^{-3}dt \quad \text{(2.2.1) } \textit{hipotezinden}$$

$$= o\left(\frac{1}{P_n}\right) + o(1) + o\left(\frac{1}{n}\int_{n^{-1}}^{\delta} t^{-2}\frac{1}{P_\tau}dt\right)$$

$$= o(1) + o\left(\frac{1}{n}\int_{n^{-1}}^{\delta} t^{-2}dt\right) = o(1)$$

olur.

$V(n,r) := P_r \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{P_k}$ ve $n^{-1} < m^{-1} \leq \delta < (m-1)^{-1}$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} I_{22} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{r=m}^{n-1}\int_{(r+1)^{-1}+0}^{r^{-1}} \; + \; \int_{m^{-1}}^{\delta}\right)\frac{\mid \psi(t) \mid}{t}V(n,\tau)dt \\ &= I_{221} + I_{222} \end{aligned}$$

şeklinde I_{22} ifadesini parçalayalım. $(r+1)^{-1} < t \leq r^{-1}$ aralığında $V(n,\tau) = V(n,r)$ olduğundan kısmi integrasyon uygulayalım $u = \dfrac{V(n,\tau)}{t}$, $\quad dv = \mid \psi(t) \mid dt$ alırsak *buradan,*

$$\int_{(r+1)^{-1}+0}^{r^{-1}} V(n,\tau)\frac{|\psi(t)|}{t}dt = V(n,r)\left[\frac{\Psi(t)}{t}\right]_{(r+1)^{-1}}^{r^{-1}} + \int_{(r+1)^{-1}+0}^{r^{-1}} V(n,\tau)\frac{\Psi(t)}{t^{-2}}dt$$

elde edilir. Buradan (2.2.1) hipotezi göz önüne alınırsa, $(n+1)p_n \leq P_n$ *ve* $\log n = O(P_n)$ *olduğundan*

$$\sum_{r=m}^{n-1} V(n,r) \left[\frac{\Psi(t)}{t}\right]_{(r+1)^{-1}}^{r^{-1}} = \sum_{r=m}^{n-1} V(n,r)\left\{r\Psi\left(\frac{1}{r}\right) - (r+1)\Psi\left(\frac{1}{r+1}\right)\right\}$$

$$= \sum_{r=m}^{n-1} \Delta_r \left\{ r\Psi\left(\frac{1}{r}\right) V(n,r) \right\} - \sum_{r=m}^{n-1}(r+1)\left\{ \Psi\left(\frac{1}{r+1}\right)\Delta_r V(n,r) \right\}$$

$$= m\Psi\left(\frac{1}{m}\right)V(n,m) - nV(n,n)\Psi\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$+o\left[\sum_{r=m}^{n-1}\frac{p_{r+1}}{P_{r+1}}\sum_{k=r}^{n}\frac{1}{P_k} - \sum_{r=m}^{n-1}\frac{1}{P_r}\right]$$

$$= o\left(\sum_{\nu=m}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right) + o(1) + o\left[\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{P_k}\sum_{r=m}^{n}\frac{p_{r+1}}{P_{r+1}}\right] = o(n)$$

elde edilir. O halde

$$\frac{1}{n}\sum_{r=m}^{n-1} V(n,r)\left[\frac{\Psi(t)}{t}\right]_{(r+1)^{-1}}^{r^{-1}} = o(1)$$ *dir ve dolayısı ile*

$$I_{221} = o(1) + \frac{1}{n}\int_{n^{-1}}^{m^{-1}}\frac{\Psi(t)}{t^2}V(n,\tau)dt \qquad (2.2.8)$$

bulunur.Benzere yolla $\frac{1}{n+1}\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{P_k} = o(1)$ *olduğundan,* $(C,1)$ *ortalaması regüler olduğundan ve* $n \to \infty$ *iken* $P_n \to \infty$ *olduğundan*

$$I_{222} = o(1) + \int_{m^{-1}}^{\delta}\frac{\Psi(t)}{t^2}V(n,\tau)dt \qquad (2.2.9)$$

bulunur.

(2.2.8) ve (2.2.9) ifadelerini kullanarak ve $\log n = O(P_n)$ *hipotezinden dolayı*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{r=k}^{n}\frac{1}{P_r} = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{P_r}\sum_{r=k}^{n}\frac{1}{k} = O(n)$$

olacağından, $n \to \infty$ *iken*

$$
\begin{aligned}
I_{22} &= o(1) + \frac{1}{n}\int_{n^{-1}}^{\delta} t^{-2}\Psi(t)V(n,\tau)dt \quad ve \quad (2.2.1)' \quad dan \\
&= o\,[\,\frac{1}{n}\int_{n^{-1}}^{\delta}\frac{1}{t}\left(\sum_{\nu=\tau}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right)dt\,] \\
&\left(\frac{1}{t}\right) = y \quad donusumu \quad yaparsak \\
&= o\,[\,\frac{1}{n}\int_{\delta^{-1}}^{n}\frac{1}{y}\left(\sum_{\nu=[y]}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right)dy\,] = o(1)
\end{aligned}
\tag{2.2.10}
$$

olur.

$I_{22} = o(1)$ *ispatlanırken kullanılan ispat tekniği kullanılırsa* $n \to \infty$ *iken (2.2.1) ve* $\log n = O(P_n)$ *olduğundan*

$$
\begin{aligned}
I_{23} &= \frac{1}{P_n}\int_{n^{-1}}^{\delta}\frac{|\,\psi(t)\,|}{t}P_\tau dt = o(1) + \frac{1}{P_n}\int_{n^{-1}}^{\delta} t^{-2}\Psi(t)P_\tau dt \\
&= o\left(\frac{1}{P_n}\int_{n^{-1}}^{\delta} t^{-1}dt\right) = o(1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $I_{21} = o(1)$, $I_{22} = o(1)$, $I_{23} = o(1)$, *olduğundan* $n \to \infty$ *iken* $I_2 = o(1)$ *olur. Bu da ispatı tamamlar.* □

Şimdi de Teorem 2.2.10 un ispatını verelim

İspat : *Teorem 2.2.9 un ispatında olduğu gibi Teorem 2.2.10 u ispatlamak için Teorem 2.2.10 un hipotezleri altında*

$$
I = \frac{1}{n+1}\left\{\int_0^{n^{-1}} + \int_{n^{-1}}^{\delta}\int_{\delta}^{\pi}\right\}\psi(t)g(n,t)dt = I_1 + I_2 + I_3
$$

olmak üzere, $n \to \infty$ *iken*

$$
I_k = o(1)\ , \qquad (k = 1,2,3) \tag{2.2.11}
$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

(2.2.5) , $\left(\frac{1}{n}g(n,t)\right) = O(n)$ *ve* $t \to 0$ *iken* $\psi(t) = o(1)$ *olduğundan* $n \to \infty$ *iken*

$$
I_1 = o(1) \tag{2.2.12}
$$

olur. (2.2.7) den $n \to \infty$ *iken*

$$
I_3 = o(1) \tag{2.2.13}
$$

olur. Lemma 2.2.6 kullanılarak, $S_n = O(1)$ *ve*
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k}\sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{P_\nu} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{P_k}{k} \le \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu \le K$
olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int_{n^{-1}}^{\delta} \quad | g(n,t) | \, dt &\le \frac{K}{n}\int_{n^{-1}}^{\delta} t^{-2}dt \\
&+\frac{K}{n}\int_{n^{-1}}^{\delta} \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\left\{\sum_{\nu=\tau}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right\}dt + \frac{K}{P_n}\int_{n^{-1}}^{\delta}\frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt \quad 1/t = y \ \textit{donusumu ile} \\
&\le K + \frac{K}{n}\int_{\delta^{-1}}^{n}\frac{P(y)}{y}\left\{\sum_{\nu=[y]}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right\}dy + \frac{K}{P_n}\int_{\delta^{-1}}^{n}\frac{P(y)}{y}dy \\
&\le K + \frac{K}{n}\int_{\delta^{-1}}^{n}\frac{P(y)}{y}\left\{\sum_{\nu=[y]}^{n}\frac{1}{P_\nu}\right\}dy \le K
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Son olarak, $t \to 0$ *iken* $\psi(t) = o(1)$ *olduğundan, (2.2.14) kullanılırsa* $n \to \infty$ *iken*

$$I_2 = \frac{1}{n}\int_{n^{-1}}^{\delta}\psi(t)g(n,t)dt = o(1) \tag{2.2.15}$$

olur.

(2.2.12), (2.2.13), (2.2.15) birlestirilirse (2.2.11) ispatlanmış olur.□

Şimdi daha sonra içerme teoremlerinde kullanacağımız bazı teorem ve lemmaların ispatsız ifadelerini verelim.

Teorem 2.2.13 (N,p) *regüler Nörlund metodu, c, n den bağımsız bir sabit olmak üzere*

$$n \mid p_n \mid \ < \ c \mid P_n \mid \tag{2.2.16}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \mid p_k - p_{k-1} \mid \ < \ c \mid P_n \mid \tag{2.2.17}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mid P_k \mid}{k} \ < \ c \mid P_n \mid \tag{2.2.18}$$

ise (N,p) *Nörlund metodu Fourier Effektive dir.(Hille ve Ark., 1932)*

Teorem 2.2.14 *Eğer* $f \in L[-\pi,\pi]$, 2π *periyotlu periyodik bir fonksiyon ve* $t \to 0$ *iken*

$$\phi(t) := \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2s\} \to \quad 0 \ (C,\alpha)$$

ise bu durumda $f(t)$ nin Fourier serisi her $\beta > \alpha \geq 0$ için $t = x$ de (C,β) toplanabilirdir. (Bosanquet , 1930)

Teorem 2.2.15 *Kabul edelim ki, (p_n), $\alpha = 1$ için (3.1.12) yi sağlayan bir pozitif dizi olsun. $\phi_1(t) = o(1)$ olduğunda (2.0.1) serisi s e (N,p) toplanabilirdir. Bu da (3.1.1) in $\alpha = 1$ iken sağlanması için gerek ve yeter koşuldur. (Dikshit, 1981)*

Lemma 2.2.16

$$T_n := \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta p_k \quad , \quad R_n := (n+1)\frac{p_n}{P_n}$$
$$T_n^* := \frac{1}{| P_n |}\sum_{k=0}^{n}(k+1) | \Delta p_k | \quad , \quad P_n^* := \sum_{k=0}^{n} | p_k | \quad , \quad W_n := \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta p_k$$

olmak üzere

a) $R_n = O(1) \Longleftrightarrow T_n = O(1)$

b) $T_n^* = O(1) \Longrightarrow$ i) $R_n = O(1)$

ii) $P_n^* = O(| P_n |)$ *(Das, 1980)*

iii) $W_n = O(1)$

Lemma 2.2.17 $P_n^{(1)} := \sum_{k=0}^{n} P_k$, $R_n^{(1)} := \dfrac{(n+1)P_n}{P_n^1}$ *olmak üzere eğer,* (p_n) , $P_n^* = O(P_n)$, $(R_n^1) \in l_\infty$ *ve* $(S_n^*) \in l_\infty$ *olacak şekilde herhangi bir dizi ise*

$$| P_k | \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{| P_{n-1}^{(1)} |} \leq K \ , \ (k = 0,1,2,\ldots) \tag{2.2.19}$$

ve

$$\left\{\frac{| P_k^{(1)} |}{k+1}\right\} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{| P_{n-1}^{(1)} |} \leq K \ , \ (k = 0,1,2,\ldots) \tag{2.2.20}$$

dir. (Dikshit, 1970,lemma 5)

$\alpha > 0$ için $F(x)$ Lebesque integralinin α. integrali

$$F_\alpha(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}F(u)du$$

şeklinde tanımlanır.

İyi bilindiği gibi $F_\alpha(t)$ *hemen her* t *için mevcut ve integrallenebilir; ve eğer* $F_\alpha(t)$, $t = t_0$ *da mevcut ise her* $\beta > \alpha$ *için* $F_\beta(t)$ *de mevcuttur. Eğer* $t \to 0$ *iken* $F_\alpha(t) = o(t^\alpha)$ *ise* $F(t)$ $t = 0$ *da* (C, α)*-süreklidir deriz. Yine iyi bilindiği gibi eğer* $F(t)$, (C, α)*-sürekli ise her* $\beta > \alpha$ *için* (C, β)*-süreklidir.*

Tanım 2.2.18 $f(x)$ *in sonlu değer aldığı her* x *noktasında*

(*i*) *Eğer* $\varphi(t)$, (C, α)*-sürekli ise* K_α *regülerdir denir.*

(*ii*) *Eğer* $\psi(t)$, (C, α)*-sürekli ise* $\widetilde{K}_\alpha$ *regülerdir denir. (Astrahan,1936)*

Tanım 2.2.19 *Bir Toplanabilme metoduna ;*

(*i*) *Eğer* $f(x)$ *in Fourier serisi her* K_α *regüler noktasında gerçek değerlerine toplanabilir ise* K_α*-effektive denir.*

(*ii*) *Eğer* $f(x)$ *in eşlenik Fourier serisi* $\widetilde{K}_\alpha$ *regüler noktalarında* $\tilde{f}(x)$ *etoplanabilir ise* $\widetilde{K}_\alpha$*-effective denir. (Astrahan,1936)*

Teorem 2.2.20 *Eğer* (p_n) *dizisi aşağıdaki şartları sağlarsa regüler* (N, p_n) *Nörlund Toplanabilme metodu* K_α *ve* $\widetilde{K}_\alpha$ *effektive dir.*

$$n \mid p_n \mid < cP_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \mid p_k - p_{k-1} \mid < cP_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) \mid p_k - 2p_{k-1} + p_{k-2} \mid < cP_n \tag{2.2.21}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mid P_k \mid}{k^2} < c\frac{P_n}{n} \tag{2.2.22}$$

burada $p_{-1} = 0$ *ve* c, n *den bağımsız pozitif bir sabittir. (Astrahan,1936)*

3 İçerme Teoremlerine Dayanılarak Fourier Serilerinin Nörlund Toplanabilirliği

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ *bir* $f \in L[-\pi,\pi]$ *fonksiyonunun Fourier seri açılımı olsun.* $(C,1)$ 1. *mertebeden Cesaro Toplanabilme metodunu göstermek üzere, Fejer* f*'nin sürekli olduğu her noktada* $(C,1)$ *toplanabilir olduğunu bir teoremle vermiştir. Riesz bu sonucu* $\forall\alpha > 0$ *olmak üzere* (C,α)*'ya genişletmiştir. Bundan sonra birçok araştırmacı,benzer sonuçları garanti edecek şekilde yeterli koşullar koymuşlardır. Daha sonraki yıllarda çalışanlar, matrisler üzerine daha zayıf koşullar koymuşlar ve* f*'nin sürekli olması koşulu yerine daha az kuvetli koşullar bulmuşlardır. Sadece* f*'nin süreklilik şartı yerine değil* f*'ye bağlı olarak türetilmiş serilerin ve diğer serilerin toplanabilirliği için teoremler ispatlamışlardır. Hille ve Tamarkin (1932) de yayınladıkları makalenin başlangıcında birçok teoremi mutlak toplanabilirliğe genişletmişlerdir.*

Bu bölümdeki amaç, bilinen toplanabilirlik teoremleri için Cesaro veya diğer matris metotlarından daha kuvvetli bir A *matrisi üzerine şartlar koyarak her bir teoremin ispatlanabileceğini göstermektir. (Rhoades, 1986)*

Bu bölümdeki birçok sonuç Nörlund Metodu ve diğer toplanabilirlik metotları ile ilgilidir.

3.1'de Nörlund toplanabilirlik için temel içerme teoremleri kuruldu. 3.2'de bu teoremler yardımı ile Fourier serilerinin Nörlund toplanabilirliği ile serilerin ve diğer bağlantılı serilerin Nörlund Toplanabilirliği ile ilgili teoremler tekrar ele alındı.

3.1 İçerme Teoremleri

Lemma 3.1.1 (P_n)*, her* n *için* $P_n \neq 0$ *şartını sağlayan reel veya komplex bir dizi ve*

$$\frac{n^\alpha}{P_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|P_k|}{(k+1)^{1+\alpha}} = O(1) \quad , \quad (\alpha \geq 0) \tag{3.1.1}$$

sağlansın. Bu durumda

$$7\mu = \overline{\lim_n} \frac{(n+1)^\alpha}{| P_n |} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{| P_k |}{(k+1)^{\alpha+1}} \tag{3.1.2}$$

olmak üzere, yeterince büyük n'ler ve $0 < \beta < \dfrac{1}{\mu}$ *için*

$$| P_n | > M n^{\alpha+\beta} \tag{3.1.3}$$

sağlanır.

İspat : (c_n),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{| P_k |}{(k+1)^{\alpha+1}} = \frac{c_n | P_n |}{(n+1)^\alpha}$$

ile tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{c_n | P_n |}{(n+1)^\alpha} - \frac{c_{n-1} | P_{n-1} |}{n^\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{| P_k |}{(k+1)^{\alpha+1}} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{| P_k |}{(k+1)^{\alpha+1}} = \frac{| P_{n-1} |}{n^{\alpha+1}}$$

olur. Buradan

$$c_n | P_n | = | P_{n-1} | c_{n-1} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \left[1 + \frac{1}{n c_{n-1}}\right]$$

olduğundan, $\forall\ n$ *için*

$$c_n | P_n | = | P_0 | c_0 (n+1)^\alpha \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i c_{i-1}}\right) \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

$c_n := \dfrac{(n+1)^\alpha}{| P_n |} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{| P_k |}{(k+1)^{\alpha+1}}$ *olarak tanımlanmıştı. Buna göre* $\mu = \overline{\lim}_n c_n$ *olacağından ve* $\beta < \dfrac{1}{\mu}$ *kabulümüzden,* $\exists n_0 \in N$ *öyle ki* $\forall n \geq n_0$ *için* $c_n < \dfrac{1}{\beta}$ *olur. Bu yüzden* $n > n_0$ *için Teorem 1.1.6 ve (3.1.4)'ü kullanırsak,* $M = c_0 | P_0 | \beta$ *sabit olmak üzere*

$$| P_n | > c_0 | P_0 | \beta (n+1)^\alpha \prod_{i=n_0+1}^{n} \left(1 + \frac{\beta}{i}\right) = M (n+1)^\alpha \prod_{i=n_0+1}^{n} \left(1 + \frac{\beta}{i}\right)$$

$$\sim \quad M n^\alpha \exp\left(\sum_{i=n_0+1}^{n} \frac{\beta}{i}\right) \qquad (\ \textit{Euler} \quad \textit{sabitininden}\ )$$

$$\sim \quad M n^\alpha \exp(\beta \log n) \sim M n^{\alpha+\beta}$$

olarak bulunur. □

Lemma 3.1.2 $c_n(\theta) := \binom{n+\theta}{n}$ *olsun. Lemma 3.1.1 in şartları altında* $0 \le \theta \le \alpha + 1$ *için*

$$I_3 := c_n(\theta)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{| c_k(-\theta) || P_k |}{k+1} = O(| P_n |) \tag{3.1.5}$$

dir.

İspat : $r_{-1} = 0$ *olmak üzere*

$$r_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{| P_k |}{(k+1)^{\alpha+1}}, \quad n > 0$$

diyelim. $r_k - r_{k-1} = \dfrac{P_k}{(k+1)^{\alpha+1}}$ *olacağından*

$$\begin{aligned}
I_3 \ &:= c_n(\theta)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{| c_k(-\theta) || P_k |}{k+1} = c_n(\theta)\sum_{k=0}^{n-1} | c_k(-\theta) | (k+1)^\alpha (r_k - r_{k-1}) \\
&= c_n(\theta)\,\{1^\alpha \mid c_0(-\theta) \mid (r_0 - r_{-1}) + 2^\alpha \mid c_1(-\theta) \mid (r_1 - r_0) + \ldots \\
&+ (n-1)^\alpha \mid c_{n-2}(-\theta) \mid (r_{n-2} - r_{n-3}) + n^\alpha \mid c_{n-1}(-\theta) \mid (r_{n-1} - r_{n-2})\} \\
&= c_n(\theta)\,\{r_0(\mid c_0(-\theta) \mid -2^\alpha \mid c_1(-\theta) \mid) + r_1(2^\alpha \mid c_1(-\theta) \mid -3^\alpha \mid c_2(-\theta) \mid) + \ldots \\
&+ r_{n-3}((n-2)^\alpha \mid c_{n-3}(-\theta) \mid -(n-1)^\alpha \mid c_{n-2}(-\theta) \mid) \\
&+ r_{n-2}((n-1)^\alpha \mid c_{n-2}(-\theta) \mid -n^\alpha \mid c_{n-1}(-\theta) \mid) + n^\alpha \mid c_{n-1}(-\theta) \mid r_{n-1}\} \\
&= c_n(\theta)\,\{n^\alpha \mid c_{n-1}(-\theta) \mid r_{n-1} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-2} r_k((k+1)^\alpha \mid c_k(-\theta) \mid -(k+2)^\alpha \mid c_{k+1}(-\theta) \mid)\Big\}
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

dır.

θ yı $\beta < \theta' < \frac{1}{\mu}$ olacak şekilde seçelim. $n > N$ iken $n+1-\theta \geq 0$ ve $\dfrac{n^\alpha r_n}{|P_n|} < \dfrac{1}{\theta'}$ sağlanacak biçimde bir N seçelim.

$n > N$ için

$$\begin{aligned}
\frac{r_n}{c_n(\theta')} - \frac{r_{n-1}}{c_{n-1}(\theta')} &= \frac{r_n}{c_n(\theta')} - \frac{1}{c_{n-1}(\theta')}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|P_k|}{(k+1)} + \frac{|P_n|}{(n+1)^{1+\alpha}} - \frac{|P_n|}{(n+1)^{1+\alpha}}\right] \\
&= \frac{r_n}{c_n(\theta')} + \frac{1}{c_{n-1}(\theta')}\left[\frac{|P_n|}{(n+1)^{1+\alpha}} - r_n\right] \\
&= \frac{|P_n|}{c_n(\theta')}\left\{\frac{r_n}{|P_n|} + \frac{c_n(\theta')}{c_{n-1}(\theta')}\left[\frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}} - \frac{r_n}{|P_n|}\right]\right\} \\
&= \frac{|P_n|}{c_n(\theta')}\left\{\frac{r_n}{|P_n|} + \frac{\binom{n+\theta'}{n}}{\binom{n-1+\theta'}{n-1}}\left[\frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}} - \frac{r_n}{|P_n|}\right]\right\} \\
&= \frac{|P_n|}{c_n(\theta')}\left\{\frac{r_n}{|P_n|} + \frac{n+\theta'}{n}\left[\frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}} - \frac{r_n}{|P_n|}\right]\right\} \qquad (3.1.7) \\
&= \frac{|P_n|}{(n+1)^{1+\alpha}c_n(\theta')}\left\{\frac{n+\theta'}{n} - \frac{r_n\theta'(n+1)^{1+\alpha}}{n\,|P_n|}\right\}
\end{aligned}$$

olacaktır. Burada, μ'nün tanımı ve $\theta' < \dfrac{1}{\mu}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim}_n\left[\frac{n+\theta'}{n} - \frac{r_n\theta'(n+1)^{1+\alpha}}{n\,|P_n|}\right] = 1 + \underline{\lim}_n\left[-\frac{r_n\theta'(n+1)^{1+\alpha}}{nP_n}\right] \\
&= 1 - \underline{\lim}_n\left[\frac{\theta' r_n(n+1)^{1+\alpha}}{n\,|P_n|}\right] = 1 - \theta'\overline{\lim_n}\frac{(n+1)^\alpha}{|P_n|}\sum_{k=0}^{n}\frac{|P_k|}{(k+1)^{1+\alpha}} = 1-\theta'\mu > 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade ve (3.1.7) göz önüne alınırsa $n > N$ olan n'ler için $\left\{\dfrac{r_n}{c_n(\theta')}\right\}$ dizisi monoton artandır.

$n > N$ için $n^{-\theta'}c_n(\theta')$ ve $n^{\theta} \mid c_n(\theta) \mid$ sınırlı olduğundan Lemma 3.1.1 in şartları altında (3.1.6)'yı tekrar göz önüne alalim.

$$
\begin{aligned}
I_3 &= c_n(\theta)\left\{n^{\alpha} \mid c_{n-1}(\theta) \mid r_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} r_k(k+1)^{\alpha}\left(\mid c_k(-\theta) \mid -(k+2)^{\alpha} \mid c_{k+1}(-\theta) \mid\right)\right\} \\
&= c_n(\theta) \mid c_{n-1}(\theta) \mid n^{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mid P_k \mid}{(k+1)^{1+\alpha}} + c_n(\theta) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-2} r_k\left[(k+1)^{\alpha} \mid c_k(-\theta) \mid -(k+2)^{\alpha} \mid c_{k+1}(-\theta) \mid\right] \\
&= O(P_n) + c_n(\theta) \sum_{k=0}^{n-2} r_k \mid c_k(-\theta) \mid \left[(k+1)^{\alpha} - (k+2)^{\alpha} \frac{\mid c_{k+1}(-\theta) \mid}{\mid c_k(-\theta) \mid}\right] \\
&= O(\mid P_n \mid) + c_n(\theta) \sum_{k=0}^{n-2} r_k \mid c_k(-\theta) \mid \left[\frac{(k+1)^{\alpha} - (k+2)^{\alpha}(k+1) + \theta(k+2)^{\alpha}}{k+1}\right] \\
&< O(\mid P_n \mid) + c_n(\theta) \sum_{k=0}^{n-2} r_k \mid c_k(-\theta) \mid \frac{(k+2)^{\alpha}}{k+1}[k+2-k-1+\theta] \\
&= O(\mid P_n \mid) + \theta c_n(\theta) \sum_{k=0}^{n-2} r_k \mid c_k(-\theta) \mid \frac{(k+2)^{\alpha}}{k+1} \\
&\le O(\mid P_n \mid) + \frac{\theta c_n(\theta) r_n}{c_n(\theta')} \sum_{k=N}^{n-2} \frac{(k+2)^{\alpha} \mid c_k(-\theta) \mid c_{k(\theta)}}{k+1} \\
&= O(\mid P_n \mid) + \frac{c_n(\theta) r_n}{c_n(\theta')} \sum_{k=0}^{n-2} k^{\theta' - \theta + \alpha - 1} \\
&= O(\mid P_n \mid)
\end{aligned}
$$

olur. □

$\alpha \ge 1$ için aşağıdaki teoremin ispatında Lemma 3.1.2 yi kullanmak yerine α için teoremin hipotezlerinin $\alpha - 1$ için

$$
\frac{n^s}{\mid P_n \mid} \sum_{k=1}^{n} k \mid \Delta^{s+1} P_{k-s-1} \mid = O(1) \quad , \quad s = [\alpha + 1] \tag{3.1.8}
$$

ifadesini sağladığını göstermek yeterli olacaktır. Bunun için aşağıdaki Lemmayı ispatsız olarak verelim.

Lemma 3.1.3 *Bir $\{s_n\}$ dizisi verilmiş olsun. $\{S_n^r\}$ dizisi $S_n^0 = s_n$, $S_n^r = \sum_{i=0}^{n} S_i^{r-1}$, $r > 0$ şeklinde tanımlansın. $\lambda \in R$ ve $\{T_n\}$ pozitif sayıların bir dizisi olsun. Kabul edelim ki bir $r > 0$ için*

$$
\sum_{k=1}^{n} k^{\lambda} \mid S_k^{r+1} \mid \le M T_n \tag{3.1.9}
$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\lambda+r+1} \mid s_k \mid \leq MT_n \qquad 3.1.10$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda $1 \leq \rho \leq r$ *tamsayısı için*

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\lambda+r+1-\rho} \mid S_k^{\rho} \mid \leq MT_n \qquad (3.1.11)$$

olur.

Bu Lemma'nın ispatı 1971 yılına H.P. Dikshit tarafından verilmiştir.

$s = [\alpha]$, $r = s+1$, $\lambda = -r$, $s_k = \Delta^{s+1} p_{k-s-1}$, $T_n = n^{-s} \mid P_n \mid$ *olsun. Bu durumda (4.1.12) ve (4.1.10) ifadeleri (4.1.9)'u ve* $\alpha - 1$ *ile* $\rho = 1$ *için (4.1.11), (4.1.13)'ü gerektirir.*

Teorem 3.1.4 *Her* n *için* $P_n \neq 0$ *olmak üzere* $\{p_n\}$ *reel veya kompleks bir dizi olsun. Bu durumda* $\alpha \geq 0$ *olmak üzere*

$$\frac{n^{\alpha}}{P_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mid P_k \mid}{(k+1)^{\alpha+1}} = O(1) \qquad (**)$$

ve $s = [\alpha + \beta]$ *olmak üzere*

$$\frac{n^{s}}{P_n} \sum_{k=1}^{n} k \mid \Delta^{s+1} p_{k-s-1} \mid = O(1) \qquad (3.1.12)$$

ise

$$\mu = \overline{lim}_n \frac{(n+1)^{\alpha}}{\mid P_n \mid} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mid P_k \mid}{(k+1)^{\alpha+1}} \qquad (3.1.13)$$

olmak üzere $0 < \beta < \dfrac{1}{\mu}$ *ve* $[\alpha + \beta] < s+1$ *olan her* β *için*

$$(N,p) \supset (C, \alpha + \beta)$$

olur.

İspat : $0 < \alpha < 1$ *için* $p(x)$ *ve* $q(x)$ *sırasıyla* $\{p_n\}$ *ve* $\{c_n(\theta - 1)\}$ *katsayıları ile iki kuvvet serisi olsun. Eğer* $k(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *dersek,* $\sum_n k_n x^n \sum_n q_n x^n = \sum_n p_n x^n$ *olur.*

Böylece $\sum_n \left(\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu q_{n-\nu}\right) = \sum_n p_n x^n$ *şeklinde olur. Buradan* $p_n = \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu q_{n-\nu}$*'dir.*
$q_n = c_n(\theta-1) = \binom{n+\theta-1}{n}$ *olduğundan*

$q_0 = \binom{\theta-1}{0} = 1$, $q_1 = \binom{\theta}{1}$, $q_2 = \binom{\theta+1}{2}$,... , $q_n = \binom{\theta+n-1}{n}$,... *olur.*
Böylece,

$$p_0 = k_0 q_0 = k_0 \longrightarrow k_0 = \binom{\theta}{0} p_0 \quad ,$$

$$p_1 = k_0 q_1 + k_1 q_0 = p_0 q_1 + k_1 \longrightarrow k_1 = p_1 - p_0 q_1 = \binom{\theta}{0} p_1 - \binom{\theta}{1} p_0$$

,

$$p_2 = k_0 q_2 + k_1 q_1 + k_2 q_0 = p_0 q_2 + \left[\binom{\theta}{0} p_1 - \binom{\theta}{1} p_0\right] q_1 + k_2$$

$$\Longrightarrow k_2 = p_2 - \binom{\theta}{1} p_1 q_1 + \binom{\theta}{1} p_0 q_1 - p_0 q_2$$
$$= \binom{\theta}{0} p_2 - \binom{\theta}{1} p_1 + \left[\binom{\theta}{1}\binom{\theta}{1} - \binom{\theta+1}{2}\right] p_0$$

$$= \binom{\theta}{0} p_2 - \binom{\theta}{1} p_1 + \binom{\theta}{2} p_0$$

olur. Benzer şekilde

$$k_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\theta}{k} p_{n-k} \tag{3.1.14}$$

ile verilir. $c_k(-1-\theta) = \binom{k-1-\theta}{k}$ *şeklinde tanımlandığından*

$$c_k(-1-\theta) = \binom{k-1-\theta}{k} = \frac{(k-1-\theta)!}{(-1-\theta)!} k!$$

$$= \frac{(k-1-\theta)(k-2-\theta)\ldots(-\theta)(-1-\theta)}{(-1-\theta)!} k!$$

$$= (-1)^k \frac{(\theta)(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{\theta}{k}$$ *olur. Böylece*

$$k_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} c_k(-1-\theta)p_{n-k} \tag{3.1.15}$$

bulunur. Lemma 3.1.1 in kabülleri Teoremin kabülleri arasında olduğundan $| P_n | \to \infty$ *dur. Teorem 1.2.17 den*

$Q_n \to \infty$ *olmak üzere*

$$(N,q) \supset (N,p) \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} | k_{n-i} | P_i = O(Q_n)$$

olduğundan $P_n \to \infty$ *olmak üzere*

$$(N,p) \supset (c,\theta) \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} | k_{n-i}^{(\theta)} | c_i(\theta) = O(P_n) \tag{3.1.16}$$

olmalıdır. $0 < \theta \leq \alpha + 1 < 1$ *olsun.* $n = 0$ *ise* $c_n(-1-\theta) = 0$ *ve* $n > 0$ *için*

$$\begin{aligned} c_n(-1-\theta) &= \binom{n-1-\theta}{n} = \frac{(n-1-\theta)!}{(-1-\theta)!n!} = \frac{(n-1-\theta)\dots(-\theta)}{n!} \\ &= -\frac{\theta}{n}\frac{(1-\theta)(2-\theta)\dots(n-1-\theta)}{(n-1)!} = -\frac{\theta}{n}\binom{n-2-\theta}{n-1} \\ &= -\frac{\theta}{n}c_{n-1}(-\theta) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\sum_{i=1}^{n} \frac{\theta c_{i-1}(-\theta)}{i} + c_n(-\theta) = 1$ *olduğunu söyleyebiliriz. Buradan* $n > 0$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} k_n(\theta) &= \sum_{i=0}^{n} c_i(-1-\theta)p_{n-i} = c_0(-1-\theta)p_n + \sum_{i=1}^{n} c_i(-1-\theta)p_{n-i} \\ &= c_0(-1-\theta)p_n + \sum_{i=1}^{n} -\frac{\theta}{i}c_{i-1}(-\theta)p_{n-i} \\ &= c_0(-1-\theta)p_n + \sum_{i=1}^{n} -\frac{\theta}{i}c_{i-1}(-\theta)p_{n-i} + p_n c_n(-\theta) - p_n c_n(-\theta) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p_n(1-c_n(-\theta)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i} c_{i-1}(-\theta) p_{n-i} + p_n c_n(-\theta) \\
&= p_n c_n(-\theta) + p_n \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i} c_{i-1}(-\theta) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i} c_{i-1}(-\theta) p_{n-i} \\
&= p_n c_n(-\theta) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i} c_{i-1}(-\theta)(-p_n + p_{n-i})
\end{aligned}
$$

yazarız. Böylece

$$
\begin{aligned}
\mid k_n(\theta) \mid \quad &\leq c_n(-\theta) \mid p_n \mid + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i} c_{i-1}(-\theta) \mid p_{n-i} - p_n \mid \\
&= c_n(-\theta) \mid p_n \mid + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i} c_{i-1}(-\theta) \mid \sum_{j=n-i}^{n-1} \Delta p_j \mid \\
&\leq c_n(-\theta) \mid p_n \mid + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i} c_{i-1}(-\theta) \sum_{j=n-i}^{n-1} \mid \Delta p_j \mid
\end{aligned} \tag{3.1.17}
$$

elde edilir. Bunu (3.1.16)'de yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} c_i(\theta) \mid k_{n-i}(\theta) \mid \quad &\leq \sum_{k=0}^{n} c_k(\theta) c_{n-k}(-\theta) \mid p_{n-k} \mid \\
&+ \sum_{k=1}^{n} c_{n-k}(\theta) \sum_{r=1}^{k} \frac{\theta}{r} c_{r-1}(-\theta) \sum_{j=k-r}^{k-1} \mid \Delta p_j \mid \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

buluruz. Lemma 3.1.3 den aynı zamanda $P_n^* = O(\mid P_n \mid)$ *sağlanacağından ve* $c_{n+1} > c_n$ *olacağından,*

$$
\begin{aligned}
I_1 \quad &= \sum_{k=0}^{n} c_{n-k}(\theta) c_k(-\theta) \mid p_k \mid \quad < \quad c_n(\theta) \sum_{k=0}^{n} c_k(-\theta) \mid p_k \mid \\
&= c_n(\theta) \sum_{k=0}^{n} c_k(-\theta)(P_k^* - P_{k-1}^*) \\
&= c_n(\theta) \left[c_n(-\theta) P_n^* + \theta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k^* c_k(-\theta)}{k+1} \right] \\
&= O(P_n)
\end{aligned}
$$

olur.

$c_{k-1}(-\theta) - c_k(-\theta) = \frac{\theta}{k} c_k(-\theta)$ *olduğundan*

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{k=1}^{n} c_{n-k}(\theta) \sum_{r=1}^{k} \frac{\theta}{r} c_{r-1}(-\theta) \sum_{j=k-r}^{k-1} | \Delta p_j | \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{n-k}(\theta) \sum_{j=0}^{k-1} | \Delta p_j | \, (c_{k-j-1}(-\theta) - c_k(-\theta)) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} | \Delta p_j | \sum_{k=j+1}^{n} c_{n-k}(\theta) \, (c_{k-j-1}(-\theta) - c_k(-\theta))
\end{aligned}
$$

olacaktır. Her α, β sabitleri için iyi bilinen

$$
\sum_{k=0}^{n} c_{n-k}(\alpha) c_k(\beta) = c_n(\alpha + \beta + 1) \tag{3.1.18}
$$

eşitliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=j+1}^{n} c_{n-k}(\theta) c_k(-\theta) &= \left(\sum_{k=0}^{n} - \sum_{k=0}^{j} \right) c_{n-k}(\theta) c_k(-\theta) \\
&= c_n(\theta - \theta + 1) - \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta) c_k(-\theta) \\
&= n + 1 - \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta) c_k(-\theta)
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Böylece

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{j=0}^{n-1} | \Delta p_j | \left\{ \sum_{k=j+1}^{n} c_{n-k}(\theta) c_{k-j-1}(-\theta) - \sum_{k=j+1}^{n} c_{n-k}(\theta) c_k(-\theta) \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{n} | \Delta p_j | \left\{ n - j - (n+1) + \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta) c_k(-\theta) \right\} \\
&= - \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) | \Delta p_j | + \sum_{j=0}^{n-1} | \Delta p_j | \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta) c_k(-\theta)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
T_n^* = \frac{1}{| P_n |} \sum_{k=0}^{n} (k+1) | \Delta p_k |
$$

yazalım. Bu durumda

$$
T_n^* | P_n | - T_{n-1}^* | P_{n-1} | = (n+1) | \Delta p_n |
$$

olur. Bu yüzden

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mid \Delta p_j \mid \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{T_j^* \mid P_j \mid -T_{j-1}^* \mid P_{j-1} \mid}{j+1} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{T_j^* \mid P_j \mid}{j+1} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{T_{j-1}^* \mid P_{j-1} \mid}{j+1} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$= \frac{T_{n-1}^* \mid P_{n-1} \mid}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T_j^* \mid P_j \mid}{j+1} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1} \frac{T_{j-1}^* \mid P_{j-1} \mid}{j+1} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$= \frac{T_{n-1}^* \mid P_{n-1} \mid}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T_j^* \mid P_j \mid}{j+1} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$-\sum_{j=0}^{n-2} \frac{T_j^* \mid P_j \mid}{j+2} \sum_{k=0}^{j+1} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$= \frac{T_{n-1}^* \mid P_{n-1} \mid}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T_j^* \mid P_j \mid}{j+1} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$-\sum_{j=0}^{n-2} \frac{T_j^* \mid P_j \mid}{j+2} \left(\sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) + c_{n-j-1}(\theta)c_{j+1}(-\theta) \right)$$

$$= \frac{T_{n-1}^* \mid P_{n-1} \mid}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T_j^* \mid P_j \mid}{j+1} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$-\sum_{j=0}^{n-2} \frac{T_j^* \mid P_j \mid}{j+2} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) - \sum_{k=0}^{j} \frac{T_j^* \mid P_j \mid}{j+1} c_{n-j-1}(\theta)c_{j+1}(-\theta)$$

$$= \frac{T^*_{n-1} \mid P_{n-1} \mid}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{j+1} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$- \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{j+2} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{j+2} c_{n-j-1}(\theta)c_{j+1}(-\theta)$$

$$= \frac{T^*_{n-1} \mid P_{n-1} \mid}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-2} T^*_j \mid P_j \mid \left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2} \right) \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta)$$

$$- \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{j+2} c_{n-j-1}(\theta)c_{j+1}(-\theta)$$

Şimdi

$$B := \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{(j+1)(j+2)} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{j+2} c_{n-j-1}(\theta)c_{j+1}(-\theta)$$

olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mid \Delta p_j \mid \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) = \frac{T^*_{n-1} \mid P_{n-1} \mid}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) + B$$

ifadesini elde ederiz. Böylece Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.3 den

$$\begin{aligned}
I_2 &= - \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \mid \Delta p_j \mid + \frac{T^*_{n-1} \mid P_{n-1} \mid}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) \\
&+ \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{(j+1)(j+2)} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{j+2} c_{n-j-1}(\theta)c_{j+1}(-\theta) \\
&= -T^*_{n-1} \mid P_{n-1} \mid + \frac{T^*_{n-1} \mid P_{n-1} \mid}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) - c_0(\theta)c_n(-\theta) \right\} + B \\
&= \frac{T^*_{n-1} \mid P_{n-1} \mid}{n} \{ -n + n + 1 - c_0(\theta)c_n(-\theta) \} + B \\
&< O(\mid P_n \mid) + B \\
&= O(\mid P_n \mid) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{(j+1)(j+2)} \sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) \\
&- \sum_{j=0}^{n-2} \frac{T^*_j \mid P_j \mid}{j+2} c_{n-j-1}(\theta)c_{j+1}(-\theta)
\end{aligned}$$

$$= O(|P_n|) + \sum_{j=0}^{n-2}\left(\frac{1}{|P_j|}\sum_{\nu=0}^{j}(\nu+1)\,|\Delta P_\nu|\right)\frac{|P_j|}{(j+2)}\,.$$

$$\left\{\frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) - c_{n-j-1}(\theta)c_{j+1}(-\theta)\right\} \qquad (3.1.3)\ '\ den$$

$$< O(|P_n|) + M\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|P_j|}{j+2}\left\{\frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{j} c_{n-k}(\theta)c_k(-\theta) - c_{n-j-1}(\theta)c_{j+1}(-\theta)\right\}$$

$$< O(|P_n|) + Mc_n(\theta)\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|P_j|}{(j+1)(j+2)}\sum_{k=0}^{j} c_k(-\theta)$$

$$< O(|P_n|) + Mc_n(\theta)\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|P_j|\,(j+1-\theta)}{(j+1)(j+2)}c_j(-\theta)$$

$$< O(|P_n|) + Mc_n(\theta)\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|P_j|\,c_j(-\theta)}{(j+1)} \qquad Lemma\ 3.1.2\ den$$

$$= O(|P_n|)$$

elde edilir.

$\alpha \geq 1$ ile Teorem 3.1.4 ü ispatlamak için indüksiyondan kolayca kurulabilecek olan aşağıdaki eşitsizliği kullanmalıyız.

$\alpha \geq 1$ ve $s = [\alpha + \beta]$ alalım. $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ ve $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\theta - 1)x^n$ olmak üzere daha önceki gibi $k(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ şeklinde ise $n > 0$ için

$$k_n(\theta) = \sum_{r=0}^{j}\Delta^r p_0 c_{n-r}(r-\theta)(-1)^r + (-1)^s\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^s p_j c_{n-j-s}(s-1-\theta) \qquad (3.1.19)$$

dır.

Şimdi $s < \theta \leq \alpha + \beta < s + 1$ için (3.1.16)'in sağlandığını göstermeliyiz. (3.1.19) u

$$k_n(\theta) = \sum_{r=0}^{j}\Delta^r p_0 c_{n-r}(r-\theta)(-1)^r \quad + (-1)^s\sum_{j=0}^{n-1}\left[\Delta^s p_j - \Delta^s p_n\right]c_{n-j-s}(s-1-\theta)$$
$$+ (-1)^s\Delta^s p_n\sum_{j=0}^{n-1} c_{n-j-s}(s-1-\theta)$$

formunda yazabiliriz. Denklemin aşağıdaki parçası,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}[\Delta^s p_j - \Delta^s p_n]\, c_{n-j-s}(s-1-\theta) &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\Delta^{s+1}p_k c_{n-j-s}(s-1-\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\Delta^{s+1}p_k \sum_{j=0}^{k} c_{n-j-s}(s-1-\theta)\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} c_{n-i}(\theta) \mid k_i(\theta) \mid &\le c_n(\theta) \mid p_0 \mid + \sum_{i=1}^{n} c_{n-i}(\theta) \sum_{r=0}^{s-1} \mid \Delta^r p_0 \mid\mid c_{i-r}(r-\theta) \mid \\ &+ \sum_{i=1}^{n} c_{n-i}(\theta) \mid \Delta^s p_i \mid\mid \sum_{j=0}^{i-1} c_{i-s-j}(s-1-\theta) \mid \\ &+ \sum_{i=1}^{n} c_{n-i}(\theta) \mid \sum_{k=0}^{j-1} \mid \Delta^{s+1} p_k \mid\mid \sum_{j=0}^{k} c_{i-s-j}(s-1-\theta) \mid \\ &= O(P_n) + I_1 + I_2 + I_3\end{aligned}$$

yazalım. Buradan

$$\begin{aligned}I_1 &= \sum_{i=1}^{n} c_{n-i}(\theta) \sum_{r=0}^{s-1} \mid \Delta^r p_0 \mid\mid c_{i-r}(r-\theta) \mid = \sum_{r=0}^{s-1} \mid \Delta^r p_0 \mid \left(\sum_{i=1}^{n} c_{n-i}(\theta) \mid c_{i-r}(r-\theta) \mid \right) \\ &= \sum_{r=0}^{s-1} \mid \Delta^r p_0 \mid \left(\sum_{j=1-r}^{n-r} c_{n-r-j}(\theta) \mid c_j(r-\theta) \mid \right) \\ &= \sum_{r=0}^{s-1} \mid \Delta^r p_0 \mid \left[\sum_{j=1-r}^{s} c_{n-r-j}(\theta) \mid c_j(r-\theta) \mid + \sum_{j=s+1}^{n-r} c_{n-r-j}(\theta) \mid c_j(r-\theta) \mid \right]\end{aligned}$$

olur.

(3.1.17) de $\alpha = \theta$, $\beta = r - \theta$ alınıp uygulamasıyla Lemma 3.1.1 , ve s nin sabit olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}I_1 &= \sum_{r=0}^{s-1} \mid \Delta^r p_0 \mid \left[\sum_{j=1-r}^{s} c_{n-r-j}(\theta) \mid c_j(r-\theta) \mid + \sum_{j=0}^{n-r} c_{n-r-j}(\theta) c_j(r-\theta) \right. \\ &\left. - \sum_{j=0}^{s} c_{n-r-j}(\theta) c_j(r-\theta) \right] \\ &= \sum_{r=0}^{s-1} \mid \Delta^r p_0 \mid \left[\sum_{j=1-r}^{s} c_{n-r-j}(\theta) \mid c_j(r-\theta) \mid + c_{n-r}(r+1) - \sum_{j=0}^{s} c_{n-r-j}(\theta) c_j(r-\theta) \right] \\ &= \sum_{r=0}^{s-1} \mid \Delta^r p_0 \mid \left[\sum_{j=1-r}^{s} c_{n-r-j}(\theta) \mid c_j(r-\theta) \mid + \binom{n-r}{r} - \sum_{j=0}^{s} c_{n-r-j}(\theta) c_j(r-\theta) \right] \\ &= O(\mid P_n \mid)\end{aligned}$$

Lemma 3.1.3 den (3.1.1) ve (3.1.12) $\alpha - 1$ için (3.1.12) nin doğru olmasını gerektirir.

$n = 1$ *için* $d_{n-1} \mid P_{n-1} \mid (n-1)^{1-s} = 0$ *alınmak üzere*

$d_n \mid P_n \mid n^{1-s} - d_{n-1} \mid P_{n-1} \mid (n-1)^{1-s} = n \mid \Delta^s p_{n-s} \mid$ *ile bir* $\{d_n\}$ *dizisi tanımlayalım.*

Bu durumda

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{i=1}^{n} c_{n-i}(\theta) \mid \Delta^s p_i \mid \left[\sum_{j=0}^{i-1} c_{i-s-j}(s-1-\theta)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{n-i}(\theta) \mid \Delta^s p_i \mid \mid c_{i-s}(s-\theta) \mid \\ &< c_n(\theta) \sum_{i=s}^{n} \left[\frac{d_{s+i} \mid P_{s+i} \mid}{(s+i)^{s-1}} - \frac{d_{s+i-1} \mid P_{s+i-1} \mid}{(s+i-1)^{s-1}}\right] \frac{c_{i-s}(s-\theta)}{s+i} \\ &< c_n(\theta) \left[\frac{d_{n+s} \mid P_{n+s} \mid c_{n-s}(\theta)}{(n+s)^s} + \sum_{i=s}^{n-1} \frac{d_{s+i} \mid P_{s+i} \mid}{(s+i)^{s-1}} A\right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} A &= \frac{c_{i-s}(s-\theta)}{s+i} - \frac{c_{i+1-s}(s-\theta)}{s+i+1} \\ &= \frac{\Gamma(i+1-\theta)\left[(1+\theta-s)+(\theta-s-1)s+1\right]}{\Gamma(i+2-s)\Gamma(s+1-\theta)(i+s)(i+s+1)} \end{aligned}$$

dir.Böylece Lemma 3.1.2 ile

$$I_2 < O(\mid P_n \mid) + M \sum_{i=s}^{n-1} \frac{c_i(-\theta) \mid P_{i+s} \mid}{(s+i)^s} = O(\mid P_n \mid)$$

(3.1.18) denkleminde $\alpha = \theta$, $\beta = s - \theta$ *alınması ile*

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{i=1}^{n} c_{n-i}(\theta) \sum_{k=0}^{i-1} \mid \Delta^{s+1} p_k \mid \mid \sum_{j=0}^{k} c_{i-j-s}(s-1-\theta) \mid \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mid \Delta^{s+1} p_k \mid \left[\binom{n-k}{s+1} - \binom{n+1}{s+1} + \sum_{i=s}^{k} c_{n-i}(\theta) c_{i-s}(s-\theta)\right] \\ &= I_4 + I_5 \end{aligned}$$

yazalım.

$$\mid \binom{n-k}{s+1} - \binom{n+1}{s+2} \mid < N n^s (k+1)$$

olduğu indiksiyon ile gösterilir. Bu yüzden (3.1.12) ile

$$\begin{aligned} I_4 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mid \Delta^{s+1} p_k \mid \left[\binom{n-k}{s+1} - \binom{n+1}{s+1}\right] \\ &< M n^s \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \mid \Delta^{s+1} p_k \mid = O(\mid P_n \mid) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} I_6 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mid \Delta^{s+1} p_k \mid \sum_{i=s}^{k} c_{i-s}(s-\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \mid \Delta^{s+1} p_k \mid c_{k-s}(s+1-\theta) \\ &= \sum_{k=s}^{n-1} \mid \Delta^{s+1} p_k \mid c_{k-s}(s+1-\theta) \end{aligned}$$

olmak üzere

$I_5 = \sum_{k=0}^{n-1} \mid \Delta^{s+1} p_k \mid \sum_{i=s}^{k} c_{n-i}(\theta) c_{i-s}(s-\theta) < c_n(\theta) I_6$

elde edilir.

(3.1.12) yi kullanarak $r_n \mid P_n \mid n^{-s} - r_{n-1} \mid P_{n-1} \mid (n-1)^{-s} = n \mid \Delta^{s+1} p_{n-s} \mid$ *ile bir* $\{r_n\}$ *dizisi tanımlayalım. Bu durumda*

$$\begin{aligned} I_6 &= \sum_{k=s}^{n-1} \mid \Delta^{s+1} p_k \mid c_{k-s}(s+1-\theta) \\ &= \sum_{k=s}^{n-1} \left[\frac{r_{k+s} \mid P_{k+s} \mid}{(k+s)^s} - \frac{r_{k+s-1} \mid P_{k+s-1} \mid}{(k+s-1)^s} \right] \frac{c_{k-s}(s+1-\theta)}{k+s} \end{aligned}$$

olacaktır. I_2 *için yapılan işlemler aynen yapılırsa* $I_6 = O(1)$ *elde edilir.*□

Teorem 3.1.4 ün $\alpha \leq 1$ *ve* $\{p_n\}$ *artmayan özel durumu Thorpe (1975) tarafından ispatlanmıştır.*

3.2 Nörlund Toplanabilirliğe Uygulamalar

$f \in L(-\pi, \pi)$, 2π *periyotlu periyodik bir fonksiyon ve onun fourier seri gösterimi (daha önceden aldığımız gibi),*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{3.2.1}$$

olsun. (3.2.1) in eşlenik serisi

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \tag{3.2.2}$$

ve (3.2.1) in türev serisi

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n(t) \tag{3.2.3}$$

dir.

Burada şu standart notasyonları kullanacağız :

$t\varphi_1(t) = \int_0^t \varphi(u)du \quad , \quad S_n(r) = \frac{n^{r-1}}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{k^r}$

$2\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \ , \ 2\psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$

$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\phi(u)du \ , \ \alpha > 0 \ , \ \Phi_0(t) = \phi(t)$

$\phi_\alpha(t) = \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}\Phi_\alpha(t) \ , \ \alpha > 1$

$\psi_\alpha(t)$ *ve* $\Psi_\alpha(t)$ *için de aynı durum geçerlidir. Şimdi daha iyi anlaşılsın diye Tamarkin tarafından verilen Teorem 2.2.13 ü tekrar verelim.*

Sonuç 3.2.1 : (N,p) *regüler Nörlund metodu*

$R_n^* := \frac{n \mid p_n \mid}{\mid P_n \mid} = O(1), \ S_n^* := \frac{1}{\mid P_n \mid}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mid P_k \mid}{k+1}$ *ve* $T_n^* := \frac{1}{\mid P_n \mid}\sum_{k=0}^{n}(k+1) \mid \Delta p_k \mid = O(1)$

şartlarını sağlasın. Bu durumda (N,p) *Fourier-Effektiftir. [Teorem 2.2.13]*

Teorem 3.1.4 den bir $\beta > 0$ *için* $(N,p) \supset (C,\beta)$ *dır.*

Şimdi $\alpha = 0$ *için Bosanquet (1930) nun aşağıdaki sonucunu kullanalım.*

Teorem A *Eğer* $f \in L[-\pi,\pi]$, 2π *periyotlu periyodik bir fonksiyon ve* $\phi_\alpha(t) = o(t^\alpha)$ *ise (3.2.1) serisi her bir* $\beta > \alpha \geq 0$ *için* $t = x$ *de* (C,β) *toplanabilirdir.*

Sonuç 3.2.2 : *Eğer* $2\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ *olmak üzere* $\phi_1(t) = o(1)$ *ve* (p_n) *dizisi* $p_n \to \infty$ *olacak şekilde nonnegatif, azalmayan,* $\{p_{n+1} - p_n\}$ *artmayan,*

$$R_n = O(1) \quad ve \quad \frac{n}{\mid P_n \mid}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mid P_k \mid}{k^2} = O(1)$$

ise (3.2.1) serisi $t = x$ *de* (N,p) *toplanabilirdir.*

Bu sonuçta $\alpha = 1$ *için Teorem 3.1.4 ün* $(**)$ *koşulu gerçeklenir.*

$\{p_{n+1} - p_n\}$ *dizisinin artan olmaması ise* $\Delta^2 p_n \leq 0$ *olmasını gerektirir.*

(p_n) *azalmayan olduğundan* $\Delta p_n \leq 0$ *ve ayrıca* $R_n = O(1)$ *ve* $p_n \to \infty$ *ise* $\lim \frac{n}{P_n} = 0$

gerçeklenir. Tüm bu sonuçları kullanırsak;

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{n}{P_n}\sum_{k=1}^{n} k \mid \Delta^2 p_{k-2} \mid = \frac{n}{P_n} \mid \Delta^2 p_{-1} \mid + \frac{n}{P_n}\sum_{k=2}^{n} k(-\Delta^2 p_{k-2}) \\
&= O(1) - \frac{n}{P_n}\sum_{k=2}^{n} k(\Delta p_{k-2} - \Delta p_{k-1}) \\
&= O(1) - \frac{n}{P_n}\left[\sum_{k=2}^{n}(k\Delta p_{k-2} - (k+1)\Delta p_{k-1}) + \sum_{k=2}^{n}\Delta p_{k-1}\right] \\
&= O(1) - \frac{n}{P_n}\left[2\Delta p_0 + p_1 - p_n - (n+1)\Delta p_{n-1}\right] \\
&< O(1) + \frac{n}{P_n}(-2\Delta p_0 + p_n) = O(1)
\end{aligned}$$

Böylece Teorem 3.1.4 den bazı $\beta > 0$ için $(N, p_n) \supset (C, 1+\beta)$ dır. Şimdi Teorem A uygulanabilir.

Sonuç 3.2.3 : *Kabul edelim ki (p_n) $\alpha = 1$ için (3.1.12) yi sağlayan bir pozitif dizi olsun $\phi_1(t) = O(1)$ olduğunda (3.2.1) serisi s e (N,p) toplanabilirdir. Bu da (3.1.1) in $\alpha = 1$ iken sağlanması için gerek ve yeter koşuldur. [Teorem 2.2.15]*

İspat *(Yeter şart :) Sonuç 3.2.2 de $(N,p) = (C, 1+\beta)$,$(0 < \beta < 1)$ olduğu durumu Teorem A' ile gösterelim. Teorem 3.1.4 den sonuç 3.2.2 nin şartları bazı $\beta > 0$ lar için $(N,p) \supset (C, 1+\beta)$ olmasını gerektirir. sonuç Teorem A' den açıktır.*

Sonuç 3.2.4 : *Eğer ϕ sonuç 3.2.2 deki gibi $\phi_1(t) = o(1)$,(p_n) dizisi negatif olmayan, artmayan*

$$S_n = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_k}{k+1} = O(1)$$

şeklide bir dizi ise (3.2.1) serisi $t = x$ de $(C,1)(N,p)$ toplanabilirdir. [Teorem 2.2.4]

Das (1968, sh. 34) dan $(C,1)(N,p) \supset (N,p)$ olduğu biliniyor. Geriye,

$$(N,p) \supset (C, 1+\beta)$$

olduğunu göstermek; yani geriye (p_n) e Teorem 3.1.4 ün şartlarını sağlatmak kalıyor.

$P_n^{(1)} := \sum_{k=0}^{n} P_k$ *olarak tanımlayalım*

$$\frac{n}{P_n^{(1)}}\sum_{k=1}^{n} k \quad \mid \Delta^2 P_{k-2} \mid = \frac{n}{P_n^{(1)}}\sum_{k=1}^{n} k \quad \mid \Delta p_{k-1} \mid = \frac{n\, P_n}{P_n^{(1)}} T_n$$

dir. P_n artan olduğundan,$P_n^{(1)} \le (n+1)P_n$ dir.(p_n) azalan olduğundan

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \ge (n+1)p_n$$

dir, böylece $R_n = O(1)$ dir.

Lemma 2.2.16 a) $T_n = O(1)$ dir.

$$T_n^{(1)} := \frac{1}{P_n^{(1)}}\sum_{k=0}^{n}(k+1) \mid \Delta P_k \mid = \frac{1}{P_n^{(1)}}\sum_{k=0}^{n}(k+1)p_{k+1} = O(1)\frac{1}{P_n^{(1)}}\sum_{k=0}^{n} P_k = O(1).$$

dir. Lemma 2.2.16 b) den $T_n^{(1)} = O(1)$ olması $R_n^{(1)} := \dfrac{nP_n}{P_n^{(1)}} = O(1)$ olmasını gerektirir. Lemma 2.2.17 den $R_n^{(1)} = O(1)$ ve $S_n = O(1)$ olması

$$\frac{\mid P_k^{(1)} \mid}{k+1}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{\mid P_{n-1} \mid} = O(1)$$

olmasını gerektirir, bir başka deyişle

$$\frac{n}{P_n^{(1)}}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k^{(1)}}{k^2} = O(1)$$

sağlanır.

Teorem 3.1.4 ve Teorem A' den sonuç açıktır.

Sonuç 3.2.5 : *(p_n) negatif olmayan, $P_n \to \infty$ olacak şekilde artmayan bir dizi olacak şekilde (N,p) regüler Nörlund metodu olsun. Eğer $\dfrac{n}{P_n} = O(1)$ ve $\Phi(t) = O\left(\dfrac{t}{P_\tau}\right)$ ise (3.2.1) serisi $t = x$ de s ye (N,p) toplanabilirdir. (Tamarkin,1932)*

$B := (N,p_n)(C,1)^{-1}$ ile tanımlansın . Bu durumda

$$b_{nk} := \begin{cases} \dfrac{k+1}{P_n}(p_{n-k} - p_{n-k-1}) & ,k < n \\ \\ \dfrac{(n+1)p_0}{P_n} & ,k = n \\ \\ 0 & ,d.y. \end{cases}$$

$e = (1,1,1,\ldots)$ olsun. Açık olarak $Be = e$ ve her k için $\lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0$ dır. (p_n) artmayan olduğundan

$\sum_{k=0}^{n} | b_{nk} |= -\sum_{k=0}^{n-1} b_{nk} + b_{nn} = 2b_{nn} - 1$ *dir.* $\frac{n}{P_n} = O(1)$ *olduğundan B sonlu norma sahiptir. Bu yüzden* $(N,p) \supset (C,1)$ *dir.*

$P_n \to \infty$ *olması* $\frac{n}{P_n} = O(1)$ *den hemen elde edilir.*

Böylece

$$\frac{\Phi(t)}{t} = \frac{1}{P_\tau}\frac{P_\tau}{t}\Phi(t) = O(1).o(1) = o(1)$$

olur. Sonuç Lebesque Teoreminden (Teorem 1.4.8) elde edilir.

Sonuç 3.2.6 : *Kabul edelim ki* (p_n) *dizisi,*

$$(i) \qquad \frac{n}{P_n}\sum_{k=1}^{n} | \Delta p_k | = O(1)$$

$$(ii) \qquad \frac{n}{P_n}\sum_{k=1}^{n} k | \Delta^2 p_k | = O(1)$$

$$(iii) \qquad \frac{n}{P_n}\sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^2} = O(1)$$

olsun. Bu durumda

$$\int_0^t u^{-1} | f(x+u) - f(x-u) - 2uf'(x) | du = o(t)$$

olduğu her noktada (3.2.3) serisi $f'(x)$ *e* (N,p) *toplanabilirdir.*

Sonuç 3.2.6 da $(N,p) = (C, 1+\beta)$, $(0 < \beta < 1)$ *olduğu özel duruma Teorem* A'' *diyelim. Bu durumda (ii) ve (iii) şartları Teorem 3.1.4 ün hipotezlerini sağlar. Böylece bazı* $0 < \beta < 1$ *ler için* $(N,p) \supset (C, 1+\beta)$ *dır. Şimdi Teorem* A'' *yü kullanalım.*

Sonuç 3.2.6 Teorem 2.2.20 nin bir genellemesidir.

Sonuç 3.2.7 : *Eğer* $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - l = o(1)$ *ve* (p_n) *negatif olmayan,* $S_n = O(1)$ *olacak şekilde artmayan bir dizi ise* $\{nB_n(x)\}$, $\frac{l}{\pi}$ *ye* $(C,1)(N,p)$ *toplanabilirdir. [Teorem 2.2.10]*

Sonuç 3.2.4 ün ispatını kullanırsak, bazı $0 < \beta < 1$ *için* $(C,1)(N,p) \supset (N,p) \supset (C, 1+\beta)$ *elde edilir. Şimdi Teorem B yi uygulayalım.*

Teorem B *Eğer* $\Psi(t) = o(t)$ *olacak şekilde bir* $D(x)$ *fonksiyonu varsa ve özel olarak eğer* $\psi(t) = o(1)$ *ise* $\{nB_n(x)\}$ *her* $\alpha > 1$ *için* $\frac{D(x)}{\pi}$ *ye* (C,α) *toplanabilirdir. (Fejer, 1913)*

Sonuç 3.2.8: (p_n);

$$(i) \quad \frac{n}{|P_n|}\sum_{k=1}^{n} k \mid \Delta^2 p_{k-2} \mid = O(1)$$
$$(ii) \quad \frac{n}{|P_n|}\sum_{k=1}^{n} \frac{|P_k|}{k^2} = O(1)$$

şartlarını sağlasın. $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - D(x)$ *olsun. Eğer* $t \to 0$ *iken* $\Psi(t) = \int_0^t |\psi(u)| \, du = o(t)$ *ve özel olarak eğer* $\psi(t) = o(1)$ *ise* $\{nB_n(x)\}$, $\frac{D(x)}{\pi}$ *ye* (N,p) *toplanabilirdir. (Sıddıqı, 1978, Teo 1)*

(p_n) *üzerindeki şartlar, Teorem 3.1.4 den bazı* $0 < \beta < 1$ *ler için* $(N,p) \supset (C, 1+\beta)$ *olmasını sağlar. Şimdi Teorem B yi kullanalım.*

Sonuç 3.2.9: *Eğer* $\psi_1(t) = \int_0^t \psi(u)du = o(t)$ *olacak şekilde bir* $D(x)$ *fonksiyonu varsa* $\{nB_n(x)\}$ *dizisinin* $\frac{D(x)}{\pi}$ *ye* (N,p) *toplanabilir olması için*

$$(i) \quad \frac{n^2}{|P_n|}\sum_{k=1}^{n} k \mid \Delta^3 p_k \mid = O(1)$$
$$(ii) \quad \frac{n^2}{|P_n|}\sum_{k=1}^{n} \frac{|P_k|}{k^3} = O(1)$$

koşulları sağlanmalıdır.

(p_n) *üzerindeki bu şartlar Teorem 3.1.4 de bazı* $\theta > 2$ *için* $(N,p) \supset (C,\theta)$ *olmasını gerektirir. şimdi Chow'un aşağıdaki sonucunu uygulayalım.*

Teorem C *Eğer* $\psi_1(t) = o(t)$ *olacak şekilde bir* $D(x)$ *fonksiyonu varsa her* $\alpha > 2$ *için* $\{nB_n(x)\}$ *dizisi* $\frac{D(x)}{\pi}$ *ye* (C,α) *toplanabilirdir. (Chow, 1941)*

4 Fourier Serileri ve Eşlenik Serilerinin Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirliği

4.1 Giriş

Bu Bölümde kullanacağımız bazı ifadeler şunlardır:

$$\begin{aligned} R_n &= (p * q)_n \\ N_n(t) &= \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} \\ \bar{N}_n(t) &= \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

Bu ifadelerden başka $0 \leq t < \infty$ *için* $p(t)$, $P(t)$ *ve* $0 \leq t < n+1$ *için* $r_n(t)$, $R_n(t)$ *fonksiyonları* $(k = 0, 1, 2, ...)$ *olmak üzere* $k \leq t < k+1$ *için*

$$\begin{aligned} p(t) &= p_k \\ P(t) &= \int_0^t p(u)du \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2..., n$ *olmak üzere* $k \leq t < k+1$ *için*

$$\begin{aligned} r_n(t) &= p_k q_{n-k} \\ R_n(t) &= \int_0^t r_n(u)du \end{aligned}$$

Şeklinde tanımlansın.

Teorem 4.1.1 (N, p_n, q_n) *regüler metodu aşağıdaki gibi tanımlansın.* $u \geq 0$ *için* $p(u)$ *monoton, artmayan, mutlak pozitif* $p_n = p(n)$, $q(u)$ *monoton, azalmayan, mutlak pozitif* $q_n = q(n)$ *şeklinde fonksiyonlar olsunlar.*

$$\lambda(t)\ ,\ n \to \infty \quad iken \quad \lambda(n) = O(P_n) \tag{4.1.1}$$

koşulunu sağlayan uygun pozitif, azalmayan t'ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$n \to \infty \quad iken \quad R(u) = \int_0^u p(x)q(u-x)dx \tag{4.1.2}$$

ve

$$n \to \infty \quad iken \quad q_n \int_1^n \frac{\lambda(u)}{u} du = O(R_n) \tag{4.1.3}$$

şeklinde alalım.

Eğer $t \to 0$ *iken*

$$G(t) = \int_0^t |\ \phi(u)\ |\ du = O\left(\frac{t\lambda(1/t)}{P(1/t)}\right) \tag{4.1.4}$$

ise

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \tag{4.1.5}$$

serisi $x = t$*'de* $f(t)$ *değerine* (N, p, q) *toplanabilirdir. (Singh, A.N., 1990)*

Teorem 4.1.2 *Regüler* (N, p, q) *Nörlund Metodu yukarıdaki teoremde olduğu gibi tanımlansın ve (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) sağlansın. Eğer* $t \to 0$ *iken*

$$\int_0^t |\ \psi(u)\ |\ du = O\left(\frac{t\lambda(1/t)}{P(1/t)}\right)$$

ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \tag{4.1.6}$$

eşlenik serisi

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t) \cot \frac{1}{2} t dt$$

değerine integralin Lebesque anlamında var olduğu tüm noktalarda (N, p, q) *toplanabilirdir. (Singh, A.N, 1990)*

Bu teoremleri ispatlayabilmek için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız var.

Lemma 4.1.3 $0 < t \leq \pi$ *için*

$$|\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t}| = O\left(\frac{P(\frac{1}{t})}{t}\right)$$

ve

$$|\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t}| = O\left(\frac{P(\frac{1}{t})}{t}\right)$$

(Singh, A.N., 1963)

İspat : $0 < t \le \pi$ *için* $\sin \frac{1}{2}t \ge \frac{t}{\pi}$ *olduğu için*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| \le \frac{\pi}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k \sin(n-k+\frac{1}{2})t \right|$$

olur.

$q \le \frac{1}{t} < q+1$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k \sin(n-k+\frac{1}{2})t \right| &\le \frac{\pi}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k \sin(n+\frac{1}{2})t \cos kt \right| \\ &+ \frac{\pi}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k \cos(n+\frac{1}{2})t \sin kt \right| \\ &\le \frac{\pi}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k coskt \right| + \frac{\pi}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k \sin kt \right| \end{aligned}$$

Şimdi $\left| \sum_{k=0}^{n} p_k coskt \right| = \left| \psi_n(t) \right|$ *diyelim*

$$\begin{aligned} \left| \psi_n(t) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{q} p_k coskt + \sum_{k=q+1}^{n} p_k coskt \right| \\ &\le \left| \sum_{k=0}^{q} p_k coskt \right| + \left| \sum_{k=q+1}^{n} p_k coskt \right| \end{aligned}$$

Abel Lemma'dan

$$\begin{aligned} & \le P_q + p_{q+1} \frac{1}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|} \\ \le P_{[\frac{1}{t}]} + p_{q+1} \frac{\pi}{t} \quad & \le P_{[\frac{1}{t}]} + p_{q+1} \pi (q+1) \\ & \le P_{[\frac{1}{t}]} + \pi (p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_q) \\ & \le P_{[\frac{1}{t}]} + \pi P_{[\frac{1}{t}]} \\ & = O(P_{[\frac{1}{t}]}) \end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde

$$\left| \sum_{k=0}^{n} p_k \sin kt \right| = O\left(P_{[\frac{1}{t}]} \right)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\frac{\pi}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k coskt \right| + \frac{\pi}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_k \sin kt \right| = O\left(\frac{P\left[\frac{1}{t}\right]}{t} \right)$$

elde edilmiş olur. Bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 4.1.4 $0 < t \leq \pi$ *için*

$$N(t) = \frac{1}{2\pi R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

ise

$$|\, N(t)\, | = O\left(\frac{q_n P(1/t)}{R_n t}\right)$$

olur. (Singh, A.N., 1990)

İspat : *Sabit n için k ile q_{n-k} artmayan ve $n \to \infty$ iken*

$$|\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}|$$

artan olduğundan

$$|\, N(t)\, | \leq \frac{q_n}{R_n} \,|\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}| = O\left(\frac{q_n P\left(\frac{1}{t}\right)}{R_n t}\right)$$

olur. □

Lemma 4.1.5 *Eğer* $0 < t \leq \pi$ *için*

$$\bar{N}(t) = \frac{1}{2\pi R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

ise

$$|\, \bar{N}(t)\, | = O\left(\frac{q_n P(1/t)}{R_n t}\right)$$

olur. (Singh, A.N., 1990)

İspat : *Sabit n için k ile q_{n-k} artmayan ve $n \to \infty$ iken*

$$|\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}|$$

artan olduğundan

$$|\, \bar{N}(t)\, | \leq \frac{q_n}{R_n} \,|\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}| = O\left(\frac{q_n P\left(\frac{1}{t}\right)}{R_n t}\right)$$

olur. □

Lemma 4.1.6 *(4.1.3)' den $n \to \infty$ iken*

$$q_n = o(R_n)$$

dir. (Singh A.N., 1990)

İspat : *$\lambda(n)$ pozitif azalmayan fonksiyon olduğundan (4.1.3) den*
$n \to \infty$ *iken* $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x} = o\left(\frac{R_n}{q_n}\right)$ *dir.*
$n \to \infty$ *iken sol taraf* ∞ *olduğundan* $q_n = o(R_n)$ *elde edilir.* □

Şimdi Teorem 4.1.1 in ispatını verelim.

İspat : *Eğer $s_n(x)$ (4.1.5) serisinin n'inci kısmi toplamlar dizisi olarak alınırsa*

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \phi(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{1}{2}t)}dt$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} t_n^{p,q} - f(x) &= \frac{1}{2\pi R_n}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\int_0^\pi \phi(t)\frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{1}{2}t)}dt \\ &= \int_0^\pi \phi(t)N(t)dt \end{aligned}$$

şeklindedir. Teoremin ispatını yapmak için $n \to \infty$ iken

$$I = \int_0^\pi \phi(t)N(t)dt = o(1)$$

olduğunu göstermemiz gereklidir.

$0 < \delta < \pi$ *için*

$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi \phi(t)N(t)dt &= \left[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_\delta^\pi\right]\phi(t)N(t)dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

yazalım.

$0 \le t \le \frac{1}{n}$ *aralığında düzgün olarak*

$$\begin{aligned} |\, N(t)\,| &\le \frac{1}{2\pi R_n}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\frac{(n-k+\frac{1}{2})t}{\frac{t}{\pi}} \\ &= O(n) \end{aligned}$$

olduğundan $n \to \infty$ iken teoremin hipotezinden

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{1}{n}} \phi(t)N(t)dt = O(n)\int_0^{\frac{1}{n}} \mid \phi(t) \mid dt \\ &= O(n)O\left(\frac{\lambda(n)}{nP(n)}\right) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

Lemma 4.1.4 den M herbir işlemde değişik olabilecek pozitif sabit olmak üzere

$$I_2 = \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \phi(t)N(t)dt \le \frac{Mq_n}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \mid \phi(t) \mid \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt$$

ifadesi elde edilir.

$\epsilon > 0$ verilsin, $0 < t \le \delta$ olacak şekilde bir δ seçelim öyle ki,

$$\mid G(t) \mid = \int_0^t \mid \phi(u) \mid du = O\left(\frac{t\lambda(1/t)}{P(1/t)}\right) \le \frac{\epsilon\, t\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}{P\left(\frac{1}{t}\right)}$$

olsun.

Dolayısıyla,

$$u = \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \quad , \quad dv = \mid \phi(t) \mid$$

alıp kısmi integrasyon yaparsak M'ler farklı olabilecek şekilde,

$$\begin{aligned} \mid I_2 \mid &\le \frac{Mq_n}{R_n}\left[G(t)\frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\right]_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \frac{Mq_n}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} G(t)\frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt \\ &+\frac{Mq_n}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} G(t)\frac{dP\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \\ &= I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3} \end{aligned}$$

olur.

Lemma 4.1.6, (4.1.1) ve (4.1.4) den $n \to \infty$ iken eğer $M(\delta)$ δ'ya bağlı bir sabit olarak alınırsa, sabit δ için

$$\begin{aligned} \mid I_{2,1} \mid &= \mid \frac{Mq_n}{R_n}\left[G(\delta)\frac{P\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\delta}\right] - \frac{Mq_n}{R_n}G\left(\frac{1}{n}\right)nP_n \mid \\ &= \frac{M(\delta)q_n}{R_n} + O\left(\frac{q_n\lambda(n)}{R_n}\right) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

elde edilir.

(4.1.3) den ve eşitsizlikte $x = \dfrac{1}{t}$ *dönüşümü yapılırsa*

$$\begin{aligned} | I_{2,2} | &= \frac{Mq_n}{R_n} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} G(t) \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt \le \frac{M\epsilon q_n}{R_n} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\lambda\left(\frac{1}{t}\right) tP\left(\frac{1}{t}\right)}{P\left(\frac{1}{t}\right) t^2} dt \\ &= \frac{M\epsilon q_n}{R_n} \int_{\frac{1}{\delta}}^{n} \frac{\lambda(x)}{x} dx \le M\epsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} | I_{2,3} | &= \frac{Mq_n}{R_n} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} G(t) \frac{dP\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \le \frac{M\epsilon q_n}{R_n} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\lambda\left(\frac{1}{t}\right) tdP\left(\frac{1}{t}\right)}{P\left(\frac{1}{t}\right) t} \\ &= \frac{M\epsilon q_n}{R_n} \int_{\frac{1}{\delta}}^{n} \frac{\lambda(x)}{P(x)} dP(x) \end{aligned}$$

$P(x) = P_{[x]}$ *fonksiyonu* $x = k$ *noktasında* p_k *kadar değiştiğinden (atladığından)* *(diğer yerlerde sabit)*

$$\begin{aligned} | I_{2,3} | &= \frac{M\epsilon q_n}{R_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k \lambda(k)}{p(k)} \le \frac{M\epsilon q_n}{R_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{kP_k \lambda(k)}{kP(k)} \\ &\le M\epsilon \end{aligned}$$

$\limsup | I_3 |$ δ *ve* t*'nin seçimiyle oldukça küçük yapılabileceğinden* $I_3 \to 0$ *olur. Fakat Riemann-Lebesque teoremi ve toplanabilme metodunun regülerlik koşullarından dolayı,* $n \to \infty$ *iken*

$$I_3 = \int_{\delta}^{\pi} \phi(t) N(t) dt = o(1)$$

olur. □

Teorem 4.1.2 nin ispatını verelim.

İspat : $\bar{s}_n(x)$ $\sum B_n(x)$ *serisinin* n*'inci kısmi toplamını göstersin. Bu durumda*

$$\bar{s}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{1}{2}t} dt$$

ve

$$\bar{t}_n^{p,q} = \frac{1}{2\pi R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{1}{2}t} dt$$

olur.

$$\begin{aligned}\bar{t}_n^{p,q} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\cot\frac{1}{2}tdt &= -\frac{1}{2\pi R_n}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\int_0^\pi \psi(t)\frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt \\ &= -\int_0^\pi \psi(t)\bar{N}(t)dt\end{aligned}$$

Şimdi teoremi ispatlamak için $n \to \infty$ iken

$$\int_0^\pi \psi(t)\bar{N}(t)dt = o(1)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \psi(t)\bar{N}(t)dt &= \left[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_\delta^\pi\right]\psi(t)\bar{N}(t)dt \\ &= J_1 + J_2 + J_3\end{aligned}$$

Şeklinde alalım.

Eşlenik fonksiyon var olduğundan $n \to \infty$ iken

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\cot\frac{1}{2}tdt = o(1)$$

olur.Buradan M pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\cot\frac{1}{2}tdt - J_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\psi(t)\left[\cot\frac{1}{2}t - \frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi R_n}\int_0^{\frac{1}{n}}\psi(t)\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\left[\sum_{m=0}^{n-k} 2\sin mt\right]dt \\ &\leq \frac{1}{\pi R_n}\int_0^{\frac{1}{n}} \mid \psi(t) \mid \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}(n-k)dt \\ &\leq Mn\int_0^{\frac{1}{n}} \mid \psi(t) \mid dt \\ &= O(1)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$J_1 = o(1)$$

olur. Şimdi $\frac{1}{n} \leq t \leq \delta$ için Lemma 4.1.4 den, I_2' de olduğu gibi

$$\begin{aligned}J_2 &= \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \psi(t)\bar{N}(t)dt \leq \frac{Mq_n}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \mid \psi(t) \mid \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt \\ &= o(1)\end{aligned}$$

bulunur.

Riemann-Lebesque Teoremi ve toplanabilme metodunun regülerliğinden

$$J_3 = o(1)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar. □

Aşağıdaki iki sonuç yukarıdaki iki teoremin sonuçlarıdır.

Sonuç 1: *Eğer* $\lambda(u) = 1$ *ve her* n *için* $q_n = 1$ *alınırsa Pati,T. (1961) in sonuçları sağlanır.*

Sonuç 2: *Eğer her* n *için* $q_n = 1$ *ve* $\lambda\left(\frac{1}{t}\right) = \dfrac{P(1/t)}{\log(1/t)}$ *alınırsa Singh,T. (1963) in teoremleri elde edilir.*

Teorem 4.1.7 *Regüler Genelleştirilmiş Nörlund Metodu* (N, p_n, q_n) , $\{p_n\}$ *negatif olmayan, monoton, reel sabitlerin azalmayan dizisi ve* $\{q_n\}$ *negatif olmayan, monoton, reel sabitlerin azalmayan dizisi olacak şekilde tanımlansın.*
$0 < \delta < \pi$ *aralığındaki herhangi* δ *için*

$$n \to \infty \quad iken \quad \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{|\phi_x(t)|}{t} P\left(\frac{1}{t}\right) dt = o\left(\frac{R_n}{q_n}\right) \tag{4.1.7}$$

koşulu sağlanırsa (4.1.5) serisi x *noktasında* $f(x)$*'e* (N, p_n, q_n) *toplanabilirdir. (Khare,1990)*

Teorem 4.1.8 *Regüler Genelleştirilmiş Nörlund Metodu* (N, p_n, q_n) , $\{p_n\}$ *negatif olmayan, monoton, reel sabitlerin azalmayan dizisi ve* $\{q_n\}$ *negatif olmayan, monoton, reel sabitlerin azalmayan dizisi olacak şekilde tanımlansın.*
$0 < \delta < \pi$ *aralığındaki herhangi* δ *için*

$$n \to \infty \quad iken \quad \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{|\psi_x(t)|}{t} P\left(\frac{1}{t}\right) dt = o\left(\frac{R_n}{q_n}\right) \tag{4.1.8}$$

koşulu sağlanırsa (4.1.6) eşlenik serisi

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) \cot \frac{1}{2} t dt$$

değerine integralin Lebesque anlamında var olduğu bütün noktalarda (N, p_n, q_n) *toplanabilirdir. (Khare,1990)*

Bu iki teorem 1990 yılında S.P.Khare tarafından ispatlanmıştır.

Şimdi yukarıda verdiğimiz teoremleri genelleştirelim.

Teorem 4.1.9 *(N, p_n, q_n) metodu, negatif olmayan, artmayan $\{p_n\}$ dizisi ve negatif olmayan, azalmayan $\{q_n\}$ dizisi ile tanımlanan regüler Nörlund metodu olsun. $0 < \delta < \pi$ aralığındaki herhangi δ için*

$$n \to \infty \quad iken \quad \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Phi_x(t) \mid \frac{d}{dt} \frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \mid dt = o(R_n) \tag{4.1.9}$$

koşulu sağlanırsa (4.1.5) serisi x noktasında $f(x)$ değerine (N, p_n, q_n) toplanabilirdir. [Okuyama ve Ark., 1998)

Teorem 4.1.10 *(N, p_n, q_n) metodu, negatif olmayan, artmayan $\{p_n\}$ dizisi ve negatif olmayan, azalmayan $\{q_n\}$ dizisi ile tanımlanan regüler Nörlund metodu olsun. $0 < \delta\pi$ aralığındaki herhangi δ için $n \to \infty$ iken*

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Psi_x(t) \mid \frac{d}{dt} \frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \mid dt = o(R_n) \tag{4.1.10}$$

koşulu sağlanırsa (4.1.6) eşlenik serisi

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) \cot \frac{1}{2} t dt$$

değerine integralin Lebesque anlamında var olduğu bütün noktalarda (N, p_n, q_n) toplanabilirdir. (Okuyama ve Ark., 1998)

Şimdi ispata geçmeden önce Teorem 4.1.9 un Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.7 nin genelleştirilmiş şekli olduğunu gösterelim.

$\{p_k, q_{n-k}\}_{k=0}^{n}$ k'nın artmayan bir dizisi olduğundan,

$$0 \leq \frac{1}{t} r_n\left(\frac{1}{t}\right) \leq R_n\left(\frac{1}{t}\right) \quad \left(0 < \frac{1}{t} < n+1\right)$$

ifadesini elde ederiz.Dolayısıyla bu ifadeyi kullanırsak

$$\frac{d}{dt} \frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t} = \frac{-\frac{1}{t} r_n\left(\frac{1}{t}\right) - R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} = O\left(\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\right)$$

olur.

Eğer (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) ve (4.1.4) koşulları sağlandığında $y = (1/t)$ *dönüşümü yaparak*

$$\frac{1}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Phi_x(t) \mid \frac{d}{dt}\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \mid dt = o\left(\frac{1}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{t\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}{P\left(\frac{1}{t}\right)}\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\lambda\left(\frac{1}{t}\right)R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{tP\left(\frac{1}{t}\right)}dt\right) = o\left(\frac{1}{R_n}\int_{\frac{1}{\delta}}^{n} \frac{\lambda(y)R_n(y)}{yP(y)}dy\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{R_n}\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \frac{\lambda(y)R_n(y)}{yP(y)}dy\right) = o\left(\frac{1}{R_n}\sum_{k=2}^{n}\frac{R_n(k)}{P(k)}\int_{k-1}^{k} \frac{\lambda(y)}{y}dy\right)$$

$$= o\left(\frac{q_n}{R_n}\sum_{k=2}^{n}\frac{P(k)}{P(k)}\int_{k-1}^{k} \frac{\lambda(y)}{y}dy\right) = o\left(\frac{q_n}{R_n}\int_{1}^{n} \frac{\lambda(y)}{y}dy\right) = o(1)$$

olduğundan (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) ve (4.1.4) koşullarının yerini (4.1.9) alabilir.
Benzer yolla (4.1.7) ve Lemma 4.1.12 kullanılarak, $\frac{1}{t}R_n\left(\frac{1}{t}\right)$ *artmayan ve* $R_n(t) \le q_nP(t)$ *olduğundan, kısmi integrasyon yaparsak*

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Phi_x(t) \mid \frac{d}{dt}\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \mid dt &= \left[-\Phi_x(t)\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\right]_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\frac{\mid \phi_x(t) \mid}{t}R_n\left(\frac{1}{t}\right)dt \\ &= o\left(R_n(n) - R_n\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) + o\left(q_n\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\frac{\mid \phi_x(t) \mid}{t}P\left(\frac{1}{t}\right)dt\right) \\ &= o(R_n)\end{aligned}$$

Dolayısıyla (4.1.7) nin yerini de (4.1.9) alabilir.

Buradan da gördüğümüz gibi Teorem 4.1.9 , Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.7 nin bir genellemesidir.

Aynı şekilde Teorem 4.1.10 da Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.8 in genellemesidir.

Teoremleri ispatlamak için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız olacak.

Lemma 4.1.11 *Eğer* $\{p_n\}$ *negatif olmayan, artmayan ve* $\{q_n\}$ *negatif olmayan,* *azalmayan diziler ise*

$$N_n(t) = O(n) \qquad \left(0 < t \leq \frac{1}{n}\right) \tag{4.1.11}$$

$$\bar{N}_n(t) = O(n) \qquad \left(0 < t \leq \frac{1}{n}\right) \tag{4.1.12}$$

$$N_n(t) = O\left(R_n\left(\frac{1}{t}\right)(tR_n)^{-1}\right) \qquad \left(\frac{1}{n} \leq t < \pi\right) \tag{4.1.13}$$

$$\bar{N}_n(t) = O\left(R_n\left(\frac{1}{t}\right)(tR_n)^{-1}\right) \qquad \left(\frac{1}{n} \leq t < \pi\right) \tag{4.1.14}$$

ifadeleri gerçeklenir. (Okuyama ve Ark., 1997)

İspat:

(4.1.11):

Eğer $0 < t \leq \dfrac{1}{n}$ *ise* $n \to \infty$ *iken*

$$\begin{aligned} |\, N_n(t) \,| &= |\, \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}} \,| \leq \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{(n-k+1)t}{\frac{t}{\pi}} \\ &\leq \frac{\pi(n+1)}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} = \pi(n+1) \end{aligned}$$

(4.1.12) ifadesinin ispatı da aynı yolla yapılır. □

(4.1.13):

$\tau = \left[\dfrac{1}{t}\right]$ *ve* $Im(z)$ *z kompleks sayısının imajiner (sanal) kısımı olmak üzere,* $\dfrac{1}{n} \leq t < \pi$ *ise*

$$\begin{aligned} |\, N_n(t) \,| &= |\, \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}} \,| \\ &\leq \frac{\pi}{tR_n} \,|\, Im\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} e^{i(n-k+1)t}\right) | \leq \frac{\pi}{tR_n} \,|\, \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} e^{ikt} \,| \\ &\leq \frac{\pi}{tR_n} \,|\, \sum_{k=0}^{\tau-1} p_k q_{n-k} e^{ikt} \,| + \frac{\pi}{tR_n} \,|\, \sum_{\tau}^{n} p_k q_{n-k} e^{ikt} \,| \\ &\leq \frac{\pi}{tR_n} \,|\, \sum_{k=\tau}^{n} p_k q_{n-k} \cos kt \,| + \frac{\pi}{tR_n} \,|\, \sum_{k=\tau}^{n} p_k q_{n-k} \sin kt \,| + \frac{\pi}{tR_n} \,|\, \sum_{k=0}^{\tau-1} p_k q_{n-k} e^{ikt} \,| \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

$R_n(\tau) = \sum_{k=0}^{\tau-1} p_k q_{n-k}$ *ve* $\tau \leq \frac{1}{t}$ *olduğundan*

$$I_3 = \frac{\pi}{tR_n} \mid \sum_{k=0}^{\tau-1} p_k q_{n-k} e^{ikt} \mid = O\left(R_n\left(\frac{1}{t}\right)(tR_n)^{-1}\right)$$

olur.

$$A_k^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \cos jt \quad , \quad A_k^{(2)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \sin jt$$

yazıp Abel transformasyon uygularsak, $(k = 1, 2...; \quad l = 1, 2)$ *olmak üzere k'ya göre* $\{p_k q_{n-k}\}$ *artmayan ve* $\mid A_k^{(l)} \mid \leq \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-1} \leq \frac{\pi}{t}$ *olduğundan,*

$$\begin{aligned}
\frac{tR_n}{\pi} I_l &\leq \mid \sum_{k=\tau}^{n-1} (p_k q_{n-k} - p_{k+1} q_{n-k-1}) A_k^{(l)}(t) \mid + \mid p_\tau q_{n-\tau} A_{\tau-1}^{(l)}(t) \mid + \mid p_n q_0 A_n^{(l)}(t) \mid \\
&\leq O\left(\frac{1}{t}\left\{\sum_{k=\tau}^{n-1} (p_k q_{n-k} - p_{k+1} q_{n-k-1}) + p_\tau q_{n-\tau} + p_n q_0\right\}\right) \\
&\leq \left(O\frac{1}{t} p_\tau q_{n-\tau}\right) \leq O\left(\frac{1}{t} R_n\left(\frac{1}{t}\right)\right)
\end{aligned}$$

olur. bu ise ispatı tamamlar. (4.1.14) ifadesinin ispatı da aynı yolla yapılır. □

Lemma 4.1.12 *(4.1.7) ve (4.1.8) koşulları* $t \to 0$ *iken sırasıyla*

$$\Phi_x(t) = o(t)$$

ve

$$\Psi_x(t) = o(t)$$

koşullarını gerektirir. (Khare, 1990)

Lemma 4.1.13 *(4.1.9) ve (4.1.10) koşulları* $t \to 0$ *iken sırasıyla*

$$\Phi_x(t) = o(t)$$

ve

$$\Psi_x(t) = o(t)$$

koşullarını gerektirir. (Okuyama ve Ark.,1997]

İspat : $\dfrac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t}$ *artmayan olduğundan, (4.1.9) dan*

$$\begin{aligned} o(R_n) &= \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Phi_x(t) \mid \frac{d}{dt}\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \mid dt \\ &\geq \Phi_x\left(\frac{1}{n}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \mid \frac{d}{dt}\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \mid dt = \Phi_x\left(\frac{1}{n}\right)\left\{-\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\frac{d}{dt}\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt\right\} \\ &= \Phi_x\left(\frac{1}{n}\right)\left\{nR_n(n) - \delta^{-1}R_n\left(\frac{1}{\delta}\right)\right\} \sim n\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right)R_n(n) \end{aligned}$$

olur. Şimdi (N, p_n, q_n) metodu regüler olduğundan $\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ şeklindedir. $\Phi_x(t)$ azalmayan olduğundan $\Phi_x(t) = o(t)$ elde edilir. Bu da ispatın ilk kısmını tamamlar. Kalan bölümün ispatı da aynı şekilde yapılır. □

Şimdi Teorem 4.1.9 un ispatını verelim

İspat : *Eğer $s_n(x)$ (4.1.5) serisinin n'inci kısmi toplamlar dizisi olarak alınırsa*

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \phi_x(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{1}{2}t)}dt$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} t_n^{p,q} - f(x) &= \frac{1}{\pi R_n}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\int_0^{\pi}\phi_x(t)\frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{1}{2}t)}dt \\ &= \int_0^{\pi}\phi_x(t)N_n(t)dt \end{aligned}$$

şeklindedir. Teoremin ispatını yapmak için $n \to \infty$ iken

$$I = \int_0^{\pi}\phi_x(t)N_n(t)dt = o(1)$$

olduğunu göstermemiz gereklidir. $\epsilon > 0$ verilsin. Lemma 4.1.13 den $o < \delta < \pi$ olacak şekilde $0 < t < \delta$ için

$$\Phi_x(t) \leq \epsilon t$$

ifadesini sağlayan bir δ seçebiliriz.

$$I = \int_0^{\pi} \phi_x(t)N_n(t)dt \;=\; \left[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right] \phi_x(t)N_n(t)dt$$
$$= I_1 + I_2 + I_3$$

yazalım. (4.1.11) ve Lemma 4.1.13 den $n \to \infty$ iken

$$| I_1 | = | \int_0^{\frac{1}{n}} \phi_x(t)N_n(t)dt | \leq O\left(n\int_0^{\frac{1}{n}} | \phi_x(t) | dt\right) = O(n)o\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$$

olur. (4.1.13) den A herbir işlemde değişebilecek bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} | I_2 | &= | \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \phi_x(t)N_n(t)dt | \leq \frac{A}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} | \phi_x(t) | \frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt \\ &\leq \frac{A}{R_n}\left[\Phi_x(t)\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt\right]_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \frac{A}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Phi_x(t) \mid \frac{d}{dt}\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \mid dt \\ &= I_{21} + I_{22} \end{aligned}$$

Şimdi Lemma 4.1.13 den

$$I_{21} = \frac{A}{R_n}\left[\Phi_x(t)\frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt\right]_{\frac{1}{n}}^{\delta} \leq \frac{A\epsilon R_n\left(\frac{1}{\delta}\right)}{R_n} + \frac{A\epsilon R_n(n)}{R_n}$$

olması gerçeği ve (4.1.9) dan $n \geq n_1$ için

$$| I_{21} | \leq A\epsilon$$

ve

$$| I_{22} | \leq A\epsilon$$

olacak şekilde bir n_1 tamsayısı bulabiliriz.

Buradan da

$$| I_2 | \leq A\epsilon$$

olur.

$$I_3 = \frac{1}{\pi R_n}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \int_{\delta}^{\pi} \phi_x(t)\frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt$$

yazıp, Riemann-Lebesque Teoremini uygularsak, (N, p_n, q_n) *toplanabilme metodunun regülerlik koşulundan, yine* $n \geq n_2$ *için*

$$| I_3 | \leq A\epsilon$$

olacak şekilde bir n_2 *tamsayısı bulabiliriz.*

Sonuçta $n \to \infty$ *iken*

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = o(1)$$

olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi de Teorem 4.1.10 un ispatını verelim.

İspat : $\bar{s}_n(x)$ *(4.1.6) serisinin n'inci kısmi toplamını göstersin. Bu durumda*

$$\bar{s}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi_x(t)\frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

ve dolayısıyla

$$\bar{t}_n^{p,q} = \frac{1}{\pi R_n}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\int_0^\pi \psi_x(t)\frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt$$

olur.

$$\begin{aligned}
\bar{t}_n^{p,q} - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi_x(t)\cot\frac{1}{2}tdt &= -\frac{1}{\pi R_n}\int_0^\pi \psi_x(t)\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt \\
&= -\int_0^\pi \psi_x(t)\bar{N}(t)dt
\end{aligned}$$

Şimdi teoremi ispatlamak için $n \to \infty$ *iken*

$$J = \int_0^\pi \psi_x(t)\bar{N}(t)dt = o(1)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Teorem 4.1.9 da olduğu gibi

$$\begin{aligned}
J = \int_0^\pi \psi_x(t)\bar{N}(t)dt &= \left[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_\delta^\pi\right]\psi_x(t)\bar{N}(t)dt \\
&= J_1 + J_2 + J_3
\end{aligned}$$

şeklinde alalım.

Eşlenik fonksiyon var olduğundan $n \to \infty$ *iken*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi_x(t)\cot\frac{1}{2}tdt = o(1)$$

olur. Dolayısıyla Lemma 4.1.13 den $n \to \infty$ iken,

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi_x(t)\cot\frac{1}{2}tdt - J_1 \right| \\
&= \left| \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi_x(t)\left\{\cot\frac{1}{2}t - \frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right\}dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{\pi R_n}\int_0^{\frac{1}{n}} \psi_x(t)\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\left\{\sum_{l=0}^{n-k} 2\sin lt\right\}dt \right| \\
&\le \frac{A}{\pi R_n}\int_0^{\frac{1}{n}} \left| \psi_x(t) \right| \left\{\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}(n-k)\right\}dt \\
&\le An\int_0^{\frac{1}{n}} \left| \psi_x(t) \right| dt
\end{aligned}
$$

$$= o(1)$$

bulunur. (4.1.14) den $\frac{1}{n} \le t \le \delta$ için I_2'de olduğu gibi

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \psi_x(t)\bar{N}(t)dt \le \frac{1}{R_n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \psi_x(t) \mid \frac{R_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt \\
&= o(1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aynı zamanda Riemann-Lebesque Teoreminden ve (N, p_n, q_n) toplanabilme metodunun regülerlik koşulundan

$$J_3 = o(1)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar. □

KAYNAKLAR

[1] *ASTRAHAN, M. , 1936. Studies in the summability of Fourier series by Nörlund means:* **Duke Math. J.**, *2, 548-568.*

[2] *BOSANQUET, L. S. , 1930. On the summability of Fourier series:* **Proc. London Math. Soc.**,*31, 144-160.*

[3] *CHOW, H. C. , 1941. On a theorem of O. Szasz :* **J. London Math. Soc.**, *16, 23-27.*

[4] *DAS, G. , 1968. Product of Nörlund methods:* **Indean J. Math.** *, 10, 25-43.*

[5] *DAS, G. and MOHAPATRA, P. C. , 1980. Necessary and sufficient conditions for absolute Nörlund summability of Fourier series:* **Proc. London Math. Soc.**, *41, 217-253.*

[6] *DIKSHIT, H. P. , 1962. The Nörlund summability of the conjugate series of a Fourier series:* **Rend. Circ. Mat. Palermo**, *11, 217-224.*

[7] *DIKSHIT, H. P. ,1965. On the Nörlund summability of the conjugate series of a Fourier series:* **Rend. Circ. Mat. Palermo**, *11, 165-170.*

[8] *DIKSHIT, H. P. , 1969. Summability of Fourier series by triangular matrix transformations:* **Pacific J. Math.**, *30, 399-410.*

[9] *DIKSHIT, H. P. , 1969. Summability of a sequence of Fourier coefficients by a triangular matrix transformations:* **Proc. Amer. Mat. Soc.** *, 21, 10-20.*

[10] *DIKSHIT, H. P. , 1970. Absolute total-effective triangular matrix method:* **Math. Ann.** *186, 101-113.*

[11] *DIKSHIT, H. P., 1971. Absolute total-effective* (N, p_n) *means:* **Proc Cambridge Philos. Soc.** *69, 107-122.*

[12] *DIKSHIT, H. P. and Kumar, A. , 1981. Determination of bounds similar to the Lebesque constants:* **Pacific J. Math.** *, 97, 339-347.*

[13] *GOLDBERG, R. R. ,1965. Methods of Rreal Analysis: 2.nd printing,* **Blaisdell Publishing Company, Canada.**

[14] *HARDY, G. H.and LITTLEWOOD, J.E. , 1932. Some new convergence crete-*

ria for Fourier series: **Journal London Math. Soc.**, *Vol. 2, 252-256.*

[*15*] *HARDY, G. H. , 1949. Divergent series:* **Oxford University Press.**

[*16*] *HILLE, E. and TAMARKIN, J. D. , 1932. On the summability of Fourier series:* **I. Trans. Amer. Math. Soc.** *, 34, 757-78.*

[*17*] *HSIANG, F. C. , 1961. Summability* (L) *of Fourier series:* **Bul. Amer. Math. Soc.** *,67, 150-153.*

[*18*] *IYENGAR K. S. K. , 1943. A Tauberian theorem and its application to convergence of Fourier series:* **Proc. Indean Acad. Sci.** *, (A) 18, 81-87.*

[*19*] *KHARE, S.P. 1990, Generalized Nörlund summability of Fourier series and its conjugate series:* **Indian J. Pure Appl. Math.**, *2, 450-467.*

[*20*] *KNOPP, K. , 1947. Theory and application of infinite series:* **Blackie and Sons**.

[*21*] *KOLMOGOROV, A. N. and FOMIN, S. V., 1968. Introductory Real Analysis:* **Matbaa Nauka, Moskova**.

[*22*] *KUMAR, A. , 1982. Absolute total-effectiveness of a total effective (N,pn) method:* **Proc. Amer. Math. Soc.** *, 84, 497-503.*

[*23*] *MADDOX, I. J. , 1970. Elements of Functional Analysis: 2.nd edition,* **University Press, Cambridge.**

[*24*] *MCFADDEN, L. , 1942. Absolute Nörlund summability:* **Duke Math. J.** *9, 168-207.*

[*25*] *MOHANTY, R. and NANDA, M. , 1954. On the behavior of Fourier coefficients:* **Proc. Amer. Math. Soc.** *, 5, 79-84.*

[*26*] *NOTANSON, I. P. , 1974. Real Analysis:* **Matbaa Nauka, Moskova**.

[*27*] *OKUYAMA, Y. and MIYAMOTO, I. , 1997. On Nörlund summability of Legendre series :* **Math. Japonica**, *46, 349-358.*

[*28*] *OKUYAMA, Y. and MIYAMOTO, I. , 1998. On the genaralized Nörlund summability of Fourier series and its Conjugate series:* **Far East J. Math. Sci.**, *6(4), 561-574.*

[29] *PALLEY, R. E. A. C. ,1930. On the Cesaro summability of Fourier series and allied series:* **Proc Cambridge Philos. Soc.** *, 26, 173-203.*

[30] *PATI, T. , 1961. A generalization of a theorem of Iyengar on the harmonic summability of Fourier series:* **Indean J. Math.** *, 3, 85-90.*

[31] *PRASAD, B. N. and SIDDIQI, J. , 1950. On the Nörlund summability of derived Fourier series:* **Proc. Nat. Inst. Sci. India,** *16, 71-82.*

[32] *RHOADES, B. E. , 1986. Matrix summability of Fourier series based on inclusion theorems:* **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, *100, 545-555.*

[33] *RHOADES, B. E. , 1988. Matrix summability of Fourier series based on inclusion theorems, II:* **Journal of Math. Analalysisand Applications**, *130, 525-537.*

[34] *SIDDIQI, J. A. , 1978. The determination of the jump of a function by Nörlund means:* **Publ. Math. Debrecen**, *25, 5-19.*

[35] *SIDDIQI, J. A. , 1948. On the harmonic summability of Fourier series:* **Proc. Indian Acad. Of Sci.**, *28, 527-531.*

[36] *SILVERMANN, L. L. , 1937, Products of Nörlund transformations:* **Bull. Amer. Math. Soc.** *, 43, 95-101.*

[37] *SINGH, A. N. ,1990. Nörlund summability of Fourier series and its conjugate series:* **Bull. Cal. Math. Soc**, *82, 99-105.*

[38] *SINGH, T. , 1963. On Nörlund summability of Fourier series and its conjugate series:* **Proc. Nat. Insti. Sci. India**, *29(A), 65.*

[39] *SINGH, T. , 1964. Absolute Nörlund summability of Fourier series.:* **Indian J. Math.** *, 6, 129-136.*

[40] *SINGH, T. , 1964. Nörlund summability of Fourier series and its conjugate series.:* **Ann. Mat. Pura. Appl.** *64, 123-132.*

[41] *THORPE, B. , 1975. Nörlund summability of Jacobi and Laguerre series:* **J. Reine. Angew. Math.** *276, 137-141.*

[42] *VASHNEY, O. P. , 1949. On a sequence of Fourier coefficients:* **Proc. Amer.**

Math. Soc. , *10, 790-795.*

[43] ZYGMUND, A. , 1959. Trigonometric Series: **vol. 1, Cambridge University Press**, *2nd ed. 1959.*

ÖZGEÇMİŞ

Baki KESKİN 1975 yılında Sivas'ın Kangal ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini burada, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. 1991 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünü kazandı ve 1996 yılında mezun oldu. 1997 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen burada çalışmaktadır.