T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

LAGRANGIANIN SİMETRİ ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YUSUF KÜÇÜKAKÇA

DANIŞMAN
DOÇ. DR. UĞUR CAMCI

ÇANAKKALE-2006

Bu Çalışma Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Araştırma Fonu Tarafından Desteklenmiştir.

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu araştırma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : ....

Üye : ....

Üye : ....

Kod No:

Yukarıda imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimim her aşamasında ve bu tezin hazırlanma sürecinde bilgi ve deneyimlerini hiçbir zaman esirgemeden bana yol gösteren, emek ve zaman harcayan değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Uğur CAMCI' ya, bilgisayar hesaplarında bildiklerini benimle paylaşan değerli arkadaşlarım Arş. Gör. Sezgin AYGÜN' e, Arş Gör. Melis AYGÜN' e ve Arş. Gör. Murat ERTÜRK' e teşekkür ederim. Sadece lisansüstü öğrenimimde değil tüm okul hayatım boyunca desteklerini hiçbir zaman esirgemeden hep yanımda olan sevgili anneme ve babama teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Doğum Yeri ve Tarihi: Antalya-Manavgat / 1979

Adres: Cevatpaşa Mah. Veliyaşin Cad. No:25/1 Gürbüz Apt.

17100 Çanakkale

Eğitim Durumu

1986-1991	Ahmetler Köyü İlkokulu
1991-1994	Manavgat Yunus Emre İlköğretim Okulu
1994-1997	Manavgat Lisesi
1998-2000	Karadeniz Teknik Üniversitesi
2000-2003	Akdeniz Üniversitesi
2003-…	Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Katıldığı Yaz Okulu

2005-	Research School on Cosmology, Feza Gürsey Enstitüsü

ÖZ

Bu çalışmada, önce Friedmann-Robertson-Walker (FRW) uzay-zamanı için daha sonrada Kantowski-Sachs, Bianchi I ve III uzayzamanları için skaler alanlı Lagrange fonksiyoneli elde edilmiştir. Bu Lagrange fonksiyoneli için Noether simetri yaklaşımı yardımıyla, verilen skaler alanın çiftlenim fonksiyonları ve dinamiksel olarak potansiyeller belirlenmiştir. Ayrıca Noether simetri yaklaşımı hareket sabitlerini belirlemede genel bir kriter olduğundan Kantowski-Sachs, Bianchi I ve III uzayzamanı için hareket sabitleri belirlenmiştir. Bu hareket sabitleri kullanılarak Einstein alan denklemlerine çözümler araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kantowski-Sachs, Bianchi I ve III uzay-zamanları, Noether simetri yaklaşımı, Einstein alan denklemleri

ABSTRACT

In this study, Lagrange functionally with scalar field has been obtained for Friedmann-Robertson-Walker and Kantowski-Sachs, Bianchi I and III space-times, respectively. The coupling functions and dynamical potentials of scalar field have been determined via Noether symmetry approach for this Lagrange functionally. Also, since Noether symmetry approach is the general criterion to determine constant of motion, these constants are obtained for Kantowski-Sachs, Bianchi I and III space-times. Using these constants of motion, Einstein field equations are investigated solutions.

Key Words: Kantowski-Sachs, Bianchi I and III space-times, Noether symmetry approach, Einstein field equation.

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

(.)	t değişkenine göre türev
(′)	φ ve Φ değişkenlerine göre türev
(,)	Kısmi türev
(;)	Kovaryant türev
δ	Varyasyon
$£_X$	X vektör alanı yönündeki Lie türevi operatörü
Θ_L	Cartan-one form ($\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} dA + \frac{\partial L}{\partial \dot{B}} dB + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} d\Phi$)
$i_X \Theta_L$	Hareket sabiti ($i_X \Theta_L = \alpha \frac{dL}{d\dot{A}} + \beta \frac{dL}{d\dot{B}} + \gamma \frac{dL}{d\dot{\Phi}}$)

Kısaltmalar:

GRT	**G**enel **R**elativite **T**eorisi
EFE	**E**instein **F**ield (Alan) **E**quations (Denklemleri)
FRW	**F**riedmann-**R**obertson-**W**alker
WDW	**W**heeler **D**e **W**itt

Konvensiyon

ε =+1 için signatür (+, -, -, -)

ε =-1 için signatür (-,+,+,+)

1.GİRİŞ

Uzay-zamanın geometrik yapısı ile gravitasyonel alanlar arasındaki ilişkiyi gösteren matematiksel bağıntının nasıl olması gerektiği problemi Einstein tarafından 1915 yılında ortaya konulan Genel Relativite Teorisi (GRT) ile incelenmiştir. Bu teorinin temel denklemleri; sol taraf geometriyi, sağ taraf madde dağılımı kısmını göstermek üzere

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R\, g_{ab} = \kappa T_{ab}$$

şeklinde formüle edilen Einstein alan denklemleri (EFE) dir. Burada $\kappa = 8\pi G / c^4$ şeklinde verilmektedir. Bu denklemlere kesin çözümlerin bulunmasında sık kullanılan önemli sadeleştirmelerden birisi, dikkate alınan uzay-zaman metriği üzerinde belirli simetrileri kabul etmektir. Benzer şekilde; Lagrange fonksiyonelinin invaryans olma koşulu kullanılarak alan denklemlerine çözüm elde edebilmek için simetri kabulü yapılmaktadır.

Son yıllarda, uzun süredir var olan birkaç kozmoloji bilmecesini çözmek için çekimli minimal olmayan çiftlenmiş (coupled) skaler alan kullanılmaya başlamıştır. Mikroskobik ölçekte gravitasyonel alanın davranışını anlamak için indirgenmiş (induced) çekim teorisi geliştirilmiştir. Makroskobik ölçekte ise evrenin en iyi tanımı standart kozmoloji ile verilir. Evrenin şu anki evrimi için Friedmann-Robertson-Walker (FRW) uzay-zamanı, makroskobik ölçekte uygun bir evren tasviri veriyor görünmektedir (Capozziello ve Lambiase, 2000).

Noether simetri yaklaşımı skaler tensör teorilerinde bazı açık çözümler sunmaktadır. Bu yaklaşım uygun bir şekilde keyfiliği kısıtlayarak, potansiyelin dinamik olarak seçilmesini ve alan denklemlerine çözümlerin bulunmasını sağlar. Özellikle Noether simetri yaklaşımı, hareket sabitlerini belirlemede genel bir kriterdir.

Kuantum kozmolojisini tanımlamak için birçok bakış açısı seçilebilir. Kuantum kozmolojisi, kuantum çekim teorisinin inşasına ilk adım olarak düşünülebilir. Ayrıca, kuantum kozmolojisi klasik evrenin ilk ortaya çıktığındaki başlangıç koşullarını bulmakla ilgilenir. Ancak; elektromanyetizma, genel relativite ya da alışılmış kuantum mekaniği gibi diğer fizik teorilerine göre "evren sisteminin" gelişimi için sınır koşulları dışardan getirilemez. Bu durumda; Maxwell denklemleri, Einstein alan denklemleri ya da Schrödinger denklemleri gibi temel dinamik yasalarına ihtiyaç duyulur ve başlangıç koşulları dışarıdan alınır. Kuantum kozmolojisi; kuantum gravite yapmak için uygulanabilir bir tasarı olmasının yanında, başlangıç koşullarını bulmak sorunundan dolayı otonom (özerk) bir fizik dalı olarak düşünülebilir.

Ancak; sadece kavramsal zorluklar değil, aynı zamanda matematiksel karmaşıklık kuantum kozmoloji çalışmayı zorlaştırmaktadır (Narlikar ve Padmanabhan, 1986). Örneğin; geometrodinamiğin süper uzayı, sonsuz serbestlik derecesine sahiptir ve bundan dolayı Wheeler De Witt (WDW) denklemini tam olarak integre etmek pratik olarak imkânsızdır. Ayrıca; evreni tasvir eden durumların Hilbert uzayı mevcut değildir. Sonuç olarak; olasılık teorisinde WDW denkleminin çözümlerinin nasıl yorumlanacağı açık değildir.

Bu tezde, Kantowski-Sachs, Bianchi I ve III uzay-zamanları için verilen Lagrange fonksiyonelinin Lie dönüşümü altındaki davranışı incelenecektir. Buradan elde edilen dinamik potansiyeller ve hareket sabitleri kullanılarak alan denklemlerinin çözümü araştırılacaktır.

2. TEMEL TANIMLAR

2.1 Tensörler

Bir tensör, koordinattan bağımsız bir nicelik olup belirli koordinat dönüşümü kurallarını sağlamak zorundadır. U bir tensör olsun. Özel bir koordinat sisteminde herhangi bir noktada verilen birinci ranktan kontravaryant (üst indisli) $U^a(x)$ tensörü,

$$\overline{U}^b = \frac{\partial \overline{x}^b}{\partial x^a} U^a \tag{2.1.1}$$

birinci ranktan kovaryant (alt indisli) $U_a(x)$ tensörü,

$$\overline{U}_b = \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^b} U_a \tag{2.1.2}$$

şeklindeki koordinat dönüşümüne uyan fiziksel veya geometrik bir niceliktir. Burada $\frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^b}$ dönüşüm matrisi, $\frac{\partial \overline{x}^b}{\partial x^a}$ ise ters dönüşüm matrisidir. Benzer şekilde ikinci ranktan kontravaryant ve kovaryant tensörler,

$$\overline{U}^{ab} = \frac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^c} \frac{\partial \overline{x}^b}{\partial \overline{x}^d} U^{cd}, \qquad \overline{U}_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^d}{\partial \overline{x}^b} U_{cd} \tag{2.1.3}$$

şeklinde dönüşürler. Genel olarak U tensörünün elemanları, alt ve üst indis topluluğu ile gösterilir. Bu yüzden $U^{a\ldots c}{}_{d\ldots f}(x)$ tensörü,

$$\overline{U}^{i\ldots k}{}_{l\ldots n}(x) = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^a} \cdots \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^c} \frac{\partial x^d}{\partial \overline{x}^l} \cdots \frac{\partial x^f}{\partial \overline{x}^n} U^{a\ldots c}{}_{d\ldots f}(x) \tag{2.1.4}$$

şeklinde dönüşen niceliklerdir. Burada $|\{i\ldots k\}| = |\{a\ldots c\}| = p$ ve $|\{l\ldots n\}| = |\{d\ldots f\}| = q$ olup U niceliği; p tane kontravaryant indisli, q tane kovaryant indisli $p+q$ ranktan bir tensördür denir (D'Inverno, 1992). Bu yüzden; bir tensör koordinat dönüşümü altında invaryant kalan bir niceliktir.

Skalerler, sıfırıncı ranktan tensörler vektörler ise birinci ranktan tensörlerdir. Sırasıyla; kovaryant ve kontravaryant tensörlere örnek olarak, bir eğriye teğet vektör ve bir yüzeye normal vektör verilebilir. İkinci ranktan bir tensörün dört boyutta 16 tane bileşeni vardır. Ayrıca, ikinci ranktan bir A_{ab} tensörü, $A_{ab} = A^c{}_{cab}$ şeklinde de yazılabilir. Burada c indisi üzerinden kontraksiyon işlemi yapılmıştır. İkinci ranktan bir tensörün kontraksiyonu alınarak elde edilen $A=A^a{}_a$ skalerine, bu ikinci ranktan tensörün **izi** (trace) denir.

2.2 Lie Türevi

X, M manifoldu üzerinde bir teğet vektör alan ve φ_t, ***X*** tarafından doğurulan M' deki 1-parametreli transformasyonlar grubu olsun. M üzerinde her *K* tensör alanı için, ***X*** vektör alanı yönündeki **Lie Türevi** aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(\pounds_{\mathbf{X}} K)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[K_p - (\tilde{\varphi}_t K)_p\right] \tag{2.2.1}$$

Burada, $\pounds_X$ Lie türev operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\pounds_X(fg) = (\pounds_X f)g + f(\pounds_X g)$
2. $\pounds_X[Y,Z] = [\pounds_X Y, Z] + [Y, \pounds_X Z]$ (2.2.2)

Burada *f* ve *g*, fonksiyonlar; ***X***, ***Y*** ve ***Z*** vektör alanlarıdır. Lie türev operatörünün bir fonksiyon üzerine etkisi;

$$\pounds_{\mathbf{X}} f = \boldsymbol{X}f \tag{2.2.3}$$

şeklindedir. Bir Y^a kontravaryant vektör alanının Lie türevi

$$\pounds_X Y^a = [X,Y]^a = X^b Y^a{}_{,b} - X^a{}_{,b} Y^b \tag{2.2.4a}$$

dir. Bir Y_a kovaryant vektör alanının Lie türevi ise

$$\pounds_X Y_a = X^b Y_{a,b} + X^b{}_{,a} Y_b \tag{2.2.4b}$$

ile verilir.

Eğer uzay-zaman metriği g_{ab} Killing simetrisini sağlıyorsa yani

$$\pounds_X g_{ab} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{ab,c}\xi^c + g_{ac}\xi^c_{,b} + g_{cb}\xi^c_{,a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0 \tag{2.2.5}$$

Killing denklemlerinin bir çözümü varsa, uzay-zaman bir *hareket simetrisi*ne ya da *izometri*ye sahiptir denir. İzometri, bir vektörün uzunluğunu koruduğu için katı (*rigid*) hareket olarak da adlandırılabilir.

2.3 Varyasyon Hesabı Ve Euler Denklemleri

Varyasyon hesabının temel problemi,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\} dx \tag{2.3.1}$$

integralinin extremum noktalarını bulmaktır. Burada *y(x)* ve $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ bağımlı değişken, *x* ise bağımsız değişkendir. Eğer *y(x)* fonksiyonu *J* integralinin minimum yapıyorsa o zaman bir komşu fonksiyon *J'* yi arttırmak zorundadır. Olası bütün *y(x)* fonksiyonları parametrik olarak $y = y(\alpha, x)$ ile gösterilsin; bu durumda $\alpha = 0$ noktasında $y(0, x) = y(x)$ eşitliği J için bir extremum verir. Dolayısıyla,

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) \tag{2.3.2}$$

yazılabilir. Burada $\eta(x)$ sürekli ve birinci türeve sahip bir fonksiyon olup sınır noktalarda sıfırdır; yani, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ dır. Bu durumda (2.3.1) integrali α parametresine bağlı olarak

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x\} dx \tag{2.3.3}$$

yazılabilir. Bütün $\eta(x)$ fonksiyonları için $J(\alpha)$ integralinin extremum olma koşulu

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{2.3.4}$$

ile verilir. Şimdi (2.3.3) ile verilen integralin α ' ya göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \tag{2.3.5}$$

bulunur. (2.3.2) ifadesinden elde edilen $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$ ve $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta(x)}{dx}$ ifadeleri (2.3.5) denkleminde yerine konursa

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta}{dx} \right) dx \tag{2.3.6}$$

elde edilir. Burada kısmi integrasyon uygulanır ve $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ sınır koşulları kullanılırsa

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \tag{2.3.7}$$

elde edilir. Geleneksel bir notasyona geçmek için (2.3.7) ifadesi

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx \tag{2.3.8}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \tag{2.3.9}$$

yazılır. (2.3.4) extremum koşulundan $\delta J = 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla (2.3.9) ifadesinden

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{2.3.10}$$

elde edilir ve bu eşitlik Euler denklemi olarak bilinir (Marion ve Thornton, 1988). Eğer *m* tane bağımlı değişken varsa o zaman Euler denklemleri

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0 \qquad i=1,\ 2,\ 3, \ldots m \tag{2.3.11}$$

şeklinde yazılır.

3. ÇEKİM TEORİLERİ

3.1 Einstein Genel Relativite Teorisi

Genel relativite teorisi bir çekim teorisi olup gravitasyonel alanlar ile uzay-zamanın geometrisi arasındaki ilişkiyi vermektedir. Bu teori,

$$I = \frac{-1}{16\pi G}\int L_{E-H}\, d^4x + \int L_M\, d^4x \qquad (3.1.1)$$

ile verilen etki fonksiyonelinin, $L_{E-H} = \sqrt{-g}R$ ve $L_M = \Lambda\sqrt{-g}$ Lagrange fonksiyonellerinin (yani dinamik değişkenlerin) varyasyonu altında değişmez kalması koşulu sonucu ortaya çıkan bir teoridir. L_{E-H} fonksiyoneline Einstein-Hilbert Lagrange fonksiyoneli, L_M fonksiyoneline ise madde alanının Lagrange fonksiyoneli adı verilir. Einstein alan denklemleri (veya gravitasyonel alanın hareket denklemleri), (3.1.1) ile verilen I etkisinin g_{ab} metrik tensörüne göre varyasyonu alınıp minimize edilmesiyle elde edilmektedir. Böylece; bu teorinin denklemleri

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} = \kappa T_{ab} \qquad (3.1.2)$$

şeklini alır. Burada; G_{ab} Einstein tensörü, R_{ab} Ricci tensörü, R Ricci (eğrilik) skaleri, g_{ab} metrik tensör ve T_{ab} enerji-momentum tensörünün bileşenleridir. Dört-boyutlu uzay- zamanda

$$ds^2 = g_{ab}(x^c)dx^a dx^b \qquad a, b, c = 0, 1, 2, 3 \qquad (3.1.3)$$

yay elemanı verildiğinde; bu uzay-zamana ait Ricci tensörü, Ricci skaleri ve dolayısıyla Einstein tensörü bulunabilir. EFE' nin sol tarafı uzay-zamanın geometrisini gösterirken sağ tarafı madde dağılımını vermektedir. Einstein alan denklemleri, ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemi olduğu için bu denklemleri çözmek oldukça zordur. Bu denklemlerin kesin çözümlerinin bulunmasında kullanılan yöntemlerden birisi, dikkate alınan uzay-zaman metriği üzerinde bazı simetri kabulleri yapmaktır. Ayrıca; Lagrange fonksiyonelinin varyasyonu alınarak elde edilen Euler-Lagrange hareket denklemlerine çözüm bulmak için simetri yaklaşımı kullanılmaktadır.

3.2 Brans-Dicke Teorisi

Uzun-menzilli kuvvetlerin, gravitasyonel alan g_{ab} ve elektromanyetik potansiyel A_a tarafından taşındığı bilinmektedir. Bu yüzden; diğer uzun-menzilli kuvvetlerin, skaler alanlar tarafından üretildiğini beklemek doğaldır. Skaler alanın çekim ile birlikte ele alındığı en son ve mümkün olan en iyi teori Brans-Dicke teorisidir. Brans ve Dicke' nin başlangıç noktası; eylemsizlik olayının, evrenin genel kütle dağılımına göre ivmelenmesinden ortaya çıkabildiğini ifade eden Mach prensibidir (D'Inverno, 1992). Bu nedenle çeşitli temel parçacıkların eylemsizlik kütleleri, temel sabitler olmamalıdır. Fakat bazı kozmik alanlar ile parçacıkların etkileşimlerini tasvir etmelidir. Temel parçacıkların kütlelerinin mutlak ölçeği, sadece $\frac{Gm}{r^2}$ gravitasyonel ivmeler ölçülerek belirlenebilir. Dolayısıyla eşdeğer bir sonuç şudur: G kütle çekim sabiti, φ skaler alanın ortalama değeri ile ilişkili olmalıdır. Burada φ, evrenin kütle yoğunluğu ile bağlanmıştır (Weinberg, 1972).

Böyle bir skaler alan için en basit genel kovaryant alan denklemi

$$\Box^2 \varphi = 4\pi\lambda T_{M\,a}^{\ a} \tag{3.2.1}$$

şeklindedir. Burada $\Box^2 \varphi = \varphi_{;}{}^{\rho}{}_{;\rho}$ d' Alembert operatörü, λ çiftlenim (coupling) sabiti ve $T_M^{\ ab}$ evrendeki maddenin (yani çekim ve skaler alan dışındaki herşeyin) enerji-momentum tensörüdür. $\rho \approx 10^{-29}$ g cm^{-3} kozmik kütle yoğunluklu ve yarıçapı evrenin $R \approx 10^{28}$ cm görünen yarıçapına eşit bir gaz küresinin merkezcil potansiyeli hesaplanarak φ ' nin ortalama değeri kabaca tahmin edilebilir. Bu hesap

$$\langle\varphi\rangle \approx \lambda\rho R^2 \approx \lambda \times 10^{27} \text{ g cm}^{-1} \tag{3.2.2}$$

şeklinde bir ortalama değer verir. 10^{27} g cm^{-1} değeri $\frac{1}{G} = 1.35 \times 10^{28}$ g cm^{-1} sabitine oldukça yakındır; bu nedenle φ,

$$\langle\varphi\rangle \cong \frac{1}{G} \tag{3.2.3}$$

olacak şekilde normalize edilebilir ve böylece (3.2.2) ifadesi, λ nın boyutsuz bir sayı olduğunu gösterir. Bu düşünceler sonucu Brans ve Dicke; gravitasyonun doğru alan denklemlerinin, G ile $\frac{1}{\varphi}$ yer değiştirilerek ve gravitasyonel alanın kaynağında φ-alanı için bir $T_{\varphi}{}^{ab}$ enerji-momentum tensörü, alan denklemlerine eklenerek elde edilebileceğini önerdi:

$$R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R = -\frac{8\pi}{\varphi}\left[T_M{}^{ab} + T_{\varphi}{}^{ab}\right] \tag{3.2.4}$$

Brans-Dicke teorisi için (3.2.1) ve (3.2.4) alan denklemleri, $\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2}$ şeklinde verilen uygun boyutsuz bir sayı olmak üzere

$$\Box^2 \varphi = \frac{8\pi}{3+2\omega} T_M{}^a{}_a \quad , \tag{3.2.5}$$

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\frac{8\pi}{\varphi} T_{M\,ab} - \frac{\omega}{\varphi^2}(\varphi_{;a}\varphi_{;b} - \frac{1}{2} g_{ab}\varphi_{;\rho}\varphi_{;}{}^{\rho})$$

$$-\frac{1}{\varphi}(\varphi_{;a;b} - g_{ab}\Box^2\varphi) \tag{3.2.6}$$

şeklini almaktadır. Eğer ω birden çok büyük ise o zaman (3.2.5) ifadesinden $\Box^2 \varphi = 0\left(\frac{1}{\omega}\right)$ bulunur ve bu yüzden

$$\varphi = \langle \varphi \rangle + 0\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{G} + 0\left(\frac{1}{\omega}\right) \tag{3.2.7}$$

elde edilir. (3.2.7) ifadesi (3.2.6) denkleminde kullanılırsa

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -8\pi G T_{M\,ab} + 0\left(\frac{1}{\omega}\right) \tag{3.2.8}$$

alan denklemleri elde edilmiş olur. Bu nedenle Brans-Dicke teorisi $\omega \to \infty$ limitinde Einstein teorisine dönüşür.

3.3.Diğer Çekim Teorileri

Brans-Dicke çekim teorisi, indirgenmiş (induced) çekim teorisi ve minimal olmayan çiftlenmiş çekim teorileri, skaler tensör çekim teorisinin özel durumlarıdır. Skaler tensör çekim teorisi için etki integralinin genel formu

$$A=\int d^4x\sqrt{-g}\left[F(\varphi)R-\frac{\omega(\varphi)}{\varphi}\varphi_{,a}\varphi^{,a}-V(\varphi)\right] \tag{3.3.1}$$

şeklinde verilir. Bu genel form,

$$F(\varphi)=\varphi \tag{3.3.2}$$

alındığında Brans-Dicke çekim teorisine indirgenmektedir.

$$F(\varphi)=\varepsilon\varphi^2 \tag{3.3.3}$$

alındığında ise indirgenmiş çekim teorisi için etki integrali elde edilir (ε boyutsuz bir sabittir). ξ çiftlenim sabiti olmak üzere, standart minimal olmayan skaler alan teorisi için

$$F(\varphi)=1-\xi\varphi^2\ , \qquad \frac{\omega}{\varphi}=\frac{1}{2} \tag{3.3.4}$$

olmaktadır.

$$F(\varphi)=\frac{\varphi^2}{6}, \qquad \omega(\varphi)=\frac{\varphi}{2} \tag{3.3.5}$$

ise konformal çiftlenmiş çekim teorisi elde edilir. Son olarak ise (3.3.1) ile verilen genel form,

$$F(\varphi)=\frac{1}{2}, \qquad \omega(\varphi)=\frac{\varphi}{2} \tag{3.3.6}$$

olduğunda skaler alanlı Einstein-Hilbert etki integralinin formuna indirgenir (Sanyal ve ark. 2003).

4. NOETHER SİMETRİ YAKLAŞIMI

Parçacık sayısı n tane olan bir sistemin durumunu belirtmek için n tane yer (konum) vektörü kullanılır. Her yer vektörü, 3 tane dik koordinat içerdiğinden, bütün parçacıkların konumlarını belirlemek için $3n$ tane koordinat gereklidir. Eğer sistemdeki kısıtlama sayısı m ise, sistemin durumu $s = 3n - m$ tane koordinatla (*Genelleştirilmiş Koordinatlar*) tamamen belirlenebilir. Bu yüzden böyle bir sistemin durumu, **konfigurasyon uzayı** denilen, s-boyutlu uzayda bir nokta ile gösterilebilir. Bu uzayın her bir boyutu, q_j koordinatlarından birine karşılık gelir. Bir sistemin zaman içindeki yapısı, konfigurasyon uzayında bir eğri ile gösterilebilir; bu eğri özel bir anda sistemin *konfigurasyonunu* ifade eden her bir noktadan oluşmaktadır. Böyle her noktadan, sistemin mümkün hareketlerini gösteren sonsuz sayıda eğri geçtiği için; her bir eğri, özel bir başlangıç koşulları kümesine karşılık gelir. Fakat; bu terminoloji ile, üç-boyutlu uzaydaki bir yol boyunca parçacığın hareketine uygulanan terminolojiyi karıştırmamak için dikkatli olmalıyız.

Nokta, t' ye göre türevi göstermek üzere, $TQ \equiv \{q_i(t), \dot{q}_i(t)\}$ konfigürasyon (teğet) uzayında tanımlı L Lagrange fonksiyonunu dikkate alınsın. Bu durumda; **X** vektör alanı

$$\mathbf{X} = \alpha^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{\alpha}^i(q)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \tag{4.1}$$

boyunca L' nin Lie türevi

$$£_{\mathrm{X}} L = \boldsymbol{X}L = \alpha^i(q)\frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{\alpha}^i(q)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{4.2}$$

ile verilir. Böylece

$$£_{\mathrm{X}} L = 0 \qquad \text{(Noether Teoremi)} \tag{4.3}$$

şartı; faz akısının (phase flux) **X** boyunca korunduğunu ifade eder (Capozziello ve Lambiase, 2000). Bu şu anlama gelir; L için bir hareket sabiti mevcuttur ve Noether Teoremi sağlanmaktadır. Aslında;

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{4.4}$$

Euler-Lagrange denklemleri dikkate alındığında, (4.2) eşitliğinden

$$\frac{d}{dt}(\alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) = £_X L \tag{4.5}$$

bulunur. Eğer (4.3) şartı sağlanıyor ise

$$\sum\nolimits_0 = \alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{4.6}$$

ifadesi bir hareket sabitidir. Burada; *L*' nin zamandan bağımsız ve non-dejenere olduğu durum, yani $L = L(q^i, \dot{q}^j)$'nin

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \qquad \det(H_{ij}) \equiv \det\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \right\| \neq 0 \tag{4.7}$$

koşullarını sağladığı örnekler incelenecektir ($\boldsymbol{H_{ij}}$, Hessian matrisidir).

Analitik Mekanikte *L*, aşağıdaki şekle sahiptir.

$$L = T(q^i, \dot{q}^i) - V(q^i) \tag{4.8}$$

Burada *T*, $\dot{q}^i$ ler cinsinden pozitif-tanımlı bir karesel formdur ve $V(q^i)$, potansiyel terimidir. *L* ile ilgili enerji fonksiyonu;

$$E_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L(q^j, \dot{q}^j) \tag{4.9}$$

olup ve Legendre dönüşümleri kullanılarak Hamilton fonksiyonu ve konjuge momentumu;

$$H = \pi_j \dot{q}^j - L(q^j, \dot{q}^j), \qquad \pi_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \tag{4.10}$$

şeklinde elde edilir.

(4.3) koşulu ve (4.1) denklemindeki **X** vektör alanı, hızlara göre ikinci dereceden homojen bir polinom ve q^j ler cinsinden homojen olmayan bir terim verir. (4.3)'den dolayı böyle bir polinom özdeş olarak sıfır olmalı ve dolayısıyla her katsayı ayrı ayrı sıfırlanmalıdır. Eğer *n* konfigürasyon uzayının boyutu ise, çözümleri simetriyi veren $\{1 + n(n+1)/2\}$ tane kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Böyle simetri denklemleri over-determined (yani, denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla) olmaktadır ve eğer bir çözüm mevcutsa; simetri, sınır koşulları yerine integral sabitleri cinsinden ifade edilmektedir.

4.1. FRW Uzay-zamanına Uygulama

Skaler tensör çekim teorilerinde FRW uzay-zamanı için Noether simetri yaklaşımı kullanılarak, potansiyelin ve çiftlenim fonksiyonunun nasıl olması gerektiği birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır (Capozziello ve Ritis, 1993; Capozziello ve Ritis, 1994; Capozziello ve Lambiase 2000; Kamilya ve Modak 2004; Kamilya ve ark. 2004; Sanyal ve Modak, 2001,). Homojen ve izotrop olan FRW uzay-zamanı; *a, t* nin fonksiyonu olmak üzere

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{4.1.1}$$

ile verilmektedir. Burada; *k* eğrilik parametresidir; $k=0$ (düz uzay), $k=-1$ (negatif eğrilikli uzay) ve $k=+1$ (pozitif eğrilikli uzay) değerlerini alır.

4-boyutlu uzay-zamanda, indirgenmiş çekim teorisi için

$$A = \int d^4x\sqrt{-g}\left[f(\varphi)R - \frac{1}{2}g^{ab}\varphi_{,a}\varphi_{,b} - V(\varphi)\right] = \int L dt \tag{4.1.2}$$

dikkate alalım. Burada; g, g_{ab} metrik tensörün determinantı, $f(\varphi)$; φ skaler alanın çiftlenim fonksiyonu, $V(\varphi)$; φ skaler alanın potansiyeli, ***R*** Ricci skaleri olup FRW metriği için

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \tag{4.1.3}$$

şeklinde bulunur.

(4.1.1) metriği kullanıldığında, (4.1.2) etki integralinden $a(t)$ ölçek çarpanı olmak üzere Lagrangian

$$L = -6a\dot{a}^2 f - 6a^2\dot{a}\dot{\varphi}f' + 6kaf + a^3\left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V\right] \tag{4.1.4}$$

şeklini alır. Burada "˙" *t'* ye göre türevi " ' " ise φ ' ye göre türevi göstermektedir. Eğer (4.3) Noether teoremi koşulu sağlanıyorsa Noether simetrisi vardır denir. Bu durumda ***X*** vektör alanı

$$\mathbf{X} = \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \tag{4.1.5}$$

şeklinde olmak zorundadır. α ve β, a ve φ' ye bağlı olup

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial\alpha}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\ , \qquad \dot{\beta} = \frac{\partial\beta}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \tag{4.1.6}$$

dir. (4.3) koşulundan; $\boldsymbol{X}$ vektör alanı, $f(\varphi)$ ve $V(\varphi)$ bulunabilir. FRW modeli için (4.3) koşulundan, (4.1.5) vektör alanı ve (4.1.4) Lagrangianı kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&\alpha\left(-6f\dot{a}^2 - 12f'a\dot{a}\dot{\varphi} + 6fk + \frac{3}{2}a^2\dot{\varphi}^2 - 3a^2V\right) \\
&+\beta\left(-6f'a\dot{a}^2 - 6f''a^2\dot{a}\dot{\varphi} + 6f'ka - a^3V'\right) \\
&+\left(-12fa\dot{a} - 6f'a^2\dot{\varphi}\right)\left(\dot{a}\frac{\partial\alpha}{\partial a} + \dot{\varphi}\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\right) \\
&+\left(-6f'a^2\dot{a} + a^3\dot{\varphi}\right)\left(\dot{a}\frac{\partial\beta}{\partial a} + \dot{\varphi}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

bulunur. Buradan; aşağıdaki kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$f(\varphi)\left(\alpha + 2a\frac{\partial\alpha}{\partial a}\right) + af'\left(\beta + a\frac{\partial\beta}{\partial a}\right) = 0\,, \tag{4.1.8}$$

$$\alpha - 4f'(\varphi)\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} + \frac{2}{3}a\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = 0\,, \tag{4.1.9}$$

$$a\beta f''(\varphi) + f'(\varphi)\left(2\alpha + a\frac{\partial\alpha}{\partial a} + a\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\right) + 2f(\varphi)\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} - \frac{a^2}{6}\frac{\partial\beta}{\partial a} = 0\,, \tag{4.1.10}$$

$$\frac{a^2}{2}\left[\alpha V(\varphi) + \frac{a\beta V'(\varphi)}{3}\right] - k\left[\alpha f(\varphi) + a\beta f'(\varphi)\right] = 0\,. \tag{4.1.11}$$

Şimdi (4.1.8) - (4.1.11) denklem sisteminden α, β, $f(\varphi)$ ve $V(\varphi)$ çözülecektir. Bunun için değişkenlere ayırma yöntemi kullanılacaktır. Yani;

$$\alpha = A_1(a)A_2(\varphi)\,, \qquad \beta = B_1(a)B_2(\varphi) \tag{4.1.12}$$

olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda (4.1.9) denklemi

$$-\frac{A_2}{4B_2'} + 4f'\frac{A_2'}{B_2'} = \frac{aB_1}{6A_1} \tag{4.1.13}$$

şeklini alır. (4.1.13) denkleminin sol tarafı sadece φ' nin fonksiyonu, sağ tarafı ise sadece a'nın fonksiyonu olduğundan; C sabit olmak üzere

$$A_1 = \frac{aB_1}{6C} \tag{4.1.14}$$

ve

$$B_2' = -\frac{1}{4C}(A_2 - 4f'A_2') \tag{4.1.15}$$

ifadeleri elde edilir. A_1, $\frac{\partial A_1}{\partial a}$ ve (4.1.12) eşitlikleri, (4.1.8) denkleminde kullanılırsa

$$-\frac{a}{B_1}\frac{dB_1}{da} = \frac{3(A_2 f + 2CB_2 f')}{2(A_2 f + 3CB_2 f')} = -n \tag{4.1.16}$$

elde edilir (Burada *n*, değişkenlerine ayırma sabittir). Bu durumda,

$$B_1 = Da^n \tag{4.1.17}$$

ve (4.1.14) eşitliğinden

$$A_1 = \frac{D}{6C}a^{n+1} \tag{4.1.18}$$

elde edilir. Burada *D,* integral sabitidir. Ayrıca (4.1.16) diferansiyel denkleminden

$$\frac{f'}{f} = -\frac{(2n+3)}{6C(n+1)}\frac{A_2}{B_2} \tag{4.1.19}$$

bulunur. (4.1.17) ve (4.1.18) eşitlikleri kullanıldığında A_1, $\frac{dA_1}{da}$ ve $\frac{dB_1}{da}$ lar B_1 cinsinden ifade edilebilir ve bunlar, (4.1.10) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$(n+3)f'A_2 + 2fA_2' + 6Cf'B_2' + (6Cf'' - nC)B_2 = 0 \tag{4.1.20}$$

elde edilir. Şimdi üç tane (4.1.15), (4.1.19) ve (4.1.20) denklemleri ile üç tane A_2, B_2 ve f bilinmeyenleri mevcuttur. Sırasıyla (4.1.19) denkleminden B_2 ve (4.1.15) denkleminden B_2', (4.1.20) denkleminde yerlerine konulursa

$$\frac{(2n+3)}{12(n+1)}\left[6ff'' - 3(n+1)f'^2 - nf\right]A_2 = (3f'^2 + f)A_2'f' \tag{4.1.21}$$

denklemi elde edilir. (4.1.19) denkleminden B_2 nin türevi (yani, B_2') belirlenir ve (4.1.15) denkleminde kullanılırsa

$$\left[2(2n+3)ff'' - (n+3)f'^2\right]A_2 = 2\left[6(n+1)f'^2 + (2n+3)f\right]A_2'f' \tag{4.1.22}$$

bulunur. Şimdi (4.1.21) ve (4.1.22) denklemlerinden A_2 ve A_2' elimine edilerek; sadece f cinsinden olacak şekilde, aşağıdaki lineer olmayan ikinci mertebeden diferansiyel denklem elde edilir:

$$f'' = \frac{6n(n+1)(n+2)f'^4}{(2n+3)f^2} + \frac{(n+1)(8n^2+16n+3)f'^2}{2(2n+3)f} + \frac{n(2n+3)}{6} \qquad (4.1.23)$$

Teorik olarak; (4.1.23) denkleminden f bulunur ve A_2 nin belirlenmesi için (4.1.21) ya da (4.1.22) denklemlerinden herhangi biri, B_2 nin elde edilmesi için ise (4.1.19) denklemi çözülebilir. (4.1.23) denkleminin ilk integralinin karesi;

$$f'^2 = \frac{mp_1\left(\frac{f}{r}\right)^{1-p_1} + lp_2\left(\frac{f}{r}\right)^{1-p_2}}{m\left(\frac{f}{r}\right)^{-p_1} + l\left(\frac{f}{r}\right)^{-p_2}} \qquad (4.1.24)$$

şeklinde elde edilir (Kamilya ve ark., 2004). Burada m ve l integral sabitleridir. r, p_1 ve p_2 sabitleri n'ye bağlı olup şu şekilde verilir:

$$r = \frac{12n(n+1)(n+2)}{2n+3}, \qquad p_1 = -\frac{r}{3}, \qquad p_2 = -n(2n+3) \qquad (4.1.25)$$

Genelde (4.1.24) denklemi kapalı formda çözülemez. Ancak özel durumlarda çözüm bulmak mümkündür.

Durum i: $l = 0$ ve $m \neq 0$ ise (4.1.24) denkleminden;

$$f(\varphi) = -\frac{1}{12}(\varphi - \varphi_0)^2 \qquad (4.1.26)$$

bulunur.

Durum ii: $m = 0$ ve $l \neq 0$ ise (4.1.24) denkleminden;

$$f(\varphi) = -\frac{(2n+3)^2}{48(n+1)(n+2)}(\varphi - \varphi_0)^2 \qquad (4.1.27)$$

elde edilir.

Şimdi (4.1.26) ile verilen f, (4.1.21) ya da (4.1.22) denklemlerinden birinde kullanılırsa A_2, (4.1.19) denklemi kullanılırsa B_2

$$A_2 = A(\varphi-\varphi_0)^n \qquad B_2 = -\frac{A}{12C}\frac{(2n+3)}{(n+1)}(\varphi-\varphi_0)^{n+1} \tag{4.1.28}$$

şeklinde bulunur. Burada A integral sabitidir. Buradan; (4.1.12) ile verilen α ve β

$$\alpha = \frac{AB}{6C}a^{n+1}(\varphi-\varphi_0)^n, \qquad \beta = -\frac{AB}{12C}\frac{(2n+3)}{(n+1)}a^n(\varphi-\varphi_0)^{n+1} \tag{4.1.29}$$

şeklini alır. Aynı yol izlenerek (4.1.27) denklemi ile verilen f için A_2 ve B_2;

$$A_2 = A(\varphi-\varphi_0)^{\frac{2n(n+2)}{(2n+3)}}, \qquad B_2 = -\frac{A}{12C}\frac{(2n+3)}{(n+1)}(\varphi-\varphi_0)^{\frac{2n^2+6n+3}{2n+3}} \tag{4.1.30}$$

şeklinde ve α ve β ise

$$\alpha = \frac{AB}{6C}a^{n+1}(\varphi-\varphi_0)^{\frac{2n(n+2)}{2n+3}}, \quad \beta = -\frac{AB}{12C}\frac{(2n+3)}{(n+1)}a^n(\varphi-\varphi_0)^{\frac{2n^2+6n+3}{2n+3}} \tag{4.1.31}$$

olarak bulunur.

Yukarıda (4.1.8)-(4.1.10) denklemlerinden α, β ve $f(\varphi)$ elde edilmiş olsa bile Noether simetrisinin varlığı için kalan (4.1.11) denklemi sağlanmak zorundadır. Burada; *k=0* ve $k=\mp 1$ için aşağıdaki durumlarda ayrı ayrı inceleme yapılacaktır.

Durum A: Düz uzayda yani *k=0* için (4.1.11) denkleminden

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{3\alpha}{a\beta} \tag{4.1.32}$$

elde edilir. (4.1.29) ve (4.1.31) de verilen α, β ifadelerine karşılık gelen $V(\varphi)$ potansiyeli

$$V(\varphi) = V_0(\varphi-\varphi_0)^{\frac{6(n+1)}{2n+3}} \tag{4.1.33}$$

şeklinde bulunur. Burada V_0 integral sabitidir. Bu durumda (*DurumA, k=0*) Noether simetrisini belirleyen dört tane kısmi diferansiyel denklem vardır ve bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı aynıdır. Şimdiye kadarki denklemlerde *n* keyfi bir sabittir. Ancak *n*, (4.1.27) ile verilen $f(\varphi)$, (4.1.29) ile verilen α ,β ve (4.1.33) ile verilen $V(\varphi)$ formları için -1,-2 ve -3/2 değerlerini alamaz. Ayrıca *n*; (4.1.26), (4.1.29) ve (4.1.33) denklemlerinde -2 değerini alırken -1 ve -3/2 değerlerini alamaz. *n=-2* özel durumu için $V(\varphi)$ potansiyeli $V(\varphi) = V_0(\varphi-\varphi_0)^6$ şekline indirgenir.

Durum B: Eğri olmayan uzayda yani $k = \mp 1$ için eğer aşağıdaki denklemler geçerli ise (4.1.11) denklemi sağlanır:

$$\frac{1}{f}\frac{df}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{a\beta} \tag{4.1.34}$$

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{3\alpha}{a\beta} \tag{4.1.35}$$

Bu durumda bilinmeyenler α, β, V ve f fonksiyonlarıdır (4 tane). Fakat Noether simetrisini sağlayan kısmi diferansiyel denklem sayısı beş tanedir. Bu nedenle n keyfi olamaz. Dolayısıyla (4.1.34) ve (4.1.35) denklemlerinden

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{d\varphi} = \frac{3}{f}\frac{df}{d\varphi} \tag{4.1.36}$$

elde edilir. Bu denkleminin çözümünden

$$V(\varphi) = V_0 f^3 \tag{4.1.37}$$

ifadesi bulunur. Burada V_0 yeni bir integral sabitidir. $k = \mp 1$ için; (4.1.34) denkleminde, (4.1.26) ve (4.1.29) denklemleri veya (4.1.27) ve (4.1.31) denklemleri kullanılarak n=-2 elde edilir. Ancak n' nin bu değeri (4.1.27) denklemi ile verilen $f(\varphi)$ çözümüne izin vermez. Bu yüzden; n=-2 için (4.1.23) denkleminden

$$f'' = \frac{3}{2}\frac{f'^2}{f} + \frac{1}{3} \tag{4.1.38}$$

bulunur. Bu denklemin ilk integrali, Q integral sabiti olmak üzere,

$$3f'^2 + f = Qf^3 \tag{4.1.39}$$

şeklindedir. Bu denklemi kapalı formda integre etmek mümkün değildir ama $Q=0$ alınırsa (4.1.26) bir özel çözümdür. Bu nedenle $k \neq 0$ için

$$\alpha = \frac{2N}{a(\varphi-\varphi_0)^2}, \qquad \beta = \frac{N}{a^2(\varphi-\varphi_0)} \tag{4.1.40}$$

ifadeleri elde edilir. Burada $N=AB/12C$ dir ve $V(\varphi)$ potansiyeli

$$V(\varphi) = V_1(\varphi-\varphi_0)^6 \tag{4.1.41}$$

ile verilir (V_1 integral sabiti). Bu çözüm n=-2 için k=0 özel durumunda daha önce bulunan çözümle aynıdır.

Durum C: *k=0* ve *V=V₀* için (4.1.8)-(4.1.11) denklemlerinin basit çözümü aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{p}{a}, \qquad f = -\frac{\varphi^2}{12} + f_0 + f_1 \tag{4.1.42}$$

Burada p, V_0, f_0 ve f_1 sabitlerdir. (4.1.42) ile verilen ifadeler ve Cartan bir-form kullanılırsa, Noether simetrisine karşılık gelen hareket sabiti, $\Sigma = \alpha \frac{dL}{d\dot{a}} + \beta \frac{dL}{d\dot{\varphi}}$ kullanılarak

$$\Sigma = p\left[\frac{a}{6}\frac{d(a\varphi)}{dt} - f_0 a\dot{a}\right] \tag{4.1.43}$$

şeklinde elde edilir.

4.2 Statik, Silindirik Simetrik Uzay-zamanına Uygulama

Bu kısımda,

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + 2k(r)dtd\phi + e^{\mu(r)}\left(dr^2 + dz^2\right) + \ell(r)d\phi^2 \tag{4.2.1}$$

metriği ile verilen silindirik simetrik statik uzay-zamanı dikkate alalım (J.N. Islam, 1985). Bu uzay-zaman için,

$$L = \frac{1}{2} g_{ab} \frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau} \tag{4.2.2}$$

Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2} h\, \dot{t}^2 - k\dot{t}\dot{\phi} - \frac{1}{2}e^{\mu}\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}\ell\, \dot{\phi}^2 \tag{4.2.3}$$

şeklini alır. Burada; h, k, μ ve ℓ, sadece r nin fonksiyonudur ve nokta t ye göre türevi göstermektedir. ξ vektör alanı

$$\xi = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \dot{\xi}^a \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \tag{4.2.4}$$

ile verilir. Burada,

$$\xi^a = \left\{\xi^r(x^b), \xi^z(x^b), \xi^\phi(x^b), \xi^t(x^b)\right\} \tag{4.2.5}$$

$$\dot{\xi}^a = \dot{r}\frac{\partial \xi^r}{\partial r} + \dot{z}\frac{\partial \xi^z}{\partial z} + \dot{\phi}\frac{\partial \xi^\phi}{\partial \phi} + \dot{t}\frac{\partial \xi^t}{\partial t} \tag{4.2.6}$$

şeklindedir ve $x^a = (t, r, z, \phi)$, a = 0, 1, 2, 3 alınmaktadır. Bu durumda (4.3) şartı (yani, L nin ξ vektör alanı yönündeki Lie türevinin sıfırlanması),

$$\pounds_{\xi} L = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\xi^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \dot{\xi}^a \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \right) L = 0 \tag{4.2.7}$$

veya

$$\left(\xi^r \frac{\partial}{\partial r} + \xi^z \frac{\partial}{\partial z} + \xi^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\xi^r}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}} + \frac{d\xi^z}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{z}} + \frac{d\xi^\phi}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} + \frac{d\xi^t}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{t}} \right) L = 0 \tag{4.2.8}$$

şeklini alır. Burada; (4.2.1) metriği için elde edilen (4.2.3) Lagrangianı (4.2.8) de kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&\xi^r \left[\frac{1}{2} h' \dot{t}^2 - k' \dot{t}\dot{\phi} - \frac{1}{2} \mu' e^{\mu} \left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{1}{2} \ell' \dot{\phi}^2 \right] + \xi^z .0 + \xi^\phi .0 + \xi^t .0 \\
&+ \left(-e^{\mu} \dot{r} \right) [\dot{r}\xi^r{}_{,r} + \dot{z}\xi^r{}_{,z} + \dot{\phi}\xi^r{}_{,\phi} + \dot{t}\xi^r{}_{,t}] \\
&+ \left(-\dot{z} e^{\mu} \right) [\dot{r}\xi^z{}_{,r} + \dot{z}\xi^z{}_{,z} + \dot{\phi}\xi^z{}_{,\phi} + \dot{t}\xi^z{}_{,t}] \\
&+ \left(-k\dot{t} - \ell\dot{\phi} \right) [\dot{r}\xi^\phi{}_{,r} + \dot{z}\xi^\phi{}_{,z} + \dot{\phi}\xi^\phi{}_{,\phi} + \dot{t}\xi^\phi{}_{,t}] \\
&+ \left(h\dot{t} - k\dot{\phi} \right) [\dot{r}\xi^t{}_{,r} + \dot{z}\xi^t{}_{,z} + \dot{\phi}\xi^t{}_{,\phi} + \dot{t}\xi^t{}_{t}] = 0
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

elde edilir. Burada; $\dot{t}^2$, $\dot{r}^2$, $\dot{z}^2$, $\dot{\phi}^2$, $\dot{t}\dot{r}$, $\dot{t}\dot{z}$, $\dot{t}\dot{\phi}$, $\dot{r}\dot{z}$, $\dot{r}\dot{\phi}$ ve $\dot{z}\dot{\phi}$ terimlerinin çarpanları sıfıra eşitlendiğinde

$$\frac{1}{2}\mu' \xi^r + \xi^r{}_{,r} = 0 , \tag{4.2.10}$$

$$\frac{1}{2}\mu' \xi^r + \xi^z{}_{,z} = 0 , \tag{4.2.11}$$

$$\frac{1}{2}\ell' \xi^r + \ell\xi^\phi{}_{,\phi} - k\xi^t{}_{,\phi} = 0 , \tag{4.2.12}$$

$$\frac{1}{2}h' \xi^r - k\xi^\phi{}_{,t} + h\xi^t{}_{,t} = 0 , \tag{4.2.13}$$

$$k' \xi^r + k\xi^\phi{}_{,\phi} + \ell\xi^\phi{}_{,t} - h\xi^t{}_{,\phi} + k\xi^t{}_{,t} = 0 , \tag{4.2.14}$$

$$\xi^r{}_{,z} + \xi^z{}_{,r} = 0 , \tag{4.2.15}$$

$$e^{\mu}\xi^r{}_{,\phi} + \ell\xi^\phi{}_{,r} + k\xi^t{}_{,r} = 0 , \tag{4.2.16}$$

$$e^{\mu}\xi^r{}_{,t} + k\xi^\phi{}_{,r} - h\xi^t{}_{,t} = 0 , \tag{4.2.17}$$

$$e^{\mu}\xi^{z}{}_{,\phi}+\ell\xi^{\phi}{}_{,z}+k\xi^{t}{}_{,z}=0, \qquad (4.2.18)$$

$$e^{\mu}\xi^{z}{}_{,t}+k\xi^{\phi}{}_{,z}-h\xi^{t}{}_{,z}=0 \qquad (4.2.19)$$

bulunur.

Şimdi; (4.2.1) metriği için (2.2.5) ile verilen Killing denklemleri elde edilecek olunursa, bu durumda metrik katsayıları;

$$g_{00}=-h(r), \quad g_{11}=e^{\mu(r)}, \quad g_{22}=e^{\mu(r)}, \quad g_{33}=\ell(r), \quad g_{03}=k(r) \qquad (4.2.20)$$

dir. Killing denkleminin açık şekli

$$(ab): g_{ab,c}\xi^{c}+g_{ac}\xi^{c}_{,b}+g_{cb}\xi^{c}_{,a}=0 \qquad (4.2.21)$$

olmak üzere

$$(0\ 0): \ -h'\xi^{r}-2h\xi^{t}{}_{,t}+2k\xi^{\phi}{}_{,t}=0, \qquad (4.2.22)$$

$$(0\ 1): \ -h\xi^{t}{}_{,t}+k\xi^{\phi}{}_{,r}+e^{\mu}\xi^{r}{}_{,t}=0, \qquad (4.2.23)$$

$$(0\ 2): \ -h\xi^{t}{}_{,z}+k\xi^{\phi}{}_{,r}+e^{\mu}\xi^{r}{}_{,t}=0, \qquad (4.2.24)$$

$$(0\ 3): \ k'\xi^{r}-h\xi^{t}{}_{,\phi}+k\xi^{\phi}{}_{,\phi}+\ell\xi^{\phi}{}_{,t}+k\xi^{t}{}_{,t}=0, \qquad (4.2.25)$$

$$(1\ 1): \ \mu'\xi^{r}+2\xi^{r}{}_{,r}=0, \qquad (4.2.26)$$

$$(1\ 2): \ \xi^{r}{}_{,z}+\xi^{z}{}_{,r}=0, \qquad (4.2.27)$$

$$(1\ 3): \ e^{\mu}\xi^{r}{}_{,\phi}+k\xi^{\phi}{}_{,\phi}+\ell\xi^{\phi}{}_{,r}=0, \qquad (4.2.28)$$

$$(2\ 2): \ \mu'\xi^{r}+2\xi^{z}{}_{,z}=0, \qquad (4.2.29)$$

$$(2\ 3) \quad e^{\mu}\xi^{z}{}_{,\phi}+k\xi^{t}{}_{,z}+\ell\xi^{\phi}{}_{,z}=0, \qquad (4.2.30)$$

$$(3\ 3): \ \ell'\xi^{r}+2k\xi^{t}{}_{,\phi}+2\ell\xi^{\phi}{}_{,\phi}=0 \qquad (4.2.31)$$

elde edilir.

Dikkate alınan uzay-zaman için; L Lagrange fonksiyonunun invaryanslığını ifade eden (4.2.7) denklemlerinden elde edilen (4.2.10)-(4.2.19) denklemleri ile (4.2.21) Killing denklemlerinden elde edilen (4.2.22)-(4.2.31) denklemleri özdeş olarak aynı sonucu vermektedir.

5. KANTOWSKI-SACHS, BIANCHI I VE III UZAY-ZAMANI İÇİN NOETHER SİMETRİ YAKLAŞIMI

Skaler alan içeren etki integralinin genel formu şu şekilde verilmektedir.

$$A = \int d^4x\sqrt{-g}\left[F(\Phi)R + \frac{\varepsilon}{2}g^{ab}\Phi_a\Phi_b - V(\Phi)\right] = \int L dt \tag{5.1}$$

Burada R Ricci skaleri; $F(\Phi)$, Φ skaler alanın çiftlenim fonksiyonu; $V(\Phi)$, Φ skaler alanı için potansiyel; L Lagrangian yoğunluğudur. ε=+1 için signatür (+, -, -, -) ve ε=-1 için signatür (-,+,+,+) değerlerini alır. Ayrıca burada Planck birimleri kullanılmaktadır.

Alan denklemleri, g_{ab} metriğine göre (5.1) denkleminin varyasyonu alınarak

$$F(\Phi)G_{ab} = -\frac{\varepsilon}{2}T_{ab} - g_{ab}\Box F(\Phi) + F(\Phi)_{;ab} \tag{5.2}$$

şeklinde bulunur. Burada $\Box$, d'Alembert operatörüdür. Einstein tensörü,

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \tag{5.3}$$

ve skaler alanla ilgili enerji-momentum tensörü ise

$$T_{ab} = \Phi_a\Phi_b - \frac{1}{2}g_{ab}\Phi_c\Phi^c + \varepsilon g_{ab}V(\Phi) \tag{5.4}$$

şeklinde verilir. (5.1) denkleminin Φ skaler alanına göre varyasyonu alındığında

$$\varepsilon\Box\Phi - RF'(\Phi) + V'(\Phi) = 0 \tag{5.5}$$

Klein-Gordon denklemi bulunur. Burada " ' " üst işareti Φ ye göre türevi göstermektedir.

(+2) signatürlü Kantowski-Sachs metriği için skaler alanın $F(\Phi)$ çiftlenim fonksiyonları ve $V(\Phi)$ çekim potansiyeli Sanyal (2002) tarafından bulunmuştur. Bianchi I (BI, *q=0*), Bianchi III (BIII, *q=-1*) ve Kantowski-Sachs (KS, *q=+1*) kozmolojik modellerine ait metrik aşağıdaki şekildedir:

$$ds^2 = \varepsilon(dt^2 - A^2dr^2) - \varepsilon B^2\left(d\theta^2 + \Sigma^2(q,\theta)d\phi^2\right) \tag{5.6}$$

Burada $A=A(t)$ ve $B=B(t)$ dir. $\Sigma(q,\theta)=\theta$ (*q=0* için), $\Sigma(q,\theta)=\sinh\theta$ (*q=-1* için) ve $\Sigma(q,\theta)=\sin\theta$ (*q=+1* için) değerlerini alır. Bu uzay-zanam için Ricci Skaleri

$$R=2\varepsilon\left[\frac{\ddot{A}}{A}+2\frac{\ddot{B}}{B}+\frac{\dot{B}^2}{B^2}+2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}+\frac{q}{A^2}\right] \tag{5.7}$$

şeklinde elde edilir. (5.6) metriği için (5.2) alan denklemleri ve (5.5) Klein-Gordon denkleminden

$$\frac{\dot{B}^2}{B^2}+2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}+\frac{q}{B^2}+\frac{F'}{F}\left(\frac{\dot{A}}{A}+2\frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{\Phi}+\frac{\varepsilon}{2F}\left[\frac{\dot{\Phi}}{2}+V(\Phi)\right]=0\,, \tag{5.8}$$

$$2\frac{\ddot{B}}{B}+\frac{\dot{B}^2}{B^2}+\frac{q}{B^2}+\frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi}+2\frac{\dot{B}}{B}\dot{\Phi}\right]+\left(\frac{F''}{F}-\frac{\varepsilon}{4F}\right)\dot{\Phi}^2+\frac{\varepsilon}{2F}V(\Phi)=0\,, \tag{5.9}$$

$$\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{\ddot{B}}{B}+\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}+\frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi}+\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{\Phi}\right]+\left(\frac{F''}{F}+\frac{\varepsilon}{4F}\right)\dot{\Phi}^2+\frac{\varepsilon}{2F}V(\Phi)=0 \quad , \tag{5.10}$$

$$\frac{\ddot{A}}{A}+2\frac{\ddot{B}}{B}+\frac{\dot{B}^2}{B^2}+2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}+\frac{q}{B^2}+\frac{\varepsilon}{2F'}\left[\ddot{\Phi}+\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{\Phi}+V(\Phi)\right]=0 \tag{5.11}$$

bulunur. Burada $F\neq 0\neq F'$ dür.

BI, BIII ve KS uzay-zamanları için (5.1) ile verilen etki integralinden Lagrangian yoğunluğu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} L=\ &2\varepsilon FA\dot{B}^2+4\varepsilon FB\dot{A}\dot{B}+2\varepsilon F'B^2\dot{A}\dot{\Phi}+4\varepsilon F'AB\dot{B}\dot{\Phi}\\ &-2\varepsilon qFA+AB^2\left[\frac{\dot{\Phi}^2}{2}-V(\Phi)\right] \end{aligned} \tag{5.12}$$

Lagrangianın varyasyonu alınarak elde edilen Euler-Lagrange denklemleri, (5.9)-(5.11) ile verilen alan denklemleri ile aynıdır. (5.12) Lagrangianının E_L enerji fonksiyoneli hesaplandığında

$$\begin{aligned} E_L&=\frac{\partial L}{\partial\dot{A}}\dot{A}+\frac{\partial L}{\partial\dot{B}}\dot{B}+\frac{\partial L}{\partial\dot{\Phi}}\dot{\Phi}-L\\ &=\frac{\dot{B}^2}{B^2}+2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}+\frac{q}{B^2}+\frac{F'}{F}\left(\frac{\dot{A}}{A}+2\frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{\Phi}+\frac{\varepsilon}{2F}\left[\frac{\dot{\Phi}^2}{2}+V(\Phi)\right] \end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. (5.8) ile verilen Einstein alan denkleminden $E_L=0$ olduğu sonucu çıkar.

Şimdi verilen L Lagrangianı için Noether simetri koşulunu inceleyelim. Bu Lagrangian için konfigürasyon uzayı $Q=(A,B,\Phi)$, konfigürasyon teğet uzayı ise $TQ=(A,B,\Phi,\dot{A},\dot{B},\dot{\Phi})$' dır. Eğer Noether simetrisi varsa ***X*** vektör alanı aşağıdaki gibi olmak zorundadır:

$$\mathbf{X}=\alpha\frac{\partial}{\partial A}+\beta\frac{\partial}{\partial B}+\gamma\frac{\partial}{\partial \Phi}+\dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{A}}+\dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{B}}+\dot{\gamma}\frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \tag{5.14}$$

Burada α, β ve γ sadece *A, B* ve Φ' nin fonksiyonlarıdır. *L* Lagrangianı için (4.3) Noether simetri koşuludan ($£_{\mathbf{X}} L=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}L=0$),aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$2\frac{\partial\beta}{\partial A}+B\frac{F'}{F}\frac{\partial\gamma}{\partial A}=0, \tag{5.15}$$

$$\frac{\alpha}{2}+B\frac{\partial\alpha}{\partial B}+A\frac{\partial\beta}{\partial B}+A\frac{F'}{F}\left(\frac{\gamma}{2}+B\frac{\partial\gamma}{\partial B}\right)=0, \tag{5.16}$$

$$\frac{\alpha}{2}+\beta\frac{A}{B}+A\frac{\partial\gamma}{\partial\Phi}+2\varepsilon F'\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\Phi}+\frac{A}{B}\frac{\partial\beta}{\partial\Phi}\right)=0, \tag{5.17}$$

$$\beta+B\frac{\partial\alpha}{\partial A}+A\frac{\partial\beta}{\partial A}+B\frac{\partial\beta}{\partial A}+B\frac{F'}{F}\left(\gamma+A\frac{\partial\gamma}{\partial A}+\frac{B}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial B}\right)=0, \tag{5.18}$$

$$2\frac{\partial\beta}{\partial\Phi}+\frac{F'}{F}\left(2\beta+B\frac{\partial\alpha}{\partial A}+B\frac{\partial\gamma}{\partial\Phi}+2A\frac{\partial\beta}{\partial A}\right)+\frac{F''}{F}B\gamma+\frac{\varepsilon}{2F}AB\frac{\partial\gamma}{\partial A}=0, \tag{5.19}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\Phi}+\frac{A}{B}\frac{\partial\beta}{\partial\Phi}+B\frac{F'}{F}\left(\alpha+\frac{A}{B}\beta+\frac{B}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial B}+A\frac{\partial\beta}{\partial B}+A\frac{\partial\gamma}{\partial\Phi}\right)$$
$$+\frac{F''}{F}A\gamma+\frac{\varepsilon}{4F}AB\frac{\partial\gamma}{\partial B}=0, \tag{5.20}$$

$$2\varepsilon q\left(F\alpha+F'A\gamma\right)+\left(B\alpha+2A\beta\right)BV(\Phi)+AB^2\gamma V'(\Phi)=0 \tag{5.21}$$

Burada, konfigürasyon uzayının boyutu 3 olduğu için 7 tane denklem elde edilmiştir. Hessian determinantına ($W=\sum\left|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{Q}_i\partial\dot{Q}_j}\right|$) bakıldığında ise

$$W=16AB^4 f\left(3\varepsilon F'^2-F\right) \tag{5.22}$$

elde edilir. Eğer F

$$F=\frac{\varepsilon}{12}\left(\Phi-\Phi_0\right)^2 \tag{5.23}$$

şeklinde verilirse Hessian determinantı sıfırlanır. Bu durumda L Lagrangianı dejenere olur. Değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak (5.15)-(5.20) diferansiyel denklem sistemi α, β ve γ için çözüldüğünde

$$\alpha = \frac{l}{1+m} A^{1+m} B^{\frac{n}{3}} \left(\Phi - \Phi_0\right)^n \tag{5.24}$$

$$\beta = \frac{l}{m} A^m B^{1+\frac{m}{2}} \left(\Phi - \Phi_0\right)^n \tag{5.25}$$

$$\gamma = -\frac{l}{m} A^m B^{\frac{m}{2}} \left(\Phi - \Phi_0\right)^{1+n} \tag{5.26}$$

elde edilir. Burada *m* ve *n* değişkenlerine ayırma sabitleri olup *n=3m/2* değerini alır ve $\mathrm{m} \neq 0, -1$ dir. Ayrıca *l* integral sabitidir. (5.15)-(5.20) denklem sisteminin, (5.23) çiftlenim fonksiyonu için Sanyal (2002) tarafından elde edilen çözümleri genelleştirilmiş ve (5.24)-(5.26) ile verilmektedir. Bu nedenle; eğer *n*=-3 yani *m*=-2 alınırsa Sanyal (2002) da verilen çözümlere ulaşılır. Şimdi; (5.21) denkleminde (5.24)-(5.26) çözümleri kullanılarak, $V(\Phi)$ için aşağıdaki çözümler elde edilir:

i. Eğer *m* keyfi ve *q=0* (BI) ise

$$V(\Phi) = \lambda\left(\Phi - \Phi_0\right)^{\frac{3m+2}{m+1}} \tag{5.27}$$

ii. Eğer $q \neq 0$ ise (bu durumda *m*=-2 olmak zorunda)

$$V(\Phi) = \lambda\left(\Phi - \Phi_0\right)^4 \tag{5.28}$$

Burada λ integral sabitidir.

L Lagrangianının dejenere olmadığı (yani $W \neq 0$) durumunda, F çiftlenim fonksiyonu için $c \neq \frac{\varepsilon}{12}$ olmak üzere $F = c\Phi^2$ seçilebilir. Bu fonksiyon kullanılarak (5.15)-(5.20) denklem sisteminden, *k* sabit olmak üzere,

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -kB, \qquad \gamma = k\Phi \tag{5.29}$$

çözümleri bulunur. Ayrıca (5.29) çözümleri, (5.21) denkleminde kullanılırsa *q=0* olmak zorundadır ve $V(\Phi)$ için

$$V(\Phi) = \lambda\Phi^2 \tag{5.30}$$

çözümü bulunur. Seçilen bu çiftlenim fonksiyonu $F = c\Phi^2$ için BIII ve KS modelleri herhangi bir potansiyele sahip değildir.

(5.23) ve (5.28) denklemleri göz önüne alındığında $\Phi_0 = 0$ için (5.8)-(5.11) ile verilen alan denklemleri

$$\frac{\dot{B}^2}{B^2} + 3\frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{A}\dot{\Phi}}{A\Phi} + 4\frac{\dot{B}\dot{\Phi}}{B\Phi} + \frac{q}{B^2} + 6\lambda\Phi^2 = 0, \tag{5.31}$$

$$2\frac{\ddot{B}}{B} + 2\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2} + 4\frac{\dot{B}\dot{\Phi}}{B\Phi} + \frac{q}{B^2} + 6\lambda\Phi^2 = 0, \tag{5.32}$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + 2\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} - \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} + 6\lambda\Phi^2 = 0 \quad , \tag{5.33}$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\ddot{B}}{B} + 3\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 3\left(\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B}\right)\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} + \frac{q}{B^2} + 12\lambda\Phi^2 = 0, \tag{5.34}$$

denklemlerine dönüşür. Şimdi Cartan bir-form

$$\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}}dA + \frac{\partial L}{\partial \dot{B}}dB + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}}d\Phi \tag{5.35}$$

kullanılarak, (5.24)-(5.26) ile verilen Noether simetrisi için hareket sabiti $i_X\Theta_L$ ($i_X\Theta_L = \alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{A}} + \beta\frac{\partial L}{\partial \dot{B}} + \gamma\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}}$) bağıntısından aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{(B\dot{\Phi})}{A\Phi^2} = c_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} = c_0\frac{A\Phi}{B} \tag{5.36}$$

Bululan bu ifade aslında bir kısıtlamadır ve (5.31)-(5.34) ile verilen alan denklemlerini sağlamak zorundadır.

(5.31) denkleminden (5.32) denklemi çıkarıldığında ve (5.36) kullanıldığında

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} - 2\frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2} = c_0\frac{\Phi\dot{A}}{B} \tag{5.37}$$

denklemi bulunur. Aslında bu denklem (5.36) denkleminin zaman türevi alınarak da bulunabilirdi. Böylelikle (5.32) ve (5.37) denklemleri arasında ikinci türevi içeren terimler yok edilebilir ve aşağıdaki kısıtlama denklemi bulunur:

$$(A\dot{\Phi}) = -\frac{1}{2c_0B}\left[q + (c_0A\Phi)^2\right] - \frac{3\lambda}{c_0}B\Phi^2 \tag{5.38}$$

Bu denklem, (5.31) denkleminde (5.36) denklemi kullanılarak bulunabilirdi. Dolayısıyla (5.38) denklemi, (5.31) ya da (5.32) denkleminin yerine kullanılabilir. Şimdi ise (5.33) ve (5.34) denklemlerinde (5.36) denklemi kullanılırsa

$$\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi}-\frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2}+\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}+2c_0\frac{A\Phi}{B}\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\right)+6\lambda\Phi^2=0 \tag{5.39}$$

$$\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi}+3\frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2}+\frac{\dot{A}\dot{\Phi}}{A\Phi}+c_0\frac{A\Phi}{B}\left(3\frac{\dot{A}}{A}+4\frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\right)+(c_0\frac{A\Phi}{B})^2+\frac{q}{B^2}+12\lambda\Phi^2=0 \tag{5.40}$$

bulunur. (5.40) denkleminden (5.39) denklemi çıkarılır ve (5.38) denklemi de kullanılırsa

$$\frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2}-\frac{c_0}{2}\frac{A\dot{\Phi}}{B}=\frac{c_0^{\;2}}{4}\frac{(A\Phi)^2}{B^2}+\frac{q}{4B^2}+\frac{3\lambda}{2}\Phi^2 \tag{5.41}$$

denklemi elde edilir.

Alan denklemlerinin çözümünü bulmak için (5.36), (5.38) ve (5.41) denklemlerinde

$$dt=\left(\frac{B}{A\Phi}\right)d\tau \tag{5.42}$$

zaman dönüşümü yapılabilir. Bu dönüşüm altında, (5.36) denkleminden

$$B\Phi=n\,e^{c_0\tau} \tag{5.43}$$

bulunur. Burada n ($n>0$) integral sabitidir. Yapılan zaman dönüşümü altında (5.38) denklemi

$$A\Phi(A\Phi)_{,\tau}+\frac{c_0}{2}(A\Phi)^2+\frac{3\lambda n^2}{c_0}e^{2c_0\tau}+\frac{q}{2c_0}=0 \tag{5.43}$$

şekline dönüşür. Bu denklemin çözümünden

$$(A\Phi)^2=-\frac{2\lambda n^2}{c_0^{\;2}}e^{2c_0\tau}+m\,e^{-c_0\tau}-\frac{q}{c_0^{\;2}} \tag{5.45}$$

elde edilir. Burada m başka bir integral sabitidir. Son olarak (5.41) denklemi (5.42) ile verilen zaman dönüşümü altında

$$\Phi_{,\tau}^{\;2}-\frac{c_0}{2}\Phi\Phi_{,\tau}+g(\tau)\Phi^2=0 \tag{5.46}$$

denklemine dönüşür. Buradaki $g(\tau)$ fonksiyonu

$$g(\tau) = -\frac{c_0^{\;2}}{4} + \frac{c_0^{\;2}\left(q + 6\lambda n^2 e^{2c_0\tau}\right)}{4\left(2\lambda n^2 e^{2c_0\tau} - mc_0^{\;2} e^{-c_0\tau} - q\right)} \tag{5.47}$$

şeklinde tanımlıdır. (5.46) denkleminin çözümü, η integral sabiti olmak üzere

$$\Phi(\tau) = \eta \exp\left[\frac{c_0}{4}\tau\left(1 \pm \sqrt{\frac{5mc_0^{\;2} - q\exp(c_0\tau) + 14\lambda n^2 \exp(3c_0\tau)}{mc_0^{\;2} - \left(q + 2\lambda n^2 \exp(2c_0\tau)\right)\exp(c_0\tau)}}\right)\right] \tag{5.48}$$

şeklinde bulunur.

(5.23) çiftlenim fonksiyonu ve (5.27) potansiyeli kullanılırsa bu Noether simetrisine uygun hareket sabiti

$$\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} = c_1 A^{-1-\frac{2n}{3}} B^{-2-\frac{n}{3}} \Phi^{-2-n} \tag{5.49}$$

şeklinde bulunur. Burada n=*3m/2* dir. Şimdi; (5.27) potansiyeli, (5.8) ve (5.9) alan denklemlerinde yerine konulur ve bu iki denklem birbirinden çıkartılırsa (5.36) ile verilen kısıtlama denklemi bulunur. (5.36) ve (5.49) ifadeleri kıyaslandığında *n=-3* ve dolayısıyla *m=-2* elde edilmektedir. Bu yüzden; (5.48) ile verilen $\Phi(\tau)$ çözümünde *q=0* alındığında, bu durumdaki $\Phi(\tau)$ çözüm elde edilmiş olur.

$V(\Phi) = \lambda(\Phi)^2$ potansiyeli ve seçilen $F = c\Phi^2$ fonksiyonu için (bu durum BI, *q=0* metriği için geçerlidir) (5.29) da verilen Noether simetrisine ait hareket sabiti

$$l\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} = \frac{c_2}{(1 - 8\varepsilon c)A(B\Phi)^2} \tag{5.50}$$

olarak bulunur. Burada $c_2 = \alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{A}} + \beta\frac{\partial L}{\partial \dot{B}} + \gamma\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}}$ ve $l = \frac{4\varepsilon c}{(1 - 8\varepsilon c)}$ $(l \neq 0{,}1)$ şeklindedir. (5.49) denklemi, sadece BI metriği için kullanılmak durumundadır. Bu denklemin çözümü *l* sabitinin 0 ve 1 den farklı seçimlerine bağlıdır. Özel olarak; *l*=-1 (yani $c = \frac{\varepsilon}{4}$) seçilirse, (5.8)-(5.11) ile verilen alan denklemleri

$$\frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 2\frac{\dot{A}\dot{\Phi}}{A\Phi} + 4\frac{\dot{B}\dot{\Phi}}{B\Phi} + \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2} + 2\lambda = 0 \tag{5.51}$$

$$2\frac{\ddot{B}}{B} + 2\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2} + 4\frac{\dot{B}\dot{\Phi}}{B\Phi} + 2\lambda = 0 \tag{5.52}$$

$$\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{\ddot{B}}{B}+2\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi}+\frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2}+\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}+2\frac{\dot{A}\dot{\Phi}}{A\Phi}+2\frac{\dot{B}\dot{\Phi}}{B\Phi}+2\lambda=0 \tag{5.53}$$

$$\frac{\ddot{A}}{A}+2\frac{\ddot{B}}{B}+\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi}+\frac{\dot{B}^2}{B^2}+2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}+\frac{\dot{A}\dot{\Phi}}{A\Phi}+2\frac{\dot{B}\dot{\Phi}}{B\Phi}+2\lambda=0 \tag{5.54}$$

şekline dönüşür. (5.53) denkleminden (5.52) denklemini çıkarıldığında, yapılan integral hesabı sonucu

$$\frac{\dot{A}}{A}-\frac{\dot{B}}{B}=\frac{c_3}{A(B\Phi)^2} \tag{5.55}$$

bulunur. Benzer şekilde (5.54) denkleminden (5.52) denklemini çıkartıldığı zaman

$$\frac{\dot{A}}{A}-\frac{\dot{\Phi}}{\Phi}=\frac{c_4}{A(B\Phi)^2} \tag{5.56}$$

bulunur. Burada c_3 ve c_4 integral sabitleridir. $c=\frac{\varepsilon}{4}$ için (5.50) denklemi

$$\frac{\dot{B}}{B}-\frac{\dot{\Phi}}{\Phi}=\frac{c_2}{A(B\Phi)^2} \tag{5.57}$$

şeklini almaktadır. (5.55), (5.56) ve (5.57) denklemlerine çözüm bulmak için $dt=AB\Phi^3 d\eta$ zaman dönüşümü yapılabilir. Bu dönüşüm altında, (5.51)-(5.54) denklemleri çözülürse

$$A(\eta)=\Phi_0(c_2\eta)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.58}$$

$$B(\eta)=\Phi_0 c_2\eta \tag{5.59}$$

$$\Phi(\eta)=\Phi_0 \tag{5.60}$$

ve $\lambda=0$ elde edilir. Burada Φ_0 integral sabitidir.

6.TARTIŞMA VE SONUÇ

Einstein alan denklemlerine kesin çözümlerin bulunmasında sık kullanılan sadeleştirmelerden birisi, ele alınan uzay-zaman metriğine ait bazı simetri kabulleri yapmaktır. Lagrange fonksiyonelinin varyasyonu alınarak elde edilen Euler-Lagrange hareket denklemlerinin invaryanslığını sağlamak ve çözüm elde edebilmek için de simetriler kullanılmaktadır. Bu simetri kabullerinden birisi de Lagrange fonksiyoneli için Noether simetri yaklaşımıdır.

Tezin birinci bölümünde yapılan girişten sonra, ikinci ve üçüncü bölümlerde temel tanımlar verilmiştir. Dördüncü bölümde ise öncelikle çalışılacak olan Noether simetri yaklaşımı ele alınmış ve incelenmiştir. Daha sonra; bu bölümün (4.1) alt bölümünde FRW uzay-zamanı için Noether simetri denklemleri oluşturulup çözülmüştür. Bu uzay-zamanı için Noether simetri yaklaşımı kullanılarak EFE' lerin çözümleri araştırılmıştır. $k = 0$ için (4.1.27) ile verilen çiftlenim fonksiyonu fiziksel bir çözümün bulunmasına olanak sağlar. Burada n, -2 ile -1 arasındadır ve $n \neq -3/2$' dir. $k = 0$ için (4.1.26) ile verilen çiftlenim fonksiyonunun formu ise fiziksel bir çözüm vermez. $k = \mp 1$ durumunda; çiftlenim fonksiyonu için (4.1.39) denklemi, potansiyel için (4.1.41) ifadesi geçerli olmaktadır. Bu potansiyel n=-2 için $k = 0$ özel durumunda bulunan çözüm ile aynıdır. Dördüncü bölümün (4.2) alt bölümünde; statik, silindirik simetrik uzay-zaman için Noether simetri yaklaşımı ile Killing simetrisi karşılaştırılmıştır. (4.2.10)-(4.2.19) denklemleri ile (4.2.22)-(4.2.31) denklemleri özdeş olarak aynı olduğu gösterilmiştir. Bu nedenle; Killing denkleminin çözümü olan Killing vektörlerinin bulunması problemi, Noether simetri vektörünün elde edilmesi problemi ile aynı anlama gelmektedir.

Tezin beşinci bölümünde; Kantowski-Sachs, Bianchi I ve III uzay-zamanları için Noether simetrisinin belirlenmesi ve bu uzay-zamanın alan denklemlerine çözümlerin araştırılması çalışması yapılmıştır. Bu durumda; çiftlenim fonksiyonu için (5.23) ve potansiyel için (5.28) dikkate alındığında, $\Phi(\tau)$ skaler alanı için (5.47) ifadesi elde edilmiştir. Bu çözüm hem Kantowski-Sachs hem de Bianchi I ve III uzay- zamanları için geçerlidir. Elde edilen $\Phi(\tau)$ skaler alanı için $\tau \to 0$ limitinde sabit bir değer elde edilir. Çiftlenim fonksiyonu için (5.23) ve potansiyel için ise (5.27) alınırsa $\Phi(\tau)$ skaler alanı, (5.47) ifadesinde $q=0$ yazılarak elde edilir. Bianchi I metriği için çiftlenim fonksiyoneli $F = c\Phi^2$ şeklinde ve potansiyel $V(\Phi) = \lambda\Phi^2$ olarak seçildiğinde Einstein alan denklemlerinin çözümüne bakılmıştır. Bu durumda; l=-1 için (5.57), (5.58) ve (5.59) çözümleri bulunmuştur. Bu çözümler $\lambda = 0$ durumunda geçerlidir. $\lambda = 0$ olması potansiyelin sıfır olması anlamına gelmektedir.

7. ÖZET

Bu tezde, ilk üç bölümde temel tanımlar verilmiştir. Dördüncü bölümde; çalışılacak olan Noether simetri yaklaşımına taban oluşturulmuştur. Ayrıca FRW uzay-zamanı ve statik, silindirik simetrik uzay-zamanı için bu simetri yaklaşımının uygulamaları verilmiştir. Son olarak beşinci bölümde; Noether simetri yaklaşımı, Kantowski-Sachs, Bianchi I ve III uzay-zamanlarına uygulanmıştır. Bu metrikler için ele alınan simetri yaklaşımından elde edilen hareket sabitleri kullanılarak Einstein alan denklemleri çözülmüştür. Lagrange fonksiyonunun dejenere olduğu durumda, çiftlenim fonksiyonu için (5.23) ifadesi ve potansiyel için (5.28) ifadesi seçilirse (5.47) ile verilen çözüm elde edilmiş olur. Lagrange fonksiyonelinin dejenere olmadığı durumda ise çiftlenim fonksiyonu için $F = c\Phi^2$ ifadesi ve potansiyel için (5.30) ifadesi seçilirse, (5.57), (5.58) ve (5.59) ile verilen çözüm elde edilmiş olur. Bu ifadeler Bianchi I metriği ($q=0$) için geçerli çözümlerdir.

8. SUMMARY

In the first three chapter of this thesis, basic definitions have been given. Fourth chapter constitutes a base for the Noether symmetry, which will be investigated. Besides, applications of this approach for FRW space-time and static, cylindrically symmetric space-time have been given. Finally, in the fifth chapter, Noether symmetry approach is applied to Kantowski-Sachs, Bianchi I and III space-times. For these space-times, using the constants of motions obtained from the symmetry approach which are taken into considerations, the Einstein field equations are solved. In the case of degenerate Lagrangian function, choosing equation (5.23) for the coupling function and equation (5.28) for the potential, the solution expressed by equation (5.47) is obtained. Otherwise, for non-degenerate Lagrangian function, choosing $F = c\Phi^2$ for the coupling function and equation (5.30) for the potential term, the solutions given in equations (5.57), (5.58) and (5.59) are obtained. These solutions are only valid for the Bianchi I metric.

9. KAYNAKLAR

Capozziello, S., ve Lambiase, G., 2000. **Selection Rules in Minisuperspace Quantum Cosmology**, General Relativity and Gravitation, 32, 673-686.

Capozziello, S., ve de Ritis, R., 1994. **Non-minimal Coupling and Matter Cosmologies**, Physics Letter A, 195, 48-52.

Capozziello, S., ve de Ritis, R., 1993. **Relation Betwenn the Potential and Non-minimal Coupling Inflationary Cosmology**, Physics Letter A, 177, 1-7.

D'Inverno, R., 1992. **Introducing Einstein's Relativity**, Oxford University, Press, 28.

Islam, J.N., 1985. **Rotating Fields in General Relativity**, Cambridge University, Pres, Cambridge.

Kamilya, S., ve Modak, B., 2004. **Noether Symmetry study in General Scalar Tensor Theory**, General Relativity and Gravitation, 36, 673-681.

Kamilya, S., Modak, B., ve Biswas, S., 2004. **Induced Gravity Theory from Noether Symmtry**, General Relativity and Gravitation, 36, 661-668.

Marion, J.B., ve Thornton, S.T., 1988. **Classical Dynamics of Particles and Systems**, Holt Rinehard and Winston.

Narlikar, J.V., Padmanabhan, T., 1986. **Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology**, D. Reidel Publishing Company.

Sanyal, A.K., 2002. **Noether and Some Other Dynamical Symmetries in Kantowski-Sachs Model,** Physics Letter B, 524, 177-184.

Sanyal, A.K., ve Modak, B., 2001. **Is the Noether Symmetric Approach Consistent with the Dynamical Equation in Non-minimal Scalar Tensor Theories?**, Classical and Quantum Gravity, 18, 3767-3773.

Sanyal, A.K., Rubano, C., ve Piedipalumbo, E., 2003. **Coupling Parameters and the Form of the Potential via Noether Symmetry**, General Relativity and Gravitation, 35, 1617-1635.

Weinberg, S., 1972. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**, John Wiley and Sons., Inc., New York, s. 157-160.