ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

δp-HOMEOMORFİK TOPOLOJİK YAPILAR VE δp^*-HOMEOMORFİK TOPOLOJİK YAPILAR ÜZERİNE

Nermin ÇAKIR

Yrd. Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Haziran, 2006
ÇANAKKALE

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2005 / 20 no'lu projeden desteklenmiştir.

δp-HOMEOMORFİK TOPOLOJİK YAPILAR VE δp^{*}-HOMEOMORFİK TOPOLOJİK YAPILAR ÜZERİNE

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Bölümü, Topoloji Anabilim Dalı

Hazırlayan

Nermin ÇAKIR

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Haziran, 2006

ÇANAKKALE

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2005 / 20 no'lu projeden desteklenmiştir.

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Nermin ÇAKIR, tarafından Yrd. Doç. Dr. Erdal EKİCİ yönetiminde hazırlanan " δp-Homeomorfik Topolojik Yapılar Ve δp^*-Homeomorfik Topolojik Yapılar Üzerine " başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Jüri Üyesi
Prof. Dr. Kazım GÜNER

Jüri Üyesi
Doç. Dr. İhsan YILMAZ

Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana her konuda yardımcı ve destek olan başta danışmanım Yrd. Doç. Dr. Erdal EKİCİ'ye, Prof. Dr. Kazım KAYA'ya, görüş ve düşünceleri ile önümü açan Araş. Gör. Didem KARALARLIOĞLU CAMCI'ya teşekkür ederim.

Nermin ÇAKIR

δp-HOMEOMORFİK TOPOLOJİK YAPILAR VE δp^*-HOMEOMORFİK TOPOLOJİK YAPILAR ÜZERİNE

ÖZET

Bu tezde, δ-önkararsız fonksiyonlar, δ-önkapalı fonksiyonlar ve δ-önaçık fonksiyonlar, δ-hemen hemen sürekli fonksiyonlar, zayıf δ-önaçık fonksiyonlar ve zayıf δ-önkapalı fonksiyonların özellikleri araştırılmıştır. Bu fonksiyonları kullanarak oluşturulan δp-homeomorfizmalar ile δp-homeomorfik topolojik yapılar ve δp^*-homeomorfizmalar ile δp^*-homeomorfik topolojik yapılar sunulmuş ve özellikleri ile koruma teoremleri araştırılmıştır.

Anahtar sözcükler : δ-önkararsız fonksiyon, δ-önkapalı fonksiyon, δ-önaçık fonksiyon, δ-hemen hemen sürekli fonksiyon, zayıf δ-önaçık fonksiyon ve zayıf δ-önkapalı fonksiyon, δp-homeomorfizma, δp^*-homeomorfizma.

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2005 / 20 no'lu projeden desteklenmiştir.

ON δp-HOMEOMORPHIC TOPOLOGICAL STRUCTURES AND δp^*-HOMEOMORPHIC TOPOLOGICAL STRUCTURES

ABSTRACT

In this thesis properties of δ-pre-irresolute functions, δ-preclosed functions and δ-preopen functions, δ-almost continuous functions, weak δ-preopen functions and weak δ-preclosed functions had been researched. δp-homeomorphisms with δp-homeomorphic topological structures and δp^*-homeomorphisms with δp^*-homeomorphic topological structures that being formed by using these functions had been introduced and their properties and preservation theorems had been researched.

Keysword : δ-pre-irresolute function, δ-preclosed function, δ-preopen function, δ-almost continuous function, weak δ-preopen function, weak δ-preclosed function, δp-homeomorphism, δp^*-homeomorphism.

The present M. Sc. Thesis was supported by Çanakkale Onsekiz Mart University Scientific Research Project Commission under the project no of 2005 / 20 .

İÇERİK

1. GİRİŞ VE ÖNBİLGİLER

Topolojinin en temel konularından biri sürekli fonksiyon ve özellikleridir. Literatürde hemen hemen her yayında sürekli fonksiyon çeşitleri ve özelliklerine rastlamak mümkündür. Bir çok yazar bazı sınıfların özelliklerini bizzat araştırdığı gibi, çoğu yazar çalıştığı konu ve özelliklerinin taşınmasını ve korunmasını fonksiyonlar yardımıyla araştırmaktadır. Böylece literatürde koruma teoremleri olarak adlandırılan teoremler ele alınmaktadır.

Topolojide iki topolojik uzay arasında kurulan topolojik eşyapı dönüşümü dediğimiz homeomorfizmalar ve özellikleri yoğun biçimde karşımıza çıkar. Bildiğimiz gibi iki topolojik uzay arasında alınan bir f fonksiyonu 1-1, örten, kendisi ve tersi sürekli ise homeomorfizma olarak adlandırılmaktadır. Bir homeomorfizmayı açık ve kapalı dönüşümler yardımı ile de karakterize edebildiğimizi biliyoruz.

Süre gelen onca çalışmalar içinde topoloji kavramının doğal sonucu olarak bir çok kümeler sınıfı ortaya atılmış ve bunların topolojik yapı olup olmadığı, karakteristik özellikleri, ilişkileri, topolojik kavramları çok boyutlu olarak çalışılmıştır ve çalışılmaktadır (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993; Csaszar, 1997, 1998; Dontchev, 1998; Andrijevic ve Mrsevic, 2002; Cao, Ganster ve Reilly, 2002; Das ve Rashid, 2003; Cammaroto ve Noiri, 2005; Noiri ve Sayed, 2005).

Üstelik, bu çalışmaların doğal sonucu olarak çok çeşitli fonksiyon sınıfları da doğmuştur. Dolayısıyla bunların taşıdığı özellikleri araştırmak topolojinin gereği haline gelmiştir (Kohli, 1980; Noiri, 1982; Gauld, Mrsevic, Reilly ve Vamanamurthy, 1984; Baker, 1996; Hosokawa, 1997; Al-Nashef, 2002; Csaszar, 2002; Jafari ve Noiri, 2002; Fath Alla, Mahmoud ve Khalaf, 2003; Noiri ve Popa, 2005).

Bütün bu gelişmelerle birlikte koruma teoremleri ya da özellikleri dediğimiz iki topolojik uzay arasındaki özelliklerinin taşınması fikri de doğmuştur. Literatürde bunların bir çok örnekleri bulunmaktadır (Crossley ve Hildebrand, 1972; Deb ve Mathur, 1972; Noiri, 1984; Sivaraj, 1986; Malghan ve Navalagi, 1990; Balachandran, Devi ve Maki, 1995; Friedler ve Kitover, 1997; Dontchev ve Maki, 1999).

Biz de bu çalışmalar ışığında hareketle özel bir küme sınıfı üzerinde çalıştık. 1993 de Raychaudhuri ve Mukherjee δ-önaçık kümeleri ve özelliklerini sundu. Aynı çalışmada bu kümelere bağlı olarak δ-hemen hemen sürekli fonksiyonlar ve özellikleri de tanıtılmıştır. Daha sonra bir çok yazar tarafından bu kümelere bağlı olarak birçok topolojik özellikler ve yapılar sunulmuştur.

Tezimiz 5 bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde temel tanım ve özellikler üzerinde durduk.

İkinci bölümde, δ-önkararsız fonksiyonlar, δ-önkapalı fonksiyonlar ve δ-önaçık fonksiyonlar sunulmuş, bunların özellikleri araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, δp-homeomorfizma ve δp-homeomorfik topolojik yapılar tanıtılmıştır. Özellikleri ve koruma teoremleri araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, δ-hemen hemen sürekli fonksiyonlar, zayıf δ-önaçık fonksiyonlar ve zayıf δ-önkapalı fonksiyonlar sunulmuştur. Karakterizasyonları ve özellikleri araştırılmıştır.

Son bölümde, δ-hemen hemen sürekli fonksiyonlar, zayıf δ-önaçık fonksiyonlar ve zayıf δ-önkapalı fonksiyonlar ile sunulan ve karakterize edilen δp^*-homeomorfizmalar sunulmuştur. Üstelik oluşturulan δp^*-homeomorfik topolojik yapılar ile diğer yapılar karşılaştırılmış ve özellikleri incelenmiştir.

Tez içinde tüm çalışmalar diagramlarla gösterilmiş ve geçişler örneklendirilmiştir. Bunlarla birlikte bu elde edilen δp-homeomorfik topolojik yapılar ve δp^*-homeomorfik topolojik yapılar ile homeomorfik topolojik yapı ilişkileri ortaya konmuştur.

Bu tezdeki çalışmaları cebirsel boyutu ve dijital topolojiye uygulama boyutu ile genişletmek değerli olacaktır. Bu yöndeki çalışmalar son yıllarda yoğunlaşmıştır.

Bu tez boyunca topolojik uzayları (X, τ), (Y, υ), (Z, σ) ile göstereceğiz. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin kapanışını cl(A) ve içini int(A) ile göstereceğiz.

Tanım 1.1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bir A alt kümesi için $A \subset int(cl(A))$ ise A'ya önaçık küme denir (Corson ve Michael, 1964; Abd El-Monsef, El-Deeb ve Mashhour, 1982; Ganter ve Reilly, 1989).

Önaçık kümelerin tümleyenlerine önkapalı küme denir (El-Deeb, Hasanein, Mashhour ve Noiri, 1983).

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere tüm önaçık kümelerin ailesini PO(X) ile göstereceğiz.

Önerme 1.1. X, Y topolojik uzaylar olsun. $A \in PO(X)$ ve $B \in PO(Y)$ ise $A \times B \in PO(X \times Y)$ olur (Popa, 1987).

Tanım 1.2. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. $\forall V \in \upsilon$ için $f^{-1}(V) \in PO(X)$ ise f 'e önsüreklidir denir (Blumberg, 1922; Berner, 1982; Abd El-Monsef, El-Deeb ve Mashhour, 1982; Rose, 1984; Ahmad ve Noiri, 1985).

Tanım 1.3. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. $\forall U \in \tau$ için f(U) önaçık ise f 'e önaçıktır denir (Abd El-Monsef, El-Deeb ve Mashhour, 1982).

Tanım 1.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$ alalım. A kümesini kapsayan tüm önkapalı kümelerin arakesitine A kümesinin önkapanışı denir ve pcl(A) ile göstereceğiz (El-Deeb, Hasanein, Mashhour ve Noiri, 1983).

Tanım 1.5. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$ alalım. A kümesinde bulunan tüm önaçık kümelerin birleşimine A kümesinin öniçi denir ve pint(A) ile göstereceğiz (Abd El-Monsef, El-Deeb ve Mashhour, 1982).

Tanım 1.6. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Önaçık kümelerin görüntüleri önaçık ise f fonksiyonuna M-önaçık'tır denir (Abd El-Monsef, El-Deeb ve Mashhour, 1984).

Tanım 1.7. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Önkapalı kümelerin görüntüleri önkapalı ise f fonksiyonuna M-önkapalı'dır denir (Abd El-Monsef, El-Deeb ve Mashhour, 1984).

Tanım 1.8. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Önaçık kümelerin ters görüntüleri önaçık ise f fonksiyonuna M-önsürekli'dir denir (Abd El-Monsef, El-Deeb ve Mashhour, 1984).

Tanım 1.9. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. Bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu 1-1, örten, M-önsürekli ve M-önaçık ise f fonksiyonuna önhomeomorfizma denir (Abd El-Monsef, El-Deeb ve Mashhour, 1984).

Tanım 1.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A = int(cl(A))$ ise A'ya düzenli açık küme denir (Stone, 1937).

Uyarı 1.1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Tüm düzenli açık kümeler bir topoloji için taban oluşturur bu topolojiyi τ_s ile göstereceğiz.

Tanım 1.11. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\tau = \tau_s$ olması durumunda (X, τ) topolojik uzayına yarı düzenli uzay denir (Stone, 1937).

Tanım 1.12. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun.

(1) Eğer $\forall x \in A$ için $x \in G \subset A$ olacak şekilde en az bir G düzenli açığı var ise A kümesine δ-açık küme denir,

(2) δ-açık kümelerin tümleyenlerine δ-kapalı kümeler denir (Velicko, 1968).

Tanım 1.13. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. $\forall x \in V \in \tau$ için $int(cl(V)) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A'nın bir δ-kapanış noktası denir (Velicko, 1968).

A kümesinin tüm δ-kapanış noktalarının kümesine A'nın δ-kapanışı denir. A'nın tüm δ-kapanış noktalarının kümesini δ-cl(A) ile göstereceğiz.

Tanım 1.14. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun.

(1) $A \subset int(\delta\text{-}cl(A))$ ise A kümesine δ-önaçıktır denir,

(2) δ-önaçık kümelerin tümleyenlerine δ-önkapalı kümeler denir (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere tüm δ-önaçık kümelerinin ailesini δ-PO(X) ile göstereceğiz.

Önerme 1.2. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. $A \subset X$ δ-önkapalı olması için gerek ve yeter koşul $cl(\delta\text{-}int(A)) \subset A$ olmasıdır (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Önerme 1.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

(1) δ-önaçık kümelerin keyfi birleşimleri δ-önaçıktır,

(2) δ-önkapalı kümelerin keyfi arakesitleri δ-önkapalıdır (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Tanım 1.15. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$ alalım. A kümesini kapsayan tüm δ-önkapalı kümelerin arakesitine A kümesinin δ-önkapanışı denir ve δ-pcl(A) ile göstereceğiz (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Tanım 1.16. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$ alalım. A kümesinde bulunan tüm δ-önaçık kümelerinin birleşimine A kümesinin δ-öniçi denir ve δ-pint(A) ile göstereceğiz (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Teorem 1.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda $\delta\text{-}pcl(A) = A \cup cl(\delta\text{-}int(A))$ olur (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Teorem 1.2. Bir $A \subset X$ kümesi δ-açık ise $\delta\text{-}pcl(A)=cl(A)$ olur (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Önerme 1.4. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1. A, δ-önkapalıdır $\Leftrightarrow$ A = δ-pcl(A),

2. $A \subset B \Rightarrow \delta\text{-pcl}(A) \subset \delta\text{-pcl}(B)$,

3. δ-pcl(A) kümesi δ-önkapalıdır,

4. $\delta\text{-pcl}(\delta\text{-pcl}(A)) = \delta\text{-pcl}(A)$,

5. $x \in \delta\text{-pcl}(A) \Leftrightarrow \forall (x \in) V \in \delta\text{-PO}(X)$ için $A \cap V \neq \emptyset$ olur (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Önerme 1.5. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay, $A \in \delta\text{-PO}(X)$ ve $B \in \delta\text{-PO}(Y)$ olsun. Bu durumda $A \times B \in \delta\text{-PO}(X \times Y)$ olur (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

2. δ-ÖNKARARSIZ FONKSİYON ÖZELLİKLERİ, δ-ÖNKAPALI VE δ-ÖNAÇIK FONKSİYONLAR

Bu bölümde δ-önkararsız fonksiyonlar, δ-önkapalı fonksiyonlar ve δ-önaçık fonksiyonlar sunulmuş, bunların özellikleri araştırılmıştır.

Tanım 2.1. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir δ-önaçık kümenin ters resmi δ-önaçık ise f fonksiyonuna δ-önkararsızdır denir (Ekici, 2004).

Tanım 2.2. (X, τ) topolojik uzay olsun. $A \subset X$ alalım. A kümesinin δ-önkapanışı ile $X \setminus A$ kümesinin δ-önkapanışının arakesitine A kümesinin δ-önsınırı denir (Ekici, 2005).

A kümesinin δ-önsınır kümesini δ–pb(A) ile göstereceğiz.

Tanım 2.3. (X, τ) topolojik uzay, $A \subset X$, $x \in X$ olsun. x noktasını içeren her U δ-önaçık kümesi için $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ oluyor ise x noktasına A kümesinin bir δ-önyığılma noktası denir (Ekici, 2005).

A kümesinin tüm δ-önyığılma noktalarının kümesini δ-p~(A) ile göstereceğiz.

Teorem 2.1. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1. f fonksiyonu δ-önkararsızdır,

2. $\forall G \in$ δ-PO(Y) için $f^{-1}(Y \setminus G)$ δ-önkapalıdır,

3. $\forall S \subset Y$ için $f^{-1}(\delta\text{-pint}(S)) \subset \delta\text{-pint}(f^{-1}(S))$,

4. $\forall S \subset Y$ için $\delta\text{-pcl}(f^{-1}(S)) \subset f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S))$,

5. $\forall A \subset X$ için $f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset \delta\text{-pcl}(f(A))$,

6. $\forall S \subset Y$ için δ-pb(f^{-1}(S)) $\subset f^{-1}$(δ-pb(S)),

7. $\forall A \subset X$ için f(δ-pb(A)) $\subset$ δ-pb(f(A)),

8. $\forall A \subset X$ için f(δ-p~(A)) $\subset$ δ-pcl(f(A)),

9. $\forall x \in X$ ve $\forall$ (f(x)) $\in G \in \delta$-PO(Y) için f(W) $\subset$ G olacak biçimde $\exists x \in W \in \delta$-PO(X) vardır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) : $G \subset Y$ kümesi δ-önaçık olsun. (1)'den dolayı $f^{-1}(G)$ δ-önaçık olur. Buradan,

$$X \setminus f^{-1}(G) = f^{-1}(Y \setminus G)$$

δ-önkapalıdır.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $G \subset Y$ δ-önaçık kümesini alalım. Hipotezden $f^{-1}(Y \setminus G)$ δ-önkapalı olacaktır. Buradan, $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$ ve $f^{-1}(G)$ kümesinin δ-önaçık olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla f fonksiyonu δ-önkararsız olur.

(1) $\Rightarrow$ (3) : $S \subset Y$ olsun. δ-pint(S) kümesi δ-önaçık olduğundan, f^{-1}(δ-pint(S)) kümesi δ-önaçık olacaktır.

δ-pint(S) $\subset$ S ve buradan, f^{-1}(δ-pint(S)) $\subset f^{-1}$(S) olur. Hipotezden dolayı

$$\delta\text{-pint}(f^{-1}(\delta\text{-pint}(S))) = f^{-1}(\delta\text{-pint}(S)) \subset \delta\text{-pint}(f^{-1}(S))$$

elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) : $S \in \delta$-PO(Y) olsun. Bu durumda hipotezden

$$f^{-1}(\delta\text{-pint}(S)) \subset \delta\text{-pint}(f^{-1}(S)) \text{ ve } f^{-1}(S) \subset \delta\text{-pint}(f^{-1}(S))$$

olacağından $f^{-1}(S) \in \delta$-PO(X) olur. Böylece f'nin δ-önkararsız olduğunu elde ederiz.

(2) $\Rightarrow$ (4) : $S \subset Y$ alalım. δ-pcl(S) δ-önkapalı olduğu açıktır. Bu durumda Y \ δ-pcl(S) δ-önaçık bir kümedir. Hipotezden

$$f^{-1}(Y \setminus (Y \setminus \delta\text{-pcl}(S))) = f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S))$$

δ-önkapalıdır.

$S \subset \delta$-pcl(S) her zaman geçerlidir. Buradan $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S))$ elde ederiz. $f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S))$ δ-önkapalı olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(f^{-1}(S)) \subset \delta\text{-pcl}(f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S))) = f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S))$$

ve böylece $\delta\text{-pcl}(f^{-1}(S)) \subset f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S))$ elde edilir.

(8) $\Rightarrow$ (5) : $A \subset X$ alalım. Bu durumda

$$f(\delta\text{-pcl}(A)) = f(A \cup \delta\text{-p}\sim(A)) = f(A) \cup f(\delta\text{-p}\sim(A))$$

olacaktır. (8)'den

$$f(A) \cup f(\delta\text{-p}\sim(A)) \subset f(A) \cup \delta\text{-pcl}(f(A))$$

ve buradan $f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset \delta\text{-pcl}(f(A))$ bulunur.

(4) $\Rightarrow$ (5) : $f(A) \subset Y$ olsun. Hipotezden

$$\delta\text{-pcl}(f^{-1}(f(A))) \subset f^{-1}(\delta\text{-pcl}(f(A)))$$

ve buradan $\delta\text{-pcl}(A) \subset f^{-1}(\delta\text{-pcl}(f(A)))$ elde ederiz. Böylece

$$f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset f(f^{-1}(\delta\text{-pcl}(f(A)))) \subset \delta\text{-pcl}(f(A))$$

olacağından ispat tamamlanır.

(5) $\Rightarrow$ (1) : $A \subset Y$, δ-önkapalı küme olsun. $K = f^{-1}(A)$ diyelim. (5)'den,

$$f(\delta\text{-pcl}(K)) \subset \delta\text{-pcl}(f(f^{-1}(A))) \subset \delta\text{-pcl}(A) = A$$

olur. Buradan $\delta\text{-pcl}(K) \subset f^{-1}(A) = K$ elde ederiz ki bu ise K'nın δ-önkapalı olmasını verir.

(5) $\Rightarrow$ (2) : $G \in \delta$-PO(Y) olsun. $f^{-1}(Y \setminus G) \subset X$ olacağından (5)'den,

$$f(\delta\text{-pcl}(f^{-1}(Y \setminus G))) \subset \delta\text{-pcl}(f(f^{-1}(Y \setminus G))) \subset \delta\text{-pcl}(Y \setminus G) = Y \setminus G$$

elde ederiz. Böylece δ-pcl$(f^{-1}(Y \setminus G)) \subset f^{-1}(Y \setminus G)$ olur. Buradan $f^{-1}(Y \setminus G)$ δ-önkapalı olduğunu elde ederiz.

(5) $\Rightarrow$ (8) : $A \subset X$ olsun. δ-p~(A) $\subset$ δ-pcl(A) olduğundan,

$f(\delta\text{-p}\sim(A)) \subset f(\delta\text{-pcl}(A))$ olduğu açıktır. Hipotezden

$$f(\delta\text{-p}\sim(A)) \subset f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset \delta\text{-pcl}(f(A))$$

olur ve böylece $f(\delta\text{-p}\sim(A)) \subset \delta\text{-pcl}(f(A))$ elde ederiz.

(4) $\Rightarrow$ (6) : $\forall S \subset Y$ için $\delta\text{-pcl}(f^{-1}(S)) \subset f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S))$ olsun.

Bu durumda (4) $\Leftrightarrow$ (1) olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\delta\text{-pb}(f^{-1}(S)) \\
&= \delta\text{-pcl}(f^{-1}(S)) \setminus \delta\text{-pint}(f^{-1}(S)) \\
&\subset f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S)) \setminus \delta\text{-pint}(f^{-1}(S)) \\
&\subset f^{-1}(\delta\text{-pb}(S) \cup \delta\text{-pint}(S)) \setminus \delta\text{-pint}(f^{-1}(\delta\text{-pint}(S))) \\
&= [f^{-1}(\delta\text{-pb}(S)) \cup f^{-1}(\delta\text{-pint}(S))] \setminus \delta\text{-pint}(f^{-1}(\delta\text{-pint}(S))) \\
&= [f^{-1}(\delta\text{-pb}(S)) \cup f^{-1}(\delta\text{-pint}(S))] \setminus f^{-1}(\delta\text{-pint}(S)) \\
&\subset f^{-1}(\delta\text{-pb}(S))
\end{aligned}$$

elde ederiz.

(6) $\Rightarrow$ (2) : $F \subset Y$ δ-önkapalı kümesini alalım. Hipotezden

$$\delta\text{-pb}(f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(\delta\text{-pb}(F)) \subset f^{-1}(\delta\text{-pcl}(F)) = f^{-1}(F)$$

ve buradan

$$\delta\text{-pcl}(f^{-1}(F)) \subset \delta\text{-pb}(f^{-1}(F)) \cup \delta\text{-pint}(f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(F)$$

olduğunu elde ederiz ki bu ise bize $f^{-1}(F)$ X'de δ-önkapalı olduğunu verir.

(6) $\Rightarrow$ (7) : $A \subset X$ olsun. (6)'dan,

$$\delta\text{-pb}(A) \subset \delta\text{-pb}(f^{-1}(f(A))) \subset f^{-1}(\delta\text{-pb}(f(A)))$$

ve buradan

$$f(\delta\text{-pb}(A)) \subset f(f^{-1}(\delta\text{-pb}(f(A)))) \subset \delta\text{-pb}(f(A))$$

elde ederiz.

(7) $\Rightarrow$ (6) : $S \subset Y$ olsun. $f^{-1}(S) \subset X$ olacaktır. Böylece (7)'den,

$$f(\delta\text{-pb}(f^{-1}(S))) \subset \delta\text{-pb}(f(f^{-1}(S))) \subset \delta\text{-pb}(S)$$

ve buradan

$$\delta\text{-pb}(f^{-1}(S)) \subset f^{-1}(f(\delta\text{-pb}(f^{-1}(S)))) \subset f^{-1}(\delta\text{-pb}(S))$$

elde edilir.

(9) $\Rightarrow$ (1) : $G \in \delta\text{-PO}(Y)$ ve $x \in f^{-1}(G)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in G$ olduğundan $f(x) \in f(W) \subset G$ olacak biçimde $\exists\, W \in \delta\text{-PO}(X)$ vardır. Buradan $x \in W \subset f^{-1}(G)$ elde ederiz. O halde $f^{-1}(G) \in \delta\text{-PO}(X)$ olur.

(1) $\Rightarrow$ (9) : $x \in X$ ve $f(x) \in G \in \delta\text{-PO}(Y)$ olsun. $x \in f^{-1}(G)$ olacaktır. Hipotezden $f^{-1}(G) \in \delta\text{-PO}(X)$ bulunur.

$W = f^{-1}(G)$ diyelim. Bu durumda $f(W) \subset G$ elde edilir.

Önerme 2.1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $U \subset X$ δ-açık bir küme ve $V \in \delta\text{-PO}(U)$ ise $V \in \delta\text{-PO}(X)$ olur (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Önerme 2.2. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. U δ-açık bir küme ve $V \in \delta\text{-}PO(X)$ ise $U \cap V \in \delta\text{-}PO(U)$ olur (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Teorem 2.2. $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\{ U_i : i \in I \}$ X' in δ-açık bir örtüsü olsun. Eğer $\forall\, i \in I$ için $f|_{U_i}$ δ-önkararsız ise f de δ-önkararsızdır.

İspat : $V \subset Y$ bir δ-önaçık küme olsun. Bu durumda $f|_{U_i}$ δ-önkararsız olduğundan,

$$(f|_{U_i})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_i \in \delta\text{-}PO(U_i)$$

dir. Buradan, $(f|_{U_i})^{-1}(V) \in \delta\text{-}PO(X)$ olacaktır. Bu durumda,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}(V)$$

olur ki bu bize $f^{-1}(V)$ nin X' de δ-önaçık olmasını verir. O halde f fonksiyonu δ-önkararsızdır.

Tanım 2.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \in G \subset N$ olacak biçimde bir δ-önaçık G kümesi var ise N kümesine x noktasının bir δ-önaçık komşuluğu denir.

x noktasının tüm δ-önaçık komşuluklarının ailesini $\delta p\text{-}N(x)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.5. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olan $\forall\, x, y \in X$ noktası için $x \in U$, $y \notin U$ veya $x \notin V$, $y \in V$ olacak biçimde $\exists\, U, V \in \delta\text{-}PO(X)$ var ise X uzayına δ-pre-T_0 uzaydır denir.

Tanım 2.6. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olan $\forall\, x, y \in X$ için $x \in U$, $y \notin U$ ve $x \notin V$, $y \in V$ olacak biçimde $\exists\, U, V \in \delta\text{-}PO(X)$ var ise X uzayına δ-pre-T_1 uzaydır denir (Ekici, 2004).

Tanım 2.7. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olan $\forall\, x, y \in X$ için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $\exists\, U, V \in \delta\text{-}PO(X)$ var ise X uzayına δ-pre-T_2 uzaydır denir (Ekici, 2004).

Tanım 2.8. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her kapalı K kümesi ve $x \notin K$ olan her x noktası için $x \in U$, $K \subset V$ olacak biçimde $U \cap V = \emptyset$ olan $\exists U, V \in \delta\text{-PO}(X)$ var ise X uzayına δ-p-regülerdir denir.

Tanım 2.9. (X, τ) bir topolojik uzay, $B \subset X$ olsun. B'nin (X, τ) uzayındaki her $\{A_i : i \in I\}$ δ-önaçık örtüsünün B'yi örten sonlu bir alt örtüsü var ise B kümesine X'e göre δ-önkompakttır denir.

X kümesi X'e göre δ-önkompakt ise (X, τ) uzayına δ-önkompakttır denir (Ekici, 2004).

Tanım 2.10. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \cap B = \emptyset$ olan her A, B kapalı kümeleri için $A \subset U$, $B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $\exists U, V \in \delta\text{-PO}(X)$ var ise X uzayına δ-p-normal uzay denir.

Teorem 2.3. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. δ-önkararsız, 1-1, örten bir $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu için Y uzayı δ-pre-T_0 uzay ise X de δ-pre-T_0 uzaydır.

İspat : Y uzayı δ-pre-T_0 uzay olsun. $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in X$ noktalarını alalım. Bu durumda $f(x) \neq f(y)$ olur. Y uzayı δ-pre-T_0 uzay olduğundan

$$f(x) \in U,\ f(y) \notin U \text{ veya } f(x) \notin V,\ f(y) \in V$$

olacak biçimde $\exists U, V \in \delta\text{-PO}(Y)$ vardır. Buradan,

$$x \in f^{-1}(U),\ y \notin f^{-1}(U) \text{ veya } x \notin f^{-1}(V),\ y \in f^{-1}(V)$$

elde ederiz. Bu ise bize X uzayının bir δ-pre-T_0 uzay olduğunu verir.

Teorem 2.4. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. δ-önkararsız, 1-1, örten bir $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu için Y uzayı δ-pre-T_1 uzay ise X uzayı da δ-pre-T_1 uzaydır.

İspat : Y uzayı δ-pre-T_1 uzay olsun. $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in X$ noktalarını alalım. Bu durumda $f(x) \neq f(y)$ olacaktır. Y uzayı δ-pre-T_1 uzay olduğundan

$$f(x) \in U,\ f(y) \notin U \text{ ve } f(x) \notin V,\ f(y) \in V$$

olacak biçimde $\exists\, U, V \in \delta$-PO(Y) vardır. Buradan,

$$x \in f^{-1}(U),\ y \notin f^{-1}(U) \text{ ve } x \notin f^{-1}(V),\ y \in f^{-1}(V)$$

elde ederiz. Bu ise bize X uzayının δ-pre-T_1 uzay olduğunu verir.

Teorem 2.5. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. δ-önkararsız, 1-1, örten bir f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu için Y uzayı δ-pre-T_2 uzay ise X uzayı da δ-pre-T_2 uzaydır.

İspat : Y uzayı δ-pre-T_2 uzay olsun. $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in X$ noktalarını alalım. Bu durumda $f(x) \neq f(y)$ olacaktır. Y uzayı δ-pre-T_2 uzay olduğundan,

$$f(x) \in U,\ f(y) \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olan $\exists\, U, V \in \delta$-PO(Y) vardır. Buradan,

$$x \in f^{-1}(U),\ y \in f^{-1}(V) \text{ ve } f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$$

elde ederiz ki bu bize X uzayının δ-pre-T_2 uzay olduğunu verir.

Teorem 2.6. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. δ-önkararsız, 1-1, örten bir f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu için δ-önkompakt uzayın görüntüsü δ-önkompakt uzaydır.

İspat : $U = \{U_i : i \in I\}$ ailesi Y uzayının bir δ-önaçık örtüsü olsun. Yani, $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ olsun. Bu durumda,

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$$

olacaktır. f fonksiyonu δ-önkararsız olduğundan $i \in I$ için $f^{-1}(U_i) \in \delta$-PO(X) olacaktır. Üstelik X uzayı δ-önkompakt uzay olduğundan,

$$X = \bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(U_i)$$

olacak biçimde $I_0 \subset I$ sonlu indis kümesi vardır. Buradan

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(U_i)\right)$$

$$= \bigcup_{i \in I_0} (f(f^{-1}(U_i)))$$

$$= \bigcup_{i \in I_0} U_i$$

olur. Böylece Y uzayının δ-önkompakt uzay olduğu elde edilir.

Tanım 2.11. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Eğer her δ-önaçık kümenin görüntüsü δ-önaçık küme ise f'e δ-önaçık fonksiyon denir (Ekici, 2004).

Tanım 2.12. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Eğer her δ-önkapalı kümenin görüntüsü δ-önkapalı bir küme ise f'e δ-önkapalı fonksiyon denir.

Teorem 2.7. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f fonksiyonu δ-önaçıktır,

(2) Keyfi bir noktanın her bir δ-önaçık komşuluğunun görüntüsü o noktanın görüntüsünün δ-önaçık komşuluğudur,

(3) $\forall A \subset X$ için $f(\delta\text{-pint}(A)) \subset \delta\text{-pint}(f(A))$,

(4) $\forall S \subset Y$ için $\delta\text{-pint}(f^{-1}(S)) \subset f^{-1}(\delta\text{-pint}(S))$.

İspat :

(1) ⇒ (3) : $A \subset X$ olsun. $\delta\text{-pint}(A) \subset A$ her zaman vardır. Bu durumda

$$f(\delta\text{-pint}(A)) \subset f(A)$$

olacaktır. Hipotezden

$$\delta\text{-pint}(f(\delta\text{-pint}(A))) = f(\delta\text{-pint}(A)) \subset \delta\text{–pint}(f(A))$$

elde ederiz.

(3) $\Rightarrow$ (4) : $S \subset Y$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(S) \subset X$ olacaktır. (3)'den,

$$f(\delta\text{-pint}(f^{-1}(S))) \subset \delta\text{-pint}(f(f^{-1}(S))) \subset \delta\text{-pint}(S)$$

ve buradan

$$f^{-1}(f(\delta\text{-pint}(f^{-1}(S)))) \subset f^{-1}(\delta\text{-pint}(S))$$

ve böylece

$$\delta\text{-pint}(f^{-1}(S)) \subset f^{-1}(\delta\text{-pint}(S))$$

olur.

(4) $\Rightarrow$ (1) : $A \in \delta\text{-PO}(X)$ olsun. (4)'den,

$$\delta\text{-pint}(f^{-1}(f(A))) \subset f^{-1}(\delta\text{–pint}(f(A)))$$

ve buradan

$$A = \delta\text{-pint}(A) \subset f^{-1}(\delta\text{-pint}(f(A)))$$

olur. Bu ise bize $f(A) \subset \delta\text{-pint}(f(A))$ olduğunu verir. Sonuç olarak $f(A)$ δ-önaçık ve buradan f, δ-önaçık bir fonksiyon olur.

(1) $\Rightarrow$ (2) : $x \in X$ ve $U \in \delta p\text{-}N(x)$ olsun. Bu durumda $x \in W \subset U$ olacak biçimde bir $W \in \delta\text{-PO}(X)$ vardır. Böylece $f(x) \in f(W) \subset f(U)$ elde ederiz. Hipotezden $f(W) \in \delta\text{-PO}(Y)$ olduğundan $f(U) \in \delta p\text{-}N(f(x))$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Keyfi bir noktanın her bir δ-önaçık komşuluğunun görüntüsü o noktanın görüntüsünün δ-önaçık komşuluğu olsun. $x \in V \in \delta\text{-PO}(X)$ alalım. Bu durumda hipotezden $f(x) \in f(V) \in \delta p\text{-}N(f(x))$ olacaktır. Sonuç olarak, $f(V) \in \delta\text{-PO}(Y)$ elde ederiz.

Teorem 2.8. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f fonksiyonu δ-önkapalıdır,

(2) $\forall A \subset X$ için $\delta\text{-pcl}(f(A)) \subset f(\delta\text{-pcl}(A))$.

İspat :

(1) ⇒ (2) : $A \subset X$ olsun. $A \subset \delta\text{-pcl}(A)$ her zaman vardır. Bu durumda $f(A) \subset f(\delta\text{-pcl}(A))$ olur. f fonksiyonu δ-önkapalı olduğundan $f(\delta\text{-pcl}(A))$ δ-önkapalı bir kümedir. Bu durumda

$$\delta\text{-pcl}(f(A)) \subset \delta\text{-pcl}(f(\delta\text{-pcl}(A))) = f(\delta\text{-pcl}(A))$$

ve buradan

$$\delta\text{-pcl}(f(A)) \subset f(\delta\text{-pcl}(A))$$

elde edilir.

(2) ⇒ (1) : $A \subset X$ δ-önkapalı bir küme olsun. (2)'den,

$$\delta\text{-pcl}(f(A)) \subset f(\delta\text{-pcl}(A)) = f(A)$$

olduğunu elde ederiz.

Teorem 2.9. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ δ-önkapalı bir fonksiyon ve $H \subset X$ δ-açık bir küme olsun. Bu durumda $f|_H : (H, \tau_H) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu δ-önkapalıdır.

İspat: F, (H, τ_H) uzayında δ-önkapalı bir küme olsun. Bu durumda H δ-açık olduğundan dolayı Önerme 2.1. den $(f|_H)(F) = f(F) \subset Y$ δ-önkapalı olacağından $f|_H$ fonksiyonu δ-önkapalıdır.

Teorem 2.10. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ ve $g : (Y, \upsilon) \rightarrow (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda

(1) f ve g fonksiyonları δ-önaçık ise gof fonksiyonu δ-önaçıktır.

(2) f fonksiyonu ve g fonksiyonu δ-önkapalı ise gof fonksiyonu δ-önkapalıdır.

İspat :

(1) f fonksiyonu δ-önaçık olduğundan $G \in \delta\text{-PO}(X)$ için $f(G) \in \delta\text{-PO}(Y)$ olur. g fonksiyonu δ-önaçık olduğundan $H \in \delta\text{-PO}(Y)$ için $g(H) \in \delta\text{-PO}(Z)$ olacaktır. Buradan $f(G) \in \delta\text{-PO}(Y)$ için $g(f(G)) \in \delta\text{-PO}(Z)$ olur. Böylece

$$g(f(G)) = (gof)(G) \in \delta\text{-PO}(Z)$$

olur. Yani gof fonksiyonu δ-önaçıktır.

(2) f fonksiyonu δ-önkapalı olduğundan, $F \subset X$ δ-önkapalı kümesi için f(F) kümesi δ-önkapalıdır. g fonksiyonu δ-önkapalı olduğundan, $K \subset Y$ δ-önkapalı kümesi için g(K) δ-önkapalıdır. Buradan

$$g(f(K)) = (gof)(K)$$

kümesinin δ-önkapalı olduğunu elde ederiz. Böylece gof fonksiyonu δ-önkapalı olur.

Teorem 2.11. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda, f ve g fonksiyonları δ-önkararsız ise $gof : (X, \tau) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonu da δ-önkararsızdır.

İspat: $H \in \delta\text{-PO}(Z)$ alalım. g fonksiyonu δ-önkararsız olduğundan, $H \in \delta\text{-PO}(Z)$ için $g^{-1}(H) \in \delta\text{-PO}(Y)$ olur. f fonksiyonu δ-önkararsız olduğundan, $g^{-1}(H) \in \delta\text{-PO}(Y)$ için $f^{-1}(g^{-1}(H)) \in \delta\text{-PO}(X)$ elde ederiz. Bu durumda

$$(f^{-1}og^{-1})(H) = (gof)^{-1}(H) \in \delta\text{-PO}(X)$$

olur. Böylece gof fonksiyonunun δ-önkararsız olduğu elde edilir.

Teorem 2.12. $i \in I$ olmak üzere (X_i, τ_i) topolojik uzaylarını alalım. Bu durumda $\forall\, i \in I$ için $p_i : (\prod X_i, \prod \tau_i) \to (X_i, \tau_i)$ izdüşüm fonksiyonu δ-önkararsızdır.

İspat: A kümesi (X_i, τ_i) uzayında δ-önaçık bir küme olsun. Bu durumda

$$p_i^{-1}(A) = A \times \prod_{i \neq j} X_j$$

kümesi δ-önaçık bir küme olacaktır. Böylece $\forall i \in I$ için p_i izdüşüm fonksiyonu δ-önkararsız olur.

Teorem 2.13. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun δ-önkapalı olması için gerek ve yeter koşul $\forall S \subset Y$ ve $f^{-1}(S) \subset U$ olan $\forall U$ δ-önaçık kümesi için $S \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset U$ olacak biçimde bir V δ-önaçık kümesi var olmasıdır.

İspat:

(⇒) $S \subset Y$, $f^{-1}(S) \subset U$ ve U bir δ-önaçık küme olsun. Bu durumda,

$$Y \setminus f(X \setminus U) = V$$

kümesi δ-önaçık kümedir. Üstelik $S \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset U$ olur.

(⇐) $F \subset X$ bir δ-önkapalı küme olsun. Bu durumda,

$$f^{-1}(Y \setminus f(F)) \subset X \setminus F \text{ ve } X \setminus F \in \delta\text{-}PO(X)$$

olur.

$$S = Y \setminus f(F) \text{ ve } U = X \setminus F$$

alalım. Bu durumda hipotezden $Y \setminus f(F) \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset X \setminus F$ olacak biçimde

bir V δ-önaçık kümesi vardır. Buradan $f(F) = Y \setminus V$ ve f(F) δ-önkapalı olur. Böylece f'nin δ-önkapalı olduğunu elde ederiz.

Teorem 2.14. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. 1-1, örten, δ-önaçık bir $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu için X uzayı δ-pre-T_0 uzay ise Y uzayı da δ-pre-T_0 uzaydır.

İspat: X uzayı δ-pre-T_0 uzay olsun. Bu durumda $x_1 \neq x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in X$ noktası için

$$x_1 \in U,\ x_2 \notin U \text{ veya } x_1 \notin V,\ x_2 \in V$$

olacak biçimde $\exists\, U, V \in \delta$-PO(X) vardır.

$y_1 \neq y_2$ olmak üzere $y_1, y_2 \in Y$ noktalarını alalım. Bu durumda $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ vardır. Hipotezden

$$x_1 \in U,\ x_2 \notin U \text{ veya } x_1 \notin V,\ x_2 \in V$$

olacak biçimde $\exists\, U, V \in \delta$-PO(X) vardır. Buradan

$$f(x_1) \in f(U),\ f(x_2) \notin f(U) \text{ veya } f(x_1) \notin f(V),\ f(x_2) \in f(V)$$

ve f(U), f(V) $\in \delta$-PO(Y) olur. Bu ise bize Y uzayının bir δ-pre-T_0 uzay olduğunu verir.

Teorem 2.15. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. 1-1, örten, δ-önaçık bir f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu için X uzayı δ-pre-T_1 uzay ise Y uzayı da δ-pre-T_1 uzaydır.

İspat : X uzayı δ-pre-T_1 uzay olsun. Bu durumda $x_1 \neq x_2$ olan $\forall\, x_1, x_2 \in X$ noktası için

$$x_1 \in U,\ x_2 \notin U \text{ ve } x_1 \notin V,\ x_2 \in V$$

olacak biçimde $\exists\, U, V \in \delta$-PO(X) vardır.

$y_1 \neq y_2$ olmak üzere $y_1, y_2 \in Y$ noktalarını alalım. Bu durumda $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ vardır. Hipotezden

$$x_1 \in U,\ x_2 \notin U \text{ ve } x_1 \notin V,\ x_2 \in V$$

olacak biçimde $\exists\, U,V \in \delta$-PO(X) vardır. Buradan

$$f(x_1) \in f(U),\ f(x_2) \notin f(U) \text{ ve } f(x_1) \notin f(V),\ f(x_2) \in f(V)$$

ve f(U), f(V) $\in \delta$-PO(Y) olduğunu elde ederiz. Bu ise bize Y uzayının bir δ-pre-T_1 uzay olduğunu verir.

Teorem 2.16. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. 1-1, örten, δ-önaçık bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu için X uzayı δ-pre-T_2 uzay ise Y uzayı da δ-pre-T_2 uzaydır.

İspat : X uzayı δ-pre-T_2 uzay olsun. Bu durumda $x_1 \neq x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in X$ noktası için

$$x_1 \in U,\ x_2 \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olan $\exists U, V \in \delta\text{-}PO(X)$ vardır.

$y_1 \neq y_2$ olmak üzere $y_1, y_2 \in Y$ alalım. Buradan $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ vardır. Hipotezden

$$x_1 \in U,\ x_2 \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak biçimde $\exists U, V \in \delta\text{-}PO(X)$ vardır. Buradan

$$f(x_1) \in f(U),\ f(x_2) \in f(V) \text{ ve } f(U) \cap f(V) = \emptyset$$

olan $f(U), f(V) \in \delta\text{-}PO(Y)$ elde ederiz. Bu ise bize Y uzayının bir δ-pre-T_2 uzay olduğunu verir.

Teorem 2.17. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. 1-1, örten, kapalı bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonunu alalım. f fonksiyonu δ-önkararsız ve Y uzayı δ-p-regüler ise X uzayı da δ-p-regüler uzaydır.

İspat : (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere $x \notin K$ ve $K \in \tau^k$ alalım.

f fonksiyonu kapalı olduğundan,

$$f(x) \notin f(K) \text{ ve } f(K) \in \upsilon^k$$

olacaktır.

Y uzayı δ-p-regüler olduğundan,

$$f(x) \in U,\ f(K) \subset V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olan $\exists$ U, V $\in$ δ-PO(Y) vardır. Buradan

$$x \in f^{-1}(U),\ K \subset f^{-1}(V) \text{ ve } f^{-1}(U),\ f^{-1}(V) \in \delta\text{-PO}(X)$$

elde ederiz. Üstelik, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ dir. Sonuç olarak X uzayı bir δ-p-regüler uzaydır.

Teorem 2.18. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. 1-1, örten, kapalı bir f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonunu alalım. f fonksiyonu δ-önkararsız ve Y uzayı δ-p-normal uzay ise X uzayı da δ-p-normal uzaydır.

İspat : (X, τ), (Y,υ) topolojik uzaylar olsun. $F \cap K = \emptyset$ olan F, $K \in \tau^k$ alalım.

f fonksiyonu kapalı olduğundan,

$$f(F),\ f(K) \in \upsilon^k \text{ ve } f(F) \cap f(K) = \emptyset$$

olur.

Y uzayı δ-p-normal uzay olduğundan,

$$f(F) \subset U,\ f(K) \subset V \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ olan } \exists\, U, V \in \delta\text{-PO}(Y)$$

vardır. Buradan

$$F \subset f^{-1}(U),\ K \subset f^{-1}(V) \text{ ve } f^{-1}(U),\ f^{-1}(V) \in \delta\text{-PO}(X)$$

elde ederiz. Üstelik $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ dir. Bu ise bize X uzayının δ-p-normal uzay olduğunu verir.

Teorem 2.19. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. 1-1, örten, δ-önaçık bir f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonunu alalım. f fonksiyonu δ-önkararsız ve Y uzayı δ-önkompakt uzay ise X uzayı da δ-önkompakt uzaydır.

İspat : $U = \{U_i : i \in I\}$ ailesi X uzayının bir δ-önaçık örtüsü olsun. Yani, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olsun. Bu durumda

$$Y = f(X) = f\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f(U_i)$$

olur. f fonksiyonu δ-önaçık olduğundan, $\forall i \in I$ için $f(U_i) \in$ δ-PO(Y) olur. Y uzayı δ-önkompakt uzay olduğundan, $Y = \bigcup_{i\in I_0} f(U_i)$ olacak biçimde $I_0 \subset I$ sonlu indis kümesi vardır. Buradan

$$
\begin{aligned}
X &= f^{-1}(Y) \\
&= f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I_0} f(U_i)\Big) \\
&= \bigcup_{i\in I_0} \big(f^{-1}(f(U_i))\big) \\
&= \bigcup_{i\in I_0} U_i
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu ise bize X uzayının bir δ-önkompakt uzay olduğunu verir.

3. δp-HOMEOMORFİK TOPOLOJİK YAPILAR

Bu bölümde δp-homeomorfizma ve δp-homeomorfik topolojik yapılar tanıtılmıştır. Özellikleri ve koruma teoremleri araştırılmıştır.

Tanım 3.1 (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise f fonksiyonuna bir δp-homeomorfizma denir.

(1) 1-1, örten,

(2) δ-önkararsız,

(3) δ-önaçık.

Teorem 3.1. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir 1-1, örten bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f fonksiyonu δp-homeomorfizmadır,

(2) f^{-1} fonksiyonu δp-homeomorfizmadır,

(3) $\forall S \subset Y$ için $\delta\text{-pcl}(f^{-1}(S)) = f^{-1}(\delta\text{-pcl}(S))$,

(4) $\forall A \subset X$ için $\delta\text{-pcl}(f(A)) = f(\delta\text{-pcl}(A))$,

(5) $\forall S \subset Y$ için $\delta\text{-pint}(f^{-1}(S)) = f^{-1}(\delta\text{-pint}(S))$,

(6) $\forall A \subset X$ için $\delta\text{-pint}(f(A)) = f(\delta\text{-pint}(A))$.

İspat :

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Açık.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Teorem 2.1'den açıktır.

(1) $\Leftrightarrow$ (4): Teorem 2.1'den açıktır.

(1) $\Leftrightarrow$ (5): Teorem 2.1'den ve Teorem 2.7'den açıktır.

(1) $\Leftrightarrow$ (6): Teorem 2.1'den açıktır.

Teorem 3.2. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir δp-homeomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $f : (X, \tau_s) \to (Y, \upsilon_s)$ fonksiyonunun bir önhomeomorfizma olmasıdır.

İspat: Bir A kümesinin bir (X, τ) topolojik uzayında δ-önaçık olması için gerek ve yeter koşul A'nın (X, τ_s) uzayında önaçık olmasıdır. İspat tamamlanır.

Tanım 3.2. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. Eğer X ve Y arasında bir $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ δp-homeomorfizması var ise X ve Y uzaylarına δp-homeomorfik uzaylardır denir.

Tanım 3.3. δp-homeomorfizma altında korunan bir topolojik özelliğe δp-topolojik özellik denir.

Teorem 3.3. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki δp-homeomorfizma olsun. Bu durumda gof fonksiyonu da bir δp-homeomorfizmadır.

İspat : $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki homeomorfizma ve $gof : (X, \tau) \to (Z, \sigma)$ olsun.

H kümesi Z uzayında δ-önaçık olsun. g fonksiyonu bir δp-homeomorfizma olduğundan, $g^{-1}(H)$ δ-önaçık bir kümedir.

$g^{-1}(H)$ kümesi Y uzayında δ-önaçık ve f fonksiyonu δp-homeomorfizma olduğundan, $f^{-1}(g^{-1}(H)) = (gof)^{-1}(H)$ δ-önaçık olur. Böylece gof fonksiyonu δ-önkararsızdır.

f ve g fonksiyonları δ-önaçık olduğundan gof de δ-önaçıktır.

Böylece, gof bileşke fonksiyonunun bir δp-homeomorfizma olduğunu elde ederiz.

Teorem 3.4. “δp-homeomorfik uzay olma” topolojik uzaylar arasında bir denklik bağıntısıdır.

İspat :

<u>**Yansıma özelliği:**</u> (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

$$I : X \to X,\ I(x) = x$$

birim dönüşümü bir δp-homeomorfizmadır.

<u>**Simetri özelliği:**</u> (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir δp-homeomorfizma ise 1-1 ve örten olduğundan

$$f^{-1} : Y \to X,\ y \to f^{-1}(y) = x$$

fonksiyonu da bir δp-homeomorfizmadır.

<u>**Geçişme özelliği:**</u> (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki δp-homeomorfizma olsun. Bu durumda

$$gof : (X, \tau) \to (Z, \sigma),\ x \to (gof)(x) = z$$

fonksiyonu da bir δp-homeomorfizmadır.

Teorem 3.5. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere,

$$\delta PH(X, \tau) = \{f \mid f : (X, \tau) \to (X, \tau) \text{ bir } \delta p\text{-homeomorfizmadır.}\}$$

kümesi bir grup oluşturur.

İspat :

$$\mu : \delta PH(X, \tau) \times \delta PH(X, \tau) \to \delta PH(X, \tau),\ (f, g) \to gof$$

işlemini tanımlayalım. Bu durumda $(\delta PH(X, \tau), \mu)$ bir grup oluşturur.

<u>**İyi tanımlılık:**</u> $(f, g), (f^{'}, g^{'}) \in \delta PH(X, \tau) \times \delta PH(X, \tau)$ ve $(f, g) = (f^{'}, g^{'})$ alalım. Bu durumda

$$f = f' \quad \text{ve} \quad g = g'$$

olur. Buradan

$$\mu(f, g) = gof = g'of' = \mu(f', g')$$

elde ederiz.

Kapalılık: f, $g \in \delta PH(X, \tau)$ alalım. Bu durumda

(1) f ve g fonksiyonu δ-önkararsız ise gof fonksiyonu δ-önkararsızdır

ve

(2) f ve g fonksiyonu δ-önaçık ise gof fonksiyonu da δ-önaçık

olduğundan gof bir δp-homeomorfizma olacaktır.

Birleşme: f, g, $h \in \delta PH(X, \tau)$ alalım.

$$(f\mu g)\mu h = (gof)\mu h = ho(gof) = (hog)of = f\mu(hog) = f\mu(g\mu h)$$

Birim eleman: $I : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$, $I(x) = x$ birim dönüşümüdür.

Ters eleman: $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ bir fonksiyon olmak üzere $f \in \delta PH(X, \tau)$ ise $f^{-1} : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu için $f^{-1} \in \delta PH(X, \tau)$ ve f'nin ters elemanıdır.

Sonuç olarak $(\delta PH(X, \tau), \mu)$ kümesi bir grup oluşturur.

Teorem 3.6. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir δp-homeomorfizma ise bu durumda bir $\eta : \delta PH(X, \tau) \rightarrow \delta PH(X, \tau)$ izomorfizması vardır.

İspat : η dönüşümünü

$$\eta : \quad \delta PH(X, \tau) \rightarrow \delta PH(X, \tau)$$

$$g \rightarrow \eta(g) = fogof^{-1}$$

olarak tanımlarsak η bir izomorfizmadır.

η, iyi tanımlı ve 1-1 dir:

$$g_1 = g_2 \Leftrightarrow \eta(g_1) = fog_1of^{-1} = fog_2of^{-1} = \eta(g_2).$$

η, örtendir:

$h \in \delta PH(X, \tau)$ olsun. $g = f^{-1}ohof$ olarak alırsak $\eta(g) = h$ olur.

η, işlemi korur:

$g_1, g_2 \in \delta PH(X, \tau)$ alalım. Bu durumda

$$\eta(g_1 \mu g_2) = \eta(g_2 o g_1) = fog_2og_1of^{-1}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta(g_1)\mu\eta(g_2) &= \eta(g_2)o\eta(g_1) \\ &= (fog_2of^{-1})o(fog_1of^{-1}) \\ &= fog_2o(f^{-1}of)og_1of^{-1} \\ &= fog_2og_1of^{-1} \\ &= \eta(g_1\mu g_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak η bir izomorfizma oluşturur.

Teorem 3.7. δ-pre-T_0, δ-pre-T_1, δ-pre-T_2, δ-önkompakt uzay olma özellikleri birer δp-topolojik özelliklerdir.

İspat :

(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir δp-homeomorfizma olsun.

Teorem 2.14'den X uzayı δ-pre-T_0 uzay ise Y uzayı da δ-pre-T_0 uzaydır.

Teorem 2.15'den X uzayı δ-pre-T_1 uzay ise Y uzayı da δ-pre-T_1 uzaydır.

Teorem 2.16'dan X uzayı δ-pre-T_2 uzay ise Y uzayı da δ-pre-T_2 uzaydır.

Teorem 2.19'dan X uzayı δ-önkompakt uzay ise Y uzayı da δ- önkompakt uzaydır.

Teorem 3.8. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir δp-homeomorfizma ve $A \subset X$ δ-açık bir küme olsun. Bu durumda $f|_A$ fonksiyonu da bir δp-homeomorfizmadır.

İspat :

H, Y'nin δ-önaçık bir alt kümesi olsun. f, δ-önkararsız olduğundan $f^{-1}(H) \in \delta$-PO(X)'dir.

Buradan $(f|_A)^{-1}(H) = f^{-1}(H) \cap A$ olduğundan Önerme 2.2'den $(f|_A)^{-1}(H) \in \delta$-PO(X) olur. Bu bize $f|_A$ fonksiyonunun δ-önkararsız olduğunu verir.

H, A uzayında δ-önaçık bir küme olsun. Bu durumda Önerme 2.1'den $H \in \delta$-PO(X)'dir. f, δ-önaçık olduğundan $f(H) \in \delta$-PO(Y) olur. Böylece $f|_A$, δ-önaçık bir fonksiyon olduğunu elde ederiz.

Sonuç olarak $f|_A$ fonksiyonu bir δp-homeomorfizmadır.

4. δ-HEMEN HEMEN SÜREKLİ FONKSİYON ÖZELLİKLERİ, ZAYIF δ-ÖNAÇIK VE ZAYIF δ-ÖNKAPALI FONKSİYONLAR

Bu bölümde δ-hemen hemen sürekli fonksiyonlar, zayıf δ-önaçık fonksiyonlar ve zayıf δ-önkapalı fonksiyonlar sunulmuştur. Karakterizasyonları ve özellikleri araştırılmıştır.

Tanım 4.1. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Her açık G kümesi için $f^{-1}(G)$ δ-önaçık oluyor ise f fonksiyonuna δ-hemen hemen süreklidir denir (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Uyarı 4.1. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu δ-önkararsız ise δ-hemen hemen süreklidir.

Tanım 4.2. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Her açık G kümesi için f(G) δ-önaçık ise f fonksiyonuna zayıf δ-önaçık'tır denir.

Tanım 4.3. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Her kapalı F kümesi için f(F) δ-önkapalı ise f fonksiyonuna zayıf δ-önkapalı'dır denir.

Teorem 4.1. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. f fonksiyonu zayıf δ-önaçıktır,

2. Bir noktanın her açık komşuluğunun f altındaki görüntüsü o noktanın görüntüsünün δ-önaçık komşuluğudur,

3. $\forall A \subset X$ için $f(int(A)) \subset$ δ-pint(f(A)),

4. $\forall B \subset Y$ için $int(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\delta\text{-pint}(B))$.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2): $x \in X$ ve $U \in N(x)$ olsun. Bu durumda $x \in W \subset U$ olacak biçimde $\exists W \in \tau$ vardır. $f(x) \in f(W) \subset f(U)$ elde edilir. f fonksiyonu zayıf δ-önaçık olduğundan $f(W) \in \delta\text{-}PO(Y)$ ve buradan $f(U) \in \delta p\text{-}N(f(x))$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (1): Bir noktanın her açık komşuluğunun f altındaki görüntüsü o noktanın görüntüsünün δ-önaçık komşuluğu olsun. $V \in \tau$ alalım. Bu durumda $\forall x \in V$ için $f(x) \in f(V) \in \delta p\text{-}N(f(x))$ olacaktır. Böylece $f(V) \in \delta\text{-}PO(Y)$ olduğunu elde ederiz. Sonuç olarak f fonksiyonu zayıf δ-önaçık olacaktır.

(3) $\Rightarrow$ (4): $B \subset Y$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(B) \subset X$ olur. Hipotezden,

$$f(int(f^{-1}(B)) \subset \delta\text{-pint}(f(f^{-1}(B)) \subset \delta\text{-pint}(B)$$

ve buradan

$$f^{-1}[f(int(f^{-1}(B))] \subset f^{-1}(\delta\text{-pint}(B))$$

olmak üzere

$$int(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\delta\text{-pint}(B))$$

elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (3): $B = f(A) \subset Y$ olsun. Hipotezden,

$$int(f^{-1}(f(A))) \subset f^{-1}[\delta\text{-pint}(f(A))]$$

ve buradan $int(A) \subset f^{-1}[\delta\text{-pint}(f(A))]$ elde ederiz. Böylece $f(int(A)) \subset \delta\text{-pint}[f(A)]$ olur.

(1) $\Rightarrow$ (3): $A \subset X$ olsun. $int(A) \subset A$ her zaman vardır. Buradan $f(int(A)) \subset f(A)$ olur. Böylece

$$\delta\text{-pint}(f(int(A))) \subset \delta\text{-pint}(f(A))$$

ve hipotezden

$$f(int(A)) \subset \delta\text{-}pint(f(A))$$

elde ederiz.

(4) $\Rightarrow$ (1): $G \in \tau$ olsun. (4)'den,

$$int(f^{-1}(f(G))) \subset f^{-1}(\delta\text{-}pint(f(G)))$$

ve buradan

$$int(G) \subset f^{-1}(\delta\text{-}pint(f(G)))$$

elde ederiz. $G \in \tau$ olduğundan

$$G \subset f^{-1}(\delta\text{-}pint(f(G)))$$

ve böylece $f(G) \subset \delta$-pint(f(G)) olur ki bu bize f(G) kümesinin δ-önaçık olduğunu verir.

Teorem 4.2. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. f fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır,

2. $\forall A \subset X$ için δ-pcl(f(A)) $\subset$ f(cl(A)).

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2): $A \subset X$ olsun. cl(A) kapalı bir kümedir. f fonksiyonu zayıf δ-önkapalı olduğundan f(cl(A)) kümesi δ-önkapalıdır.

$$A \subset cl(A) \Rightarrow f(A) \subset f(cl(A))$$

gerektirmesi her zaman geçerli olduğundan

$$\delta\text{-}pcl(f(A)) \subset \delta\text{-}pcl(f(cl(A))) = f(cl(A))$$

elde ederiz.

(2) $\Rightarrow$ (1): $G \in \tau^k$ olsun. (2)'den,

$$\delta\text{-pcl}(f(G)) \subset f(cl(G)) = f(G)$$

olur. Buradan f(G) δ-önkapalıdır.

Teorem 4.3. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun zayıf δ-önkapalı olması için gerek ve yeter koşul $\forall S \subset Y$ ve $f^{-1}(S) \subset U$ olan her U açık kümesi için $S \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset U$ olacak biçimde $\exists V \in \delta\text{-PO}(Y)$ var olmasıdır.

İspat:

($\Rightarrow$): $S \subset Y$ ve $f^{-1}(S) \subset U$ ve $U \in \tau$ olsun. Bu durumda

$$Y \setminus f(X \setminus U) = V$$

kümesi δ-önaçık bir kümedir. Üstelik $S \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset U$ olur.

($\Leftarrow$): $F \subset X$ kapalı bir küme olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(Y \setminus f(F)) \subset X \setminus F \text{ ve } X \setminus F \text{ açık}$$

olur.

$$S = Y \setminus f(F) \text{ ve } U = X \setminus F$$

alalım. Hipotezden, enaz bir V δ-önaçık kümesi

$$Y \setminus f(F) \subset V \text{ ve } f^{-1}(V) \subset X \setminus F$$

olacak biçimde vardır. Buradan, $f(F) = Y \setminus V$ ve f(F) δ-önkapalı olur. Bu ise bize f'nin zayıf δ-önkapalı olmasını verir.

Önerme 4.1. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. 1-1, örten bir f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(1) f^{-1} : (Y, υ) → (X, τ) fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir,

(2) f fonksiyonu zayıf δ-öaçıktır,

(3) f fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır.

İspat :

(1) ⇔ (2) : G, X'de açık bir küme olsun. f^{-1} fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğundan f(G) δ-önaçıktır.

G kümesi keyfi olduğundan f fonksiyonunun zayıf δ-önaçık olduğu elde edilir.

Tersi benzer biçimde elde edilir.

(2) ⇔ (3) : G, X'de kapalı küme olsun. Buradan X \ G açık kümedir. f fonksiyonu zayıf δ-öaçık olduğundan f(X \ G) kümesi δ-önaçıktır. Buradan

$$f(X \setminus G) = Y \setminus f(G)$$

olduğundan f(G) δ-önkapalı olur ki bu bize f fonksiyonunun zayıf δ-önkapalı olduğunu verir.

Tersi benzer biçimde görülebilir.

Teorem 4.4. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda, g fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli ve f fonksiyonu δ-önkararsız ise $gof : (X, \tau) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir.

İspat :

$H \in \sigma$ alalım. g fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğundan, $H \in \sigma$ için $g^{-1}(H) \in \delta\text{-PO}(Y)$ olacaktır. f fonksiyonu δ-önkararsız olduğundan, $g^{-1}(H) \in \delta\text{-PO}(Y)$ için $f^{-1}(g^{-1}(H)) \in \delta\text{-PO}(X)$ olur. Bu durumda

$$f^{-1}(g^{-1}(H)) = (f^{-1}og^{-1})(H) = (gof)^{-1}(H) \in \delta\text{-PO}(X)$$

elde edilir. Böylece gof fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğu elde edilir.

Teorem 4.5. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$, $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon ve f örten olsun.

(1) gof örten, δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyon ve f δ-önaçık bir fonksiyon ise g δ-hemen hemen süreklidir.

(2) gof örten, δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyon ve f δ-önkapalı bir fonksiyon ise g δ-hemen hemen süreklidir.

İspat :

(1) gof, δ-hemen hemen sürekli olduğundan, $H \in \sigma$ için $(gof)^{-1}(H) \in \delta\text{-}PO(X)$ olur. f fonksiyonu δ-önaçık olduğundan, $(gof)^{-1}(H) \in \delta\text{-}PO(X)$ için

$$f\,[(gof)^{-1}(H)] \in \delta\text{-}PO(Y)$$

olur. Böylece

$$f\,[(f^{-1}og^{-1})(H)] = [(fof^{-1})og^{-1}](H) = g^{-1}(H) \in \delta\text{-}PO(Y)$$

elde ederiz. $H \in \sigma$ için $g^{-1}(H) \in \delta\text{-}PO(Y)$ olduğundan g fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olur.

(2) gof fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğundan, $H \in \sigma$ için $(gof)^{-1}(H) \in \delta\text{-}PO(X)$ olur.

f fonksiyonu δ-önkapalı olduğundan, F δ-önkapalı bir küme ise f(F) δ-önkapalı olur.

$F \in \sigma^k$ alalım. $(gof)^{-1}(F) = f^{-1}(g^{-1}(F))$ δ-önkapalı bir küme olacaktır. Buradan

$$f(f^{-1}(g^{-1}(F))) = g^{-1}(F)$$

δ-önkapalı olur.

Teorem 4.6. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli ve A da X'e göre δ-önkompakt bir küme ise f(A) Y'ye göre kompakttır.

İspat : $\{A_i : i \in I\}$ ailesi f(A)'nın açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $f(A) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ olacaktır. Buradan

$$A \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

elde ederiz. A da X'e göre δ-önkompakt bir küme olduğundan $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i)$ olacak biçimde sonlu alt örtü vardır. Bu durumda

$$f(A) \subset f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(A_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

elde ederiz. Bu ise f(A)'nın Y'ye göre kompaktlığını verecektir.

Sonuç : (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) örten bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli ve X uzayı δ-önkompakt ise Y kompakttır.

Teorem 4.7. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) 1-1, örten, δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Y uzayı T_0-uzay ise X uzayı δ-pre-T_0 uzaydır.

İspat : Y uzayı T_0-uzay olsun. $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in X$ noktalarını alalım. Bu durumda $f(x) \neq f(y)$ olur. Y uzayı T_0-uzay olduğundan,

$$f(x) \in U,\ f(y) \notin U \text{ veya } f(x) \notin V,\ f(y) \in V$$

olacak biçimde $\exists\, U, V \in \upsilon$ vardır. Buradan,

$$x \in f^{-1}(U),\ y \notin f^{-1}(U) \text{ veya } x \notin f^{-1}(V),\ y \in f^{-1}(V)$$

elde ederiz. f fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V) \in \delta$-PO(X) olacaktır. Bu ise bize X uzayının δ-pre-T_0 uzay olduğunu verir.

Teorem 4.8. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Y uzayı T_1-uzay ise X uzayı δ-pre-T_1 uzaydır.

İspat : Y uzayı T_1-uzay olsun. $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in X$ noktalarını alalım. Bu durumda $f(x) \neq f(y)$ olacaktır. Y uzayı T_1-uzay olduğundan,

$$f(x) \in U,\ f(y) \notin U \text{ ve } f(x) \notin V,\ f(y) \in V$$

olacak biçimde $\exists\, U, V \in \upsilon$ vardır. Buradan,

$$x \in f^{-1}(U),\ y \notin f^{-1}(U) \text{ ve } x \notin f^{-1}(V),\ y \in f^{-1}(V)$$

elde ederiz. f fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V) \in \delta$-PO(X) olur. Böylece X uzayının δ-pre-T_1 uzay olduğunu elde ederiz.

Teorem 4.9. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Y uzayı T_2-uzay ise X uzayı δ-pre-T_2 uzaydır.

İspat : Y uzayı T_2-uzay olsun. $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in X$ noktalarını alalım. Buradan $f(x) \neq f(y)$ olacağı açıktır. Y uzayı T_2-uzay olduğundan,

$$f(x) \in U,\ f(y) \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olan $\exists\, U, V \in \upsilon$ vardır. Buradan,

$$x \in f^{-1}(U),\ y \in f^{-1}(V) \text{ ve } f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$$

elde ederiz. f fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V) \in \delta$-PO(X) olur. Böylece X uzayı bir δ-pre-T_2 uzaydır.

Teorem 4.10. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı, δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Y uzayı regüler uzay ise X uzayı δ-p-regüler uzaydır.

İspat : Y uzayı regüler uzay olsun. K kapalı küme ve $x \notin K$ olsun. Buradan $f(x) \notin f(K)$ olur. Y uzayı regüler uzay olduğundan,

$$f(x) \in U,\ f(K) \subset V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olan $\exists\, U, V \in \upsilon$ vardır. Buradan,

$$x \in f^{-1}(U),\ K \subset f^{-1}(V) \text{ ve } f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$$

elde ederiz. f fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V) \in \delta$-PO(X) olur ki bu bize X uzayının δ-p-regüler uzay olduğunu verir.

Teorem 4.11. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı, δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Y uzayı normal uzay ise X uzayı δ-p-normal uzaydır.

İspat : Y, normal uzay olsun. X uzayında $A \cap B = \emptyset$ olan A ve B kapalı kümelerini alalım. Bu durumda $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ olur. Y uzayı normal uzay olduğundan,

$$f(A) \subset U,\ f(B) \subset V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olan $\exists\, U, V \in \upsilon$ vardır. Buradan,

$$A \subset f^{-1}(U),\ B \subset f^{-1}(V) \text{ ve } f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$$

bulunur. f fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V) \in \delta$-PO(X) olur. Böylece X uzayı bir δ-p-normal uzaydır.

Teorem 4.12. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$, $g : (Y, \upsilon) \rightarrow (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olsun. $gof : (X, \tau) \rightarrow (Z, \sigma)$ zayıf δ-önkapalı ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ sürekli, örten ise g fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır.

İspat: $F \subset Y$ kapalı olsun. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(F)$ kapalıdır. Hipotezden $(gof)(f^{-1}(F))$ δ-önkapalıdır. Böylece g fonksiyonu zayıf δ-önkapalı olduğu elde edilir.

Teorem 4.13. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$, $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ zayıf δ-önkapalı ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ δ-önkapalı ise $gof : (X, \tau) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır.

İspat: $F \subset X$ kapalı olsun. f fonksiyonu zayıf δ-önkapalı olduğundan f(F) δ-önkapalıdır. Hipotezden (gof)(F) δ-önkapalıdır. Dolayısıyla gof fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır.

Teorem 4.14. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$, $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ kapalı ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ zayıf δ-önkapalı ise $gof : (X, \tau) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır.

İspat: $F \subset X$ kapalı olsun. f fonksiyonu kapalı olduğundan f(F) kapalıdır. g zayıf δ-önkapalı olduğundan g(f(F)) δ-önkapalıdır. Dolayısıyla gof fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır.

Teorem 4.15. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ zayıf δ-önkapalı bir fonksiyon ve $H \subset X$ kapalı bir küme olsun. Bu durumda $f|_H : (H, \tau_H) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır.

İspat: $F \in \tau_H^k$ olsun. Bu durumda $(f|_H)(F) = f(F) \subset Y$ δ-önkapalı olacağından $f|_H$ fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır.

Teorem 4.16. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$, $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1. f zayıf δ-önaçık ve g δ-önaçık ise gof fonksiyonu zayıf δ-önaçıktır.

2. gof sürekli ve f örten, zayıf δ-önaçık ise g fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir.

3. gof sürekli ve f örten, zayıf δ-önkapalı ise g fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir.

İspat:

1. f fonksiyonu zayıf δ-önaçık olduğundan $G \in \tau$ için $f(G) \in \delta\text{-}PO(Y)$ dır. g fonksiyonu δ-önaçık olduğundan $f(G) \in \delta\text{-}PO(Y)$ için

$$g(f(G)) = (gof)(G) \in \delta\text{-}PO(Z) \text{ olur.}$$

Sonuç olarak gof fonksiyonu zayıf δ-önaçık olur.

2. gof sürekli olduğundan $H \in \sigma$ için $(gof)^{-1}(H) \in \tau$ dir. f fonksiyonu örten ve zayıf δ-önaçık olduğundan ve $(gof)^{-1}(H)$ açık bir küme olduğundan

$$f((gof)^{-1}(H)) = (fof^{-1}og^{-1})(H) = g^{-1}(H) \in \delta\text{-}PO(Y)$$

olur. Yani g δ-hemen hemen süreklidir.

3. gof sürekli olduğundan $H \in \sigma^k$ için $(gof)^{-1}(H) \in \tau^k$ dır. f örten ve zayıf δ-önkapalı ve

$$(gof)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H)) \in \tau^k$$

olduğundan $f(f^{-1}(g^{-1}(H))) = g^{-1}(H)$ δ-önkapalı olacaktır. Yani g fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir.

Teorem 4.17. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, zayıf δ-önaçık bir fonksiyon olsun. Bu durumda X Haussdorff uzayı ise Y uzayı δ-pre-T_2 uzaydır.

İspat: X Haussdorff uzayı olsun. Bu durumda $x_1 \neq x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in X$ noktaları için $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olan $\exists U, V \in \tau$ vardır.

$y_1 \neq y_2$ olmak üzere $y_1, y_2 \in Y$ alalım. Bu durumda $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ vardır. Buradan

$$x_1 \in U,\ x_2 \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak biçimde $\exists U, V \in \tau$ vardır. f fonksiyonu zayıf δ-önaçık olduğundan f(U), $f(V) \in \delta\text{-}PO(Y)$ dir. Üstelik

$$f(x_1) \in f(U),\ f(x_2) \in f(V) \text{ ve } f(U) \cap f(V) = \emptyset$$

ve $f(U), f(V) \in \delta\text{-}PO(Y)$ olacaktır ki bu bize Y uzayının δ-pre-T_2 uzay olduğunu verir.

Teorem 4.18. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, zayıf δ-önaçık bir fonksiyon olsun. Bu durumda X T_1-uzay ise Y δ-pre-T_1 uzaydır.

İspat: X, T_1-uzay olsun. Bu durumda $x_1 \neq x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$ ve $x_1 \notin V$, $x_2 \in V$ olacak biçimde $\exists U, V \in \tau$ vardır.

$y_1 \neq y_2$ olmak üzere $y_1, y_2 \in Y$ alalım. Buradan $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ vardır. Bu durumda $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$ ve $x_1 \notin V$, $x_2 \in V$ olacak biçimde $\exists U, V \in \tau$ vardır. f, zayıf δ-önaçık olduğundan $f(U), f(V) \in \delta\text{-}PO(Y)$ dir. Üstelik

$$f(x_1) \in f(U),\ f(x_2) \notin f(U) \text{ ve } f(x_1) \notin f(V),\ f(x_2) \in f(V)$$

ve $f(U), f(V) \in \delta\text{-}PO(Y)$ olacaktır. Böylece Y uzayı δ-pre-T_1 uzaydır.

Uyarı 4.2. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki gerektirmeler geçerlidir.

δ-önkararsız

$\Downarrow$

δ-hemen hemen sürekli

$\Uparrow$

Önsürekli

Uyarı 4.3. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki gerektirmeler geçerlidir.

δ-önaçık

$\Downarrow$

Zayıf δ-önaçık

$\Uparrow$

Önaçık $\Leftarrow$ M-önaçık

$\Uparrow$

Açık

Uyarı 4.4. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki gerektirmeler geçerlidir.

δ-önkapalı

$\Downarrow$

Zayıf δ-önkapalı

$\Uparrow$

Önkapalı $\Leftarrow$ M-önkapalı

$\Uparrow$

Kapalı

Uyarı 4.2, Uyarı 4.3 ve Uyarı 4.4'de verilen gerektirmelerin tersleri genel olarak doğru değildir.

Örnek 4.1. $X = Y = \{a, b, c\}$, $\tau = \upsilon = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ olmak üzere

$$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon),\ f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = b$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda f fonksiyonu zayıf δ-önaçıktır ancak önaçık değildir.

Örnek 4.2. $X = Y = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \upsilon = \{\emptyset, X, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}\}$ olmak üzere

$$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon),\ f(a) = a,\ f(b) = b,\ f(c) = a,\ f(d) = b$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda f fonksiyonu zayıf δ-önaçıktır ancak δ-önaçık değildir.

5. δp^*-HOMEOMORFİK TOPOLOJİK YAPILAR

Bu bölümde, δ-hemen hemen sürekli fonksiyonlar, zayıf δ-önaçık fonksiyonlar ve zayıf δ-önkapalı fonksiyonlar ile sunulan ve karakterize edilen δp^*-homeomorfizmalar sunulmuştur. Böylece oluşturulan δp^*-homeomorfik topolojik yapılarla diğer yapılar karşılaştırılmış ve özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.1. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise f'e δp^*-homeomorfizma denir:

(1) 1-1 ve örten,

(2) zayıf δ-önaçık,

(3) δ-hemen hemen sürekli.

Teorem 5.1. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f bir δp-homeomorfizma ise δp^*-homeomorfizmadır.

İspat : Her δ-önaçık fonksiyon zayıf δ-önaçık ve her δ-önkararsız fonksiyon δ-hemen hemen sürekli olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 5.2. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f bir homeomorfizma ise δp^*-homeomorfizmadır.

İspat : Her açık fonksiyon zayıf δ-önaçık ve her sürekli fonksiyon δ-hemen hemen sürekli olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 5.3. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f bir önhomeomorfizma ise δp^*-homeomorfizmadır.

İspat : Her M-önaçık fonksiyon zayıf δ-önaçıktır ve her M-önsürekli fonksiyon δ-hemen hemen sürekli olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 5.4. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Eğer f bir homeomorfizma ise önhomeomorfizmadır (Kupka, 1989, 1990).

Uyarı 5.1. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki gerektirmeler f için geçerlidir:

$$\begin{array}{c} \text{Homeomorfizma} \\ \Downarrow \\ \text{Önhomeomorfizma} \\ \Downarrow \\ \delta p^{*}\text{-homeomorfizma} \\ \Uparrow \\ \delta p\text{-homeomorfizma} \end{array}$$

Uyarı 5.2. Yukarıdaki diagramdaki gerektirmelerin tersleri genel olarak doğru değildir.

Örnek 5.1. X =Y = {a, b, c}, τ = υ = {Ø, X, {a}, {c}, {a, c}, {b, c}} olmak üzere

$$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon),\ f(a) = b,\ f(b) = a,\ f(c) = c$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda f fonksiyonu δp^{*}-homeomorfizmadır ancak önhomeomorfizma değildir.

Örnek 5.2. $X = Y = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \upsilon = \{\emptyset, X, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}\}$ olmak üzere

$$f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon),\ f(a) = a,\ f(b) = b,\ f(c) = a,\ f(d) = b$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda f fonksiyonu δp^*-homeomorfizmadır ancak δp-homeomorfizma değildir.

Teorem 5.5. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) f fonksiyonu zayıf δ-önaçıktır,

(2) f fonksiyonu δp^*-homeomorfizmadır,

(3) f fonksiyonu zayıf δ-önkapalıdır.

İspat :

(1) $\Leftrightarrow$ **(2)** açıktır.

(1) $\Leftrightarrow$ **(3)** açıktır.

Tanım 5.2. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in her açık alt kümesi kapalı ise X'e yerel olarak ayrık olmayan uzay denir.

Teorem 5.6. Bir (X, τ) topolojik uzay için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. (X, τ) yerel olarak ayrık olmayandır,

2. X'in her tek nokta kümesi önaçıktır,

3. X'in her alt kümesi önaçıktır (Dontchev, 1998).

Teorem 5.7. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. (X, τ) yerel olarak ayrık olmayan uzay ise her δ-önaçık küme önaçıktır.

İspat: Her önaçık küme δ-önaçıktır. Yukarıdaki teoremden her δ-önaçık küme önaçıktır.

Teorem 5.8. (X, τ) ve (Y, υ) yerel olarak ayrık olmayan topolojik uzaylar olsun. Aşağıdaki ifadeler bir f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu için denktir:

1. f, δp-homeomorfizmadır,

2. f, önhomeomorfizmadır.

İspat:

(1) ⇔ (2): Her δ-önaçık küme önaçık olduğundan ispat açıktır.

Teorem 5.9. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. (Y, υ) yerel olarak ayrık olmayan topolojik uzay ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. f, zayıf δ-önaçıktır,

2. f, önaçıktır.

İspat:

(1) ⇒ (2): f fonksiyonu zayıf δ-önaçık olsun. Y yerel olarak ayrık olmayan topolojik uzay olduğundan açık kümenin görüntüsü önaçık olur. Sonuç olarak f fonksiyonu önaçıktır.

(2) ⇒ (1): Uyarı 4.3. den açıktır.

Teorem 5.10. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. (Y, υ) yerel olarak ayrık olmayan topolojik uzay ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. f, zayıf δ-önkapalıdır,

2. f, önkapalıdır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2): f fonksiyonu zayıf δ-önkapalı olsun. $G \in \tau^k$ için Y yerel olarak ayrık olmayan topolojik uzay olduğundan f(G) önkapalı olur. O halde f fonksiyonu önkapalıdır.

(2) $\Rightarrow$ (1): Uyarı 4.4. den açıktır.

KAYNAKLAR

[1] Dontchev, J. 1998. Survey on Preopen Sets. *The Proceedings of the 1998 Yatsushiro Topological Conference*, 1-18.

[2] Kupka, I.. 1989, 1990. On Some Classes of Sets Related to Generalized Continuty. *Acta Math. Univ. Comenian*, 56-57, 55-61.

[3] Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. and El-Deeb S. N. 1982. On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings. *Roc. Math. Phys. Soc.*, Egypt, 53: 47-53.

[4] El-Deeb, S. N., Hasanein, I. A., Mashhour, A. S. and Noiri, T. 1983. On p-regular Spaces. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S., Roumanie*, 27 (75): 311-315.

[5] Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. and El-Deep, S. N. 1984. On Pretopological Spaces. *Bull. Math. De la Soc. R. S. de Roumanie,* 28 (76): 39-45.

[6] Stone, M. H. 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology. *TAMS*, 41: 375-381.

[7] Velicko, N. V. 1968. H-closed Topological Spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.,* 78: 103-118.

[8] Raychaudhuri, S. and Mukherjee, M. N.. 1993. On δ-almost Continuity and δ-preopen Sets. *Bull. Inst. Math. Acad.*, Sinica, 21(4): 357-366.

[9] Ekici, E. 2004. (δ-pre, s)-continuous Functions. *Bull. Malay. Math. Sci. Soc.*, 27 (2): 237-251.

[10] Ekici, E. 2005. On δ-preopen Sets. *Mathematica,* 47 (70), (2): 157-164.

[11] Friedler, L. M. and Kitover, A. K.. 1997. Almost Homeomorphic Mappings of

Compact Spaces. *Topology and its Appl*., 81: 233-246.

[12] Dontchev, J. and Maki, H.. 1999. Groups of θ-generalized Homeomorphisms and the Digital line. *Topology and its Appl*., 95:113-128.

[13] Devi, R., Balachandran, K. and Maki, H.. 1995. Semi-generalized Homeomorphisms and Generalized Semi-homeomorphisms in Topological Spaces. *Indian J. Rue App. Math*., 26 (3): 271-284.

[14] Sivaraj, D.. 1986. Semihomeomorphisms. *Acta Math. Hungar*, 48 (1-2): 139-145.

[15] Noiri, T.. 1984. A Note on Semi-homeomorphims. *Bull. Cal. Math. Soc*., 76: 1-3.

[16] Noiri, T. and Sayed, O. R.. 2005. On Ω-closed Sets and Ωs-closed Sets in Topological Spaces, *Acta Math. Hungar*, 107 (4): 307-318.

[17] Mrsevic, N. and Andrijevic, D.. 2002. On θ-connectedness and θ-closure Spaces. *Topology and its Appl*., 123: 157-166.

[18] Cao, J., Ganster, M. and Reilly, I.. 2002. On Generalized Closed Sets. *Topology and its Appl*., 123: 37-46.

[19] Cammaroto, F. and Noiri, T.. 2005. On Λ_m-sets and Related Topological Spaces. *Acta Math. Hungar*, 109 (3): 261-275.

[20] Das, P. and Rashid, M. M. A.. 2003. g^*-closed Sets and a New Separation Axion in Alexandroff Spaces. *Archivum Math*., 39: 299-307.

[21] Csaszar, A.. 1997. Generalized Open Sets. *Acta Math. Hungar*, 75 (1-2): 65-87.

[22] Csaszar, A.. 1998. On the γ-interior and γ-closure of a set. *Acta Math. Hungar*, 80 (1-2): 89-93.

[23] Al-Nashef, B.. 2002. A decomposition of α-continuity and Semi-continuity. *Acta Math. Hungar*, 97 (1-2): 115-120.

[24] Noiri, T.. 1982. A Function Which Preserves Connected Spaces. *Cosapis Pro Res. Mat.*, 107: 393-396.

[25] Baker, C. W.. 1996. On Preserving g-closed Sets. *Kyungpook Math*. 3., 36: 195-1996.

[26] Kohli, J. N.. 1980. A Unified Approad to Monotone extensions of Mappings. *Acta Math. Acad. Sci. Hunganicae*, 36 (1-2): 189-194.

[27] Csaszar, A.. 2002. Generalized Topology, Generalized Continuity. *Acta Math. Hungar*, 96 (4): 351-357.

[28] Noiri, T. and Jafari, S.. 2002. Properties of (θ, s)-continuous Functions. *Topology and its Appl,* 123: 167-179.

[29] Noiri,T. and Popa, V.. 2005. A Unified Theory for Strong θ-continuity for Functions. *Acta Math. Hungar*, 106 (3): 167-186.

[30] Mahmoud, F. S., Fath Alla, M. A. and Khalaf, M. M.. 2003. F_{μ}-strongly Semiopen Sets, F_{μ}-strong Semi Continuity and F_{μ}-strongly Seminetracts. *Applied Math. And Comp.*, 137: 209-230.

[31] Gauld, D. B., Mrsevic, M., Reilly, I. L. and Vamanamurthy, M. K.. 1984. Colinlelof Topologics and λ-continuous Functions. *Glasnik Mat.*, 19 (39): 297-308.

[32] Hosokawa, H.. 1997. Induneed Mappings on Hyperspaces. *Tsukuba J. Math.*, 21 (1): 239-250.

[33] Ganter, M. and Reilly, I. L.. 1989. Locally Closed Sets and LC-continuous Functions. *Int. J. Math. Sci.*, 3: 417-424.

[34] Mathur, A. and Deb, M.. 1972. A Note on Almost Continuous Mappings. *The Math. Sendent*, XL(2): 173-184.

[35] Malghan, S. R. and Navalagi, G. B.. 1990. Almost-p-regular, p-completely Regular and Almost p-completely Regular Spaces. *Bull Math*., 80 (4): 317-326.

[36] Crossley, S. G. and Hildebrand, S. N.. 1972. Semi Topological Properties. *Fund. Math*., 74: 233-254.

[37] Corson, H. H. and Michael, E.. 1964. Metnzability of Certain Countable Unions. *Illinois J. Math*., 8: 351-360.

[38] Popa, V.. 1987. Characterizations of H-almost Continuous Functions. *Glasnik Mat*., 22 (42): 157-161.

[39] Ahmad, B. and Noiri, T.. 1985. The Inverse Images of Hyperconnected Sets. *Mat. Vetnik*, 37: 177-181.

[40] Blumberg, H.. 1922. New Properties of all Real Functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 24: 113-128.

[41] Berner, A. J.. 1982. Almost Continuous Functions with Closed Graphs. *Canad. Math. Bull.*, 25: 428-434.

[42] Rose, A.. 1984. Weah Continuity and Almost Continuity. *Internat J. Math. Math. Sci.*, 7: 311-318.

ÖZGEÇMİŞ

1978 Çanakkale doğumluyum. 1984-1992 yıllarında Çanakkale Merkez Kumkale İlköğretim Okulunda okudum. Lise eğitimimi 1992-1995 yıllarında Çanakkale İbrahim Bodur Lisesinde tamamladım. 1996 yılında Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 1997 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne yatay geçiş yaptım. 2000 yılında mezun olup, aynı yıl Balıkesir ili Dursunbey ilçesi Sadullah Özer İlköğretim Okulunda matematik öğretmenliğine başladım. 2002 yılında Çanakkale ili Ezine ilçesi Geyikli Çok Programlı Lisesine atandım. Halen aynı okulda çalışmaktayım. 2006-2007 Eğitim-Öğretim yılında Çanakkale ili Yenice ilçesi Mehmet Bodur Lisesinde görevime devam edeceğim.