ZAYIF REGÜLER SİNGÜLER NOKTALARA SAHİP DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Yalçın GÜLDÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2001

T.C
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAYIF REGÜLER SİNGÜLER NOKTALARA SAHİP DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Yalçın GÜLDÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2001

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf Amirov R.

Üye : Doc. Dr. Hüseyin Seri

Üye : Yrd. Doc. Dr. Yılmaz Çeven

Üye : ....

Üye : ....

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.... / .... / 2001

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof.Dr. Necati ÇELİK

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 01.01.1994 tarihinde C.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan " Yüksek Lisans ve Doktora Tez Yazım Kılavuzu " adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAYIF REGÜLER SİNGÜLER NOKTALARA SAHİP DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Yalçın GÜLDÜ
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Rauf AMİROV

Bu çalışma, II.mertebeden diferensiyel operatörlerin spektral teorisine aittir. Sunduğumuz çalışmada Zayıf Regüler Singüler ve Bessel Singüleritesine sahip Sturm-Liouville operatörünün bazı özellikleri öğrenilmiştir.

Bu çalışmada öğrenilen Sturm-Liouville operatörünün özellikleri, bakılan operatörler için inverse(ters) problemlerin çözümünde önem taşımaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Operatör, Spektrum, Sturm- Liouville Operatör, Zayıf Regüler Singüler, Bessel Singülerite.

SUMMARY

MsC Thesis

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DİFFERENTİAL OPERATORS WHİCH HAS WEAKLY REGULAR SİNGULAR POINTS

Yalçın GÜLDÜ

Cumhuriyet University
Graduate School of Natural
and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Rauf AMIROV

This study belongs to spectral theory of second order differential operators. In this study, some properties of Sturm-Liouville operator which has weakly regular singular and Bessel singularity which have been learned have importance in solving of inverse problems for interested operators.

Key words: Operator, Spectrum, Sturm-Liouville Operator, Weakly Regular Singular, Bessel Singularity.

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof.Dr. Rauf AMİROV'a ve tüm emeği geçenlere içten teşekkürlerimi sunarım.

GİRİŞ

Singüler diferansiyel operatörler, matematiksel fiziğin özellikle Kuantum Teorisinin temel denklemleriyle sıkı bağlıdır. Kuantum Teorisinin temel diferansiyel denklemi olan Schrödinger Denklemi, II. mertebeden bir denklemdir. Bu diferansiyel denklemin çözümlerinin özellikleri, katsayılarının davranışlarına bağlıdır.

Çalışmanın ikinci kısmında $x = 0$ noktasında zayıf regüler singulariteye sahip Schrödinger operatörünün Green fonksiyonunun ve çözümünün bir sıra özellikleri ve spektral karakteristikleri araştırılmıştır.

M operatörü,

$$M = -p(x)\frac{d^2}{dx^2} - p'(x)\frac{d}{dx} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$My - kp(x)y = f(x), \qquad 0 < x \leq b$$

$$y(0) = 0,\, y(b) = B$$

zayıf regüler singüler lineer sınır değer problemini ele alınmıştır. Burada, k - spektral parametre, $f(x)$ verilen fonksiyon, $p(x)$ ise aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyondur:

A-1: **(i)** $(0,b)$ üzerinde $p(x) > 0$

(ii) $p(x) \in C^1(0,b)$ ve bazı $r > b$

(iii) $\dfrac{xp'(x)}{p(x)} = b_0 + b_1 x + \dots, \qquad b_0 \in [0,1)$

Taylor açılımı $\{z : |z| < r\}$ bölgesinde analitiktir.

(iv) $\dfrac{1}{p(x)} \in L_1[0,b]$

Bu kısımda $p(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in [0,1)$ olduğu durumda M operatörünün bazı özellikleri belirlenmiştir.

Yaptığımız bu çalışma beş kısımdan oluşmaktadır. Giriş kısmında singüler diferansiyel operatörlerin, matematiksel fiziğin özellikle Kuantum Teorisi ile ilişkisinden bahsedilmektedir.

Çalışmanın ikinci kısmında bazı temel ön bilgiler verilmiştir. Üçüncü kısım iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde zayıf regüler singüler diferansiyel denklemler için iki nokta sınır değer problemlerinin çözümünün tanımı ve Frobenius seri metodu ile bu problemlerin temel çözüm sistemi bulunmuştur. Ayrıca, temel çözüm sistemini oluşturan fonksiyonların bazı özellikleri öğrenilmiştir. İkinci bölümde ise bakılan problemin bazı spektral özellikleri öğrenilmiştir.

Bunun yanı sıra bu kısımda verilen problemin Green Fonksiyonu yazılmış ve onun bazı özellikleri öğrenilmiştir.

Çalışmanın dördüncü kısmında bir simetrik operatörün genişlemesi hakkında genel bilgiler verilmektedir.

Çalışmanın beşinci kısmında $\ell y = -y'' + \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} y$ operatörünün self-adjoint genişlemesi alınarak bu genişlemelerin spektral karakteristikleri öğrenilmiştir. Bu problem 1965 yılında M.G. Gasimov'un [1]'deki çalışmasında $0 < \alpha < 1$ için hipotez olarak verilmiştir. Burada bu problemin kısmi çözümü yapılmıştır.

I. BÖLÜM

STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İLE İLGİLİ ÖN BİLGİLER

$\ell(y) = -y'' + q(x)y$ diferansiyel ifade olsun. Eğer, a ve b sonlu olmak üzere $x \in [a,b]$ ve $q(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirse $\ell(y)$ ifadesine **Regüler diferansiyel ifade** denir. Eğer, a ve b sayılarından herhangi biri sonsuz yada her ikiside sonsuza eşit veya $q(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenemezse veya her iki durum birlikte söz konusu ise $\ell(y)$ ifadesine **Singüler diferansiyel ifade** denir.

Tanım 1.1: L bir lineer operatör olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ fonksiyonuna L operatörünün **özfonksiyonu** denir. λ'ya ise L operatörünün $y(x)$'e karşılık gelen **özdeğeri** denir.

Teorem 1.2: λ_1, λ_2, L operatörünün farklı iki özdeğeri olsun. Bu özdeğerlere karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$, $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir. Yani,

$$\int_0^{\pi} y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx = 0 \qquad \text{olur, ve}$$

Gram Schmidt teoremiyle özfonksiyonları ortonormal bir sistem oluşturur.

Teorem 1.3: L operatörünün özdeğerleri reeldir.

Tanım 1.4: $(L - \lambda I)^{-1}$ olmadığı λ noktaları kümesini L operatörünün **noktasal spektrumu** denir. $\sigma(L)$ ile gösterilir. $\sigma(L) = \{\lambda | \, Ly = \lambda y, \, y \in D(L)$

L operatörü self-adjoint operatör olduğu için genel operatörler teorisinden L operatörünün spektrumu özdeğerlerinden oluşmuştur.

Tanım 1.5: $\alpha_n = \int_0^b y^2(x,\lambda_n)dx$ sayılarına L operatörünün **normalleştirici sayıları** denir.

Tanım 1.6: $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerine L operatörünün **spektral karakteristikleri** denir.

II. BÖLÜM

ZAYIF REGÜLER SİNGÜLER İKİ NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

2.1. Zayıf Regüler Singüler İki Nokta Sınır Değer Probleminin Lineer Bağımsız Çözümlerinin Kurulması ve Bazı Özellikleri

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \qquad 0 < x \le b \tag{2.1.1}$$

denklemi verilmiş olsun. Burada $q(x)$, $(0,b]$ üzerinde sürekli fonksiyondur.

$\varphi(x) = \varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x) = \theta(x,\lambda)$

(2.1.1) denkleminin $\varphi(b,\lambda) = 0$, $\varphi'(b,\lambda) = -1$; $\theta(b,\lambda) = 1$, $\theta'(b,\lambda) = 0$ koşullarını sağlayan lineer bağımsız iki çözümü olsun.

(2.1.1) denkleminin $\theta(x,\lambda) + \ell\varphi(x,\lambda)$ çözümü ; $x = a$, $(0 < a < b)$ noktasında

$$\{\theta(a,\lambda) + \ell\varphi(a,\lambda)\}\cos\beta + \{\theta'(a,\lambda) + \ell\varphi'(a,\lambda)\}\sin\beta = 0 \tag{2.1.2}$$

reel sınır koşulunu sağlar. Burada β reeldir. (2.1.2) denkleminden

$$\ell(\lambda) = \frac{\theta(a,\lambda)\cot\beta + \theta'(a,\lambda)}{\varphi(a,\lambda)\cot\beta + \varphi'(a,\lambda)} \tag{2.1.3}$$

elde edilir.

$m(\lambda)$; a sıfıra yaklaşırken $\ell(\lambda)$' nın limiti olsun. Burada kompleks değerli $m(\lambda)$ fonksiyonunun, singülerlikleri reel eksen üzerinde olan basit kutuplara sahip tek değerli analitik fonksiyon olduğu gösterilecektir. Bu durumda [14]'deki Teorem 2.17., Teorem 2.7. i) ve ii) ye benzeyen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.1: $f(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyonun integrali olsun ve

$q(x)f(x) - f''(x) \in L_2(0,b)$, $\quad f(b) = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0} W(\varphi(x,\lambda), f(x)) = 0$ olsun.

Burada $\varphi(x,\lambda)$; her kompleks λ ve $W(\varphi, f)$ için $-(p(x)y')' = p(x)f(x,y)$, $0 < x \le b$ denkleminin $L_2(0,b)$ den olan çözümüdür. Bu durumda

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$, $0\leq x\leq b$ serisi $[0,b]$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teorem 2.1.2: $f(x)\in L_2(0,b)$ olsun. O zaman $\int_0^b\{f(x)\}^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{\ 2}$ dir.

Teorem 2.1.3: $f(x)\in L_2(0,b)$ ve $\Phi(x,\lambda)$; $y''+(\lambda-q(x))y=f(x)$, $0<x\leq b$ denkleminin $y(b)=0$ koşulunu sağlayan çözümü olsun. Bu durumda λ_n'lerden herhangi birine eşit olmayan λ için,

$\Phi(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)/(\lambda-\lambda_n)$ şeklindedir. Buradaki seri mutlak yakınsaktır.

Şimdi,

$$Mz=\lambda p(x)z\,,\quad 0<x\leq b \tag{2.1.4}$$

$$z(0)=0\,,\,z(b)=0$$

singüler Sturm-Liouville problemi ele alındığında. bu problemin bütün özdeğerleri reel, pozitif, basit ve karşılık gelen özfonksiyonları,

$<f,g>=\int_0^b p(x)f(x)g(x)dx$ iç çarpımına göre ortogonal olduğu kolayca ifade edilir.

$y(x)=\sqrt{p(x)}z(x)$ alarak (2.1.4) diferansiyel denklemi (2.1.1) denklemine indirgenebilir. Burada $q(x)=\beta^2/4+\beta'/2$, $\beta(x)=p'(x)/p(x)$, $p(x)\in C^2(0,b)$ ve $(0,b]$ üzerinde $p(x)>0$ dır.

$y(x)=\sqrt{p(x)}z(x)\Rightarrow z(x)=\dfrac{y(x)}{\sqrt{p(x)}}$ olur.

$Mz=\lambda p(x)z$ ifadesinden

$$-(pz')'=\lambda p(x)z \tag{2.1.4'}$$

elde edilir.

$z(x)=\dfrac{y(x)}{\sqrt{p(x)}}$ olduğundan $z'(x)=\dfrac{y'(x)\sqrt{p(x)}-\left(p'(x)/2\sqrt{p(x)}\right)y(x)}{p(x)}\Rightarrow$

$p(x)z'(x) = y'(x)\sqrt{p(x)} - \left(p'(x)/2\sqrt{p(x)}\right)y(x)$ olur.

$\left(p(x)z'(x)\right)' = y''(x)\sqrt{p(x)} - \dfrac{2p''(x)p(x) - \left(p'(x)\right)^2}{4p(x)\sqrt{p(x)}}y(x)$ bulunur.

Bu elde edilen ifade $(2.1.4')$ 'de yerine yazılır ve eşitliğin her iki tarafı $\sqrt{p(x)}/p(x)$ ile çarpılırsa;

$-y''(x) + \dfrac{2p''(x)p(x) - \left(p'(x)\right)^2}{4p^2(x)}y(x) = \lambda y(x)$ olur. Burada

$q(x) = \dfrac{2p''(x)p(x) - \left(p'(x)\right)^2}{4p^2(x)}$ dir.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\theta(x,\lambda)$ fonksiyonları ,

$$\varphi(x,\lambda) = d\left[y_1(x,\lambda)y_2(b,\lambda) - y_2(x,\lambda)y_1(b,\lambda)\right],$$

$$\theta(x,\lambda) = d\left[y_1(x,\lambda)y_2'(b,\lambda) - y_2(x,\lambda)y_1'(b,\lambda)\right],$$

şeklinde ifade edilsin Burada $d = 1/W(y_1, y_2)$ sıfırdan farklı sabit ve $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)$ fonksiyonları (2.1.1) denkleminin iki lineer bağımsız çözümleridir. Frobenius seri metodu kullanılarak (2.1.4) Singüler Sturm-Liouville probleminin çözümü araştırılsın.

$Mz = \lambda p(x)z$ olduğundan,

$$-z'' - \frac{p'(x)}{p(x)}z' = \lambda z$$

burada $p(x) = x^\alpha$ 'dir. O halde,

$-z'' - \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha}z' = \lambda z \Rightarrow z'' + \dfrac{\alpha}{x}z' + \lambda z = 0$ olur.

Alınan bu son denklemde $z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ dönüşümü yapılırsa,

$z' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$, $z'' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2}$ olur. Bunlar denklemde yerlerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2} + \frac{\alpha}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2}+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-2}+\lambda\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r-2}=0$$

$$(r-1)rc_0x^{r-2}+r(1+r)c_1x^{r-1}+\alpha rc_0x^{r-2}+\alpha(r+1)c_1x^{r-1}+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r-1)(n+r)c_n+\alpha(r+n)c_n+\lambda c_{n-2}\right]x^{n+r-2}=0$$

$((r-1)r+\alpha r)c_0=0$ ise

$(r-1)r+\alpha r=0 \Rightarrow r(r-1+\alpha)=0$

$r_1=1-\alpha$, $r_2=0$ ve $r_1-r_2=1-\alpha\notin N^+$

$r_1=1-\alpha$ için $\left[r(1+r)+\alpha(r+1)\right]c_1=0$.

Buradan

$\left[(1+1-\alpha)(1-\alpha)+\alpha(1+1-\alpha)\right]c_1=0$

$\left[(2-\alpha)(1-\alpha)+\alpha(2-\alpha)\right]c_1=0$ ise $(2-\alpha)(1-\alpha+\alpha)c_1=0$

$(2-\alpha)c_1=0$.

Burada $2-\alpha\neq 0$ olduğundan $c_1=0$ olur.

İndirgeme formülü için;

$(n+r)(n+r-1)c_n+\alpha(n+r)c_n+\lambda c_{n-2}=0$ denkleminden

$$c_n=-\frac{\lambda c_{n-2}}{(n+r)(n+r-1+\alpha)} \text{ alınır.}$$

$$c_2=-\frac{\lambda c_0}{(2+1-\alpha)(2+1-\alpha-1+\alpha)}=-\frac{\lambda c_0}{2(3-\alpha)}=$$

$$c_4=-\frac{\lambda c_2}{(4+1-\alpha)(4+1-\alpha-1+\alpha)}=\frac{\lambda^2 c_0}{2.4(3-\alpha)(5-\alpha)}$$

$$c_6=-\frac{\lambda c_4}{(6+1-\alpha)(6+1-\alpha-1+\alpha)}=-\frac{\lambda^3 c_0}{2.4.6(3-\alpha)(5-\alpha)(7-\alpha)}$$

Benzer şekilde $c_8, c_{10}, \ldots, c_{2n}, \ldots$ $(n=0,1,2,\ldots)$ katsayıları elde edilir. Yine aynı şekilde $c_1=0$ olduğundan, $c_3=0, c_5=0, \ldots, c_{2n+1}=0, \ldots$ $(n=0,1,2,\ldots)$ olur.

O halde,

$$z_2(x) = x^{1-\alpha}\left(c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + \ldots\right)$$

$$z_2(x) = x^{1-\alpha}c_0\left(1 - \frac{\lambda}{2(3-\alpha)}x^2 + \frac{\lambda^2}{2.4(3-\alpha)(5-\alpha)}x^4 - \ldots\right)$$

$r_2 = 0$ için,

$[r(1+r) + \alpha(1+r)]a_1 = 0 \Rightarrow \alpha a_1 = 0$ ise $\alpha \neq 0$ olduğundan $a_1 = 0$ olur.

Yukarıda verilen indirgeme formülü kullanılarak;

$$a_2 = -\frac{\lambda a_0}{(0+2)(2+0-1+\alpha)} = -\frac{\lambda a_0}{2(1+\alpha)}$$

$$a_4 = -\frac{\lambda a_0}{(4+0)(4+0-1+\alpha)} = \frac{\lambda^2 a_0}{2.4(1+\alpha)(3+\alpha)}$$

$$a_6 = -\frac{\lambda a_4}{(6+0)(6+0-1+\alpha)} = -\frac{\lambda^3 a_0}{2.4.6(1+\alpha)(3+\alpha)(5+\alpha)}$$

Benzer şekilde $a_8, a_{10}, \ldots, a_{2n}, \ldots$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ katsayıları elde edilir. Yine aynı şekilde $a_1 = 0$ olduğundan $a_3 = 0, a_5 = 0, \ldots, a_{2n+1} = 0, \ldots$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ şeklinde bulunur.

O halde,

$$z_1(x) = x^0\left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots\right)$$

$$z_1(x) = a_0\left(1 - \frac{\lambda}{2(1+\alpha)}x^2 + \frac{\lambda^2}{2.4.(1+\alpha)(3+\alpha)}x^4 - \ldots\right)$$

şeklinde çözümler elde edilir. Bu elde edilen $z_1(x,\lambda)$ ve $z_2(x,\lambda)$ çözümleri, $y(x) = \sqrt{p(x)}z(x)$ dönüşümünde yerlerine yazıldığında, $y_1(x,\lambda)$ ve $y_2(x,\lambda)$ çözümleri için

$$y_1(x,\lambda) = \sqrt{p(x)}\left(a_0 + a_2x^2 + \ldots\right), \qquad a_0 \geq 0 \text{ ve}$$

$$y_2(x,\lambda) = \sqrt{p(x)}\left(x^{1-b_0}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right), \qquad c_0 \neq 0$$

eşitlikleri elde edilir. Burada a_n ve c_n katsayıları λ'nın kuvvetine bağlıdır.

Şimdi $x \to 0$ iken $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)$ çözümlerine asimptotik olarak aşağıdaki gibi yaklaşılabilir:

$$y_1(x,\lambda)=a_0\sqrt{p(x)}+O\left(x^{(2+b_0/2)}\right),$$
$$y_2(x,\lambda)=c_0x^{(1-b_0)}\sqrt{p(x)}+O\left(x^{(2-b_0/2)}\right),$$
$$y_1'(x,\lambda)=\left(p'(x)/2\sqrt{p(x)}\right)a_0+O\left(x^{(1+b_0/2)}\right),$$
$$y_2'(x,\lambda)=\left(p'(x)/2\sqrt{p(x)}\right)c_0x^{(1-b_0)}+\sqrt{p(x)}(1-b_0)c_0x^{-b_0}+O\left(x^{(1-b_0/2)}\right)$$

Böylece (2.1.3) eşitliğindeki $\theta(a,\lambda)\cot\beta+\theta'(a,\lambda)$ ifadesi,

$$\theta(a,\lambda)\cot\beta+\theta'(a,\lambda)=$$
$$=d\left[\{y_1(a,\lambda)\cot\beta+y_1'(a,\lambda)\}y_2'(b,\lambda)-\{y_2(a,\lambda)\cot\beta+y_2'(a,\lambda)\}y_1'(b,\lambda)\right]$$
$$=d\left[\left\{a_0\sqrt{p(a)}\cot\beta+\left(p'(a)/2\sqrt{p(a)}\right)a_0\right\}y_2'(b,\lambda)\right.$$
$$-\left\{c_0a^{(1-b_0)}\sqrt{p(a)}\cot\beta+\left(p'(a)/2\sqrt{p(a)}\right)c_0a^{(1-b_0)}+\sqrt{p(a)}(1-b_0)c_0a^{-b_0}\right\}y_1'(b)$$
$$\left.+O\left(a^{(2-b_0/2)}|\cot\beta|\right)+O\left(a^{(2-b_0/2)}\right)\right]$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan

$$\left\{c_0a^{(1-b_0)}\sqrt{p(a)}\cot\beta+\left(p'(a)/2\sqrt{p(a)}\right)c_0a^{(1-b_0)}+\sqrt{p(a)}(1-b_0)c_0a^{-b_0}\right\}=$$
$$=c\left\{a_0\sqrt{p(a)}\cot\beta+\left(p'(a)/2\sqrt{p(a)}\right)a_0\right.$$

olsun. Burada c sabittir. Bu durumda

$$\cot\beta=\left[\left((1-b_0)a^{-b_0}c_0+\left(p'(a)/2p(a)\right)a^{1-b_0}c_0-c\left(p'(a)/2p(a)\right)a_0\right)/\left(a_0c-c_0a^{1-b_0}\right)\right]$$

eşitliği alınabilir. Dolayısıyla aşağıdaki üç durum söz konusudur.

(i) $c\neq 0,\infty$ için ve $a\to 0$ iken

$\cot\beta=(1-b_0)a^{-b_0}c_0/a_0c-\left(p'(a)/2p(a)\right)=O(1/a)$ ve

$a_0\sqrt{p(a)}\cot\beta+\left(p'(a)/2\sqrt{p(a)}\right)a_0\approx\sqrt{p(a)}(1-b_0)c_0a^{-b_0}/c\approx a^{-b_0/2}$.

(ii) $c=0$ ve $a\to 0$ iken

$\cot\beta=-(1-b_0)/a-\left(p'(a)/2p(a)\right)=O(1/a)$; ve

$a_0\sqrt{p(a)}\cot\beta+\left(p'(a)/2\sqrt{p(a)}\right)a_0$

$=-\sqrt{p(a)}\left((1-b_0)a^{-1}a_0+\left(p'(a)/2p(a)\right)a_0-\left(p'(a)/2p(a)\right)a_0\right)\approx a^{(b_0/2)-1}$;

(iii) $c=\infty$ ve $a\to 0$ iken

$\cot\beta=-\left(p'(a)/2p(a)\right)=O(1/a)$ ve

$=c_0\sqrt{p(a)}\left(2(1-b_0)a^{-b_0}+\left(p'(a)/p(a)\right)a^{1-b_0}-\left(p'(a)/p(a)\right)a^{1-b_0}\right)/2\approx a^{-b_0/2}$.

$0<b_0<1$ ve $a \to 0$ iken (2.1.3) eşitliğindeki $\theta(\mathrm{a},\lambda)\cot\beta+\theta'(a,\lambda)$ ifadesinde O-terimleri ihmal edilebilir. Benzer işlemler (2.1.3) eşitliğinin paydasında da yapılarak $a \to 0$ iken $m(\lambda)$ ifadesi aşağıda olduğu gibi elde edilir:

$$m(\lambda)=\frac{cy_1'(b,\lambda)-y_2'(b,\lambda)}{cy_1(b,\lambda)-y_2(b,\lambda)}\ .$$

Burada c sabittir ve c;

değişen c ile elde edilen çemberi tanımlayan herhangi $m(\lambda)$ değerine sahip olabildiğinden bu limit çember durumudur. c'nin her bir değeri için ; m, λ'nın tek değerli analitik fonksiyonudur. m reel eksen üzerinde λ_n'lerde kutuplar olarak singüleritelere sahiptir ve bu singüleriteler $(cy_1(b,\lambda)-y_2(b,\lambda))$'nın sıfırlarıdır. Böylece λ_n'lere karşılık gelen özfonksiyonlar,

$$\varphi(x,\lambda)=d[y_1(x,\lambda y_2(b,\lambda)-y_2(x,\lambda y_1(b,\lambda)] \text{ olduğundan}$$

$$\varphi(x,\lambda_n)=dy_1(b,\lambda_n)[cy_1(x,\lambda_n)-y_2(x,\lambda_n)]$$

şeklindedir. Normalleştirilmiş özfonksiyonlar ise

$$|r_n|^{1/2}\varphi(x,\lambda_n)$$

şeklindedir. Burada r_n'ler, $m(\lambda)$'nın λ_n noktalarındaki rezidüleridir.

$$(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)\int_0^b\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx=1\Rightarrow$$

$$m(\lambda)=\frac{a_{-1}}{\lambda-\lambda_n}+a_0+a_1(\lambda-\lambda_n)+\ldots \text{ olduğundan}$$

$$(\lambda-\lambda_n)m(\lambda)\int_0^b\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx=1\Rightarrow$$

$$\mathrm{res}m(\lambda_n)\int_0^b\varphi^2(x,\lambda_n)dx=1\Rightarrow\int_0^b\varphi^2(x,\lambda_n)dx=1/\mathrm{res}m(\lambda_n)=\alpha_n\Rightarrow$$

$$\int_0^b\varphi^2(x,\lambda_n)dx=\|\varphi_n\|^2=1/\mathrm{res}m(\lambda_n)=\alpha_n \text{ olduğundan}$$

$$\|\varphi_n\|=1/\sqrt{\mathrm{res}m(\lambda_n)}\Rightarrow\sqrt{\mathrm{res}m(\lambda_n)}=1/\|\varphi_n\| \text{ olur.}$$

$|r_n|^{1/2}\varphi(x,\lambda_n)=\dfrac{\varphi(x,\lambda_n)}{\|\varphi_n\|}$ dır ki bunlar normalleştirilmiş özfonksiyonlardır.

Bu normalleştirilmiş özfonksiyonlar $\varphi(b,\lambda)=0$ denklemini sağlar.

Eğer $c=0$ olursa bu durumda $m(\lambda)=y_2'(b,\lambda)/y_2(b,\lambda)$ olur. Böylece λ_n'ler $y_2(b,\lambda)$'nın sıfırlarıdır ve normalleştirilmiş özfonksiyonlar ;

$$\varphi_n(x,\lambda_n)=-|r_n|^{1/2}dy_2(x,\lambda)y_1(b,\lambda)$$

şeklinde olur.

2.2. Zayıf Regüler Singüler İki Nokta Sınır Değer Probleminin Spektral Karakteristikleri ve Green Fonksiyonu

Şimdi Teorem 2.1.1., Teorem 2.1.2. ve Teorem 2.1.3. yardımı ile bu bölümden şu sonuçlar çıkarılabilir.

Lemma 2.2.1: $0<x\le b$ ve $y(0)=A\ge 0$, $y(b)=B\ge 0$ için $y(x)$, $My-kp(x)y\ge 0$ ifadesini sağlarsa , $k\le 0$ olmak koşulu ile $y(x)\ge 0$ olur.

İspat: (i) $k<0$ için, $y(c)<0$ olacak biçimde $c\in(0,b)$ noktası var olsun. $y\in C[0,b]$ olduğu için $y(d)<0, y'(d)=0, y''(d)\ge 0$ olacak biçimde $d\in(0,b)$ noktası vardır. Bu durumda diferansiyel eşitsizlik d noktasında sağlanmayacaktır. Böylece $y(x)\ge 0$ olur.

(ii) $k=0$ için, $My=f(x)$ ifadesi x' den b ye iki kez integrallenirse,

$$y(x)=y(b)+c\int_x^b 1/p(x)dx-\left(\int_x^b 1/p(x)\int_x^b f(t)dtdx\right)$$

ifadesi elde edilir. Burada c sabit ve $y(0)=A$ kullanılarak bulunabilir. Ayrıca, $A\ge 0$ olduğunda c sabiti öyle seçilebilir ki $y(x)\ge 0$ olsun.

$f(x)\ge 0, y(0)\ge 0, y(b)\ge 0, p(x)>0$ ve $1/p\in L_1(0,b)$ olduğundan $y(x)\ge 0$ olur.

Lemma 2.2.2: A-1 koşullarını sağlayan $p(x)$ fonksiyonu için

$$My-kp(x)y=0,\qquad 0<x\le b, \tag{2.2.1}$$

$$y(0)=0\,,\quad y(b)=B \tag{2.2.2}$$

sınır değer problemi,

$$y(x)=Bu(x)/u(b)\,,\qquad u(x;k)=u(x)=x^{1-b_0}\sum_{n=0,n\neq 1}^{\infty}a_n x^n\,,\qquad a_0\neq 0\,,$$

şeklinde verilen tek çözüme sahiptir. Burada a_n'ler k 'nın kuvvetine bağlı katsayılardır ve k değerleri,

$$My=\lambda p(x)y,\qquad y(0)=0,\qquad \mathrm{y(b)}=0 \tag{2.2.3}$$

probleminin özdeğerlerinden değildir.

Ayrıca $B\geq 0$ ve $0<k<k_1$ ise $y(x)\geq 0$ dır. Burada k_1, (2.2.3) probleminin birinci pozitif özdeğeridir.

İspat: Frobenius seri metodu kullanılarak (2.2.1) denkleminin iki lineer bağımsız çözümleri

$$u(x)=x^{1-b_0}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m,\qquad c_0\neq 0\qquad \text{ve}\qquad v(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m,\qquad a_0\neq 0$$

biçiminde elde edilir. Böylece (2.2.1) ve (2.2.2) sınır değer problemleri; $u(b;k)\neq 0$ olmak koşulu ile $y(x)=Bu(x;k)/u(b;k)$ tek çözümüne sahiptir. Yani k (2.2.3)'ün özdeğerlerinden değildir. Eğer özdeğerlerinden herhangi biri olsa idi, $y(x)=0$ trivial çözüm elde edilirdi.

Operatör pozitif olduğundan (2.2.3) probleminin özdeğerleri pozitiftir ve bu problemin özdeğerleri $u(b;k)$'nın sıfırlarıdır. $u(b;k)$; k'nın analitik fonksiyonu olduğundan bunun sıfırları olan özdeğerler ayrıktır ve bu özdeğerler $0<k_1<k_2<\ldots$, şeklindedir. Burada k_1, $u(b;k)$'nın birinci pozitif sıfırıdır. Başka bir deyişle (2.2.3) probleminin birinci pozitif özdeğeridir.

$u(x;k)$, $0<k<k_1$ için işaretini değiştirmeyecektir. İşaretini değiştirmesi sıfıra eşit olmasını gerektireceğinden bu durum geçerli değildir. $u(0)=0$ ve $0<x\leq b$ olduğundan $u(x;k)$ ile $u(b;k)$ aynı işaretli olacaktır. $B\geq 0$ olmak koşulu ile $0<k<k_1$ için $y(x)\geq 0$ elde edilir.

Lemma 2.2.3: $f(x)\in L_1[0,b]$ olmak üzere,

$$My-kp(x)y=f(x),\qquad 0<\mathrm{x}\leq \mathrm{b} \tag{2.2.4}$$

$$y(0)=0, \qquad y(b)=B \tag{2.2.5}$$

problemindeki M lineer diferansiyel operatör için karşılık gelen homojen sınır değer probleminin genelleştirilmiş Green fonksiyonu ;

$$G(x,t;k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(x,k_n)U(t,k_n)}{(k_n-k)} \tag{2.2.6}$$

şeklindedir. Burada $U(x;k_i)=u(x;k_i/|u(b,k_i)|$ ifadesi k_i özdeğerine karşılık gelen normalleştirilmiş özfonksiyondur.

$k\neq k_1,k_2,\ldots$ olmak üzere G; homojen sınır koşullarını sağlar ve $F(x)=f(x)+B/b(p'(x)+kxp(x))$ olmak üzere (2.2.4) , (2.2.5) sınır değer probleminin çözümü;

$$y(x)=Bx/b+\int_0^b G(x,t;k)F(t)dt \tag{2.2.7}$$

olur.

(2.2.6) eşitliğinin sağ tarafındaki seri $(0,b)$ de mutlak yakınsaktır.

İspat: Green fonksiyonu;

$$G(x,t;k)=\begin{cases}\dfrac{u(t)[u(b)v(x)-v(b)u(x)]}{p(x)W(u,v)u(b)}, & o<t\leq x\\[2ex] \dfrac{u(x)[u(b)v(t)-v(b)u(t)]}{p(x)W(u,v)u(b)}, & x\leq t\leq b\end{cases}$$

biçiminde elde edilir. Burada $u(x)$ ve $v(x)$ (2.2.1) denkleminin iki lineer bağımsız çözümleridir ve $p(x)W(u,v)$ ise sıfırdan farklı sabittir.

$G(x,t;k)$; $k\neq k_1,k_2,\ldots$ olmak koşulu ile homojen sınır koşullarını sağlayan (2.2.1) lineer diferansiyel operatör için Green fonksiyondur.

$u(x)=y(x)-xB/b$ dönüşümü yardımı ile (2.2.4) ve (2.2.5) sınır değer problemleri,

$$Mu-kp(x)u=F(x), \qquad 0<x\leq b$$

$$u(0)=0, \quad u(b)=0$$

problemine indirgenir. Böylece (2.2.4) ve (2.2.5) probleminin çözümü

$$y(x) = Bx/b + \int_0^b G(x,t;k)F(t)dt$$

olarak yazılır. Burada $F(x) = f(x) + B/b(p'(x) + kxp(x))$ biçimindedir.

Şimdi [14, sayfa 38-39] den yararlanılırsa genelleştirilmiş Green fonksiyonunun;

$$G(x,t;k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(x,k_n)U(t,k_n)}{(k_n - k)}$$

biçiminde verildiği görülür ve (2.2.6) eşitliğinin sağ tarafındaki serinin mutlak yakınsaklığı, [14, sayfa 38]'den ve Teorem 2.1.3'den alınır.

Lemma 2.2.4: $f \in L_1[0,b]$, $B \geq 0$ ve $f \geq 0$ ise (2.2.4) ve (2.2.5)'un $y(x)$ çözümü; $0 < k < k_1$ olmak koşulu ile negatif değildir.

İspat: İlk olarak $0 < k < k_1$ ise $0 < x,t \leq b$ için $G(x,t)$'nin negatif olmadığı gösterilir.

Bunun için t sabit tutularak $G(x,t)$ fonksiyonu

$$-(p(x)G'(x,t))' - kp(x)G(x,t) = 0, \qquad 0 < x < t$$

denklemini sağlar. Burada $' \equiv \partial/\partial x$ dir. $G(0,t) = 0$ olduğundan $0 < k < k_1$ için $G(t,t) \geq 0$ ve Lemma 2.2.2'den, $0 < k < k_1$ koşulu ile $0 \leq x \leq t$ için $G(x,t) \geq 0$ olur. Şimdi, $G(x,t)$'nin simetri ve sürekliliğinden $0 < k < k_1$ olmak üzere $0 \leq x,t \leq b$ için $G(x,t) \geq 0$ elde edilir. Böylece $B \geq 0$ ve $b > 0$ olduğundan (2.2.6) ifadesinden $y(x) \geq 0$ olduğu görülür.

Corollary 2.2.5: $0 < x \leq b$ ve $y(0) = 0$, $y(b) = B \geq 0$ için $y(x)$; $My - kp(x)y \geq 0$ ifadesini sağlarsa o zaman $k < k_1$ olmak üzere $y(x) \geq 0$ olur.

İspat: Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2 den açıktır.

Corollary 2.2.6: Lemma 2.2.3'de (2.2.4) ve (2.2.5) sınır değer problemlerinin çözümü tektir.

İspat: Corollary 2.2.5 den elde edilir.

III.BÖLÜM

BİR SİMETRİK OPERATÖRÜN GENİŞLEMESİ

3.1. Problemin Kuruluşu

Simetrik operatörler teorisindeki temel problemlerden biri, verilen A simetrik operatörünün bütün genişlemelerin kurulmasıdır. Bunun bir özel durumu; self-adjoint genişlemeye sahip olan bir operatör altında koşulları oluşturma problemi ve bu koşullar sağlandığında bütün self-adjoint genişlemeleri kurmaktır.

B, simetrik A operatörünün bir simetrik genişlemesi ise, $A \subset B$ ve böylece de $B^* \subset A^*$ dır. Fakat, B bir simetrik operatördür, yani; $B \subset B^*$ dır ve bu durumda,

$$A \subset B \subset B^* \subset A^*, \tag{3.1}$$

ifadesi elde edilir, yani; bir A operatörünün her simetrik genişlemesi, A^* operatörünün kısıtlamasıdır.

Bir A simetrik operatörü, öz simetrik genişlemeye sahip değilse, A simetrik operatörü maksimal olarak adlandırılır.

Her self-adjoint A operatörü, bir maksimal, simetrik operatördür.
Bu durumda $A^* = A$ olur ve (3.1) formülü $B = A$'yı gerektirir, yani; A'nın her B simetrik genişlemesi A ile çakışır.

3.2. Bir Simetrik Operatörün Deficiency Uzayları

A bir simetrik operatör ve λ keyfi reel olmayan sayı olsun. $(A-\lambda I)$ ve $(A-\bar{\lambda} I)$ operatörlerinin görüntü kümeleri sırası ile $\Re_\lambda$ ve $\Re_{\bar{\lambda}}$ ile gösterilsin. Açıkca, $\Re_\lambda$ ve $\Re_{\bar{\lambda}}$ H Hilbert uzayının alt uzaylarıdır ve kapalı olma gereklilikleri yoktur. Onların ortogonal tümleyenleri olan $H-\Re_\lambda$ ve $H-\Re_{\bar{\lambda}}$ ifadeleri A operatörün deficiency uzayları olarak adlandırılsın ve sırasıyla N_λ ve $\mathrm{N}_{\bar{\lambda}}$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$\mathrm{N}_\lambda = H-\Re_\lambda$ ve $\mathrm{N}_{\bar{\lambda}} = H-\Re_{\bar{\lambda}}$ olur.

I. N_λ ve $N_{\bar{\lambda}}$ deficiency uzayları, sırasıyla $\bar{\lambda}$ ve λ öz değerlerine ait olan A^* operatörün çözümlerinin uzaylarıdır.

İspat. $x \in N_\lambda$ ise, her $y \in D_A$ vektörü için

$$(Ay - \lambda y, x) = 0, \tag{3.2}$$

ifadesi elde edilir, yani;

$$(Ay, x) = (y, \bar{\lambda}x), \tag{3.3}$$

olur. A^* operatörünün tanımı ile, bu durum, $x \in D_{A^*}$ ve $A^*x = \bar{\lambda}x$ anlamına gelir. Diğer taraftan, $A^*x = \bar{\lambda}x$ denklemi sağlanırsa, keyfi bir $y \in D_A$ vektörü için, (3.3) denklemi sağlanır ve bu (3.2) denklemine denktir, yani; $x \in N_\lambda$ olur.

3.3. Cayley Dönüşümü

Tanım 3.3.1: A bir simetrik operatör ve λ keyfi reel olmayan sayı olmak üzere,

$$V = (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda} I)^{-1} \tag{3.4}$$

operatörüne A operatörünün Cayley dönüşümü adı verilir.

Bu tanımdan anlaşılacağı gibi reel olmayan $\bar{\lambda}$ sayısı, A Hermitian operatörünün bir öz değeri olamaz ve böylece $(A - \bar{\lambda} I)^{-1}$ operatörü mevcut olur.

Şimdi, V operatörünün bazı basit özellikleri sıralansın.

Teorem 3.3.2:

1. Bir A simetrik operatörünün Cayley dönüşümü; $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$'nın tanım kümesi ve $\mathfrak{R}_\lambda$ görüntü kümesi ile bir izometrik operatördür.

2. $(Vy - y), y \in D_v$, kümesi H de yoğundur.

3. Koşul 2 yi sağlayan her izometrik V operatörü, belli bir simetrik operatörün Cayley dönüşümüdür.

İspat. 1. Her $y \in D_v$ vektörü, açıkça $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$'ye ait olmalıdır. Diğer taraftan, $y \in \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ ise, buna $(A - \bar{\lambda} I)^{-1}$ operatörü uygulanır ve $(A - \bar{\lambda} I)^{-1} y \in D_A$ elde edilir. Burada $(A - \lambda I)$ operatörü, $(A - \bar{\lambda} I)^{-1} y$ ifadesine uygulanabilir. Bu, $y \in D_v$ yi gerektirir. Böylece $D_V = \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ olduğu gösterilmiş oldu.

Şimdi, x, A operatörünün tanım kümesinde keyfi bir vektör olsun, yani; $x \in D_A$ olsun.

$$y = (A - \bar{\lambda} I)x, \tag{3.5}$$

eşitliği alınsın. Bu durumda $y \in D_V$ ve

$$Vy = (A - \lambda I)x, \tag{3.6}$$

olur. Böylece V operatörünün görüntü kümesi $\Re_\lambda$ ile çakışır. Ayrıca,

$\|V_y\|^2 = \|(A - \lambda I)x\|^2 = ((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) = (Ax, Ax) - \bar{\lambda}(Ax, x) -$
$- \lambda(x, Ax) + |\lambda|^2 (x, x)$ ve

$\|y\|^2 = \|(A - \bar{\lambda} I)x\|^2 = ((A - \bar{\lambda} I)x, (A - \bar{\lambda} I)x) = (Ax, Ax) - \lambda(Ax, x) -$

$- \bar{\lambda}(x, Ax) + |\lambda|^2 (x, x)$ dır.

Hesaplamada $(Ax, x) = (x, Ax)$ olduğunu gözönüne alarak, $\|Vy\|^2 = \|y\|^2$ olduğu görülür, yani; V bir izometrik operatördür.

2. (3.5) ve (3.6) formülleri; $y - Vy = (\lambda - \bar{\lambda})x$ ifadesini gerektirir ve böylece $(y - Vy), y \in D_V$, vektörlerinin $\Re_{1-V}$ kümesi, D_A kümesi ile çakışır ve H' de yoğundur.

3. V; koşul 2' yi sağlayan bir izometrik operatör olsun. Bu operatör, birime eşit olan öz değere sahip değildir, yani; $y = Vy$ sadece $y = 0$ olduğunda mümkündür. Bu böyle olmasaydı, her $z \in D_V$ vektörü için

$(Vz - z, y) = (Vz, y) - (z, y) = (Vz, Vy) - (z, y) = 0$ denklemi sağlanırdı, yani; $y \neq 0$ vektörü H' de yoğun olan $\Re_{1-V}$ kümesine ortogonal olurdu. Bu, imkansızdır.

Böylece $(1 - V)^{-1}$ operatörü mevcut olur.

$$A = (\lambda I - \bar{\lambda} V)(1 - V)^{-1} \tag{3.7}$$

yazılsın ve A' nın, Cayley dönüşümü V ile çakışan bir simetrik operatör olduğu ispatlansın. A operatörü aşağıdaki gibi de tanımlanabilir:

$D_A = \Re_{1-V}$ ve $y \in D_V$ için

$A(y - Vy) = \lambda y - \bar{\lambda} Vy$ dır.

Koşul 2 ile D_A' nın H' de yoğundur sonucu çıkarılır. Ayrıca,

$(A(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2) = ((y_1 - Vy_1, A(y_2 - Vy_2))$ denkleminin sağlanması için,

$y_1, y_2 \in D_V$ için,

$$(A(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2) = (\lambda y_1 - \bar{\lambda} V y_1, y_2 - Vy_2)$$
$$= (\lambda + \bar{\lambda})(y_1, y_2) - \bar{\lambda}(Vy_1, y_2) - \lambda(y_1, Vy_2),$$

ve

$$((y_1 - Vy_1), A(y_2 - Vy_2)) = (y_1 - Vy_1, \lambda y_2 - \bar{\lambda} V y_2)$$

$= (\lambda + \bar{\lambda})(y_1, y_2) - \bar{\lambda}(Vy_1, y_2) - \lambda(y_1, Vy_2)$, ifadeleri elde edilir, yani; A bir simetrik operatördür.

Sonuç olarak, $x = y - Vy, y \in D_V$, yazılırsa, $Ax = \lambda y - \bar{\lambda} V y$ olur.

O halde, $Ax - \bar{\lambda} x = (\lambda - \bar{\lambda}) y$, $\quad Ax - \lambda x = (\lambda - \bar{\lambda}) V y$ dir.

Bu denklemler, V' nin A operatörün Cayley dönüşümü olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.3: A_1, A_2 simetrik operatör ve V_1, V_2 bunların Cayley dönüşümleri olsun. Bu durumda A_2 operatörü A_1 operatörünün genişlemesi olması için gerekli ve yeterli koşul V_2 operatörünün V_1 operatörünün bir genişlemesi olmasıdır.

Teorem 3.3.4: Simetrik bir A operatörünün kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul onun V Cayley dönüşümünün kapalı operatör olmasıdır. Yani; simetrik A operatörünün kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\Re_{\bar{\lambda}}$ ve $\Re_{\lambda}$ ifadelerinin kapalı olmasıdır.

İspat. Kabul edilsin ki, A operatörü kapalı ve $y_n = (A - \bar{\lambda} I) x_n, x_n \in D_A$, dizisi belli bir y vektörüne yakınsasın. V operatörü izometrik olduğundan $Vy_n = (A - \lambda I) x_n$ dizisi de belli bir z vektörüne yakınsar. Bu durumda,

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(y_n - Vy_n) \to \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(y - z),$$

$Ax_n = \dfrac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(\lambda y_n - \bar{\lambda} V y_n) \to \dfrac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(\lambda y - \bar{\lambda} z)$, dir ve A kapalı olduğundan,

$y - z \in D_A$, $\quad$ A(y - z) = λy - $\bar{\lambda} z$, ifadesi elde edilir ve sonuç olarak

$$y = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}\left[A(y-z) - \bar{\lambda}(y-z)\right] \in \Re_{\bar{\lambda}} \text{ olur.}$$

Bu, V operatörünün ve $\Re_{\bar{\lambda}}$ alt uzayının kapalı olduğunu ispatlar; o halde $\Re_{\bar{\lambda}}$ kapalı alt uzayın izometrik eşlemesi olan $\Re_{\lambda}$'da kapalıdır.

Benzer şekilde, V operatörü veya $\Re_{\bar{\lambda}}$ alt uzayı kapalı ise, A operatörün de kapalı olduğu gösterilebilir.

3.4. Adjoint Operatörün Tanım Kümesi

Sadece $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ olması durumunda $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, $x_k \in M_k$, $(k = 1,2,\ldots,n)$ eşitliği sağlanırsa $M_1, M_2, \ldots, M_n$ alt uzaylarının lineer bağımsız olduğu söylenir.

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ alt uzayları lineer bağımsız ise, $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ direkt toplamında ki herhangi x vektörü;

$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\quad x_k \in M_k$, $(k = 1,2,\ldots,n)$ şeklinde tek olarak gösterilebilir.

$x = x_1' + x_2' + \ldots + x_n' = 0$, $\quad x_k' \in M_k$, $(k = 1,2,\ldots,n)$ şeklinde bir ikinci gösterim olsaydı,

$0 = (x_1 - x_1') + (x_2 - x_2') + \ldots + (x_n - x_n')$, $\quad x_k - x_k' \in M_k$, $(k = 1,2,\ldots,n)$

olmalıydı. Fakat $M_1, M_2, \ldots, M_k$ alt uzayları lineer bağımsız olduklarından,

$x_k - x_k' = 0$ veya $x_k = x_k'$, $(k = 1,2,\ldots,n)$ olur.

Teorem 3.4.1: A kapalı, simetrik operatör ise, $D_A, N_{\bar{\lambda}}, N_{\lambda}$ alt uzayları lineer bağımsızdır ve onların direkt toplamı, D_{A^*} ile çakışır:

$$D_{A^*} = D_A + N_{\bar{\lambda}} + N_{\lambda} \tag{3.8}$$

İspat. İlk olarak lineer bağımsızlık ispatlansın.

$$x + y + z = 0, \quad x \in D_A, y \in N_{\bar{\lambda}}, z \in N_{\lambda} \tag{3.9}$$

olsun. (3.9)'un her iki tarafına $(A^* - \bar{\lambda}I)$ operatörü uygulanırsa,

$$(A - \bar{\lambda}I)x + (\lambda - \bar{\lambda})y = 0 \tag{3.10}$$

elde edilir. Fakat, $(A - \bar{\lambda}I)x \in \Re_{\bar{\lambda}}$ ve $(\lambda - \bar{\lambda})y \in N_{\bar{\lambda}}$ şeklindedir. Bu iki alt uzay ortogonal olduklarından, (3.10) denklemi sadece $(A-\overline{\lambda}I)x=0$ ve $(\lambda-\overline{\lambda})y=0$ iken mümkündür, yani; sadece $x=0$ ve $y=0$ ise ($x=0$, çünkü,reel olmayan $\overline{\lambda}$ sayısı A simetrik operatörünün bir öz değeri olamaz).

(3.9)'dan dolayı $z=0$ olur.

Şimdi (3.8) formülü ispatlansın. $D_A, N_{\overline{\lambda}}, N_\lambda$ alt uzaylarının her biri, D_{A^*} tarafından kapsanır. O halde,

$$D_{A^*} \supset D_A + N_{\overline{\lambda}} + N_\lambda \tag{3.11}$$

olur. Diğer taraftan, herhangi $u \in D_{A^*}$ vektörü,

$$u = x+y+z, \qquad x \in D_A, y \in N_{\overline{\lambda}}, z \in N_\lambda \tag{3.12}$$

formunda gösterilmek istenir. Bunun için;

A operatörü kapalı olduğundan, $\Re_{\overline{\lambda}}$, kapalı alt uzay olmalıdır. Tanımdan, $N_{\overline{\lambda}}$ onun ortogonal tümleyenidir ve böylece

$$\Re_{\overline{\lambda}} + N_{\overline{\lambda}} = H \tag{3.13}$$

şeklindedir. Bu, $\forall v \in H$ vektörünün

$v = v' + v'', v' \in \Re_{\overline{\lambda}}, v'' \in N_{\overline{\lambda}}$ şeklinde gösterilebileceği anlamına gelir. v vektörü. $v = (A^* - \overline{\lambda}I)u$ şeklinde gösterilmek istenir. $v' \in \Re_{\overline{\lambda}}$ olduğundan, $v' = (A-\overline{\lambda}I)x, x \in D_A$ ve $v'' = (\lambda - \overline{\lambda})y, y \in N_{\overline{\lambda}}$ şeklinde yazılır. Bu durumda, $A^*y = \lambda y$ ve $A^*x = Ax$ olduğundan,

$(A^* - \overline{\lambda}I)u = (A-\overline{\lambda}I)x + (\lambda-\overline{\lambda})y = (A^* - \overline{\lambda}I)(x+y)$ elde edilir.

O halde, $(A^* - \overline{\lambda}I)(u-x-y) = 0$ olur. Böylece, eğer $z = u-x-y$ yazılırsa, $z = u-x-y \in N_\lambda$ olur ve bu, (3.8)' in geçerliliğini ispatlar.

$$A^*u = Ax + \lambda y + \overline{\lambda}z \tag{3.14}$$

denklemi sağlandığından, Teorem 3.4.1., A^* operatörünün tam tarifini verir.

Corollary 3.4.2: Kapalı simetrik operatörün self-adjoint olması için gerekli ve yeterli koşul onun iki deficiency alt uzaylarının $\{0\}$' a eşit olmasıdır, yani; sadece uzayının sıfır elemanından oluşur.

(3.8) formülü, sadece bu durumda $D_{A^*} = D_A$ olduğunu gösterir.

3.5. M Modul Boyutu

M ve N, H'de iki alt uzay olsun. N'de, n vektör varsa, (fakat n vektörden daha fazla yoksa), öyle ki, onların yalnız sıfır katsayılı lineer bileşeni M'ye aittir, bu n sayısına N'nin M modülüne göre alt uzayının boyutu denir.

N'nin M modülüne göre boyutunu, $\dim N$ ile gösterilen adi boyuttan ayırmak için $\dim_M N$ ile gösterilir.

Böylece, (3.8) formülünden görülür ki, $n_{\bar{\lambda}}$ ve n_λ, sırasıyla $N_{\bar{\lambda}}$ ve N_λ'nın boyutları ise, $\dim_{D_A} D_{A^*} = n_{\bar{\lambda}} + n_\lambda$ bağıntısıdır.

Özel olarak, $n_{\bar{\lambda}} + n_\lambda$ λ'ya bağlı değildir, çünkü D_{A^*} ve D_A, λ' dan bağımsızdır.

Şimdi, φ, H'de keyfi bir küme ve M H' nin bir alt uzayı olsun.
n, $\varphi \cup \{0\}$ tarafından kapsanan en büyük alt uzayın M modülüne göre boyutu ise; φ, M modülüne göre n boyuta sahiptir.

II. m ve n sırasıyla N_{-i} ve N_i alt uzaylarının boyutları olsun, o zaman $\varepsilon^+, \varepsilon^-$ kümeleri, D_A modülüne göre m ve n boyutlarına sahiptir.

İspat. $D_A \subset \varepsilon^0$, $N_i \subset \varepsilon^- \cup \{0\}, N_i \subset \varepsilon^+ \cup \{0\}$'dan, bu boyutlar sırasıyla m ve n ye eşit veya daha büyüktür; bu yüzden ters eşitsizlikleri ispatlamak yeterlidir. ε^+ için ispat verilecek olunursa; bu, ε^- için olan ile benzerdir. Ayrıca, $m = \infty$ için önceki eşitsizlik bir eşitlik olur; böylece, sadece $m < \infty$ durumunu tartışmaya gerek vardır.

Kabul edilsin ki; iddiaya karşıt olarak, ε^+ da $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ $(m+1)$ lineer bağımsız vektör vardı, öyle ki her trivial olmayan lineer kombinasyon, ε^+ tarafından kapsanır, fakat D_A tarafından değil. $\varepsilon^+ \subset D_{A^*}$ olduğundan, bu vektörlerin her biri $x_j = x_j^o + x_j^- + x_j^+$, $x_j^o \in D_A, x_j^- \in N_i, x_j^+ \in N_{-i}$ şeklinde gösterilir. $\dim N_{-i} = m$ olduğundan $x_j^+ (j = 1,2,\ldots,(m+1))$ vektörleri lineer bağımlıdır. Böylece, hepsi sıfır olmayan $c_1, \ldots, c_{m+1}$ sayıları vardır öyle ki

$c_1x_1^+ + c_1x_2^+ + \ldots + c_{m+1}x_{m+1}^+ = 0$ dır. Daha sonra $\sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j = x^o + x^-$ elde edilir ki,

burada $x^o = \sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j^o \in D_A$, $\quad x^- = \sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j^- \in N_i$.

Fakat bu imkansızdır, D_{A^*}'daki bir x vektörü $\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2$ ifadesinin sıfırdan büyük, sıfırdan küçük ve sıfıra eşit olmasına göre sırasıyla ε^+, ε^- veya ε^0 da yerleşir önermesinden $x^o + x^- \in \varepsilon^-$ $\quad x \neq 0$ için

$x^o + x^- \in \varepsilon^o$ $\quad x = 0$ için

olduğundan hipotezden $\sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j \in \varepsilon^+$ olur.

III. $\alpha > 0$ ve β keyfi bir reel sayı ise, A ve $B = \alpha A + \beta I$ operatörlerinin N_{-i}, N_i deficiency uzayları aynı boyuta sahiptir.

İspat. $D_A = D_B$ ve $\varepsilon^+, \varepsilon^-$ kümeleri her iki operatör için aynı olduğundan, bu önerme, II'den direkt olarak çıkar.

Teorem 3.5.1: Üst yarı düzlemden her kompleks λ sayısı için,
$\dim N_{\bar{\lambda}} = \dim N_{-i}$, $\quad \dim N_\lambda = \dim N_i$ dir.

İspat. $\lambda = \sigma + i\tau$ yazılır, burada hipotezden $\tau > 0$ dır. $B = \tau A + \sigma I$ operatörünün deficiency uzayları N'_i, N'_{-i} ile gösterilsin. Bu durumda $N_\lambda = N'_i, N_{\bar{\lambda}} = N'_{-i}$ olduğu açıkça görülür, ve böylece teorem, III önermesinden hemen çıkar.

3.6. Deficiency Indeksler

$m = \dim N_i$, $\quad n = \dim N_{-i}$ yazılsın. m ve n sayıları, A operatörünün deficiency indeksleri olarak adlandırılır.

Teorem 3.5.1'den $\lambda > 0$ ise, $m = \dim N_\lambda$, $\quad n = \dim N_{\bar{\lambda}}$ ifadelerine de sahip olunur. Bu durumda Corollary 3.4.2 den çıkar ki:
Bir kapalı, simetrik operatörün self-adjoint olması için gerekli ve yeterli koşul onun deficiency indekslerinin $m = 0$ ve $n = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.6.1: Eğer A kapalı, simetrik operatör ve B sınırlı, bütün H uzayında tanımlı Hermitian operatör ise A ve $A+B$ operatörleri aynı deficiency indekslere sahiptir.

İspat. $(A+B)^* = A^* + B$ bağıntısından $D_{(A+B)^*} = D_{A^*}$ ve $x \in D_{A^*}$ için

$((A+B)^* x, x) = ((A^* + B)x, x) = (A^* x, x) + (Bx, x)$ olur. Bu durumda,

(Bx, x) reel olduğundan, $((A+B)^* x, x) = \wp(A^* x, x)$ dir.

Böylece, A ve $A+B$ operatörleri için iki ε^+ kümeleri çakışır ve bu durum ε^- kümeleri içinde olur. O halde Teorem 3.6.1, 3.5'deki önerme II'den çıkar.

3.7. Verilen Bir Simetrik Operatörün Simetrik Genişlemelerin Kuruluşu

Bölüm 3.3'deki Teorem 3.3.3., bir simetrik A operatörünün simetrik genişlemelerinin çok basitçe kurulmasını mümkün kılar. Burada sadece kapalı, simetrik operatörler ele alınmaktadır. Böyle her genişleme, aynı zamanda A operatörün $\overline{A}$ kapanışının bir genişlemesidir; böylece genelliği kaybetmeden, A, kapalı, simetrik operatör olarak alınabilir.

A bir kapalı, simetrik operatör olsun ve A', A'nın kapalı, simetrik genişlemesi olsun. V, V' ile A ve A'' nün Cayley dönüşümleri gösterilerek, $V \subset V'$ ifadesine sahip olunur ve böylece $D_V \subset D_{V'}$, $\Re_V \subset \Re_{V'}$ olur.

$P = D_{V'} - D_V$, $L = \Re_{V'} - \Re_V$ yazılır; bu durumda $P \perp D_V$ ve $L \perp \Re_V$ olduğundan,

$P \subset N_{\bar{\lambda}}$ ve $L \subset N_\lambda$ bağıntıları sağlanır

Ayrıca,

$$Ux = V'x, \qquad x \in P \text{ için}, \tag{3.15}$$

yazılarak bir U operatörü tanımlanır.

V'; $\Re_{V'}$ üzerine $D_{V'}$'nin bir izometrik eşlemesini verdiğinden, V'; izometrik olarak P' yi de L üzerine eşler. (3.15)'den dolayı U, P tanım kümesi ve L görüntü kümesi ile bir izometrik operatördür.

Diğer taraftan, $P \subset N_{\bar{\lambda}}$ tanım kümesi ve $L \subset N_{\lambda}$ görüntü kümesi ile keyfi bir U izometrik operatörün verildiği kabul edilsin.

$y \in D_V$ ve $z \in P$ için, $V'(y+z) = Vy + Uz$ yazılırsa, bu durumda V operatörünün bir genişlemesini temsil eden bir V' izometrik operatörü elde edilir ve sonuç olarak V' izometrik operatörü A operatörünün belli bir kapalı, simetrik genişlemesinin Cayley dönüşümüdür. U operatörü ile direkt olarak bu A' genişlemesini kurmak aşağıdaki gibi kolaydır.

Bölüm 3.3.'de Teorem 3.3.2'nin esası üzerine, $D_{A'}$;bütün

$x' = (y+z) - V'(y+z) = (y+z) - (Vy+Uz) = (y-Vy) + z - Uz$, $y \in D_V$, $z \in P$

vektörlerinden oluşur. Fakat $x = y - Vy$, $y \in D_V$ vektörleri; A operatörünün D_A tanım kümesini tamamen gözden geçirir. Bu durumda, $D_{A'}$; bütün $x' = x + z - Uz$, $x \in D_A$, $z \in P$ şeklindeki vektörlerden oluşur.

$A' \subset A^*$, $z \in N_{\bar{\lambda}}$, $Uz \in N_{\lambda}$ olduğundan $A'x' = Ax + \lambda z - \bar{\lambda} Uz$ olur.

A' operatörünün tanımından, onun deficiency uzayları;

$N'_{\bar{\lambda}} = N_{\bar{\lambda}} - P$, $N'_{\lambda} = N_{\lambda} - L$ ile verilmelidir.

Teorem 3.7.1: Verilen bir kapalı, simetrik A operatörünün her kapalı, simetrik A' genişlemesi, belli bir U izometrik operatör tarafından belirlenir ki; bunun P tanım kümesi $N_{\bar{\lambda}}$'nın kapalı bir alt uzayı ve L görüntü kümesi de N_{λ}'nın kapalı bir alt uzayıdır:

$P \subset N_{\bar{\lambda}}$, $L \subset N_{\lambda}$. Burada $D_{A'}$; bütün

$$x' = x + z - Uz \ , \ x \in D_A \ , \ z \in P \tag{3.16}$$

vektörlerinin tümüdür ve

$$A'x' = Ax + \lambda z - \bar{\lambda} Uz \tag{3.17}$$

bağıntısı sağlanır.

Diğer taraftan, her bir böyle U operatörü için, bu formüller A operatörünün belli bir kapalı, simetrik A' genişlemesini belirler ve A' operatörünün deficiency uzayları

$$N'_{\bar{\lambda}} = N_{\bar{\lambda}} - P \ , \ N'_{\lambda} = N_{\lambda} - L \tag{3.18}$$

şeklindedir. Burada en önemli durum, A'; A'nın bir self-adjoint genişlemesidir. Bölüm 3.4.'deki corollary 3.4.2'den A' genişlemesinin bir self-adjoint operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $N'_{\bar{\lambda}} = \{0\}$, $N'_{\lambda} = \{0$ olmasıdır, yani;

$P = N_{\bar{\lambda}}$, $L = N_{\lambda}$ ise.

O halde, böyle bir U operatörünün mevcut olması için, N_{λ} ve $N_{\bar{\lambda}}$ alt uzaylarının aynı boyuta sahip olması gerek ve yeter şarttır. Bu durum da, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Teorem 3.7.2: Bir A' genişlemesinin self-adjoint olması için gerekli ve yeterli koşul U operatörünün tanım kümesinin $N_{\bar{\lambda}}$ ile ve onun görüntü kümesinin N_{λ} ile çakışmasıdır.

Bir A operatörü self-adjoint genişlemeye sahip olması için gerekli ve yeterli koşul onun $N_{\bar{\lambda}}$ ve N_{λ} deficiency uzaylarının aynı boyuta sahip olmasıdır, yani; onun deficiency uzayları eşit ise.

$N_{\bar{\lambda}}$ ve N_{λ} sonlu boyutlu olduğu zaman basit bir kuruluş mümkündür. Self-adjoint genişlemenin mevcut olması için, her iki uzayın n ile gösterilen aynı boyuta sahip olması gerekir.

$N_{\bar{\lambda}}$'da herhangi bir $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal taban ve N_{λ}'da bir $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ortonormal taban seçilir.

Bu durumda, her $z \in N_{\bar{\lambda}}$ vektörü, $z = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$ şekline sahiptir.

Ayrıca, $N_{\bar{\lambda}}$ tanım kümesi ve N_{λ} görüntü kümesi olduğu her U izometrik operatörü,

$Uz = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} u_{jk} \xi_k) e'_j$, formülü ile verilir. Burada $u = [u_{ij}]$ bir üniter matristir.

Böylece, $D_{A'}$'nün

$$x' = x + \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k - \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} u_{jk} \zeta_k) e'_j \, , \; x \in D_A , \qquad (3.19)$$

$$A'x' = Ax + \lambda \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k - \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} u_{jk} \xi_k) e'_j , \tag{3.20}$$

vektörlerinden oluştuğu düşünülür.

$N_{\overline{\lambda}}$ ve N_{λ} deficiency uzaylarının biri $\{0\}$ ise, Teorem 3.7.1'den, A operatörü, trivial olmayan A' genişlemesine imkan vermez. Böylece,

IV. Bir kapalı, simetrik A operatörünün maksimal olması için gerekli ve yeterli koşul onun deficiency uzaylarından en az birisinin $\{0\}$' a eşit olmasıdır, yani; onun deficiency indeksleri $(0, n)$ veya $(n, 0)$ ise.

Özel olarak;

V. Bir A' genişlemesinin maksimal olması için gerekli ve yeterli koşul $P = N_{\overline{\lambda}}$ ve $L = N_{\lambda}$ bağıntılarından her ikisi veya birinin sağlanmasıdır.

VI. $N_{\overline{\lambda}}$ ve N_{λ} deficiency uzayları sonlu boyutlu ve de eş boyutlu ise, her maksimal genişleme self-adjointtir.

IV. BÖLÜM

BİR OPERATÖRÜN SELF-ADJOİNT GENİŞLEMESİNİN SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERİ

$$\begin{cases} -y'' + \left(\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} + q(x)\right)y = \lambda y \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^{\alpha+1/2}y'(x) - (\alpha+1/2)x^{\alpha-1/2}y(x)\right] = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

$\lambda = \rho^2$, $\alpha = (0,1)$, Burada $q(x) \in L_2(0,1)$ olmak üzere sınırl fonksiyondur.

problemi için $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ dönüşümü yapılırsa,

$y' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$, $y'' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2}$ olur. Bunlar denklemde yerlerine yazılırsa;

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = \lambda\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2} + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r-2} - \lambda\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r-2} = 0$$

$$-(r-1)rc_0x^{r-2} - r(1+r)c_1x^{r-1} - \sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2} +$$

$$+\alpha(\alpha+1)\left[c_0x^{r-2} + c_1x^{r-1} + \sum_{n=2}^{\infty}c_n x^{n+r-2}\right] - \lambda\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r-2} = 0$$

$$(-(r-1)r + \alpha(\alpha+1))c_0x^{r-2} + (\alpha(\alpha+1) - r(1+r))c_1x^{r-1} -$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\alpha(\alpha+1)c_n - (n+r-1)(n+r)c_n - \lambda c_{n-2}\right]x^{n+r-2} = 0$$

$(-(r-1)r + \alpha(\alpha+1))c_0 = 0$ ise $-(r-1)r + \alpha(\alpha+1) = 0$ ise $r^2 - r - \alpha(\alpha+1) = 0$

$r_1 = \alpha+1, r_2 = -\alpha$ ve $r_1 - r_2 = \alpha + 1 - (-\alpha) = 2\alpha + 1 \notin N^+$

$r_1 = \alpha + 1$ için $(\alpha(\alpha+1) - r(1+r))c_1 = 0$.

Buradan

$$\left[\alpha(\alpha+1)-(\alpha+1)(1+\alpha+1)\right]c_1=0$$

$\left[\alpha(\alpha+1)-(\alpha+1)(2+\alpha)\right]c_1=0$ ise $(\alpha+1)(\alpha-2-\alpha)c_1=0$

$-2(\alpha+1)c_1=0$.

Burada $\alpha+1\neq 0$ olduğundan $c_1=0$ olur.

İndirgeme formülü için;

$\alpha(\alpha+1)c_n-(n+r-1)(n+r)c_n-\lambda c_{n-2}=0$ denkleminden

$$c_n=\frac{\lambda c_{n-2}}{\alpha(\alpha+1)-(n+r)(n+r-1)}$$ elde edilir.

$$c_2=\frac{\lambda c_0}{\alpha(\alpha+1)-(2+\alpha+1)(2+\alpha+1-1)}=\frac{\lambda c_0}{-4\alpha-6}=-\frac{\lambda c_0}{4(\alpha+3/2)}$$

$$c_4=\frac{\lambda c_2}{\alpha(\alpha+1)-(4+\alpha+1)(4+\alpha+1-1)}=\frac{\lambda^2 c_0}{4.8(\alpha+3/2)(\alpha+5/2)}$$

$$c_6=\frac{\lambda c_4}{\alpha(\alpha+1)-(6+\alpha+1)(6+\alpha+1-1)}=-\frac{\lambda^3 c_0}{4.8.12(\alpha+3/2)(\alpha+5/2)(\alpha+7/2)}$$

Benzer şekilde $c_8, c_{10}, \ldots, c_{2n}, \ldots$ $(n=0,1,2,\ldots)$ katsayıları bulunur. Yine aynı şekilde $c_3=0, c_5=0, \ldots, c_{2n+1}=0, \ldots$ $(n=0,1,2,\ldots)$ elde edilir.

O halde,

$$y_1(x)=x^{1+\alpha}\left(c_0+c_2x^2+c_4x^4+\ldots\right)$$

$$y_1(x)=x^{1+\alpha}c_0\left(1-\frac{(\rho x)^2}{4(\alpha+3/2)}+\frac{(\rho x)^4}{4.8(\alpha+3/2)(\alpha+5/2)}-\ldots\right)$$

$$c_0=\frac{\rho^{1+\alpha}}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1/2+1)}$$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\rho x)^{2n}x^{1+\alpha}\rho^{1+\alpha}}{2^{2n}2^{\alpha+1/2}n!\Gamma(\alpha+1/2+n+1)}$$

$$y_1(x)=\sqrt{\rho x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\alpha+1/2+n+1)}(\rho x/2)^{2n+(\alpha+1/2)}$$

$y_1(x)=\sqrt{\rho x}\,J_{\alpha+1/2}(\rho x)$ çözümü elde edilir.

$r_2=-\alpha$ için,

$[\alpha(1+\alpha)-r(1+r)]c_1^* = 0$ ise

$[\alpha(\alpha+1)+\alpha(1-\alpha)]c_1^* = 0$ olur. Buradan

$2\alpha c_1^* = 0$ ise $2\alpha \neq 0$ olduğundan $c_1^* = 0$ olur.

Yukarıda verilen indirgeme formülü kullanılarak;

$$c_2^* = \frac{\lambda c_0^*}{\alpha(\alpha+1)-(2-\alpha)(2-\alpha-1)} = \frac{\lambda c_0^*}{4\alpha-2} = -\frac{\lambda c_0^*}{4(1/2-\alpha)}$$

$$c_4^* = \frac{\lambda c_2^*}{\alpha(\alpha+1)-(4-\alpha)(4-\alpha-1)} = \frac{\lambda c_2^*}{8\alpha-12} = \frac{-\dfrac{\lambda^2 c_0^*}{4(1/2-\alpha)}}{8\alpha-12} = \frac{\lambda^2 c_0^*}{4.8(1/2-\alpha)(3/2-\alpha)}$$

$$c_6^* = \frac{\lambda c_4^*}{\alpha(\alpha+1)-(6-\alpha)(6-\alpha-1)} = \frac{\lambda c_4^*}{12\alpha-30} = -\frac{\lambda^3 c_0^*}{4.8.12(1/2-\alpha)(3/2-\alpha)(5/2-\alpha)}$$

Benzer şekilde $c_8^*, c_{10}^*, \ldots, c_{2n}^*, \ldots$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ katsayıları elde edilir. Yine aynı şekilde $c_3^* = 0, c_5^* = 0, \ldots, c_{2n+1}^* = 0, \ldots$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ bulunur.

O halde,

$$y_2(x) = x^{-\alpha}\left(c_0^* + c_2^* x^2 + c_4^* x^4 + \ldots\right)$$

$$y_2(x) = x^{-\alpha} c_0^* \left(1 - \frac{(\rho x)^2}{4(1/2-\alpha)} + \frac{(\rho x)^4}{4.8(1/2-\alpha)(3/2-\alpha)} - \ldots\right)$$

$$c_0^* = \frac{\rho^{-\alpha}}{2^{-(\alpha+1/2)}\Gamma(-(\alpha+1/2)+1)}$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\rho x)^{2n} x^{-\alpha} \rho^{-\alpha}}{2^{2n} 2^{-(\alpha+1/2)} n!\,\Gamma(-(\alpha+1/2)+n+1)}$$

$$y_2(x) = \sqrt{\rho x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-(\alpha+1/2)+n+1)} (\rho x/2)^{2n-(\alpha+1/2)}$$

$y_2(x) = \sqrt{\rho x}\, J_{-(\alpha+1/2)}(\rho x)$ çözümü elde edilir.

$0 < \alpha < 1/2$ için $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümleri $L_2(0,b)$ uzayından, $1/2 \leq \alpha < 1$ için yalnız $y_1(x)$ çözümü $L_2(0,b)$ uzayındandır. Bu problemde çözümler L_2 uzayında arandığı için,

$$y(x)=\begin{cases} c_1 y_1(x), & 1/2\le\alpha<1 \\ c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x), & 0<\alpha<1/2 \end{cases}$$

şeklinde olur.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x^{\alpha+1/2}y'(x)-(\alpha+1/2)x^{\alpha-1/2}y(x)\right]=0$$

başlangıç koşullarından

$c_1=\dfrac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}$, $c_2=\dfrac{\rho^{-\alpha}}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}$ sabitleri bulunursa denklemin genel çözümü;

$$y(x)=\begin{cases} \dfrac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}y_1(x)\ , & 1/2\le\alpha<1 \\ \dfrac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}y_1(x)+\dfrac{\rho^{-\alpha}}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}y_2(x), & 0<\alpha<1/2 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan

$$J_\upsilon(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m(\upsilon,2m)}{(2z)^{2m}}-\sin\left(z-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m(\upsilon,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}\right]$$

$(\upsilon,0)=1$,

$$(\upsilon,p)=(-)^p\frac{(1/2-\upsilon)_p(1/2+\upsilon)_p}{p!}=\frac{\Gamma(1/2+\upsilon+p)}{p!\Gamma(1/2+\upsilon-p)}$$

$$=\frac{\{4\upsilon^2-1\}\{4\upsilon^2-3^2\}\ldots\{4\upsilon^2-(2p-1)^2\}}{2^{2p}p!}\qquad (p=1,2,\ldots).\quad \text{ve}$$

$(\upsilon,p)=(-\upsilon,p)$ olduğundan,

$$J_\upsilon(\rho x)\cong$$

$$\cong\sqrt{\frac{2}{\pi\rho x}}\left[\cos\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left((\upsilon,0)-\frac{(\upsilon,2)}{(2\rho x)^2}\right)-\sin\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{(\upsilon,1)}{2\rho x}-\frac{(\upsilon,2)}{(2\rho x)^3}\right)\right]$$

$$J_\upsilon(\rho x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi\rho x}}\left[\cos\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{(4\upsilon^2-1)}{8\rho x}\sin\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$$

$$J_\upsilon(\rho x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi\rho x}}\cos\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)^{3/2}}\sin\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho^{5/2}}\right)$$

$$J_{-\upsilon}(\rho x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi\rho x}}\cos\left(\rho x+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)^{3/2}}\sin\left(\rho x+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho^{5/2}}\right)$$

asimptotik ifadelerinden $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarının asimptotik davranışları bulunacak olursa;

$\upsilon = \alpha + 1/2$ olmak üzere,

$y_1(x) = \sqrt{\rho x} J_\upsilon(\rho x)$ ifadesinden,

$$y_1(x) = \sqrt{\rho x}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi\rho x}}\cos\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)^{3/2}}\sin\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^{5/2}}\right)\right]$$

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$y_2(x) = \sqrt{\rho x} J_{-\upsilon}(\rho x)$$

$$y_2(x) = \sqrt{\rho x}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi\rho x}}\cos\left(\rho x + \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)^{3/2}}\sin\left(\rho x + \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^{5/2}}\right)\right]$$

$$y_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x + \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x + \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

şeklinde olur.

Bu asimptotik ifadeler genel çözümde yerlerine yazılırsa;

$1/2 \le \alpha < 1$ için,

$$y(x) = \\ = \frac{\rho^{\alpha+1}}{2^\upsilon\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$$

$0 < \alpha < 1/2$ için,

$$y(x) = \\ = \frac{\rho^{\alpha+1}}{2^\upsilon\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right] + \\ + \frac{\rho^{-\alpha}}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x + \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x + \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$$

Şimdi $1/2 \le \alpha < 1$ için, operatörün özdeğerleri bulunacak olunursa;

$y(b) = 0$ koşulundan yararlanıldığında;

$$y(x)=$$
$$=\frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$$

asimptotik ifadesinden problemin özdeğerleri için denklem

$$y(b)=$$
$$=\frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho b)}\sin\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]=0$$

şeklinde olacaktır. Daha sonra bu eşitlikten;

$$\cos\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho b)}\sin\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)=0 \text{ olur.}$$

Bu ifadede υ'nun değeri yerine yazılırsa;

$$\cos\left(\rho b-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho b)}\sin\left(\rho b-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)=0 \qquad (4.1)$$

elde edilir.

Rouche Teoremi uygulanırsa;

$\cos\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$ ise $\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad$ n $\in$ Z olduğundan

$\rho_n=\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)$ olur. $\delta_n=O(\frac{1}{n^2})$ seçildiğinde

$\rho_n=\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)+\delta_n$ olur. Bu ρ_n'nin ifadesi (4.1) denkleminde yerine yazıldığında,

$\delta_n+\beta_3/n\pi+O(\frac{1}{n^2})=0$ veya $\delta_n=\beta_4/n+O(\frac{1}{n^2})$ olduğundan ρ_n'ler için

$\rho_n=\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)+\beta_4/n+O(\frac{1}{n^2})$ olur.

Böylece,

$\rho_n{}^2=\lambda_n=\left(\frac{\pi}{b}\right)^2(1+\alpha/2+n)^2+2\beta_4\pi/b+O(\frac{1}{n})$ elde edilir.

Şimdi $0<\alpha<1/2$ için, operatörün özdeğerleri bulunacak olunursa; bunun için $y(b)=0$ koşulundan yararlanıldığında;

$$y(x)=$$

$$=\frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\rho^{-\alpha}}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$$

asimptotik ifadesinden problemin özdeğerleri için denklem

$$y(b)=$$

$$=\frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8(\rho b)}\sin\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\rho^{-\alpha}}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho b+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8(\rho b)}\sin\left(\rho b+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]=0$$

şeklinde olacaktır. Daha sonra bu eşitlikten;

$$y(b)=$$

$$=\frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\rho^{\alpha}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8b}\sin\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+\frac{\rho^{-\alpha}}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho b+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{(8b)\rho^{1+\alpha}}\sin\left(\rho b+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{\rho^{1-\alpha}}\right)=0$$

olduğundan

$$y(b)=\frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{\rho^{\alpha}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8b}\sin\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^{\alpha}}\right)=0$$

ve $y(b)=\cos\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8b\rho}\sin\left(\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^{2\alpha+1}}\right)=0$ olur.

Bu ifadede υ'nun değeri yerine yazılırsa;

$$y(b)=\cos\left(\rho b-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8b\rho}\sin\left(\rho b-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^{2\alpha+1}}\right)=0 \qquad (4.2)$$

elde edilir.

Rouche Teoremi uygulanırsa;

$\cos\left(\rho b-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0$ ise $\rho b-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad$ n $\in$ Z olduğundan

$\rho_n=\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)$ olur. $\delta_n=O(\frac{1}{n^{2\alpha+1}})$ seçildiğinde

$\rho_n=\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)+\delta_n$ olur. Bu ρ_n'nin ifadesi (4.2) denkleminde yerine yazıldığında

$\delta_n=\beta_4/n+O(\frac{1}{n^{2\alpha+1}})$ olduğundan ρ_n'ler için

$\rho_n=\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)+\beta_4/n+O(\frac{1}{n^{2\alpha+1}})$ şeklinde olur.

Buradan,

$$\lambda_n=\rho_n^{\;2}=\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 n^2+2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2(1+\alpha/2)n+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2(1+\alpha/2)^2+2\beta_4\pi/b+O(\frac{1}{n^{2\alpha}})$$

elde edilir.

Şimdi $1/2\leq\alpha<1$ için, problemin özfonksiyonlarının davranışları öğrenilecek olunursa;

$$y(x,\rho)=$$
$$=\frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$$

çözümün asimptotik ifadesinde ρ_n'nin değeri yazıldığında,

$\rho_n=\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)+\beta_4/n+O(\frac{1}{n^2})$ olduğundan,

$$y(x,\rho_n)=d_1\left(\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)+\beta_4/n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha+1}\left[N_1\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-\right.$$
$$-N_2\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+\frac{N_2\beta_4 x}{n}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$
$$\left.+\frac{N_1\beta_4 x}{n}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+$$
$$+\frac{d_2}{x}\left(\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)+\beta_4/n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha}\left[-N_1\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-\right.$$

$$-\mathrm{N}_2\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-\frac{\mathrm{N}_2\beta_4 x}{n}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+\frac{\mathrm{N}_1\beta_4 x}{n}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\Bigg]+O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

elde edilir. Daha sonra bu ifadede gerekli işlemler yapılarak elde edilen yeni ifadelerin asimptotik davranışları yazılırsa;

$$y(x,\rho_n)=d_1\mathrm{N}_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{\alpha+1}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-$$

$$-d_1\mathrm{N}_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{\alpha+1}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+\mathrm{N}_2\beta_4 d_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}xn^{\alpha}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+\left[d_1\mathrm{N}_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\alpha)(1+\alpha/2)-\frac{\mathrm{N}_2 d_2}{x}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}\right]n^{\alpha}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+\mathrm{N}_1\beta_4 d_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}xn^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-$$

$$-\left[d_1\mathrm{N}_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\alpha)(1+\alpha/2)+\frac{\mathrm{N}_1 d_2}{x}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}\right]n^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

ve de

$$y(x,\rho_n)=a_1 n^{\alpha+1}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+a_2 n^{\alpha+1}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+a_3(x)n^{\alpha}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+a_4(x)n^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

olur. Burada;

$\beta_1=\sqrt{2/\pi}$, $\beta_2=-(4\upsilon^2-1)/8\sqrt{2/\pi}$

$d_1=\beta_1/2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)$, $d_2=\beta_2/2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)$

$\beta_3=\beta_2/b\beta_1$, $\beta_4=-\beta_3/\pi$

$\mathrm{N}_1=\cos(\alpha\pi/2)$, $\mathrm{N}_2=\sin(\alpha\pi/2)$

$$a_1 = d_1 \mathrm{N}_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1} \quad , \; a_2 = -d_1 \mathrm{N}_{21} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}$$

$$a_3(x) = \mathrm{N}_2 \beta_4 d_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1} x + d_1 \mathrm{N}_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1} (1+\alpha)(1+\alpha/2) - \frac{\mathrm{N}_2 d_2}{x}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha} \Bigg]$$

$$a_4(x) = \mathrm{N}_1 \beta_4 d_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1} x - d_1 \mathrm{N}_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1} (1+\alpha)(1+\alpha/2) - \frac{\mathrm{N}_1 d_2}{x}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}$$ şeklindedir.

Şimdi $0 < \alpha < 1/2$ için, problemin özfonksiyonlarının davranışları öğrenilecek olunursa;

$$y(x) =$$

$$= \frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\rho^{-\alpha}}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x + \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x + \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$$

çözümün asimptotik ifadesinde ρ_n'nin değeri yazıldığında,

$$\rho_n = \frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n) + \beta_4/n + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)$$ olduğundan,

$$y(x,\rho_n) = d_1\left(\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n) + \beta_4/n + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)\right)^{\alpha+1}\left[\mathrm{N}_1 \sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) - \right.$$

$$- \mathrm{N}_2 \cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + \frac{\mathrm{N}_2\beta_4 x}{n}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) +$$

$$\left. + \frac{\mathrm{N}_1\beta_4 x}{n}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{d_2}{x}\left(\frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n) + \beta_4/n + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)\right)^{\alpha}\left[-\mathrm{N}_1 \cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) - \right.$$

$$- \mathrm{N}_2 \sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) - \frac{\mathrm{N}_2\beta_4 x}{n}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) +$$

$$\left. + \frac{\mathrm{N}_1\beta_4 x}{n}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)\right] +$$

$$+d_3\left[N_1\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-N_2\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-\frac{N_2\beta_4 x}{n}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{N_1\beta_4 x}{n}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+O(\frac{1}{n^{2\alpha+1}})\right]\left[\left(\frac{b}{\pi}\right)^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

elde edilir. Daha sonra bu ifadede gerekli işlemler yapılarak elde edilen yeni ifadelerin asimptotik davranışları yazılırsa;

$$y(x,\rho_n)=d_1N_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{\alpha+1}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-$$

$$-d_1N_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{\alpha+1}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+\left[N_2\beta_4 d_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}x+\right.$$

$$\left.+d_1N_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\alpha)(1+\alpha/2)-\frac{N_2d_2}{x}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}\right]n^{\alpha}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$\left[N_1\beta_4 d_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}x-d_1N_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\alpha)(1+\alpha/2)-\frac{N_1d_2}{x}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}\right]n^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+d_3N_1\left(\frac{b}{\pi}\right)^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha}}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)-d_3N_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha}}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

ve de

$$y(x,\rho_n)=a_1n^{\alpha+1}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+a_2n^{\alpha+1}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+a_3(x)n^{\alpha}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+a_4(x)n^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+$$

$$+a_5\frac{1}{n^{\alpha}}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+a_6\frac{1}{n^{\alpha}}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)+O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

olur. Burada $a_5=d_3N_1\left(\frac{b}{\pi}\right)^{\alpha}$, $a_6=-d_3N_2\left(\frac{b}{\pi}\right)^{\alpha}$ şeklindedir.

Şimdi $1/2\le\alpha<1$ için, çözümü

$y(x) =$

$$= \frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4\upsilon^2-1)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x - \frac{\upsilon\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$$

olan problemin normalleştirici sayıları bulunacak olunursa;

$\alpha_n = \int_0^b y^2(x,\rho_n)dx \quad (n = 0,1,2,\dots)$ sayılarına verilen operatörün normalleştirici

sayıları denildiğinden $y_n(x) = y(x,\rho_n)$'nin ifadesinden yararlanılırsa;

$$\alpha_n = \int_0^b \left[a_1 n^{\alpha+1}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + a_2 n^{\alpha+1}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + \right.$$

$$\left. + a_3(x)n^{\alpha}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + a_4(x)n^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)\right]^2 dx$$

olur. Daha sonra gerekli işlemler yapılarak düzenlendiğinde,

$$\alpha_n = a_1^{\ 2} n^{2\alpha+2}\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +$$

$$\underbrace{+2a_1 d_1 N_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\frac{\alpha}{2})(1+\alpha)n^{2\alpha+1}\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +}_{O(n^{2\alpha+1})}$$

$$+ a_1 a_2 n^{2\alpha+2}\int_0^b \sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx -$$

$$\underbrace{- a_1 d_1 N_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\frac{\alpha}{2})(1+\alpha)n^{2\alpha+1}\int_0^b \sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +}_{O(n^{2\alpha+1})}$$

$$\underbrace{+ a_2 d_1 N_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\frac{\alpha}{2})(1+\alpha)n^{2\alpha+1}\int_0^b \sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +}_{O(n^{2\alpha+1})}$$

$$+ a_2^{\ 2} n^{2\alpha+2}\int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx -$$

$$\underbrace{- 2a_2 d_1 N_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\frac{\alpha}{2})(1+\alpha)n^{2\alpha+1}\int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +}_{O(n^{2\alpha+1})}$$

$$+\underbrace{2a_1d_1\mathrm{N}_2\beta_4\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{2\alpha+1}\int_0^b x\sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}-$$

$$-2a_1d_2\mathrm{N}_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\int_0^b\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x}dx+$$

$$+\underbrace{a_1d_1\mathrm{N}_1\beta_4\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{2\alpha+1}\int_0^b x\sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}+$$

$$+\underbrace{a_2d_1\mathrm{N}_2\beta_4\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{2\alpha+1}\int_0^b x\sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}-$$

$$\underbrace{-a_1d_2\mathrm{N}_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\int_0^b\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x}dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}-$$

$$\underbrace{-a_2d_2\mathrm{N}_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\int_0^b\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x}dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}+$$

$$+\underbrace{2a_2d_1\mathrm{N}_1\beta_4\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{2\alpha+1}\int_0^b x\cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}-$$

$$\underbrace{-2a_2d_2\mathrm{N}_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\int_0^b\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x}dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}+O\left(n^{2\alpha}\right)$$

$$\alpha_n=a_1{}^2n^{2\alpha+2}\underbrace{\int_0^b\sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{\mathrm{I}}+$$

$$+a_1a_2n^{2\alpha+2}\underbrace{\int_0^b\sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{\mathrm{II}}+$$

$$+a_2^{\,2}n^{2\alpha+2}\underbrace{\int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{\text{III}}-$$

$$-2a_1d_2N_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\underbrace{\int_0^b \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x}dx}_{\text{IV}}+O\left(n^{2\alpha+1}\right)$$

şeklinde olur. Sağ taraftaki integraller değerlendirilecek olunursa;

I.İntegral için;

$$\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)dx=\frac{b}{2}-\frac{b\sin(\alpha\pi)}{4\pi(1+\alpha/2+n)}$$

II.İntegral için,

$$\int_0^b \sin\left(\frac{2\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)dx=\frac{b(1-\cos(\alpha\pi))}{2\pi(1+\alpha/2+n)}$$

III.İntegral için;

$$\int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)dx=\frac{b}{2}+\frac{b\sin(\alpha\pi)}{4\pi(1+\alpha/2+n)}$$

IV.İntegral için;

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)=u\\ \frac{\pi}{b}(1+\alpha/2+n)dx=du\\ x=0 \text{ ise } u=0\\ x=b \text{ ise } u=\pi(1+\alpha/2+n)\end{array}\right\} \text{ ise } \int_0^b \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)}{x}dx=\int_0^{\pi(1+\alpha/2+n)}\frac{\sin^2 u}{u}du=$$

$$=\int_0^1\frac{\sin^2 u}{u}du+\int_1^{\pi(1+\alpha/2+n)}\frac{\sin^2 u}{u}du=$$

$\underbrace{\int_0^1\frac{\sin^2 u}{u}du}_{D_3}$ yakınsaktır. Çünkü $\frac{\sin^2 u}{u}\in C(0,1]$ ve $\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\sin^2 u}{u}=0$ dır.

$$\int_1^{\pi(1+\alpha/2+n)}\frac{\sin^2 u}{u}du=\int_1^{\pi(1+\alpha/2+n)}\frac{1+\cos 2u}{2u}du=\frac{1}{2}\int_1^{\pi(1+\alpha/2+n)}\frac{du}{u}-\int_1^{\pi(1+\alpha/2+n)}\frac{\cos 2u}{2u}du=$$

$$=\frac{1}{2}\ln u\Big|_{1}^{\pi(1+\alpha/2+n)}-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{\theta}\Big|_{2}^{2\pi(1+\alpha/2+n)}+\underbrace{\int_{2}^{2\pi(1+\alpha/2+n)}\frac{\sin\theta}{\theta^{2}}d\theta}_{D_4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\pi(1+\alpha/2+n))-\frac{\sin 2\pi(1+\alpha/2+n)}{4\pi(1+\alpha/2+n)}+\frac{\sin 2}{4}-\frac{D_4}{2}$$

$$\int_0^b\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right)}{x}dx=\frac{\ln(\pi(1+\alpha/2+n))}{2}-\frac{\sin(\alpha\pi)}{4\pi(1+\alpha/2+n)}+\frac{\sin 2}{4}-\frac{D_4}{2}+D_3$$

bulunur.

Bu integrallerin ifadeleri yerlerine yazılırsa;

$$\alpha_n=a_1{}^2n^{2\alpha+2}\left(\frac{b}{2}-\frac{b\sin(\alpha\pi)}{4\pi(1+\alpha/2+n)}\right)+a_1a_2n^{2\alpha+2}\left(\frac{b(1-\cos(\alpha\pi))}{2\pi(1+\alpha/2+n)}\right)+$$

$$+a_2{}^2n^{2\alpha+2}\left(\frac{b}{2}+\frac{b\sin(\alpha\pi)}{4\pi(1+\alpha/2+n)}\right)-$$

$$-2a_1d_2\mathrm{N}_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\left(\frac{\ln(\pi(1+\alpha/2+n))}{2}-\frac{\sin(\alpha\pi)}{4\pi(1+\alpha/2+n)}+\frac{\sin 2}{4}-\frac{D_4}{2}+D_3\right)+$$

$$+\mathrm{O}\left(n^{2\alpha+1}\right)$$

$$\alpha_n=\frac{b}{2}\left(a_1{}^2+a_2{}^2\right)n^{2\alpha+2}-a_1d_2\mathrm{N}_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}\ln(\pi(1+\alpha/2+n))n^{2\alpha+1}+\mathrm{O}\left(n^{2\alpha+1}\right)$$

elde edilir.

Şimdi $0<\alpha<1/2$ için,çözümü

$y(x)=$

$$=\frac{\rho^{\alpha+1}}{2^{\upsilon}\Gamma(1+\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\rho^{-\alpha}}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho x+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(4\upsilon^2-1\right)}{8(\rho x)}\sin\left(\rho x+\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$$

olan problemin normalleştirici sayıları bulunacak olunursa;

$\alpha_n=\int_0^b y^2(x,\rho_n)dx$ olduğundan $y_n(x)=y(x,\rho_n)$'nin ifadesinden yararlanılırsa;

$$\alpha_n = \int_0^b \Bigg[a_1 n^{\alpha+1} \sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + a_2 n^{\alpha+1}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) +$$

$$a_3(x) n^{\alpha} \sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + a_4(x) n^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) +$$

$$+ a_5 \frac{1}{n^\alpha}\cos\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + a_6 \frac{1}{n^\alpha}\sin\left(\frac{\pi x}{b}(1+\alpha/2+n)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)\Bigg]^2 dx$$

olur. Burada $a_5 = d_3 \mathrm{N}_1 \left(\frac{b}{\pi}\right)^\alpha$, $a_6 = -d_3 \mathrm{N}_2 \left(\frac{b}{\pi}\right)^\alpha$

Daha sonra gerekli işlemler yapılarak düzenlendiğinde,

$$\alpha_n = a_1^{\,2} n^{2\alpha+2} \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +$$

$$\underbrace{+2a_1 d_1 \mathrm{N}_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\frac{\alpha}{2})(1+\alpha)n^{2\alpha+1}\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +}_{\mathrm{O}(n^{2\alpha+1})}$$

$$\underbrace{+2a_1 a_6 n \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{\mathrm{O}(n^{2\alpha+1})} + a_1 a_2 n^{2\alpha+2}\int_0^b \sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx -$$

$$\underbrace{-a_1 d_1 \mathrm{N}_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\frac{\alpha}{2})(1+\alpha)n^{2\alpha+1}\int_0^b \sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +}_{\mathrm{O}(n^{2\alpha+1})}$$

$$\underbrace{+a_2 d_1 \mathrm{N}_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\frac{\alpha}{2})(1+\alpha)n^{2\alpha+1}\int_0^b \sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +}_{\mathrm{O}(n^{2\alpha+1})}$$

$$\underbrace{+(a_1 a_5 + a_2 a_6) n \int_0^b \sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +}_{\mathrm{O}(n^{2\alpha+1})}$$

$$+a_2^{\,2} n^{2\alpha+2}\int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx -$$

$$\underbrace{-2a_2 d_1 \mathrm{N}_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}(1+\frac{\alpha}{2})(1+\alpha)n^{2\alpha+1}\int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx +}_{\mathrm{O}(n^{2\alpha+1})}$$

$$+\underbrace{2a_2a_5n\int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}+$$

$$+\underbrace{2a_1d_1N_2\beta_4\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{2\alpha+1}\int_0^b x\sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}-$$

$$-2a_1d_2N_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\int_0^b \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x}dx+$$

$$+\underbrace{a_1d_1N_1\beta_4\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{2\alpha+1}\int_0^b x\sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}+$$

$$+\underbrace{a_2d_1N_2\beta_4\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{2\alpha+1}\int_0^b x\sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}-$$

$$\underbrace{-a_1d_2N_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\int_0^b \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x}dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}-$$

$$\underbrace{-a_2d_2N_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\int_0^b \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x}dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}+$$

$$+\underbrace{2a_2d_1N_1\beta_4\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha+1}n^{2\alpha+1}\int_0^b x\cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}-$$

$$\underbrace{-2a_2d_2N_1\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha}n^{2\alpha+1}\int_0^b \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x}dx}_{O\left(n^{2\alpha+1}\right)}+O\left(n^{2\alpha}\right)$$

$$\alpha_n=a_1^{\,2}n^{2\alpha+2}\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx+a_1a_2n^{2\alpha+2}\int_0^b \sin\left(\frac{2\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx-$$

$$+a_2^{\,2} n^{2\alpha+2} \int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)dx -$$

$$-2a_1 d_2 \mathrm{N}_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha} n^{2\alpha+1} \int_0^b \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{b}(1+\frac{\alpha}{2}+n)x\right)}{x} dx + \mathrm{O}\left(n^{2\alpha+1}\right)$$

elde edilir.

Sağ taraftaki integrallerin değerleri daha önce bulunduğundan, bulunan bu değerler yerlerine yazılırsa;

$$\alpha_n = \frac{b}{2}\left(a_1^{\,2} + a_2^{\,2}\right)n^{2\alpha+2} - a_1 d_2 \mathrm{N}_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\alpha} \ln\left(\pi\left(1+\alpha/2+n\right)\right)n^{2\alpha+1} + \mathrm{O}\left(n^{2\alpha+1}\right)$$

şeklinde olur.

KAYNAKLAR

[1] M. G. GASİMOV, Dokl. Akad., Nauk. SSSR, 1965, vol. 161. No.2.

[2] M. A. NAIMARK, Linear Differential Operators in Hilbert Space, Part II.

[3] CHAWLA M. M.& KATTI C. P., Finite difference methods and their convergence for a class of singular two point boundary value problems, Num. Math 39, 341-350 (1982).

[4] CHAWLA M. M.& KATTI C. P., A uniform mesh finite difference method for a class of singular two point boundary value problems,SIAM J. Numer. Analysis 22 (3), 561-565 (1985).

[5] CHAWLA M. M., A fourth-order finite difference method based on uniform mesh for a class of singular two point boundary value problems, J. C omp. Appl. Math. 17, 359-364 (1987).

[6] CIARLET P. G., NATTERER F. & VARGA R. S., Numerical methods of higher-order accuracy for singular nonlinear boundary value problems, Num. Math. 15, 87-99 (1970).

[7] IYENGAR S. R. K. & JAIN P., Spline finite difference methods for singular two point boundary value problems, Num. Math. 50, 363-376 (1987).

[8] JAIN M. K., Fourth order difference method for the general second order singular boundary value problem with spherical symmetry, J. Math. Phys. Sci. 23 (3), 269-273 (1989).

[9] JAMET P., On the convergence of finite-difference approximations to one dimensional singular boundary value problems, Num. Math. 14 355-378 (1970).

[10] LEES M., Discrete methods for nonlinear two point boundary value problems, in Numerical solutions of partial differential equations, (Edited by J. Habbard), Academic Press, New York, pp. 59--72 (1966).

[11] PANDEY R.K., On a class of weakly regular singular two point boundary value problems-I, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 27, No. 1, pp. 1-12, (1996).

[12] SAKAI M. & USMANI R. A., Non polynomial splines and weakly singular two point boundary value problems, BIT 28, 867-876 (1988).

[13] SAKAI M. & USMANI R. A., An application of Chawla's identity to a different scheme for singular problems, BIT 29, 566-568 (1989).

[14] TITCHMARSH E.C.,Eigenfunction expansions Part I, University Press, Oxford (1962).

ÖZGEÇMİŞ

Yalçın GÜLDÜ 1969 yılında Sivas'da doğdu. İlk ve orta öğretimini Sivas'da bitirdi. 1987 yılında ODTÜ, Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Bölümünü kazandı ve 1992 yılında mezun oldu. Aynı yıl Tuzla Anadolu Teknik Lisesinde göreve başladı. 1997 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünde Araştırma Görevliliğine geçti. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen burada çalışmaktadır.