ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER

Hazırlayan
Melih SEVİM

Danışman
Prof. Dr. Neşet AYDIN

Ağustos, 2006
ÇANAKKALE

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Bölümü, Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı

Hazırlayan

Melih SEVİM

Danışman

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Ağustos, 2006

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Melih SEVİM, tarafından **Prof.Dr. Neşet AYDIN** yönetiminde hazırlanan **"ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Yönetici

Prof. Dr. Kazım KAYA

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Serhat ÖZDER

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Mehmet Emin ÖZEL

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

ÖZET

Karakteristiği 2 den farklı olan türevli asal halkalarda bazı komütatiflik koşullarını inceleyen makalelerin bir arada özetlenmesidir.

I. Bölümde halkalarla ilgili genel bilgiler verilmiştir.

II. Bölümde, türevli asal halkalarda komütatiflik koşullarını inceleyen bazı makaleler verilmiştir.

III. Bölümde karakteristiği 2 den farklı bir asal halkada bir U Lie ideali için yapılan çalışmaları halkanın genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie idealine genelleştiren makaleler özetlenmiştir.

IV. Bölümde d, karakteristiği 2 den farklı bir R asal halkası üzerinde bir türev, U, R nin bir genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie ideali olmak üzere

a. $ad(U)=0$ ise $a=0$ veya $U\subset Z$

b. $d^2(U)=0$ ise $U\subset Z$

koşullarını tek yanlı genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie idealine genelleştiren makaleler özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Türev, Lie ideal, Genelleştirilmiş Lie ideal

SUMMARY

The plan followed in this work, which aims at the study of some papers which investigated commutativity conditions in prime rings with derivation of characteristic not 2 have been summarized.

Some general information about rings have been given in chapter I.

In chapter II., some papers that search commutativity conditions on Lie ideals of rings with derivation have been given.

In chapter III., articles were sumarized that generalize the studies carried out for U Lie ideal to the (σ,τ)-Lie ideal of the ring in a prime ring whose characteristics is different from 2.

In chapter IV., d is a derivation on R prime ring whose characteristics is different from 2 and articles were procided that generalize the ideal of generalized (σ,τ)-Lie to the ideal of one-sided generalized (σ,τ)-Lie and that meet the following conditions:

i. If ad(U)=(0) then a=0 or $U \subset Z$

ii. If $d^2(U)=(0)$ then $U \subset Z$

Key Words: Derivation, Lie ideal, Generalized Lie ideal

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince yardım ve katkılarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Neşet AYDIN'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
SUMMARY ii
TEŞEKKÜR..iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.. v

GİRİŞ 1-3

1. BÖLÜM-GENEL BİLGİLER...4-10

2. BÖLÜM-TÜREVLİ HALKALAR...11-15

3. BÖLÜM-ASAL HALKALARDA LİE VE (σ,τ)-LİE İDEALLER 16-48

4. BÖLÜM-TÜREVLİ VE (σ,τ)-LİE İDEALLİ ASAL HALKALAR...........49-67

KAYNAKLAR 68-69

SİMGE VE KISALTMALAR

Semboller	**Anlam**
$\forall$	her
$\in$	eleman
$\notin$	elemanı değil
$\subset$	alt kümedir
$\not\subset$	alt küme değildir
$\cup$	birleşim
$\cap$	kesişim
$\varnothing$	boş küme
$\{x \in A \mid P(x)\}$	P(x) koşulunu sağlayan A nın x elemanlarının kümesi
$\Rightarrow$	gerektirir
$\Leftrightarrow$	gerekli ve yeterli koşul
Z(R) veya Z	R halkasının merkezi
charR	R halkasının karakteristiği
$C_R(A)$	A kümesinin R deki merkezleştiricisi
R/K	Bölüm Halkası
Kerf	f homomorfizminin çekirdeği
r(A)	A kümesinin sağ sıfırlayanlarının kümesi
$\ell(A)$	A kümesinin sol sıfırlayanlarının kümesi
$C_{\sigma,\tau}$	R halkasının (σ,τ)-merkezi

GİRİŞ

R bir halka, $d:R\rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in R$ için,

$d(xy)=d(x)y+xd(y)$

koşulu sağlanıyor ise d dönüşümüne R halkasının bir ***türevi*** denir.

x ve y, R halkasının iki elemanı olmak üzere xy-yx (xy+yx) elemanı komütatör (Jordan) çarpımı olarak adlandırılır ve [x,y] ((x,y)) ile gösterilir. Benzer biçimde X ve Y, R halkasının iki alt kümesi ise her $x\in X$ ve $y\in Y$ için, xy-yx (xy+yx) elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup [X,Y] ((X,Y)) ile gösterilir. R halkasının her $y\in R$ elemanı için, $[x,y]=0$ koşulu sağlayan x elemanlarının oluşturduğu kümeye R halkasının ***merkezi*** denir ve Z ile gösterilir.

U, R halkasının toplamsal alt grubu için $[U,R]\subset U$ ($(U,R)\subset U$) oluyorsa U'ya R halkasının bir Lie (Jordan) ideali denir.

$\sigma,\tau:R\rightarrow R$ iki dönüşüm olmak üzere $x,y\in R$ için, $x\sigma(y)-\tau(y)x$ ($x\sigma(y)+\tau(y)x$) elemanı $[x,y]_{\sigma,\tau}$ ($(x,y)_{\sigma,\tau}$) ile gösterilsin. $[U,R]_{\sigma,\tau}\subset U$ ($(U,R)_{\sigma,\tau}\subset U$) koşulu sağlanıyorsa U alt grubuna R halkasının bir (σ,τ)-sağ Lie ((σ,τ)-sağ Jordan) ideali, $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ ($(R,U)_{\sigma,\tau}\subset U$) koşulu sağlanıyorsa U alt grubuna R halkasının bir (σ,τ)-sol Lie ((σ,τ)-sol Jordan) ideali, U, R halkasının hem (σ,τ)-sol ve hem de (σ,τ)-sağ Lie ideali ise U'ya R nin bir ***genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie ideali*** denir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe R karakteristiği 2'den farklı bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizması olarak alınacak ve $x,y\in R$ için $x\sigma(y)-\tau(y)x$ elemanı $[x,y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilecektir.

Yukarıdaki gösterimler altında $C_{\sigma,\tau}=\{c\in R:[c,x]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall x\in R\}$ kümesine R halkasının (σ,τ)-merkezi denir.

Çeşitli koşullar altında halkaların komütatifliği konusu bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada, bu koşullardan bazıları altında bir halkanın komütatifliği incelenirken hangi aşamalardan geçtiği, koşullar üzerinde hangi genelleştirmelerin yapıldığı özetlenecektir. Bu koşullardan bazıları aşağıda verilmiştir.

a) $a\in R$ için $ad(R)=(0)$

b) $\forall x\in R$ için $[d(x),x]\in Z$

c) $[d(R),d(R)]=(0)$

d) $[a,d(R)]=(0)$

e) $d(R)\subset Z$

f) $d^2(R)=(0)$

g) $0\neq d_1:R\rightarrow R$ ve $0\neq d_2:R\rightarrow R$ iki türev olmak üzere $d_1d_2(R)=(0)$

h) $U\not\subset Z$ olan bir Lie ideal ise bu takdirde R halkasının $[R,M]\subset U$ ve $[R,M]\not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

ı) $[a,U]=(0)$ ise $a\in Z$ veya $U\subset Z$ dir.

k) $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ veya $U\subset Z$ dir.

Yukarıdaki koşullardan birini sağlayan halkaların komütatifliği incelenirken bir taraftan bu koşullarda R halkası yerine sırayla onun bir ideali, tek yanlı ideali ve Lie ideali, diğer taraftan ise d türevi yerine α-türev ve (σ,τ)-türev alınarak genelleştirmeler yapılmıştır.

Bu çalışmanın II. Bölümünde R, karakteristiği 2 den farklı asal halka, $\sigma,\tau:R\rightarrow R$ birer otomorfizma, d, R halkasının $d\sigma=\sigma d$, $d\tau=\tau d$ koşulunu sağlayan türevi olmak üzere yukarıda Lie ideali için bahsedilen koşullar halkanın genelleştirilmiş (sağ, sol) Lie ideali için yapılan genelleştirmeler incelenmiştir.

Karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, U bir Lie ideal olmak üzere

1. $[a,U]=0$ ise $a\in Z$ veya $U\subset Z$

2. $U\not\subset Z$ için R halkasında $[R,M]\subset U$ ve $[R,M]\not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

3. $U\not\subset Z$ için $aUb=0$ ise $a=0$ veya $b=0$

Sonuçlarını gösteren makaleler ve $d:R\rightarrow R$ bir türev olmak üzere

4. $d(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$

5. $ad(U)=0$ ise $a=0$ veya $U\subset Z$

6. $d^2(U)=0$ ise $d=0$ veya $U\subset Z$

koşullarını ele alan makaleler ve bu koşulları halkanın genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie ideali için genelleştirilen makaleler III. Bölümde verilmiştir.

IV. Bölümde ise, d, karakteristiği 2 den farklı bir R asal halkası üzerinde bir türev, U, R nin bir genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie ideali olmak üzere

a. $d(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R değişmeli veya $U\subset Z$

b. $ad(U)=0$ ise $a=0$ veya $U\subset Z$

c. $d^2(U)=0$ ise $U\subset Z$

koşullarını tek yanlı genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie idealini genelleştiren makaleler verilmiştir.

I. BÖLÜM
GENEL BİLGİLER

Tanım 1.1: R bir halka ve A,B,P onun idealleri olsun. $AB\subseteq P$ olduğunda $A\subseteq P$ veya $B\subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının ***asal ideali*** denir.

Teorem 1.2: R bir halka ve P onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) P asal idealdir.

(2) $\forall a, b\in R$ için $aRb\subseteq P$ ise $a\in P$ veya $b\in P$ dir.

(3) $\forall a,b\in R$ için $(a)(b)\subseteq P$ ise $a\in P$ veya $b\in P$ dir.

(4) U,V R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV\subseteq P$ iken $U\subseteq P$ veya $V\subseteq P$ dir.

(5) U,V R halkasının iki sağ ideali olmak üzere $UV\subseteq P$ iken $U\subseteq P$ veya $V\subseteq P$ dir.

İspat:

(1)$\Rightarrow$(2): P asal ideal olsun. $\forall a,b\in R$ için $aRb\subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $RaRRbR\subseteq P$ olur. P asal ideal olduğu için $RaR\subseteq P$ veya $RbR\subseteq P$ bulunur. Diğer taraftan $(a)=A$ olmak üzere $A^3\subseteq RaR\subseteq P$ olduğu açıktır. Yine P asal ideal olduğundan $A^2\subseteq P$ veya $A\subseteq P$ olur. Yani $A=(a)\subseteq P$ elde edilir. Böylece $a\in P$ bulunur. Benzer şekilde $b\in P$ olduğu gösterilir.

(2)$\Rightarrow$(3): $\forall a,b\in R$ için, $aRb\subseteq P$ iken $a\in P$ veya $b\in P$ olsun. $(a)(b)\subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $aRb\subseteq(a)(b)\subseteq P$ olduğundan $aRb\subseteq P$ olur. Hipotezden $a\in P$ veya $b\in P$ dir.

(3)$\Rightarrow$(4): $\forall a,b\in R$ için $(a)(b)\subseteq P$ iken $a\in P$ veya $b\in P$ olsun. U, V R halkasının iki sol ideali ve $UV\subseteq P$ ve $U\not\subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u\in U$ ve $u\notin P$ olacak biçimde bir u elemanı vardır. Keyfi bir $v\in V$ alalım. $(u)(v)\subseteq UV+UVR\subseteq P$ dir. Hipotezden ve $u\notin P$ olduğundan $v\in P$ bulunur. Bu V sol idealinin her v elemanı için tekrarlanırsa $V\subseteq P$ elde edilir.

(3)$\Rightarrow$(5): (3)$\Rightarrow$(4) ispatında olduğu gibi benzer şekilde gösterilir.

(4)$\Rightarrow$(1): Tanımından (4)$\Rightarrow$(1) ve (5)$\Rightarrow$(1) olduğu açıktır.

Tanım 1.3: (0) ideali asal ideal olan halkaya ***asal halka*** denir.

Önerme 1.4: R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) R asal halkadır.

(2) $a,b \in R$ için $aRb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ dır.

(3) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

(4) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 1.5: R bir halka, A ve Q, R halkasının iki ideali olsun. $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ise Q idealine R halkasının ***yarı-asal ideali*** denir.

Teorem 1.6: R bir halka, Q onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) Q yarı-asal idealdir.

(2) $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$

(3) $a \in R$ için $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$

(4) U, R halkasının bir sağ ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ olur.

(5) U, R halkasının bir sol ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ olur.

Tanım 1.7: R bir halka olsun.

(1) $\forall a \in R$ için, $na=0$ olacak biçimde bir n pozitif tam sayısı var ise böyle n'lerin en küçüğüne R halkasının ***karakteristiği*** denir ve ***charR=n*** ile gösterilir. Eğer halkanın karakteristiği yok ise karakteristiği sıfırdır.

(2) $a \in R$ için, $a^n=0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise a elemanına halkanın ***nilpotent elemanı*** denir. $a^n=0$ fakat $a^{n-1} \neq 0$ ise n ye a nın ***nilpotentlik indeksi*** denir.

(3) B, R halkasının bir ideali olsun. B nin her elemanı nilpotent ise B ye R halkasının ***nil ideali*** denir.

(4) A, R halkasının bir ideali olsun. A nın keyfi olarak alınan $a_1, a_2 \ldots, a_n$ elemanları için $a_1 a_2 \ldots a_n = 0$ ise A ya R'nin ***nilpotent ideali*** denir. Her nilpotent ideal nil idealidir.

Tanım 1.8: Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya ***yarı-asal halka*** denir.

Tanım 1.9: R bir halka ve $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. $x \in R$ için $mx=0$ olduğunda $x=0$ oluyorsa R halkasına ***m-torsion free*** halka denir.

Tanım 1.10: X, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $C_R(X)=\{a\in R \mid xa=ax, \ \forall x\in X\}$ kümesine X in R deki ***merkezleştiricisi*** denir. $\{x\in R \mid xy=yx, \ \forall y\in R\}$ kümesine ise R halkasının ***merkezi*** denir ve Z ile gösterilir.

Önerme 1.11: R asal halka olsun. ab, $b\in Z$ ise $b=0$ veya $a\in Z$ dir.

İspat: $ab,b\in Z$ olsun. $\forall x\in R$ için, $xab=abx=axb$ olur. Buradan

$$(ax-xa)b=0, \ \forall x\in R \qquad (1)$$

elde edilir. (1) eşitliğinde x yerine $xy, y\in R$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0&=(axy-xya)b=axyb-xyab \\ &=axyb-xayb+xayb-xyab \\ &=(ax-xa)yb+x(ay-ya)b \end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin ikinci terimi (1) den dolayı sıfırdır. Böylece

$$(ax-xa)Rb=(0), \ \forall x\in R \qquad (2)$$

olduğu görülür. R asal halka olduğu için (2) den

$$b=0 \text{ veya } a\in Z$$

bulunur.

Önerme 1.12: R bir yarı-asal halka ve $0\neq a\in R$ olsun. $\forall x\in R$ için, $a(ax-xa)=0$ oluyorsa $a\in Z$ dir.

İspat: $x, r\in R$ için hipotezden;

$$a(a(xr)-(xr)a)=0 \qquad (3)$$

olur. $a(xr)-(xr)a=(ax-xa)r+x(ar-ra)$ olduğu (3) eşitliğinde yerine yazılır ve yine (3) eşitliği kullanılırsa

$$ax(ar-ra)=0, \ \forall x,r\in R$$

elde edilir. Bu ise

$$(ar-ra)R(ar-ra)=(0), \ \forall r\in R$$

olduğunu verir. R yarı-asal halka olduğundan $\forall r\in R$ için, $ar=ra$ elde edilir. Böylece $a\in Z$ bulunur.

Önerme 1.13: R yarı-asal halka olsun. a elemanı R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini merkezleştirsin. Bu takdirde $a\in Z$ dir.

İspat: a, R halkasının sıfırdan farklı I sağ idealini merkezleştirsin. $\forall x\in R$ için $ax\in I$ dır. Hipotezden, $a(ax)=(ax)a=a(xa)$ olur. Buradan $\forall x\in R$ için, $0=a(ax-xa)$ elde edilir. Bu ise Önerme 1.12 den $a\in Z$ demektir.

Tanım 1.14: R bir halka ve A, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. $\forall a,b\in A$ için $ab-ba\in A$ ($ab+ba\in A$) oluyorsa A ya R nin ***Lie(Jordan) alt halkası*** denir.

Tanım 1.15: A, R halkasının bir Lie (Jordan) alt halkası ve $U\subset A$ toplamsal alt grubu olsun. $\forall u\in U$ ve $\forall a\in A$ için $ua-au\in U$ ($ua+au\in U$) oluyorsa, U ya A nın bir ***Lie (Jordan) ideali*** denir.

Tanım 1.16: X ve Y, R halkasının iki alt kümesi olsun. $[X,Y]$ ile $xy-yx$, $x\in X$, $y\in Y$ elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup gösterilir.

Tanım 1.17: Tanım 1.16 ya göre R halkasının U toplamsal alt grubu için $[U,R]\subseteq U$ ise U ya R nin ***Lie ideali*** denir.

Tanım 1.18: $x,y\in R$ için $xy-yx$ ifadesi komütatör çarpımı olarak adlandırılır ve $[x,y]$ ile gösterilir. Ayrıca

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$$

eşitliğine ***Jacobi özdeşliği*** denir.

Tanım 1.19: R bir halka, $\sigma,\tau:R\rightarrow R$ iki dönüşüm olsun. $x,y\in R$ için $x\sigma(y)-\tau(y)x$ ifadesi $[x,y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilsin. R nin bir U toplamsal alt grubu için

(1) $[U,R]_{\sigma,\tau}\subset U$ ise U ya R halkasının ***(σ,τ)-sağ Lie ideali*** denir.

(2) $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ ise U ya R halkasının ***(σ,τ)-sol Lie ideali*** denir.

(3) U, R halkasının hem (σ,τ)-sağ Lie ideali ve hem de (σ,τ)-sol Lie ideali ise U ya R halkasının ***(σ,τ)-Lie ideali*** denir.

R halkasının her Lie ideali 1, R nin özdeşlik dönüşümü olmak üzere (1,1)-sağ, sol (iki yanlı) Lie idealidir.

Tanım 1.20: $C_{\sigma,\tau}=\{c\in R \mid c\sigma(x)=\tau(x)c, \forall x\in R\}$ kümesine R halkasının ***(σ,τ)-merkezi*** denir.

Aynı zamanda şu özdeşliklerde sıkça kullanılacaktır.

i) $[xy,z]_{\sigma,\tau}=x[y,z]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(z)]y=x[y,\sigma(z)]+[x,z]_{\sigma,\tau}y$

ii) $[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau}=[[x,z]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau}+[x,[y,z]]_{\sigma,\tau}$

iii) $[x,yz]_{\sigma,\tau}=\tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau}+[x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$

iv) $(x,yz)_{\sigma,\tau}=\tau(y)(x,z)_{\sigma,\tau}+[x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$

v) $(xy,z)_{\sigma,\tau}=x(y,z)_{\sigma,\tau}-[x,\tau(z)]y$

Tanım 1.21: R bir halka ve $d:R\rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. $x,y\in R$ olmak üzere

(1) $d(xy)=d(x)y+xd(y)$ ise d ye R halkasının bir türevi denir.

(2) $0\neq\alpha:R\rightarrow R$ bir endomorfizma olmak üzere $d(xy)=d(x)\alpha(y)+\alpha(x)d(y)$ ise d ye (α,α)-türevi denir.

(3) σ ve τ, R halkasının iki otomorfizması ve $d(xy)=d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y)$ ise d ye bir (σ,τ)-türevi denir.

Önerme 1.22: R halkası sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve $2x=0$ iken $x=0$ olan bir halka olsun. Kabul edelim ki $(0)\neq U$, R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olsun. O zaman $U\subseteq Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat: Kabul edelim ki U alt halkası değişmeli olmasın. O zaman $xy-yx\neq 0$ olacak şekilde $x,y\in U$ elemanları vardır. Herhangi $r\in R$ için $x(yr)-(yr)x\in U$ olur. Öte yandan $x(yr)-(yr)x=(xy-yx)r+y(xr-rx)\in U$ dır. Bu ifadede $y,xr-rx\in U$ ve U alt halka olduğundan $y(xr-rx)\in U$ olur. Böylece her $r\in R$ için $(xy-yx)r\in U$ bulunur. Yani

$$(xy-yx)R\subset U \tag{4}$$

elde edilir. U Lie ideal olduğundan her $r,s\in R$ için

$$((xy-yx)r)s-s((xy-yx)r)\in U$$

olur. Bu ifadenin ilk terimi (4) den dolayı U nun elemanıdır. Böylece

$$R(xy-yx)R\subset U$$

elde edilir. $R(xy-yx)R=(0)$ ise $(R(xy-yx))^2=(0)$ olur. Bu durumda R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali olmadığı için $xy-yx=0$ bulunur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $R(xy-yx)R\neq(0)$ dır.

Şimdi kabul edelim ki U değişmeli alt halka olsun. Biz $U\subseteq Z$ olduğunu görmeliyiz. $a\in U$, $x\in R$ için $ax-xa\in U$ ve U değişmeli halka olduğundan

$$a(a(xy)-(xy)a)=(a(xy)-(xy)a)a$$

yazılır. Bu ifade U halkasının değişmeli olduğu kullanılarak açılırsa

$$2(ax-xa)(ay-ya)=0,\ \forall x,y\in R$$

bulunur. Hipotezden

$$(ax-xa)(ay-ya)=(0),\ \forall x,y\in R$$

demektir. Bu ifadede y yerine yx yazılırsa

$(ax-xa)R(ax-xa)=0,\ \forall x\in R$

elde edilir. Yani $(R(ax-xa))^2=(0),\ \forall x\in R$ bulunur. Bu ise R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali bulunmadığından, $\forall x\in R$ için $ax-xa=0$ olur. Böylece $a\in Z$ olduğu görülür. Bunu her $a\in U$ için yapabileceğimizden $U\subseteq Z$ bulunur.

Önerme 1.23 (Brauer trick): Bir G toplamsal grubu iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat: A ve B, G nin iki öz alt grubu olmak üzere $G=A\cup B$ olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki $G\neq A$ olsun. Bu durumda $G=B$ olduğunu görmeliyiz. $G\neq A$ olduğundan $x\in G$ ve $x\notin A$ olacak biçimde en az bir x elemanı vardır. Öte yandan $G=A\cup B$ olduğundan $x\in B$ dir. İddiamız $G\subset B$ dir. Eğer $G\not\subset B$ olsaydı, $y\in G$ ve $y\notin B$ olacak biçimde en az bir y elemanı vardır. $G=A\cup B$ olduğundan $y\in A$ olurdu.

$x+y\in B$ dir. Gerçekten $x+y\notin B$ olsaydı $G=A\cup B$ olduğundan $x+y\in A$ olurdu. $y\in A$ ve A toplamsal alt grup olduğundan $x\in A$ olurdu ki bu $x\notin A$ alınışıyla çelişir. O halde $x+y\in B$ dir. $x\in B$ ve B toplamsal olduğundan $y\in B$ olur ki bu da $y\notin B$ oluşuyla çelişir. O halde $G\not\subset B$ olamaz. Yani $G\subset B$ dir. Böylece $G=B$ olur.

Tanım 1.24: R bir asal halka olsun. U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $f:U\rightarrow R$ bir sağ R-modül homomorfizması olmak üzere; M ile bütün (U,f) şeklindeki ikililerin kümesini gösterelim. M üzerinde

"$(U,f)\sim(V,g)\Leftrightarrow$R nin sıfırdan farklı bir $W\subseteq U\cap V$ ideali üzerinde $f=g$" denklik bağıntısını tanımlayalım. M nin denklik sınıflarının kümesi Q olsun. Q kümesi

$$\overline{(U,f)}+\overline{(V,g)}=\overline{(U\cap V,f+g)},\quad \overline{(U,f)}\,\overline{(V,g)}=\overline{(VU,fg)}$$

ikili işlemleri ile R yi kapsayan bir asal halkadır.

(1) Q nın merkezi C ile gösterilir ve C ye R nin genişletilmiş merkezi (extended centroid) denir. C bir cisimdir.

(2) S=RC ye R nin Q daki merkezi kapanışı (central closure) denir. S, R yi kapsayan bir asal halkadır.

Önerme 1.25: R asal halka olsun. R halkasının d, f, g ve h türevleri için

$d(x)g(y)=h(x)f(y),\ \forall x,y\in R$

olsun. Eğer $d\neq0$, $f\neq0$ ise o zaman $\forall x\in R$ için, $g(x)=\lambda f(x)$ ve $h(x)=\lambda d(x)$ olacak şekilde bir $\lambda\in C$ vardır.

Önerme 1.26: R asal halka olmak üzere, $a,b\in R$ için $b,ab\in C_{\sigma,\tau}$ ise $a\in Z$ veya $b=0$ olur.

Önerme 1.27: R asal halka ve $a\neq 0$ olmak üzere, her $x\in R$ için $a[u,x]=0$ ise $u\in Z$ olur.

Önerme 1.28: R, 2 torsion free ve yarı-asal halka olmak üzere, $a\in R$ için $[a,[a,R]]=0$ ise $a\in Z$ olur.

Önerme 1.29: R asal halka, U Lie ideal ve $0\neq d$ türev olmak üzere, $d^3(U)=(0)$ ise $d^3=0$ olur.

Önerme 1.30: R asal halka, $0\neq d$ türev olsun. Bu takdirde $d(R)\subset Z$ ise R değişmelidir.

II. BÖLÜM
TÜREVLİ HALKALAR

Posner, E.C., 1957

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, d türev ve $charR \neq 2$ olarak alınmıştır.

Tanım 2.1: R halkasının bir ***asal halka*** olması için gerek ve yeter koşul a, $b \in R$ için, $aRb=(0)$ olduğunda $a=0$ veya $b=0$ olmasıdır.

Lemma 2.2: $a \in R$ olmak üzere R asal halkasının bir türevi d olsun. Her $x \in R$ için $ad(x)=0$ ise $a=0$ veya $d=0$ olur.

İspat: Hipotezden her $x \in R$ için $ad(x)=0$ olduğundan, $y \in R$ için x yerine xy yazarsak, her $x,y \in R$ için $ad(xy)=ad(x)y+axd(y)=0$ olur. Buradan her $x,y \in R$ için $axd(y)=0$ olduğundan $aRd(y)=0$ yazılabilir. R asal olduğundan $a=0$ veya her $y \in R$ için $d(y)=0$ olur. Bu ise $a=0$ veya $d=0$ demektir.

Lemma 2.3: R asal halka ve $p,q,r \in R$ olmak üzere her $a \in R$ için $paqar=0$ ise p, q, r den en az biri sıfırdır.

Teorem 2.4: R, $charR \neq 2$ olan bir asal halka ve d_1, d_2, R nin türevleri olsun. Bu takdirde d_1d_2 türev ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olur.

Lemma 2.5: R asal halka ve d, R nin türevi olmak üzere her $a \in R$ için $[a,d(a)]=0$ ise R değişmeli veya $d=0$ olur.

Teorem 2.6: R asal halka ve d, R nin türevi olmak üzere her $a \in R$ için $[a,d(a)] \in Z$ olsun. Bu takdirde $d \neq 0$ ise R değişmelidir.

Awtar, R., 1973

Teorem 2.7: R asal halka, $d \neq 0$ türev ve $a \in R$ için $[a,d(a)] \in Z$ ise R değişmelidir.

İspat:

$a \in R$ için $[a,d(a)] \in Z$ ifadesinde a yerine $x \in R$ için $a+[a,x]$ yazarsak, $[a+[a,x], d(a+[a,x])]=[a+[a,x],d(a)+d([a,x])]=[a,d(a)]+[a,d([a,x])]+[[a,x],d(a)]+[[a,x],d([a,x])] \in Z$ olur. Aynı zamanda $[a,d(a)] \in Z$ ve $[[a,x],d([a,x])] \in Z$ olduğundan her $a,x \in R$ için $[[a,x],d(a)]+[a,d([a,x])] \in Z$ olur. Buradan her $a,x \in R$ için $[[a,x],d(a)]+[a,[d(a),x]+$

$[a,d(x)]]\in Z$ olur. Yani, her $a,x\in R$ için $[[a,x],d(a)]+[a,[d(a),x]]+[a,[a,d(x)]]\in Z$ bulunur. Diğer yandan Jacobi eşitsizliğinden her $a,x\in R$ için $[[a,x],d(a)]+[[d(a)],a],x]+[[x,d(a)],a]=0$ olması ve $[d(a),a]\in Z$ olduğundan, $[[d(a),a],x]=0$ elde edilir. Buradan $[[a,x],d(a)]+[[x,d(a)],a]=[[a,x],d(a)]+[a,[d(a),x]]=0$ bulunur. Böylece,

$$[a,[a,d(x)]]\in Z,\ \forall a,x\in R \tag{2.2}$$

elde edilir. charR=2 olsun. Her $a,x\in R$ için $[a,[a,d(x)]]=[a,ad(x)-d(x)a]=a^2d(x)-ad(x)a-ad(x)a+d(x)a^2=a^2d(x)-2ad(x)a+d(x)a^2\in Z$ olur. charR=2 olduğundan,

$$a^2d(x)+d(x)a^2\in Z,\ \forall a,x\in R \tag{2.3}$$

ifadesi bulunur. Buradan her $a,x\in R$ için $(a^2d(x)+d(x)a^2)d(x)=d(x)(a^2d(x)+d(x)a^2)$ yazarsak, $a^2(d(x))^2+d(x)a^2d(x)=d(x)a^2d(x)+(d(x))^2a^2$ olduğundan,

$$a^2(d(x))^2=(d(x))^2a^2,\ \forall a,x\in R \tag{2.4a}$$

eşitliği elde edilir. (2.3) den $(a^2d(x)+d(x)a^2)a^2=a^2(a^2d(x)+d(x)a^2)$ yazarsak, $a^2d(x)a^2+d(x)a^4=a^4d(x)+a^2d(x)a^2$ olduğundan,

$$a^4d(x)=d(x)a^4,\ \forall a,x\in R \tag{2.4b}$$

eşitliği bulunur. (2.4a) eşitliğinde x yerine $x+a^2x$ yazarsak, $a^2(d(x+a^2x))^2=(d(x+a^2x))^2a^2$ olur. Buradan her $a,x\in R$ için $a^2(d(x))^2+a^2d(x)d(a^2x)+a^2d(a^2x)d(x)+a^2(d(a^2x))^2=(d(x))^2a^2+d(x)d(a^2x)a^2+d(a^2x)d(x)a^2+(d(a^2x))^2a^2$ bulunur. (2.4a) dan $(d(x))^2a^2=a^2(d(x))^2$ ve $(d(a^2x))^2a^2=a^2(d(a^2x))^2$ olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, her $a,x\in R$ için $a^2d(x)d(a^2x)+a^2d(a^2x)d(x)=d(x)d(a^2x)a^2+d(a^2x)d(x)a^2$ bulunur. Buradan $a^2d(x)(d(a^2)x+a^2d(x))+a^2(d(a^2)x+a^2d(x))d(x)=d(x)(d(a^2)x+a^2d(x))a^2+(d(a^2)x+a^2d(x))d(x)a^2$ olur. Dolayısıyla $a^2d(x)d(a^2)x+a^2d(x)a^2d(x)+a^2d(a^2)xd(x)+a^4(d(x))^2=d(x)d(a^2)xa^2+d(x)a^2d(x)a^2+d(a^2)xd(x)a^2+a^2(d(x))^2a^2$ bulunur. Böylece $d(a^2)=ad(a)+d(a)a=ad(a)-d(a)a=[a,d(a)]\in Z$ dir. Her $a\in R$ için $d(a^2)\in Z$ olduğunu kullanırsak, $d(a^2)a^2d(x)x+d(a^2)a^2xd(x)+(a^2d(x))^2+a^4(d(x))^2=d(a^2)d(x)xa^2+d(a^2)xd(x)a^2+(d(x)a^2)^2+a^2(d(x))^2a^2$ bulunur. charR=2 olduğundan, her $a,x\in R$ için $d(a^2)a^2[d(x),x]+(a^2d(x))^2+a^4(d(x))^2=d(a^2)[d(x),x]a^2+(d(x)a^2)^2+a^2(d(x))^2a^2$ elde edilir. Her $x\in R$ için $[d(x),x]\in Z$ olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, her $a,x\in R$ için $(a^2d(x))^2+a^4(d(x))^2=(d(x)a^2)^2+a^2(d(x))^2a^2$ bulunur. Buradan her $a,x\in R$ için $(a^2d(x))^2+a^4(d(x))^2-(d(x)a^2)^2-a^2(d(x))^2a^2=0$ olur. (2.4b) ifadesinden $a^4(d(x))^2=a^4d(x)d(x)=d(x)a^4d(x)$ olur. Bu ifade yerine yazılır ve charR=2 olduğu kullanılırsa her

$a,x\in R$ için $(a^2d(x)+d(x)a^2)^2=0$ olur. (2.3) den $a^2d(x)+d(x)a^2\in Z$ dir. R asal halka olduğundan merkezinde nilpotent eleman bulundurmaz. Yani, her $a,x\in R$ için $a^2d(x)+d(x)a^2=0$ olur ve charR=2 olduğundan,

$$a^2d(x)=d(x)a^2,\ \forall a,x\in R \tag{2.5}$$

eşitliği bulunur. (2.5) eşitliğinde a yerine $b\in R$ için a+b yazarsak, $(a+b)^2d(x)=d(x)(a+b)^2$ olur. Buradan $a^2d(x)+abd(x)+bad(x)+b^2d(x)=d(x)a^2+d(x)ab+d(x)ba+d(x)b^2$ bulunur. (2.5) denklemi kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa her $a,b\in R$ için $abd(x)+bad(x)=d(x)ab+d(x)ba$ elde edilir. Yani her $a,b\in R$ için $(ab+ba)d(x)=d(x)(ab+ba)$ bulunur. a yerine ab yazarsak ve charR=2 olduğundan $(ab^2-bab)d(x)=d(x)(ab^2-bab)$ olur. Buradan $(ab-ba)bd(x)=d(x)(ab-ba)b$ olur. $d(x)(ab-ba)=(ab-ba)d(x)$ olduğundan, $(ab-ba)bd(x)=(ab-ba)d(x)b$ elde edilir. Yani her $a,b\in R$ için $(ab-ba)bd(x)-(ab-ba)d(x)b=0$ olur. O halde,

$$(ab-ba)(bd(x)-d(x)b)=0,\ \forall a,b,x\in R \tag{2.6}$$

denklemi elde edilir. Bu ifadeyi b ile doğrusallaştırırsak, her $x,a,b,c\in R$ için $(ac-ca)(bd(x)-d(x)b)+(ab-ba)(cd(x)-d(x)c)=0$ elde edilir. b yerine b^2 yazarsak, $(ac-ca)(b^2d(x)-d(x)b^2)+(ab^2-b^2a)(cd(x)-d(x)c)=0$ olur. (2.5) den $b^2d(x)-d(x)b^2=b^2d(x)-b^2d(x)=0$ olur. Yani her $x,a,b,c\in R$ için $(ab^2-b^2a)(cd(x)-d(x)c)=0$ olur. R üzerinde her $a,b\in R$ için $I_{b^2}(a)=[b^2,a]$ iç türevi tanımlansın. Her $a,b,c,x\in R$ için $I_{b^2}(a)(cd(x)-d(x)c)=0$ olur. Lemma 2.2 den her $a,b,c,x\in R$ için $I_{b^2}=0$ veya $cd(x)-d(x)c=0$ olur. Buradan her $a,b,c,x\in R$ için $b^2\in Z$ veya $d(x)\in Z$ olur. $d(x)\in Z$ ise her $x\in R$ için $0=[x,d(x)]=xd(x)-d(x)x=xd(x)+d(x)x=d(x^2)$ bulunur. Yani her $x\in R$ için $d(x)\in Z$ olması için gerek ve yeter şart $d(x^2)=0$ olmasıdır. Böylece her $x,y\in R$ için $d(x^2y)\in Z$ olduğuna göre $d(x^2y)=d(x^2)y+x^2d(y)$ ve $d(x^2)=0$ olduğundan $d(x^2y)=x^2d(y)\in Z$ elde edilir. Her $y\in R$ için $d(y)\in Z$ olduğundan her $x,y\in R$ için $d(y)=0$ veya $x^2\in Z$ olur. $d\neq 0$ olduğundan her $x\in R$ için $x^2\in Z$ dir. O halde her $b,x\in R$ için $b^2\in Z$ veya $x^2\in Z$ olduğundan her $x\in R$ için $x^2\in Z$ bulunur. Buradan her $x,y\in R$ için $(x+y)^2\in Z$ dir. Dolayısıyla $(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2\in Z$ ve $x^2,y^2\in Z$ olduğundan her $x,y\in R$ için $xy+yx=xy-yx=[x,y]\in Z$ olur. x yerine xy yazarsak, her $x,y\in R$ için $[xy,y]=x[y,y]+[x,y]y=[x,y]y\in Z$ ve $[x,y]\in Z$ olduğundan, her $x,y\in R$ için $[x,y]=0$ veya $y\in Z$ bulunur. O halde R değişmelidir. $\text{char}R\neq 2$ olsun. (2.2) ifadesini her $a,x\in R$ için

$[a,[a,d(x)]]\in Z$ olarak bulmuştuk. (2.2) ifadesinde a yerine $x\in R$ için $a+d(x)$ yazarsak, $[a+d(x),[a+d(x),d(x)]]=[a,[a+d(x),d(x)]]+[d(x),[a+d(x),d(x)]]=[a,[a,d(x)]+[d(x),d(x)]]$ $+[d(x),[a,d(x)]+[d(x),d(x)]]=[a,[a,d(x)]]+[d(x),[a,d(x)]]\in Z$ olur. Her $a,x\in R$ için $[a,[a,d(x)]]\in Z$ olduğundan,

$$[d(x),[a,d(x)]]\in Z,\ \forall a,x\in R \tag{2.7}$$

ifadesi bulunur. $a\in R$ için $p(a)=[t,a]$ ve $t=d(x)$ olsun. Her $a,x\in R$ için $[d(x),[a,d(x)]]\in Z$ olduğundan $p^2(a)\in Z$ olur. Buradan $p^2(at)=p^2(a)t+2p(a)p(t)+ap^2(t)\in Z$ olur. $p(t)=0$ ve $p^2(t)=0$ olduğundan $p^2(at)=p^2(a)t\in Z$ bulunur. $p^2(a)\in Z$ olduğundan her $a,b\in R$ için $p^2(a)=0$ veya $t\in Z$ olur. Her $a\in R$ için $p^2(a)=0$ ise her $a,b\in R$ için $0=p^2(ab)=p^2(a)b+2p(a)p(b)+ap^2(b)$ olur. $p^2(a)=0$ ve $p^2(b)=0$ olduğundan $2p(a)p(b)=0$ olur. $charR\neq 2$ olduğundan her $a,b\in R$ için $p(a)p(b)=0$ olur. b yerine ba yazarsak, $0=p(a)p(ba)=p(a)p(b)a+p(a)bp(a)$ bulunur. $p(a)p(b)=0$ olduğundan her $a,b\in R$ için $p(a)bp(a)=0$ olur. R asal olduğundan her $a\in R$ için $p(a)=0$ olur. Yani her $a\in R$ için $[t,a]=0$ olduğundan $t\in Z$ olur. O halde $p^2(a)=0$ ise $t\in Z$ bulunur. Yani her $x\in R$ için $d(x)\in Z$ dir. Dolayısıyla,

$$d(xy)=xd(y)+d(x)y\in Z,\ \forall x,y\in R \tag{2.8}$$

ifadesi bulunur. Her $x,y,z\in R$ için $d(xy)d(z)–d(zx)d(y)\in Z$ dir. Buradan $d(x)yd(z)+xd(y)d(z)–zd(x)d(y)–d(z)xd(y)\in Z$ bulunur. Yani her $x,y,z\in R$ için $d(x)yd(z)–zd(x)d(y)\in Z$ ve böylece $d(yz)d(x)\in Z$ dir. O halde $d(yz)d(x)+d(x)yd(z)–zd(x)d(y)\in Z$ ve buradan $d(y)zd(x)+yd(z)d(x)+d(x)yd(z)–zd(x)d(y)\in Z$ olur. Bu ise her $x,y,z\in R$ için $2d(x)d(z)y\in Z$ bulunur. $charR\neq 2$ olduğundan $d(x)d(z)y\in Z$ olur. $d(x)\in Z$ olduğundan her $x,y,z\in R$ için $d(x)=0$ veya $d(z)y\in Z$ olur. $d\neq 0$ olduğundan her $y,z\in R$ için $d(z)y\in Z$ olur. $d(z)\in Z$ olduğundan her $y,z\in R$ için $d(z)=0$ veya $y\in Z$ olur. $d\neq 0$ olduğundan her $y\in R$ için $y\in Z$ olur. O halde R değişmelidir.

Herstein, I. N., 1978

Teorem 2.8: R asal halka, $0\neq d$ türev ve $charR\neq 2$ olmak üzere her $x,y\in R$ için $[d(x),d(y)]=0$ ise R değişmelidir.

İspat: $A=\langle\{d(x)\mid x\in R\}\rangle$ kümesi ile üretilen R nin alt halkası olsun. Her $x,y\in R$ için $[d(x),d(y)]=0$ olduğundan A değişmelidir. $a\in A$, $x\in R$ için $ax\in R$

olduğundan $d(ax)\in A$ olur. Buradan $d(a)x+ad(x)\in A$ olur. $b\in A$ için $0=[b,d(a)x+ad(x)]=[b,d(a)x]+[b,ad(x)]=d(a)[b,x]+[b,d(a)]x+a[b,d(x)]+[b,a]d(x)=d(a)[b,x]$ olur. Çünkü $d(x),b,a,d(a)\in A$ için $[b,d(a)]=[b,d(x)]=[b,a]=0$ dir. O halde her $a,b\in A$ ve her $x\in R$ için Önerme 1.27 den her $a,b\in A$ için $d(a)=0$ veya $b\in Z$ olur. Yani $d(A)=(0)$ veya $A\subset Z$ olur. Buradan $A\not\subset Z$ ise $d(A)=(0)$ olur. Her $x\in R$ için $d(x)\in A$ ise $d(R)\subset A$ olur. Buradan $d^2(R)\subset d(A)=(0)$ olduğundan $d^2(R)=(0)$ olur. Her $x\in R$ için $d^2(x)=0$ olduğundan x yerine xy yazarsak, her $x,y\in R$ için $0=d^2(xy)=d^2(x)+2d(x)d(y)+d^2(y)=2d(x)d(y)$ bulunur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan her $x,y\in R$ için $d(x)d(y)=0$ olur. Her $x\in R$ için $d(x)d(R)=(0)$ olduğundan Lemma 2.2 den her $x\in R$ için $d(x)=0$ veya $d=0$ olur. Yani $d=0$ bulunur. Bu ise $d\neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $A\subset Z$ olur. O halde $d(R)\subset A\subset Z$ olduğundan $d(R)\subset Z$ olur. Önerme 1.30 dan R değişmelidir.

Herstein, I. N., 1979

Teorem 2.9: R asal halka, $0\neq d$ türev ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olmak üzere $a\in R$ için $[a,d(R)]=(0)$ ise $a\in Z$ olur.

İspat: $a\notin Z$ olsun. Her $x\in R$ için $[a,d(x)]=0$ olduğundan x yerine xy yazarsak, her $x,y\in R$ için $0=[a,d(xy)]=[a,d(x)y+xd(y)]=[a,d(x)y]+[a,xd(y)]=d(x)[a,y]+[a,d(x)]y+[a,x]d(y)+x[a,d(y)]=[a,x]d(y)+d(x)[a,y]$ olur. Yani,

$$[a,x]d(y)+d(x)[a,y]=0,\ \forall x,y\in R \tag{5.1}$$

denklemi elde edilir. Bir $y\in R$ için $[a,y]=0$ olsun. Buradan her $x\in R$ için $[a,x]d(y)=0$ olur. Böylece her $x,r\in R$ için, $0=[a,xr]d(y)=x[a,r]d(y)+[a,x]rd(y)=[a,x]rd(y)$ bulunur. Yani her $x\in R$ için, $[a,x]Rd(y)=(0)$ ve R asal olduğundan $[a,x]=0$ veya $d(y)=0$ olur. Bu ise $a\in Z$ veya $d(y)=0$ demektir. $a\notin Z$ olduğundan $d(y)=0$ bulunur. Yani bir $y\in R$ için $[y,a]=0$ ise $d(y)=0$ elde edilir. $C_R(a)=\{y\in R \mid [y,a]=0\}$ kümesini tanımlayalım. Her $x\in R$ için $[a,d(x)]=0$ olduğundan $d(x)\in C_R(a)$ olur. Buradan her $x\in R$ için $[d(x),a]=0$ olduğundan $d(d(x))=0$ ve böylece her $x\in R$ için, $d^2(x)=0$ olduğundan $d^2=0$ elde edilir. Her $x,y\in R$ için, $0=d^2(xy)=d^2(x)+2d(x)d(y)+d^2(y)=2d(x)d(y)$ ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan her $x,y\in R$ için, $d(x)d(y)=0$ bulunur. y yerine yx yazarsak, $0=d(x)d(yx)=d(x)d(y)x+d(x)yd(x)=d(x)yd(x)$ olur. Her $x\in R$ için $d(x)Rd(x)=(0)$ ve R asal olduğundan her $x\in R$ için $d(x)=0$ elde edilir. Yani $d=0$ olur. Bu ise $d\neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $a\in Z$ olur.

III. BÖLÜM

ASAL HALKALARDA LİE VE (σ,τ)-LİE İDEALLER

Herstein, I. N., 1970

Bu makalede, aksi belirtilmedikçe R yarı-asal, 2 torsion free halka, T ve U Lie ideal olarak alınmıştır.

Lemma 3.1: R yarı-asal, 2 torsion free halka ve T, R nin Lie ideali olmak üzere, $[T,T]\subset Z$ ise $T\subset Z$ olur.

İspat: $[T,T]=(0)$ olsun. T Lie ideal olduğundan her $x\in R$ ve her $t\in T$ için $[t,x]\in T$ olur. $[T,T]=(0)$ olduğundan her $x\in R$ ve her $t\in T$ için $[t,[t,x]]=0$ bulunur. R yarı-asal ve 2 torsion free halka olduğundan Önerme 1.28 den her $t\in T$ için $t\in Z$ olur. Yani $T\subset Z$ olur. $[T,T]\neq(0)$ olsun. $\alpha\in[T,T]$ alalım. O halde, $0\neq\alpha\in Z$ olduğundan her $s,t\in T$ için $\alpha=[s,t]\neq 0$ olur. R üzerinde $d(x)=[x,t]$ iç türevi tanımlansın. Her $x\in R$ için $d^2(x)=[[x,t],t]\in[T,T]\subset Z$ olduğundan her $x\in R$ için $d^2(x)\in Z$ bulunur. O halde, her $x\in R$ ve her $s\in T$ için $d^2(sx)\in Z$ olur. Buradan her $x\in R$ ve her $s\in T$ için $d^2(sx)=d^2(s)x+2d(s)d(x)+sd^2(x)\in Z$ olur. Her $x\in R$ için $d^2(x)=\beta$ dersek, $d^2(s)=d(d(s))=d(\alpha)=[\alpha,t]=0$ olduğundan, $d^2(sx)=2\alpha d(x)+\beta s\in Z$ olur. Buradan $(2\alpha d(x)+\beta s)s=s(2\alpha d(x)+\beta s)$ yazılabilir. Buradan $2\alpha d(x)s+\beta s^2=s2\alpha d(x)+s^2\beta$ olur. $\alpha\in Z$ ve $\beta\in Z$ olduğundan $2\alpha d(x)s+\beta s^2=2\alpha sd(x)+\beta s^2$ olur. Her $x\in R$, her $s\in T$ ve $\alpha\in Z$ için $2\alpha(d(x)s-sd(x))=0$ bulunur. Bu ifadede x yerine st yazarsak, $2\alpha(d(st)s-sd(st))=0$ olur. Her $s,t\in T$ için $d(st)=d(s)t+sd(t)=d(s)t=\alpha t$ olduğundan $2\alpha(\alpha ts-s\alpha t)=0$ elde edilir. $\alpha\in Z$ olduğundan $0=2\alpha^2(ts-st)=2\alpha^2[t,s]=2\alpha^2[s,t]=2\alpha^3$ bulunur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan $\alpha^3=0$ olur. $\alpha\in Z$ ve R yarı-asal olduğundan $\alpha=0$ olur. Bu ise $\alpha\neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $[T,T]=(0)$ olur. Dolayısıyla $T\subset Z$ bulunur.

Lemma 3.2: R yarı-asal, 2 torsion free halka ve U, R nin Lie ideali olmak üzere $t\in R$ için $[[U,U],t]=(0)$ ise $[U,t]=(0)$ olur.

İspat: Her $x\in R$ için $d(x)=[x,t]$ şeklinde tanımlansın. $[[U,U],t]=(0)$ olduğundan her $u\in[U,U]$ için $d(u)=[u,t]=0$ olur. $[U,U]$, R'nin Lie ideali olduğu için her $u\in[U,U]$ ve $r\in R$ için $[u,r]\in[U,U]$ olur. O halde her $u\in[U,U]$ ve her $r\in R$ için $d([u,r])=0$ olur. Buradan $0=[d(u),r]+[u,d(r)]=[u,d(r)]$ bulunur. O halde,

$$ud(r)=d(r)u,\ \forall u\in[U,U],\ \forall r\in R \qquad (3.1)$$

eşitliği elde edilir. (3.1) denkleminde r yerine x^2 alırsak, her $x\in R$ ve her $u\in[U,U]$ için $ud(x^2)=d(x^2)u$ olur. Buradan $ud(x)x+uxd(x)=d(x)xu+xd(x)u$ olur. Yani $(ud(x)x-d(x)xu)+(uxd(x)-xd(x)u)=0$ bulunur. (3.1) denkleminden her $x\in R$ ve her $u\in[U,U]$ için $ud(x)=d(x)u$ olduğundan $(d(x)ux-d(x)xu)+(uxd(x)-xud(x))=0$ olur. Buradan $d(x)(ux-xu)+(ux-xu)d(x)=0$ bulunur. Her $x\in R$ ve her $u\in[U,U]$ için $ux-xu\in[U,U]$ olduğundan (3.1) den $(ux-xu)d(x)=d(x)(ux-xu)$ olur. O halde her $x\in R$ ve her $u\in[U,U]$ için $2d(x)(ux-xu)=0$ olur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan,

$$d(x)(ux-xu)=0,\ \forall u\in[U,U],\ \forall x\in R \tag{3.2}$$

denklemi bulunur. (3.2) denkleminde x yerine $v\in[U,U]$ için, $x+v$ yazarsak, $d(x+v)[u(x+v)-(x+v)u]=0$ olur. Buradan $(d(x)+d(v))(ux+uv-xu-vu)=0$ bulunur. $v\in[U,U]$ için $d(v)=0$ dır. Buradan her $x\in R$ ve her $u,v\in[U,U]$ için $d(x)(ux-xu)+d(x)(uv-vu)=0$ olur. (3.2) den $d(x)(ux-xu)=0$ olduğundan,

$$d(x)(uv-vu)=0,\ \forall x\in R,\ \forall u,v\in[U,U] \tag{3.3}$$

denklemi bulunur. $M=\{r\in R|d(x)r=0,\forall x\in R\}$ kümesinin bir ideal olduğunu gösterelim. Her $m\in M$ ve her $r,x\in R$ için $d(x)mr=0$ olduğundan $mr\in M$ olur. Yani M sağ idealdir. Her $m\in M$ ve her $x,r\in R$ için $0=d(xr)m=d(x)rm+xd(r)m=d(x)rm$ olduğundan $rm\in M$ bulunur. Yani M sol idealdir. Her $x\in R$ ve her $u,v\in[U,U]$ için $d(x)(uv-vu)=0$ olduğundan $uv-vu\in M$ olur. Buradan $[[U,U],[U,U]]\subset M$ elde edilir. $\overline{R}=R/M$ nin yarı-asal ve 2 torsion free halka olduğunu gösterelim. $\overline{x}\in R/M$ için $2\overline{x}=\overline{0}$ olsun. Buradan $2(x+M)=0+M$ ise $2x+M=0+M$ olur. Buradan $2x\in M$ ise her $y\in R$ için $d(y)2x=0$ olur. Her $y\in R$ için $2d(y)x=0$ ve R, 2 torsion free olduğundan her $y\in R$ için $d(y)x=0$ olur. Bu ise $x\in M$ demektir. Buradan $x+M=0+M$ olduğundan $\overline{x}=\overline{0}$ bulunur. O halde $\overline{R}$, 2 torsion free halkadır. $\overline{N}$, $\overline{R}$ nin ideali ve $\overline{N}^2=(\overline{0})$ olsun. Örten homomorfizma altında idealin ters görüntüsü ideal olduğundan N, R nin ideali olur. $\overline{N}^2=(\overline{0})$ olduğundan $(N+M)^2=(\overline{0})$ ise $N^2+M=0+M$ olur. Yani $N^2\subset M$ dir. M nin tanımından her $y\in R$ için $d(y)N^2=(0)$ olur. Her $y\in R$ ve her $n\in N$ için $d(y)nd(y)n\in d(y)N^2$ olduğundan $(d(y)N)^2=d(y)Nd(y)N\subset d(y)N^2=(0)$ olur. Yani her $y\in R$ için $(d(y)N)^2=(0)$ olur. R yarı-asal olduğundan her $y\in R$ için $d(y)N=(0)$ olur. Buradan $N\subset M$ olur. O halde $N+M=0+M$ olduğundan $\overline{N}=(\overline{0})$ elde edilir. Dolayısıyla $\overline{R}$ yarı-asaldır. $[[U,U],[U,U]]\subset M$ olduğundan $[[\overline{U},\overline{U}],[\overline{U},\overline{U}]]=(\overline{0})\subset Z$ olur. $\overline{R}$

yarı-asal ve 2 torsion free halka ve $[\overline{U},\overline{U}]$ Lie ideal olduğundan Lemma 3.1 den $[\overline{U},\overline{U}]\subset Z$ olur. Yine $\overline{U}$ Lie ideal olduğundan Lemma 3.1 den $\overline{U}\subset Z$ olur. $\overline{U}$ nun, $\overline{R}$ nin Lie ideali olduğunu gösterelim. $\bar{a},\bar{b}\in\overline{U}$ olsun. Buradan, $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$ ve a+b∈U olduğundan $\overline{a+b}\in\overline{U}$ bulunur. $[\bar{u},\bar{r}]\in[\overline{U},\overline{R}]$ olsun. $[\bar{u},\bar{r}]=\bar{u}\bar{r}-\bar{r}\bar{u}=\overline{ur}-\overline{ru}=\overline{ur-ru}$ ve ur–ru∈U olduğundan $\overline{ur-ru}\in\overline{U}$ olur. O halde $[\overline{U},\overline{R}]\subset\overline{U}$ bulunur. Yani $\overline{U}$, $\overline{R}$ nin Lie idealidir. $[\overline{U},\overline{U}]$ nun, $\overline{R}$ nin Lie ideali olduğunu gösterelim. $[[\bar{u},\bar{v}],\bar{r}]\in[[\overline{U},\overline{U}],\overline{R}]$ olsun. $[[\bar{u},\bar{v}],\bar{r}]=[\bar{u}\bar{v}-\bar{v}\bar{u},\bar{r}]=[\bar{u}\bar{v},\bar{r}]-[\bar{v}\bar{u},\bar{r}]=\bar{u}[\bar{v},\bar{r}]+[\bar{u},\bar{r}]\bar{v}-\bar{v}[\bar{u},\bar{r}]-[\bar{v},\bar{r}]\bar{u}=\bar{u}(\bar{v}\bar{r}-\bar{r}\bar{v})+(\bar{u}\bar{r}-\bar{r}\bar{u})\bar{v}-\bar{v}(\bar{u}\bar{r}-\bar{r}\bar{u})-(\bar{v}\bar{r}-\bar{r}\bar{v})\bar{u}=\bar{u}(\bar{v}\bar{r}-\bar{r}\bar{v})-(\bar{v}\bar{r}-\bar{r}\bar{v})\bar{u}+(\bar{u}\bar{r}-\bar{r}\bar{u})\bar{v}-\bar{v}(\bar{u}\bar{r}-\bar{r}\bar{u})=[\bar{u},\bar{v}\bar{r}-\bar{r}\bar{v}]+[\bar{u}\bar{r}-\bar{r}\bar{u},\bar{v}]=[\bar{u},[\bar{v},\bar{r}]]+[[\bar{u},\bar{r}],\bar{v}]\in[\overline{U},\overline{U}]$ olur. O halde $[\overline{U},\overline{U}]$, $\overline{R}$ nin Lie idealidir. $\overline{U}\subset Z$ olduğundan $[\overline{U},\overline{R}]=(\bar{0})$ yazılabilir. Buradan $\bar{u}\in\overline{U}$ ve $\bar{r}\in\overline{R}$ için $\bar{0}=[\bar{u},\bar{r}]=\bar{u}\bar{r}-\bar{r}\bar{u}=\overline{ur-ru}$ olur. Yani $\overline{ur-ru}=\bar{0}$ ise (ur–ru)+M=0+M olduğundan ur–ru∈M olur. O halde [U,R]⊂M olur. M nin tanımından her y∈R için d(y)[U,R]=(0) bulunur. M_1={x∈R|x[U,R]=(0)} kümesinin bir ideal olduğunu gösterelim. a,b∈M_1 olsun. Her u∈U, her r∈R için (a+b)[u,r]=a[u,r]+b[u,r]=0 olduğundan a+b∈M_1 olur. a∈M_1, r∈R ve u∈U için 0=a[[u,r],r]=a[ur–ru,r]=a[ur,r]-a[ru,r]=au[r,r]+a[u,r]r-ar[u,r]-a[r,r]u=-ar[u,r] olur. Buradan ar[U,R]=(0) olduğundan ar∈M_1 olur. Yine r∈R ve a∈M_1 için ra[U,R]=(0) olduğundan ra∈M_1 olur. O halde M_1 idealdir. Her y∈R için d(y)[U,R]=(0) olduğundan, y∈R yerine u∈U alırsak d(u)[U,R]=(0) olur. O halde her u∈U için d(u)∈M_1 dir. Yine her u∈U ve her t∈R için d(u)=[u,t]∈[U,R] olduğundan d(u)∈r(M_1) bulunur. Yani her u∈U için d(u)∈M_1∩r(M_1) olur. M_1∩r(M_1), R nin nilpotent idealidir. R yarı-asal olduğundan M_1∩r(M_1)=(0) olur. O halde her u∈U için d(u)∈M_1∩r(M_1)=(0) olduğundan her u∈U için d(u)=0 olur. Yani her u∈U ve her t∈R için [u,t]=0 olduğundan [U,t]=(0) elde edilir.

Teorem 3.3: R yarı-asal, 2 torsion free halka ve U, R nin Lie ideali olmak üzere t∈R için [t,[t,U]]=(0) ise [t,U]=(0) olur.

İspat: R üzerinde her x∈R için d(x)=[x,t] iç türevi tanımlansın. Her u∈U için [t,[t,u]]=0 olduğundan her u∈U için d^2(u)=0 olur. Her u,v∈U için 0=d^2([u,v])=

$[d^2(u),v]+2[d(u),d(v)]+[u,d^2(v)]=2[d(u),d(v)]$ olur. R, 2 torsion free halka olduğundan $[d(u),d(v)]=0$ bulunur. Buradan,

$$d(u)d(v)=d(v)d(u),\ \forall u,v\in U \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir. $u,v\in U$ için $uv\in U$ olsun. $0=d^2(uv)=d^2(u)v+2d(u)d(v)+ud^2(v)= 2d(u)d(v)$ olur. R, 2 torsion free olduğundan $d(u)d(v)=0$ bulunur. $v=ur–ru$ alırsak,

$$d(u)d(ur-ru)=0,\ u\in U,\ r\in R \tag{3.5}$$

denklemi bulunur. $C(t)=\{x\in R|xt=tx\}$ kümesini tanımlayalım. (3.5) denkleminden ve $d^2(u)=0$ olduğundan, $d(d(u)(ur–ru))=d^2(u)(ur–ru)+d(u)d(ur–ru)=0$ olur. O halde $[d(u)(ur–ru),t]=0$ olduğundan,

$$d(u)(ur-ru)\in C(t),\ u\in U,\ r\in R \tag{3.6}$$

ifadesi bulunur. r yerine $w\in R$ için tw yazarsak, $d(u)[u,tw]=d(u)t[u,w]+d(u)[u,t]w= d(u)t[u,w]+(d(u))^2w\in C(t)$ olur. Ayrıca $[t,[t,U]]=(0)$ olduğundan her $u\in U$ için $[d(u),t]=0$ olur. Yani $d(u)\in C(t)$ dir. O halde $td(u)[u,w]+(d(u))^2w\in C(t)$ bulunur. (3.6) dan $d(u)[u,w]\in C(t)$ dir. $t\in C(t)$ ve C(t) alt halka olduğundan $td(u)[u,w]\in C(t)$ bulunur. O halde C(t) alt halka olduğundan $u\in U$ ve her $w\in R$ için $(d(u))^2w\in C(t)$ bulunur. Yine $(d(u))^2t=d(u)d(u)t=d(u)td(u)=td(u)d(u)=t(d(u))^2$ olduğundan $(d(u))^2\in C(t)$ olur. $(d(u))^2w\in C(t)$ olduğundan $0=[(d(u))^2w,t]=(d(u))^2[w,t]+[(d(u))^2,t]w= (d(u))^2[w,t]$ olur. Yani her $w\in R$ ve $u\in U$ için $(d(u))^2[w,t]=0$ olur. Her $u\in U$ ve her $w\in R$ için w yerine wu yazarsak, $0=(d(u))^2[wu,t]=(d(u))^2w[u,t]+(d(u))^2[w,t]u$ olur. $(d(u))^2[w,t]=0$ ve $d(u)=[u,t]$ olduğundan, her $u\in U$ ve her $w\in R$ için $(d(u))^2wd(u)=0$ olur. Her iki tarafı sağdan d(u) ile çarparsak, $(d(u))^2R(d(u))^2=(0)$ bulunur. R yarı-asal olduğundan,

$$(d(u))^2=0,\ \forall u\in U \tag{3.7}$$

eşitliği elde edilir. u yerine $v\in U$ için u+v yazarsak, $0=(d(u+v))^2=(d(u)+d(v))^2= (d(u)+d(v))(d(u)+d(v))=(d(u))^2+d(u)d(v)+d(v)d(u)+(d(v))^2$ bulunur. (3.7) den $0= (d(u))^2=(d(v))^2$ dir. (3.4) ten $d(u)d(v)=d(v)d(u)$ olduğundan $0=d(u)d(v)+d(v)d(u)= d(u)d(v)+d(u)d(v)=2d(u)d(v)$ olur. R, 2 torsion free olduğundan,

$$d(u)d(v)=0,\ \forall u,v\in U \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. Yine her $u,v\in U$ için, (3.8) den ve her $u\in U$ için $d^2(u)=0$ olduğundan, $d(ud(v))=d(u)d(v)+ud^2(v)=0$ olur. Yani $ud(v)\in C(t)$ dir. $d(d(u)v)= d^2(u)v+d(u)d(v)=0$ olduğundan $d(u)v\in C(t)$ olur. O halde $z\in U$ için $ud(z)\in C(t)$ olur.

Bu ifadede u yerine her $v,w\in U$ ve her $r\in R$ için $[rd(v),w]$ yazarsak, $[rd(v),w]d(z)\in C(t)$ olur. Buradan $r[d(v),w]d(z)+[r,w]d(v)d(z)\in C(t)$ olur. (3.8) den her $v,z\in U$ için $d(v)d(z)=0$ olduğundan $r[d(v),w]d(z)\in C(t)$ bulunur. Buradan her $r\in R$ ve her $v,w,z\in U$ için $[r[d(v),w]d(z),t]=0$ olur. Yani $[R[d(v),w]d(z),t]=(0)$ olur. Buradan her $x\in R$ için $d(x[d(v),w]d(z))=0$ olduğundan $d(x[d(v),w])d(z)+x[d(v),w]d^2(z)=0$ olur. $d^2(z)=0$ olduğundan $d(x[d(v),w])d(z)=0$ bulunur. Buradan $d(x)[d(v),w]d(z)+xd([d(v),w])d(z)=0$ olur. Ayrıca (3.8) i kullanırsak, $d([d(v),w])=[d^2(v),w]+[d(v),d(w)]=0$ bulunur. O halde her $x\in R$ ve her $v,w,z\in U$ için $d(x)[d(v),w]d(z)=0$ bulunur. Buradan (3.8) i kullanırsak, $0=d(x)d(v)wd(z)-d(x)wd(v)d(z)=d(x)d(v)wd(z)$ bulunur. Yani her $x\in R$ ve her $v,w,z\in U$ için $d(x)d(v)wd(z)=0$ bulunur. Bu ifadede x yerine $y\in R$ için xy yazarsak, $0=d(xy)d(v)wd(z)=d(x)yd(v)wd(z)+xd(y)d(v)wd(z)$ olur. $d(y)d(v)wd(z)=0$ olduğundan her $x,y\in R$ ve her $w,v,z\in U$ için $d(x)yd(v)wd(z)=0$ olur. Yani $d(x)Rd(v)wd(z)=(0)$ olur. Soldan $d(v)w$ ile çarparsak ve $d(x)$ yerine $d(z)$ alırsak, $d(v)wd(z)Rd(v)wd(z)=(0)$ olur. R yarı-asal olduğundan her $v,w,z\in U$ için $d(v)wd(z)=0$ olur. Yani,

$$d(v)Ud(z)=(0),\ \forall z,v\in U \tag{3.9}$$

denklemi bulunur. Her $v\in U$, her $s\in R$ için z yerine $[v,s]$ alırsak, $d(v)Ud([v,s])=(0)$ olur. Yine, her $u,v\in U$, her $r\in R$ için $d(u)[v,r]\in C(t)$ dir. Çünkü $d(d(u)[v,r])=d^2(u)[v,r]+d(u)d([v,r])=0$ olur. r yerine rs yazarsak, $d(u)[v,rs]=d(u)r[v,s]+d(u)[v,r]s\in C(t)$ olur. Buradan $0=d(d(u)r[v,s]+d(u)[v,r]s)=d^2(u)r[v,s]+d(u)d(r)[v,s]+d(u)rd([v,s])+d^2(u)[v,r]s+d(u)d([v,r])s+d(u)[v,r]d(s)$ bulunur. Her $u\in U$ için $d^2(u)=0$ ve $d(u)d([v,r])=0$ olduğundan $d^2(u)r[v,s]=d^2(u)[v,r]s=d(u)d([v,r])s=0$ olur. O halde her $r,s\in R$ ve her $u,v\in U$ için $d(u)d(r)[v,s]+d(u)rd([v,s])+d(u)[v,r]d(s)=0$ bulunur. $r\in R$ yerine $r\in U$ alırsak, (3.9) dan, $d(u)rd([v,s])=0$ olur. Yine (3.8) den $d(u)d(v)=0$ olduğundan $d(u)d(r)[v,s]=0$ bulunur. O halde her $r,u,v\in U$ ve her $s\in R$ için $d(u)[v,r]d(s)=0$ bulunur. Buradan,

$$d(u)[U,U]d(R)=(0) \tag{3.10}$$

denklemi elde edilir. Her $x,y\in R$ ve her $v,k\in U$ için $0=d(u)[v,k]d(xy)=d(u)[v,k]d(x)y+d(u)[v,k]xd(y)$ olur. (3.10) ifadesinde $d(u)[v,k]d(x)=0$ olduğundan her $u,v,k\in U$ ve her $x,y\in R$ için $d(u)[v,k]xd(y)=0$ olur. $y\in R$ yerine $u\in U$ alırsak, $d(u)[v,k]xd(u)=0$ olur. Bu ifadeyi sağdan $[v,k]$ ile çarparsak, $d(u)[v,k]Rd(u)[v,k]=(0)$

olur. R yarı-asal olduğundan her $u,v,k\in U$ için $d(u)[v,k]=0$ bulunur. O halde $d(U)[U,U]=(0)$ bulunur. $M=\{x\in R|x[U,U]=(0)\}$ kümesinin bir ideal olduğunu gösterelim. $a,b\in M$ olsun. $u,v\in U$ için $(a+b)[u,v]=a[u,v]+b[u,v]=0$ olduğundan $a+b\in M$ olur. $a\in M$, $r\in R$ ve $u,v\in U$ için $ra[u,v]=0$ olduğundan $ra\in M$ olur. Yine $0=a[[u,r],v]=a[ur-ru,v]=a[ur,v]-a[ru,v]=au[r,v]+a[u,v]r-ar[u,v]-a[r,v]u=-ar[u,v]+au[r,v]-a[r,v]u=-ar[u,v]+a[u,[r,v]]=-ar[u,v]$ olur. Yani $a\in M$, $r\in R$ ve $u,v\in U$ için $ar[u,v]=0$ olduğundan $ar\in M$ olur. O halde M idealdir. $d(U)[U,U]=(0)$ olduğundan $d(U)\subset M$ olur. O halde $d([U,U])\subset d(U)\subset M$ ve $d([U,U])\subset[U,U]\subset r(M)$ olduğundan $d([U,U])\subset M\cap r(M)=(0)$ yazılabilir. Buradan $d([U,U])=(0)$ bulunur. O halde $[[U,U],t]=(0)$ olur. R yarı-asal ve 2 torsion free halka olduğundan Lemma 3.2 den $[U,t]=(0)$ bulunur.

Bergen, J., Herstein, I.N. ve Kerr, J.W., 1981

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, U Lie ideal ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma 3.4: R asal halka ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olmak üzere $U\not\subset Z$ ve U, R nin Lie ideali ise $[M,R]\subset U$ fakat $[M,R]\not\subset Z$ olacak şekilde R nin bir M ideali vardır.

İspat: $T(U)=\{x\in R|[x,R]\subset U\}$ kümesinin Lie ideal ve alt halka olduğunu gösterelim. $a,b\in T(U)$ için $[a,R]\subset U$, $[b,R]\subset U$ olduğundan $[a+b,R]\subset U$ olur. O halde $a+b\in T(U)$ olur. U Lie ideal olduğundan $[U,R]\subset U$ olur. Yani $U\subset T(U)$ dir. T(U) kümesinin tanımından $[T(U),R]\subset U$ olduğundan $[T(U),R]\subset U\subset T(U)$ olur. Yani $[T(U),R]\subset T(U)$ elde edilir. O halde T(U) Lie idealdir. $a,b\in T(U)$ ve $r\in R$ için $[a,br]+[b,ra]\in U\subset T(U)$ olur. Buradan $[a,br]+[b,ra]=[a,b]r+b[a,r]+r[b,a]+[b,r]a=abr-bar+bar-bra+rba-rab+bra-rba=(ab)r-r(ab)=[ab,r]\in U$ olur. Yani $[ab,R]\subset U$ olduğundan $ab\in T(U)$ bulunur. O halde T(U) bir alt halkadır. T(U) alt halka ve Lie ideal olduğundan Önerme 1.22 den T(U), R nin sıfırdan farklı bir M idealini kapsar veya $T(U)\subset Z$ olur. $T(U)\subset Z$ olsaydı, $U\subset T(U)\subset Z$ olduğundan $U\subset Z$ olurdu. Bu ise $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişirdi. O halde T(U), R'nin sıfırdan farklı bir M idealini kapsar. Yani $M\subset T(U)$ olur. T(U) nun tanımından $[M,R]\subset U$ olur. Yine $[M,R]\subset Z$ olsaydı, her $x,y\in R$ ve $m\in M$ için, $[m,xy]\in Z$ olduğundan $[m,x]y+x[m,y]\in Z$ elde edilir. Buradan $a\in R$ için $0=[[m,x]y+x[m,y],a]=[[m,x]y,a]+[x[m,y],a]=[m,x][y,a]+[[m,x],a]y+$

$x[[m,y],a]+[x,a][m,y]=[m,x][y,a]+[x,a][m,y]$ bulunur. $y=x$ alırsak ve $[m,x]\in Z$ olduğundan $2[m,x][x,a]=0$ olur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan $[m,x][x,a]=0$ olur. Her $m\in M$, her $x\in R$ için $[m,x]\in Z$ olduğundan, her $x,a\in R$ ve $m\in M$ için $[m,x]R[x,a]=0$ elde edilir. R asal olduğundan $[m,x]=0$ veya $x\in Z$ ve böylece her $m\in M$ ve $x\in R$ için $[m,x]=0$ elde edilir. $M\subset Z$ bulunur. Bu ise R halkasının değişmeli olması demektir, $U\not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde $[M,R]\not\subset Z$ dir.

Lemma 3.5: U, R nin Lie ideali ve $U\not\subset Z$ ise $C_R(U)=Z$ olur.

İspatı: $C_R(U)$ nun R nin alt halkası ve Lie ideali olduğunu gösterelim. $a,b\in C_R(U)$ ve $u\in U$ için $[a+b,u]=[a,u]+[b,u]=0$ olduğundan $a+b\in C_R(U)$ olur. Yine $[ab,u]=a[b,u]+[a,u]b=0$ olduğundan $ab\in C_R(U)$ olur. Yani $C_R(U)$ alt halkadır. $a\in C_R(U)$, $r\in R$ ve $u\in U$ için Jacobi eşitsizliğinden $[[a,r],u]+[[u,a],r]+[[r,u],a]=0$ olur. $a\in C_R(U)$ için $[[u,a],r]=[[r,u],a]=0$ olduğundan $a\in C_R(U)$, $r\in R$ ve $u\in U$ için $[[a,r],u]=0$ elde edilir. O halde $a\in C_R(U)$ ve $r\in R$ için $[a,r]\in C_R(U)$ olur. Dolayısıyla $C_R(U)$ Lie idealdir. $a\in Z$ ise $[a,R]=(0)$ olur. Buradan $[a,U]\subset[a,R]$ olduğundan $[a,U]=(0)$ olur. Yani $a\in C_R(U)$ olur. Dolayısıyla $Z\subset C_R(U)$ bulunur. $C_R(U)\subset Z$ olduğunu gösterelim. $C_R(U)\not\subset Z$ olsun. $C_R(U)$ Lie ideal olduğundan Lemma 3.4 den $[M,R]\subset C_R(U)$ ve $[M,R]\not\subset Z$ olacak şekilde M ideali vardır. $C_R(U)$ Lie ideal ve alt halka olduğundan Önerme 1.22 den $M\subset C_R(U)$ veya $C_R(U)\subset Z$ olur. $M\subset C_R(U)$ olsaydı, $[M,U]=(0)$ olur ve Önerme 1.13 den $U\subset Z$ olur. Bu ise $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. Yani $M\not\subset C_R(U)$ olur. Buradan $C_R(U)\subset Z$ olur. O halde $C_R(U)=Z$ olur.

Lemma 3.6: U, R nin Lie ideali olmak üzere $[a,[U,U]]=(0)$ ise $[a,U]=(0)$ olur. O halde $C_R([U,U])=C_R(U)$ olur.

İspat: $C_R([U,U])\subset C_R(U)$ olduğunu gösterelim. $a\in C_R([U,U])$ olsun. $[U,U]\not\subset Z$ ise $[U,U]$ Lie ideal olduğundan Lemma 3.5 den $C_R([U,U])=Z$ olur. Yani $a\in Z$ dir. Buradan $[a,U]\subset[a,R]=(0)$ olduğundan $[a,U]=(0)$ elde edilir. Yani $a\in C_R(U)$ olur. Dolayısıyla $C_R([U,U])\subset C_R(U)$ olur. $[U,U]\subset Z$ olsun. Buradan her $u\in U$ ve her $x\in R$ için $\alpha=[u,[u,x]]\in[U,U]\subset Z$ olur. Yine $[u,[u,ux]]\in[U,U]\subset Z$ olduğundan $[u,[u,ux]]=[u,u[u,x]+[u,u]x]=[u,u[u,x]]=u[u,[u,x]]+[u,u][u,x]=u[u,[u,x]]=u\alpha=\alpha u$ olur. $\alpha\in Z$ ve $\alpha u\in Z$ olduğundan $\alpha=0$ veya her $u\in U$ için $u\in Z$ olur. $\alpha\neq 0$ ise her $u\in U$ için $u\in Z$ olduğundan $[a,u]=0$ olur. Yani $a\in C_R(U)$ olur. O halde $C_R([U,U])\subset C_R(U)$ bulunur.

$\alpha=0$ ise her $u\in U$ ve her $x\in R$ için $[u,[u,x]]=0$ olur. Önerme 1.28 den her $u\in U$ için $u\in Z$ olur. Yani $U\subset Z$ olduğundan $[a,U]=(0)$ olur. Dolayısıyla $a\in C_R(U)$ olur. O halde $C_R([U,U])\subset C_R(U)$ elde edilir. $C_R(U)\subset C_R([U,U])$ olduğunu gösterelim. $a\in C_R(U)$ ve her $u\in U$ için $[a,u]=0$ olur. $[U,U]\subset U$ olduğundan her $u\in[U,U]$ için $[a,u]=0$ olduğundan $[a,[U,U]]=0$ elde edilir. Buradan $a\in C_R([U,U])$ olduğundan $C_R(U)\subset C_R([U,U])$ gösterilmiş olur. O halde $C_R([U,U])=C_R(U)$ elde edilir.

Lemma 3.7: U, R nin Lie ideali ve $U\not\subset Z$ olsun. $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ olur.

İspat: U, R halkasının Lie ideali ve $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 3.4 den $[M,R]\not\subset Z$ ve $[M,R]\subset U$ olacak şekilde M ideali vardır. Her $u\in U$, her $m\in M$ ve her $y\in R$ için, $[mau,y]\in[M,R]\subset U$ ve $aUb=(0)$ olduğundan $a[mau,y]b=0$ yazılır. Buradan $0=a[ma,y]ub+ama[u,y]b=a[ma,y]ub=a(may-yma)ub=amayub-aymaub=amayub$ bulunur. Buradan $amaRub=(0)$ ve R asal olduğundan $ama=0$ veya $ub=0$ olur. $a\neq0$ ise her $m\in M$ için $ama\neq0$ olduğundan $aMa\neq(0)$ olur. Böylece her $u\in U$ için, $ub=0$ olduğundan $Ub=(0)$ olur. Yine her $x\in R$, her $u\in U$ için $[u,x]\in U$ olduğundan $0=[u,x]b=(ux-xu)b=uxb-xub=uxb$ elde edilir. Yani her $u\in U$ için $uRb=(0)$ ve R asal olduğundan her $u\in U$ için $u=0$ veya $b=0$ bulunur. Buradan $U=(0)$ veya $b=0$ olur. $U\neq(0)$ olduğundan $b=0$ elde edilir.

Lemma 3.8: U, R nin Lie ideali ve $0\neq d$ türev olmak üzere $d(U)=(0)$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat: Her $u\in U$, her $x\in R$ için $[u,x]\in U$ ve $d(U)=(0)$ olduğundan $0=d([u,x])=[d(u),x]+[u,d(x)]=[u,d(x)]$ olur. Buradan $[u,d(R)]=(0)$ olduğundan Teorem 2.9 dan her $u\in U$ için $u\in Z$ olur. Yani $U\subset Z$ dir.

Lemma 3.9: U, R nin Lie ideali ve $0\neq d$ türev olmak üzere $d(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat: $U\not\subset Z$ ise Lemma 3.6 den $V=[U,U]\not\subset Z$ olur. $d(U)\subset Z$ olduğundan her $w,u\in U$ için $d([u,w])=[d(u),w]+[u,d(w)]=0$ olur. Yani $d([U,U])=d(V)=(0)$ olur. Lemma 3.8 den $V\subset Z$ olur. Bu ise $V\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $U\subset Z$ olur.

Lemma 3.10: U, R nin Lie ideali, $0\neq d$ türev ve $U\not\subset Z$ olmak üzere $td(U)=(0)$ (veya $d(U)t=(0)$) ise $t=0$ olur.

İspat: Her $u\in U$, $x\in R$ için, $[u,x]u=(ux-xu)u=u(xu)-(xu)u=[u,xu]\in U$ olur. Her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $[u,x]u\in U$ ve $td(U)=(0)$ olduğundan $td([u,x]u)=0$ olur. Buradan $0=td([u,x])u+t[u,x]d(u)=t[u,x]d(u)$ bulunur. Her $v\in U$, $y\in R$ için, x yerine $d(v)y$ yazarsak, $0=t[u,d(v)y]d(u)=td(v)[u,y]d(u)+t[u,d(v)]yd(u)=t[u,d(v)]yd(u)$ bulunur. Böylece $t[u,d(v)]Rd(u)=(0)$ ve R asal olduğundan $t[u,d(v)]=0$ veya $d(u)=0$ olur. $d(U)=0$ ise $U\subset Z$ olacağından Lemma 3.8 den çelişki elde edilir. O halde her $u,v\in U$ için, $t[u,d(v)]=0$ olur. Buradan $0=tud(v)–td(v)u=tud(v)$ bulunur. Buradan $tUd(v)=(0)$ olduğundan Lemma 3.7 den $t=0$ veya $d(v)=0$ bulunur. $d(U)=0$ ise Lemma 3.8 den $U\subset Z$ ve böylece çelişki elde edilir. O halde $t=0$ olur.

Teorem 3.11: U, R nin Lie ideali ve $0\neq d$ türev olmak üzere $d^2(U)=(0)$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat: U, R halkasının Lie ideali ve $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 3.4 den $[M,R]\subset U$ ve $[M,R]\not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının bir M ideali vardır. Her $m\in[M,R]\subset M\cap U$ ve $u\in[U,U]$ için, $w=d(u)\in d([U,U])\subset U$ elemanlarını alalım. $d(w)=d(d(u))=d^2(u)=0$ olur. Her $y\in R$, her $mw\in M$ için $[mw,y]\in[M,R]\subset U$ ve $d^2(U)=(0)$ olduğundan $d^2([mw,y])=0$ olur. Buradan $0=d^2([mw,y])=d^2(m[w,y]+[m,y]w)=d^2(m[w,y])+d^2([m,y]w)=d^2(m)[w,y]+2d(m)d([w,y])+md^2([w,y])+d^2([m,y])w+2d([m,y])d(w)+[m,y]d^2(w)$ bulunur. $m,w\in U$ için $d^2(m)=d^2([w,y])=d^2([m,y])=d(w)=d^2(w)=0$ olduğundan her $m\in[M,R]$, $w\in U$, $y\in R$ için, $2d(m)d([w,y])=0$ elde edilir. $charR\neq 2$ olduğundan $d(m)d([w,y])=0$ olur. Böylece her $u\in[U,U]$ ve $x\in R$ için, $d([M,R])d([d(u),x])=0$ bulunur. $[M,R]$ Lie ideal ve $[M,R]\not\subset Z$ olduğundan Lemma 3.10 dan her $u\in[U,U]$ ve $x\in R$ için, $d([d(u),x])=0$ olur. Buradan $0=[d^2(u),x]+[d(u),d(x)]=[d(u),d(x)]$ olur. Her $u\in[U,U]$ için, $[d(u),d(R)]=(0)$ olduğundan Teorem 2.9 dan $d(u)\in Z$ elde edilir. Yani $d([U,U])\subset Z$ olur. $[U,U]$ Lie ideal olduğundan Lemma 3.9 dan $[U,U]\subset Z$ olur. Lemma 3.6 ten $U\subset Z$ olur. Bu ise $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $U\subset Z$ olur.

Sonuç 3.12: R yarı-asal, $charR\neq 2$ ve U, R nin Lie ideali olmak üzere $[a,[a,U]]=(0)$ ise $[a,U]=(0)$ olur.

Teorem 3.13: U, R nin Lie ideali, $0\neq d$ türev ve $U\not\subset Z$ ise $C_R(d(U))=Z$ olur.

İspat: $C_R(d(U))\subset Z$ olduğunu gösterelim. $C_R(d(U))\not\subset Z$ olsun. $a\notin Z$ olacak şekilde en az bir $a\in C_R(d(U))$ vardır. $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 3.6 dan $[U,U]\not\subset Z$ olur. $a\in C_R(d(U))$ olduğundan her $u\in U$ için, $[a,d(u)]=0$ olur. $d([U,U])\subset U$ olduğundan böylece her $u\in[U,U]$ için, $[a,d^2(u)]=0$ olur. Yine her $u\in U$ için $[a,d(u)]=0$ ve $[U,U]\subset U$ olduğundan her $u\in[U,U]$ için de $[a,d(u)]=0$ olur. Her $u\in[U,U]$ için $0=d([a,d(u)])=[d(a),d(u)]+[a,d^2(u)]=[d(a),d(u)]$ bulunur. Yani $[d(a),d([U,U])]=(0)$ olur. O halde a ile d(a), d([U,U]) nun merkezleştiricisidir. Her $u\in[U,U]$ için $[a,u]\in[U,U]$ olduğundan $d([a,u])\in d([U,U])$ yazılabilir. Buradan $[d(a),u]+[a,d(u)]=[d(a),u]\in d([U,U])$ olur. $[d(a),d([U,U])]=(0)$ olduğundan her $u\in[U,U]$ için, $[d(a),[d(a),u]]=0$ ve böylece $[d(a),[d(a),[U,U]]]=(0)$ bulunur. Sonuç 3.12 uygulanarak $[d(a),[U,U]]=(0)$ elde edilir. Yani $d(a)\in C_R([U,U])$ olur. $[U,U]\not\subset Z$ olduğundan Lemma 3.5 den $C_R([U,U])=Z$ olur. Yani $d(a)\in Z$ dir. O halde $a\in C_R(d(U))$ ise $d(a)\in Z$ dir. Yine her $u\in U$ için $[a^2,d(u)]=a[a,d(u)]+[a,d(u)]a=0$ olduğundan $a^2\in C_R(d(U))$ olur. O halde $d(a^2)\in Z$ olur. Buradan $d(a^2)=ad(a)+d(a)a=ad(a)+ad(a)=2ad(a)\in Z$ ve $charR\neq 2$ olduğu için $ad(a)\in Z$ elde edilir. $d(a)\in Z$ olduğundan $d(a)=0$ veya $a\in Z$ olur. $a\notin Z$ olduğundan her $a\in C_R(d(U))$ için $d(a)=0$ bulunur. $W=\{x\in R \mid d(x)=0\}$ kümesini tanımlayalım. Her $a\in C_R(d(U))$ için $d(a)=0$ olduğundan $a\in W$ olur. Yani $C_R(d(U))\subset W$ olur. Her $a\in C_R(d(U))$ ve her $u\in U$ için $d([a,u])=[d(a),u]+[a,d(u)]=0$ olduğundan her $u\in U$ için $[a,u]\in W$ olur. Yani $[a,U]\subset W$ olur. $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 3.4 den $[M,R]\subset U$ ve $[M,R]\not\subset Z$ olacak şekilde M ideali vardır. $m\in[M,R]\subset U\cap M$, $ma\in M$ ve $a\in C_R(d(U))$ ve $u\in U$ için $[ma,u]\in U$ olur. Buradan $m[a,u]+[m,u]a\in U$ ve $[a,d(U)]=(0)$ olduğundan $[a,d(m[a,u]+[m,u]a)]=0$ olur. $[a,u]\in W$ olduğundan $d([a,u])=0$ bulunur. $a\in W$ olduğundan $d(a)=0$ ve böylece $a\in C_R(d(U))$ ve $m\in U$ için, $0=[a,d(m)]=[a,d([m,u])]$ olur. Bu ifadeleri kullanırsak, $0=[a,d(m)[a,u]+md([a,u])+d([m,u])a+[m,u]d(a)]=[a,d(m)[a,u]+d([m,u])a]=[a,d(m)[a,u]]+[a,d([m,u])a]=d(m)[a,[a,u]]+[a,d(m)][a,u]+[a,d([m,u])]a+d([m,u])[a,a]=d(m)[a,[a,u]]$ bulunur. Yani her $u\in U$ için $d([M,R])[a,[a,u]]=(0)$ elde edilir. $[M,R]\not\subset Z$ ve $[M,R]$ Lie ideal olduğundan Lemma 3.10 dan her $u\in U$ için, $[a,[a,u]]=0$ bulunur. Sonuç 3.12 den her $u\in U$ için $[a,u]=0$ olur. $[a,U]=(0)$ olduğundan $a\in C_R(U)$ elde edilir. $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 3.5 den $C_R(U)=Z$ olur. Yani $a\in Z$ dir. Bu ise $a\notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde $C_R(d(U))\subset Z$ olur.

$a\in Z$ ise her $u\in U$ için $[a,d(u)]=0$ olur. Yani $[a,d(U)]=(0)$ olduğundan $a\in C_R(d(U))$ olur. O halde $Z\subset C_R(d(U))$ olduğundan $C_R(d(U))=Z$ elde edilir.

Teorem 3.14: R asal halka, $charR\neq 2$, U, R nin Lie ideali ve $U\not\subset Z$ olsun. δ ve d, R nin türevleri olmak üzere $\delta d(U)=(0)$ ise $d=0$ veya $\delta=0$ olur.

İspat: $d\neq 0$, $\delta\neq 0$ olsun. $v\in V=[U,U]$, $d(v)\in U$ için $0=\delta\{d[u,d(v)]\}=\delta\{[d(u), d(v)]+[u,d^2(v)]\}=\delta\{[d(u),d(v)]\}+\delta\{[u,d^2(v)]\}=[\delta d(u),d(v)]+[d(u),\delta d(v)]+[\delta(u),d^2(v)] +[u,\delta d^2(v)]=[\delta(u),d^2(v)]$ bulunur. Çünkü $u\in U$, $v\in V=[U,U]\subset U$, $d(v)\in U$ için $\delta d(u)= \delta d(v)=\delta d^2(v)=0$ dır. Her $u\in U$ ve $v\in V$ için, $[\delta(u),d^2(v)]=0$ olduğundan $d^2(v)\in C_R(\delta(U))$ elde edilir. $\delta\neq 0$ ve $U\not\subset Z$ olduğundan Teorem 3.13 den $C_R(\delta(U))=Z$ dır. Yani her $v\in V$ için, $d^2(v)\in Z$ dir. Yine her $v\in V$, $r\in R$ için, $0=\delta\{d([d(v),r])\}= \delta\{[d^2(v),r]+[d(v),d(r)]\}$ ve $d^2(v)\in Z$ olduğundan $\delta\{[d(v),d(r)]\}=0$ bulunur. Buradan $[\delta d(v),d(r)]+[d(v),\delta d(r)]=[d(v),\delta d(r)]=0$ ve böylece her $r\in R$ için, $[d(V),\delta d(r)]=(0)$ olduğundan $\delta d(r)\in C_R(d(V))$ olur. $d\neq 0$ ve $V=[U,U]$ Lie idealdir. $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 3.6 den $[U,U]=V\not\subset Z$ olur. Teorem 3.13 den $C_R(d(V))=Z$ olduğundan her $r\in R$ için $\delta d(r)\in Z$ olur. O halde $\delta d(R)\subset Z$ dir. Buradan her $v\in V$ ve $u\in U$ için, $\delta d(d(v)u)\in Z$ ve böylece $\delta(d^2(v)u+d(v)d(u))=\delta(d^2(v)u)+\delta(d(v)d(u)))=\delta d^2(v)u+d^2(v)\delta(u)+\delta d(v)d(u) +d(v)\delta d(u)\in Z$ olur. $d(v)\in U$, $v\in U$, $u\in U$ için, $\delta d^2(v)=\delta d(v)=\delta d(u)=0$ olduğundan $d^2(v)\delta(u)\in Z$ elde edilir. Buradan $d^2(v)\in Z$ olduğundan, $d^2(v)=0$ veya $\delta(u)\in Z$ olur. Her $u\in U$ için, $\delta(u)\in Z$ ise $\delta(U)\subset Z$ ve $\delta\neq 0$, U Lie ideal olduğundan Lemma 3.9 kullanılarak $U\subset Z$ elde edilir. Bu ise $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde her $v\in V$ için, $d^2(v)=0$ ve böylece $d^2(V)=(0)$ olur. V, Lie ideal ve $d\neq 0$ olduğundan Teorem 3.11 den $V\subset Z$ elde edilir. Bu ise $V\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $d=0$ veya $\delta=0$ bulunur.

Aydın, N. ve Kaya, K., 1992

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, $0\neq U$ ideal, $charR\neq 2$ ve $0\neq d:R\rightarrow R$ (σ,τ)-türev olarak alınmıştır.

Lemma 3.15: U sağ ideal ve $d(U)=(0)$ ise $d=0$ olur.

Lemma 3.16: $0\neq d$ (σ,τ)-türev ve U sağ ideal olmak üzere, $d(U)\subset Z$ ise R değişmeli olur.

Lemma 3.17: $(0)\neq U$ ideal olmak üzere, $a\in R$ için $ad(U)=(0)$(veya $d(U)a=(0)$) ise $a=0$ veya $d=0$ olur.

Lemma 3.18: $d_1:R\rightarrow R$ (σ,τ)-türev ve $d_2:R\rightarrow R$ türev olmak üzere, $d_1d_2(R)=(0)$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olur.

Teorem 3.19: $0\neq d$ (σ,τ)-türev, U ideal olmak üzere, $a\in R$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau}=(0)$ ise $a\in Z$ olur.

Teorem 3.20: $0\neq d$ (σ,τ)-türev ve U ideal olmak üzere, $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau}=(0)$ ise R değişmelidir.

Lemma 3.21: $0\neq d$ (σ,τ)-türev ve U ideal olmak üzere, $a\in R$ için $ad(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a=0$ veya R değişmeli olur.

Lemma 3.22: $0\neq d$ (σ,τ)-türev olmak üzere, $a\in R$ için $[d(R),a]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a\in Z$ olur.

Teorem 3.23: $0\neq d$ (σ,τ)-türev olmak üzere, $[d(R),d(R)]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ise R değişmelidir.

Kaya, K., 1991

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, $0\neq U$ ideal, $0\neq d$ (σ,τ)-türev ve char$R\neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma 3.24: d, (σ,τ)-türev ve $U\neq(0)$ ideal olmak üzere, $a\in R$ için $ad(U)=(0)$ (veya $d(U)a=(0)$) ise $a=0$ veya $d=0$ olur.

Lemma 3.25: d_1 (σ,τ)-türev, d_2 (α,α)-türev, $d_2(U)\subset U$, α R halkasının bir epimorfizması, $d_2\alpha=\alpha d_2$, $d_1\alpha=\alpha d_1$ ve $\alpha(U)\neq(0)$ olmak üzere, $d_1d_2(U)=(0)$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olur.

Sonuç 3.26: $U\neq(0)$ olsun. $a,b\in U$ ve her $x\in U$ için $[a,[b,x]]_{\sigma,\tau}=0$ ise $a\in C_{\sigma,\tau}$ veya $b\in Z$ olur.

Lemma 3.27: $0\neq d$ (σ,τ)-türev ve $(0)\neq U$ ideal olmak üzere, $a\in U$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a\in Z$ olur.

Lemma 3.28: $0\neq d$ (σ,τ)-türev, $(0)\neq U$ ideal ve $d(U)\subset U$ olsun.
$[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R değişmeli olur.

Teorem 3.29: $0\neq d_1$ (σ,τ)-türev, $0\neq d_2$ türev ve $(0)\neq U$ ideal olsun. $d_2(U)\subset U$ ve $d_1d_2(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R değişmeli olur.

Teorem 3.30: U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olmak üzere $[U,U]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. $a\notin C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde $a\in U$ ve $b\notin Z$ olacak biçimde $b\in U$ vardır. $d_a:R\rightarrow R$, $d_a(x)=[a,x]_{\sigma,\tau}$, (σ,τ)-türev ve $d_b:R\rightarrow R$, $d_b(x)=[b,x]$ iç türev olsun. $[U,U]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, her $x\in R$ için $[[a,x]_{\sigma,\tau},b]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan, her $x\in R$ için, $[[a,x]_{\sigma,\tau},b]_{\sigma,\tau}=[a,[x,b]]_{\sigma,\tau}+[[a,b]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. $[a,b]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, $[[a,b]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau}=0$ ve böylece her $x\in R$ için, $[a,[x,b]]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan, her $x\in R$ için $d_ad_b(x)\in C_{\sigma,\tau}$, yani $d_ad_b(R)\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan Teorem 3.29 kullanılarak, R değişmeli elde edilir. O halde $U\subset Z$ olur. Bu ise $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Sonuç 3.31: $(0)\neq M$ ideal olmak üzere, $[M,R]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R değişmeli olur.

İspat: $[M,R]_{\sigma,\tau}\subset M$ olduğundan, M, (σ,τ)-sağ Lie idealdir. $[M,R]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ifadesinde, R yerine M yazarsak, $[M,M]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Teorem 3.30 dan $M\subset Z$ veya $M\subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. $M\subset Z$ ise Önerme 1.13 den R değişmeli olur. $M\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $[M,R]_{\sigma,\tau}=(0)$ olduğundan her $a,b\in M$ ve $r\in R$ için, $0=[ab,r]_{\sigma,\tau}=a[b,r]_{\sigma,\tau}+[a,\tau(r)]b=[a,\tau(r)]b$ bulunur. Her $a\in M$ ve $r\in R$ için, $[a,\tau(r)]M=(0)$ bulunur. M ideal olduğundan, her $a\in M$ ve $r\in R$ için $[a,\tau(r)]=0$ olur. Yani, $[M,R]=(0)$ elde edilir. Buradan $M\subset Z$ olur. Önerme 1.13 den R değişmeli olur.

Sonuç 3.32: Her $x,y,z\in R$ için, $[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau}=0$ ise R değişmeli olur.

İspat: $[[R,R]_{\sigma,\tau},R]_{\sigma,\tau}=(0)$ ise $[R,R]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Sonuç 3.31 den R değişmeli olur.

Teorem 3.33: $0\neq U$, (σ,τ)-sağ Lie ideal ve alt halka ise $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya U, R nin sıfırdan farklı idealini kapsar.

İspat: $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. $[U,U]_{\sigma,\tau}=(0)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise Teorem 3.30 dan $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ise $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olmasıyla çelişir. $[U,U]_{\sigma,\tau}\neq(0)$ dır. U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğu için her $u,v\in U$ ve $y\in R$ için, $[u,\tau^{-1}(v)y]_{\sigma,\tau}\in U$ dir. Buradan, $[u,\tau^{-1}(v)y]_{\sigma,\tau}=v[u,y]_{\sigma,\tau}+[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)\in U$ olur. U alt halka ve $v[u,y]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan her $u,v\in U$ ve $y\in R$ için, $[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)\in U$ yazılır. Yani, $[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}R\subset U$ olur. U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğundan, her $x,y\in R$ ve $u,v\in U$ için, $[[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}x,y]_{\sigma,\tau}\in U$ dir. Buradan, $[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}x\sigma(y)-\tau(y)[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}x\in U$ elde edilir. $[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}R\subset U$ olduğundan, $[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}x\sigma(y)\in U$ olur. O halde, her $x,y\in R$ ve $u,v\in U$ için, $\tau(y)[u,$

$\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}x\in U$ ve böylece $R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}R\subset U$ olur. $R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}R\neq(0)$ ise, U, R'nin sıfırdan farklı idealini kapsar. $R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}R=(0)$ ise $(R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau})^2=(0)$ olur ve R asal olduğundan, $R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve böylece $[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}=(0)$ elde edilir. Buradan, her $u,v\in U$ ve $x\in R$ için, $[[u,x]_{\sigma,\tau},\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Buradan, her $u,v\in U$ ve $x\in R$ için, $0=[[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau}+[u,[x,\tau^{-1}(v)]]_{\sigma,\tau}=[u,[x,\tau^{-1}(v)]]_{\sigma,\tau}$ olur. $d_u:R\rightarrow R$, $d_u(x)=[u,x]_{\sigma,\tau}$ (σ,τ)-türev ve $d_{\tau^{-1}(v)}:R\rightarrow R$, $d_{\tau^{-1}(v)}=[\tau^{-1}(v),x]$ iç türevleri tanımlanırsa her $x\in R$ için, $d_u\, d_{\tau^{-1}(v)}(x)=0$ olur. Yani, $d_u\, d_{\tau^{-1}(v)}(R)=(0)$ elde edilir. $d_{\tau^{-1}(v)}(R)\subset R$ olduğundan, Lemma 3.25 den, $d_u=0$ veya $d_{\tau^{-1}(v)}=0$ bulunur. Buradan her $u,v\in U$ için $u\in C_{\sigma,\tau}$ veya $\tau^{-1}(v)\in Z$ ve böylece $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya $U\subset Z$ elde edilir. Bu ise $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde, $R[U,\tau^{-1}(U)]R\neq(0)$ olur.

Aydın, N. ve Kandarmar, H., 1994

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, $charR\neq2$ ve $\sigma,\tau:R\rightarrow R$ iki otomorfizm olarak alınmıştır.

Lemma 3.34: U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olmak üzere $a\in R$ için $[U,a]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: $a\notin Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. $u\notin C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde $u\in U$ vardır. $[U,a]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $x\in R$ için $[[u,a]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau}=0\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan $[[u,a]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau}=[u,[a,x]]_{\sigma,\tau}+[[u,x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ ve $[[u,x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[u,[a,x]]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. R üzerinde her $x\in R$ için $d_u(x)=[u,x]_{\sigma,\tau}(\sigma,\tau)$ iç türev ve $d_a(x)=[a,x]$ iç türevi tanımlansın. $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d_u\neq0$ ve $a\notin Z$ olduğundan $d_a\neq0$ olur. Yine $d_a(R)\subset R$ dir. Her $x\in R$ için, $[u,[a,x]]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d_ud_a(R)\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Teorem 3.29 dan R değişmeli olur. Yani $a\in Z$ olur. Bu ise $a\notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Lemma 3.35: $a\in R$ ve $aU=(0)$ (veya $Ua=(0)$) olsun.

(i) U, (σ,τ)-sol Lie ideal ise $a=0$ veya $U\subset Z$

(ii) U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ise $a=0$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat:

(i) U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x,y\in R$, $u\in U$ için, $a[xy,u]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Buradan $0=ax[y,\sigma(u)]+a[x,u]_{\sigma,\tau}y=ax[y,\sigma(u)]$ bulunur. $aR[y,\sigma(u)]=(0)$ ve R asal olduğundan her $y\in R$ ve $u\in U$ için, $a=0$ veya $[y,\sigma(u)]=0$ ve böylece $a=0$ veya $U\subset Z$ bulunur. Benzer biçimde U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için, $[xy,u]_{\sigma,\tau}a=0$ yazılır. Buradan $0=x[y,u]_{\sigma,\tau}a+[x,\tau(u)]ya=[x,\tau(u)]ya$ bulunur. $[x,\tau(u)]Ra=(0)$ ve R asal olduğundan her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $[x,\tau(u)]=0$ veya $a=0$ bulunur. O halde $U\subset Z$ veya $a=0$ elde edilir.

(ii) U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğundan her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için, $a[u,xy]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Buradan $a\tau(x)[u,y]_{\sigma,\tau}+a[u,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y)=a\tau(x)[u,y]_{\sigma,\tau}$ bulunur. $aR[u,y]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve R asal olduğundan $a=0$ veya $[u,y]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Yani $a=0$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Benzer biçimde U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğundan her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için $[u,xy]_{\sigma,\tau}a=0$ olur. $0=\tau(x)[u,y]_{\sigma,\tau}a+[u,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y)a=[u,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y)a$ elde edilir. Buradan $[u,x]_{\sigma,\tau}Ra=(0)$ ve R asal olduğundan her $x\in R$ için $[u,x]_{\sigma,\tau}=0$ veya $a=0$ olur. Yani $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya $a=0$ elde edilir.

Teorem 3.36: U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olmak üzere $a\in R$ için $[U,a]=(0)$ ise $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: $[U,a]=(0)$ olduğundan her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $[[u,x]_{\sigma,\tau},a]=0$ olur. Her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $0=[u\sigma(x)-\tau(x)u,a]=u\sigma(x)a-\tau(x)ua-au\sigma(x)+a\tau(x)u=u\sigma(x)a-\tau(x)au-ua\sigma(x)$ $+a\tau(x)u=u(\sigma(x)a-a\sigma(x))+(a\tau(x)-\tau(x)a)u=u[\sigma(x),a]+[a,\tau(x)]u$ bulunur. Her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $u[\sigma(x),a]=-[a,\tau(x)]u$ olduğundan,

$$u[\sigma(x),a]=[\tau(x),a]u,\ \forall u\in U,\ \forall x\in R \tag{2.1}$$

elde edilir. (2.1) de x yerine xy yazılırsa, $u[\sigma(xy),a]=[\tau(xy),a]u$ olur. Böylece $u[\sigma(x)\sigma(y),a]=[\tau(x)\tau(y),a]u$ bulunur. Yani $0=u[\sigma(x)\sigma(y),a]-[\tau(x)\tau(y),a]u=u\sigma(x)$ $[\sigma(y),a]+u[\sigma(x),a]\sigma(y)-\tau(x)[\tau(y),a]u-[\tau(x),a]\tau(y)u$ elde edilir. (2.1) den $u\sigma(x)[\sigma(y),a]$ $+[\tau(x),a]u\sigma(y)-\tau(x)u[\sigma(y),a]-[\tau(x),a]\tau(y)u=0$ elde edilir. $(u\sigma(x)-\tau(x)u)[\sigma(y),a]+[\tau(x),$ $a](u\sigma(y)-\tau(y)u)=0$ olduğundan,

$$[u,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y),a]+[\tau(x),a][u,y]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall u\in U,\ \forall x\in R \tag{2.2}$$

eşitliği bulunur. (2.2) de y yerine $\sigma^{-1}(a)$ yazarsak, $[u,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(\sigma^{-1}(a)),a]+[\tau(x),a]$ $[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Her $u\in U$ ve $x\in R$ için, $[\tau(x),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$ bulunur. Bu ifadede x yerine xy yazarsak, $0=[\tau(xy),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=[\tau(x)\tau(y),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=\tau(x)[\tau(y),a]$ $[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}+[\tau(x),a]\tau(y)[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$ bulunur. $[\tau(y),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan, $[\tau(x),a]\tau(y)[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$ elde edilir. R asal olduğundan her $x\in R$ için $[\tau(x),a]=0$ veya her $u\in U$ için $[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Buradan $a\in Z$ veya $[U,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=(0)$ elde edilir. $[U,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=(0)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise Lemma 3.34 den $\sigma^{-1}(a)\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ ve böylece $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Sonuç 3.37: U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olmak üzere U değişmeli ise $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: U değişmeli olduğundan $[U,U]=(0)$ olur. Her $u\in U$ için $[U,u]=(0)$ olduğundan Teorem 3.36 dan her $u\in U$ için $u\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Lemma 3.38: R bir halka, $(0)\neq U$, (σ,τ)-sol Lie ideal, $T(U)=\{a\in R \mid [R,a]_{\sigma,\tau}\subset U\}$ olmak üzere, $R[T(U), \sigma(T(U))]\subset T(U)$ ve $[T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U)$ dir.

İspat: $T(U)=\{a\in R|[R,a]_{\sigma,\tau}\subset U\}$ kümesinin alt halka ve (σ,τ)-sol Lie ideal olduğunu gösterelim. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ olur. Yani $U\subset T(U)$ olur. $a,b\in T(U)$ ve her $x\in R$ için $[x,a-b]_{\sigma,\tau}=[x,a]_{\sigma,\tau}-[x,b]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan $a-b\in T(U)$ olur. $a,b\in T(U)$ ve her $x\in R$ için $[x,ab]_{\sigma,\tau}=[x\sigma(a),b]_{\sigma,\tau}+[\tau(b)x,a]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan $ab\in T(U)$ olur. Yani T(U) alt halkadır. T(U) nun tanımından $[R,T(U)]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $U\subset T(U)$ olduğundan $[R,T(U)]_{\sigma,\tau}\subset T(U)$ bulunur. Yani T(U) bir (σ,τ)-sol Lie idealdir. T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olduğu için her $u,v\in T(U)$ ve $x\in R$ için, $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}]\in T(U)$ yazılır. Buradan $[u,x\sigma(v)-\tau(v)x]=ux\sigma(v)-u\tau(v)x-x\sigma(v)u+\tau(v)xu\in T(U)$ bulunur. Öte yandan T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x\in R$, $u,v\in T(U)$ için, $[xu,v]_{\sigma,\tau}\in T(U)$ olur. O halde $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}]\in T(U)$ ve $[xu,v]_{\sigma,\tau}\in T(U)$ olduğundan $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}]+[xu,v]_{\sigma,\tau}\in T(U)$ elde edilir. Bunu açık yazacak olursak, $ux\sigma(v)-u\tau(v)x-x\sigma(v)u+\tau(v)xu+xu\sigma(v)-\tau(v)xu\in T(U)$ bulunur. Böylece $ux\sigma(v)-u\tau(v)x-x\sigma(v)u+xu\sigma(v)=u(x\sigma(v)-\tau(v)x)-x(\sigma(v)u-u\sigma(v))=u[x,v]_{\sigma,\tau}-x[\sigma(v),u]\in T(U)$ elde edilir. $u[x,v]_{\sigma,\tau}\in T(U)$ olduğundan, $-x[\sigma(v),u]\in T(U)$ olur. Yani $R[T(U),\sigma(T(U))]\subset T(U)$ bulunur. Yine T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $u,v\in T(U)$ ve $x\in R$ için $[ux,v]_{\sigma,\tau}\in T(U)$ ve böylece $u[x,v]_{\sigma,\tau}+[u,\tau(v)]x\in T(U)$ elde edilir. $u[x,v]_{\sigma,\tau}\in T(U)$ olduğu için, $[u,\tau(v)]x\in T(U)$ ve buradan $[T(U),\tau(T(U))]R\subset T(U)$ elde edilir.

Lemma 3.39: $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olmak üzere $a,b\in R$ için $aT(U)b=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ olur.

İspat: $T(U)$, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğu için her $u\in U$, $v\in T(U)$ ve $y\in R$ için, $[uby,v]_{\sigma,\tau}\in T(U)$ olur. $aT(U)b=(0)$ olduğundan $a[uby,v]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. Buradan $0=aub[y,v]_{\sigma,\tau}b+a[ub,\tau(v)]yb=a[ub,\tau(v)]yb=aub\tau(v)yb-a\tau(v)ubyb=-a\tau(v)ubyb$ bulunur. Yani her $v\in T(U)$, $u\in U$ için, $a\tau(v)ubRb=(0)$ ve R asal olduğundan $a\tau(v)ub=0$ veya $b=0$ bulunur. $a\tau(T(U))Ub=(0)$ veya $b=0$ elde edilir. $a\tau(T(U))Ub=(0)$ ise her $x\in R$, $u\in U$ ve $v\in T(U)$ için, $a\tau(v)[u,x]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. Bu ifadeden $a\tau(v)u\sigma(x)b-a\tau(v)\tau(x)ub=0$ bulunur. x yerine $\sigma^{-1}(bx)$ yazarsak, $0=a\tau(v)u\sigma(\sigma^{-1}(bx))b-a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(bx))ub=a\tau(v)ubxb-a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub=-a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub$ bulunur. $a\tau(T(U))Ub=(0)$ olduğundan, her $v\in T(U)$ ve $u\in U$ için, $a\tau(v)ub=0$ ve her $x\in R$ için, $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub=0$ olduğundan, $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(R))ub=(0)$ yazılabilir. σ ve τ örten olduğundan, $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))Rub=(0)$ elde edilir. R asal olduğundan, $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))=0$ veya $Ub=(0)$ buradan $Ub=(0)$ ise $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lemma 3.35 den $b=0$ elde edilir. Her $v\in T(U)$ için, $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))=0$ olsun. Yani,

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))=0,\ \forall v\in T(U) \qquad (2.3)$$

olsun. Lemma 3.38 den U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan $[U,\tau(T(U))]R\subset T(U)$ olur. Buradan $[R,[U,\tau(T(U))]R]_{\sigma,\tau}\subset[R,T(U)]_{\sigma,\tau}\subset U\subset T(U)$ olduğundan her $x,y\in R$, $u\in U$ ve $v\in T(U)$ için, $[\tau(x),[u,\tau(v)]y]_{\sigma,\tau}\in[R,[U,\tau(T(U)]R]_{\sigma,\tau}\subset U\subset T(U)$ ve böylece $\tau(x)\sigma([u,\tau(v)]y)-\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x)\in T(U)$ elde edilir. Bu ifadeyi soldan a, sağdan b ile çarparsak, $aT(U)b=(0)$ olduğundan, $a\tau(x)\sigma([u,\tau(v)]y)b-a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x)b=0$ elde edilir. Bu ifadede x yerine $x\sigma^{-1}(b)z$ yazarsak, $0=a\tau(x\sigma^{-1}(b)z)\sigma([u,\tau(v)]y)b-a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x\sigma^{-1}(b)z)b=a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u,\tau(v)]y)b-a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)b=a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u,\tau(v)]y)b-a\tau([u,\tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)b$ bulunur. $[u,\tau(v)]yx\in[U,\tau(T(U))]R\subset T(U)$ ve (2.3) eşitliği kullanılarak $a\tau([u,\tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b))\in a\tau(T(U))\tau(\sigma^{-1}(b))=(0)$ olur. Yani her $x,y,z\in R$, $u\in U$ ve $v\in T(U)$ için, $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u,\tau(v)])\sigma(y)b=0$ elde edilir. σ örten olduğundan, $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u,\tau(v)])Rb=(0)$ ve R asal olduğundan $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u,\tau(v)])=0$ veya $b=0$ ve buradan $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))R\sigma([u,\tau(v)])=(0)$ elde edilir. R asal olduğundan $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))=0$ veya $\sigma([u,\tau(v)])=0$ veya $b=0$ olur. τ örten olduğundan $aR\tau(\sigma^{-1}(b))=(0)$ veya

$\sigma([u,\tau(v)])=0$ veya $b=0$ bulunur. Buradan $a=0$ veya $\tau(\sigma^{-1}(b))=0$ veya $\sigma([u,\tau(v)])=0$ veya $b=0$ elde edilir. $\tau(\sigma^{-1}(b))=0$ ise $b=0$ olur. $\sigma([u,\tau(v)])=0$ ise her $u\in U$ için $[u,\tau(v)]=0$ ve böylece $[U,\tau(v)]=(0)$ olur. Teorem 3.36 dan $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Bu ise $U\not\subset Z$, $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olmasıyla çelişir. O halde $[U,\tau(U)]\neq(0)$ dir. Sonuç olarak $a=0$ veya $b=0$ bulunur.

Teorem 3.40: U, (σ,τ)-Lie ideal, $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset U$ fakat $[R,M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde R nin bir $(0)\neq M$ ideali vardır.

İspat: U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan Lemma 3.38 den $R[T(U),\sigma(T(U))]\subset T(U)$ ve $[T(U),\tau(T(U))]R\subset T(U)$ olur. Her $y\in R$, $w,z\in T(U)$ için, $y[w,\sigma(z)]\in R[T(U),\sigma(T(U))]\subset T(U)$ ve her $x\in R$, $u,v\in T(U)$ için, $[u,\tau(v)]x\in[T(U),\tau(T(U))]R\subset T(U)$ olduğundan $y[w,\sigma(z)][u,\tau(v)]x\in T(U)$ ve böylece $R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]R\subset T(U)$ elde edilir. $R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]R=(0)$ olsun. Buradan $(R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))])^2=(0)$ ve R asal halka olduğundan $[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]=(0)$ olur. Yani,

$$[u,\sigma(v)][w,\tau(z)]=0,\ \forall u,v,w,z\in T(U) \qquad (2.4)$$

elde edilir. $t\in T(U)$ için w yerine wt yazarsak, $0=[u,\sigma(v)][wt,\tau(z)]=[u,\sigma(v)]w[t,\tau(z)]+[u,\sigma(v)][w,\tau(z)]t$ elde edilir. (2.4) den $[u,\sigma(v)][w,\tau(z)]=0$ olduğundan, $[u,\sigma(v)]T(U)[t,\tau(z)]=(0)$ bulunur. Lemma 3.39 dan $[T(U),\sigma(T(U))]=(0)$ veya $[T(U),\tau(T(U))]=(0)$ elde edilir. $U\subset T(U)$ olduğundan $[U,\sigma(U)]=(0)$ veya $[U,\tau(U)]=(0)$ yazabiliriz. $a,b\in U$ için $[U,\sigma(a)]=(0)$ veya $[U,\tau(b)]=(0)$ olduğundan Lemma 3.34 den $\sigma(a)\in Z$ veya $\tau(b)\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani $a\in Z$ veya $b\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Dolayısıyla $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Bu ise $U\not\subset Z$, $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olmasıyla çelişir. O halde $M=R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]R\neq(0)$ olur. Yani $(0)\neq M\subset T(U)$ olur. T(U) nun tanımından $[R,T(U)]_{\sigma,\tau}\subset U$ olur. $M\subset T(U)$ olduğundan $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset [R,T(U)]_{\sigma,\tau}\subset U$ olur. O halde $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset U$ bulunur. $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olsaydı, R, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan Lemma 3.34 den $M\subset Z$ veya $R\subset C_{\sigma,\tau}$ olurdu. $M\subset Z$ ise Önerme 1.13 den R değişmelidir. R değişmeli ise $U\subset Z$ dir. $R\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Bu ise $U\not\subset Z$ veya $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olmasıyla çelişir. O halde $[R,M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Sonuç 3.41: $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve $a,b\in R$ için, $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ olur.

İspat: $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Teorem 3.40 dan R nin, $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde $(0)\neq M$ ideali vardır. $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset U$ olduğundan her $x\in R$, $u\in U$ ve $m\in M$ için, $[x,\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. $aUb=(0)$ olduğundan $a[x,\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. Buradan $0=ax\sigma(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m)b-a\tau(\tau^{-1}(u)$ $\tau^{-1}(b)m)xb=ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b-a\tau(\tau^{-1}(u))\tau(\tau^{-1}(b))\tau(m)xb=ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))$ $\sigma(m)b-aub\tau(m)xb=ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b$ bulunur. $aR\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b=$ (0) elde edilir. Buradan R asal olduğundan, $a=0$ veya $\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b=0$ bulunur. $\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b=0$ ise $0=\sigma(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b))\sigma(m)b=\sigma(\tau^{-1}(ub))\sigma(m)b=$ $\sigma(\tau^{-1}(ub)m\sigma^{-1}(b))$ ve σ, 1-1 olduğundan, $\tau^{-1}(ub)m\sigma^{-1}(b)=0$ ve böylece $\tau^{-1}(ub)M\sigma^{-1}(b)$ $=(0)$ olur. M ideal ve R asal olduğundan, $\tau^{-1}(ub)=0$ veya $\sigma^{-1}(b)=0$ olur. τ ve σ, 1-1 olduğundan her $u\in U$ için $ub=0$ veya $b=0$ olur. Yani $Ub=(0)$ veya $b=0$ olur. $Ub=(0)$ ise $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lemma 3.35 den $b=0$ olur.

Aydın, N., 1996

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma 3.42: U, (σ,τ)-Lie ideal olmak üzere, $U\subset Z$ ise her $u\in U$ için $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R değişmeli olur.

İspat: U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $x\in R$, her $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. $U\subset Z$ olduğundan, her $u\in U$ için $\tau(u),\sigma(u),[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ olur. Her $x\in R$, her $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}=x\sigma(u)-\tau(u)x=x\sigma(u)-x\tau(u)=x(\sigma(u)-\tau(u))\in Z$ olur. $(\sigma(u)-\tau(u))\in Z$ olduğundan, $\sigma(u)-\tau(u)=0$ veya $x\in Z$ elde edilir. Yani her $u\in U$ için $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R değişmeli olur.

Teorem 3.43: R asal halka ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise, her $u\in U$ için $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R değişmeli olur.

İspat: $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, her $x\in R$, her $u\in U$ için $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan her $x\in R$, her $u\in U$ için $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u),\tau(u)]x=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. $[x,u]_{\sigma,\tau}\in[R,U]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, Önerme 1.26 dan $[x,u]_{\sigma,\tau}=0$ veya $\tau(u)\in Z$ olur. Yani, her $x\in R$, her $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}=0$ veya $u\in Z$ elde edilir.

$L=\{u\in U | u\in Z\}$ ve $K=\{u\in U | [R,u]_{\sigma,\tau}=(0)\}$ kümelerini tanımlayalım. $U=K\cup L$ dir. Brauer Trick'ten $U=L$ veya $U=K$ olur. $U=L$ ise her $u\in U$ için $u\in Z$ olduğundan, $U\subset Z$ bulunur. Lemma 3.42 den her $u\in U$ için $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R değişmeli olur. $U=K$ ise her $u\in U$ için $[R,u]_{\sigma,\tau}=(0)$ olur. Böylece her $x,y\in R$ için, $0=[xy,u]_{\sigma,\tau}= x[y,\sigma(u)]+[x,u]_{\sigma,\tau}y=x[y,\sigma(u)]$ bulunur. Her $y\in R$, her $u\in U$ için $R[y,\sigma(u)]=(0)$ ise $[y,\sigma(u)]=0$ olur. Her $u\in U$ için $u\in Z$ olduğundan, $U\subset Z$ elde edilir. Lemma 3.42 den her $u\in U$ için $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R değişmeli olur.

Uyarı 3.44: U, (σ,τ) Lie ideal ve $a\in R$ için $[a,U]=(0)$ ise $a\in Z$ veya $U\subset Z$ olduğu gösterildi. Fakat bu durum U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğunda sağlanmayabilir. Örneğin; $R=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x,y,z,t\in I\right\}$ ve $U=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x,y\in I\right\}$ olsun. Buna göre, $\tau:R\to R,\ x\to bxb, b=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir otomorfizmdir. Ayrıca U, $U\not\subset Z$ olacak biçimde $(1,\tau)$-sol Lie idealdir. $a=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\notin Z$ için $[a,U]=(0)$ bulunur.

Lemma 3.45: R asal halka ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $a\in R$ için $[a,U]=(0)$ ise her $u\in U$ için $\tau(u)+\sigma(u)\in Z$ veya $a\in Z$ olur.

İspat: $a\notin Z$ olsun. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğu için, her $x\in R$, her $u\in U$ için $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Buradan $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u),\tau(u)]x=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ elde edilir. $[a,U]=(0)$ olduğundan, $0=[\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau},a]=\tau(u)[[x,u]_{\sigma,\tau},a]+[\tau(u),a][x,u]_{\sigma,\tau}$ bulunur. Burada her $x\in R$, her $u\in U$ için $[[x,u]_{\sigma,\tau},a]=0$ olduğundan,

$$[\tau(u),a][x,u]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall x\in R,\ \forall u\in U \qquad (6.1)$$

elde edilir. $y\in R$ için, x yerine xy yazarsak $0=[\tau(u),a][xy,u]_{\sigma,\tau}=[\tau(u),a](x[y,\sigma(u)]+ [x,u]_{\sigma,\tau}y)=[\tau(u),a]x[y,\sigma(u)]+[\tau(u),a][x,u]_{\sigma,\tau}y$ bulunur. (6.1) den, $[\tau(u),a][x,u]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan, her $x,y\in R$, her $u\in U$ için $[\tau(u),a]x[y,\sigma(u)]=0$ bulunur. Her $u\in U$, her $y\in R$ için $[\tau(u),a]R[y,\sigma(u)]=(0)$ ve R asal olduğundan $[\tau(u),a]=0$ veya $[y,\sigma(u)]=0$ bulunur. Yani $[\tau(u),a]=0$ veya her $u\in U$ için $u\in Z$ bulunur. Dolayısıyla her $u\in U$ için

$$[\tau(u),a]=0,\ \forall u\in U \qquad (6.2)$$

elde edilir. Diğer yandan, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $[U,a]=(0)$ olduğundan $[[x,u]_{\sigma,\tau},a]=0$ olur. Her $x\in R$, her $u\in U$ için $0=[x,u]_{\sigma,\tau}a-a[x,u]_{\sigma,\tau}=(x\sigma(u)-\tau(u)x)a-$

$a(x\sigma(u)-\tau(u)x)=x\sigma(u)a-\tau(u)xa-ax\sigma(u)+a\tau(u)x$ bulunur. (6.2) den $a\tau(u)=\tau(u)a$ olduğundan, $\tau(u)ax-\tau(u)xa=ax\sigma(u)-x\sigma(u)a$ olması kullanılarak, her $x\in R$, her $u\in U$ için, $\tau(u)(ax-xa)=ax\sigma(u)-x\sigma(u)a$ olduğundan,

$$\tau(u)[x,a]=x\sigma(u)a-ax\sigma(u), \forall x\in R,\ \forall u\in U \qquad (6.3)$$

bulunur. Her $v\in U$ için, x yerine v yazarsak, $\tau(u)[v,a]=v\sigma(u)a-av\sigma(u)$ olur. $v\in U$ için $[v,a]=0$ olduğundan, her $u,v\in U$ için $0=v\sigma(u)a-av\sigma(u)=[v\sigma(u),a]=v[\sigma(u),a]+[v,a]\sigma(u)=v[\sigma(u),a]$ olduğu görülür. Her $u\in U$ için $U[\sigma(u),a]=(0)$ olduğundan, Lemma 3.35 den, $[\sigma(u),a]=0$ veya $U\subset Z$ bulunur. Yani, her $u\in U$ için $[\sigma(u),a]=0$ elde edilir. (6.3) eşitliğinden $x\sigma(u)a-ax\sigma(u)-\tau(u)[x,a]=0$ elde edilir. $[\sigma(u),a]=0$ olduğundan, $0=xa\sigma(u)-ax\sigma(u)-\tau(u)[x,a]=xa\sigma(u)-ax\sigma(u)+\tau(u)[a,x]=(xa-ax)\sigma(u)+\tau(u)[a,x]$ bulunur. Yani,

$$[x,a]\sigma(u)+\tau(u)[a,x]=0,\ \forall x\in R,\ \forall u\in U \qquad (6.4)$$

elde edilir. $y\in R$ için, x yerine xy yazarsak, $0=[xy,a]\sigma(u)+\tau(u)[a,xy]=x[y,a]\sigma(u)+[x,a]y\sigma(u)+\tau(u)x[a,y]+\tau(u)[a,x]y$ bulunur. (6.4) den $[y,a]\sigma(u)=-\tau(u)[a,y]$ ve $\tau(u)[a,x]=-[x,a]\sigma(u)$ olduğundan, $0=-x\tau(u)[a,y]+[x,a]y\sigma(u)+\tau(u)x[a,y]-[x,a]\sigma(u)y=(\tau(u)x-x\tau(u))[a,y]+[x,a](y\sigma(u)-\sigma(u)y)=[\tau(u),x][a,y]+[x,a][y\sigma(u)]$ bulunur. Buradan her $x,y\in R$, her $u\in U$ için $[\tau(u),x][a,y]=-[x,a][y,\tau(u)]$ olduğundan,

$$[x,\tau(u)][y,a]=[a,x][y,\sigma(u)],\ \forall x,y\in R,\ \forall u\in U \qquad (6.5)$$

elde edilir. R üzerinde, her $x,y\in R$ ve her $u\in U$ için $d(x)=[x,\tau(u)]$,$g(y)=[y,a]$, $h(x)=[a,x]$ ve $f(y)=[y,\sigma(u)]$ türevlerini tanımlayalım. Her $x,y\in R$ ve her $u\in U$ için $[x,\tau(u)][y,a]=[a,x][y,\sigma(u)]$ olduğundan, $d(x)g(y)=h(x)f(y)$ olur. $d=f=0$ ise, her $u\in U$ için $u\in Z$ olur ve her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ bulunur. $d\neq 0$ ve $f\neq 0$ olsun. Önerme 1.25 den, her $x\in R$ için $g(x)=\lambda f(x)$ ve $h(x)=\lambda d(x)$ olacak biçimde $\lambda\in C$ vardır. $g(x)=\lambda f(x)=[x,a]=\lambda[x,\sigma(u)]$ ve $h(x)=\lambda d(x)=[a,x]=\lambda[x,\tau(u)]$ bulunur. Yani, her $x\in R$ için $\lambda[x,\sigma(u)]=[x,a]=\lambda[\tau(u),x]$ olacak biçimde $\lambda\in C$ vardır. Her $x\in R$, her $u\in U$ için $0=\lambda[x,\sigma(u)]-\lambda[\tau(u),x]=\lambda([x,\sigma(u)]-[\tau(u),x])=\lambda(x\sigma(u)-\sigma(u)x-\tau(u)x+x\tau(u))=\lambda(x\sigma(u)+x\tau(u)-\sigma(u)x-\tau(u)x)=\lambda(x(\sigma(u)+\tau(u))-(\sigma(u)+\tau(u))x)=\lambda([x,\sigma(u)+\tau(u)])$ olur. Burada $[R,\sigma(u)+\tau(u)]=(0)$ olduğundan, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ bulunur.

Lemma 3.46: R asal halka ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere $a\in R$ için $[a,U]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve $[a,U]=(0)$ ise her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ veya $a=0$ olur.

İspat: $u_0 \in U$ için $\sigma(u_0) \neq \tau(u_0)$ olsun. $[a,U]=(0)$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, Lemma 3.45 den her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ veya $a \in Z$ olur. $a \in Z$ olsun. $[a,U]_{\sigma,\tau}=(0)$ olduğundan, $u_0 \in U$ için $0=[a,u_0]_{\sigma,\tau}=a\sigma(u_0)-\tau(u_0)a=a\sigma(u_0)-a\tau(u_0)= a(\sigma(u_0)-\tau(u_0))$ bulunur. $a \in Z$ olduğundan, $aR(\sigma(u_0)-\tau(u_0))=(0)$ yazılabilir. R asal olduğundan, $a=0$ veya $u_0 \in U$ için $\sigma(u_0)-\tau(u_0)=0$ olur. $\sigma(u_0) \neq \tau(u_0)$ olduğundan $a=0$ elde edilir.

Teorem 3.47: R asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olmak üzere, $[U,U]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve $[U,U]=(0)$ ise $U \subset Z$ olur.

İspat: $U \not\subset Z$ olsun. $[U,U]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve $[U,U]=(0)$ olduğundan Lemma 3.46 dan, her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur. Çünkü $U \neq (0)$ dır. Diğer yandan, U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $u,v \in U$ için $[xv,u]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Her $u,v \in U$ için $x[v,u]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(u)]v=[x,\tau(u)]v \in U$ bulunur. $[U,U]=(0)$ olduğundan, her $u,v,w \in U$ için $[w,[x,\tau(u)]v]=0$ olur. Her $u,v,w \in U$ için $0=[x,\tau(u)][w,v]+[w,[x,\tau(u)]]v=[w,[x,\tau(u)]]v$ bulunur. Her $u,w \in U$ ve her $x \in R$ için $[w,[x,\tau(u)]]U=(0)$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, Lemma 3.35 den $[w,[x,\tau(u)]]=0$ veya $U \subset Z$ elde edilir. $U \not\subset Z$ olduğundan, her $u,w \in U$ ve her $x \in R$ için $[w,[x,\tau(u)]]=0$ bulunur. R üzerinde, her $u,w \in U$ ve her $x \in R$ için $I_w(x)=[w,x]$ ve $I_{\tau(u)}(x)=[\tau(u),x]$ iç türevleri tanımlansın. Her $x \in R$ ve her $u,w \in U$ için $I_w I_{\tau(u)}(x)=0$ olduğundan, $I_w I_{\tau(u)}=0$ elde edilir. Teorem 2.4 den $I_w=0$ veya $I_{\tau(u)}=0$ olur. Her $w,u \in U$ için $w \in Z$ veya $\tau(u) \in Z$ olduğundan $w,u \in Z$ bulunur. Yani $U \subset Z$ dir. Bu ise $U \not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $U \subset Z$ bulunur.

Lemma 3.48: R asal halka olmak üzere, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka ise, her $u \in U$ için $\tau(u)+\sigma(u) \in Z$ veya U, R nin sıfırdan farklı sol ve sağ idealini kapsar.

İspat: $u_0 \in U$ için $\sigma(u_0)+\tau(u_0) \notin Z$ olsun. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $x \in R$, her $v \in U$ için $[xu_0,v] \in U$ olur. Her $x \in R$, $v \in U$ için $x[u_0,\sigma(v)]+[x,v]_{\sigma,\tau}u_0 \in U$ ve U alt halka olduğundan, $[x,v]_{\sigma,\tau}u_0 \in U$ bulunur. O halde her $v \in U$, her $x \in R$ için $x[u_0,\sigma(v)] \in U$ olur. Yani, $R[u_0,\sigma(U)] \subset U$ bulunur. $R[u_0,\sigma(U)]=(0)$ ise her $u \in U$ için $R[u_0,\sigma(u)]=(0)$ ve R asal olduğundan, $[u_0,\sigma(u)]=0$ bulunur. Her $u \in U$ için $\sigma([\sigma^{-1}(u_0),u])=0$ ve σ, 1-1 olduğundan, her $u \in U$ için $[\sigma^{-1}(u_0),u]=0$ ve böylece $[\sigma^{-1}(u_0),U]=(0)$ olur. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, Lemma 3.45 den, her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ veya $\sigma^{-1}(u_0) \in Z$ bulunur. $u_0 \in U$ için $\sigma(u_0)+\tau(u_0) \notin Z$ olduğundan, $u_0 \in U$ için $\sigma^{-1}(u_0) \in Z$ elde edilir. Yani, $u_0 \in U$ için $u_0 \in Z$ dir. O halde $u_0 \in U$ için

$\sigma(u_0)+\tau(u_0)\in Z$ olur. Bu ise $\sigma(u_0)+\tau(u_0)\notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde $(0)\neq R[u_0,\sigma(U)]\subset U$ bulunur. Yani, U, R nin sıfırdan farklı sol Lie idealini kapsar. Benzer şekilde, U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $x\in R$, her $v\in U$ için $[u_0x,v]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Her $v\in U$, $x\in R$ için $u_0[x,v]_{\sigma,\tau}+[u_0,\tau(v)]x\in U$ ve $u_0[x,v]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan $[u_0,\tau(v)]x\in U$ elde edilir. Yani, $[u_0,\tau(U)]R\subset U$ olur. $[u_0,\tau(U)]R=(0)$ ise her $u\in U$ için $[u_0,\tau(u)]R=(0)$ ve R asal olduğundan, $[u_0,\tau(u)]=0$ bulunur. Her $u\in U$ için $\tau([\tau^{-1}(u_0),u])=0$ ve τ, 1-1 olduğundan, her $u\in U$ için $[\tau^{-1}(u_0),u]=0$ olur. Yani, $[\tau^{-1}(u_0),U]=(0)$ bulunur. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, Lemma 3.45 den, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ veya $\tau^{-1}(u_0)\in Z$ bulunur. $u_0\in U$ için $\tau(u_0)+\sigma(u_0)\notin Z$ olduğundan $u_0\in U$ için $\tau^{-1}(u_0)\in Z$ elde edilir. Yani $u_0\in U$ için $u_0\in Z$ olur. Buradan $\sigma(u_0)+\tau(u_0)\in Z$ olur. Bu ise $u_0\in U$ için $\sigma(u_0)+\tau(u_0)\notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde $(0)\neq[u_0,\tau(U)]R\subset U$ bulunur. Yani U, R nin sıfırdan farklı sağ idealini kapsar.

Teorem 3.49: R asal halka ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere bir $v\in U$ için $\tau(v)+\sigma(v)\notin Z$ ise $[R,A]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $[R,B]_{\sigma,\tau}\subset U$ fakat $[R,A]_{\sigma,\tau}\not\subset Z$ ve $[R,B]_{\sigma,\tau}\not\subset Z$ olacak biçimde R nin sıfırdan farklı A sol ideali ve sıfırdan farklı B sağ ideali vardır.

İspat: $T=\{x\in R\mid [R,x]_{\sigma,\tau}\subset U\}$ kümesini tanımlayalım. T, R nin $U\subset T$ olacak biçimde (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkası olduğunu gösterelim. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ olur. Yani, $U\subset T$ dir. $a,b\in T$ ve $x\in R$ olsun. $[x,a-b]_{\sigma,\tau}=[x,a]_{\sigma,\tau}-[x,b]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan, $a-b\in T$ olur. $[x,ab]_{\sigma,\tau}=[x\sigma(a),b]_{\sigma,\tau}+[\tau(b)x,a]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan, $ab\in T$ bulunur. Yani, T alt halkadır. T nin tanımından $[R,T]_{\sigma,\tau}\subset U$ olur. $U\subset T$ olduğundan $[R,T]_{\sigma,\tau}\subset U\subset T$ bulunur. Yani, $[R,T]_{\sigma,\tau}\subset T$ olduğundan, T, (σ,τ)-sol Lie idealdir. Bir $v\in U$ için $\tau(v)+\sigma(v)\notin Z$ olduğundan, $U\not\subset Z$ dir. $U\subset T$ olduğundan $T\not\subset Z$ bulunur. T, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halkadır. Aynı zamanda bir $v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\notin Z$ olduğundan Lemma 3.48 den T, R nin sıfırdan farklı A sol idealini ve sıfırdan farklı B sağ idealini kapsar. $A\subset T$ ve $B\subset T$ olduğundan T nin tanımından $[R,A]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $[R,B]_{\sigma,\tau}\subset U$ bulunur. $[R,A]_{\sigma,\tau}\not\subset Z$ ve $[R,B]_{\sigma,\tau}\not\subset Z$ olduğunu gösterelim. $[R,A]_{\sigma,\tau}\subset Z$ olsaydı, her $x\in R$, $a\in A$ için $[\tau(a)x,a]_{\sigma,\tau}\in Z$ bulunur. Her $x\in R$ ve $a\in A$ için $\tau(a)[x,a]_{\sigma,\tau}+[\tau(a),\tau(a)]x=\tau(a)[x,a]_{\sigma,\tau}\in Z$ bulunur. $[x,a]_{\sigma,\tau}\in Z$ olduğundan, her $x\in R$, $a\in A$ için $[x,a]_{\sigma,\tau}=0$ veya $\tau(a)\in Z$ bulunur. Yani her $x\in R$, $a\in A$ için $[x,a]_{\sigma,\tau}=0$ veya $a\in Z$ olur. Her $x\in R$, her $a\in A$ için $[x,a]_{\sigma,\tau}=0$ ise, her $y\in R$ için x yerine xy yazarsak,

$0=[xy,a]_{\sigma,\tau}=x[y,a]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(a)]y=[x,\tau(a)]y$ bulunur. Her $x\in R$, $a\in A$ için, $[x,\tau(a)]R=(0)$ ve R asal olduğundan $[x,\tau(a)]=0$ bulunur. Yani, her $a\in A$ için $a\in Z$ dir. Sonuç olarak $A\subset Z$ bulunur. A sol ideal olduğundan, her $x,y\in R$ ve $a\in A$ için $[x,ya]=0$ olur. Her $x,y\in R$, $a\in A$ için $0=y[x,a]+[x,y]a=[x,y]a$ bulunur. Her $x,y\in R$ ve $a\in A$ için $[x,y]Ra=(0)$ ve R asal olduğundan $[x,y]=0$ veya $a=0$ bulunur. Yani R değişmeli veya $A=(0)$ bulunur. Bu ise bir $v\in U$ için $\tau(v)+\sigma(v)\notin Z$ ve $A\neq(0)$ olmasıyla çelişir. Çünkü $U\subset R\subset Z$ olsaydı, bir $v\in U$ için $v\in Z$ olur ve $\tau(v)+\sigma(v)\in Z$ olurdu. Yani R değişmeli olamaz. O halde $[R,A]_{\sigma,\tau}\not\subset Z$ olmalıdır. $[R,B]_{\sigma,\tau}\subset Z$ olsun. Her $x\in R$ ve $b\in B$ için $[x\sigma(b),b]_{\sigma,\tau}\in Z$ olur. Her $x\in R$, $b\in B$ için $x[\sigma(b),\sigma(b)]+[x,b]_{\sigma,\tau}\sigma(b)=[x.b]_{\sigma,\tau}\sigma(b)\in Z$ bulunur. $[x,b]_{\sigma,\tau}\in Z$ olduğundan, her $x\in R$, $b\in B$ için $[x,b]_{\sigma,\tau}=0$ veya $\sigma(b)\in Z$ ve buradan $[x,b]_{\sigma,\tau}=0$ veya $b\in Z$ olur. Her $x\in R$, $b\in B$ için $[x,b]_{\sigma,\tau}=0$ ise, $y\in R$ için x yerine xy yazarsak, $0=[xy,b]_{\sigma,\tau}=x[y,b]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(b)]y=[x,\tau(b)]y$ bulunur. Her $x\in R$, $b\in B$ için $[x,\tau(b)]R=(0)$ ve R asal olduğundan, $[x,\tau(b)]=0$ ve böylece $B\subset Z$ elde edilir. B sağ ideal olduğundan, her $x,y\in R$, $b\in B$ için, $0=[x,by]=[x,b]y+b[x,y]=b[x,y]$ bulunur. $bR[x,y]=(0)$ ve R asal olduğundan $b=0$ veya her $x,y\in R$ için $[x,y]=0$ bulunur. Yani $B=(0)$ veya R değişmelidir. Bu ise $B\neq(0)$ ve bir $v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde $[R,B]_{\sigma,\tau}\not\subset Z$ bulunur.

Teorem 3.50: R asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal, bir $v\in U$ için $\tau(v)+\sigma(v)\notin Z$ olmak üzere, $a,b\in R$ için $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ olur.

İspat: $b\neq 0$ olsun. U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve bir $v\in U$ için $\tau(v)+\sigma(v)\notin Z$ olduğu için Teorem 3.49 dan $[R,B]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $[R,B]_{\sigma,\tau}\not\subset Z$ olacak biçimde $0\neq B$ sağ ideal vardır. $aUb=(0)$ olduğundan, her $x\in R$, $s\in B$ için $a[x,s]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. $y\in R$ için x yerine xy yazarsak, $0=a[xy,s]_{\sigma,\tau}b=a(x[y,s]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(s)]y)b=ax[y,s]_{\sigma,\tau}b+a[x,\tau(s)]yb$ bulunur. $u\in U$ için, x yerine ub yazarsak, her $y\in R$, $u\in U$ ve $s\in B$ için $0=aub[y,s]_{\sigma,\tau}b+a[ub,\tau(s)]yb=a[ub,\tau(s)]yb$ elde edilir. Her $u\in U$, $s\in B$ için $a[ub,\tau(s)]Rb=(0)$ ve R asal olduğundan $a[ub,\tau(s)]=0$ veya $b=0$ bulunur. $b\neq 0$ olduğundan, her $u\in U$, $s\in B$ için $a[ub,\tau(s)]=0$ bulunur. Her $u\in U$, $s\in B$ için $0=a(ub\tau(s)-\tau(s)ub)=aub\tau(s)-a\tau(s)ub=-a\tau(s)ub$ olsun. Buradan $a\tau(s)ub=0$ olduğundan, $a\tau(B)ub=0$ elde edilir. $\tau(B)$ sağ ideal ve R asal olduğundan $a\tau(B)=(0)$ veya $ub=0$ bulunur. Yani, $a\tau(B)=(0)$ veya $Ub=(0)$ olur. Ayrıca $U\not\subset Z$ dir. $U\subset Z$ olsaydı, bir $v\in U$ için $v\in Z$ olur, $\tau(v)+\sigma(v)\in Z$ olurdu. Bu ise

$v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\notin Z$ olmasıyla çelişir. $b\neq 0$ ve $U\not\subset Z$ olduğundan, Lemma 3.35 den $Ub\neq(0)$ olur. O halde $a\tau(B)=(0)$ elde edilir. $aUb=(0)$ olduğundan, her $x\in R$, $s\in B$ için $a[x,s]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. Her $x\in R$, $s\in B$ için $0=a(x\sigma(s)-\tau(s)x)b=ax\sigma(s)b-a\tau(s)xb$ ve buradan $a\tau(B)=(0)$ olduğundan, her $s\in B$ için $a\tau(s)=0$ olur. Yani her $x\in R$, $s\in B$ için $ax\sigma(s)b=0$ olmasından her $s\in B$ için $aR\sigma(s)b=(0)$ ve buradan R asal olduğu kullanılarak, $a=0$ veya $\sigma(s)b=0$ bulunur. Yani, $a=0$ veya $\sigma(B)b=(0)$ elde edilir. $\sigma(B)b=(0)$ ise $\sigma(B)$ sağ ideal olduğundan $b=0$ bulunur. $b\neq 0$ olduğundan $a=0$ elde edilir.

Lemma 3.51: R, karakteristiği 2 den farklı bir asal halka ve $(0)\neq U$, (σ,τ)-sağ Lie ideal olsun. $U\subset Z$ ise $\sigma=\tau$ veya R değişmeli olur.

İspat: R değişmeli olmasın. U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ve $U\subset Z$ olduğundan, her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[u,x]_{\sigma,\tau}\in Z$ olur. Her $x\in R$, $u\in U$ için $[u,x]_{\sigma,\tau}=u\sigma(x)-\tau(x)u=u\sigma(x)-u\tau(x)=u(\sigma(x)-\tau(x))\in Z$ ve $u\in Z$ olduğundan, $u=0$ veya $\sigma(x)-\tau(x)\in Z$ elde edilir. Buradan, $U=(0)$ veya $\sigma(x)-\tau(x)\in Z$ bulunur. $U\neq(0)$ olduğundan, her $x\in R$ için $\sigma(x)-\tau(x)\in Z$ olur. Her $x,y\in R$ için $[\sigma(x)-\tau(x),y]=0$ olduğundan,

$$[\sigma(x),y]-[\tau(x),y]=0,\ \forall x,y\in R \tag{6.7}$$

bulunur. x yerine x^2 yazarsak, $0=[\sigma(x^2),y]-[\tau(x^2),y]=[\sigma(x)\sigma(x),y]-[\tau(x)\tau(x),y]=\sigma(x)[\sigma(x),y]+[\sigma(x),y]\sigma(x)-\tau(x)[\tau(x),y]-[\tau(x),y]\tau(x)$ bulunur. (6.7) den $[\tau(x),y]=[\sigma(x),y]$ olduğundan, $\sigma(x)[\sigma(x),y]+[\sigma(x),y]\sigma(x)-\tau(x)[\sigma(x),y]-[\sigma(x),y]\tau(x)=0$ elde edilir. Her $x,y\in R$ için $(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x),y]+[\sigma(x),y](\sigma(x)-\tau(x))=0$ ve $\sigma(x)-\tau(x)\in Z$ olduğundan, $0=(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x),y]+(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x),y]=2(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x),y]$ elde edilir. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan, her $x,y\in R$ için $(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x),y]=0$ olur. Her $x,y\in R$ için $\sigma(x)-\tau(x)\in Z$ olduğundan, $(\sigma(x)-\tau(x))R[\sigma(x),y]=(0)$ yazılabilir. R asal olduğundan, her $x,y\in R$ için $\sigma(x)-\tau(x)=0$ veya $[\sigma(x),y]=0$ olur. Yani, her $x,y\in R$ için $\sigma(x)=\tau(x)$ veya $x\in Z$ elde edilir. $K=\{x\in R\mid \sigma(x)=\tau(x)\}$ ve $L=\{x\in R\mid x\in Z\}$ kümelerini tanımlayalım. $R=K\cup L$ dir. Brauer Trick'ten $R=K$ veya $R=L$ olur. R değişmeli olmadığından $R\neq L$ dir. O halde $R=K$ ise, her $x\in R$ için $\sigma(x)=\tau(x)$ olduğundan $\sigma=\tau$ olur.

Teorem 3.52: R asal halka, $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olmak üzere, $U\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $\sigma=\tau$ veya R değişmeli olur.

Kaya, K., Aydın, N., 1999

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $charR\neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma 3.53: $a,b\in R$ için,

(i) Her $x\in R$ için, $d_1:R\rightarrow R$, $d_1(x)=[x,b]_{\sigma,\tau}$ olmak üzere, $ad_1(R)=(0)$ (veya $d_1(R)a=(0)$) ise $a=0$ veya $b\in Z$ dir.

(ii) $a[R,b]_{\sigma,\tau}=(0)$ (veya $[R,b]_{\sigma,\tau}a=(0)$) ise $a=0$ veya $b\in Z$ dir.

(iii) $Ua=(0)$ (veya $aU=(0)$) ise $a=0$ veya $U\subset Z$ dir.

İspat:

(i) Her $x,y\in R$ için $d_1(xy)=[xy,b]_{\sigma,\tau}=x[y,\sigma(b)]+[x,b]_{\sigma,\tau}y=d_1(x)y+x[y,\sigma(b)]$ olur. Her $x,y\in R$ için $d_1(xy)=d_1(x)y+x[y,\sigma(b)]$ ifadesini soldan a ile çarparsak, $ad_1(xy)=ad_1(x)y+ax[y,\sigma(b)]$ olur. $ad_1(xy)=ad_1(x)=0$ olduğundan, her $x,y\in R$ için $ax[y,\sigma(b)]=0$ ve böylece $aR[y,\sigma(b)]=(0)$ olur. R asal olduğundan, $a=0$ veya her $y\in R$ için $[y,\sigma(b)]=0$ bulunur. Yani, $a=0$ veya $b\in Z$ elde edilir. Benzer biçimde, her $x,y\in R$ için $d_1(xy)=[xy,b]_{\sigma,\tau}=x[y,b]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(b)]y=xd_1(y)+[x,\tau(b)]y$ olur. Her $x,y\in R$ için, $d_1(xy)=xd_1(y)+[x,\tau(b)]y$ ifadesini sağdan a ile çarparsak, $d_1(xy)a=xd_1(y)a+[x,\tau(b)]ya$ elde edilir. $d_1(xy)a=d_1(y)a=0$ olduğundan, her $x,y\in R$ için $[x,\tau(b)]ya=0$ bulunur. R asal olduğundan, her $x\in R$ için $[x,\tau(b)]=0$ veya $a=0$ olur. Yani, $b\in Z$ veya $a=0$ elde edilir.

(ii) $a[R,b]_{\sigma,\tau}=(0)$ ise $ad_1(R)=(0)$ olduğundan, (i)'den $a=0$ veya $b\in Z$ olur. Benzer biçimde, her $x\in R$ için $d_2(x)=[x,b]_{\sigma,\tau}$ olsun. $[R,b]_{\sigma,\tau}a=(0)$ olur ve $d_2(R)a=(0)$ ise (i) den $a=0$ veya $b\in Z$ bulunur.

(iii) $(0)\neq U$, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ yazılabilir. $a[R,U]_{\sigma,\tau}\subset aU=(0)$ olduğundan, $a[R,U]_{\sigma,\tau}=(0)$ olur. (ii) den $a=0$ veya $U\subset Z$ bulunur. Benzer biçimde, $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ ise $[R,U]_{\sigma,\tau}a\subset Ua=(0)$ olduğundan, $[R,U]_{\sigma,\tau}a=(0)$ bulunur. (ii) den $a=0$ veya $U\subset Z$ elde edilir.

Lemma 3.54: $0\neq d$ türev olmak üzere, $d(U)=(0)$ ise $[U,\sigma(U)]=(0)$ ve $[\sigma(U),\tau(U)]=(0)$ olur.

İspat: $d(U)=(0)$ olduğundan, her $u,v,w\in U$ için $d([wv,u]_{\sigma,\tau})=0$ yazılır. Her $u,v,w\in U$ için $0=d(w[v,\sigma(u)]+[w,u]_{\sigma,\tau}v)=d(w[v,\sigma(u)])+d([w,u]_{\sigma,\tau}v)=d(w)[v,\sigma(u)]+$

$wd([v,\sigma(u)])+d([w,u]_{\sigma,\tau})v+[w,u]_{\sigma,\tau}d(v)$ bulunur. Her $u,v,w\in U$ için $d(w)=d([w,u]_{\sigma,\tau})=d(v)=0$ olduğundan, $wd([v,\sigma(u)])=0$ bulunur. Her $u\in U$ için $d(u)=0$ olduğundan, $0=w([d(v),\sigma(u)]+[v,d(\sigma(u))])=w[v,d(\sigma(u))]$ bulunur. Her $u,v\in U$ için, $U[v,d(\sigma(u))]=(0)$ olduğundan, Lemma 3.53 (iii) den, $[v,d(\sigma(u))]=0$ veya $U\subset Z$ bulunur. Yani, her $u,v\in U$ için $[v,d(\sigma(u))]=0$ ve böylece,

$$[U,d(\sigma(U))]=(0) \tag{7.1}$$

elde edilir. $d(U)=(0)$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $r\in R$, $u,v\in U$ için $d([rv,u]_{\sigma,\tau})=0$ olur. Her $u,v\in U$ ve $r\in R$ için, $0=d(r[v,\sigma(u)]+[r,u]_{\sigma,\tau}v)=d(r[v,\sigma(u)])+d([r,u]_{\sigma,\tau}v)=d(r)[v,\sigma(u)]+rd([v,\sigma(u)])+d([r,u]_{\sigma,\tau})v+[r,u]_{\sigma,\tau}d(v)$ olur. Ayrıca, (7.1) den $[u,d(\sigma(u))]=0$ olduğundan, her $u,v\in U$ için $d([v,\sigma(u)])=[d(v),\sigma(u)]+[v,d(\sigma(u))]=0$ bulunur. Yani, her $u,v\in U$ için $d([v,\sigma(u)])=0$ dır. O halde, her $u,v\in U$ ve $r\in R$ için, $d(r)[v,\sigma(u)]=0$ ve böylece $d(R)[v,\sigma(u)]=(0)$ elde edilir. Lemma 2.2 den $[v,\sigma(u)]=0$ veya $d=0$ bulunur. $d\neq 0$ olduğundan, $[U,\sigma(U)]=(0)$ elde edilir. U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $[U,\sigma(U)]=(0)$ olduğundan, her $s\in R$ ve $u,v\in U$ için $[[\tau(u)s,u]_{\sigma,\tau},\sigma(v)]=0$ olur. Her $u,v\in U$ ve $s\in R$ için $0=[\tau(u)[s,u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u),\tau(u)]s,\sigma(v)]=[\tau(u)[s,u]_{\sigma,\tau},\sigma(v)]=\tau(u)[[s,u]_{\sigma,\tau},\sigma(v)]+[\tau(u),\sigma(v)][s,u]_{\sigma,\tau}$ bulunur. $[U,\sigma(U)]=(0)$ olduğundan, $[[s,u]_{\sigma,\tau},\sigma(v)]=0$ olması kullanılarak,

$$[\tau(u),\sigma(v)][s,u]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall u,v\in U,\ \forall s\in R \tag{7.2}$$

bulunur. (7.2) de, s yerine $r\in R$ olmak üzere sr yazarsak, her $u,v\in U$ ve $r\in R$ için $0=[\tau(u),\sigma(v)][sr,u]_{\sigma,\tau}=[\tau(u),\sigma(v)]s[r,\sigma(u)]+[\tau(u),\sigma(v)][s,u]_{\sigma,\tau}$ bulunur. (7.2) kullanılarak, $[\tau(u),\sigma(v)]s[r,\sigma(u)]=0$ elde edilir. Buradan $[\tau(u),\sigma(v)]R[r,\sigma(u)]=(0)$ ve R asal olduğundan, $[\tau(u),\sigma(v)]=0$ veya $[r,\sigma(u)]=0$ olur. Yani, $[\tau(u),\sigma(v)]=0$ veya $u\in Z$ elde edilir. O halde, $[\tau(U),\sigma(U)]=(0)$ elde edilir.

Lemma 3.55: $0\neq d$ türev olmak üzere, $d(U)=(0)$ ise her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur.

İspat: $d(U)=(0)$ olduğundan, Lemma 3.54 den, $[U,\sigma(U)]=[\sigma(U),\tau(U)]=(0)$ olur. $[U,\sigma(U)]=(0)$ ise, her $u,v,w\in U$ ve $r\in R$ için $[[rw,v]_{\sigma,\tau},\sigma(u)]=0$ yazılır. Buradan $0=[r[w,v]_{\sigma,\tau},\sigma(u)]+[[r,\tau(v)]w,\sigma(u)]=r[[w,v]_{\sigma,\tau},\sigma(u)]+[r,\sigma(u)][w,v]_{\sigma,\tau}+[r,\tau(v)][w,\sigma(u)]+[[r,\tau(v)],\sigma(u)]w$ bulunur. $[U,\sigma(U)]=(0)$ olduğundan, $[w,\sigma(u)]=[[w,v]_{\sigma,\tau},\sigma(u)]=0$ olduğundan,

$[r,\sigma(u)][w,v]_{\sigma,\tau}+[[r,\tau(v)],\sigma(u)]w=0,\ \forall u,v,w\in U,\ \forall r\in R$ (7.3)

elde edilir. Bu eşitlikten $0=(r\sigma(u)-\sigma(u)r)(w\sigma(v)-\tau(v)w)+[r\tau(v)-\tau(v)r,\sigma(u)]w=r\sigma(u)w\sigma(v)-r\sigma(u)\tau(v)w-\sigma(u)rw\sigma(v)+\sigma(u)r\tau(v)w+r\tau(v)\sigma(u)w-\tau(v)r\sigma(u)w-\sigma(u)r\tau(v)w+\sigma(u)\tau(v)rw$ bulunur. $[\sigma(U),\tau(U)]=(0)$ olduğundan, $-r\sigma(u)\tau(v)w+r\tau(v)\sigma(u)w=-r\tau(v)\sigma(u)w+r\tau(v)\sigma(u)w=0$ ve $-\sigma(u)r\tau(v)w+\sigma(u)r\tau(v)w=0$ dır. Yani, her $u,v,w\in U$ ve her $r\in R$ için $r\sigma(u)w\sigma(v)-\sigma(u)rw\sigma(v)-\tau(v)r\sigma(u)w+\sigma(u)\tau(v)rw=0$ elde edilir. $\sigma(u)w=w\sigma(u)$ olduğu kullanılırsa, $0=r\sigma(u)w\sigma(v)-\sigma(u)rw\sigma(v)-\tau(v)r\sigma(u)w+\sigma(u)\tau(v)rw=r\sigma(u)w\sigma(v)-\sigma(u)rw\sigma(v)-\tau(v)rw\sigma(u)+\sigma(u)\tau(v)rw=(r\sigma(u)-\sigma(u)r)w\sigma(v)-[\tau(v)rw,\sigma(u)]=[r,\sigma(u)]w\sigma(v)-[\tau(v)rw,\sigma(u)]=[r,\sigma(u)]w\sigma(v)-\tau(v)[rw,\sigma(u)]-[\tau(v),\sigma(u)]rw$ bulunur. $[\sigma(U),\tau(U)]=(0)$ olduğu kullanılarak, $0=[r,\sigma(u)]w\sigma(v)-\tau(v)[rw,\sigma(u)]=[r,\sigma(u)]w\sigma(v)-\tau(v)r[w,\sigma(u)]-\tau(v)[r,\sigma(u)]w$ bulunur. $[U,\sigma(U)]=(0)$ olduğundan, $[w,\sigma(u)]=0$ dır. Böylece $0=[r,\sigma(u)]w\sigma(v)-\tau(v)[r,\sigma(u)]w=[[r,\sigma(u)]w,v]_{\sigma,\tau}$ bulunur. Her $u,v,w\in U$ ve her $r\in R$ için $0=[r,\sigma(u)][w,\sigma(v)]+[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}w$ olur. Böylece,

$[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}w=0,\ \forall u,v,w\in U,\ \forall r\in R$ (7.4)

elde edilir. Her $u,v\in U$ ve her $r\in R$ için $[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}U=(0)$ olduğundan, Lemma 3.53 (iii) den, $[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}=0$ veya $U\subset Z$ bulunur. Yani,

$[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall u,v\in U,\ \forall r\in R$ (7.5)

bulunur. (7.5) de, r yerine rs yazarsak, $0=[[rs,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}=[r[s,\sigma(u)]+[r,\sigma(u)]s,v]_{\sigma,\tau}=[r[s,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}+[[r,\sigma(u)]s,v]_{\sigma,\tau}=r[[s,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}+[r,\tau(v)][s,\sigma(u)]+[r,\sigma(u)][s,\sigma(v)]+[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}s$ bulunur. (7.5) kullanılarak her $u,v\in U$ ve her $s,r\in R$ için $[r,\tau(v)][s,\sigma(u)]+[r,\sigma(u)][s,\sigma(v)]=0$ elde edilir. v yerine u alırsak, $0=[r,\tau(u)][s,\sigma(u)]+[r,\sigma(u)][s,\sigma(u)]=([r,\tau(u)]+[r,\sigma(u)])[s,\sigma(u)]=[r,\tau(u)+\sigma(u)][s,\sigma(u)]$ bulunur. Yani, her $u\in U$ ve her $r,s\in R$ için $[r,\tau(u)+\sigma(u)][s,\sigma(u)]=0$ olur. Her s yerine $x\in R$ olmak üzere sx yazarsak, $0=[r,\tau(u)+\sigma(u)][sx,\sigma(u)]=[r,\tau(u)+\sigma(u)]s[x,\sigma(u)]+[r,\tau(u)+\sigma(u)][s,\sigma(u)]x$ bulunur. Buradan $[r,\tau(u)+\sigma(u)][s,\sigma(u)]=0$ olduğundan, $[r,\sigma(u)+\tau(u)]s[x,\sigma(u)]=0$ bulunur. Her $u\in U$ ve her $r\in R$ için $[r,\sigma(u)+\tau(u)]R[x,\sigma(u)]=(0)$ ve R asal olduğundan, $[r,\sigma(u)+\tau(u)]=0$ veya $[x,\sigma(u)]=0$ bulunur. Yani, $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ veya $u\in Z$ olur. O halde, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ elde edilir.

Lemma 3.56: $a\in R$ için $[a,U]=(0)$ ise $a\in Z$ veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ dir.

İspat: R üzerinde, her $x \in R$ için $d(x)=[a,x]$ iç türevi tanımlansın. $[a,U]=(0)$ olduğundan, $d(U)=(0)$ olur. Lemma 3.55 den, her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ veya $d=0$ ve böylece her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ veya $a \in Z$ elde edilir.

Sonuç 3.57: U değişmeli ise her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur.

İspat: U değişmeli olduğundan $[U,U]=(0)$ dır. Her $a \in U$ için $[a,U]=(0)$ olduğundan, Lemma 3.56 dan, $a \in Z$ veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur. Yani, $U \subset Z$ veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur. O halde, her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ elde edilir.

Lemma 3.58: $U \not\subset Z$ olmak üzere, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka ise U, R halkasının sıfırdan farklı sağ idealini kapsar veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ dir.

İspat: U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $u,v \in U$ ve $y \in R$ için $[vy,u]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Buradan $v[y,u]_{\sigma,\tau}+[v,\tau(u)]y \in U$ ve $v[y,u]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan, $[v,\tau(u)]y \in U$ bulunur. $[U,\tau(U)]R \subset U$ dır. $[U,\tau(U)]R=(0)$ olsun. R asal olduğundan, $[U,\tau(U)]=(0)$ olur. Her $v \in U$ için $[U,\tau(v)]=(0)$ olduğundan, Lemma 3.56 dan, her $v \in U$ için $\tau(v) \in Z$ veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ bulunur. Yani, $U \subset Z$ veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ bulunur. Böylece her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur. O halde, her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ veya $(0) \neq [U,\tau(U)]R \subset U$ elde edilir. $[U,\tau(U)]R=M$ dersek, her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ veya U, $(0) \neq M$ sağ idealini kapsar.

Lemma 3.59: $U \not\subset Z$, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olmak üzere, $a,b \in R$ için $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur.

İspat: $U \not\subset Z$, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olduğundan, Lemma 3.58 den, $0 \neq M$ sağ idealini U kapsar veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur. $M \subset U$ olduğundan, $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset [R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ bulunur. $aUb=(0)$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğundan, $a[r,m\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. Her $r \in R$, her $m \in M$ için $0=a\tau(m)[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b+a[r,m]_{\sigma,\tau}bb$ bulunur. $a[r,m]_{\sigma,\tau}b=0$ olduğundan,

$$a\tau(m)[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b=0, \ \forall r \in R, \ \forall m \in M \tag{7.6}$$

elde edilir. m yerine, $s \in R$ için ms yazarsak, $0=a\tau(ms)[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b=a\tau(m)\tau(s)$ $[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b$ bulunur. $\tau(R)=R$ olduğundan, $a\tau(m)R[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. R asal olduğundan, $a\tau(m)=0$ veya $[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b=0$ ve böylece $a\tau(m)=0$ veya $[R,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b=(0)$ elde edilir. $[R,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b=(0)$ ise, Lemma 3.53 (ii) den, $b=0$ veya $\sigma^{-1}(b) \in Z$ olur. Yani, $b=0$ veya $b \in Z$ elde edilir. $b \in Z$ ise $aUb=(0)$ olduğundan, $aURb=(0)$ yazılabilir.

R asal olduğundan, $aU=(0)$ veya $b=0$ bulunur. $aU=(0)$ ise Lemma 3.53 (iii) den, $a=0$ veya $U\subset Z$ bulunur. Hipotezden $U\not\subset Z$ olduğundan, $a=0$ bulunur. Yani, sonuç olarak $a=0$ veya $b=0$ elde edilir. Her $m\in M$ için $a\tau(m)=0$ ise $\tau(\tau^{-1}(a)m)=0$ olur ve τ, 1-1 olduğundan $\tau^{-1}(a)m=0$ bulunur. Yani, $\tau^{-1}(a)M=(0)$ dır. Buna göre, $\emptyset\neq K=\{r\in R| rM=(0)\}$ kümesi sol idealdir. $K\neq(0)$ olsun. M sağ ideal olduğundan, $MK\subset M$ ve K sol ideal olduğundan, $MK\subset K$ olur. Yani, $MK\subset M\cap K$ dır. $M\cap K=(0)$ ise $MK=(0)$ olur. M sağ ideal olduğundan, $K=(0)$ olur. Bu ise $K\neq(0)$ olmasıyla çelişir. O halde, $M\cap K\neq(0)$ dır. $0\neq m'\in M\cap K$ vardır. Buradan, $m'\in M$ ve $m'\in K$ olur. $m'\in K$ olduğundan, K nın tanımından $m'M=(0)$ olur. Yani, $m'\in M$ ve $m'M=(0)$ olur. $L=\{m'\in M| m'M=(0)\}$ kümesini tanımlayalım. $m'M=(0)$ olduğundan, $m'\in L$ dir. Yani, $L\neq\emptyset$ dir. $L\neq(0)$ bir sol ideal olduğunu gösterelim. $r\in R$, $y\in L$ ise her $m\in M$ için $rym=0$ olduğundan, $ry\in L$ olur. Yani, L sol idealdir. $L=M$ ise $M^2=(0)$ olur. Asal halka merkezinde nilpotent sağ ideal bulundurmadığından $M=(0)$ olur. Bu ise $M\neq(0)$ olmasıyla çelişir. O halde $L\subset M$ olur. Yani, $L=L\cap M$ dir. Diğer yandan, $L\cap M\subset L$ ve $L\cap M\subset M$ olduğundan, $(L\cap M)(L\cap M)\subset LM=(0)$ olur. Çünkü, L nin tanımından $LM=(0)$ dır. $L\cap M=L$ olduğundan, $L^2=(0)$ bulunur. Asal halka merkezinde nilpotent sol ideal bulundurmadığından $L=(0)$ olur. Bu ise $L\neq(0)$ olmasıyla çelişir. O halde $K=(0)$ olmalıdır. Yani, $\tau^{-1}(a)\in K$ olduğundan, $\tau^{-1}(a)=0$ ve böylece $a=0$ bulunur.

Teorem 3.60: $U\not\subset Z$, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka ise U, R halkasının sıfırdan farklı idealini kapsar veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur.

İspat: $U\not\subset Z$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olduğundan, Lemma 3.58 den, $[U,\tau(U)]R\subset U$ veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur. $[U,\tau(U)]R\subset U$ ise U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $u,v\in U$ ve $y\in R$ için, $[yv,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Her $u,v\in U$ ve $y\in R$ için, $y[v,\sigma(u)]+[y,u]_{\sigma,\tau}v\in U$ ve $[y,u]_{\sigma,\tau}v\in U$ olduğundan, $y[v,\sigma(u)]\in U$ bulunur. Yani, $R[U,\sigma(U)]\subset U$ bulunur. Yine, $[U,\tau(U)]R\subset U$ ve U alt halka olduğundan, $M=R[U,\sigma(U)][U,\tau(U)]R\subset U$ bulunur. $M\neq(0)$ ise U, R nin sıfırdan farklı idealini kapsar. $M=(0)$ ise, $R[U,\sigma(U)][U,\tau(U)]R=(0)$ olduğundan, $(R[U,\sigma(U)][U, \tau(U)])^2=(0)$ yazılabilir. Asal halka merkezinde nilpotent sol ideal bulundurmayacağından, $R[U,\sigma(U)][U,\tau(U)]=(0)$ bulunur. R asal olduğundan $[U,\sigma(U)][U,\tau(U)]=(0)$ bulunur. $w,w'\in U$ için U alt halka olduğundan, $ww'\in U$ olur. Her $w',u,v,w,t\in U$ için $0=[u,\sigma(v)][ww',\tau(t)]=[u,\sigma(v)]w[w',\tau(t)]+[u,\sigma(v)][w,\tau(t)]w'$ bulunur. $[U,\sigma(U)][U,$

$\tau(U)]=(0)$ olduğundan, $[u,\sigma(v)][w,\tau(t)]=0$ olur. O halde, her $u,v,w,w',t\in U$ için $[u,\sigma(v)]w[w',\tau(t)]=0$ ve böylece $[u,\sigma(v)]U[w',\tau(t)]=(0)$ elde edilir. U, (σ,τ)-sol Lie ideal, alt halka ve $U\not\subset Z$ olduğundan, Lemma 3.59 dan, her $u,v,w',t\in U$ için $[u,\sigma(v)]=0$ veya $[w',\tau(t)]=0$ veya $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur. Yani, $[U,\sigma(v)]=(0)$ veya $[U,\tau(t)]=(0)$ veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur. $[U,\sigma(v)]=(0)$ veya $[U,\tau(t)]=(0)$ ise, Lemma 3.56 dan her $v,t\in U$ için $\tau(t),\sigma(v)\in Z$ veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur. Yani, $U\subset Z$ veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur. Hipotezden, $U\not\subset Z$ olduğundan, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ bulunur.

Teorem 3.61: $U\not\subset Z$ (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde $(0)\neq M$ ideali vardır veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ dir.

İspat: $K=\{x\in R \mid [R,x]_{\sigma,\tau}\subset U\}$ kümesini tanımlayalım. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ olur. K nın tanımından $U\subset K$ olur. Yani, $K\neq\emptyset$ dir. Diğer yandan, K nın tanımından $[R,K]_{\sigma,\tau}\subset U$ olur. $U\subset K$ olduğundan $[R,K]_{\sigma,\tau}\subset K$ olur. Yani, K, (σ,τ)-sol Lie idealdir. $U\subset K$ ve $U\not\subset Z$ olduğundan, $K\not\subset Z$ olur. $[R,K]_{\sigma,\tau}\subset U$ olduğundan, her $x,y\in K$ ve $r\in R$ için, $[r,xy]_{\sigma,\tau}=[r\sigma(x),y]_{\sigma,\tau}+[\tau(y)r,x]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Yani, her $x,y\in K$ ve $r\in R$ için $[r,xy]_{\sigma,\tau}\in U$ elde edilir. Her $x,y\in K$ için $[R,xy]_{\sigma,\tau}\subset U$ olduğundan $xy\in K$ olur. O halde, K alt halkadır. K, (σ,τ)-sol Lie ideal, alt halka ve $K\not\subset Z$ olduğundan, Teorem 3.60 dan, K, R halkasının sıfırdan farklı idealini kapsar veya her $k\in K$ için $\sigma(k)+\tau(k)\in Z$ dir. Her $k\in K$ için $\sigma(k)+\tau(k)\in Z$ ve $U\subset K$ olduğundan, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ yazılabilir. K sıfırdan farklı M idealini kapsasın, $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset[R,K]_{\sigma,\tau}\subset U$ olduğundan, $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset U$ elde edilir. $[R,M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ dir. Aksi halde $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olsaydı, her $a,b\in M$ ve $r\in R$ için, $[[r,a]_{\sigma,\tau},b]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Her $a,b\in M$ ve $r\in R$ için, $[r,[a,b]]_{\sigma,\tau}+[[r,b]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}=0$ bulunur. $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, $r\in R$, $b\in M$ için, $[r,b]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani, $[[r,b]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}=0$ olur. O halde, her $r\in R$, $a,b\in M$ için, $[r,[a,b]]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Her $r\in R$ ve $a,b\in M$ için, R üzerinde $d_r(x)=[r,x]_{\sigma,\tau}$ (σ,τ) iç türevi ve $d_a(x)=[a,x]$ iç türevini tanımlayalım. $d_rd_a(M)=(0)$ olur. Yine, her $m\in M$ için $d_a(m)=[a,m]\in M$ olduğundan, $d_a(M)\subset M$ elde edilir. Yani, $d_rd_a(M)=(0)$ ve $d_a(M)\subset M$ olduğundan Lemma 3.25 den her $r\in R$ ve $a\in M$ için $d_r=0$ veya $d_a=0$ elde edilir. Buradan her $a\in M$ ve $r\in R$ için $r\in C_{\sigma,\tau}$ veya $a\in Z$ olur. Yani,

$R\subset C_{\sigma,\tau}$ veya $M\subset Z$ elde edilir. $R\subset C_{\sigma,\tau}$ ise, her $r,s,x\in R$ için, $[rs,x]_{\sigma,\tau}=0$ ve buradan $r[s,\sigma(x)]+[r,x]_{\sigma,\tau}s=0$ olur. $R\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, her $r,x\in R$ için $[r,x]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Yani, her $x,s,r\in R$ için $r[s,\sigma(x)]=0$ elde edilir. $R[s,\sigma(x)]=(0)$ ve R asal olduğundan, her $x,s\in R$ için $[s,\sigma(x)]=0$ olur. Yani, $R\subset Z$ olur. Bu ise R halkasının değişmeli olması demektir. $M\subset Z$ ise Önerme 1.13 den R değişmelidir. O halde, R değişmeli olduğundan $U\subset Z$ olur. Bu ise hipotezin $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde, $[R,M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

Aydın, N., Kaya, K., 1999

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka ve $charR\neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma A:

R, sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan asal halka ve $2x=0$ iken $x=0$ olsun. Bu takdirde, $(0)\neq U$ Lie ideal ve alt halka ise $U\subset Z$ veya U, R nin sıfırdan farklı idealini kapsar.

Lemma B:

R yarı-asal halka, 2 torsion free ve I ideal olmak üzere $d^2(I)=(0)$ ise $d(I)=(0)$ olur.

Lemma C:

R yarı-asal halka, $charR\neq 2$ olmak üzere, $a,b\in R$ için,

(i) $d_1:R\rightarrow R$, her $x\in R$ için $d_1(x)=[x,b]_{\sigma,\tau}$ olsun. Bu takdirde $ad_1(R)=(0)$ (veya $d_1(R)a=(0)$) ise $a=0$ veya $b\in Z$ dir.

(ii) $a[R,b]_{\sigma,\tau}=(0)$ (veya $[R,b]_{\sigma,\tau}a=(0)$) ise $a=0$ veya $b\in Z$ dir.

(iii) $Ua=(0)$ (veya $aU=(0)$) ise $a=0$ veya $U\subset Z$ olur.

Lemma D:

$U\not\subset Z$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal ise $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde $(0)\neq M$ ideali vardır veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur.

Lemma 3.62: R yarı-asal halka ve $(0)\neq M$ sağ ideal olmak üzere, $M\subset Z$ ise R değişmeli olur.

Lemma 3.63: R bir halka ve $(0)\neq U$, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $T=\{c\in R \mid [R,c]_{\sigma,\tau}\subset U\}$ olsun. Bu takdirde,

(i) T bir alt halkadır.

(ii) U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ise T, $[R,T]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $U\subset T$ olacak biçimde en geniş Lie idealdir.

Teorem 3.64: R yarı-asal halka ve 2 torsion free olmak üzere, $U\not\subset Z$ ve U, (σ,τ)-Lie ideal ise $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde bir $M\not\subset Z$ ideali vardır.

Lemma 3.65: R, char$R\neq 2$ olan bir asal halka ve $(0)\neq U\not\subset Z$ (σ,τ)-sol Lie ideal olsun. Bu takdirde $a,b\in R$ için $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur.

Lemma 3.66: R, char$R\neq 2$ olan bir asal halka, $U\not\subset Z$ bir (σ,τ)-sol Lie ideal olsun. Buna göre, $d(U)=(0)$ ise her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur.

Teorem 3.67: R, char$R\neq 2$ olan bir asal halka, $U\not\subset Z$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $a\in R$ için $ad(U)=(0)$ (veya $d(U)a=(0)$) ise her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ veya $a=0$ olur.

IV. BÖLÜM

TÜREVLİ VE (σ,τ)-LİE İDEALLİ ASAL HALKALAR

Lee, P.H. ve Lee, T.K., 1983

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, U Lie ideal, $0\neq d$ türev ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma 4.1: $0\neq d$ türev, $d(Z)\neq(0)$ olmak üzere $a\in R$ için $[a,d(U)]\subset Z$ ise $a\in Z$ veya $U\subset Z$ olur.

Teorem 4.2: $0\neq d$ türev olmak üzere $d^2(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$ olur.

Teorem 4.3: $0\neq d$ türev ve $a\in R$ için $[a,d(U)]\subset Z$ ise $a\in Z$ veya $U\subset Z$ olur.

Teorem 4.4: $0\neq d$ türev olmak üzere $[d(U),d(U)]\subset Z$ ise $U\subset Z$ olur.

Teorem 4.5: $d\neq 0$, $\delta\neq 0$ türevler olmak üzere $d\delta(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$ olur.

Teorem 4.6: $0\neq d$ türev olmak üzere her $u\in U$ için $[u,d(u)]\in Z$ ise $U\subset Z$ olur.

Teorem 4.7: $0\neq d$ türev olmak üzere $a\in R$ için, $ad(U)\subset Z$ ise $a=0$ veya $U\subset Z$ olur.

Aydın, N., Soytürk, M., 1993

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, $0\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $\mathrm{char}R\neq 2$, $0\neq d:R\rightarrow R$ türev, $\sigma,\tau:R\rightarrow R$ iki otomorfizm, $\sigma d=d\sigma$ ve $\tau d=d\tau$ olarak alınmıştır.

Lemma 4.8: $(0)\neq U$, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $U\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat: U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğu için, her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Buradan $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u),\tau(u)]x=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ ve $[x,u]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, Önerme 1.26 dan $[x,u]_{\sigma,\tau}=0$ veya $\tau(u)\in Z$ ve böylece her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}=0$ veya $u\in Z$ bulunur. Her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau}=0$ olsun. Her $x,y\in R$ için $0=[xy,u]_{\sigma,\tau}=x[y,u]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(u)]y=[x,\tau(u)]y$ olur. Her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $[x,\tau(u)]R=(0)$ ve R asal olduğundan $[x,\tau(u)]=0$ olur. Yani $U\subset Z$ bulunur.

Teorem 4.9: $(0)\neq U$, (σ,τ)-sağ Lie ideal olmak üzere, $d(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R değişmeli veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğundan, her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[u,x]_{\sigma,\tau}\in U$ ve $d([u,x]_{\sigma,\tau})\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için $0=[d([u,x]_{\sigma,\tau}),y]_{\sigma,\tau}=[[d(u),x]_{\sigma,\tau}+[u,d(x)]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau}=[[d(u),x]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau}+[[u,d(x)]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau}=[[u,d(x)]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau}$ bulunur. $[[u,d(x)]_{\sigma,\tau},R]_{\sigma,\tau}=(0)$ olduğundan her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[u,d(x)]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. $[U,d(x)]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lemma 3.34 den $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya her $x\in R$ için $d(x)\in Z$ olur. Her $x\in R$ için $d(x)\in Z$ ise $d(R)\subset Z$ olur. Önerme 1.30 dan R değişmeli olur. O halde $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya R değişmeli bulunur.

Sonuç 4.10: $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal olmak üzere, $d(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R değişmeli veya $U\subset Z$ olur.

İspat: $d(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise Teorem 4.9 dan R değişmeli veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. $U\subset C_{\sigma,\tau}$ ise Lemma 4.8 den $U\subset Z$ bulunur. O halde R değişmeli veya $U\subset Z$ elde edilir.

Lemma 4.11: $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal olmak üzere, $a\in R$ için $d(U)a=(0)$ (veya $ad(U)=(0)$) ise $a=0$ veya $U\subset Z$ olur.

İspat: $U\not\subset Z$ olsun. Sonuç 4.10 dan $d(U)\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d(U)\neq(0)$ olur. U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan, her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u),\tau(u)]x=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Buradan, $0=d(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau})a=d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}a+\tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau})a=d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}a$ bulunur. Her $x\in R$ için $d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}a=0$ olduğundan, x yerine $v\in U$ için $xd(v)$ yazarsak, $0=d(\tau(u))[xd(v),u]_{\sigma,\tau}a=d(\tau(u))x[d(v),u]_{\sigma,\tau}a+d(\tau(u))[x,\tau(u)]d(v)a=d(\tau(u))x[d(v),u]_{\sigma,\tau}a$ bulunur. $d(\tau(u))R[d(v),u]_{\sigma,\tau}a=(0)$ ve R asal olduğundan, her $u,v\in U$ için $d(\tau(u))=0$ veya $[d(v),u]_{\sigma,\tau}a=0$ olur. Her $u\in U$ için $d(\tau(u))=0$ ise, $\tau(d(u))=0$ olur. τ, 1-1 olduğundan, her $u\in U$ için $d(u)=0$ elde edilir. Yani, $d(u)=0$ veya $[d(v),u]_{\sigma,\tau}a=0$ elde edilir. $L=\{u\in U \mid d(u)=0\}$ ve $K=\{u\in U \mid [d(v),u]_{\sigma,\tau}a=0,\forall u\in U\}$ kümelerini tanımlayalım. Brauer Trick'ten L=U veya K=U olur. L=U olsaydı, $d(U)=(0)$ olurdu. Bu ise $d(U)\neq(0)$ olmasıyla çelişirdi. O halde $U\neq L$ dir. Dolayısıyla U=K dır. Her $u,v\in U$ için $[d(v),u]_{\sigma,\tau}a=0$ olur. Her $u,v\in U$ için, $0=d(v)\sigma(u)a-\tau(u)d(v)a=d(v)\sigma(u)a$ bulunur. σ^{-1} homomorfizm olduğundan $\sigma^{-1}(d(v)\sigma(u)a)=0$ olur. Her $u,v\in U$ için $\sigma^{-1}(d(v))u\sigma^{-1}(a)=0$ ve böylece her $v\in U$ için $\sigma^{-1}(d(v))U\sigma^{-1}(a)=(0)$ bulunur. $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Sonuç 3.41 den her $v\in U$ için $\sigma^{-1}(d(v))=0$ veya $\sigma^{-1}(a)=0$ olur. σ^{-1}, 1-1 olduğundan her $v\in U$ için $d(v)=0$ veya

$a=0$ elde edilir. Bu ise $d(U)=(0)$ veya $a=0$ demektir. $d(U)\neq(0)$ olduğundan $a=0$ bulunur.

Lemma 4.12: $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal olmak üzere, $d^2(U)=(0)$ ise $d(U)\subset Z$ olur.

İspat: U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan, her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olması kullanılarak $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u),\tau(u)]x=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ elde edilir. $d^2(U)=(0)$ olduğundan, $0=d^2(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau})=d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}+2d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+\tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau})$ olur. Böylece her $u\in U$ için $d^2(\tau(u))=\tau(d^2(u))=0$ bulunur. $d^2([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ olduğundan, her $x\in R$, her $u\in U$ için $2d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ olur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan,

$$d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})=0,\ \forall u\in U,\ \forall x\in R \tag{4.3}$$

elde edilir. Her $v\in U$ için, u yerine $u+d(v)$ yazarsak, $0=d(\tau(u+d(v)))d([x,u+d(v)]_{\sigma,\tau})=$ $d(\tau(u)+\tau(d(v)))d([x,u]_{\sigma,\tau}+[x,d(v)]_{\sigma,\tau})=(d(\tau(u))+d(\tau(d(v)))(d([x,u]_{\sigma,\tau})+d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}))$ olur. Buradan $d(\tau(d(v)))=\tau(d^2(v))=0$ olduğundan, her $u,v\in U$ ve her $x\in R$ için $d(\tau(u))$ $(d([x,u]_{\sigma,\tau})+d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}))=0$ ve böylece $d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})=0$ bulunur. (4.3) den $d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ olduğundan, $0=d(\tau(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})=\tau(d(u))$ $d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})=\tau(d(u)\tau^{-1}(d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})))$ bulunur. τ, 1-1 olduğundan,

$$d(u)\tau^{-1}(d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}))=0,\ \forall x\in R,\ \forall u,v\in U \tag{4.4}$$

olur. Lemma 4.11 den $\tau^{-1}(d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}))=0$ veya her $u\in U$ için $u\in Z$ ve buradan,

$$d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})=0 \text{ veya } U\subset Z,\ \forall x\in R,\ \forall v\in U \tag{4.5}$$

elde edilir. $U\subset Z$ ise $d(U)\subset Z$ olduğunu gösterelim. İlk önce $(0)\neq U$, (σ,τ)-sağ Lie ideal ise $[d(U)+U,R]_{\sigma,\tau}\subset d(U)+U$ olduğunu gösterelim. Her $u,v\in U$, $x\in R$ için $[d(u)+v,x]_{\sigma,\tau}=[d(u),x]_{\sigma,\tau}+[v,x]_{\sigma,\tau}=[d(u),x]_{\sigma,\tau}+[u,d(x)]_{\sigma,\tau}-[u,d(x)]_{\sigma,\tau}+[v,x]_{\sigma,\tau}=d([u,x]_{\sigma,\tau})$ $-[u,d(x)]_{\sigma,\tau}+[v,x]_{\sigma,\tau}\in d(U)+U$ bulunur. Yani $d(U)+U$, (σ,τ)-sağ Lie idealdir. $d^2(U)=(0)$ olduğundan $d(d(U)+U)\subset d(U)\subset d(U)+U$ olur. Yani $d(d(U)+U)\subset d(U)+U$ olduğundan $d^2(U)=(0)$ ise $d(U)\subset U$ olduğu görülür. $d(U)\subset U\subset Z$ olduğundan $d(U)\subset Z$ bulunur. Her $x\in R$ ve $v\in U$ için $d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})=0$ ise $0=[d(x),d(v)]_{\sigma,\tau}+[x,d^2(v)]_{\sigma,\tau}=[d(x),d(v)]_{\sigma,\tau}$ olduğundan,

$$[d(x),d(v)]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall x\in R,\ \forall v\in U \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) da $u\in U$ için, x yerine $xd(u)$ yazılırsa, $0=[d(xd(u)),d(v)]_{\sigma,\tau}=$ $[d(x)d(u)+xd^2(u),d(v)]_{\sigma,\tau}=[d(x)d(u),d(v)]_{\sigma,\tau}=d(x)[d(u),d(v)]_{\sigma,\tau}+[d(x),\tau(d(v))]d(u)$ bulunur. (4.6) kullanılarak $[d(x),\tau(d(v))]d(u)=0$ ve böylece $[d(x),\tau(d(v))]d(U)=(0)$ olur.

Lemma 4.11 den her $x\in R$, her $v\in U$ için $[d(x),\tau(d(v))]=0$ veya $U\subset Z$ olur. Yani her $v\in U$ için $[d(R),\tau(d(v)]=(0)$ veya $U\subset Z$ olur. $U\subset Z$ ise $d(U)\subset Z$ olduğunu daha önce göstermiştik. Her $v\in U$ için $[d(R),\tau(d(v))]=(0)$ ise Teorem 2.9 dan, her $v\in U$ için $\tau(d(v))\in Z$ olur. Yani her $v\in U$ için $d(v)\in Z$ ise $d(U)\subset Z$ olur.

Teorem 4.13: $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal olmak üzere, $d^2(U)=(0)$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat: $U\not\subset Z$ olsun. Lemma 4.12 nin ispatında, (4.3) denkleminin, her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ olduğu gösterilmişti. (4.3) de u yerine u+v yazarsak, $0=d(\tau(u+v))d([x,u+v]_{\sigma,\tau})=d(\tau(u)+\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau}+[x,v]_{\sigma,\tau})=(d(\tau(u))+d(\tau(v)))(d([x,u]_{\sigma,\tau})+d([x,v]_{\sigma,\tau}))=d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(v))d([x,v]_{\sigma,\tau})$ bulunur. (4.3) kullanılarak $d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ olur. Bu ifadeyi soldan $u\in U$ için, $d(\tau(u))$ ile çarparsak, $(d(\tau(u)))^2d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ bulunur. Yine, $d^2(U)=(0)$ olduğundan, $d^2(\tau(U))=\tau(d^2(U))=\tau(0)=(0)$ olur. Yani $d^2(\tau(U))=(0)$ olduğundan, Lemma 4.12 den $d(\tau(U))\subset Z$ olur. Bunu kullanarak $0=(d(\tau(u)))^2d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})=(d(\tau(u)))^2d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(v))d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})$ elde edilir. (4.3) eşitliği kullanılarak,

$$(d(\tau(u)))^2d([x,v]_{\sigma,\tau})=0,\ \forall x\in R,\ \forall u,v\in U \tag{4.7}$$

elde edilir. Her $x\in R$, $u\in U$ için, $[x\sigma(u),u]_{\sigma,\tau}\in[R,U]_{\sigma,\tau}$ olduğundan $x[\sigma(u),\sigma(u)]+[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)=[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)\in[R,U]_{\sigma,\tau}$ elde edilir. (4.7) den $(d(\tau(v)))^2d([x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u))=0$ olur. $(d(\tau(v)))^2d([x,u]_{\sigma,\tau})\sigma(u)+(d(\tau(v)))^2[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))=0$ bulunur. Buradan (4.7) kullanılarak,

$$(d(\tau(v)))^2[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))=0,\ \forall u,v\in U,\ \forall x\in R \tag{4.8}$$

elde edilir. $w\in U$ için u yerine u+w yazarsak, $0=(d(\tau(v)))^2[x,u+w]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u+w))=(d(\tau(v)))^2([x,u]_{\sigma,\tau}+[x,w]_{\sigma,\tau})d(\sigma(u)+\sigma(w))=((d(\tau(v)))^2[x,u]_{\sigma,\tau}+d(\tau(v)))^2[x,w]_{\sigma,\tau})(d(\sigma(u))+d(\sigma(w)))=(d(\tau(v)))^2[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))+(d(\tau(v)))^2[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(w))+(d(\tau(v)))^2[x,w]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))+(d(\tau(v)))^2[x,w]_{\sigma,\tau}d(\sigma(w))$ bulunur. (4.8) den $(d(\tau(v)))^2[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))=(d(\tau(v)))^2[x,w]_{\sigma,\tau}d(\sigma(w))=0$ olduğundan,

$$(d(\tau(v)))^2[x,w]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))+(d(\tau(v)))^2[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(w))=0,\forall u,v,w\in U,\forall x\in R \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) u sağdan $d(\sigma(u))$ ile çarparsak, $(d(\tau(v)))^2[x,w]_{\sigma,\tau}(d(\sigma(u)))^2+(d(\tau(v)))^2[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(w))d(\sigma(u))=0$ bulunur. Yine, $d^2(\sigma(U))=(0)$ olduğundan, Lemma 4.12 den $d(\sigma(U))\subset Z$ bulunur. Her $w\in U$ için $d(\sigma(w))\in Z$ olduğundan, (4.8) den,

$d(\tau(v))^2[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(w))d(\sigma(u))=(d(\tau(v)))^2[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))d(\sigma(w))=0$ olur. Yani $u,v\in U$, her $x\in R$ için $(d(\tau(v))^2[x,w]_{\sigma,\tau}(d(\sigma(u)))^2=0$ elde edilir. $a\in U$, $y\in R$ için x yerine $d([x,a]_{\sigma,\tau})y$ yazarsak, $0=(d(\tau(v)))^2[d([x,a]_{\sigma,\tau})y,w]_{\sigma,\tau}(d(\sigma(u)))^2=(d(\tau(v))^2(d([x,a]_{\sigma,\tau})y\ \sigma(w)-\tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau})y)(d(\sigma(u)))^2=(d(\tau(v))^2d([x,a]_{\sigma,\tau})y\sigma(w)(d(\sigma(u))^2-(d(\tau(v)))^2\tau(w)$ $d([x,a]_{\sigma,\tau})y(d(\sigma(u)))^2$ bulunur. (4.7) de $(d(\tau(v))^2d([x,a]_{\sigma,\tau})=0$ olduğundan, $(d(\tau(v)))^2$ $\tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau})y(d(\sigma(u)))^2=0$ ve böylece $(d(\tau(v)))^2\tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau})R(d(\sigma(u)))^2=(0)$ olur. R asal olduğundan $(d(\tau(v)))^2\tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau})=0$ veya $(d(\sigma(u)))^2=0$ elde edilir. Her $u,v\in U$ için $(d(\tau(v)))^2\tau(U)d([x,a]_{\sigma,\tau})=(0)$ veya $(d(\sigma(u)))^2=0$ olur. $(d(\sigma(u)))^2\neq 0$ dır. Çünkü $(d(\sigma(u)))^2=0$ olsaydı, $0=d(\sigma(u))d(\sigma(u))=\sigma(d(u))\sigma(d(u))=\sigma(d(u)d(u))=\sigma((d(u))^2)$ olurdu. σ, 1-1 olduğundan her $u\in U$ için $(d(u))^2=0$ olur. Yani her $u\in U$ için $d(u)d(U)=(0)$ bulunur. Lemma 4.11 den her $u\in U$ için $d(u)=0$ veya $U\subset Z$ olur. $U\not\subset Z$ olduğundan her $u\in U$ için $d(u)=0$ olur. Yani $d(U)=(0)$ bulunur. Her iki tarafı $r\in R$ için $d(r)$ ile çarparsak, $d(r)d(U)=(0)$ olur. Lemma 4.11 den her $r\in R$ için $d(r)=0$ veya $U\subset Z$ olur. Buradan $d=0$ veya $U\subset Z$ bulunur. Bu ise $d\neq 0$ ve $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde her $u\in U$ için $(d(\sigma(u)))^2\neq 0$ olur. O halde her $x\in R$, $v\in U$ için, $(d(\tau(v)))^2$ $\tau(U)d([x,a]_{\sigma,\tau})=(0)$ olur. $\tau d=d\tau$ olduğundan $(d(\tau(v)))^2=d(\tau(v))d(\tau(v))=\tau(d(v))\tau(d(v))=\tau((d(v))^2)$ olur. Yani her $x\in R$, $a,v\in U$ için $\tau((d(v))^2)\tau(U)d([x,a]_{\sigma,\tau})=(0)$ bulunur. Buradan $\tau(d(v)^2U\tau^{-1}(d([x,a]_{\sigma,\tau}))=(0)$ ve τ, 1-1 olduğundan $(d(v))^2U\tau^{-1}(d([x,a]_{\sigma,\tau}))=(0)$ olur. Sonuç 3.41 den her $v\in U$ için $(d(v))^2=0$ veya her $a\in U$ ve $x\in R$ için $\tau^{-1}(d([x,a]_{\sigma,\tau}))=0$ olur. τ^{-1}, 1-1 olduğundan, $(d(U))^2=(0)$ veya $d([x,a]_{\sigma,\tau})=0$ bulunur. Yani $(d(U))^2=(0)$ veya $d([R,U]_{\sigma,\tau})=(0)$ olur. $(d(U))^2=(0)$ ise her $u,v\in U$ için $0=(d(u+v))^2=(d(u)+d(v))(d(u)+d(v))=(d(u))^2+d(u)d(v)+d(v)d(u)+(d(v))^2$ bulunur. $(d(U))^2=(0)$ olduğundan, her $u,v\in U$ için $(d(u))^2=(d(v))^2=0$ olur. Yine $d^2(U)=(0)$ olduğundan Lemma 4.12 den $d(U)\subset Z$ olur. Yani $2d(u)d(v)=0$ bulunur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan her $u,v\in U$ için $d(u)d(v)=0$ olur. Buradan her $u\in U$ için $d(u)d(U)=(0)$ olduğundan Lemma 4.11 den her $u\in U$ için $d(u)=0$ veya $U\subset Z$ ve böylece $d(U)=(0)$ veya $U\subset Z$ bulunur. $U\not\subset Z$ olduğundan $d(U)=(0)$ elde edilir. Her $x\in R$ için soldan $d(x)$ ile çarparsak, $d(x)d(U)=(0)$ olur. Lemma 4.11 den, her $x\in R$ için $d(x)=0$ veya $U\subset Z$ bulunur. Yani, $d(R)=(0)$ veya $U\subset Z$ olduğundan, $d=0$ veya $U\subset Z$ elde edilir. Bu ise $d\neq 0$ veya $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $(d(U))^2\neq(0)$ dır. Dolayısıyla $d([R,U]_{\sigma,\tau})=(0)$

olur. Daha önce her $x\in R$, $u\in U$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)\in[R,U]_{\sigma,\tau}$ olduğunu bulmuştuk. $d([R,U]_{\sigma,\tau})=(0)$ olduğundan, her $x\in R$, her $u\in U$ için $d([x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u))=0$ olur. Buradan $0=d([x,u]_{\sigma,\tau})\sigma(u)+[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))=[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))$ bulunur. $y\in R$ için x yerine xy yazarsak, $0=[xy,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))=x[y,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))+[x,\tau(u)]yd(\sigma(u))$ bulunur. $[y,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))=0$ olduğundan, her $x,y\in R$, $u\in U$ için $[x,\tau(u)]yd(\sigma(u))=0$ bulunur. $[x,\tau(u)]Rd(\sigma(u))=(0)$ ve R asal olduğundan, $[x,\tau(u)]=0$ veya $d(\sigma(u))=0$ elde edilir. Her $u\in U$ için $d(\sigma(u))=0$ ise, $0=d(\sigma(u))=\sigma(d(u))$ ve σ, 1-1 olduğundan $d(u)=0$ olur. Yani, her $u\in U$ için $u\in Z$ veya $d(u)=0$ olur. $K=\{u\in U| u\in Z\}$ ve $L=\{u\in U| d(u)=0\}$ kümelerini tanımlayalım. Brauer Trick'ten K=U veya L=U bulunur. $U\not\subset Z$ olduğundan $U\neq K$ olur. Yani U=L dir. Her $u\in U$ için $d(u)=0$ olur. O halde $d(U)=(0)$ dır. Her $x\in R$ için soldan d(x) ile çarparsak, $d(x)d(U)=(0)$ olur. Lemma 4.11 den, her $x\in R$ için $d(x)=0$ veya $U\subset Z$ olur. Yani d=0 veya $U\subset Z$ bulunur. Bu ise $d\neq0$ ve $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $U\subset Z$ olmalıdır.

Soytürk, M., 1996

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, $0\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $charR\neq2,3$, $0\neq d:R\to R$ türev, $\sigma,\tau:R\to R$ iki otomorfizm, $\sigma d=d\sigma$ ve $\tau d=d\tau$ olarak alınmıştır.

Lemma 4.14: R asal halka ve $(0)\neq U$, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset Z$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat: U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ olur. x yerine $x\sigma(u)$ yazarsak, $[x\sigma(u),u]_{\sigma,\tau}=x[\sigma(u),\sigma(u)]+[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)=[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)\in Z$ olur. $[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ olduğundan her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}=0$ veya $\sigma(u)\in Z$ bulunur. Yani her $u\in U$ ve $x\in R$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau}=0$ veya $u\in Z$ olur. Her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}=0$ ise x yerine $y\in R$ için, xy yazarsak, $0=[xy,u]_{\sigma,\tau}=x[y,\sigma(u)]+[x,u]_{\sigma,\tau}y=x[y,\sigma(u)]$ bulunur. $R[y,\sigma(u)]=(0)$ ve R asal olduğundan her $y\in R$ ve her $u\in U$ için $[y,\sigma(u)]=0$ olur. Yani $U\subset Z$ bulunur.

Lemma 4.15: R asal halka, $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $0\neq d$ türev ve $charR\neq2$ olmak üzere, $d(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat: $d(U)\subset Z$ olduğundan, her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $d([x,u]_{\sigma,\tau})\in Z$ olur. Buradan,

$$d([x,u]_{\sigma,\tau})=[d(x),u]_{\sigma,\tau}+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}\in Z, \forall x\in R,\ \forall u\in U \qquad (5.1)$$

bulunur. (5.1) de $v\in U$ için x yerine $xd(v)$ yazarsak, $[d(xd(v)),u]_{\sigma,\tau}+[xd(v),d(u)]_{\sigma,\tau}\in Z$ olduğundan $[d(x)d(v)+xd^2(v),u]_{\sigma,\tau}+[xd(v),d(u)]_{\sigma,\tau}=[d(x)d(v),u]_{\sigma,\tau}+[xd^2(v),u]_{\sigma,\tau}+[xd(v),d(u)]_{\sigma,\tau}=d(x)[d(v),\sigma(u)]+[d(x),u]_{\sigma,\tau}d(v)+x[d^2(v),\sigma(u)]+[x,u]_{\sigma,\tau}d^2(v)+x[d(v),\sigma(d(u))]+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d(v)\in Z$ bulunur. $d(U)\subset Z$ olduğundan, her $v\in U$ için $d(v)\in Z$ dir. Her $r\in R$ için $[d(v),r]=0$ ise $d([d(v),r])=d(0)=0$ olduğundan $[d^2(v),r]+[d(v),d(r)]=[d^2(v),r]$ bulunur. Yani, her $v\in U$ için $d^2(v)\in Z$ dir. Her $v\in U$ için $d(v),d^2(v)\in Z$ olduğundan $[d(v),\sigma(u)]=[d^2(v),\sigma(u)]=[d(v),\sigma(d(u))]=0$ olur. Yani, her $u,v\in U$ ve $x\in R$ için $[d(x),u]_{\sigma,\tau}d(v)+[x,u]_{\sigma,\tau}d^2(v)+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d(v)\in Z$ elde edilir. Burada her $x\in R$ ve $u,v\in U$ için, $([d(x),u]_{\sigma,\tau}+[x,d(u)]_{\sigma,\tau})d(v)+[x,u]_{\sigma,\tau}d^2(v)=d([x,u]_{\sigma,\tau})d(v)+[x,u]_{\sigma,\tau}d^2(v)\in Z$ dir. $d([x,u]_{\sigma,\tau})d(v)\in Z$ olduğundan, her $x\in R$, $u,v\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}d^2(v)\in Z$ elde edilir. Her $v\in U$ için $d^2(v)\in Z$ olduğundan, $d^2(v)=0$ veya $[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ olur. Yani $d^2(U)=(0)$ veya $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset Z$ bulunur. $d^2(U)=(0)$ ise Teorem 4.13 den $U\subset Z$ bulunur. $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset Z$ ise Lemma 4.14 den $U\subset Z$ bulunur.

Lemma 4.16: R asal halka, $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $charR\neq 2,3$, $0\neq d$ türev $d(U)\subset U$ ve $d^2(U)\subset Z$ olmak üzere, $d^3(U)=(0)$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat: $U\not\subset Z$ olsun. U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan, her $u\in U$ ve $x\in R$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. x yerine $\tau(u)x$ yazarsak, $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u),\tau(u)]x=\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. $d^3(U)=(0)$ olduğundan $d^3(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau})=0$ bulunur. Her $x\in R$, $u\in U$ için, $0=d^2(d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}+\tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau}))=d(d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}+d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+\tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau}))=d(d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}+2d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+\tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau}))=d^3(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}+d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+2d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+2d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau})+\tau(u)d^3([x,u]_{\sigma,\tau})$ bulunur. Böylece her $x\in R$, $u\in U$ için $d^3(\tau(u))=\tau(d^3(u))=\tau(0)=0$ ve buradan $d^3([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ olur. O halde $3d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+3d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ bulunur. Yani $3(d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau}))=0$ ve $charR\neq 3$ olduğundan $d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ elde edilir. $\tau d=d\tau$ olduğundan,

$$\tau(d^2(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+\tau(d(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau})=0, \forall x\in R,\ \forall u\in U \qquad (5.2)$$

bulunur. (5.2) de u yerine $d(u)$ yazarsak, $\tau(d^3(u))d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})+\tau(d^2(u))d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$ olur. $d^3(U)=(0)$ olduğundan $\tau(d^3(u))=\tau(0)=0$ olur. Yani her $u\in U$, $x\in R$ için $\tau(d^2(u))d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$ bulunur. $d^2(U)\subset Z$ olduğundan, her $u\in U$ için $d^2(u)\in Z$

olur. Burada $\tau(d^2(u))\in Z$ olduğundan, $\tau(d^2(u))Rd^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=(0)$ yazılabilir. R asal olduğundan, her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $\tau(d^2(u))=0$ veya $d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$ bulunur. τ, 1-1 olduğundan,

$$d^2(u)=0 \text{ veya } d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0,\ \forall x\in R,\ \forall u\in U \tag{5.3}$$

elde edilir. Her $x\in R$, $u\in U$ için $d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$ ise x yerine $x\sigma(d(u))$ yazarsak, $0=d^2([x\sigma(d(u)),d(u)]_{\sigma,\tau})=d^2(x[\sigma(d(u)),\sigma(d(u))]+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d(u)))=d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d(u)))=d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d(u))+2d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})d(\sigma(d(u))+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d^2(\sigma(d(u)))$ bulunur. Her $x\in R$, $u\in U$ için $d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$ olduğundan, $2d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})d(\sigma(d(u)))+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d^2(\sigma(d(u)))=2d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d^2(u))+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d^3(u))=0$ bulunur. $d^3(U)=(0)$ olduğundan, her $u\in U$ için $d^3(u)=0$ olur. Yani $\sigma(d^3(u))=\sigma(0)=0$ elde edilir. O halde her $x\in R$, her $u\in U$ için $2d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d^2(u))=0$ olur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d^2(u))=0$ olur. $d^2(U)\subset Z$ olduğundan, her $u\in U$ için $\sigma(d^2(u))\in Z$ olur. Yani $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})R\sigma(d^2(u))=(0)$ yazılabilir. R asal olduğundan, her $x\in R$, $u\in U$ için $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$ veya $\sigma(d^2(u))=0$ bulunur. σ, 1-1 olduğundan $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$ veya $d^2(u)=0$ bulunur. Her $x\in R$, $u\in U$ için $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$ ise, x yerine $x\sigma(d(u))$ yazarsak, $0=d([x\sigma(d(u)),d(u)]_{\sigma,\tau})=d(x[\sigma(d(u)),\sigma(d(u))]+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d(u)))=d([x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d(u)))$ $=d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d(u))+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d(\sigma(d(u)))$ elde edilir. $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$ olduğundan, her $x\in R$, $u\in U$ için $[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d(\sigma(d(u)))=0$ bulunur. $\sigma d=d\sigma$ olduğundan, $0=[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d(\sigma(d(u)))=[x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d^2(u))$ olur ve burada $\sigma(d^2(u))\in Z$ olduğundan, $[x,d(u)]_{\sigma,\tau}R\sigma(d^2(u))=0$ yazılabilir. R asal olduğundan, her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[x,d(u)]_{\sigma,\tau}=0$ veya $\sigma(d^2(u))=0$ bulunur. σ, 1-1 olduğundan $[x,d(u)]_{\sigma,\tau}=0$ veya $d^2(u)=0$ olur. Her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[x,d(u)]_{\sigma,\tau}=0$ ise $y\in R$ için x yerine xy yazarsak, $0=[xy,d(u)]_{\sigma,\tau}=x[y,\sigma(d(u))]+[x,d(u)]_{\sigma,\tau}y=x[y,\sigma(d(u))]$ bulunur. $R[y,\sigma(d(u))]=(0)$ ve R asal olduğundan her $y\in R$ ve $u\in U$ için $[y,\sigma(d(u))]=0$ olur. Yani $\sigma(d(u))\in Z$ olur. Buradan her $u\in U$ için $d(u)\in Z$ elde edilir. (5.3) denklemini, $d^2(u)=0$ veya $d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})=0$, $\forall x\in R$, $\forall u\in U$ şeklinde bulmuştuk. Buradan sonuç olarak her $u\in U$ için $d^2(u)=0$ veya $d(u)\in Z$ elde edilir. $K=\{u\in U \mid d^2(u)=0\}$ ve $L=\{u\in U \mid d(u)\in Z\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L, U nun toplamsal alt grubudur. $U=K\cup L$ dir. Brauer Trick'ten $U=K$ veya $U=L$ olur. $U=K$ olsun. Her $u\in U$ için $d^2(u)=0$ olur. Yani $d^2(U)=(0)$'dır. Teorem 4.13 den $U\subset Z$ bulunur. Bu ise $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde

$U\neq K$ dır. Dolayısıyla $U=L$ olur. Her $u\in U$ için $d(u)\in Z$ olur. Yani $d(U)\subset Z$ dir. Lemma 4.15 den $U\subset Z$ olur. Bu ise $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $U\subset Z$ bulunur.

Teorem 4.17: R asal halka, $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $\mathrm{char}R\neq 2,3$ ve $0\neq d$ türev olmak üzere, $d(U)\subset U$ ve $d^2(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat: $d(U)\subset U$ ise $d^4(U)\subset d^3(U)\subset d^2(U)$ olur. $d^2(U)\subset Z$ olduğundan $d^4(U)\subset d^3(U)\subset d^2(U)\subset Z$ bulunur. $d^2(U)\subset Z$ olduğundan, her $x\in R$, $u\in U$ için $d^2([x,u]_{\sigma,\tau})\in Z$ olur. Buradan $d([d(x),u]_{\sigma,\tau}+[x,d(u)]_{\sigma,\tau})=[d^2(x),u]_{\sigma,\tau}+[d(x),d(u)]_{\sigma,\tau}+[d(x),d(u)]_{\sigma,\tau}+[x,d^2(u)]_{\sigma,\tau}=[d^2(x),u]_{\sigma,\tau}+2[d(x),d(u)]_{\sigma,\tau}+[x,d^2(u)]_{\sigma,\tau}\in Z$ elde edilir. Yani,

$$d^2([x,u]_{\sigma,\tau})=[d^2(x),u]_{\sigma,\tau}+2[d(x),d(u)]_{\sigma,\tau}+[x,d^2(u)]_{\sigma,\tau}\in Z,\ \forall x\in R,\ \forall u\in U \qquad (5.4)$$

bulunur. Her $v\in U$ için x yerine $xd^2(v)$ yazarsak, $[d^2(xd^2(v)),u]_{\sigma,\tau}+2[d(xd^2(v)),d(u)]_{\sigma,\tau}+[xd^2(v),d^2(u)]_{\sigma,\tau}=[d(d(x)d^2(v)+xd^3(v)),u]_{\sigma,\tau}+2[d(x)d^2(v)+xd^3(v),d(u)]_{\sigma,\tau}+[xd^2(v),d^2(u)]_{\sigma,\tau}=[d^2(x)d^2(v)+d(x)d^3(v)+d(x)d^3(v)+xd^4(v),u]_{\sigma,\tau}+2[d(x)d^2(v)+xd^3(v),d(u)]_{\sigma,\tau}+[xd^2(v),d^2(u)]_{\sigma,\tau}=[d^2(x)d^2(v),u]_{\sigma,\tau}+2[d(x)d^3(v),u]_{\sigma,\tau}+[xd^4(v),u]_{\sigma,\tau}+2[d(x)d^2(v),d(u)]_{\sigma,\tau}+2[xd^3(v),d(u)]_{\sigma,\tau}+x[d^2(v),\sigma(d^2(u))]+[x,d^2(u)]_{\sigma,\tau}d^2(v)\in Z$ eşitliği elde edilir. $v\in U$ için $d^2(v)\in Z$ olduğundan $[d^2(v),\sigma(d^2(u))]=0$ olması kullanılarak $d^2(x)[d^2(v),\sigma(u)]+[d^2(x),u]_{\sigma,\tau}d^2(v)+2d(x)[d^3(v),\sigma(u)]+2[d(x),u]_{\sigma,\tau}d^3(v)+x[d^4(v),\sigma(u)]+[x,u]_{\sigma,\tau}d^4(v)+2d(x)[d^2(v),\sigma(d(u))]+2[d(x),d(u)]_{\sigma,\tau}d^2(v)+2x[d^3(v),\sigma(d(u))]+2[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d^3(v)+[x,d^2(u)]_{\sigma,\tau}d^2(v)\in Z$ bulunur. Her $v\in U$ için $d^2(v),d^3(v),d^4(v)\in Z$ olduğundan, $[d^2(v),\sigma(u)]=[d^3(v),\sigma(u)]=[d^4(v),\sigma(u)]=[d^2(v),\sigma(d(u))]=[d^3(v),\sigma(d(u))]=0$ olur. Böylece $[d^2(x),u]_{\sigma,\tau}d^2(v)+2[d(x),d(u)]_{\sigma,\tau}d^2(v)+[x,d^2(u)]_{\sigma,\tau}d^2(v)+2[d(x),u]_{\sigma,\tau}d^3(v)+2[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d^3(v)+[x,u]_{\sigma,\tau}d^4(v)=d^2([x,u]_{\sigma,\tau})d^2(v)+2d([x,u]_{\sigma,\tau})d^3(v)+[x,u]_{\sigma,\tau}d^4(v)\in Z$ bulunur. $d^2([x,u]_{\sigma,\tau})d^2(v)\in Z$ olduğundan $2d([x,u]_{\sigma,\tau})d^3(v)+[x,u]_{\sigma,\tau}d^4(v)\in Z$ olur. $d^3(v)\in Z$ olduğundan,

$$2d^3(v)d([x,u]_{\sigma,\tau})+[x,u]_{\sigma,\tau}d^4(v)\in Z,\ \forall x\in R,\ \forall u,v\in U \qquad (5.5)$$

elde edilir. Her $w\in U$ için x yerine $xd^2(w)$ yazarsak, $2d^3(v)d([xd^2(w),u]_{\sigma,\tau})+[xd^2(w),u]_{\sigma,\tau}d^4(v)\in Z$ olur. Her $x\in R$, $u,v,w\in U$ için, $2d^3(v)([d(xd^2(w)),u]_{\sigma,\tau}+[xd^2(w),d(u)]_{\sigma,\tau})+[xd^2(w),u]_{\sigma,\tau}d^4(v)=2d^3(v)([d(x)d^2(w)+xd^3(w),u]_{\sigma,\tau}+[xd^2(w),d(u)]_{\sigma,\tau})+[xd^2(w),u]_{\sigma,\tau}d^4(v)=2d^3(v)([d(x)d^2(w),u]_{\sigma,\tau}+[xd^3(w),u]_{\sigma,\tau}+[xd^2(w),d(u)]_{\sigma,\tau})+[xd^2(w),u]_{\sigma,\tau}d^4(v)=2d^3(v)[d(x)d^2(w),u]_{\sigma,\tau}+2d^3(v)[xd^3(w),u]_{\sigma,\tau}+2d^3(v)[xd^2(w),d(u)]_{\sigma,\tau}+[xd^2(w),u]_{\sigma,\tau}d^4(v)=2d^3(v)d(x)[d^2(w),\sigma(u)]+2d^3(v)[d(x),u]_{\sigma,\tau}d^2(w)+2d^3(v)x[d^3(w),\sigma(u)]+2d^3(v)$

$[x,u]_{\sigma,\tau}d^3(w)+2d^3(v)x[d^2(w),\sigma(d(u))]+2d^3(v)[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d^2(w)+x[d^2(w),\sigma(u)]d^4(v)+[x,u]_{\sigma,\tau}d^2(w)d^4(v)\in Z$ bulunur. Her $w\in U$ için $d^2(w),d^3(w)\in Z$ olduğundan, $[d^2(w),\sigma(u)]=[d^3(w),\sigma(u)]=[d^2(w),\sigma(d(u))]=0$ olur. Yani, her $x\in R$, $u,v,w\in U$ için $2d^3(v)[d(x),u]_{\sigma,\tau}d^2(w)+2d^3(v)[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d^2(w)+2d^3(v)[x,u]_{\sigma,\tau}d^3(w)_{\sigma,\tau}+[x,u]_{\sigma,\tau}d^2(w)d^4(v)\in Z$ olur. Her $x\in R$, her $u,v,w\in U$ için $d^3(w),d^4(v)\in Z$ olduğundan, $2d^3(v)d([x,u]_{\sigma,\tau})d^2(w)+[x,u]_{\sigma,\tau}d^4(v)d^2(w)+2d^3(v)d^3(w)[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ bulunur. Böylece $(2d^3(v)d([x,u]_{\sigma,\tau})+[x,u]_{\sigma,\tau}d^4(v))d^2(w)+2d^3(v)d^3(w)[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ bulunur. (5.5) den $2d^3(v)d([x,u]_{\sigma,\tau})+[x,u]_{\sigma,\tau}d^4(v)\in Z$ ve $d^2(w)\in Z$ olduğundan, $(2d^3(v)d([x,u]_{\sigma,\tau})+[x,u]_{\sigma,\tau}d^4(v))d^2(w)\in Z$ olur. Yani her $u,v,w\in U$ ve $x\in R$ için $2d^3(v)d^3(w)[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ elde edilir. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan, her $u,v,w\in U$ için $d^3(v)d^3(w)[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ bulunur. Her $v,w\in U$ için $d^3(v)d^3(w)\in Z$ olduğundan $d^3(v)d^3(w)=0$ veya $[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ bulunur. Her $v,w\in U$ için $d^3(v)d^3(w)=0$ ise $d^3(v)Rd^3(w)=(0)$ olduğundan $d^3(v)=0$ veya $d^3(w)=0$ olur. Yani $d^3(U)=(0)$ olur. Lemma 4.16 dan $U\subset Z$ olur. Her $x\in R$, $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}\in Z$ ise $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset Z$ olduğundan Lemma 4.14 den $U\subset Z$ olur. Sonuç olarak $U\subset Z$ elde edilir.

Aydın, N., Kaya, K., Gölbaşı, Ö., 2001

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal, $0\neq d:R\rightarrow R$ türev ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma 4.18: R asal halka, $d:R\rightarrow R$ türev olmak üzere, $a\in R$ için $d([R,a])=(0)$ olması için gerek ve yeter koşul $[d(R),a]=(0)$ olmasıdır.

İspat: $[d(R),a]=(0)$ ise Teorem 2.9 dan $a\in Z$ olur. Yani $[R,a]=(0)$ yazılabilir. Her $r\in R$ için $[r,a]=0$ olduğundan $d([r,a])=d(0)=0$ bulunur. Yani, $d([R,a])=(0)$ elde edilir. $d([R,a])=(0)$ ise her $r\in R$ için $d([r,a])=0$ ifadesinde, r yerine ar yazarsak, $0=d([ar,a])=d(a[r,a]+[a,a]r)=d(a[r,a])=d(a)[r,a]+ad([r,a])=d(a)[r,a]$ bulunur. Yani,

$$d(a)[r,a]=0,\ \forall r\in R \tag{2.1}$$

bulunur. (2.1) de her $s\in R$ için r yerine rs yazarsak, $0=d(a)[rs,a]=d(a)r[s,a]+d(a)[r,a]s$ bulunur. (2.1) den $d(a)[r,a]=0$ olduğundan, her $s,r\in R$ için $d(a)r[s,a]=0$ bulunur. Her $s\in R$ için $d(a)R[s,a]=(0)$ ve R asal olduğundan $d(a)=0$ veya $[s,a]=0$ olur. Yani $d(a)=0$ veya $a\in Z$ bulunur. $d(a)=0$ ise her $r\in R$ için, $0=d([r,a])=[d(r),a]+[r,d(a)]=[d(r),a]$ bulunur. Yani $[d(R),a]=(0)$ elde edilir. $a\in Z$ ise her $r\in R$ için $[d(r),a]=0$ olduğundan $[d(R),a]=(0)$dır.

Sonuç 4.19: $d([R,a])=(0)$ ise $a\in Z$ dir.

İspat: $d([R,a])=(0)$ ise Lemma 4.18 den $[d(R),a]=(0)$ olur. Teorem 2.9 dan $a\in Z$ olur.

Sonuç 4.20: $d([R,R])=(0)$ ise R değişmelidir.

İspat: Her $r\in R$ için $d([R,r])=(0)$ olduğundan, Sonuç 4.19 dan, her $r\in R$ için $r\in Z$ olur. Yani, $R\subset Z$ olduğundan, R değişmelidir.

Lemma 4.21: $(R,a)_{\sigma,\tau}=(0)$ ise $a\in Z$ olur.

İspat: Her $x,y\in R$ için $0=(xy,a)_{\sigma,\tau}=x[y,\sigma(a)]+(x,a)_{\sigma,\tau}y=x[y,\sigma(a)]$ bulunur. Her $y\in R$ için $R[y,\sigma(a)]=(0)$ ve R asal olduğundan $[y,\sigma(a)]=0$ bulunur. Yani $a\in Z$ dir.

Sonuç 4.22: R asal halka olmak üzere $(R,R)_{\sigma,\tau}=(0)$ ise R değişmelidir.

İspat: Her $r\in R$ için $(R,r)_{\sigma,\tau}=(0)$ ise Lemma 4.21 den her $r\in R$ için $r\in Z$ olur. Yani $R\subset Z$ olduğundan R değişmelidir.

Teorem 4.23: $(R,a)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a\in Z$ dir.

İspat: Her $x\in R$ için $(x,a)_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ ise x yerine $x\sigma(a)$ yazarsak, $(x\sigma(a),a)_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Her $x\in R$ için $x[\sigma(a),\sigma(a)]+(x,a)_{\sigma,\tau}\sigma(a)\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, $(x,a)_{\sigma,\tau}\sigma(a)\in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Her $x\in R$ için $(x,a)_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, Önerme 1.26 dan $(x,a)_{\sigma,\tau}=0$ veya $\sigma(a)\in Z$ bulunur. Yani $(R,a)_{\sigma,\tau}=(0)$ veya $a\in Z$ olur. $(R,a)_{\sigma,\tau}=(0)$ ise Lemma 4.21 den $a\in Z$ bulunur. Sonuç olarak $a\in Z$ elde edilir.

Sonuç 4.24: $(R,a)\subset Z$ ise $a\in Z$ olur.

İspat: $(R,a)\subset Z$ ise Teorem 4.23 den $a\in Z$ dir.

Sonuç 4.25: $(R,R)\subset Z$ ise R değişmelidir.

İspat: Her $r\in R$ için $(R,r)\subset Z$ ise Sonuç 4.24 den her $r\in R$ için $r\in Z$ olur. Yani, $R\subset Z$ olduğundan, R değişmelidir.

Sonuç 4.26: U,(σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $(R,U)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat: Her $a\in U$ için $(R,a)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise Teorem 4.23 den, her $a\in U$ için $a\in Z$ dir. Yani $U\subset Z$ bulunur.

Teorem 4.27: U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $a\in R$ için $(U,a)\subset Z$ ise $a^2\in Z$ veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur.

İspat: U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. $(U,a)\subset Z$ olduğundan, her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $([x,u]_{\sigma,\tau},a)\in Z$ olur. Her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $a[x,u]_{\sigma,\tau}+[x,u]_{\sigma,\tau}a\in Z$ olur. O halde, $0=[a[x,u]_{\sigma,\tau}+[x,u]_{\sigma,\tau}a, a]=[a[x,u]_{\sigma,\tau},a]+[[x,u]_{\sigma,\tau}a,a]=a[[x,u]_{\sigma,\tau},a]+[a,a][x,u]_{\sigma,\tau}+[x,u]_{\sigma,\tau}[a,a]+[[x,u]_{\sigma,\tau},a]a=a[[x, u]_{\sigma,\tau},a]+[[x,u]_{\sigma,\tau},a]a=([[x,u]_{\sigma,\tau},a],a)$ bulunur. Her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $[[x,u]_{\sigma,\tau},(a,a)]-([[x,u]_{\sigma,\tau},a],a)=0$ olur. Her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $([[x,u]_{\sigma,\tau},a],a)=0$ olduğundan, her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $[[x,u]_{\sigma,\tau},(a,a)]=0$ olur. Yani, her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $0=[[x,u]_{\sigma,\tau},2a^2]=2[[x,u]_{\sigma,\tau},a^2]$ bulunur. char$R\neq 2$ olduğundan,

$$[[x,u]_{\sigma,\tau},a^2]=0,\ \forall x\in R,\ \forall u\in U \qquad (2.2)$$

bulunur. (2.2) de x yerine $x\sigma(u)$ yazılırsa, $0=[[x\sigma(u),u]_{\sigma,\tau},a^2]=[x[\sigma(u),\sigma(u)]+[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u),a^2]=[[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u),a^2]=[x,u]_{\sigma,\tau}[\sigma(u),a^2]+[[x,u]_{\sigma,\tau},a^2]\sigma(u)$ bulunur. (2.2) den $[[x,u]_{\sigma,\tau},a^2]=0$ olduğundan,

$$[x,u]_{\sigma,\tau}[\sigma(u),a^2]=0,\ \forall x\in R,\ \forall u\in U \qquad (2.3)$$

elde edilir. (2.3) de, her $y\in R$ için x yerine xy yazarsak, $0=[xy,u]_{\sigma,\tau}[\sigma(u),a^2]=\{x[y,u]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(u)]y\}[\sigma(u),a^2]=x[y,u]_{\sigma,\tau}[\sigma(u),a^2]+[x,\tau(u)]y[\sigma(u),a^2]$ bulunur. (2.3) den, $[y,u]_{\sigma,\tau}[\sigma(u),a^2]=0$ olduğundan, her $x,y\in R$ ve her $u\in U$ için $[x,\tau(u)]y[\sigma(u),a^2]=0$ bulunur. Her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $[x,\tau(u)]R[\sigma(u),a^2]=(0)$ ve R asal olduğundan $[x,\tau(u)]=0$ veya $[\sigma(u),a^2]=0$ olur. Yani, her $u\in U$ için $u\in Z$ veya $[\sigma(u),a^2]=0$ bulunur. Her $u\in U$ için $u\in Z$ veya $[u,\sigma^{-1}(a^2)]=0$ dır. Yani, her $u\in U$ için $[u,\sigma^{-1}(a^2)]=0$ bulunur. O halde $[U,\sigma^{-1}(a^2)]=(0)$ elde edilir. Lemma 3.45 den, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ veya $\sigma^{-1}(a^2)\in Z$ bulunur. Yani, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ veya $a^2\in Z$ dir.

Teorem 4.28: R asal halka ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $(U,R)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat: $(U,R)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, her $u\in U$ ve her $r\in R$ için $[(u,r)_{\sigma,\tau},r]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Her $r\in R$ ve her $u\in U$ için $0=[u\sigma(r)+\tau(r)u,r]_{\sigma,\tau}=[u\sigma(r),r]_{\sigma,\tau}+[\tau(r)u,r]_{\sigma,\tau}=u[\sigma(r),\sigma(r)]+[u,r]_{\sigma,\tau}\sigma(r)+\tau(r)[u,r]_{\sigma,\tau}+[\tau(r),\tau(r)]u=[u,r]_{\sigma,\tau}\sigma(r)+\tau(r)[u,r]_{\sigma,\tau}=([u,r]_{\sigma,\tau},r)$ bulunur. Yani,

$$([u,r]_{\sigma,\tau},r)_{\sigma,\tau}=0,\ \forall r\in R,\ \forall u\in U \qquad (2.4)$$

elde edilir. Her $r\in R$ ve her $u\in U$ için, $0=(u\sigma(r)-\tau(r)u,r)_{\sigma,\tau}=(u\sigma(r),r)_{\sigma,\tau}-(\tau(r)u,r)_{\sigma,\tau}=u\sigma(r)\sigma(r)+\tau(r)u\sigma(r)-\tau(r)u\sigma(r)-\tau(r)\tau(r)u=u\sigma(r)\sigma(r)-\tau(r)\tau(r)u=u\sigma(r^2)-\tau(r^2)u=[u,r^2]_{\sigma,\tau}$ bulunur. Yani,

$$[u,r^2]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall r\in R,\ \forall u\in U \qquad (2.5)$$

bulunur. (2.5) de her $s\in R$ için r yerine r+s yazarsak, $0=[u,(r+s)^2]_{\sigma,\tau}=[u,(r+s)(r+s)]_{\sigma,\tau}=[u,r^2+rs+sr+s^2]_{\sigma,\tau}=[u,r^2]_{\sigma,\tau}+[u,rs]_{\sigma,\tau}+[u,sr]_{\sigma,\tau}+[u,s^2]_{\sigma,\tau}=[u,rs]_{\sigma,\tau}+[u,sr]_{\sigma,\tau}=u\sigma(rs)-\tau(rs)u+u\sigma(sr)-\tau(sr)u=u\sigma(r)\sigma(s)-\tau(r)\tau(s)u+u\sigma(s)\sigma(r)-\tau(s)\tau(r)u=u(\sigma(r)\sigma(s)+\sigma(s)\sigma(r))-(\tau(r)\tau(s)+\tau(s)\tau(r))u=u(\sigma(r),\sigma(s))-(\tau(r),\tau(s))u=u\sigma(r,s)-\tau(r,s)u=[u,(r,s)]_{\sigma,\tau}$ bulunur. Yani,

$$[u,(r,s)]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall r,s\in R,\ \forall u\in U \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.6) da her $s\in R$ için r yerine rs yazarsak, $0=[u,(rs,s)]_{\sigma,\tau}=[u,r[s,s]+(r,s)s]_{\sigma,\tau}=[u,(r,s)s]_{\sigma,\tau}=\tau((r,s))[u,s]_{\sigma,\tau}+[u,(r,s)]_{\sigma,\tau}\sigma(s)$ bulunur. (2.6) dan $[u,(r,s)]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan,

$$\tau((r,s))[u,s]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall r,s\in R,\ \forall u\in U \tag{2.7}$$

elde edilir. (2.7) de, her $t\in R$ için r yerine rt yazarsak, $0=\tau((rt,s))[u,s]_{\sigma,\tau}=\tau(r(t,s)-[r,s]t)[u,s]_{\sigma,\tau}=\{\tau(r)\tau((t,s))-\tau([r,s])\tau(t)\}[u,s]_{\sigma,\tau}=\tau(r)\tau((t,s))[u,s]_{\sigma,\tau}-\tau([r,s])\tau(t)[u,s]_{\sigma,\tau}$ bulunur. (2.7) den $\tau((t,s))[u,s]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan, her $r,s,t\in R$ ve her $u\in U$ için $\tau([r,s])\tau(t)[u,s]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Her $r,s\in R$ için $\tau([r,s])\tau(R)[u,s]_{\sigma,\tau}=\tau([r,s])R[u,s]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve R asal olduğundan $\tau([r,s])=0$ veya $[u,s]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Her $u\in U$ için $[u,s]_{\sigma,\tau}=0$ ise $[U,s]_{\sigma,\tau}=(0)$ olur. Her $r,s\in R$ için $\tau([r,s])=0$ ise τ, 1-1 olduğundan $[r,s]=0$ bulunur. Yani $[R,s]=(0)$ olduğundan $s\in Z$ dir. O halde, her $s\in R$ için $s\in Z$ veya $[U,s]_{\sigma,\tau}=(0)$ bulunur. $K=\{s\in R|s\in Z\}$ ve $L=\{s\in R|[U,s]_{\sigma,\tau}=(0)\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L, R nin alt grubudur. Ayrıca $R=L\cup K$ olur. Brauer Trick'ten R=L veya R=K dır.R=K ise her $r\in R$ için $r\in Z$ olduğundan $R\subset Z$ olur. Yani $U\subset Z$ dir. R=L ise,

$$[U,s]_{\sigma,\tau}=(0),\ \forall s\in R \tag{2.8}$$

bulunur. Her $u\in U$ için $0=[u,s]_{\sigma,\tau}=u\sigma(s)-\tau(s)u$ bulunur. Yani her $s\in R$ ve her $u\in U$ için $u\sigma(s)=\tau(s)u$ bulunur. Hipotezden, her $r,s\in R$ ve her $u\in U$ için $(u,rs)_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ dır. Her $r,s\in R$ ve her $u\in U$ için $u\sigma(rs)+\tau(rs)u=u\sigma(r)\sigma(s)+\tau(r)\tau(s)u\in C_{\sigma,\tau}$ dır. Her $u\in U$ ve her $s\in R$ için $\tau(s)u=u\sigma(s)$ olduğundan, $u\sigma(r)\sigma(s)+\tau(r)u\sigma(s)=(u\sigma(r)+\tau(r)u)\sigma(s)=(u,r)_{\sigma,\tau}\sigma(s)\in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Her $u\in U$ ve her $r\in R$ için $(u,r)_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, Önerme 1.26 dan $(u,r)_{\sigma,\tau}=0$ veya $\sigma(s)\in Z$ bulunur. Buradan her $r,s\in R$ için $(u,r)_{\sigma,\tau}=(0)$ veya $s\in Z$ olur. Dolayısıyla $(U,R)_{\sigma,\tau}=(0)$ veya $R\subset Z$ olur. $R\subset Z$ ise $U\subset Z$ bulunur. $(U,R)_{\sigma,\tau}=(0)$ ise,

$$(U,r)_{\sigma,\tau}=(0),\ \forall r\in R \tag{2.9}$$

bulunur. (2.8) i, her $s\in R$ için $[U,s]_{\sigma,\tau}=(0)$ olarak bulmuştuk. Buradan her $u\in U$ için $0=[u,s]_{\sigma,\tau}=u\sigma(s)-\tau(s)u$ bulunur. Yani $U\sigma(R)-\tau(R)u=(0)$ dır. (2.9) u her $r\in R$ için $(U,r)_{\sigma,\tau}=(0)$ olarak bulmuştuk. Her $u\in U$ ve her $r\in R$ için $0=(u,r)_{\sigma,\tau}=u\sigma(r)+\tau(r)u$ bulunur. Yani, her $u\in U$ için $u\sigma(R)+\tau(R)u=(0)$ dır. (2.8) ve (2.9) dan bulduğumuz sonuçları taraf tarafa toplarsak, $u\sigma(R)-\tau(R)u+u\sigma(R)+\tau(R)u=2u\sigma(R)$ bulunur. Her $s\in R$ ve her $u\in U$ için $2u\sigma(s)=0$ ve $charR\neq 2$ olduğundan, $u\sigma(s)=0$ olur. Her $s\in R$ için $U\sigma(s)=(0)$ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan Lemma 3.53 den her $s\in R$ için $\sigma(s)=0$ veya $U\subset Z$ olur. Her $s\in R$ için $\sigma(s)=0$ ise σ, 1-1 olduğundan, her $s\in R$ için $s=0$ olur. Yani $R=(0)$ olur. Hipotezden $R\neq(0)$ olduğundan $U\subset Z$ olur.

Teorem 4.29: R asal halka ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $a\in R$ için $(U,a)_{\sigma,\tau}=(0)$ ise her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ veya $a\in Z$ olur.

İspat: U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $(U,a)_{\sigma,\tau}=(0)$ olduğundan, her $r\in R$ ve her $u\in U$ için $([\tau(u)r,u]_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}=0$ olur. Her $r\in R$ ve her $u\in U$ için $0=(\tau(u)[r,u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u),\tau(u)]r,a)_{\sigma,\tau}=(\tau(u)[r,u]_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}=\tau(u)([r,u]_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}-[\tau(u),\tau(a)][r,u]_{\sigma,\tau}$ olduğundan,

$$[\tau(u),\tau(a)][r,u]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall r\in R,\ \forall u\in U \qquad (2.10)$$

bulunur. (2.10) da her $s\in R$ için r yerine rs yazarsak, $0=[\tau(u),\tau(a)][rs,u]_{\sigma,\tau}=[\tau(u),\tau(a)][r,u]_{\sigma,\tau}s+[\tau(u),\tau(a)]r[s,u]_{\sigma,\tau}$ olur. (2.10) dan her $r\in R$ ve her $u\in U$ için $[\tau(u),\tau(a)][r,u]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan, $[\tau(u),\tau(a)]r[s,u]_{\sigma,\tau}=0$ elde edilir. Her $s\in R$ ve her $u\in U$ için $[\tau(u),\tau(a)]R[s,u]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve R asal olduğundan $[\tau(u),\tau(a)]=0$ veya $[s,u]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Her $u\in U$ için $[\tau(u),\tau(a)]=0$ ise $\tau([u,a])=0$ ve τ, 1-1 olduğundan $[u,a]=0$ olur. Her $u\in U$ ve her $s\in R$ için $[s,u]_{\sigma,\tau}=0$ ise $[R,u]_{\sigma,\tau}=(0)$ olduğundan her $u\in U$ için $u\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Lemma 4.8 den, her $u\in U$ için $u\in Z$ olur. O halde her $u\in U$ için $[u,a]=0$ veya $u\in Z$ elde edilir. Yani her $u\in U$ için $[u,a]=0$ dır. O halde $[U,a]=(0)$ yazılabilir. Lemma 3.45 den $a\in Z$ veya her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur.

Teorem 4.30: R asal halka ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $(R,U)_{\sigma,\tau}=(0)$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat: Her $x,y\in R$ ve her her $u\in U$ için $0=(xy,u)_{\sigma,\tau}=x[y,\sigma(u)]+(x,u)_{\sigma,\tau}y=x[y,\sigma(u)]$ bulunur. Her $y\in R$ ve her $u\in U$ için $R[y,\sigma(u)]=(0)$ ve R asal olduğundan $[y,\sigma(u)]=0$ olur. Yani, her $u\in U$ için $u\in Z$ olduğundan $U\subset Z$ bulunur.

Kaya, K., Gölbaşı, Ö., Aydın, N., 2001

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka, $0\neq d:R\rightarrow R$ türev ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma 4.31: $a\in R$ için $[d(R),a]_{\sigma,\tau}=(0)$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ dir.

İspat: $a\in Z$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ dir. $a\notin Z$ olsun. $[d(R),a]_{\sigma,\tau}=(0)$ olduğundan, her $x\in R$ için $[d(x\sigma(a)),a]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Buradan $0=[d(x)\sigma(a)+xd(\sigma(a)),a]_{\sigma,\tau}=[d(x)\sigma(a),a]_{\sigma,\tau}+[xd(\sigma(a)),a]_{\sigma,\tau}=d(x)[\sigma(a),\sigma(a)]+[d(x),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a)+x[d(\sigma(a)),a]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(a)]d(\sigma(a))$ bulunur. Hipotezden $[d(x),a]_{\sigma,\tau}=[d(\sigma(a)),a]_{\sigma,\tau}=0$ dır. Böylece,

$$[x,\tau(a)]d(\sigma(a))=0,\ \forall x\in R \qquad (1)$$

elde edilir. Her $y\in R$ için x yerine xy yazarsak, $0=[xy,\tau(a)]d(\sigma(a))=x[y,\tau(a)]d(\sigma(a))+[x,\tau(a)]yd(\sigma(a))$ bulunur. (1) den $[y,\tau(a)]d(\sigma(a))=0$ olduğundan, her $x,y\in R$ için $[x,\tau(a)]yd(\sigma(a))=0$ olur ve $[x,\tau(a)]Rd(\sigma(a))=0$ yazılabilir. R asal olduğundan, $[x,\sigma(a)]=0$ veya $d(\sigma(a))=0$ ve böylece $a\in Z$ veya $d(\sigma(a))=0$ bulunur. $a\notin Z$ kabul ettiğimizden $d(\sigma(a))=0$ olur. R üzerinde, her $x\in R$ için $D(x)=[x,\sigma(a)]$ türevi ve $H(x)=[x,a]_{\sigma,\tau}$ fonksiyonu tanımlansın. $D=0$ olsaydı $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ olur ispat biterdi. O halde $D\neq 0$ olsun. $[d(R),a]_{\sigma,\tau}=(0)$ olduğundan, her $x\in R$ için $[d(x),a]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Böylece her $x\in R$ için, $H(d(x))=0$ elde edilir. Her $x,y\in R$ için $H(xy)=[xy,a]_{\sigma,\tau}=x[y,\sigma(a)]+[x,a]_{\sigma,\tau}y=xD(y)+H(x)y$ bulunur. Yani,

$$H(xy)=H(x)y+xD(y) \qquad (2)$$

elde edilir. Her $x,y\in R$ için $H(xy)=[xy,a]_{\sigma,\tau}=x[y,a]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(a)]y=xH(y)+[x,\tau(a)]y$ olduğundan,

$$H(xy)=[x,\tau(a)]y+xH(y) \qquad (3)$$

elde edilir. $[d(R),a]_{\sigma,\tau}=(0)$ olduğundan, her $r\in R$ için $0=[d(r),a]_{\sigma,\tau}=d(r)\sigma(a)-\tau(a)d(r)$ bulunur. Her $r\in R$ için $d(0)=d(d(r)\sigma(a)-\tau(a)d(r))$ olduğundan, $0=d^2(r)\sigma(a)+d(r)d(\sigma(a))-d(\tau(a))d(r)-\tau(a)d^2(r)$ olur. $d(\sigma(a))=0$ olduğundan $[d^2(r),a]_{\sigma,\tau}-d(\tau(a))d(r)=0$ bulunur. $d(r)\in R$ olduğundan $[d^2(r),a]=0$ olur ve her $r\in R$ için $d(\tau(a))d(r)=0$ elde edilir. $d(\tau(a))d(R)=(0)$ olduğundan Lemma 2.2 den $d(\tau(a))=0$ veya $d=0$ ve böylece, $d(\tau(a))=0$ bulunur. Her $x\in R$ için $dH(x)=d([x,a]_{\sigma,\tau})=d(x\sigma(a)-\tau(a)x)=d(x\sigma(a))-d(\tau(a)x)=d(x)\sigma(a)+xd(\sigma(a))-d(\tau(a))x-\tau(a)d(x)$ olur. $d(\tau(a))=d(\sigma(a))=0$ olduğundan, her $x\in R$ için $dH(x)=d(x)\sigma(a)-\tau(a)d(x)=[d(x),a]_{\sigma,\tau}=0$ ve buradan, her $x\in R$ için $dH(x)=0$ elde edilir. Yani,

$dH(R)=(0)$ (4)

bulunur. Her $x\in R$ için $Hd(x)=0$ olduğundan, $x,y\in R$ için $Hd(xH(y))=0$ dir. Böylece her $x,y\in R$ için, $0=H(d(x)H(y)+xdH(y))$ olur ve (4) den $dH(y)=0$ olduğundan, $H(d(x)H(y))=0$ elde edilir. Burada (2) yi kullanırsak, her $x,y\in R$ için $Hd(x)H(y)+d(x)DH(y)=0$ bulunur. Her $x\in R$ için $Hd(x)=0$ olduğundan, $d(x)DH(y)=0$ olur. Her $x\in R$ için $d(R)DH(x)=0$ olduğundan, Lemma 2.2 den $d=0$ veya her $x\in R$ için $DH(x)=0$ olur. Hipotezden $d\neq 0$ olduğundan, her $x\in R$ için $DH(x)=0$ elde edilir. Burada her $x\in R$ için, $D([x,a]_{\sigma,\tau})=0$ olduğundan,

$[[x,a]_{\sigma,\tau},\sigma(a)]=0,\ \forall x\in R$ (5)

elde edilir. x yerine $\tau(a)x$ yazarsak, her $x\in R$ için $[[\tau(a)x,a]_{\sigma,\tau},\sigma(a)]=0$ olur. Böylece $0=[\tau(a)[x,a]_{\sigma,\tau}+[\tau(a),\tau(a)]x,\sigma(a)]=[\tau(a)[x,a]_{\sigma,\tau},\sigma(a)]=\tau(a)[[x,a]_{\sigma,\tau},\sigma(a)]+[\tau(a),\sigma(a)][x,a]_{\sigma,\tau}$ bulunur. (5) den her $x\in R$ için $[[x,a]_{\sigma,\tau},\sigma(a)]=0$ olduğundan,

$[\tau(a),\sigma(a)][x,a]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall x\in R$ (6)

elde edilir. (6) da, $y\in R$ için x yerine xy yazarsak, $[\tau(a),\sigma(a)][xy,a]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Yani her $x,y\in R$ için $0=[\tau(a),\sigma(a)](x[y,\sigma(a)]+[x,a]_{\sigma,\tau}y)=[\tau(a),\sigma(a)]x[y,\sigma(a)]+[\tau(a),\sigma(a)][x,a]_{\sigma,\tau}y$ elde edilir. (6) dan $[\tau(a),\sigma(a)][x,a]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan, $[\tau(a),\sigma(a)]x[y,\sigma(a)]=0$ bulunur. Böylece her $y\in R$ için $[\tau(a),\sigma(a)]R[y,\sigma(a)]=(0)$ ve R asal olduğundan, $[\tau(a),\sigma(a)]=0$ veya $[y,\sigma(a)]=0$ olur. Yani $[\tau(a),\sigma(a)]=0$ veya $a\in Z$ dir. O halde,

$[\tau(a),\sigma(a)]=0$ (7)

elde edilir. (5) den her $x\in R$ için $0=[[x,a]_{\sigma,\tau},\sigma(a)]=[x\sigma(a)-\tau(a)x,\sigma(a)]=[x\sigma(a),\sigma(a)]-[\tau(a)x,\sigma(a)]=x[\sigma(a),\sigma(a)]+[x,\sigma(a)]\sigma(a)-\tau(a)[x,\sigma(a)]-[\tau(a),\sigma(a)]x$ olduğu görülür. (7) den $[\tau(a),\sigma(a)]=0$ olduğundan, $0=[x,\sigma(a)]\sigma(a)-\tau(a)[x,\sigma(a)]=[[x,\sigma(a)],a]_{\sigma,\tau}$ bulunur. Yani, her $x\in R$ için $[[x,\sigma(a)],a]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan,

$HD(x)=0,\ \forall x\in R$ (8)

elde edilir. $y\in R$ için x yerine xy yazar ve (2), (3) eşitlikleri kullanılarak, $0=HD(xy)=H(D(x)y+xD(y))=H(D(x)y)+H(xD(y))=HD(x)y+D(x)D(y)+xHD(y)+[x,\tau(a)]D(y)$ elde edilir. (8) den $HD(x)=HD(y)=0$ olur. Yani, her $x,y\in R$ için $D(x)D(y)+[x,\tau(a)]D(y)=0$ bulunur. Buradan, her $x,y\in R$ için $0=[x\sigma(a)]D(y)+[x,\tau(a)]D(y)=([x,\sigma(a)]+[x,\tau(a)])D(y)=[x,\sigma(a)+\tau(a)]D(y)$ olduğu görülür. Her $x,y\in R$ için $[x,\sigma(a)+\tau(a)]D(y)=0$ olduğundan, Lemma 2.2 den $[x,\sigma(a)+\tau(a)]=0$ veya $D=0$ olur.

$D\neq 0$ kabul ettiğimizden her $x\in R$ için $[x,\sigma(a)+\tau(a)]=0$ olur. Yani $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ bulunur.

Sonuç 4.32: R asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $0\neq d$ türev olmak üzere, $[d(R),U]_{\sigma,\tau}=(0)$ ise her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ bulunur.

İspat: Her $u\in U$ için $[d(R),u]_{\sigma,\tau}=(0)$ ise Lemma 4.31 den, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ bulunur.

Teorem 4.33: R asal halka, $charR\neq 2$ ve $0\neq d$ türev olmak üzere, $a\in R$ için $d([R,a]_{\sigma,\tau})=(0)$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ olur.

İspat: $d([R,a]_{\sigma,\tau})=(0)$ ise, her $r\in R$ için $d([\tau(a)r,a]_{\sigma,\tau})=0$ olur. Böylece $0= d(\tau(a)[r,a]_{\sigma,\tau}+[\tau(a),\tau(a)]r)=d(\tau(a)[r,a]_{\sigma,\tau})=d(\tau(a))[r,a]_{\sigma,\tau}+\tau(a)d([r,a]_{\sigma,\tau})=d(\tau(a))[r,a]_{\sigma,\tau}$ bulunur. Yani,

$$d(\tau(a))[r,a]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall r\in R \qquad (9)$$

elde edilir. (9) da, $s\in R$ için r yerine rs yazarsak, $0=d(\tau(a))[rs,a]_{\sigma,\tau}=d(\tau(a))(r[s,\sigma(a)]+ [r,a]_{\sigma,\tau}s)=d(\tau(a))r[s,\sigma(a)]+d(\tau(a))[r,a]_{\sigma,\tau}s$ bulunur. (9) eşitliği kullanılarak, $d(\tau(a)) r[s,\sigma(a)]=0$ bulunur. Buradan her $s\in R$ için $d(\tau(a))R[s,\sigma(a)]=(0)$ ve R asal olduğundan, $d(\tau(a))=0$ veya $[s,\sigma(a)]=0$ olur. Yani, $d(\tau(a))=0$ veya $a\in Z$ bulunur. $a\in Z$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ olur. $a\notin Z$ ise $d(\tau(a))=0$ dır. $d([R,a]_{\sigma,\tau})=(0)$ olduğundan, her $r\in R$ için $0=d([r\sigma(a),a]_{\sigma,\tau})=d([r,a]_{\sigma,\tau}\sigma(a)+r[\sigma(a),\sigma(a)])=d([r,a]_{\sigma,\tau}\sigma(a))=d([r,a]_{\sigma,\tau})\sigma(a)+[r,a]_{\sigma,\tau} d(\sigma(a))=[r,a]_{\sigma,\tau}d(\sigma(a))$ bulunur. Yani,

$$[r,a]_{\sigma,\tau}d(\sigma(a))=0,\ \forall r\in R \qquad (10)$$

elde edilir. $s\in R$ için r yerine rs yazılırsa, $0=[rs,a]_{\sigma,\tau}d(\sigma(a))=(r[s,a]_{\sigma,\tau}+[r,\tau(a)]s)d(\sigma(a)) =r[s,a]_{\sigma,\tau}d(\sigma(a))+[r,\tau(a)]sd(\sigma(a))$ bulunur. Burada (10) dan $[s,a]_{\sigma,\tau}d(\sigma(a))=0$ olduğundan, her $s\in R$ için $[r,\tau(a)]sd(\sigma(a))=0$ elde edilir. Her $r\in R$ için $[r,\tau(a)]Rd(\sigma(a))=(0)$ ve R asal olduğundan $[r,\tau(a)]=0$ veya $d(\sigma(a))=0$ ve böylece $a\in Z$ veya $d(\sigma(a))=0$ elde edilir. $a\in Z$ ise $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ olur. $a\notin Z$ ise $d(\sigma(a))=0$ olur. Hipotezden her $r\in R$ için $0=d([r,a]_{\sigma,\tau})=d(r\sigma(a)-\tau(a)r)=d(r\sigma(a))-d(\tau(a)r)=d(r)\sigma(a)+rd(\sigma(a))-d(\tau(a))r-\tau(a)d(r)$ olur. $d(\sigma(a))=d(\tau(a))=0$ olduğundan, her $r\in R$ için $0=d(r)\sigma(a)-\tau(a)d(r)=[d(r),a]_{\sigma,\tau}$ bulunur. Yani $[d(R),a]_{\sigma,\tau}=(0)$ olur. Lemma 4.31 den $\sigma(a)+\tau(a)\in Z$ olduğu görülür.

Sonuç 4.34: R asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal, $charR\neq 2$ ve $0\neq d$ türev olmak üzere $d([R,U]_{\sigma,\tau})=(0)$ ise her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur.

İspat: Her $u \in U$ için $d([R,u]_{\sigma,\tau})=0$ ise Teorem 4.33 den, her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur.

Örnek 4.35: $R=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: a,b,c,d \in I\}$ asal halkası verilsin. σ,τ otomorfizmleri, $\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, $\tau\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlansın. $d\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlı, $d:R \rightarrow R$ türev olmak üzere, $a=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin Z$ için $d([R,a]_{\sigma,\tau})=(0)$ fakat $\sigma(a)+\tau(a) \in Z$ dir.

Teorem 4.36: R asal halka, $(0) \neq M$ ideal ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olmak üzere, $a \in R$ için $([R,M]_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}=(0)$ ise $a \in Z$ olur.

İspat: $m \notin Z$ olacak şekilde $m \in M$ var olsun. R üzerinde, her $r \in R$ için $d_1(r)=[r,m]_{\sigma,\tau}$ ve $d_2(r)=(r,a)_{\sigma,\tau}$ şeklinde d_1 ve d_2 fonksiyonları tanımlansın. Her $r \in R$ için $d_2d_1(r)=d_2([r,m]_{\sigma,\tau})=([r,m]_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}=0$ olur. Yani,

$$d_2d_1(r)=0,\ \forall r \in R \qquad (11)$$

elde edilir. Her $r \in R$ için $d_1(r\sigma(m))=[r\sigma(m),m]_{\sigma,\tau}=r[\sigma(m),\sigma(m)]+[r,m]_{\sigma,\tau}\sigma(m)= d_1(r)\sigma(m)$ bulunur. Yani,

$$d_1(r\sigma(m))=d_1(r)\sigma(m) \qquad (12)$$

olduğu görülür. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için (11) den, $0=d_2d_1(r\sigma(m))=d_2(d_1(r)\sigma(m))= (d_1(r)\sigma(m),a)_{\sigma,\tau}=d_1(r)[\sigma(m),\sigma(a)]+(d_1(r),a)_{\sigma,\tau}\sigma(m)=d_1(r)[\sigma(m),\sigma(a)]+([r,m]_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}\sigma(m)$ bulunur. Hipotezden $([r,m]_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan, her $r \in R$ için $d_1(r)[\sigma(m),\sigma(a)]=0$ olur. O halde,

$$d_1(R)[\sigma(m),\sigma(a)]=(0) \qquad (13)$$

bulunur. (13) den, $r,s \in R$ için, $0=d_1(rs)[\sigma(m),\sigma(a)]=[rs,m]_{\sigma,\tau}[\sigma(m),\sigma(a)]=(r[s,m]_{\sigma,\tau}+[r,\tau(m)]s)[\sigma(m),\sigma(a)]=rd_1(s)[\sigma(m),\sigma(a)]+[r,\tau(m)]s[\sigma(m),\sigma(a)]$ olur. (13) kullanılarak $[r,\tau(m)]s[\sigma(m),\sigma(a)]=0$ elde edilir. $[r,\tau(m)]R[\sigma(m),\sigma(a)]=(0)$ ve R asal olduğundan, $[r,\tau(m)]=0$ veya $[\sigma(m),\sigma(a)]=0$ bulunur. Yani, her $m \in M$ için $m \in Z$ veya $[m,a]=0$ olur. Dolayısıyla her $m \in M$ için $[m,a]=0$ elde edilir. Sonuç olarak $[M,a]=(0)$ dır. Her $x \in R$, $m \in M$ için $0=[xm,a]=x[m,a]+[x,a]m=[x,a]m$ olur. Yani, her $x \in R$ için $[x,a]M=$

(0) dır. M ideal ve R asal olduğundan, her $x \in R$ için $[x,a]=0$ veya $M=(0)$ olur. $M \neq (0)$ olduğundan, her $x \in R$ için $[x,a]=0$ olur. Yani $a \in Z$ dir.

Teorem 4.37: R asal halka, $charR \neq 2$ ve $0 \neq d$ türev olmak üzere, $a \in R$ için $(d(R),a)=(0)$ olması için gerek ve yeterşart $d((R,a))=(0)$ olmasıdır.

İspat: $(d(R),a)=(0)$ olsun. $d(a)=0$ olduğunu gösterelim. $a=0$ ise $d(a)=0$ olur. $a \neq 0$ ise, her $x \in R$ için $(d(x),a)=0$ olduğundan, x yerine xa yazarsak, $0=(d(xa),a)=(d(x)a+xd(a),a)=(d(x)a,a)+(xd(a),a)=d(x)[a,a]+(d(x),a)a+x(d(a),a)-[x,a]d(a)=-[x,a]d(a)$ bulunur. Yani,

$$[x,a]d(a)=0, \ \forall x \in R \tag{14}$$

elde edilir. (14) de x yerine, $y \in R$ için xy yazarsak, $0=[xy,a]d(a)=x[y,a]d(a)+[x,a]yd(a)$ bulunur. (14) den, $[y,a]d(a)=0$ olduğundan, her $x,y \in R$ için $[x,a]yd(a)=0$ bulunur. Buradan her $x \in R$ için $[x,a]Rd(a)=(0)$ ve R asal olduğundan $[x,a]=0$ veya $d(a)=0$ ve böylece, $a \in Z$ veya $d(a)=0$ elde edilir. $a \in Z$ ise, hipotezden $(d(R),a)=(0)$ olduğundan, $0=(d(a),a)=d(a)a+ad(a)=2d(a)a$ olur. $charR \neq 2$ olduğundan $d(a)a=0$ bulunur. $a \in Z$ olduğundan $d(a)Ra=(0)$ yazılabilir. R asal olduğundan $d(a)=0$ veya $a=0$ olur. $a \neq 0$ kabul ettiğimizden $d(a)=0$ olur. Sonuç olarak $d(a)=0$ dır. Her $r \in R$ için $d((r,a))=(d(r),a)+(r,d(a))=0$ olduğundan $d((R,a))=(0)$ buluruz. $d((R,a))=(0)$ ise, her $x \in R$ için $0=d((ax,a))=d(a(x,a)-[a,a]x)=d(a(x,a))=d(a)(x,a)+ad((x,a))=d(a)(x,a)$ bulunur. Yani,

$$d(a)(x,a)=0, \ \forall x \in R \tag{15}$$

elde edilir. (15) de, $y \in R$ için x yerine xy yazarsak, $0=d(a)(xy,a)=d(a)\{x[y,a]+(x,a)y\}=d(a)x[y,a]+d(a)(x,a)y$ bulunur. (15) den, $d(a)(x,a)=0$ olduğundan, her $x,y \in R$ için, $d(a)x[y,a]=0$ bulunur. O halde $d(a)R[y,a]=(0)$ ve R asal olduğundan, her $y \in R$ için $d(a)=0$ veya $[y,a]=0$ olur. Yani, $d(a)=0$ veya $a \in Z$ elde edilir. $d(a)=0$ ise, hipotezden her $r \in R$ için, $0=d((r,a))=(d(r),a)+(r,d(a))=(d(r),a)$ bulunur. O halde $(d(R),a)=(0)$ dır. $a \in Z$ ise, hipotezden $0=d((a,a))=(d(a),a)+(a,d(a))=ad(a)+d(a)a+ad(a)+d(a)a=4d(a)a$ bulunur. $charR \neq 2$ olduğundan, $d(a)a=0$ olur. $a \in Z$ olduğundan, $d(a)Ra=(0)$ yazılabilir. R asal olduğundan, $d(a)=0$ veya $a=0$ olur. $d(a)=0$ ise $(d(R),a)=(0)$ dır. $a=0$ ise $(d(R),a)=(0)$ olur. Sonuç olarak $(d(R),a)=(0)$ bulunur.

KAYNAKLAR

[1] Posner, E.C., “Derivations in Prime Rings”, Proc. Amer. Math. Soc., 8: 1093-1100, (1957).

[2] Herstein, I.N., “On the Lie Structure of an Associative Rings”, Journal of Algebra, 14:561-571, (1970).

[3] Herstein, I.N., “Topics in Ring Theory”. University of Chicago Press, Chicago, (1969).

[4] Awtar, R. “On a theorem of Posner” Proc. Cumb. Phil. Soc. (1973),73,25

[5] Herstein, I.N., “Rings with Involution”, Univ. Of Chicago Press, Chicago, (1976).

[6] Herstein, I.N., “A Note on Derivations”, Canad. Math. Bull., 21(3): 369-370, (1978).

[7] Herstein, I.N., “A Note on Derivations II”, Canad. Math. Bull., 22(4): 509-511, (1979).

[8] Bergen. J. Herstein, I.N. and Kerr, J.W., “Lie Ideals and Derivations of Prime Rings”, J. of Algebra, 71:259-267 (1981).

[9] Lee, P.H. and T.K., “Lie Ideals of Prime Rings with Derivations”, Bull. Instute of Math. Acedemia Sinica II, 75-79, (1983).

[10] Kaya, K., “(σ,τ)-Right Lie Ideals in Prime Rings”, Proc. 4. National Math., Symposium Antakya, (1991).

[11] Aydın, N. and Kaya, K., “Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ)-Derivation”, Doğa-Tr. J. of Mathematics 16:169-176, (1992).

[12] Aydın, N. and Soytürk, M., “(σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings with Derivations”, Doğa Tr. J. of Math. 19:239-244, (1995).

[13] Aydın, N. and Kandamar, H. “(σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings”, Doğa Tr.J. of Math, 18(2):143-148, (1994).

[14] Soytürk, M., “(σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings with Derivations”, Doğa Tr. J. of Math., 20:233-236, (1996).

[15] Aydın, N. “On One Sided (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings”, Tr. J. Mathematics 21:1-7, (1997).

[16] Kaya, K. and Aydın, N., “Some Results in Generalized Lie Ideal”, Albasapr Sci. J. Issued by Jordan Universty for woman, 3(1): 53-61, (1999).

[17] Aydın, N. and Kaya, K., “Notes On Generalized Lie Ideals”, Analele Univ. Timisoara Vol. XXXVII, fasc., 2:7-13, (1999).

[18] Aydın, N., Kaya, K. and Gölbaşı, Ö. “Some Results on Generalized Lie Ideals with Derivation”, East Asian Math. J. 17,No.2:225-232, (2001).

[19] Kaya, K., Gölbaşı, Ö. and Aydın, N. “Some Results for Generalized Lie Ideals in Prime Rings with Derivation II”, Applied Mathematics E-Notes, 1:4-30, (2001).