138979

SONLU ARALIKTA

İNTEGRALLENEMEYEN POTANSİYELE

SAHİP STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİN,

SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERİNE

GÖRE BELİRLENMESİ

Yaşar ÇAKMAK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2003

138979

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU ARALIKTA İNTEGRALLENEMEYEN POTANSİYELE SAHİP STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİN, SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERİNE GÖRE BELİRLENMESİ

Yaşar ÇAKMAK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2003

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:...Prof. Dr. Okay ÇELEBİ..

Üye :...Prof. Dr. Mehdi BALAYEV..

Üye :...Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV................................

Üye :...Prof. Dr. Rauf AMİROV..

Üye :...Doç Dr. Eşref ORUCOV..

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

04./04/2003

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Rauf AMİROV

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Doktora Tezi

SONLU ARALIKTA İNTEGRALLENEMEYEN POTANSİYELE SAHİP STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİN, SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERİNE GÖRE BELİRLENMESİ

Yaşar ÇAKMAK
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Bu çalışma II. mertebeden diferansiyel operatörlerin spektral teorisine aittir. Sunduğumuz çalışmada II. mertebeden singüler diferansiyel operatörlerin spektral karakteristikleri araştırılmıştır. Ayrıca verilen dizilere göre singüler Sturm-Liouville operatörlerin belirlenmesi ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

Kuantum mekaniğinde, singüler potansiyelli alanda parçacıkların hareketinin incelenmesi, Singüler Sturm-Liouville operatörlerin belirlenmesi problemlerinde önemli bir yer tutmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Operatör, Spektrum, Inverse Problem, Sturm-Liouville Operatör, İz (Trace)

SUMMARY

Ph.D Thesis

DETERMINATION OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS WHICH HAVE NONINTEGRABLE POTENTIAL IN FINITE INTERVAL ACCORDING TO THE SPECTRAL CHARACTERISTICS

Yaşar ÇAKMAK
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Rauf AMİROV

This study is belong to spectral theory of second order differential operators. Spectral characteristic of second order singular differential operators have been investigated. Moreover, according to given sequences, theorems which are related to determine of singular Sturm-Liouville operators have been proved.

In Quantum mecanics, investigation of movement of particals in potential field is so important to determinate of singular Sturm-Liouville operators.

Keywords: Operator, Spectrum, Inverse Problem, Sturm-Liouville Operator, Trace.

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Rauf AMİROV' a ve başta Arş. Gör. Selma GÜLYAZ olmak üzere tüm emeği geçenlere içten teşekkürlerimi sunarım.

GİRİŞ

Spektral analizin bir dalı olan ters problemler, yani spektral karakteristiklerine göre operatörlerin kurulması problemi fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin, mekanikte, verilen dalga boylarına göre homojen olmayan bir yayda yoğunluk dağılımının incelenmesinde, kuantum mekaniğinde, verilen enerji seviyelerine veya saçılma verilerine göre parçacıklar arasında etkileşmenin incelenmesinde, yeraltı madenlerinin aranması, v.b.

Bu yüzden verilen sistemin enerji seviyelerinin ve dalga fonksiyonlarının bulunması en önemli problemlerden biridir. Söz konusu problemler, verilen sistemin yerleştiği potansiyel alana bağlıdır. Farklı potansiyelli Schrödinger denklemleri için sınır-değer problemlerinin çözümlerinin bulunması, örneğin, Coulomb potansiyelli Schrödinger denklemleri gibi, problemlerinin çözümü, singüleriteye sahip Sturm-Liouville operatörleri için özdeğer problemlerine indirgenmektedir.

Ayrıca, sistemin enerji seviyeleri belli iken sistemin bulunduğu potansiyel alanı bulmak bir diğer önemli problemlerdir. Bu tip problemler, singüleriteye sahip Sturm-Liouville operatörleri için inverse problemler yardımıyla çözülmektedir.

Bu nedenle söz konusu operatörlerin spektral karakteristiklerine göre belirlenmesi çok büyük önem taşımaktadır.

Bu kısımda, II. mertebeden diferansiyel operatörlerin Spektral teorisinin tarihsel gelişimi verilecek ve daha sonra tezde alınan sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 0.1: $\ell(y) = -y'' + q(x)y$ diferansiyel ifadesi verilsin. Eğer, a ve b sonlu olmak üzere $x \in [a, b]$ ve $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirse $\ell(y)$ ifadesine **Regüler diferansiyel ifade** denir. Eğer, a ve b sayılarından herhangi biri ya da her ikisi de sonsuz ise veya $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenemezse ve ya da her iki durum birlikte söz konusu ise $\ell(y)$ ifadesine **Singüler diferansiyel ifade** denir.

Tanım 0.2: L bir lineer operatör olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ fonksiyonuna L operatörünün **özfonksiyonu** denir. λ ya ise L operatörünün $y(x)$ e karşılık gelen **özdeğeri** denir.

Tanım 0.3: $(L - I\lambda)^{-1}$ sınırlı tersinin olmadığı noktalar kümesine L operatörünün **spektrumu** denir ve $\sigma(L)$ ile gösterilir. $\sigma(L) = \{\lambda \mid Ly = \lambda y,\ y \in D(L)\}$

Tanım 0.4: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $\{y(x,\lambda_n)\}$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun.

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x,\lambda_n)dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 0.5: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine L operatörünün **spektral karakteristikleri** denir.

Tanım 0.6: L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerinin bulunması problemine **düz problem,** spektral karakteristikleri verildiğinde bu hangi Sturm-Liouville tipinde L diferansiyel operatörünün spektral karakteristikleri olduğu problemine ise **ters problem** denir.

Ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörlerin Spektral analizinde önemli bir yere sahiptir ve de fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V.A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 0.7: $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \quad (0 < x < \pi), \tag{0.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{0.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0,1,...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V.A. Ambartsumyan' ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler ve farklı problemler ortaya çıkmıştır. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G.Borg' a aittir ve elde ettiği sonuç, aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 0.8: $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (0.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{0.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$ ler ise (0.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \qquad (h \neq h_1) \tag{0.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.6}$$

sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. (h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılardır.)

Borg' un 1945 yılındaki çalışmasında [2], $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilir ve operatörü bu dizilerin yardımıyla belirtmektedir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilir. Borg, aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko [3] tarafından kaydedilmiştir. 1950 yılında V.A. Marchenko [3] ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (0.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \qquad \varphi'(0, \lambda) = h, \tag{0.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)dx \tag{0.8}$$

sayılarına verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonuna ise bu operatörün **spektral fonksiyonu** denir. V.A. Marchenko, Borg' un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada, $\rho(\lambda)$ fonksiyonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşulu verilmiştir. Marchenko' nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M.G. Krein [4], [5] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V.A. Marchenko' nun çalışması yayınlanmadan önce A.N. Tikhonov [6] tarafından V. A. Marchenko' nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A.N. Tikhonov çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 0.9: $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda\rho^2(x)U = 0, \qquad x > 0, \qquad U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ dır. $R(\lambda) = \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. O halde $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I.M. Gelfand ve B.M. Levitan çalışmasında [7], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Ayrıca, bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ ($\alpha_n > 0$) dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimptotik eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \cdots + \frac{a_{[\![\frac{m}{2}]\!]}}{n^{2[\![\frac{m}{2}]\!]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2[\![\frac{m}{2}]\!]+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \cdots + \frac{b_{[\![\frac{m}{2}]\!]}}{n^{2[\![\frac{m}{2}]\!]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2[\![\frac{m+1}{2}]\!]}},$$

burada $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\frac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek ise $\sum \left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektrumuna göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G. Gasimov' un çalışmasında [8] verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{0.9}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.9) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (0.9) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [8] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır, yani $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$ olsun.

2) λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3) $a_0 \neq a_0'$

Şimdi ise, singüler Sturm-Liouville operatörleriyle ilgili bazı sonuçlardan kısaca bahsedilecektir.

1965 yılında M. G. Gasimov' un makalesinde [13],

$$-y'' + \left\{\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + q(x)\right\} y = \lambda y \tag{0.10}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0, \tag{0.11}$$

$$y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0, \tag{0.12}$$

$$(y'(\pi) - H_2 y(\pi) = 0), \tag{0.12'}$$

sınır koşulları ile verilen diferansiyel operatörü incelenmiş ve bu diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü verilmiştir.

Teorem 0.10: ℓ pozitif tamsayı, $q(x) \in L_2[0,\pi]$ olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots$ ve $\mu_0, \mu_1, \cdots$ dizileri sırasıyla (0.10), (0.11), (0.12) ve (0.10), (0.11), (0.12$'$) tipindeki diferansiyel operatörlerin özdeğerleri olması için :

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) $\lambda_n = \left(n + \frac{\ell}{2}\right)^2 + a + a_n,$

$$\mu_n = \left(n + \frac{\ell}{2}\right)^2 + b + b_n,$$

asimptotik formülleri sağlansın, burada $a \neq b$ ve $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri öyle ki $\sum |a_n|^2$, $\sum |b_n|^2$ serileri yakınsaktır,

3) $\sum |c_n|^2$ serisi yakınsak olmak üzere $\mu_n - \lambda_n = b - a + \frac{c_n}{n}$

koşullarının sağlanması gerekli ve yeterli şarttır.

1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh Amirov çalışmasında [14] ,

$$-y'' + \left\{\frac{A}{x} + q(x)\right\} y = \lambda y \tag{0.13}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0, \tag{0.14}$$

$$y'(\pi) - h_1 y(\pi) = 0, \tag{0.15}$$

$$(y'(\pi) - h_2 y(\pi) = 0), \tag{0.15'}$$

sınır koşulları ile verilen diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü ile ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 0.11:$\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) $\lambda_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2c_0 + a_n,$

$\mu_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2c_0' + a_n',$

asimptotik formülleri sağlansın, burada $c_0 \neq c_0'$ ve $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri öyle ki $\sum |a_n|^2$, $\sum |a_n'|^2$ serileri yakınsaktır.

O halde bir $q(x)$ sürekli fonksiyonu ve h_1, h_2 gerçel sayıları vardır ki, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ (0.13), (0.14), (0.15) operatörünün, $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ ise (0.13), (0.14), (0.15$'$) operatörünün spektrumlarıdır ve

$$h_1 - h_2 = \pi(c_0' - c_0)$$

eşitliği sağlanır.

1992 yılında H.Hüseynov ve Z.M. Gasimov makalesinde [15],

$$-y'' + \left(\frac{\delta}{x^p} + q_0(x)\right) y = \lambda^2 y \tag{0.16}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{0.17}$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0 \tag{0.18}$$

$q_0(x) \in L_2[0,\pi]$, $p \in (1, 5/4)$, $\delta-$gerçel sayı olmak üzere diferansiyel operatörü incelenmiş ve bu tip diferansiyel operatörler için ters problemin çözümü ile ilgili teorem ispatlanmıştır:

Teorem 0.12: $\{\mu_k\}_{k\geq 0}$ ve $\{\gamma_k\}_{k\geq 0}$ gerçel sayı dizileri sırasıyla (0.16), (0.17) ve (0.16), (0.18) problemlerin spekturmları olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekli ve yeterlidir:

1) $-\infty < \gamma_1 < \mu_1 < \gamma_2 < \mu_2 < \ldots$ sıralı olmalıdır,

2) $\mu_k = k^2 + \frac{2\delta c_p}{\pi} k^{p-1} - 2A + a_k$

$$\gamma_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta c_p}{\pi}\left(k - \frac{1}{2}\right)^{p-1} - 2A + b_k$$

asimptotik formülleri sağlanmalıdır, burada

$c_p = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 \varsigma}{\varsigma} d\varsigma = \frac{2^{p-3}\pi}{(p-1)\Gamma(p-1)\sin\pi(\frac{p-1}{2})}$, A gerçel sayı, $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ dizileri öyle ki $\sum |a_k|^2$, $\sum |b_k|^2$ serileri yakınsaktır.

Literatürde Bessel potansiyelli singülar diferansiyel operatörlerle ilgili bir sıra çalışmalar mevcuttur. Bunlara örnek olarak V.A. Yurko' nun çalışması [16] gösterilebilir. V.A. Yurko çalışmasında, özellikle potansiyelin singülerite noktası aralığın herhangi bir iç noktasında olduğunda bu tip operatörler için ters problemlerin çözümleri verilmiştir.

$$-y'' + \left(\frac{\nu^2 - 1/4}{(x-\gamma)^2} + q(x)\right) y = \lambda y, \ (\lambda = \rho^2), \ 0 \leq x \leq \pi \tag{0.19}$$

diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Burada $x = \gamma$ noktası $(0,\pi)$ aralığının herhangi bir iç noktasıdır. (0.19) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - h_0 y(0) = 0 \tag{0.20}$$

$$y'(\pi) - h_1 y(\pi) = 0 \tag{0.21}$$

sınır koşullarının ürettiği operatör L olsun. V.A. Yurko bazı çalışmalarında L operatörü için ters problemin ne şekilde konulacağını incelemiş ve bu tip ters problemlerin çözümünde, Weyl fonksiyonu kavramından ve Z.L. Leibenzon yönteminden yararlanarak ilgili teoremleri ispatlanmıştır. Burada en önemli teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Teorem 0.13: $\{\lambda_k,\ \alpha_k\}_{k\geq 0}$, $\alpha_k \neq 0$ ve $\lambda_k \neq \lambda_n$ $(k \neq n)$ dizilerinin L operatörünün spektral karakteristikleri olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekli ve yeterlidir.

1) Öyle bir $\widetilde{L}$ operatörü mevcuttur ki, $a = \widetilde{a}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\rho_k \alpha_k| \, \xi_k < \infty$,

2) Her bir $x \neq \gamma$ için $E + \widetilde{H}(x) : m \to m$ operatörü sınırlı terse sahiptir,

3) $\chi'(x)\, |x-\gamma|^{1-2\,\mathrm{Re}\,\nu} \in L_1(0,\pi)$,

burada $\chi(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_{k0}\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}(x) - \alpha_{k1}\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi_{k1}(x)\right)$.

Bu koşullar sağlandığında L operatörü,

$$p(x) = \widetilde{p}(x) - 2\chi'(x)$$

$$h_0 = \widetilde{h}_0 + \chi(0),\ h_1 = \widetilde{h}_1 + \chi(\pi)$$

formülleri yardımıyla kurulur. Burada, $p(x) = \dfrac{\nu^2 - 1/4}{(x-\gamma)^2} + q(x)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$.

Sonlu aralıkta integrallenemeyen potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörleri için düz ve ters spektral problemlerin araştırıldığı bu tezde aşağıdaki yol izlenmiştir.

Birinci bölümde, sonlu aralıkta integrallenemeyen potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörleri için düz problem araştırıldı.

1.1. alt bölümünde L_1 operatörünün çözümünün varlığı ve tekliği gösterildi.

$$\ell(y) := -y'' + \left\{\frac{A}{x} + \frac{\delta}{x^p} + q(x)\right\} y \tag{0.22}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y(0) = 0\ , \qquad y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0 \tag{0.23}$$

$$y(0) = 0\ , \qquad y'(\pi) - H_2 y(\pi) = 0 \tag{0.23'}$$

$D(L_1) = \{y(x):\ y(x) \in W_2^2[0,\pi],\ \ell(y) \in L_2[0,\pi],\ q(x) \in W_2^2[0,\pi],\ y(0) = 0,$ $y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0\}$ olmak üzere sınır koşullarının ürettiği diferansiyel operatör L_1 (L_2) olsun. Burada A, H_1, H_2 ve δ gerçel sayılar ve $p \in (1,2)$ dir.

Tanım 0.14: $W_2^n[a,b] = \{f(x) \mid f^{(k)}(x) \in AC[a,b],\ k = \overline{0,\ n-1},\ f^{(n)} \in L_2[a,b]\}$.

$\varphi(x,\rho)$ fonksiyonu,

$$\ell\left[\varphi(x,\rho)\right] = \rho^2 \varphi(x,\rho),\ \lambda = \rho^2 \tag{0.24}$$

diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\rho) = 0,\ \ \varphi'(0,\rho) = \rho \tag{0.25}$$

koşullarını sağlayan çözümü olsun.

(0.24), (0.25) probleminin bir tek çözümünün olduğu ispatlandı.

1.2 alt bölümünde, L_1 operatörünün özdeğerlerinin, özfonksiyonlarının ve normalleştirici sayılarının asimptotik formülleri verildi.

$$\Delta(\rho) := \varphi'(\pi,\rho) - H_1 \varphi(\pi,\rho)$$

olmak üzere, L_1 operatörünün ρ_n özdeğerleri $\Delta(\rho) = 0$ denkleminden bulundu.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\rho_n)dx, \qquad n = 0,1,\cdots$$

sayılarına L_1 operatörünün **normalleştirici sayıları** denir.

Dolayısıyla, n'nin yeteri kadar büyük değerleri için L_1 operatörünün ρ_n özdeğerleri, $\varphi(x,\rho_n)$ özfonksiyonları ve α_n normalleştirici sayıları için aşağıdaki asimptotik formüller elde edildi:

$$\rho_n = (n+1/2) + \frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} + \frac{c_2}{(n+1/2)} + \frac{c_7}{(n+1/2)^{4-2p}}$$
$$+ c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_8}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_{10}}{(n+1/2)^2} + \frac{c_{31}}{(n+1/2)^{6-3p}} + c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}}$$
$$+ \frac{c_{32}}{(n+1/2)^{5-2p}} + c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + c_{33}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + \frac{c_{34}}{(n+1/2)^{4-p}}$$

$$-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+c_{17}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+c_{35}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+\frac{c_{19}}{(n+1/2)^3}+O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right)$$

$$\varphi(x,\rho_n)=\sin(n+1/2)x+\frac{\delta M_1}{2}\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{\delta c_p}{\pi}(x-\pi)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)^{2-p}}$$
$$+\frac{A\pi}{4}\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)}+\frac{A}{2\pi}(x-\pi)\cos(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)}$$
$$+a_1(x)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)}+a_2(x)\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)^{4-2p}}+a_3(x)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)^{4-2p}}$$
$$+a_4(x)\sin(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+a_5(x)\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)^{3-p}}$$
$$+a_6(x)\cos(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+a_7(x)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)^{3-p}}$$
$$-\frac{A^2x}{8\pi^2}(x-\pi)\sin(n+1/2)x\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+a_8(x)\sin(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+a_9(x)\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)^2}+a_{10}(x)\cos(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+a_{11}(x)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)$$

$$\alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\delta M_1\pi}{2}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)}+\frac{b_1}{(n+1/2)^{4-2p}}+\delta c_pA\pi\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}$$
$$+\frac{b_2}{(n+1/2)^{3-p}}+b_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+b_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+\frac{b_5}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)$$

İkinci bölümde, $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ özdeğerleri dizisi ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayıları dizisine göre ters problemin çözümü verildi.

2.1 alt bölümünde, $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral karakteristiklerinden yararlanarak

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\rho_n)\varphi_0(t,\rho_n)-\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(x,\rho_n^0)\varphi_0(t,\rho_n^0)\right]$$

geçici fonksiyonu oluşturuldu ve onun özellikleri araştırıldı. Burada $\{\alpha_n^0\}_{n\geq 0}$ lar ile L_1 operatörünün $q(x)\equiv 0$ durumuna karşılık gelen operatörün normalleştirici sayıları gösterildi. $F(x,t)$ fonksiyonunun x ve t değişkenlerine göre sürekli türevlenebilir olduğu ispatlandı. Ayrıca, bu alt bölümde $F(x,t)$ fonksiyonunun yardımıyla,

$$F(x,t)+K(x,t)+\int_0^x K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi=0 \qquad (0.26)$$

integral denklemi kuruldu.

2.2 alt bölümünde, (0.26) integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği ispat edildi. Ayrıca, bu bölümde $K(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesinin $F(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesine eşit olduğu gösterildi.

2.3 alt bölümünde, $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümünü veren aşağıdaki teorem ispatlandı.

Teorem 2.3.3: Eğer her $n\in N$ için $\alpha_n>0$, $n\neq m$ olduğunda $\lambda_n\neq\lambda_m$, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$' ler gerçel ve

$$\begin{aligned}\rho_n &= (n+1/2)+\frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)}+\frac{c_2}{(n+1/2)}+\frac{c_7}{(n+1/2)^{4-2p}}\\ &+c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+\frac{c_8}{(n+1/2)^{3-p}}+\frac{c_{10}}{(n+1/2)^2}+\frac{c_{31}}{(n+1/2)^{6-3p}}+c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}}\\ &+\frac{c_{32}}{(n+1/2)^{5-2p}}+c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}}+c_{33}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}}+\frac{c_{34}}{(n+1/2)^{4-p}}\\ &-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+c_{17}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+c_{35}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+\frac{c_{19}}{(n+1/2)^3}+O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{\pi}{2}+\frac{\delta M_1\pi}{2}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)}+\frac{b_1}{(n+1/2)^{4-2p}}+\delta c_pA\pi\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}\\ &+\frac{b_2}{(n+1/2)^{3-p}}+b_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+b_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+\frac{b_5}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)\end{aligned}$$

asimptotik formülleri sağlanırsa, spektral karakteristikleri $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ olan L_1 tipinde operatör vardır. Burada c_i, b_i' ler bilinen sabitlerdir.

Ayrıca,

$$q(x)=2\frac{dK(x,x)}{dx}.$$

Tezin üçüncü bölümünde, L_1 ve L_2 operatörlerinin spektrumuna göre ters problem araştırıldı. $\mu_0<\mu_1<\ldots$ ler L_2 operatörünün özdeğerlerini göstermektedir.

3.1 alt bölümünde, α_n normalleştirici sayılarını $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ spektrumları ile ifade eden

$$\alpha_n = \alpha_n^0 \frac{\lambda_n-\mu_n}{\lambda_n^0-\mu_n^0}\frac{\lambda_n-\lambda_0}{\lambda_n^0-\lambda_0^0}\frac{\lambda_n-\mu_0}{\lambda_n^0-\mu_0^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} \tag{0.27}$$

eşitliği ispatlandı. Burada $\{\mu_n^0\}_{n\geq 0}$ lar ile L_2 operatörünün $q(x)\equiv 0$ durumuna karşılık gelen operatörün özdeğerleri dizisidir.

3.2 alt bölümünde, λ_n ve μ_n' nin asimptotik formüllerinden yararlanarak (0.27) eşitliğinin yardımıyla α_n normalleştirici sayıların asimptotik formülü bulundu:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{\pi}{2}+\frac{\delta M_1\pi}{2}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)} \\
&+\left[b_1+\frac{\pi}{2}\left(\frac{c_5^0-c_5'^0}{c_2^0-c_2'^0}\right)^2-\frac{\pi}{2}\frac{c_5-c_5'}{c_2-c_2'}\frac{c_5^0-c_5'^0}{c_2^0-c_2'^0}\right]\frac{1}{(n+1/2)^{4-2p}} \\
&+A\delta c_p\pi\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+\left[b_2^0+\frac{c_1\pi\left(\pi^2-6\right)}{3}\left((c_2-c_2^0)+(c_2'-c_2'^0)\right)\right. \\
&\left.+\frac{\pi}{4}\frac{\gamma_3-\gamma_3'}{(c_2-c_2')}-\frac{\pi}{4}\frac{\gamma_3^0-\gamma_3'^0}{(c_2^0-c_2'^0)}\right]\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}}+b_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+\left[b_4^0+\frac{A(3\pi^2-4)}{12}\left((c_2-c_2^0)+(c_2'-c_2'^0)\right)\right]\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+\left[\frac{\pi}{2}\left(M_\lambda+M_\mu\right)+b_5^0+\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{A\ln(3/2)}{3}\right)\left((c_2-c_2^0)+(c_2'-c_2'^0)\right)\right. \\
&+2\pi(c_2-c_2^0)+\frac{\pi}{2}\left((\lambda_0^0-\lambda_0)+(\mu_0^0-\mu_0)\right)-\frac{\pi^3}{6}\left((c_2-c_2^0)^2+(c_2'-c_2'^0)^2\right) \\
&+\frac{3^{p-1}\pi}{2^p}\left((c_5-c_5^0)+(c_5'-c_5'^0)\right)+\frac{\pi}{2^{2p-1}3^{3-2p}}\left((\gamma_1-\gamma_1^0)+(\gamma_1'-\gamma_1'^0)\right) \\
&+\frac{\pi\ln(3/2)}{2^p3^{2-p}}\left((\gamma_2-\gamma_2^0)+(\gamma_2'-\gamma_2'^0)\right)+\frac{\pi}{2^p3^{2-p}}\left((\gamma_3-\gamma_3^0)+(\gamma_3'-\gamma_3'^0)\right) \\
&\left.+\frac{\pi}{4}\frac{\gamma_6-\gamma_6'}{(c_2-c_2')}-\frac{\pi}{4}\frac{\gamma_6^0-\gamma_6'^0}{(c_2^0-c_2'^0)}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{7-4p}}\right)
\end{aligned}$$

burada,

$$M_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda_k - \lambda_k^0 - 2(c_2 - c_2^0) - \frac{2(c_5 - c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}} - \right.$$
$$\left. -(\gamma_2 - \gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}} - \frac{(\gamma_3 - \gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\},$$

$$M_\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\mu_k - \mu_k^0 - 2(c_2' - c_2'^0) - \frac{2(c_5' - c_5'^0)}{(k+1/2)^{2-p}} - \frac{(\gamma_1' - \gamma_1'^0)}{(k+1/2)^{4-2p}} - \right.$$
$$\left. -(\gamma_2' - \gamma_2'^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}} - \frac{(\gamma_3' - \gamma_3'^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\}.$$

3.3 alt bölümünde, iki spektruma göre ters problemin çözümü verildi.

$$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$$

$$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$$

gerçel sayı dizileri verilmiş olsun ve n'in yeteri kadar büyük değerleri için λ_n ve μ_n ' ler

$$\begin{aligned}\lambda_n &= (n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) + 2c_2 \\ &+ \frac{2c_3}{(n+1/2)^{3-2p}} + 2c_4\frac{\ln(n+12/2)}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_5}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_{10}}{(n+1/2)} \\ &+ \frac{2c_6}{(n+1/2)^{5-3p}} + 2c_7\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-2p}} + \frac{\gamma_1}{(n+1/2)^{4-2p}} \\ &- \frac{A^2\delta c_p}{2\pi}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \gamma_2\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{\gamma_3}{(n+1/2)^{3-p}} \\ &- \frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \gamma_4\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \gamma_5\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\ &+ \frac{\gamma_6}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{7-4p}}\right)\end{aligned} \tag{0.28}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_n &= (n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) + 2c_2' \\ &+ \frac{2c_3}{(n+1/2)^{3-2p}} + 2c_4\frac{\ln(n+12/2)}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_5'}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_{10}'}{(n+1/2)} \\ &+ \frac{2c_6}{(n+1/2)^{5-3p}} + 2c_7\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-2p}} + \frac{\gamma_1'}{(n+1/2)^{4-2p}}\end{aligned} \tag{0.29}$$

$$-\frac{A^2\delta c_p}{2\pi}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+\gamma_2'\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+\frac{\gamma_3'}{(n+1/2)^{3-p}}$$
$$-\frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+\gamma_4'\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+\gamma_5'\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+\frac{\gamma_6'}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{7-4p}}\right).$$

asimptotik formüllere sahiptir, burada

$$c_2=\frac{1}{\pi}\left(-H_1+\frac{A\ln\pi}{2}+AM_5+\frac{\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}}+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right)$$
$$c_2'=\frac{1}{\pi}\left(-H_2+\frac{A\ln\pi}{2}+AM_5+\frac{\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}}+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right)$$

Bu alt bölümünde aşağıdaki teorem ispatlandı.

Teorem 3.3.1: Aşağıdaki koşulları sağlayan $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş olsun:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) λ_n ve μ_n ler için (0.28) ve (0.29) asimptotik formülleri ve $c_2\neq c_2'$ doğrudur.

O halde sürekli $q(x)$ fonksiyonu ve öyle A, H_1, H_2 gerçel sayıları vardır ki, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, L_1 operatörünün spektrumu, $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ ise L_2 operatörünün spektrumudur. Ayrıca,

$$H_1-H_2=\pi(c_2'-c_2)$$

şeklindedir.

3.4 alt bölümünde, L_1 operatörünün regülerize izi hesaplandı. $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ile L_1 operatörünün $q(x)\equiv 0$ olduğu duruma karşılık gelen özdeğerleri gösterilsin. O halde,

$$M_\lambda=\frac{q(\pi)-q(0)}{4}+\frac{A}{4\pi}+\frac{\delta}{4\pi^p}-\frac{H}{2}\int_0^\pi q(t)dt-\frac{H\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}}$$
$$+AH\alpha_3-\frac{AH\ln\pi}{2}-\frac{AH\alpha_1}{2}-\frac{c_2^2\pi^2}{2}-\left(2^{2-p}-\frac{3^p}{2^{p-1}p}\right)c_1 \qquad (0.30)$$
$$-\frac{A}{\pi}\left(\frac{3}{2}(1+\ln(3/2))-\ln 2\right)+c_2-\left(2^{4-2p}-\frac{9^{p-1}}{2^{2p-2}(p-1)}\right)c_7$$

$$
\begin{aligned}
&-\left[\frac{3^{p-1}}{2^{p-2}}\left(\ln(3/2)+\frac{1}{(p-1)^2}\right)-2^{3-p}\ln 2\right]c_4-\left[4-2\ln(3/2)\right]c_{10}\\
&-\left[2^{3-p}-\frac{3^{p-1}}{2^{p-2}(p-1)}\right]c_8-\left[2^{6-3p}-\frac{3^{3p-4}}{2^{3p-5}(3p-4)}\right]c_{31}\\
&-\left[\frac{3^{2p-3}}{2^{2p-4}}\left(\frac{2\ln(3/2)}{(3-p)}+\frac{1}{(3-p)^2}\right)-2^{5-2p}\ln 2\right]c_{12}+2^{3-p}\ln 2\gamma_2\\
&-2^{3-p}\gamma_3-\frac{A^3}{3\pi}\ln^3 2-\left[2^{4-2p}+\frac{3^{2p-3}}{2^{2p-3}(3-2p)}\right]\gamma_1\\
&-\left[4\ln^2 2+\frac{2\ln^2(3/2)+4\ln(3/2)+4}{3}\right]\gamma_4+2^{3-p}\ln^2 2c_{14}\\
&+\frac{A^3}{12\pi}\left(\frac{2\ln^2(3/2)}{3}+6\ln(3/2)+4\right)-\left[\frac{2}{3}\left(1+\ln(3/2)\right)-4\ln 2\right]\gamma_5
\end{aligned}
$$

formülü alınır.

Teorem 3.4.1: $p\in(1,5/4)$ olmak üzere L_1 operatörünün regülerize izi için (0.30) formülü doğrudur.

I. BÖLÜM

SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERİN HESAPLANMASI
(DÜZ PROBLEM)

1.1. Singüler Sturm-Liouville Problemin Çözümlerinin Davranışı

L operatörü

$$L : \begin{cases} -y'' + \left\{ \dfrac{A}{x} + \dfrac{\delta}{x^p} + q(x) \right\} y = \lambda y, \quad \lambda = \rho^2, 0 < x < \pi & (1.1.1) \\ y(0) = 0 & (1.1.2) \\ y'(\pi) - Hy(\pi) = 0 & (1.1.3) \end{cases}$$

olsun. Burada $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$, A, H, δ gerçel sayılar ve $p \in (1,2)$ dir.

$\varphi(x,\rho)$ ile (1.1.1) denkleminin $\varphi(0,\rho) = 0$ ve $\varphi'(0,\rho) = \rho$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin. Bu durumda $\varphi(x,\rho)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,\rho) = \sin \rho x + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} \left\{ \frac{A}{t} + \frac{\delta}{t^p} + q(t) \right\} \varphi(t,\rho) dt$$

integral denklemini sağlamaktadır. Ardışık yaklaşımlar metoduyla bu integral denklemin varlığı ve tekliği gösterilebilir. Bunun için ;

$$\varphi_0(x,\rho) = \sin \rho x \text{ ve } \varphi_k(x,\rho) = \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} Q(t) \varphi_{k-1}(t,\rho) dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

şeklinde alınırsa, $Q(t) := \dfrac{A}{t} + \dfrac{\delta}{t^p} + q(t)$, $x > 0$, $\operatorname{Im} \rho \geq 0$ için

$$|\varphi_0(x,\rho)| = |\sin \rho x| = \left| \rho \frac{e^{i\rho x} - e^{-i\rho x}}{2i\rho} \right| = \left| \frac{\rho}{2} \int_{-x}^{x} e^{i\rho t} dt \right| dt \leq \left| \frac{\rho}{2} \right| \int_{-x}^{x} \left| e^{i\rho t} \right| dt = |\rho| \, x$$

Yani, $\varphi_0(x,\rho) \leq |\rho| \, x$ dir.

$$k = 1 \text{ için, } \varphi_1(x,\rho) = \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} Q(t) \varphi_0(t,\rho) dt$$

olduğundan,

$$|\varphi_1(x,\rho)| \leq \int_0^x (x-t) \, |Q(t)| \, |\rho| \, t dt \leq |\rho| \, x \int_0^x t \, |Q(t)| \, dt$$

olur. Burada $\sigma(x) := \int\limits_0^x t\,|Q(t)|\,dt$ işaretlenirse,

$$|\varphi_1(x,\rho)| \le |\rho|\, x\sigma(x)$$

elde edilir.

$k=2$ için, $\varphi_2(x,\rho) = \int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} Q(t)\varphi_1(t,\rho)dt$

olduğundan,

$|\varphi_2(x,\rho)| \le \int\limits_0^x (x-t)\,|Q(t)|\,|\rho|\,t\sigma(t)dt \le |\rho|\,x \int\limits_0^x \sigma(t)t\,|Q(t)|\,dt = |\rho|\,x \int\limits_0^x \sigma(t)d\sigma(t)$

olur. Buradan, $|\varphi_2(x,\rho)| \le |\rho|\,x\frac{\sigma^2(x)}{2!}$ olur.

Benzer şekilde devam edilirse, $k=n$ için $|\varphi_n(x,\rho)| \le |\rho|\,x\frac{\sigma^n(x)}{n!}$ eşitsizliği doğru olsun. $k=n+1$ için doğru mu?

$\varphi_{n+1}(x,\rho) = \int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} Q(t)\varphi_n(t,\rho)dt$

olduğundan

$\left|\varphi_{n+1}(x,\rho)\right| \le \int\limits_0^x (x-t)\,|Q(t)|\,|\rho|\,t\frac{\sigma^n(t)}{n!}dt \le \frac{|\rho|\,x}{n!}\int\limits_0^x \sigma^n(t)d\sigma(t)$

şeklindedir. Buradan,

$$\left|\varphi_{n+1}(x,\rho)\right| \le |\rho|\,x\frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

elde edilir. Böylece her $n=1,2,\ldots$ için,

$$|\varphi_n(x,\rho)| \le |\rho|\,x\frac{\sigma^n(x)}{n!}$$

eşitsizliği doğrudur. $0 \le x \le \pi$ olduğundan

$$|\varphi_n(x,\rho)| \le |\rho|\,x\frac{\sigma^n(x)}{n!} \le |\rho|\,\pi\frac{\sigma^n(\pi)}{n!}$$

alınır. Dolayısıyla,

$$\varphi(x,\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x,\rho) \le \sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n(x,\rho)| \le |\rho|\,\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma^n(\pi)}{n!}$$

serisi elde edilir. Bu seri Weierstrass testinin koşullarını sağladığından $[0,\pi]$ aralığında düzgün yakınsaktır. O halde varlık-teklik teoremine göre $\varphi(0,\rho)=0$ ve $\varphi'(0,\rho)=\rho$ başlangıç koşullarını sağlayan $\varphi(x,\rho)$ fonksiyonu var ve tektir.

$x>0$ için ρ' nun yeterince büyük değerlerinde $\varphi(x,\rho)$ fonksiyonunun davranışı için

$$\begin{aligned}\varphi(x,\rho) &= \sin\rho x+\frac{\delta M_1}{2}\frac{\sin\rho x}{\rho^{2-p}}-\delta c_p\frac{\cos\rho x}{\rho^{2-p}}+\frac{A\pi}{4}\frac{\sin\rho x}{\rho}-\xi_1(x)\frac{\cos\rho x}{\rho}\\ &-\frac{A}{2}\frac{\cos\rho x}{\rho}\ln\rho x+\frac{\delta^2M_1}{4}\frac{\sin\rho x}{\rho^{4-2p}}-\xi_2\frac{\cos\rho x}{\rho^{4-2p}}+\xi_3\frac{\sin\rho x}{\rho^{3-p}}-\xi_4(x)\frac{\cos\rho x}{\rho^{3-p}}\\ &+\xi_5(x)\frac{\sin\rho x}{\rho^2}+\xi_6(x)\frac{\cos\rho x}{\rho^2}-\frac{A^2\pi}{8}\frac{\cos\rho x}{\rho^2}\ln\rho x+\frac{A\delta M_1}{8x}\frac{\sin\rho x}{\rho^{4-p}}\\ &-\frac{\delta^2M_1}{8x^p}\frac{\sin\rho x}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho x+\xi_7(x)\frac{\cos\rho x}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho x+O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

elde edilir. Burada,

$$\xi_1(x):=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt+AM_2-\frac{\delta}{2(p-1)x^{p-1}},$$

$$\xi_2:=\frac{A\delta M_1}{4(p-1)}+\frac{\delta^2M_1c_p}{2}-\frac{\delta^2M_3}{2}, \qquad \xi_3:=\frac{3A\delta M_1\pi}{8},$$

$$\xi_4(x):=\frac{A\delta\left(M_1+2M_1M_2-2N_1M_1-M_1\pi\right)}{4}-\frac{\delta^2M_1}{4(p-1)x^{p-1}},$$

$$\xi_5(x):=\frac{q(x)+q(0)}{4}+\frac{A}{4x}+\frac{\delta}{4x^p}+\frac{A^2\pi^2}{16}-A^2I_1-A\delta I_2-A\delta I_3-\delta^2I_4,$$

$$\xi_6(x):=\frac{A^2N_1\pi}{4}-\frac{A^2M_2\pi}{4}+\frac{A\delta I_5}{2}+\frac{A\delta\pi}{8(p-1)x^{p-1}},$$

$$\xi_7(x):=\frac{A\delta}{2}\left(\frac{1}{4(p-1)x^p}-\frac{c_p}{2x}\right)-\frac{\delta^2c_p}{4x^p},$$

$$M_1:=\frac{\rho^{p-1}\pi}{2^{2-p}\Gamma(p)\sin\frac{p\pi}{2}} \text{ ve } M_2:=\frac{\sin 2}{4}+N_1$$

şeklindedir.

1.2. Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Özdeğerlerinin Davranışı

$$\varphi(x,\rho): \qquad \varphi(0,\rho)=0 \quad , \quad \varphi'(0,\rho)=\rho$$

$$\psi(x,\rho): \qquad \psi(\pi,\rho)=1 \quad , \quad \psi'(\pi,\rho)=H$$

fonksiyonları (1.1.1) diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Yukarıdaki koşulları sağlayan $\psi(x,\rho)$ çözümünün varlığı ve $\varphi(x,\rho)$ çözümü ile lineer bağımsız olduğu, ayrıca $\varphi(x,\rho)$ ve $\psi(x,\rho)$ fonksiyonlarının ρ parametresine göre tam analitik fonksiyonlar olduğu R.Carlson' un çalışmasında [19] gösterilmiştir.

Tanım 1.2.1: $\Delta(\rho) := \psi'(x,\rho)\varphi(x,\rho)-\psi(x,\rho)\varphi'(x,\rho)$ fonksiyonuna L operatörünün **karakteristik fonksiyonu** denir.

(1.1.4) ifadesinin x 'e göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}
\varphi'(x,\rho) &= \rho\cos\rho x + \frac{\delta M_1}{2}\frac{\cos\rho x}{\rho^{1-p}} + \delta c_p\frac{\sin\rho x}{\rho^{1-p}} + \frac{A\pi}{4}\cos\rho x \\
&+\xi_1(x)\sin\rho x + \frac{A}{2}\sin\rho x\ln\rho x + \frac{\delta^2 M_1}{4}\frac{\cos\rho x}{\rho^{3-2p}} + \xi_2\frac{\sin\rho x}{\rho^{3-2p}} \\
&+\xi_3\frac{\cos\rho x}{\rho^{2-p}} + \xi_4(x)\frac{\sin\rho x}{\rho^{2-p}} - \left[\frac{q(x)}{2} + \frac{\delta}{2x^p} - \frac{A}{2x} - \xi_5(x)\right]\frac{\cos\rho x}{\rho} \\
&-\xi_6(x)\frac{\sin\rho x}{\rho} + \frac{A^2\pi}{8}\frac{\sin\rho x}{\rho}\ln\rho x - \left[\frac{\delta^2 M_1}{4x^p} - \frac{A\delta M_1}{8x}\right]\frac{\cos\rho x}{\rho^{3-p}} \\
&-\frac{\delta^2 M_1}{8x^p}\frac{\cos\rho x}{\rho^{3-p}}\cos 2\rho x + \frac{\delta^2 M_1}{4x^p}\frac{\sin\rho x}{\rho^{3-p}}\sin 2\rho x \\
&-\xi_7(x)\frac{\sin\rho x}{\rho^{3-p}}\cos 2\rho x - 2\xi_7(x)\frac{\cos\rho x}{\rho^{3-p}}\sin 2\rho x \\
&-\left[\frac{A\delta\pi}{8x^p} + \frac{A^2\pi}{8x}\right]\frac{\cos\rho x}{\rho^2} + \left[\frac{q'(x)}{4} - \frac{A}{4x^2} - \frac{\delta p}{4x^{p+1}}\right]\frac{\sin\rho x}{\rho^2} \\
&-\frac{A\delta M_1}{8x^2}\frac{\sin\rho x}{\rho^{4-p}} + \frac{\delta^2 M_1 p}{8x^{p+1}}\frac{\sin\rho x}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho x \\
&+\left[\frac{A\delta c_p}{4x^2} - \frac{A\delta p}{8(p-1)x^{p+1}} + \frac{\delta^2 p c_p}{4x^{p+1}}\right]\frac{\cos\rho x}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho x + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

ifadesi bulunur. Tanım 1.2.1 gereği L operatörünün karakteristik fonksiyonu için, $\Delta(\rho) = \varphi'(\pi,\rho) - H\varphi(\pi,\rho) =$

$$= \rho\cos\rho\pi + \frac{\delta M_1}{2}\rho^{p-1}\cos\rho\pi + \delta c_p\rho^{p-1}\sin\rho\pi + \frac{A\pi}{4}\cos\rho\pi + \xi_1(\pi)\sin\rho\pi$$
$$+ \frac{A}{2}\sin\rho\pi\ln\rho\pi + \frac{\delta^2 M_1}{4}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-2p}} + \xi_2\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{3-2p}} + \xi_3\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{2-p}} + \xi_4(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{2-p}}$$
$$- \left[\frac{q(\pi)}{2} + \frac{\delta}{2\pi^p} - \frac{A}{2\pi} - \xi_5(\pi)\right]\frac{\cos\rho\pi}{\rho} - \xi_6(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \frac{A^2\pi}{8}\frac{\sin\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi$$
$$- \left[\frac{\delta^2 M_1}{4\pi^p} - \frac{A\delta M_1}{8\pi}\right]\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-p}} - \frac{\delta^2 M_1}{8\pi^p}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-p}}\cos 2\rho\pi + \frac{\delta^2 M_1}{4\pi^p}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{3-p}}\sin 2\rho\pi$$
$$- \xi_7(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{3-p}}\cos 2\rho\pi - 2\xi_7(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-p}}\sin 2\rho\pi - \left[\frac{A\delta\pi}{8\pi^p} + \frac{A^2\pi}{8\pi}\right]\frac{\cos\rho\pi}{\rho^2}$$
$$+ \left[\frac{q'(\pi)}{4} - \frac{A}{4\pi^2} - \frac{\delta p}{4\pi^{p+1}}\right]\frac{\sin\rho\pi}{\rho^2} - \frac{A\delta M_1}{8\pi^2}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-p}} + \frac{\delta^2 M_1 p}{8\pi^{p+1}}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho\pi$$
$$+ \left[\frac{A\delta c_p}{4\pi^2} - \frac{A\delta p}{8(p-1)\pi^{p+1}} + \frac{\delta^2 p c_p}{4\pi^{p+1}}\right]\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho\pi - H\sin\rho\pi - \frac{H\delta M_1}{2}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{2-p}}$$
$$+ H\delta c_p\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{2-p}} - \frac{HA\pi}{4}\frac{\sin\rho\pi}{\rho} + H\xi_1(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho} + \frac{AH}{2}\frac{\cos\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi - \frac{\delta^2 H M_1}{4}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-2p}}$$
$$+ H\xi_2\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{4-2p}} - H\xi_3\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{3-p}} + H\xi_4(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-p}} - H\xi_5(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^2} - H\xi_6(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^2}$$
$$+ \frac{A^2 H\pi}{8}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi - \frac{A\delta H M_1}{8\pi}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-p}} + \frac{\delta^2 H M_1}{8\pi^p}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho\pi$$
$$- H\xi_7(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho\pi + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)$$

ifadesi elde edilir.

Tanım 1.2.2: $\Delta(\rho) = 0$ denklemine L operatörünün **karakteristik denklemi** denir.

Buradan Tanım 1.2.2 gereği verilen operatörün karakteristik denklemi,

$$\Delta(\rho) = \rho\cos\rho\pi + \frac{\delta M_1}{2}\rho^{p-1}\cos\rho\pi + \delta c_p\rho^{p-1}\sin\rho\pi + \frac{A\pi}{4}\cos\rho\pi + \beta_1(\pi)\sin\rho\pi$$
$$+ \frac{A}{2}\sin\rho\pi\ln\rho\pi + \frac{\delta^2 M_1}{4}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-2p}} + \xi_2\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{3-2p}} + \beta_2(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{2-p}} + \beta_3(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{2-p}}$$
$$-\beta_4(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho} - \beta_5(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \frac{A^2\pi}{8}\frac{\sin\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi + \frac{AH}{2}\frac{\cos\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi - \frac{\delta^2 H M_1}{4}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-2p}}$$
$$+ H\xi_2\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{4-2p}} - \beta_6(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-p}} - H\xi_3\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{3-p}} - \frac{\delta^2 M_1}{8\pi^p}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-p}}\cos 2\rho\pi$$
$$+ \frac{\delta^2 M_1}{4\pi^p}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{3-p}}\sin 2\rho\pi - \xi_7(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{3-p}}\cos 2\rho\pi - 2\xi_7(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-p}}\sin 2\rho\pi$$

$$-\beta_7(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^2}+\beta_8(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A^2H\pi}{8}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi-\beta_9(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-p}}$$
$$+\beta_{10}(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho\pi+\beta_{11}(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho\pi+O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)=0$$

şeklinde elde edilir. $\rho\neq 0$ için

$$\cos\rho\pi+\frac{\delta M_1}{2}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{2-p}}+\delta c_p\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{2-p}}+\frac{A\pi}{4}\frac{\cos\rho\pi}{\rho}+\beta_1(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho}$$
$$+\frac{A}{2}\frac{\sin\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi+\frac{\delta^2M_1}{4}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{4-2p}}+\xi_2\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-2p}}+\beta_2(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{3-p}}+\beta_3(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{3-p}}$$
$$-\beta_4(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^2}-\beta_5(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A^2\pi}{8}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi+\frac{AH}{2}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi-\frac{\delta^2HM_1}{4}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{5-2p}}$$
$$+H\xi_2\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{5-2p}}-\beta_6(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{4-p}}-H\xi_3\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-p}}-\frac{\delta^2M_1}{8\pi^p}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho\pi$$
$$+\frac{\delta^2M_1}{4\pi^p}\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-p}}\sin 2\rho\pi-\xi_7(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{4-p}}\cos 2\rho\pi-2\xi_7(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{4-p}}\sin 2\rho\pi$$
$$-\beta_7(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^3}+\beta_8(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^3}+\frac{A^2H\pi}{8}\frac{\cos\rho\pi}{\rho^3}\ln\rho\pi-\beta_9(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{5-p}}$$
$$+\beta_{10}(\pi)\frac{\sin\rho\pi}{\rho^{5-p}}\cos 2\rho\pi+\beta_{11}(\pi)\frac{\cos\rho\pi}{\rho^{5-p}}\cos 2\rho\pi+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)=0$$

şeklinde bulunur, burada

$$\beta_1(\pi):=\xi_1(\pi)-H\ ,\qquad \beta_2(\pi):=\xi_3+H\delta c_p\ ,\qquad \beta_3(\pi):=\xi_4(\pi)-\frac{H\delta M_1}{2}$$
$$\beta_4(\pi):=\frac{q(\pi)}{2}+\frac{\delta}{2\pi^p}-\frac{A}{2\pi}-\xi_5(\pi)-H\xi_1(\pi)\ ,\qquad \beta_5(\pi):=\xi_6(\pi)+\frac{HA\pi}{4}$$
$$\beta_6(\pi):=\frac{\delta^2M_1}{4\pi^p}-\frac{A\delta M_1}{8\pi}-H\xi_4(\pi)\ ,\qquad \beta_7(\pi):=\frac{A\delta\pi}{8\pi^p}+\frac{A^2\pi}{8\pi}+H\xi_6(\pi)$$
$$\beta_8(\pi):=\frac{q'(\pi)}{4}-\frac{A}{4\pi^2}-\frac{\delta p}{4\pi^{p+1}}-H\xi_5(\pi)\ ,\qquad \beta_9(\pi):=\frac{A\delta M_1}{8\pi^2}+\frac{A\delta HM_1}{8\pi}$$
$$\beta_{10}(\pi):=\frac{\delta^2M_1p}{8\pi^{p+1}}+\frac{\delta^2HM_1}{8\pi^p}\ ,\quad \beta_{11}(\pi):=\frac{A\delta c_p}{4\pi^2}-\frac{A\delta p}{8(p-1)\pi^{p+1}}+\frac{\delta^2pc_p}{4\pi^{p+1}}-H\xi_7(\pi)$$

şeklindedir.

Teorem 1.2.3: $\Delta(\rho)=\varphi'(\pi,\rho)-H\varphi(\pi,\rho)=0$ karakteristik denkleminin $\{\rho_n\}$ sıfırları L sınır değer probleminin özdeğerleriyle çakışır. $\varphi(x,\rho_n)$ ve $\psi(x,\rho_n)$ özfonksiyonlardır ve

$$\psi(x,\rho_n)=\beta_n\varphi(x,\rho_n),\qquad \beta_n\neq 0,$$

olacak şekilde $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ dizisi vardır.

İspat: $\rho = \rho_0$, $\Delta(\rho)$' ın sıfırı olsun, yani $\Delta(\rho_0) = 0$ dır. O halde, $\psi(x,\rho_0) = \beta_0\varphi(x,\rho_0)$ ve $\psi(x,\rho_0)$, $\varphi(x,\rho_0)$ fonksiyonları (1.1.2) ve (1.1.3) sınır koşullarını sağlamaktadır. Dolayısıyla, ρ_0-özdeğer, $\psi(x,\rho_0)$ ve $\varphi(x,\rho_0)$ ise uygun özfonksiyonlardır.

Tersine olarak; ρ_0, L operatörünün özdeğeri, $y_0(x)$ ise ρ_0'a karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde $U(y_0) = V(y_0) = 0$ dır. Diğer taraftan
$y_0(x) \neq 0$. Genelliği bozmadan $y_0(0) = 0$ ve $y_0'(0) = \rho$ alınırsa $y_0(x) \equiv \varphi(x,\rho_0)$ olur. Buradan $V(\varphi(x,\rho_0)) = V(y_0(x)) = 0$ olduğundan $\Delta(\rho_0) = 0$ elde edilir.

Böylece her bir özdeğere sabit sayı çarpımı farkıyla bir tek özfonksiyon karşılık gelmektedir. Her ρ_n için $\Delta(\rho_n) = 0$ olduğundan en az bir $\beta_n \neq 0$ vardır ki

$$\psi(x,\rho_n) = \beta_n\varphi(x,\rho_n)$$

olur.

Lemma 1.2.4: $\beta_n\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)$ eşitliği doğrudur.

İspat:

$$-\varphi''(x,\lambda_n) + q(x)\varphi(x,\lambda_n) = \lambda_n\varphi(x,\lambda_n)$$

$$-\psi''(x,\lambda) + q(x)\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda)$$

olduğundan

$$-\psi''(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n) + \varphi''(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) = (\lambda - \lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik $(0,\, \pi)$ aralığında integrallenilirse,

$$\int_0^{\pi} \left[-\psi''(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n) + \varphi''(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\right] dx =$$

$$= -\psi'(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\lambda_n) + \varphi'(\pi,\lambda_n)\psi(\pi,\lambda) + \lim_{x\to 0^+} \varphi(x,\lambda_n)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(0,\lambda_n)\psi(0,\lambda)$$

$$= (\lambda - \lambda_n)\int_0^{\pi} \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)dx$$

elde edilir. 1994 yılında R. Carlson çalışmasında [19], $p \in (1, 3/2)$ için $\psi(x,\lambda)$ her

λ için sınırlı fonksiyon ve $\psi'(x,\lambda) = O(x^{1-p})$ dir. Yani, $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) = 0$ olduğunu göstermiştir. Buna göre,

$$\varphi'(\pi,\lambda_n) - H\varphi(\pi,\lambda_n) - \lambda\psi(0,\lambda) = (\lambda - \lambda_n)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)dx$$

olur. $\Delta(\lambda)$' nın tanımından,

$$-\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)dx$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\lambda \to \lambda_n$ için limit alınırsa;

$$-\dot{\Delta}(\lambda_n) := \lim_{\lambda\to\lambda_n} -\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \lim_{\lambda\to\lambda_n}\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)dx$$

olur, burada $\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n)$ eşitliğinden yararlanılırsa,

$$-\dot{\Delta}(\lambda_n) = \int_0^\pi \beta_n\varphi^2(x,\lambda_n)dx$$

veya

$$-\dot{\Delta}(\lambda_n) = \beta_n\alpha_n$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 1.2.5: (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri basittir.

İspat: $\varphi(x,\rho_n)$ ve $\psi(x,\rho_n)$ fonksiyonları (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonları olduğundan $\beta_n \neq 0$, $\alpha_n \neq 0$ dır. Buradan $-\dot{\Delta}(\rho_n) \neq 0$ elde edilir. Dolayısıyla (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin ρ_n özdeğerleri basittirler.

(1.1.1) diferansiyel denkleminin $y(0,\rho) = 0$, $y'(0,\rho) = \rho$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $S(x,\rho)$ olsun. O halde açıktır ki, (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\Phi(\rho) = S'(\pi,\rho) - HS(\pi,\rho) = 0$$

fonksiyonunun sıfırları ile çakışmaktadır. $\Phi(\rho)$ denklemine (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin karakteristik denklemi denir. (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin varlığı ve onların asimptotik ifadelerinin bulunması problemi $\Phi(\rho)$ karakteristik fonksiyonun sıfırlarının belirlenmesi problemine indirgenmektedir.

Eğer (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) probleminin sinüs tipli çözümleri için integral denklemi yazılırsa, bu integral denklemi yardımıyla $\Phi(\rho)$ denklemi için ρ' nun yeterince büyük değerlerinde

$$\Phi(\rho) = \rho \cos \rho\pi + e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi} O\left(\frac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right) = 0 \tag{1.2.2}$$

asimptotik formülü elde edilir.

Tanım 1.2.6: $M > 0$ herhangi bir sayı olmak üzere

$$|\cos \rho\pi| \geq M e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

eşitsizliğini sağlayan ve sınırsız olarak genişlenen yörüngesine (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer problemi için geçerli yörünge denir ve K_n ile gösterilir.

Yukarıda verilen tanımdan yararlanarak $\Phi(\rho)$ fonksiyonunun davranışından açıktır ki, n' nin herhangi bir değerinden sonra bu fonksiyon K_n yörüngesi üzerinde

$$|\Phi(\rho)| \geq M e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

eşitsizliğini sağlamaktadır.

Not: K_n yörüngesi olarak $\cos \rho\pi$ fonksiyonunun sıfırları

$$\frac{1}{2}, \pm 1 \mp \frac{1}{2}, \pm 2 \mp \frac{1}{2}, \cdot\cdot$$

noktalarını içine alan Z_ρ yörüngeleri seçilebilir.

Teorem 1.2.6: (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) probleminin özdeğerleri sayılabilir sayıdadır ve

$$\rho_n = n + \frac{1}{2} + O\left(r_n\right)$$

davranışına sahiptir. Burada,

$$r_n = \frac{1}{n+1/2} + \int\limits_0^{1/(n+1/2)} t\,|Q(t)|\,dt + \frac{1}{n+1/2}\int\limits_{1/(n+1/2)}^{\pi} |Q(t)|\,dt$$

İspat: $\Phi(\rho)$ fonksiyonunun (1.2.2) davranışından görüldüğü gibi bu fonksiyon ρ değişkenine göre çift fonksiyondur. Ayrıca, ρ değişkenine göre tam fonksiyondur. Bundan dolayı bu fonksiyonun sıfırları

$$\cdots, -\rho_n, -\rho_{n-1}, \cdots, -\rho_1, \rho_1, \cdots, \rho_n, \cdots$$

şeklinde yazılabilir. Burada her i için $|\rho_i| \leq |\rho_{i+1}|$ ve her $i \geq 0$ için $\operatorname{Re}\rho_i \geq 0$ dır.

$$\Gamma_n = \begin{cases} |\operatorname{Re}\rho| \leq n+1 \\ |\operatorname{Im}\rho| \leq n+1 \end{cases}$$

kapalı yörüngeleri içinde kalan $\Phi(\rho)$ fonksiyonun sıfırlarının sayısı bulunabilir. Bunun için önce $\Phi(\rho)$ fonksiyonu Γ_n yörüngesi üzerinde değerlendirilir.

$\rho = (n+1) + iy$ için,

$$|\cos\rho\pi| = |\cos((n+1)+iy)\pi| = |\cos iy\pi| = \left|\frac{e^{y\pi}+e^{-y\pi}}{2}\right| \geq \frac{1}{2}e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

$\rho = x + i(n+1)$ için,

$$|\cos\rho\pi| = |\cos(x+i(n+1))\pi| \geq \frac{1}{4}e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

$\rho = x - i(n+1)$ için,

$$|\cos\rho\pi| = |\cos(x-i(n+1))\pi| \geq \frac{1}{4}e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

elde edilir. (1.2.2) eşitliğinden

$$f(\rho) = \cos\rho\pi, \qquad g(\rho) = \frac{e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}}{\rho}O\left(\frac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)$$

olarak seçilirse, Γ_n yörüngesinde

$$|f(\rho)|_{\Gamma_n} \geq \frac{1}{4}e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}, \qquad |g(\rho)|_{\Gamma_n} \leq C\frac{e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}}{\rho}\left(\frac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)$$

eşitsizlikleri korunur. Son eşitsizlikten yararlanılırsa,

$$|f(\rho)|_{\Gamma_n} \geq \frac{1}{\frac{4C}{\rho}\left(\frac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)}|g(\rho)|_{\Gamma_n} \tag{1.2.3}$$

eşitsizliği elde edilir. $R(\rho)$ ifadesinden görüldüğü gibi n' nin büyük değerlerinde

$$\frac{1}{\frac{4C}{\rho}\left(\frac{1}{|\rho|}+R(\rho)\right)} > 1 \tag{1.2.4}$$

koşulu sağlanır. (1.2.3) eşitsizliğinden $f(\rho)$, $g(\rho)$ fonksiyonları Γ_n yörüngelerinin iç bölgelerinde Rouché teoreminin koşullarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla Γ_n yörüngelerinin iç bölgelerinde $\Phi(\rho)$ fonksiyonu ile $\cos\rho\pi$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı eşittir ve $2n$ sayıdadır. Böylece $\Phi(\rho)$ fonksiyonunun sıfırları sayısının sayılabilir olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca her bir n için $\Phi(\rho)$ fonksiyonu ρ_n' nun n. sıfırı ise

$$\left|\operatorname{Re}\rho-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{1}{2}$$

bölgelerinde yerleşmektedir. Diğer taraftan $\sigma<\frac{1}{2}$ olmak üzere

$$\left|\rho-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|<\sigma<\frac{1}{2}$$

çemberlerinin iç noktalarında da

$$|\cos\rho\pi|\geq M_1\sigma e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır. Burada M_1 sayısı ρ' ya bağlı değildir.

O halde $|\rho-(n+1/2)|<1/2$ çemberlerin dışında fakat

$$\begin{cases} |\operatorname{Re}\rho-(n+1/2)|<1/2 \\ |\operatorname{Im}\rho-(n+1/2)|<1/2 \end{cases}$$

diktörtgenin içinde kalan kısımlarında

$$|f(\rho)|\geq M_1\sigma e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Dolayısıyla bu ρ' lar için

$$|f(\rho)|\geq\frac{M_1\sigma}{\frac{C}{\rho}\left(\frac{1}{|\rho|}+R(\rho)\right)}|g(\rho)| \tag{1.2.5}$$

eşitsizliği doğrudur. (1.2.5) eşitsizliğinden σ sayısı

$$\frac{M_1\sigma}{\frac{C}{\rho}\left(\frac{1}{|\rho|}+R(\rho)\right)}=2$$

şeklinde seçilirse,

$$\sigma:=\frac{2C}{M_1\rho}\left(\frac{1}{|\rho|}+R(\rho)\right)$$

olur. ρ' nun büyük değerlerinde $\sigma<\frac{1}{2}$ koşulu her zaman sağlanacaktır. O halde bu ρ' lar için

$$|f(\rho)|\geq|g(\rho)|$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Böylece Rouché teoreminden $\Phi(\rho)$ fonksiyonun n. sıfırı

$$\left|\rho-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|<\sigma$$

çemberi içinde yerleşir. Dolayısıyla

$$\rho_n=(n+1/2)+O\left(\frac{1}{|\rho_n|}+R(\rho_n)\right)$$

asimptotik formülü elde edilir, burada

$$R(\rho_n)=\int\limits_0^{1/|\rho_n|}t\,|Q(t)|\,dt+\frac{1}{|\rho_n|}\int\limits_{1/|\rho_n|}^{\pi}|Q(t)|\,dt \tag{1.2.6}$$

şeklindedir.

Eğer $q(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında integrallenebilir ise $R(\rho_n)$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$R(\rho_n)=\int\limits_0^{1/(n+1/2)}t\left|\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}+q(t)\right|dt+\frac{1}{(n+1/2)}\int\limits_{1/(n+1/2)}^{\pi}\left|\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}+q(t)\right|dt$$

$$=\frac{\omega_1}{(n+1/2)^{2-p}}+\omega_2\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)}+\frac{\omega_3}{(n+1/2)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dolayısıyla $q(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında integrallenebilir ise ρ_n' ler için

$$\rho_n=(n+1/2)+\frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)}+\frac{c_2}{(n+1/2)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik formülü elde edilir. Burada ,$q(x) \in W_2^2[0,\pi]$ olmak üzere Rouché

teoremi tekrar uygulanırsa, n' nin yeterince büyük değerlerinde ρ_n' ler için, $\delta_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ alınırsa,

$$\rho_n = (n+1/2) + \frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} + \frac{c_2}{(n+1/2)} + \delta_n$$

olur. Burada gerekli işlemler yapıldığında δ_n' lerin

$$\begin{aligned}
\delta_n &= -\frac{\delta M_1 \xi_2(\pi)}{2\pi}\frac{1}{(n+1/2)^{6-3p}} \\
&+ \left(\frac{\delta^2 M_1 H}{4\pi} - \frac{\delta M_1 \xi_4(\pi)}{2\pi} + \frac{\delta^2 M_1^2 c_2}{4} - \frac{A\xi_2(\pi)}{4}\right)\frac{1}{(n+1/2)^{5-2p}} \\
&+ \left(\frac{Ac_1\pi}{2} - \frac{\delta M_1 A^2}{16} - \frac{Ac_1 H}{2}\right)\frac{1}{(n+1/2)^2} + \left(\frac{c_1^3\pi^2}{6} - \frac{\delta c_p c_1^2 \pi}{2} - \frac{\delta^2 M_1}{4}\right)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} \\
&+ \left[\frac{\delta M_1 c_{10}}{2} - \frac{A\pi}{4}\left(\frac{\xi_4(\pi)}{\pi} - \frac{\delta M_1 c_2}{2}\right)\right]\frac{1}{(n+1/2)^{4-p}} \\
&+ \left(-\frac{A^3\pi}{32} - \frac{Ac_2^2\pi}{4} - \frac{Ac_2}{2\pi}\right)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + \frac{c_{19}}{(n+1/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right)
\end{aligned}$$

asimptotik formülü elde edilir. Dolayısıyla ρ_n' nin asimptotik formülü,

$$\begin{aligned}
\rho_n &= (n+1/2) + \frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} + \frac{c_2}{(n+1/2)} \\
&+ \frac{c_7}{(n+1/2)^{4-2p}} + c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_8}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_{10}}{(n+1/2)^2} \\
&+ \frac{c_{31}}{(n+1/2)^{6-3p}} + c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}} + \frac{c_{32}}{(n+1/2)^{5-2p}} \\
&+ c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + c_{33}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + \frac{c_{34}}{(n+1/2)^{4-p}} \\
&- \frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + c_{17}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + c_{35}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3} \\
&+ \frac{c_{19}}{(n+1/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right)
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

şeklinde bulunur, burada,

$$c_1 := \frac{\delta c_p}{\pi}, \qquad c_2 := \left(\frac{\beta_1(\pi)}{\pi}\frac{A}{2\pi}\ln\pi\right), \qquad c_3 := -\frac{\delta M_1 c_1}{2}, \qquad c_4 := -\frac{A\delta M_1}{4\pi}$$

$$c_5 := -\frac{A\pi c_1}{4} - \frac{\delta M_1 H}{2\pi}, \qquad c_6 := -\frac{A^2}{8} \qquad c_7 = c_3 + \frac{\xi_2(\pi)}{\pi}$$

$$c_8 := c_5 + \frac{\xi_4(\pi)}{\pi} - \frac{\delta M_1 c_2}{2}, \qquad c_9 := 0$$

$$c_{10} := -\frac{A\pi c_2}{4} - \frac{\beta_5(\pi)}{\pi} + \frac{A^2 \ln \pi}{8}, \qquad c_{11} := \frac{c_1^3\pi^2}{6} - \frac{\delta M_1 c_3}{2} - \frac{\delta c_p c_1^2 \pi}{2} - \frac{\delta^2 M_1 c_1}{4}$$

$$c_{12} := -\frac{\delta M_1 c_4}{2} - \frac{\delta c_p A c_1}{2} - \frac{\delta^2 M_1 A}{8}, \qquad c_{14} := -\frac{A^2 c_1}{8} - \frac{\delta c_p A^2}{8\pi}$$

$$c_{13} := \frac{c_1^2 c_2 \pi^2}{2} - \frac{\delta M_1 c_5}{2} - \delta c_p c_1 c_2 \pi - \delta c_p c_1 (2-p) - \frac{A\pi c_3}{4} - \frac{\beta_1(\pi) c_1^2 \pi}{2}$$
$$-\frac{A c_1^2 \pi \ln \pi}{4} - \frac{\delta^2 M_1 c_2}{4} - \beta_2(\pi) c_1 - \frac{\delta^2 M_1 H}{4\pi}$$

$$c_{15} := -\frac{\delta M_1 c_6}{2} - \frac{\delta c_p c_2 A}{2} - \frac{\delta c_p A (2-p)}{2\pi^2} - \frac{A\pi c_4}{4} - \frac{\beta_1(\pi) A c_1}{2} - \frac{A^2 c_1 \ln \pi}{4}$$
$$-\frac{A c_1 c_2 \pi}{2} - \frac{A c_1}{2\pi} - \frac{\beta_2(\pi) A}{2\pi} - \frac{A c_1 H}{2}$$

$$c_{16} := \frac{c_2^2 c_1 \pi^2}{2} - \frac{\delta c_p c_2^2 \pi}{2} - \frac{\delta c_p c_2 (2-p)}{\pi} - \frac{A\pi c_5}{4} - \beta_1(\pi) c_1 c_2 \pi - \frac{\beta_1(\pi) c_1}{\pi} + \frac{A c_1}{2\pi}$$
$$-\frac{A c_1 c_2 \pi \ln \pi}{2} - \frac{A c_1 \ln \pi}{2\pi} - \beta_2(\pi) c_2 + \beta_4(\pi) c_1 - \frac{A H c_1 \ln \pi}{2} - \frac{\xi_3(\pi) H}{\pi} + \frac{\xi_7(\pi)}{\pi}$$

$$c_{17} := -\frac{A^2 c_2}{8} - \frac{\beta_1(\pi) A^2}{8\pi} - \frac{A^3 \ln \pi}{16\pi} - \frac{A^2}{4\pi^2} - \frac{A^2 H}{4\pi}$$

$$c_{18} := -\frac{c_2^2 A \pi}{4} - \frac{A\pi c_6}{4} - \frac{\beta_1(\pi) A c_2}{2} - \frac{\beta_1(\pi) A}{2\pi^2} + \frac{A^2}{4\pi^2} - \frac{A^2 c_2 \ln \pi}{4} - \frac{A^2 \ln \pi}{4\pi^2}$$
$$+\frac{\beta_4(\pi) A}{2\pi} - \frac{A^2 H \ln \pi}{4\pi} - \frac{A c_2 H}{2}$$

$$c_{19} := -\frac{c_2^3 \pi^2}{6} - \frac{A\pi c_{10}}{4} - \frac{\beta_1(\pi) c_2^2 \pi}{2} - \frac{\beta_1(\pi) c_2}{\pi} - \frac{A c_2^2 \ln \pi}{4} - \frac{A c_2 \ln \pi}{2\pi} - \frac{A c_2}{2\pi}$$
$$+ \beta_4(\pi) c_2 + \frac{\beta_2(\pi)}{\pi}$$

$$c_{31} := c_{11} - \frac{\delta M_1 \xi_2(\pi)}{2\pi}, \qquad c_{32} := c_{13} - \frac{\delta^2 M_1 H}{4\pi} - \frac{\delta M_1 \xi_4(\pi)}{2\pi} - \frac{\delta^2 M_1^2 c_2}{4} - \frac{A \xi_2(\pi)}{4}$$

$$c_{33} := c_{15} - \frac{A c_1 \pi}{2} - \frac{\delta M_1 A^2}{16} - \frac{A H c_1}{2}, \qquad c_{34} := c_{16} - \frac{\delta M_1 c_{10}}{2} - \frac{A \xi_4(\pi)}{4} + \frac{A \delta M_1 c_2 \pi \pi}{8}$$

$\lambda_n = \rho_n^2$ olduğundan dolayı özdeğerlerin asimptotik formülü,

$$\lambda_n = \rho_n^2 = (n+1/2)^2 + 2c_1 (n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi} \ln(n+1/2) + 2c_2$$
$$+\frac{2c_7}{(n+1/2)^{3-2p}} + 2c_4 \frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_8}{(n+1/2)^{2-p}} \tag{1.2.8}$$
$$+\frac{2c_{10}}{(n+1/2)} + \frac{2c_{31}}{(n+1/2)^{5-3p}} + 2c_{12} \frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-2p}}$$

$$+\frac{\gamma_1}{(n+1/2)^{4-2p}}+2c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+\gamma_2\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}$$
$$+\frac{\gamma_3}{(n+1/2)^{3-p}}-\frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+\gamma_4\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+\gamma_5\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+\frac{\gamma_6}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{7-4p}}\right)$$

şeklinde elde edilir, burada,

$$\gamma_1:=2c_{32}+c_1^2\,,\qquad \gamma_2:=2c_{33}+\frac{Ac_1}{\pi}\,,\qquad \gamma_3:=2c_{34}+2c_1c_2$$
$$\gamma_4:=2c_{17}+\frac{A^2}{4\pi^2}\,,\qquad \gamma_5:=2c_{35}+\frac{Ac_2}{\pi}\,,\qquad \gamma_6:=2c_{19}+c_2^2$$

şeklindedir.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (1.1.4) asimptotik formülünde ρ nun yerine ρ_n yazılırsa L operatörünün $\varphi(x,\rho_n)$ özfonksiyonlarının asimptotik formülleri için,

$$\varphi(x,\rho_n)=\sin\rho_n x+\frac{\delta M_1}{2}\frac{\sin\rho_n x}{\rho_n^{2-p}}-\delta c_p\frac{\cos\rho_n x}{\rho_n^{2-p}}+\frac{A\pi}{4}\frac{\sin\rho_n x}{\rho_n}-\xi_1(x)\frac{\cos\rho_n x}{\rho_n}$$
$$-\frac{A}{2}\frac{\cos\rho_n x}{\rho_n}\ln\rho_n x+\frac{\delta^2M_1}{4}\frac{\sin\rho_n x}{\rho_n^{4-2p}}-\xi_2\frac{\cos\rho_n x}{\rho_n^{4-2p}}+\xi_3\frac{\sin\rho_n x}{\rho_n^{3-p}}-\xi_4(x)\frac{\cos\rho_n x}{\rho_n^{3-p}}$$
$$+\xi_5(x)\frac{\sin\rho_n x}{\rho_n^2}+\xi_6(x)\frac{\cos\rho_n x}{\rho_n^2}-\frac{A^2\pi}{8}\frac{\cos\rho_n x}{\rho_n^2}\ln\rho_n x+\frac{A\delta M_1}{8x}\frac{\sin\rho_n x}{\rho_n^{4-p}}$$
$$-\frac{\delta^2M_1}{8x^p}\frac{\sin\rho_n x}{\rho_n^{4-p}}\cos 2\rho_n x+\xi_7(x)\frac{\cos\rho_n x}{\rho_n^{4-p}}\cos 2\rho_n x+O\left(\frac{1}{\rho_n^3}\right)$$

veya

$$\begin{aligned}\varphi(x,\rho_n)&=\sin(n+1/2)x+\frac{\delta M_1}{2}\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)^{2-p}}\\&+\frac{\delta c_p}{\pi}(x-\pi)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A\pi}{4}\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)}\\&+\frac{A}{2\pi}(x-\pi)\cos(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)}\\&+a_1(x)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)}+a_2(x)\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)^{4-2p}}\\&+a_3(x)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)^{4-2p}}+a_4(x)\sin(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}\\&+a_5(x)\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)^{3-p}}+a_6(x)\cos(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}\end{aligned}\tag{1.2.9}$$

$$+a_7(x)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)^{3-p}} - \frac{A^2x}{8\pi^2}(x-\pi)\sin(n+1/2)x\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+a_8(x)\sin(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + a_9(x)\frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)^2}$$
$$+a_{10}(x)\cos(n+1/2)x\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+a_{11}(x)\frac{\cos(n+1/2)x}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)$$

elde edilir, burada

$$a_1(x) := c_2x - \xi_1(x) + \frac{A\ln x}{2}\ , \qquad a_2(x) := -\frac{c_1^2x^2}{2} + \frac{\delta^2 M_1}{4} + \delta c_p c_1 x$$
$$a_3(x) := c_7x + \frac{\delta M_1 c_1 x}{2} - \xi_2(x)\ , \qquad a_4(x) := -\frac{Ac_1x^2}{2\pi} + \frac{Ac_1x}{2} + \frac{A\delta c_p x}{2\pi}$$
$$a_5(x) := -c_1c_2x^2 + \xi_1(x)c_1x + \frac{Ac_1x\ln x}{2} + \xi_3(x) + \delta c_p c_2 x$$
$$a_6(x) := c_4x + \frac{\delta M_1 Ax}{2\pi}\ , \qquad a_7(x) := c_8x + \frac{A\pi c_1 x}{4} + \frac{\delta M_1 c_2 x}{2} - \xi_4(x)$$
$$a_8(x) := -\frac{Ac_2x^2}{2\pi} + \frac{A^2x\ln x}{4\pi} + \frac{Ac_2x}{2} + \frac{Ax\xi_5(x)}{2\pi}$$
$$a_9(x) := -\frac{c_2^2x^2}{2} + \xi_1(x)c_2x + \frac{Ac_2x\ln x}{2} + \xi_5(x)\ , \qquad a_{10}(x) := \frac{A^2}{8}(x-\pi)$$
$$a_{11}(x) := c_{10}x + \frac{A\pi c_2 x}{4} + \xi_6(x) - \frac{A^2\pi\ln x}{8}$$

Şimdi (0.8) eşitliğinden α_n' in asimptotik formülü,

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta M_1\pi}{2}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)}$$
$$+\frac{b_1}{(n+1/2)^{4-2p}} + \delta c_p A\pi\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{b_2}{(n+1/2)^{3-p}} \qquad (1.2.10)$$
$$+b_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + b_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{b_5}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)$$

olarak elde edilir, burada,

$$b_1 := -\frac{c_1^2\pi^3}{6} + \frac{\delta c_p c_1\pi^2}{2} + \frac{\delta^2 M_1\pi}{4} + \frac{(2c_7+\delta M_1c_1)\pi - 4\xi_2}{2} + \frac{\delta^2 M_1^2\pi}{8} + \frac{\delta^2 c_p^2\pi}{6},$$
$$b_2 := -\frac{\delta c_p}{2} - \frac{c_1c_2\pi^3}{3} - \frac{Ac_1\pi^2(1-2\ln\pi)}{8} + \xi_3\pi + \frac{\delta c_p c_2\pi^2}{2} + Ac_1M_2\pi + \frac{A\delta M_1\pi^2}{8}$$
$$-\frac{\delta c_1\pi^{3-p}}{2(p-1)(3-p)} + \frac{c_1}{2}\int_0^\pi\left(x\int_0^x q(t)dt\right)dx + \frac{\delta c_p}{\pi}\left[\frac{c_2\pi^3}{3} - \frac{A\pi^2}{8}(1-2\ln\pi) - \frac{c_2\pi^3}{4}\right.$$

$$+\frac{AM_2\pi^2}{2}-\frac{\delta\pi^{3-p}}{2(p-1)(3-p)}-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(x\int_0^x q(t)dt\right)dx+\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\int_0^x q(t)dt\right)dx$$

$$\left.-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\delta}{2(p-1)x^{p-1}}+\frac{A\ln x}{2}\right)dx\right],$$

$$b_3:=\frac{A^2}{48}(4+\pi),$$

$$b_4:=-\frac{A}{4}+\frac{Ac_2\pi^2}{12}-\frac{A^2\pi\left(1-2\ln\pi\right)}{16}+2\int_0^\pi\xi_5(x)\sin^2(n+1/2)xdx+$$

$$\frac{A}{\pi}\left[\frac{c_2\pi^3}{6}-\frac{A\pi^2}{16}(1-2\ln\pi)-\frac{c_2\pi^3}{8}+\frac{AM_2\pi^2}{4}-\frac{\delta\pi^{3-p}}{4(p-1)(3-p)}\right.$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^\pi\left(x\int_0^x q(t)dt\right)dx+\frac{\pi}{4}\int_0^\pi\left(\int_0^x q(t)dt\right)dx$$

$$\left.-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\delta}{2(p-1)x^{p-1}}+\frac{A\ln x}{2}\right)dx\right],$$

$$b_5:=\frac{c_2\pi-\xi_1(\pi)}{2}+\frac{A\ln\pi}{4}-\frac{AM_2}{2}-\frac{c_2^2\pi^3}{6}-\frac{Ac_2\pi^2\left(1-2\ln\pi\right)}{8}+Ac_2M_2\pi$$

$$+\frac{A^2\pi^3}{32}-\frac{\delta c_2\pi^{3-p}}{2(p-1)(3-p)}+\frac{c_2}{2}\int_0^\pi\left(x\int_0^x q(t)dt\right)dx$$

$$+2\int_0^\pi\xi_5(x)\sin^2(n+1/2)xdx+\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(c_2x-\xi_1(x)+\frac{A\ln x}{2}\right)^2dx,$$

şeklinde sabitlerdir.

II. BÖLÜM

SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERE GÖRE SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN BELİRLENMESİ (TERS PROBLEM)

2.1. $F(x,t)$ Fonksiyonun Araştırılması

$$-y'' + \left\{ \frac{\delta}{x^p} + \frac{A}{x} + q(x) \right\} y = \lambda y, \qquad \lambda = \rho^2 \tag{2.1.1}$$

difarensiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \ , \quad y'(\pi) - Hy(\pi) = 0, \tag{2.1.2}$$

sınır koşulları verilmiş olsun. Burada $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$, δ , A ve H gerçel sayılar,ve $p \in (1, 5/4)$ dir.

$$\varphi(0,\lambda) = 0 \ , \ \varphi'(0,\lambda) = \rho \tag{2.1.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan (2.1.1) denkleminin çözümü $\varphi(x,\lambda)$ olsun. $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ ler (2.1.1),(2.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri, $\varphi(x,\lambda_n)$, $n \geq 0$ özfonksiyonları, $q(x) = 0$ olması durumunda ise (2.1.1), (2.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri $\lambda_0^0, \lambda_1^0, \ldots$ ve özfonksiyonları $\varphi_0(x, \lambda_n^0)$, $n \geq 0$ olsun.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx, \qquad n \geq 0 \tag{2.1.4}$$

sayılarına (2.1.1), (2.1.3) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları denir.

α_n^0 , $n \geq 0$ sayları ise (2.1.1), (2.1.3) sınır değer probleminin $q(x) = 0$ durumuna karşılık gelen normalleştirici sayılarıdır.

1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov yapmış oldukları bir çalışmada [14] singüler diferansiyel operatörler için de $f(x)$, $g(x) \epsilon L_2[0,\pi]$ olmak üzere

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi f(x)\varphi(x,\lambda_n)dx \int_0^\pi g(t)\varphi(t,\lambda_n)dt \right]$$

Parseval eşitliğinin doğru olduğunu göstermişlerdir.

Buradaki $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine (2.1.1), (2.1.2) sınır değer probleminin spektral karakteristikleri denir.

$\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin yardımı ile $F(x,t)$ fonksiyonu

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)-\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)\right] \tag{2.1.5}$$

olarak oluşturulsun. Oluşturulan bu fonksiyon yardımı ile, $K(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x,t)+K(x,t)+\int_0^x K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi=0 \tag{2.1.6}$$

Volterra tipi integral denklem kurulabilir. Bu integral denklemin çözümünün varlığı ilk kez 1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov tarafından [14] potansiyeli $\left(\frac{A}{x}+q(x)\right)$ olan diferansiyel operatör için gösterilmiştir. Bu çalışmada ise bu integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği $\left(\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+q(x)\right)$ potansiyeline sahip bir operatör için araştırılacaktır. Bunu yapmak için $F(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir. Bunun için de $\varphi_0(x,\lambda_n)$ ve $\varphi_0(x,\lambda_n^0)$ fonksiyonlarının asimptotik formüllerinden yararlanılacaktır. Bu asimptotik formüller $x>0$ ve n' nin yeterince büyük değerleri için geçerlidir.

Birinci bölümde verilen operatörün ρ_n özdeğerleri, $\varphi(x,\rho_n)$ özfonksiyonları ve α_n normalleştirici sayıların asimptotik ifadelerinden yararlanarak $q(x)\equiv 0$ durumuna karşılık gelen operatörün ρ_n^0 özdeğerleri, $\varphi_0(x,\rho_n^0)$ özfonksiyonları ve α_n^0 normalleştirici sayıları için,

$$\begin{aligned}\rho_n^0 &= (n+1/2)+\frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)}+\frac{c_2^0}{(n+1/2)}\\ &+\frac{c_7}{(n+1/2)^{4-2p}}+c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+\frac{c_8^0}{(n+1/2)^{3-p}}+\frac{c_{10}^0}{(n+1/2)^2}\\ &+\frac{c_{31}}{(n+1/2)^{6-3p}}+c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}}+\frac{c_{32}^0}{(n+1/2)^{5-2p}}\\ &+c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}}+c_{33}^0\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}}+\frac{c_{34}^0}{(n+1/2)^{4-p}}\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

$$-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+c_{17}^0\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+c_{35}^0\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3}$$
$$+\frac{c_{19}^0}{(n+1/2)^3}+O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right),$$

buradaki c_i^0 sabitleri, bilinen c_i sabitlerindeki $q(x)=0$ durumudur.

$$\varphi_0(x,\lambda_n^0)=\sin(n+1/2)x+\frac{g_1(x)}{(n+1/2)^{2-p}}+g_2(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)}$$
$$+\frac{g_3^0(x)}{(n+1/2)}+\frac{g_4(x)}{(n+1/2)^{4-2p}}+g_5(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}$$
$$+\frac{g_6^0(x)}{(n+1/2)^{3-p}}+g_7(x)\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+g_8^0(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \tag{2.1.8}$$
$$+\frac{g_9^0(x)}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right),$$

burada,

$$g_3^0(x):=\frac{A\pi}{4}\sin(n+1/2)x+A_1^0(x)\cos(n+1/2)x,$$
$$g_6^0(x):=A_5^0(x)\sin(n+1/2)x+A_7^0(x)\cos(n+1/2)x,$$
$$g_8^0(x):=A_8^0(x)\sin(n+1/2)x+A_{10}(x)\cos(n+1/2)x,$$
$$g_9^0(x):=A_9^0(x)\sin(n+1/2)x+A_{11}^0(x)\cos(n+1/2)x$$

ve

$$A_1^0(x):=c_2^0x-\xi_1^0(x)+\frac{A\ln x}{2},$$
$$A_5^0(x):=-c_1c_2^0x^2+\xi_1^0(x)c_1x+\frac{Ac_1x\ln x}{2}+\xi_3(x)+\delta c_p c_2^0 x,$$
$$A_7^0(x):=c_8^0x+\frac{A\pi c_1 x}{4}+\frac{\delta M_4 c_2^0 x}{2}-\xi_4(x),$$
$$A_8^0(x):=-\frac{Ac_2^0x^2}{2\pi}+\frac{A^2x\ln x}{4\pi}+\frac{Ac_2^0x}{2}+\frac{\xi_1^0(x)Ax}{2\pi},$$
$$A_9^0(x):=-\frac{(c_2^0)^2x^2}{2}+\xi_1^0(x)c_2^0x+\frac{Ac_2^0x\ln x}{2}+\xi_5^0(x),$$
$$A_{11}^0(x):=\frac{A\pi c_2^0 x}{4}+c_{10}^0x+\xi_6(x)-\frac{A^2\pi\ln x}{8}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n^0 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\delta M_1 \pi}{2}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)} \\
&+\frac{b_1}{(n+1/2)^{4-2p}} + \delta c_p A\pi \frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{b_2^0}{(n+1/2)^{3-p}} \\
&+b_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + b_4^0\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{b_5^0}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right).
\end{aligned} \tag{2.1.9}
$$

Burada,

$$
\begin{aligned}
b_2^0 &:= -\frac{\delta c_p}{2} - \frac{c_1 c_2^0 \pi^3}{3} - \frac{A c_1 \pi^2 (1-2\ln\pi)}{8} + \xi_3\pi + \frac{\delta c_p c_2^0 \pi^2}{2} + A c_1 M_2 \pi \\
&-\frac{\delta c_1 \pi^{3-p}}{2(p-1)(3-p)} + \frac{A\delta M_1 \pi^2}{8} + \frac{\delta c_p}{\pi}\left[\frac{c_2^0\pi^3}{3} - \frac{A\pi^2}{8}(1-2\ln\pi) - \frac{c_2^0\pi^3}{4}\right. \\
&\left.+\frac{AM_2\pi^2}{2} - \frac{\delta\pi^{3-p}}{2(p-1)(3-p)} - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\delta}{2(p-1)x^{p-1}} + \frac{A\ln x}{2}\right)dx\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_4^0 &:= -\frac{A}{4} + \frac{A c_2^0 \pi^2}{3} - \frac{A^2\pi(1-2\ln\pi)}{16} + \int_0^\pi \xi_5(x)dx + \frac{A}{\pi}\left[\frac{c_2^0\pi^3}{6} - \frac{A\pi^2}{16}(1-2\ln\pi)\right. \\
&\left.-\frac{c_2^0\pi^3}{8} + \frac{AM_2\pi^2}{4} - \frac{\delta\pi^{3-p}}{4(p-1)(3-p)} - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\delta}{2(p-1)x^{p-1}} + \frac{A\ln x}{2}\right)dx\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_5^0 &:= \frac{c_2^0\pi - \xi_1(\pi)}{2} + \frac{A\ln\pi}{4} - \frac{AM_2}{2} - \frac{(c_2^0)^2\pi^3}{6} - \frac{A c_2^0 \pi^2(1-2\ln\pi)}{8} + A c_2^0 M_2 \pi \\
&-\frac{\delta c_2^0 \pi^{3-p}}{2(p-1)(3-p)} + \int_0^\pi \xi_5(x)dx + \frac{A^2\pi^3}{32} + \frac{1}{2}\int_0^\pi\left(c_2^0 x - \xi_1(x) + \frac{A\ln x}{2}\right)^2 dx
\end{aligned}
$$

şeklinde sabitlerdir.

Ayrıca (2.1.5) ifadesindeki $\varphi_0(x,\lambda_n)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı,

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x,\lambda_n) &= \sin(n+1/2)x + \frac{g_1(x)}{(n+1/2)^{2-p}} + g_2(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} \\
&+\frac{g_3(x)}{(n+1/2)} + \frac{g_4(x)}{(n+1/2)^{4-2p}} + g_5(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} \\
&+\frac{g_6(x)}{(n+1/2)^{3-p}} + g_7(x)\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + g_8(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+\frac{g_9(x)}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)
\end{aligned} \tag{2.1.10}
$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
g_1(x) &:= \frac{\delta M_4}{2}\sin(n+1/2)x + \frac{\delta c_p}{\pi}(x-\pi)\cos(n+1/2)x,\\
g_2(x) &:= \frac{A}{2\pi}(x-\pi)\cos(n+1/2)x,\\
g_3(x) &:= \frac{A\pi}{4}\sin(n+1/2)x + A_1(x)\cos(n+1/2)x,\\
g_4(x) &:= A_2(x)\sin(n+1/2)x + A_3(x)\cos(n+1/2)x,\\
g_5(x) &:= A_4(x)\sin(n+1/2)x + A_6(x)\cos(n+1/2)x,\\
g_6(x) &:= A_5(x)\sin(n+1/2)x + A_7(x)\cos(n+1/2)x,\\
g_7(x) &:= -\frac{A^2x}{8\pi^2}(x-\pi)\sin(n+1/2)x,\\
g_8(x) &:= A_8(x)\sin(n+1/2)x + A_{10}(x)\cos(n+1/2)x,\\
g_9(x) &:= A_9(x)\sin(n+1/2)x + A_{11}(x)\cos(n+1/2)x
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
A_1(x) &:= c_2x - \xi_1^0(x) + \frac{A\ln x}{2}, \qquad A_2(x) := -\frac{c_1^2x^2}{2} + \delta c_p c_1 x + \frac{\delta^2 M_4}{4},\\
A_3(x) &:= c_7x + \frac{\delta M_4 c_1 x}{2} - \xi_2(x), \qquad A_4(x) := -\frac{Ac_1x^2}{2\pi} + \frac{Ac_1x}{2} + \frac{\delta c_p A x}{2\pi},\\
A_5(x) &:= -c_1c_2x^2 + \xi_1^0(x)c_1x + \frac{Ac_1x\ln x}{2} + \xi_3(x) + \delta c_p c_2 x,\\
A_6(x) &:= c_4x + \frac{\delta M_4 A x}{2\pi}, \qquad A_7(x) := c_8x + \frac{A\pi c_1 x}{4} + \frac{\delta M_4 c_2 x}{2} - \xi_4(x),\\
A_8(x) &:= -\frac{Ac_2x^2}{2\pi} + \frac{A^2x\ln x}{4\pi} + \frac{Ac_2x}{2} + \frac{\xi_1^0(x)Ax}{2\pi},\\
A_9(x) &:= -\frac{c_2^2x^2}{2} + \xi_1^0(x)c_2x + \frac{Ac_2x\ln x}{2} + \xi_5^0(x),\\
A_{10}(x) &:= \frac{A^2}{8}(x-\pi), \qquad A_{11}(x) := \frac{A\pi c_2 x}{4} + c_{10}x + \xi_6(x) - \frac{A^2\pi\ln x}{8}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_n} &= \frac{2}{\pi} - \frac{2\delta M_4}{\pi}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}} - \frac{A}{(n+1/2)} + \frac{d_1}{(n+1/2)^{4-2p}}\\
&-\frac{4A\delta c_p}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{d_2}{(n+1/2)^{3-p}} + d_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}\\
&+d_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{d_5}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_n^0} &= \frac{2}{\pi} - \frac{2\delta M_4}{\pi}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}} - \frac{A}{(n+1/2)} + \frac{d_1}{(n+1/2)^{4-2p}} \\
&- \frac{4A\delta c_p}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{d_2^0}{(n+1/2)^{3-p}} + d_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ d_4^0\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{d_5^0}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)
\end{aligned} \tag{2.1.12}
$$

şeklinde elde edilir, burada

$$
d_1 := \frac{2\delta^2 M_4^2}{\pi} - \frac{4b_1}{\pi^2}\ , \quad d_2 := 2\delta M_4 A - \frac{4b_2}{\pi^2}\ , \quad d_3 := -\frac{4b_3}{\pi^2}\ , \quad d_4 := -\frac{4b_4}{\pi^2}
$$

$$
d_5 := \frac{A^2\pi}{2} - \frac{4b_5}{\pi^2}\ , \quad d_2^0 := 2\delta M_4 A - \frac{4b_2^0}{\pi^2}\ , \quad d_4^0 := -\frac{4b_4^0}{\pi^2}\ , \quad d_5^0 := \frac{A^2\pi}{2} - \frac{4b_5^0}{\pi^2}
$$

Eğer $F(x,t)$ fonksiyonunun (2.1.5) ifadesinde (2.1.8), (2.1.10), (2.1.11) ve (2.1.12) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
F(x,t) &= F_1(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((n+1/2)(t+x))}{(n+1/2)} + F_2(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((n+1/2)(t-x))}{(n+1/2)} \\
&+F_3(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((n+1/2)(t+x))}{(n+1/2)^{3-p}} + F_4(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((n+1/2)(t-x))}{(n+1/2)^{3-p}} \\
&F_5(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((n+1/2)(t+x))}{(n+1/2)^{3-p}} + F_6(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((n+1/2)(t-x))}{(n+1/2)^{3-p}} \\
&+F_7(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)\cos((n+1/2)(t+x))}{(n+1/2)^2} \\
&+F_8(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)\cos((n+1/2)(t-x))}{(n+1/2)^2} \\
&+F_9(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((n+1/2)(t+x))}{(n+1/2)^2} + F_{10}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((n+1/2)(t-x))}{(n+1/2)^2} \\
&+F_{11}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((n+1/2)(t+x))}{(n+1/2)^2} + F_{12}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((n+1/2)(t-x))}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir, burada,

$$
F_1(x,t) := \frac{(x+t)}{2\pi^2}\int_0^{\pi} q(t)dt\ , \qquad F_2(x,t) := \frac{(t-x)}{2\pi^2}\int_0^{\pi} q(t)dt,
$$

$$
F_3(x,t) := \left(\frac{\delta c_p x(t-\pi) + t(x-\pi)}{2\pi^3} - \frac{\delta c_p(x+t) - c_1(x^2+t^2)}{2\pi^2}\right)\int_0^{\pi} q(t)dt - \frac{(d_2 - d_2^0)}{4},
$$

$$F_4(x,t) := \frac{\delta c_p x(t-\pi)+t(x-\pi)}{2\pi^3}+\frac{\delta c_p(x+t)-c_1(x^2+t^2)}{2\pi^2}\Bigg)\int_0^\pi q(t)dt+\frac{(d_2-d_2^0)}{4},$$

$$F_5(x,t) := \left(\frac{t}{2\pi^2}-\frac{\delta M_4(x+t)}{4\pi^2}\right)\int_0^\pi q(t)dt,$$

$$F_6(x,t) := \left(\frac{t}{2\pi^2}+\frac{\delta M_4(x-t)}{4\pi^2}\right)\int_0^\pi q(t)dt,$$

$$F_7(x,t) := \left(\frac{Ax(t-\pi)+At(x-\pi)}{4\pi^3}-\frac{Ax(\pi-x)+At(\pi-t)}{2\pi^3}\right)\int_0^\pi q(t)dt-\frac{(d_4-d_4^0)}{2},$$

$$F_8(x,t) := \left(\frac{Ax(t-\pi)+At(x-\pi)}{4\pi^3}+\frac{Ax(\pi-x)+At(\pi-t)}{2\pi^3}\right)\int_0^\pi q(t)dt+\frac{(d_4-d_4^0)}{2},$$

$$F_9(x,t) := \Bigg[\left(\frac{2AM_5+A\ln\pi-2H}{4\pi^3}-\frac{\delta}{4(p-1)\pi^{p+2}}\right)(x+t)^2-\frac{AM_5(x+t)}{\pi^2}$$

$$+\frac{\delta}{4(p-1)\pi^2}\left(\frac{x^{p-1}+t^{p-1}}{(xt)^{p-1}}\right)(x+t)+\frac{A}{4\pi^2}(x-t)\ln\frac{t}{x}\Bigg]\int_0^\pi q(t)dt-\frac{(d_5-d_5^0)}{4},$$

$$F_{10}(x,t) := \Bigg[\left(-\frac{2AM_5+A\ln\pi-2H}{4\pi^3}+\frac{\delta}{4(p-1)\pi^{p+2}}\right)(x-t)^2+\frac{AM_5(x-t)}{\pi^2}$$

$$+\frac{\delta}{4(p-1)\pi^2}\left(\frac{x^{p-1}-t^{p-1}}{(xt)^{p-1}}\right)(x-t)+\frac{A}{4\pi^2}(x+t)\ln\frac{t}{x}\Bigg]\int_0^\pi q(t)dt+\frac{(d_5-d_5^0)}{4},$$

$$F_{11}(x,t) := -\frac{A(x+t)}{8\pi}\int_0^\pi q(t)dt\ , \qquad F_{12}(x,t) := \frac{A(x-t)}{8\pi}\int_0^\pi q(t)dt,$$

elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\ 0<x<2\pi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}\ ,\ 0<x<2\pi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}=x\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\int x\cot\frac{x}{2}dx,\ \ 0\le x\le 2\pi \ \text{ ve } \ 0<x<1 \text{ için}$$

olduğundan dolayı, $F(x,t)$fonksiyonu $0<x<\pi$ ve $0<t<\pi$ için x ve t değişkenlerine göre sürekli türevlenebilirdir.

2.2. $K(x,t)$ Fonksiyonuna göre İntegral Denkleminin Çözümünün Varlığı

Bu bölümde (2.1.6) integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanacaktır. Bunun için

$$g(t)+\int_0^x F(s,t)g(s)ds=0 \tag{2.2.1}$$

homojen integral denklemin $x \leq \pi$ için bir tek $g \equiv 0$ çözümü var olduğu gösterilmelidir. (2.2.1) denkleminin $g(t) \not\equiv 0$ bir çözümü var olduğu kabul edilirse, bu durumda (2.2.1) denkleminin her iki tarafı $g(t)$ fonksiyonu ile çarpılıp $[0,x]$ aralığında t değişkenine göre integrallenirse,

$$\int_0^x g^2(t)dt+\int_0^x\int_0^x F(s,t)g(s)g(t)dsdt=0$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $F(x,t)$ fonksiyonu yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^x g(t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt\right)^2=0$$

bulunur. Burada her n için α_n pozitif olduğundan

$$\int_0^x g(t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt=0 \tag{2.2.2}$$

olur.

Eğer $\varphi_0(t,\lambda_n)$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayında tam olduğu gösterilebilirse, $g(t)\equiv 0$ çelişkisi elde edilir. Bunu göstermek için $L_2[0,\pi]$ uzayından alınan keyfi bir $f(t)$ fonksiyonu $\int_0^\pi f(t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt=0$ eşitliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşulun $f(t)\equiv 0$ olduğu gösterilmelidir. M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov yapmış oldukları bu çalışmada [14]

$$\varphi_0(t,\lambda_n)=\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}+\int_0^t K_0(t,s)\frac{\sin\lambda_n s}{\lambda_n}ds$$

eşitliğini ispat etmişlerdir. Buradaki $\varphi_0(t,\lambda_n)$ ifadesi son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\varphi_0(t,\lambda_n) &= \int_0^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n} + \int_0^{t} K_0(t,s)\frac{\sin\lambda_n s}{\lambda_n}ds\right]dt \\ &= \int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}dt + \int_0^{\pi} f(t)\int_0^{t} K_0(t,s)\frac{\sin\lambda_n s}{\lambda_n}dsdt \\ &= \int_0^{\pi}\left[f(t) + \int_t^{\pi} K_0(t,s)f(s)ds\right]\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}dt = 0\end{aligned}$$

elde edilir. $\left\{\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}\right\}$ fonksiyonlar sistemi $L_2[0,\pi]$ uzayında lineer bağımsız ve tam olduğundan $\sup_{0\le t\le\pi}\int_0^t K_0^2(t,s)ds < \infty$ ve $f(t)\in L_2[0,\pi]$ olmak üzere

$$f(t) + \int_t^{\pi} K_0(t,s)f(s)ds = 0$$

bulunur. Bu son denklem $f(t)$ fonksiyonu için Volterra tipinden integral denklemi olduğundan, Volterra tipindeki integral denklemler teorisinden yararlanılarak $f(t)\equiv 0$ elde edilir ki, bu da $\{\varphi_0(t,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayında tam olduğunu verir. (2.2.2) eşitliğinden $g(t)\equiv 0$ olduğu bulunur. Bu ise ispatı bitirir.

(2.1.6) integral denkleminden görüldüğü gibi $K(x,t)$ fonksiyonunun t' ye göre türevlenebilirlik mertebesi, $F(x,t)$ fonksiyonunun türevlenebilirlik mertebesi ile aynıdır. $K(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre araştırılması B.M. Levitan ve M.G. Gasimov [8] tarafından yapılan benzeri sonuca uygun olarak aşağıdaki Lemma ile ifade edilir.

Lemma 2.2.1: $H(t,s,a)$ ve $g(t,a)$ fonksiyonları t değişkenine ve a parametresine göre sürekli olmak üzere,

$$g(t,a) = h(t,a) + \int_0^t H(t,s,a)h(s,a)ds$$

integral denklemi verilmiş olsun. Burada $H(t,s,a)$ verilen integral denklemin çekirdeği, $g(t,a)$ ise serbest terimdir. Eğer verilen integral denkleme karşılık gelen homojen integral denklemin $a = a_0$ için bir tek trivial çözümü var ise verilen integral denklemin $a = a_0$' ın herhangi yakın komşuluğunda $h(t,a)$ çözümü t ve a' ya göre süreklidir. Eğer $H(t,s,a)$ ve $g(t,a)$ fonksiyonları a parametresine göre m. mertebeden türevlere sahip ise $h(t,a)$ fonksiyonu da a parametresine göre m. mertebeden türeve sahiptir.

Lemma'nın sonucu olarak; $F(x,t)$ fonksiyonu x ve t değişkenlerine göre sürekli olduğu zaman $K(x,t)$ fonksiyonu da x ve t değişkenlerine göre süreklidir. Ayrıca $K(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesi ile $F(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesi aynıdır.

2.3. Diferansiyel Denklemin ve Sınır Koşullarının Belirlenmesi

Bu bölümde $F(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerinden yaralanarak $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar dizisinin sağladığı diferansiyel denklem ve sınır koşulları belilenecektir. $F(x,t)$ fonksiyonu x ve t değişkenlerine göre ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu durumda Lemma (2.2.1)' e göre $K(x,t)$ fonksiyonu da x ve t değişkenlerine göre ikinci mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

Lemma 2.3.1: (2.1.5) formülüyle verilen $F(x,t)$ fonksiyonu,

$$-F_{xx}(x,t)+\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]F(x,t)=-F_{tt}(x,t)+\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]F(x,t) \qquad (2.3.1)$$

diferansiyel denklemini sağlar.

Lemma'nın ispatı M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [14] tarafından verilen Lemma' nın ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 2.3.2: (2.1.6) integral denkleminin çözümü olan $K(x,t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}K_{xx}(x,t)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]K(x,t)-2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t)=&\\ =K_{tt}(x,t)-\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t)&\end{aligned} \qquad (2.3.2)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemini sağlar.

İspat:

$$F(x,t)+\int_0^x K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi+K(x,t)=0 \qquad (2.3.3)$$

denklemi x değişkenine göre iki kez diferansiyellenirse,

$$\begin{aligned}F_{xx}(x,t)\quad &+K_{xx}(x,t)+\frac{dK(x,x)}{dx}F(x,t)+K(x,x)F_x(x,t)\\ &+K_x(x,t)|_{t=x}F(x,t)+\int_0^x K_{xx}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi=0\end{aligned} \qquad (2.3.4)$$

ve yine (2.3.3) denklemi bu kez t değişkenine göre iki kez diferansiyellenirse,

$$F_{tt}(x,t)+K_{tt}(x,t)+\int_0^x K(x,\xi)F_{tt}(\xi,t)d\xi=0$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.1) denkleminden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} F_{tt}(x,t) &+ \int_0^x \left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}-\frac{A}{\xi}-\frac{\delta}{\xi^p}\right] K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi \\ &+ \int_0^x K(x,\xi)F_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi + K_{tt}(x,t) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlikte kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} F_{tt}(x,t) &+ \int_0^x \left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}-\frac{A}{\xi}-\frac{\delta}{\xi^p}\right] K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi \\ &+ K(x,\xi)F_{\xi}(t,\xi) - K_{\xi}(x,\xi)F(\xi,t)\big|_{\xi=0}^{x} \qquad (2.3.5) \\ &+ \int_0^x K_{\xi\xi}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi + K_{tt}(x,t) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $F(x,t)$ fonksiyonu ikinci mertebeden türevleri sınırlı olduğundan (2.3.5) eşitliğinde $t \longrightarrow 0$ iken limit alınırsa,

$$F(x,0) = 0 \qquad (2.3.6)$$

olur. Bu ise (2.3.3) ve (2.3.6) dan $K(x,0) = 0$ olduğunu verir. Böylece,

$$\begin{aligned} F_{tt}(x,t) &+ \int_0^x \left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}-\frac{A}{\xi}-\frac{\delta}{\xi^p}\right] K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi \\ &+ K(x,\xi)F_{\xi}(\xi,t) - K_{\xi}(x,\xi)F(x,t)\big|_{\xi=x} \qquad (2.3.7) \\ &+ \int_0^x K_{\xi\xi}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi + K_{tt}(x,t) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.3) eşitliğini $\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}-\frac{A}{x}-\frac{\delta}{x^p}-2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]$ ifadesiyle çarpmakla elde edilen yeni eşitliğe (2.3.4) eşitliği eklenir ve bu son ifadeden (2.3.5) eşitliği çıkarılırsa, (2.3.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} K_{xx}(x,t) &- \left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]K(x,t) - K_{tt}(x,t) + \left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t) \\ &-2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t) + \int_0^x \left\{K_{xx}(x,\xi) - \left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]K(x,\xi)\right. \qquad (2.3.8) \end{aligned}$$

$$-K_{\xi\xi}(x,\xi)+\left[\frac{A}{\xi}+\frac{\delta}{\xi^p}\right]K(x,\xi)-2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,\xi)\Bigg\}F(\xi,t)d\xi=0$$

elde edilir. (2.3.8) eşitliği homojen Volterra tipinde bir integral denklemi olduğu için

$$\begin{aligned}K_{xx}(x,t) \quad &-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]K(x,t)-K_{tt}(x,t)-\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t)\\ &-2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t)=0\end{aligned}$$

veya

$$K_{xx}(x,t)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t)\right]K(x,t)=K_{tt}(x,t)-\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t)$$

olur. Şimdi ise $K(x,t)$ fonksiyonunun yardımıyla,

$$\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_0(x,\lambda_n)+\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt \tag{2.3.9}$$

şeklinde $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi oluşturulsun. Burada $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi, $q(x)=0$ durumunda (2.1.1) denkleminin (2.1.3) koşullarını sağlayan çözümüdür.

Teorem 2.3.3: (2.3.9) eşitliği ile verilen $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu (2.1.1) diferansiyel denklemin çözümüdür ve

$$q(x)=2\frac{dK(x,x)}{dx}.$$

İspat :

$$\varphi_0''(x,\lambda_n)-\left\{\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}-\lambda_n^2\right\}\varphi_0(x,\lambda_n)=0 \tag{2.3.10}$$

olduğundan, (2.3.9)' daki $\varphi(x,\lambda_n)$' nin ifadesi (2.1.1) diferansiyel denkleminin sol tarafında yerine yazılırsa,

$$\varphi''(x,\lambda_n)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]\varphi(x,\lambda_n)+\lambda_n^2\varphi(x,\lambda_n)=$$

$$=-\frac{dK(x,x)}{dx}\varphi_0(x,\lambda_n)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt$$

$$-2\frac{dK(x,x)}{dx}\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt+\lambda_n^2\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt$$

$$+K(x,x)\frac{d}{dx}\varphi_0(x,\lambda_n)+K_x(x,t)\varphi_0(x,\lambda_n)\Big|_{t=x}+\int_0^x K_{xx}(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt$$

elde edilir. (2.3.2) eşitliği kullanılarak son eşitlikteki $K_{xx}(x,t)$, $K_{tt}(x,t)$ ile ifade edilirse,

$$\begin{aligned}
&\varphi''(x,\lambda_n)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]\varphi(x,\lambda_n)+\lambda_n^2\varphi(x,\lambda_n)=\\
&=-\frac{dK(x,x)}{dx}\varphi_0(x,\lambda_n)+\lambda_n^2\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt\\
&+K(x,x)\frac{d}{dx}\varphi_0(x,\lambda_n)+K_x(x,t)\varphi_0(x,\lambda_n)|_{t=x}\\
&+\int_0^x K_{tt}(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt-\int_0^x\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt
\end{aligned}\tag{2.3.11}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\int_0^x K_{tt}(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt &= K_t(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)|_{t=x}-K(x,x)\frac{d}{dx}\varphi_0(x,\lambda_n)\\
&+\int_0^x K(x,t)\frac{d^2}{dx^2}\varphi_0(t,\lambda_n)dt
\end{aligned}$$

olduğundan, bu ifade (2.3.11) 'de yerine yazılır ve (2.3.10) kullanılırsa, $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu için

$$-\varphi''(x,\lambda_n)+\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n^2\varphi(x,\lambda_n)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [14] tarafından yapılan çalışmanın sonuçları kullanılarak, (2.3.9) denklemi ile verilen $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayında bir tam sistem oluşturduğu açıktır.

Şimdi ise, $x=\pi$ noktasında $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonunun sağladığı sınır koşullarını belirtmek için,

$$\varphi''(x,\lambda_n)+\left[\lambda_n-q(x)-\frac{A}{x}-\frac{\delta}{x^p}\right]\varphi(x,\lambda_n)=0$$

ve

$$\varphi''(x,\lambda_m)+\left[\lambda_m-q(x)-\frac{A}{x}-\frac{\delta}{x^p}\right]\varphi(x,\lambda_m)=0$$

denklemlerinin birincisi $\varphi(x,\lambda_m)$, ikincisi $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\left[\varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)-\varphi'(x,\lambda_m)\varphi(x,\lambda_n)\right]'=(\lambda_m-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik $[0,\pi]$ aralığında integrallenir ve $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayındaki ortogonalliği kullanılırsa,

$$\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)-\varphi'(\pi,\lambda_m)\varphi(\pi,\lambda_n)=0$$

veya

$$\frac{\varphi'(\pi,\lambda_n)}{\varphi(\pi,\lambda_n)}=\frac{\varphi'(\pi,\lambda_m)}{\varphi(\pi,\lambda_m)}\qquad (n,m=0,1,\dots)$$

eşitliği bulunur. Buradan, sabit bir $\frac{\varphi'(\pi,\lambda_n)}{\varphi(\pi,\lambda_n)}$ sayısı veya

$$\varphi'(\pi,\lambda_n)-H\varphi(\pi,\lambda_n)=0$$

sınır koşulu elde edilir.

Böylece, aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.4: $q(x)\in W_2^2[0,\pi]$ ve $p\in(1,5/4)$ olmak üzere $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin (2.1.1), (2.1.2) tipindeki bir problemin spektral karakteristikleri olması için $k\neq n$, $\rho_k\neq\rho_n$ ve her n için $\alpha_n>0$ ve c_i , b_i sayıları bilinen sabitler olmak üzere,

$$\rho_n=(n+1/2)+\frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)}+\frac{c_2}{(n+1/2)}+\frac{c_7}{(n+1/2)^{4-2p}}$$
$$+c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+\frac{c_8}{(n+1/2)^{3-p}}+\frac{c_{10}}{(n+1/2)^2}+\frac{c_{31}}{(n+1/2)^{6-3p}}+c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}}$$

$$
+\frac{c_{32}}{(n+1/2)^{5-2p}}+c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}}+c_{33}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}}+\frac{c_{34}}{(n+1/2)^{4-p}}
$$

$$
-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+c_{17}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+c_{35}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3}+\frac{c_{19}}{(n+1/2)^3}+O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right)
$$

ve

$$
\alpha_n=\frac{}{2}+\frac{\delta M_1\pi}{2}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)}+\frac{b_1}{(n+1/2)^{4-2p}}+\delta c_p A\pi\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}
$$

$$
+\frac{b_2}{(n+1/2)^{3-p}}+b_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+b_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+\frac{b_5}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)
$$

asimptotik formüllerinin sağlanması yeterlidir.

III. BÖLÜM

İKİ SPEKTRUMA GÖRE STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN BELİRLENMESİ

3.1. Normalleştirici Sayıların İki Spektrumu Türündenden İfadesi

$$-y'' + \left\{\frac{A}{x} + \frac{\delta}{x^p} + q(x)\right\} y = \lambda y \quad , \quad \lambda =: \rho^2 \tag{3.1.1}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0 \tag{3.1.2}$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(\pi) - H_2 y(\pi) = 0 \tag{3.1.3}$$

sınır koşulları verilsin.

Burada $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$, $p \in (1, 5/4)$, δ, A, H_1 ve H_2 gerçel sayıları ve $H_1 \neq H_2$. $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ ve $\mu_0 < \mu_1 < \ldots$ ile sırasıyla (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.1), (3.1.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsun.

$$\varphi(0,\lambda) = 0 \quad , \quad \varphi'(0,\lambda) = \rho \tag{3.1.4}$$

başlangıç koşullarını sağlayan (3.1.1) denkleminin çözümü $\varphi(x,\lambda)$ ile gösterilsin. Ayrıca, (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.1), (3.1.3) sınır değer problemlerinin sırasıyla $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ ve $\mu_0, \mu_1, \ldots$ özdeğerleri

$$\Phi_1(\lambda) := \varphi'(\pi,\lambda) - H_1 \varphi(\pi,\lambda) \tag{3.1.5}$$

$$\Phi_2(\lambda) := \varphi'(\pi,\lambda) - H_2 \varphi(\pi,\lambda) \tag{3.1.6}$$

fonksiyonlarının sıfırları ile çakışmaktadır.

$\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonları (3.1.1), (3.1.2) sınır-değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{3.1.7}$$

olsun.

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ sayılarına (3.1.1), (3.1.2) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları denir. Bu kısımda $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ ve $\mu_0, \mu_1, \ldots$.spektrumları cinsinden $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ sayıların hesaplanması için bir formül verilecektir.

Lemma 3.1.1: $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) denkleminin (3.1.4) koşullarını sağlayan çözümü ise

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda)dx = \varphi'(\pi,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) - \varphi(\pi,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda) \qquad (3.1.8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$-\varphi''(x,\lambda) + Q(x)\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)$$

$$-\varphi''(x,\mu) + Q(x)\varphi(x,\mu) = \mu\varphi(x,\mu)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerin birincisi $\varphi(x,\mu)$ ile ikincisi $\varphi(x,\lambda)$ ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$-\varphi''(x,\lambda)\varphi(x,\mu) + \varphi''(x,\mu)\varphi(x,\lambda) = (\lambda-\mu)\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)$$

elde edilir. Bu eşitlik $[0,\pi]$ aralığında x değişkenine göre integrallenirse

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)dx &= \int_0^\pi \left[\varphi''(x,\mu)\varphi(x,\lambda) - \varphi''(x,\lambda)\varphi(x,\mu)\right]dx \\ &= \int_0^\pi \varphi''(x,\mu)\varphi(x,\lambda)dx - \int_0^\pi \varphi''(x,\lambda)\varphi(x,\mu)dx\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki integrallerde bir kez kısmi integralleme yapılırsa,

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)dx &= \varphi(\pi,\lambda)\varphi'(\pi,\mu) - \varphi(0,\lambda)\varphi'(0,\mu) \\ &\quad -\varphi(\pi,\mu)\varphi'(\pi,\lambda) + \varphi(0,\mu)\varphi'(0,\lambda)\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)dx = \frac{\varphi(\pi,\lambda)\left[\varphi'(\pi,\mu)-\varphi'(\pi,\lambda)\right]-\varphi'(\pi,\lambda)\left[\varphi(\pi,\mu)-\varphi(\pi,\lambda)\right]}{(\lambda-\mu)}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte $\mu \longrightarrow \lambda$ iken limite geçilirse (3.1.8) formülü bulunur.

Ayrıca, $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu her x için λ parametresine göre tam fonksiyondur. Tam fonksiyonlar teorisinden [46] bilindiği gibi $\Phi_1(\lambda)$ ve $\Phi_2(\lambda)$ fonksiyonları 1/2 büyüme mertebeli tam fonksiyonlar olduğundan Weierstrass teoreminden

$$\varphi'(\pi,\lambda) - H_1\varphi(\pi,\lambda) = C_1 \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right) = \Phi_1(\lambda) \tag{3.1.9}$$

ve

$$\varphi'(\pi,\lambda) - H_2\varphi(\pi,\lambda) = C_2 \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right) = \Phi_2(\lambda) \tag{3.1.10}$$

şeklinde yazılabileceği açıktır. Burada C_1 ve C_2 sabitlerdir. (3.1.9) ve (3.1.10) eşitliklerinden,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda) - H_1\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) =: \dot{\Phi}_1(\lambda)$$
$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda) - H_2\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) =: \dot{\Phi}_2(\lambda)$$

olduğu açıktır. Buradan,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda) = \frac{1}{H_2-H_1}\left(H_2\dot{\Phi}_1(\lambda) - H_1\dot{\Phi}_2(\lambda)\right)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) = \frac{1}{H_2-H_1}\left(\dot{\Phi}_1(\lambda) - \dot{\Phi}_2(\lambda)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikler (3.1.8) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda)dx = \varphi'(\pi,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) - \varphi(\pi,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda)$$

$$= \frac{\varphi'(\pi,\lambda)\left[\dot{\Phi}_1(\lambda)-\dot{\Phi}_2(\lambda)\right] - \varphi(\pi,\lambda)\left[H_2\dot{\Phi}_1(\lambda) - H_1\dot{\Phi}_2(\lambda)\right]}{H_2-H_1}$$

$$= \frac{1}{H_2-H_1}\left[\left(\varphi'(\pi,\lambda)-H_2\varphi(\pi,\lambda)\right)\dot{\Phi}_1(\lambda) - \left(\varphi'(\pi,\lambda)-H_1\varphi(\pi,\lambda)\right)\dot{\Phi}_2(\lambda)\right]$$

$$\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda)dx = \frac{1}{H_2-H_1}\left[\Phi_2(\lambda)\dot{\Phi}_1(\lambda) - \Phi_1(\lambda)\dot{\Phi}_2(\lambda)\right]$$

olur. $\lambda = \lambda_n$ için $\Phi_1(\lambda_n) = 0$ olduğundan

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx = \frac{1}{H_2 - H_1}\dot{\Phi}_1(\lambda_n)\Phi_2(\lambda_n)$$

eşitliği elde edilir.

$q(x) \equiv 0$ olduğu durumda (3.1.1) denkleminin (3.1.4) koşulunu sağlayan çözümü $\varphi_0(x,\lambda)$ olsun. $q(x) \equiv 0$ olduğunda $\lambda_0^0, \lambda_1^0, \ldots$ ve $\mu_0^0, \mu_1^0, \ldots$ ' ler sırasıyla (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.1), (3.1.3) sınır değer problemlerinin özdeğerlerini göstersin. Bu durumda $\lambda_0^0, \lambda_1^0, \ldots$ ve $\mu_0^0, \mu_1^0, \ldots$ özdeğerleri sırasıyla,

$$\varphi_0'(\pi,\lambda) - H_1\varphi_0(\pi,\lambda) = C_1^0 \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k^0}\right) = \Phi_{01}(\lambda) \tag{3.1.11}$$

ve

$$\varphi_0'(\pi,\lambda) - H_2\varphi_0(\pi,\lambda) = C_2^0 \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k^0}\right) = \Phi_{02}(\lambda) \tag{3.1.12}$$

fonksiyonlarının sıfırları ile çakışır.

$\{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\}_{n\geq 0}$ ile (3.1.1), (3.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonları gösterilirse, bu problemin α_n^0 normalleştirici sayıları,

$$\alpha_n^0 = \int_0^\pi \varphi_{0n}^2(x)dx \tag{3.1.13}$$

formülü ile verilecektir. (3.1.11) ve (3.1.12) eşitliklerinin yardımıyla

$$\int_0^\pi \varphi_0^2(x,\lambda_n^0)dx = \frac{1}{H_2 - H_1}\dot{\Phi}_{01}(\lambda_n^0)\Phi_{02}(\lambda_n^0)$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla, α_n ve α_n^0 ' lar için,

$$\alpha_n = \frac{1}{H_2 - H_1}\dot{\Phi}_1(\lambda_n)\Phi_2(\lambda_n) \tag{3.1.14}$$

ve

$$\alpha_n^0 = \frac{1}{H_2 - H_1}\dot{\Phi}_{01}(\lambda_n^0)\Phi_{02}(\lambda_n^0) \tag{3.1.15}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca,

$$\dot{\Phi}_1(\lambda_n) = -\frac{C_1}{\lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)$$

$$\dot{\Phi}_{01}(\lambda_n^0) = -\frac{C_1^0}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)$$

olduğundan (burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir) bu formüller, (3.1.14), (3.1.15) eşitliklerinden,

$$\alpha_n = -\frac{C_1 C_2}{H_2 - H_1}\frac{1}{\lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right) \tag{3.1.16}$$

ve

$$\alpha_n^0 = -\frac{C_1^0 C_2^0}{H_2 - H_1}\frac{1}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right) \tag{3.1.17}$$

şekline dönüşür.

α_n sayılarını α_n^0 'larla ifade etmek için $\Phi_2(\lambda_n)$ ve $\dot{\Phi}_1(\lambda_n)$ fonksiyonları $\Phi_{02}(\lambda_n)$ ve $\dot{\Phi}_{01}(\lambda_n)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\lambda_n) &= C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right) = C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)\frac{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right)}{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)} \\
&= C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k^0}{\mu_k}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} \\
&= B_2C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} \\
&= B_2C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)\frac{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)}{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} \\
&= B_2C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}.
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde

$$\dot{\Phi}_1(\lambda_n) = -\frac{B_1C_1}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}$$

olduğu görülür. Bu formüller ve (3.1.14) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{H_2-H_1}\dot{\Phi}_1(\lambda_n)\Phi_2(\lambda_n) = -\frac{1}{H_2-H_1}\frac{B_1C_1}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0} \\
&\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}B_2C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} \\
&= -\frac{B_1B_2C_1C_2}{H_2-H_1}\frac{1}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0} \\
&\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} \\
&= \frac{C_1C_2}{C_1^0C_2^0}B_1B_2\alpha_n^0\frac{\lambda_n-\mu_n}{\lambda_n^0-\mu_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\frac{C_1C_2}{C_1^0C_2^0}B_1B_2 = 1 \tag{3.1.18}$$

dir. Bunun için

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_{01}(\lambda)} = 1$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{C_1}{C_1^0}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k^0}\right)^{-1} = \frac{C_1}{C_1^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k^0-\lambda} = 1 \tag{3.1.19}$$

olduğudan,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k^0-\lambda} = \lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda}\right) = 1 \tag{3.1.20}$$

eşitliğinin doğruluğu gösterilmelidir.

Asimptotik formüllerden

$$\lambda_k = (k+1/2)^2 + 2c_1\,(k+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln\,(k+1/2) + O(1)$$

ve

$$\lambda_k^0 = (k+1/2)^2 + 2c_1\,(k+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln\,(k+1/2) + O(1)$$

olduğundan $\lambda_k - \lambda_k^0 = O(1)$ dir. Buradan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda} \right|$$

serisi $-\infty < \lambda \leq -1$ için λ'ya göre düzgün yakınsaktır. Böylece (3.1.20) sonsuz çarpımı $-\infty < \lambda \leq -1$ için λ'ya göre düzgün yakınsaktır. Bu durumda bu çarpımda $\lambda \longrightarrow -\infty$ limiti alınırsa,

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda} \right) = 1$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{C_1}{C_1^0} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k} = \frac{C_1}{C_1^0} B_1 = 1$$

bulunur. Bu ise,

$$\frac{C_1 C_2}{C_1^0 C_2^0} B_1 B_2 = 1$$

olduğunu verir. Dolayısıyla α_n'ler için

$$\begin{aligned} \alpha_n = \alpha_n^0 \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_n^0 - \mu_n^0} \frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_n^0 - \lambda_0^0} \frac{\lambda_n - \mu_0}{\lambda_n^0 - \mu_0^0} \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0} \\ \times \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k^0} \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k^0}{\lambda_n^0 - \mu_k^0} \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n - \mu_k^0} \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

formülü elde edilmiş olur.

3.2. α_n Sayıları için Asimptotik Formül

$\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ ve $\mu_0, \mu_1, \ldots$ sayı dizileri verilsin. Bu sayı dizileri sırasıyla (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.1), (3.1.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsun. Bu durumda aşağıdaki asimptotik formüller sağlanmaktadır.

$$\begin{aligned}\rho_n &= (n+1/2) + \frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} + \frac{c_2}{(n+1/2)} \\ &+ \frac{c_3}{(n+1/2)^{4-2p}} + c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_5}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_{10}}{(n+1/2)^2} \\ &+ \frac{c_6}{(n+1/2)^{6-3p}} + c_7\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}} + \frac{c_8}{(n+1/2)^{5-2p}} \\ &- \frac{A^2\delta c_p}{4\pi}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + c_{11}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + \frac{c_{12}}{(n+1/2)^{4-p}} \\ &- \frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3} - c_{13}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + c_{14}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3} \\ &+ \frac{c_{15}}{(n+1/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right),\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}s_n &= (n+1/2) + \frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} + \frac{c_2'}{(n+1/2)} \\ &+ \frac{c_3}{(n+1/2)^{4-2p}} + c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_5'}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_{10}'}{(n+1/2)^2} \\ &+ \frac{c_6}{(n+1/2)^{6-3p}} + c_7\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}} + \frac{c_8'}{(n+1/2)^{5-2p}} \\ &- \frac{A^2\delta c_p}{4\pi}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + c_{11}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + \frac{c_{12}}{(n+1/2)^{4-p}} \\ &- \frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3} - c_{13}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + c_{14}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3} \\ &+ \frac{c_{15}}{(n+1/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right),\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

burada,

$$c_2 = \frac{1}{\pi}\left[-H_1 + \frac{A\ln\pi}{2} + AM_2 + \frac{\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right],$$

$$c_2' = \frac{1}{\pi}\left[-H_2 + \frac{A\ln\pi}{2} + AM_2 + \frac{\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right],$$

$$M_2 = \frac{\sin 2}{4} + \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t} dt$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$H_1 - H_2 = \pi(c_2' - c_2) \tag{3.2.3}$$

(3.2.1) ve (3.2.2) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= (n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) + 2c_2 \\
&+ \frac{2c_3}{(n+1/2)^{3-2p}} + 2c_4\frac{\ln(n+12/2)}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_5}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_{10}}{(n+1/2)} \\
&+ \frac{2c_6}{(n+1/2)^{5-3p}} + 2c_7\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-2p}} + \frac{\gamma_1}{(n+1/2)^{4-2p}} \\
&- \frac{A^2\delta c_p}{2\pi}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \gamma_2\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{\gamma_3}{(n+1/2)^{3-p}} \\
&- \frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \gamma_4\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \gamma_5\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ \frac{\gamma_6}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{7-4p}}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned}
\mu_n &= (n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) + 2c_2' \\
&+ \frac{2c_3}{(n+1/2)^{3-2p}} + 2c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_5'}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_{10}'}{(n+1/2)} \\
&+ \frac{2c_6}{(n+1/2)^{5-3p}} + 2c_7\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-2p}} + \frac{\gamma_1'}{(n+1/2)^{4-2p}} \\
&- \frac{A^2\delta c_p}{2\pi}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \gamma_2'\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{\gamma_3'}{(n+1/2)^{3-p}} \\
&- \frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \gamma_4'\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \gamma_5'\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ \frac{\gamma_6'}{n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{7-4p}}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

elde edilir.

λ_n ve μ_n sayıları (3.1.1) denkleminin farklı spektrumları ise (3.1.1), (3.1.2) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları (3.1.21) formülü ile verilir.

Bu kısımda λ_n ve μ_n sayıları için bilinen asimptotik formüller türünden α_n sayıları için asimptotik formüller verilecektir. Bu işlem bir kaç adımda gerçekleştirilecektir. İlk olarak,

$$\Psi(\lambda_n) = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right)$$

sonsuz çarpımı alınırsa,

$$\ln \Psi(\lambda_n) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \ln\left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right)$$

olduğundan yeterince büyük n ve $k \neq n$ için

$$\left|\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right| < \frac{C}{n + 1/2}$$

eşitsizliği doğrudan (C bir sabite karşılık gelecek) elde edilir. Böylece

$$\ln \Psi(\lambda_n) = -\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right)^r\right] \tag{3.2.6}$$

olur.

Lemma 3.2.1: $|\lambda_k - \lambda_k^0| \leq a \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left|\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right|^r \leq \begin{cases} C\dfrac{\ln(n + 1/2)}{(n + 1/2)}, & r = 1 \\ C\dfrac{a^r}{(n + 1/2)^r}, & r > 1 \end{cases} \tag{3.2.7}$$

İspat: $|\lambda_k - \lambda_k^0| \leq a \quad k = 1, 2, \ldots$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left|\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right|^r \leq a^r \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{|\lambda_k^0 - \lambda_n|^r}$$

olur. Kolayca görülür ki, eşitsizliğin sağ tarafındaki toplam

$$\int_1^{n-1/2} \frac{dx}{(\lambda_n - x^2)^r} + \int_{n+3/2}^{\infty} \frac{dx}{(\lambda_n - x^2)^r} \tag{3.2.8}$$

integrallerin toplamı ile yakınsaklık mertebesi aynıdır. Bu integralleri hesaplanırsa,

$$\int_{n+3/2}^{\infty} \frac{dx}{(\lambda_n - x^2)^r} \leq C\frac{1}{(n + 1/2)^r} \int_{n+3/2}^{\infty} \frac{dx}{(x - \sqrt{\lambda_n})^r} = \frac{C}{(n + 1/2)^r}, \qquad (r > 1)$$

$$\int\limits_{n+3/2}^{\infty} \frac{dx}{\lambda_n - x^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{\lambda_n}}{x+\sqrt{\lambda_n}} \right| \Bigg|_{x=n+3/2}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \qquad (r=1)$$

$$\int\limits_{1}^{n-1/2} \frac{dx}{(\lambda_n - x^2)^r} \leq \frac{C}{(n+1/2)^r} \int\limits_{1}^{n-1/2} \frac{dx}{(\sqrt{\lambda_n} - x)^r} = \begin{cases} O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right), & (r=1) \\ O\left(\dfrac{1}{n^r}\right), & (r>1) \end{cases}$$

olduğu görülür. $\ln \Psi(\lambda_n)$ ifadesi incelenirse, (3.2.7) değerlendirmesinden

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^{\infty}{}' \sum_{r=3}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n} \right)^r \right| \leq \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left| \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n} \right|^r \leq \\ &\leq C \sum_{r=3}^{\infty} \frac{a^r}{(n+1/2)^r} = \frac{Ca^3}{(n+1/2)^3} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r}{(n+1/2)^r} = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \qquad (3.2.9)$$

olduğundan, (3.2.6) formülünden yararlanılarak

$$\ln \Psi(\lambda_n) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n} \right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (3.2.10)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi n'nin yeterince büyük değerleri için bu formülde olan toplamların davranışı araştırılacaktır. (3.2.4) ve (3.2.5) asimptotik formüllerin yardımı ile (3.2.10) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci toplamın

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n} &= \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left\{ \lambda_k - \lambda_k^0 - 2(c_2 - c_2^0) - \frac{2(c_5 - c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}} \right. \\ &\left. - \frac{(\gamma_1 - \gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}} - (\gamma_2 - \gamma_2^0) \frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}} - \frac{(\gamma_3 - \gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}} \right\} \\ &\times \left[\frac{1}{\lambda_k^0 - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} \right] + 2(c_2 - c_2^0) \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\lambda_k^0 - \lambda_n} \\ &+ 2(c_5 - c_5^0) \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(\lambda_k^0 - \lambda_n)(k+1/2)^{2-p}} \\ &+ (\gamma_1 - \gamma_1^0) \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(\lambda_k^0 - \lambda_n)(k+1/2)^{4-2p}} \\ &+ (\gamma_2 - \gamma_2^0) \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln(k+1/2)}{(\lambda_k^0 - \lambda_n)(k+1/2)^{3-p}} \end{aligned} \qquad (3.2.11)$$

$$+(\gamma_3-\gamma_3^0)\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(\lambda_k^0-\lambda_n)(k+1/2)^{3-p}}$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left\{\lambda_k-\lambda_k^0-2\,(c_2-c_2^0)-\frac{2(c_5-c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}}\right.$$

$$\left.-\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}}-(\gamma_2-\gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}}-\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\}$$

$$=S_1+2(c_2-c_2^0)S_2+2(c_5-c_5^0)S_3+(\gamma_1-\gamma_1^0)S_4+(\gamma_2-\gamma_2^0)S_5$$

$$+(\gamma_3-\gamma_3^0)S_6-S_7$$

eşitliğini sağladığı görülür.

Şimdi S_7 toplamı için,

$$S_7 = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left\{\lambda_k-\lambda_k^0-2(c_2-c_2^0)-\frac{2(c_5-c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}}-\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}}\right.$$

$$\left.-(\gamma_2-\gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}}-\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda_k-\lambda_k^0-2(c_2-c_2^0)-\frac{2(c_5-c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}}-\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}}\right.$$

$$\left.-(\gamma_2-\gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}}-\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\left\{\lambda_n-\lambda_n^0-2(c_2-c_2^0)-\frac{2(c_5-c_5^0)}{(n+1/2)^{2-p}}-\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{(n+1/2)^{4-2p}}\right.$$

$$\left.-(\gamma_2-\gamma_2^0)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}-\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{(n+1/2)^{3-p}}\right\}$$

λ_n sayıları için asimptotik formülden

$$\frac{1}{\lambda_n}=\frac{1}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{3+\alpha}}\right) \qquad 1>\alpha>3/4$$

olduğu elde edilir. λ_n ve λ_n^0 sayıları için asimptotik formüllerden,

$$\lambda_n-\lambda_n^0-2(c_2-c_2^0)\quad -\frac{2(c_5-c_5^0)}{(n+1/2)^{2-p}}-\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{(n+1/2)^{4-2p}}-(\gamma_2-\gamma_2^0)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}$$

$$-\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{(n+1/2)^{3-p}}=O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$

olduğu açıktır. Böylece,

$$M_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda_k - \lambda_k^0 - 2(c_2 - c_2^0) - \frac{2(c_5 - c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}} - \right.$$

$$\left. -(\gamma_2 - \gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}} - \frac{(\gamma_3 - \gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\}$$

olmak üzere

$$S_7 = \frac{M_\lambda}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^4}\right) \tag{3.2.12}$$

bulunur.

Şimdi S_1 toplamı için,

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k - \lambda_k^0 - 2(c_2 - c_2^0) - \frac{2(c_5 - c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}} - \right.$$

$$\left. -(\gamma_2 - \gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}} - \frac{(\gamma_3 - \gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\}\left[\frac{1}{\lambda_k^0 - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}{}'\lambda_k^0\left\{\lambda_k - \lambda_k^0 - 2(c_2 - c_2^0) - \frac{2(c_5 - c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}}\right.$$

$$\left. -(\gamma_2 - \gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}} - \frac{(\gamma_3 - \gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\}\frac{1}{\lambda_n\left(\lambda_k^0 - \lambda_n\right)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k^0\left\{\lambda_k - \lambda_k^0 - 2(c_2 - c_2^0) - \frac{2(c_5 - c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}}\right.\right.$$

$$\left. -(\gamma_2 - \gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}} - \frac{(\gamma_3 - \gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\} - (\gamma_4 - \gamma_4^0)\ln^2(k+1/2)\Big\}$$

$$-(\gamma_5 - \gamma_5^0)\ln(k+1/2) - (\gamma_6 - \gamma_6^0)\}\frac{1}{\lambda_n\left(\lambda_k^0 - \lambda_n\right)} + \frac{(\gamma_4 - \gamma_4^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n}$$

$$+\frac{(\gamma_5 - \gamma_5^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n} + \frac{(\gamma_6 - \gamma_6^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\lambda_k^0 - \lambda_n}$$

yazılabilir. Burada λ_n ve λ_n^0 sayıları için asimptotik formüllerden yararlanılırsa,

$$\lambda_k^0\left\{\lambda_k - \lambda_k^0 - 2(c_2 - c_2^0) - \frac{2(c_5 - c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}} - (\gamma_2 - \gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}}\right.$$

$$\left. -\frac{(\gamma_3 - \gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\} - (\gamma_4 - \gamma_4^0)\ln^2(k+1/2) - (\gamma_5 - \gamma_5^0)\ln(k+1/2) - (\gamma_6 - \gamma_6^0)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{5-4p}}\right)$$

olduğu alınır. Buna göre,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left\{\lambda_k^0 \left\{\lambda_k - \lambda_k^0 - 2(c_2 - c_2^0) - \frac{2(c_5 - c_5^0)}{(k+1/2)^{2-p}} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_1^0)}{(k+1/2)^{4-2p}}\right.\right.\right.$$

$$\left. -(\gamma_2 - \gamma_2^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}} - \frac{(\gamma_3 - \gamma_3^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\} - (\gamma_4 - \gamma_4^0)\ln^2(k+1/2)$$

$$\left. -(\gamma_5 - \gamma_5^0)\ln(k+1/2) - (\gamma_6 - \gamma_6^0)\right\} \frac{1}{\lambda_n\left(\lambda_k^0 - \lambda_n\right)}\right|$$

$$\leq \frac{C}{(n+1/2)^2}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k^{\alpha}\left|\lambda_k^0 - \lambda_n\right|} \leq \frac{C}{(n+1/2)^3}$$

olur, Burada $1 > \alpha = 5 - 4p > 0$ şeklindedir.Dolayısıyla S_1 toplamı için,

$$S_1 = \frac{(\gamma_4 - \gamma_4^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln^2(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n} + \frac{(\gamma_5 - \gamma_5^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n}$$

$$+\frac{(\gamma_6 - \gamma_6^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\lambda_k^0 - \lambda_n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

olur. Bu ise,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(\gamma_4 - \gamma_4^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln^2(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n} + \frac{(\gamma_5 - \gamma_5^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n} \\ &+\frac{(\gamma_6 - \gamma_6^0)}{\lambda_n} S_2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

olduğu anlamına gelir.

S_1 ve S_7 için asimptotik formüller ve (3.2.11) formülünden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n} &= \frac{M_\lambda}{(n+1/2)^2} + \frac{(\gamma_4 - \gamma_4^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln^2(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n} \\ &+\frac{(\gamma_5 - \gamma_5^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n} + \left\{2(c_2 - c_2^0) + \frac{(\gamma_6 - \gamma_6^0)}{\lambda_n}\right\} S_2 \\ &+2\left(c_5 - c_5^0\right) S_3 + \left(\gamma_1 - \gamma_1^0\right) S_4 + (\gamma_2 - \gamma_2^0) S_5 \\ &+(\gamma_3 - \gamma_3^0) S_6 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

olduğu bulunur.

Şimdi de S_2 , S_3 , S_4 , S_5 ve S_6 toplamlarını hesaplamak için λ_n ve λ_n^0 için asimptotik formüllerden yararlanılırsa,

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^0 - \lambda_n} = \left[\frac{\pi^2 c_1 - 6c_1^0}{6}\right] \frac{1}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{A(3\pi^2-4)}{24\pi} \frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+ \left[\frac{3}{4} + \frac{\pi^2 c_2}{6} + \frac{A\ln(3/2)}{6\pi} - \frac{\pi^2 c_2^0}{4}\right] \frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)$$
$$S_3 = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{(\lambda_k^0 - \lambda_n)(k+1/2)^{2-p}} = \frac{3^{p-1}}{2^p} \frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{4-p}}\right)$$
$$S_4 = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{(\lambda_k^0 - \lambda_n)(k+1/2)^{4-2p}} = \frac{1}{2^{2p-2}3^{3-2p}} \frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-2p}}\right)$$
$$S_5 = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\ln(k+1/2)}{(\lambda_k^0 - \lambda_n)(k+1/2)^{3-p}} = \frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}} \frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{4-p}}\right)$$
$$S_6 = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{(\lambda_k^0 - \lambda_n)(k+1/2)^{3-p}} = \frac{1}{2^{p-1}3^{2-p}} \frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{4-p}}\right)$$

ve ayrıca,

$${\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\ln^2(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad , \quad {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\ln(k+1/2)}{\lambda_k^0 - \lambda_n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. S_2, S_3, S_4, S_5 ve S_6 asimptotik formüllerinden,

$$\begin{aligned}
{\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n} &= \left[\frac{\pi^2 c_1 - 6c_1^0}{3}\right] (c_2 - c_2^0) \frac{1}{(n+1/2)^{3-p}} \\
&+ \frac{A(3\pi^2-4)}{12\pi}(c_2 - c_2^0) \frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ \left[M_\lambda + \frac{(c_2 - c_2^0)}{2}\left(3 + \frac{\pi^2(c_2-c_2^0)}{6} + \frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)\right. \\
&+ \frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}(c_5 - c_5^0) + \frac{(\gamma_1 - \gamma_1^0)}{2^{2p-2}3^{3-2p}} + \frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}}(\gamma_2 - \gamma_2^0) \\
&+ \left.\frac{(\gamma_3 - \gamma_3^0)}{2^{p-1}3^{2-p}}\right] \frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

elde edilir. Şimdi (3.2.10) formülündeki ikinci toplamı hesaplamak için (3.2.4) ve (3.2.5) asimptotik formüllerinden

$$-\frac{1}{2}{\sum_{k=1}^{\infty}}' \left(\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right)^2 = -2(c_2 - c_2^0){\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{[(k+1/2)^2 - \lambda_n]^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Şimdi

$${\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{[(k+1/2)^2 - \lambda_n]^r} \quad (r = 1, 2) \tag{3.2.16}$$

toplamlarlarının davranışına bakılırsa,

$$X(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1/2)^2-\lambda} = \frac{\pi \tan \pi\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{4\lambda-1}$$

$$X(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(k+1/2)^2-\lambda} = \frac{\pi \tan \pi\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{4\lambda-1} - \frac{1}{(n+1/2)^2-\lambda}$$

eşitliği kullanılarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{[(k+1/2)^2-\lambda_n]^r} = X^{(r-1)}(\lambda_n) - \frac{1}{[(n+1/2)^2-\lambda_n]^r}, \quad (r=1,2), \qquad (3.2.17)$$

olduğu bulunur. $r = 1$ durumu incelenirse,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} + \frac{c_2}{(n+1/2)} + \frac{c_3}{(n+1/2)^{4-2p}} \\ &+ c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_5}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_{10}}{(n+1/2)^2} + \frac{c_6}{(n+1/2)^{6-3p}} \\ &+ c_7\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}} + \frac{c_8}{(n+1/2)^{5-2p}} - \frac{A^2\delta c_p}{4\pi}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} \\ &+ c_{11}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + \frac{c_{12}}{(n+1/2)^{4-p}} - \frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3} \\ &+ c_{13}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + c_{14}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + \frac{c_{15}}{(n+1/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right) \end{aligned} \qquad (3.2.18)$$

olmak üzere $\sqrt{\lambda_n} = (n+1/2) + \varepsilon_n$ yerine konursa,

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(k+1/2)^2-\lambda_n} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1/2)^2} + \frac{\pi \tan \pi\left[(n+1/2)+\varepsilon\right]}{2\left[(n+1/2)+\varepsilon\right]} + \frac{1}{(n+1/2)^2 - \left[(n+1/2)+\varepsilon\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2(n+1/2)^2} - \frac{\pi \cot \pi\varepsilon}{2\left[(n+1/2)+\varepsilon\right]} + \frac{1}{2\varepsilon(n+1/2)+\varepsilon^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-p}}\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(k+1/2)^2-\lambda_n} &= \frac{\pi^2 c_1}{6(n+1/2)^{3-p}} + \frac{A\pi}{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\ &+ \frac{(9+\pi^2 c_2)}{12(n+1/2)^2} + \frac{\pi^2 c_3}{6(n+1/2)^{5-2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4-p}}\right) \end{aligned} \qquad (3.2.19)$$

eşitliği elde edilir. $r=2$ durumu incelenirse,

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\left[(k+1/2)^2-\lambda_n\right]^2} = X'(\lambda_n) - \frac{1}{\left[(n+1/2)^2-\lambda_n\right]^2} \tag{3.2.20}$$

eşitliğinden, benzer işlemler yapılarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\left[(k+1/2)^2-\lambda_n\right]^2} = \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{3.2.21}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n}\right)^2 = \frac{\pi^2(c_2-c_2^0)^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{3.2.22}$$

olduğu kolayca görülmektedir. (3.2.10), (3.2.15) ve (3.2.22) formüllerinden

$$\begin{aligned}
\ln\Psi(\lambda_n) &= \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}{}' \left(\frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \left[\frac{\pi^2 c_1 - 6c_1^0}{3}\right](c_2-c_2^0)\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{A(3\pi^2-4)}{12\pi}(c_2-c_2^0)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ \left[M_\lambda + \frac{(c_2-c_2^0)}{2}\left(3+\frac{\pi^2(c_2-c_2^0)}{6}+\frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right) - \frac{\pi^2(c_2-c_2^0)^2}{4} + \frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}(c_5-c_5^0)\right. \\
&+ \left.\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{2^{2p-2}3^{3-2p}} + \frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}}(\gamma_2-\gamma_2^0) + \frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{2^{p-1}3^{2-p}}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda_n) &= 1 + \left[\frac{\pi^2 c_1 - 6c_1^0}{3}\right](c_2-c_2^0)\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}} \\
&+ \frac{A(3\pi^2-4)}{12\pi}(c_2-c_2^0)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ \left[M_\lambda + \frac{(c_2-c_2^0)}{2}\left(3+\frac{\pi^2(c_2-c_2^0)}{6}+\frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)\right. \\
&- \frac{\pi^2(c_2-c_2^0)^2}{4} + \frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}(c_5-c_5^0) + \frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{2^{2p-2}3^{3-2p}} \\
&+ \left.\frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}}(\gamma_2-\gamma_2^0) + \frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{2^{p-1}3^{2-p}}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

olur. Buradan

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0} = 1 + \left[\frac{\pi^2 c_1 - 6c_1^0}{3}\right](c_2-c_2^0)\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}} \tag{3.2.24}$$

$$+\frac{A(3\pi^2-4)}{12\pi}(c_2-c_2^0)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+\left[M_\lambda+\frac{(c_2-c_2^0)}{2}\left(3+\frac{\pi^2(c_2-c_2^0)}{6}+\frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)\right.$$
$$-\frac{\pi^2(c_2-c_2^0)^2}{4}+\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}(c_5-c_5^0)+\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{2^{2p-2}3^{3-2p}}$$
$$\left.+\frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}}(\gamma_2-\gamma_2^0)+\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{2^{p-1}3^{2-p}}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)$$

bulunur. Benzer işlemlerle,

$$\varphi(\lambda_n)=\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}=\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\mu_k-\mu_k^0}{\mu_k^0-\lambda_n}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}=1+\left[\frac{\pi^2c_1'-6c_1'^0}{3}\right](c_2'-c_2'^0)\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}}$$
$$+\frac{A(3\pi^2-4)}{12\pi}(c_2'-c_2'^0)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+\left[M_\mu+\frac{(c_2'-c_2'^0)}{2}\left(3+\frac{\pi^2(c_2'-c_2'^0)}{6}+\frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)\right. \tag{3.2.25}$$
$$-\frac{\pi^2(c_2'-c_2'^0)^2}{4}+\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}(c_5'-c_5'^0)+\frac{(\gamma_1'-\gamma_1'^0)}{2^{2p-2}3^{3-2p}}$$
$$\left.+\frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}}(\gamma_2'-\gamma_2'^0)+\frac{(\gamma_3'-\gamma_3'^0)}{2^{p-1}3^{2-p}}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2}$$
$$+O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)$$

burada

$$M_\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\mu_k-\mu_k^0-2(c_2'-c_2'^0)-\frac{2(c_5'-c_5'^0)}{(k+1/2)^{2-p}}-\frac{(\gamma_1'-\gamma_1'^0)}{(k+1/2)^{4-2p}}-\right.$$
$$\left.-(\gamma_2'-\gamma_2'^0)\frac{\ln(k+1/2)}{(k+1/2)^{3-p}}-\frac{(\gamma_3'-\gamma_3'^0)}{(k+1/2)^{3-p}}\right\}$$

olur. Benzer şekilde;

$$\Psi(\lambda_n^0)=\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}=\prod_{k=1}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\lambda_n-\lambda_n^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\right)$$

sonsuz çarpımı için,

$$\Psi(\lambda_n^0) = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0} = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\right) =$$

$$= 1 + \left[\frac{\pi^2 c_1 - 6c_1^0}{3}\right](c_2 - c_2^0)\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}}$$

$$+ \frac{A(3\pi^2 - 4)}{12\pi}(c_2 - c_2^0)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \tag{3.2.26}$$

$$+ \left[\frac{(c_2 - c_2^0)}{2}\left(3 + \frac{\pi^2(c_2 - c_2^0)}{6} + \frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\pi^2(c_2 - c_2^0)^2}{4}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)$$

ve

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k^0}{\lambda_n^0 - \mu_k^0} = 1 + \left[\frac{\pi^2 c_1' - 6c_1'^0}{3}\right](c_2' - c_2'^0)\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}}$$

$$+ \frac{A(3\pi^2 - 4)}{12\pi}(c_2' - c_2'^0)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$

$$+ \left[\frac{(c_2' - c_2'^0)}{2}\left(3 + \frac{\pi^2(c_2' - c_2'^0)}{6} + \frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)\right. \tag{3.2.27}$$

$$\left. - \frac{\pi^2(c_2' - c_2'^0)^2}{4}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)$$

(3.1.21) eşitliğindeki diğer ifadelerin asimptotik davranışları da hesaplanacak olursa,

$$\frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_n^0 - \mu_n^0} = 1 + \left[\left(\frac{c_5^0 - c_5'^0}{c_2^0 - c_2'^0}\right)^2 - \frac{c_5 - c_5'}{c_2 - c_2'}\frac{c_5^0 - c_5'^0}{c_2^0 - c_2'^0}\right]\frac{1}{(n+1/2)^{4-2p}}$$

$$+ \left[\frac{\gamma_3 - \gamma_3'}{2(c_2 - c_2')} - \frac{\gamma_3^0 - \gamma_3'^0}{2(c_2^0 - c_2'^0)}\right]\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}}$$

$$+ \left[\frac{\gamma_6 - \gamma_6'}{2(c_2 - c_2')} - \frac{\gamma_6^0 - \gamma_6'^0}{2(c_2^0 - c_2'^0)}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)$$

$$\frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_n^0 - \lambda_0^0} = 1 + \frac{2(c_2 - c_2^0) + (\lambda_0^0 - \lambda_0)}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)$$

$$\frac{\lambda_n - \mu_0}{\lambda_n^0 - \mu_0^0} = 1 + \frac{2(c_2 - c_2^0) + (\mu_0^0 - \mu_0)}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{\lambda_n-\mu_n}{\lambda_n^0-\mu_n^0}\frac{\lambda_n-\lambda_0}{\lambda_n^0-\lambda_0^0}\frac{\lambda_n-\mu_0}{\lambda_n^0-\mu_0^0}=1+\left[\left(\frac{c_5^0-c_5'^0}{c_2^0-c_2'^0}\right)^2-\frac{c_5-c_5'}{c_2-c_2'}\frac{c_5^0-c_5'^0}{c_2^0-c_2'^0}\right]\frac{1}{(n+1/2)^{4-2p}}$$

$$+\left[\frac{\gamma_3-\gamma_3'}{2\,(c_2-c_2')}-\frac{\gamma_3^0-\gamma_3'^0}{2\,(c_2^0-c_2'^0)}\right]\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}}$$

$$+\left[\frac{\gamma_6-\gamma_6'}{2\,(c_2-c_2')}-\frac{\gamma_6^0-\gamma_6'^0}{2\,(c_2^0-c_2'^0)}+4(c_2-c_2^0)+(\lambda_0^0-\lambda_0)+(\mu_0^0-\mu_0)\right]\frac{1}{(n+1/2)^2}$$

$$+O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right).$$

Diğer taraftan,

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}=1+2\left[\frac{\pi^2c_1-6c_1^0}{3}\right]\frac{(c_2-c_2^0)}{(n+1/2)^{3-p}}$$

$$+\frac{A(3\pi^2-4)(c_2-c_2^0)}{6\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+\left[M_\lambda-\frac{\pi^2(c_2-c_2^0)^2}{2}\right.$$

$$+\left(3+\frac{\pi^2(c_2-c_2^0)}{6}+\frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)(c_2-c_2^0)+\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}(c_5-c_5^0)+\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{2^{2p-2}3^{3-2p}}$$

$$\left.+\frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}}(\gamma_2-\gamma_2^0)+\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{2^{p-1}3^{2-p}}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}=$$

$$=1+2\left[\frac{\pi^2c_1'-6c_1'^0}{3}\right]\frac{(c_2'-c_2'^0)}{(n+1/2)^{3-p}}\qquad\frac{A(3\pi^2-4)(c_2'-c_2'^0)}{6\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$

$$+\left[M_\mu+\left(3+\frac{\pi^2(c_2'-c_2'^0)}{6}+\frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)(c_2'-c_2'^0)-\frac{\pi^2(c_2'-c_2'^0)^2}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}(c_5'-c_5'^0)+\frac{(\gamma_1'-\gamma_1'^0)}{2^{2p-2}3^{3-2p}}+\frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}}(\gamma_2'-\gamma_2'^0)+\frac{(\gamma_3'-\gamma_3'^0)}{2^{p-1}3^{2-p}}\right]\frac{1}{(n+1/2)^2}$$

$$+O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right).$$

Dolayısıyla,

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}=$$

$$=1+\left\{2(c_2-c_2^0)\left[\frac{\pi^2c_1-6c_1^0}{3}\right]+2(c_2'-c_2'^0)\left[\frac{\pi^2c_1'-6c_1'^0}{3}\right]\right\}\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}}$$

$$+\left\{\frac{A(3\pi^2-4)}{6\pi}\left[(c_2-c_2^0)+(c_2'-c_2'^0)\right]\right\}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$

$$+\left\{M_\lambda + M_\mu + \left(3 + \frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)[(c_2 - c_2^0) + (c_2' - c_2'^0)] - \frac{\pi^2}{3}[(c_2 - c_2^0)^2]\right.$$

$$+(c_2' - c_2'^0)^2 + \frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}[(c_5 - c_5^0) + (c_5' - c_5'^0)] + \frac{1}{2^{2p-2}3^{3-2p}}[(\gamma_1 - \gamma_1^0) + (\gamma_1' - \gamma_1'^0)]$$

$$\left.+\frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}}[(\gamma_2 - \gamma_2^0) + (\gamma_2' - \gamma_2'^0)] + \frac{1}{2^{p-1}3^{2-p}}[(\gamma_3 - \gamma_3^0) + (\gamma_3' - \gamma_3'^0)]\right\}\frac{1}{(n+1/2)^2}$$

$$+O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right).$$

Buna göre,

$$\frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_n^0 - \mu_n^0}\frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_n^0 - \lambda_0^0}\frac{\lambda_n - \mu_0}{\lambda_n^0 - \mu_0^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n - \lambda_k^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n - \mu_k^0}{\lambda_n^0 - \mu_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n - \mu_k^0} =$$

$$= 1 + \left[\left(\frac{c_5^0 - c_5'^0}{c_2^0 - c_2'^0}\right)^2 - \frac{c_5 - c_5'}{c_2 - c_2'}\frac{c_5^0 - c_5'^0}{c_2^0 - c_2'^0}\right]\frac{1}{(n+1/2)^{4-2p}}$$

$$+\left[\frac{2c_1(\pi^2 - 6)}{3}((c_2 - c_2^0) + (c_2' - c_2'^0)) + \frac{\gamma_3 - \gamma_3'}{2(c_2 - c_2')} - \frac{\gamma_3^0 - \gamma_3'^0}{2(c_2^0 - c_2'^0)}\right]\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}}$$

$$+\left[\frac{A(3\pi^2 - 4)}{6\pi}((c_2 - c_2^0) + (c_2' - c_2'^0))\right]\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$

$$+\left\{M_\lambda + M_\mu + \left(3 + \frac{2A\ln(3/2)}{3\pi}\right)((c_2 - c_2^0) + (c_2' - c_2'^0)) + 4(c_2 - c_2^0)\right.$$

$$+(\lambda_0^0 - \lambda_0) + (\mu_0^0 - \mu_0) - \frac{\pi^2}{3}((c_2 - c_2^0)^2 + (c_2' - c_2'^0)^2)$$

$$+\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}((c_5 - c_5^0) + (c_5' - c_5'^0)) + \frac{1}{2^{2p-2}3^{3-2p}}((\gamma_1 - \gamma_1^0) + (\gamma_1' - \gamma_1'^0))$$

$$+\frac{\ln(3/2)}{2^{p-1}3^{2-p}}((\gamma_2 - \gamma_2^0) + (\gamma_2' - \gamma_2'^0)) + \frac{1}{2^{p-1}3^{2-p}}((\gamma_3 - \gamma_3^0) + (\gamma_3' - \gamma_3'^0))$$

$$\left.+\frac{\gamma_6 - \gamma_6'}{2(c_2 - c_2')} - \frac{\gamma_6^0 - \gamma_6'^0}{2(c_2^0 - c_2'^0)}\right\}\frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{7-4p}}\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan α_n^0 'lar için,

$$\begin{aligned}\alpha_n^0 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\delta M_1\pi}{2}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)} + \frac{b_1}{(n+1/2)^{4-2p}}\\ &+A\delta c_p\pi\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{b_2^0}{(n+1/2)^{3-p}} + b_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}\\ &+b_4^0\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{b_5^0}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)\end{aligned}$$

asimptotik formülünden yararlanılırsa α_n sayıları için aşağıdaki asimptotik formülü elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\alpha_n =& \frac{\pi}{2} + \frac{\delta M_1 \pi}{2} \frac{1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A\pi^2}{4} \frac{1}{(n+1/2)} \\
&+ \left[b_1 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{c_5^0 - c_5'^0}{c_2^0 - c_2'^0} \right)^2 - \frac{\pi}{2} \frac{c_5 - c_5'}{c_2 - c_2'} \frac{c_5^0 - c_5'^0}{c_2^0 - c_2'^0} \right] \frac{1}{(n+1/2)^{4-2p}} \\
&+ A\delta c_p \pi \frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \left[b_2^0 + \frac{c_1 \pi (\pi^2 - 6)}{3} ((c_2 - c_2^0) + (c_2' - c_2'^0)) \right. \\
&\left. + \frac{\pi}{4} \frac{\gamma_3 - \gamma_3'}{(c_2 - c_2')} - \frac{\pi}{4} \frac{\gamma_3^0 - \gamma_3'^0}{(c_2^0 - c_2'^0)} \right] \frac{1}{(n+1/2)^{3-p}} + b_3 \frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ \left[b_4^0 + \frac{A(3\pi^2 - 4)}{12} ((c_2 - c_2^0) + (c_2' - c_2'^0)) \right] \frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ \left[\frac{\pi}{2} (M_\lambda + \dot{M}_\mu) + \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{A\ln(3/2)}{3} \right) ((c_2 - c_2^0) + (c_2' - c_2'^0)) \right. \\
&+ b_5^0 + 2\pi (c_2 - c_2^0) + \frac{\pi}{2} ((\lambda_0^0 - \lambda_0) + (\mu_0^0 - \mu_0)) \\
&- \frac{\pi^3}{6} ((c_2 - c_2^0)^2 + (c_2' - c_2'^0)^2) + \frac{3^{p-1}\pi}{2^p} ((c_5 - c_5^0) + (c_5' - c_5'^0)) \\
&+ \frac{\pi}{2^{2p-1} 3^{3-2p}} ((\gamma_1 - \gamma_1^0) + (\gamma_1' - \gamma_1'^0)) - \frac{\pi}{4} \frac{\gamma_6^0 - \gamma_6'^0}{(c_2^0 - c_2'^0)} \\
&+ \frac{\pi \ln(3/2)}{2^p 3^{2-p}} ((\gamma_2 - \gamma_2^0) + (\gamma_2' - \gamma_2'^0)) + \frac{\pi}{4} \frac{\gamma_6 - \gamma_6'}{(c_2 - c_2')} \\
&\left. + \frac{\pi}{2^p 3^{2-p}} ((\gamma_3 - \gamma_3^0) + (\gamma_3' - \gamma_3'^0)) \right] \frac{1}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{7-4p}} \right)
\end{aligned}
\tag{3.2.28}
$$

Uyarı 3.2.2: α_n için (3.2.28) asimptotik formülü yeterince büyük n' ler için sağlanır. Küçük n' ler için α_n sayıları, $H_2 - H_1$ farkı (3.2.3) denklemi ile verilmiş olmak üzere, (3.1.21) formülünden direkt olarak elde edilir.

3.3. Sturm-Liouville Operatörü için Ters Problemin Çözümü

Teorem 3.3.1: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$, sayı dizileri aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ sayıları ortak olarak sıralıdır,

2) $c_2 \neq c_2'$ ve $\sum c_{1n}^2$, $\sum c_{1n}'^2$ serileri yakınsak ve $p \in (1, 5/4)$ olmak üzere,

$$\lambda_n = (n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) + 2c_2 + \frac{2c_3}{(n+1/2)^{3-2p}} + c_{1n}$$

$$\mu_n = (n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) + 2c_2' + \frac{2c_3}{(n+1/2)^{3-2p}} + c_{1n}'$$

asimptotik formülleri geçerli olsun.

Bu durumda $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ (3.1.1), (3.1.2) probleminin $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ ise (3.1.1), (3.1.3) probleminin spektrumudur ve

$$H_1 - H_2 = \pi(c_2' - c_2)$$

olacak biçimde $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$ ve H_1 , H_2 gerçel sayıları vardır.

İspat: Yukarıdaki özelliklere sahip $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizileri verilmiş olsun. (3.1.21) formülünün yardımıyla $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisi oluşturulursa, α_n ' ler için (3.2.28) asimptotik formülü sağlanır. Şimdi her n için $\alpha_n > 0$ olduğu gösterilmelidir. Teoremin ilk koşuluna göre $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralıdır. Buradan $n = 0, 1, ...$ için $\mu_n > \lambda_n$ veya $\mu_n < \lambda_n$ dir. α_n' ler (3.1.21) eşitliği ile verilmekte olup

$$\alpha_n = \alpha_n^0 \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_n^0 - \mu_n^0}\frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_n^0 - \lambda_0^0}\frac{\lambda_n - \mu_0}{\lambda_n^0 - \mu_0^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n^0 - \mu_k^0}$$

şeklindedir. Buradan

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0} > 0, \qquad \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n^0 - \mu_k^0} > 0$$

yazılabilir.

$\alpha_n^0 > 0$, λ_n, μ_n ve λ_n^0 , μ_n^0 'ler sıralı olduğundan, α_n formülünden$n = 0, 1, \ldots,$ için $\alpha_n > 0$ olduğu açıktır. Bu ise, Sturm-Liouville operatörlerinin $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre oluşturulabiliyor olmasından M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [14], verilen $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre de Sturm-Liouville operatörlerinin oluşturulabildiğini gösterir.

3.4. L Operatörünün Regülerize İzinin Hesaplanması

Bu alt bölümde, 3.3 alt bölümünde elde edilen α_n'lerin ifadesinde M_λ ve M_μ ifadeleri bulunmaktadır. α_n'lerin davranışının tam olarak incelenmesi için M_λ ve M_μ ifadelerinin hesaplanması gerekmektedir. M_λ ve M_μ ifadeleri bakılan problemin regülerize izini ifade etmektedir. Bunun için ilk önce gerekli önbilgiler verilecektir.

Sonlu boyutlu durumda A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Teorem gereği eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisi köşegenleştirilebilir.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

köşegen matrisi olmak üzere, bu bir dönüşümdür ve her matris dönüşümüne bir lineer operatör gibi bakılabilir. Burada $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ toplamına A matrisinin izi (trace) denir.

Sonsuz boyutlu durum için, $A : H \to H$ bir lineer operatör olsun. H bir Hilbert uzayıdır. Hilbert uzayı ayrılabilir uzay olduğundan ortonormal sistemler alınabilir. $\{e_n\} \in H$ ortonormal sistem ve $\|e_n\|_H = 1$ dir. $\{e_n\}$ sistemi A nın özfonksiyonları şeklinde alınırsa $Ae_n = \lambda_n e_n$ olur. Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda_n e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$ ise bu seriye A operatörünün izi (trace) denir ve $tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ ile gösterilir.

$L : L_2[0, \pi] \to L_2[0, \pi]$, $L_2[0, \pi]$ Hilbert uzayı olduğu için $\{y_n\}$ ortonormal sistem seçilebilir. $L_2[0, \pi]$ den $\{y_n\}_{n \geq 0}$ sistemi L operatörünün özfonksiyonları olacak şeklinde alınırsa

$Ly_n = \lambda_n y_n$ olur. Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle Ly_n, y_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \lambda_n y_n, y_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle y_n, y_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$$

şeklindedir. Ancak bu seri yakınsak değildir. Dolayısıyla, regülerize edilmiş ize bakılacaktır. μ_n ile $q(x) = 0$ olduğu duruma karşılık gelen (3.1.1), (3.1.2) probleminin özdeğerlerini göstersin. $\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda_n - \mu_n]$ ifadesine (3.1.1), (3.1.2) probleminin **regülerize edilmiş izi** denir.

$$L_1 : \begin{cases} -y'' + \left(\dfrac{A}{x} + \dfrac{\delta}{x^p} + q(x)\right) y = \lambda y \ , \quad \lambda = \rho^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0 \end{cases}$$

operatörünün özdeğerlerinin asimptotik ifadesi,

$$\lambda_n = (n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) + 2c_2 + \frac{2c_7}{(n+1/2)^{3-2p}}$$
$$+2c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_8}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{2c_{10}}{(n+1/2)} + \frac{2c_{31}}{(n+1/2)^{5-3p}}$$
$$+2c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-2p}} + \frac{\gamma_1}{(n+1/2)^{4-2p}} + 2c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}$$
$$+\gamma_2\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{\gamma_3}{(n+1/2)^{3-p}} - \frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+\gamma_4\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \gamma_5\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{\gamma_6}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{7-4p}}\right)$$

şeklinde bulunmuştu.

$$\begin{aligned} M_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[& \lambda_n - (n+1/2)^2 - 2c_1(n+1/2)^{p-1} - \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) \\ & -2c_2 - \frac{2c_7}{(n+1/2)^{3-2p}} - 2c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{2-p}} - \frac{2c_8}{(n+1/2)^{2-p}} \\ & -\frac{2c_{10}}{(n+1/2)} - \frac{2c_{31}}{(n+1/2)^{5-3p}} - 2c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-2p}} - \frac{\gamma_1}{(n+1/2)^{4-2p}} \\ & -2c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} - \gamma_2\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} - \frac{\gamma_3}{(n+1/2)^{3-p}} \\ & +\frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^2} - \gamma_4\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} - \gamma_5\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}\Big] \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

toplamının değeri L_1 operatörünün regülerize izini vermektedir.

Bunun için, μ parametresinin yeterince büyük değerlerinde

$$\varphi'(\pi,-\mu) - H\varphi(\pi,-\mu) = C\Phi(-\mu) \tag{3.4.2}$$

eşitliğinin sağ ve sol tarafındaki fonksiyonların davranışını öğrenmek gerekmektedir.

İlk önce (3.4.2) eşitliğinin sağ tarafındaki $\Phi(-\mu)$ nün asimptotik ifadesi bulunacak olursa,

$$\begin{aligned}\Phi(-\mu) &= \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{\lambda_n}\right) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1/2)^2}{\lambda_n}\right)\prod_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\lambda_n+\mu}{\mu+(n+1/2)^2}\right]\cosh\sqrt{\mu}\pi \\ &= c\Psi(\mu)\cosh\sqrt{\mu}\pi\end{aligned}$$

burada $c = \prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1/2)^2}{\lambda_n}\right)$,

$$\Psi(\mu) = \prod_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\lambda_n+\mu}{\mu+(n+1/2)^2}\right] = \prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{(n+1/2)^2-\lambda_n}{\mu+(n+1/2)^2}\right]$$

şeklindedir ve $\Psi(\mu)$ sonludur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\ln\Psi(\mu) &= \sum_{n=0}^{\infty}\ln\left[1-\frac{(n+1/2)^2-\lambda_n}{\mu+(n+1/2)^2}\right] = \\ &= \ln\left(1-\frac{1/4-\lambda_0}{\mu+1/4}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1-\frac{(n+1/2)^2-\lambda_n}{\mu+(n+1/2)^2}\right]\end{aligned}$$

olur, burada,

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{1/4-\lambda_0}{\mu+1/4}\right) &= -\frac{1/4-\lambda_0}{\mu+1/4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1/4-\lambda_0}{\mu+1/4}\right)^2-\dots \\ &= -\frac{1/4-\lambda_0}{\mu+1/4}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) = \frac{\lambda_0-1/4}{\mu}\left(\frac{1}{1+1/4\mu}\right) \\ &= \frac{\lambda_0-1/4}{\mu}\left(1-\frac{1}{4\mu}+\left(\frac{1}{4\mu}\right)^2-\dots\right) = \frac{\lambda_0-1/4}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\ln\Psi(\mu) = \frac{\lambda_0-1/4}{\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1-\frac{(n+1/2)^2-\lambda_n}{\mu+(n+1/2)^2}\right]+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \tag{3.4.3}$$

olur.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan (3.4.3) eşitliğindeki seri de yakınsaktır. Bu durumda (3.4.3) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam

$$\begin{aligned}\ln \Psi(\mu) &= \frac{\lambda_0 - 1/4}{\mu} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{(n+1/2)^2 - \lambda_n}{\mu + (n+1/2)^2}\right)^k + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \\ &= \frac{\lambda_0 - 1/4}{\mu} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1/2)^2 - \lambda_n}{\mu + (n+1/2)^2}\right)^k + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\left(\frac{(n+1/2)^2 - \lambda_n}{\mu + (n+1/2)^2}\right)^k$ ifadesi,

$$\left[\frac{(n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) - \lambda_n - 2c_1(n+1/2)^{p-1} - \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2)}{\mu + (n+1/2)^2}\right]^k$$

$$= \left[\frac{(n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) - \lambda_n}{\mu + (n+1/2)^2} - 2c_1\frac{(n+1/2)^{p-1}}{\mu + (n+1/2)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{A}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{\mu + (n+1/2)^2}\right]^k$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\frac{(n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) - \lambda_n}{\mu + (n+1/2)^2}\right]^{k-j}$$

$$\times\left(-2c_1\frac{(n+1/2)^{p-1}}{\mu + (n+1/2)^2} - \frac{A}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{\mu + (n+1/2)^2}\right)^j$$

şeklinde yazılırsa,

$$\ln \Psi(\mu) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{j}\left[\frac{(n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) - \lambda_n}{\mu + (n+1/2)^2}\right]^{k-j}$$

$$\times\left(-2c_1\frac{(n+1/2)^{p-1}}{\mu + (n+1/2)^2} - \frac{A}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{\mu + (n+1/2)^2}\right)^j + \frac{\lambda_0 - 1/4}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(n+1/2)^2 + 2c_1(n+1/2)^{p-1} + \frac{A}{\pi}\ln(n+1/2) - \lambda_n}{\mu + (n+1/2)^2}\right]^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}k\left[\frac{(n+1/2)^2+2c_1(n+1/2)^{p-1}+\frac{A}{\pi}\ln(n+1/2)-\lambda_n}{\mu+(n+1/2)^2}\right]^{k-1}$$
$$\times\left(-2c_1\frac{(n+1/2)^{p-1}}{\mu+(n+1/2)^2}-\frac{A}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{\mu+(n+1/2)^2}\right)$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=2}^{\infty}\binom{k}{j}\left[\frac{(n+1/2)^2+2c_1(n+1/2)^{p-1}+\frac{A}{\pi}\ln(n+1/2)-\lambda_n}{\mu+(n+1/2)^2}\right]^{k-j}$$
$$\times\left(-2c_1\frac{(n+1/2)^{p-1}}{\mu+(n+1/2)^2}-\frac{A}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{\mu+(n+1/2)^2}\right)^j+\frac{\lambda_0-1/4}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

olur, burada,

$$I(\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(n+1/2)^2+2c_1(n+1/2)^{p-1}+\frac{A}{\pi}\ln(n+1/2)-\lambda_n}{\mu+(n+1/2)^2}\right]^{k-1}$$
$$\times\left(-2c_1\frac{(n+1/2)^{p-1}}{\mu+(n+1/2)^2}-\frac{A}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{\mu+(n+1/2)^2}\right)$$

ifadesi için, özdeğer denkleminden a sabit bir sayı olmak üzere ,

$\left|\lambda_n-(n+1/2)^2-2c_1(n+1/2)^{p-1}-\frac{A}{\pi}\ln(n+1/2)\right|\leq a$ dir. Buradan

$$I(\mu)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{[\mu+(n+1/2)^2]^{k-1}}\left(-2c_1\frac{(n+1/2)^{p-1}}{\mu+(n+1/2)^2}-\frac{A}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{\mu+(n+1/2)^2}\right)$$
$$=-2c_1a^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1/2)^{p-1}}{[\mu+(n+1/2)^2]^{k-1}}-\frac{A}{\pi}a^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)}{[\mu+(n+1/2)^2]^{k-1}}$$
$$=-\frac{2c_1a^{k-1}}{\mu^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1/2)^{p-1}}{\left[1+\left(\frac{n+1/2}{\sqrt{\mu}}\right)^2\right]^k}-\frac{A}{\pi}\frac{a^{k-1}}{\mu^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)}{\left[1+\left(\frac{n+1/2}{\sqrt{\mu}}\right)^2\right]^k}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1/2)^{p-1}}{1+\left(\frac{n+1/2}{\sqrt{\mu}}\right)^2}\leq\frac{1}{\mu}\int_1^{\infty}\frac{(x+1/2)^{p-1}}{1+\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{\mu}}\right)^2}dx$$
$$\leq\frac{\pi}{2\sin\frac{p\pi}{2}}\frac{1}{\mu^{(2-p)/2}}-\frac{3^p}{2^pp}\frac{1}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)}{1+\left(\frac{n+1/2}{\sqrt{\mu}}\right)^2}=\frac{\pi}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}-\frac{3}{2\mu}\left(1+\ln\left(3/2\right)\right)+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

ve

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=2}^{\infty}\binom{k}{j}\left[\frac{(n+1/2)^2+2c_1(n+1/2)^{p-1}+\frac{A}{\pi}\ln(n+1/2)-\lambda_n}{\mu+(n+1/2)^2}\right]^{k-j}$$

$$\times\left(-2c_1\frac{(n+1/2)^{p-1}}{\mu+(n+1/2)^2}-\frac{A}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{\mu+(n+1/2)^2}\right)^j=O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

eşitliklerinden,

$$\ln\Psi(\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n-(n+1/2)^2-2c_1(n+1/2)^{p-1}-\frac{A}{\pi}\qquad AO/2)}{\mu+(n+1/2)^2}\right)$$

$$+\frac{c_1\pi}{\sin p\pi/2}\frac{1}{\mu^{(2-p)/2}}+\frac{A}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}+\left[\frac{3A}{2\pi}\left(1+\ln(3/2)\right)-\frac{3^pc_1}{2^{p-1}p}+\lambda_0-\frac{1}{4}\right]\frac{1}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

elde edilir. Bu ifadede gerekli işlemler yapılırsa,

$$\ln\Psi(\mu)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n-(n+1/2)^2-2c_1(n+1/2)^{p-1}-\frac{A}{\pi}\ln(n+1/2)-2c_2-\frac{2c_7}{(n+1/2)^{3-2p}}\right.$$

$$-2c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{2-p}}-\frac{2c_8}{(n+1/2)^{2-p}}-\frac{2c_{10}}{(n+1/2)}-\frac{2c_{31}}{(n+1/2)^{5-3p}}-2c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-2p}}$$

$$-\frac{\gamma_1}{(n+1/2)^{4-2p}}-2c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}-\gamma_2\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}-\frac{\gamma_3}{(n+1/2)^{3-p}}$$

$$\left.+\frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^2}-\gamma_4\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}-\gamma_5\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}\right)\frac{1}{\mu+(n+1/2)^2}$$

$$+2c_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu+(n+1/2)^2}+2c_7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}\left(\mu+(n+1/2)^2\right)}$$

$$+2c_4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{2-p}\left(\mu+(n+1/2)^2\right)}+2c_8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}\left(\mu+(n+1/2)^2\right)}$$

$$+2c_{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)\left(\mu+(n+1/2)^2\right)}+2c_{31}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^{5-3p}\left(\mu+(n+1/2)^2\right)}$$

$$+2c_{12}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-2p}\left(\mu+(n+1/2)^2\right)}+\gamma_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^{4-2p}\left(\mu+(n+1/2)^2\right)}$$

$$+2c_{14}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}\,(\mu+(n+1/2)^2)}+\gamma_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}\,(\mu+(n+1/2)^2)}$$

$$+\gamma_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^{3-p}\,(\mu+(n+1/2)^2)}-\frac{A^3}{12\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^2\,(\mu+(n+1/2)^2)}$$

$$+\gamma_4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2\,(\mu+(n+1/2)^2)}+\gamma_5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2\,(\mu+(n+1/2)^2)}$$

$$+\frac{c_1\pi}{\sin(p\pi/2)}\frac{1}{\mu^{2-p/2}}+\frac{A}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}+\left[\frac{3A}{2\pi}(1+\ln(3/2))-\frac{3^p c_1}{2^{p-1}p}+\lambda_0-\frac{1}{4}\right]\frac{1}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

bulunur. Yukarıdaki toplamlar hesaplanır ve asimptotik ifadeleri $\ln\Psi(\mu)$ nün ifadesinde yerlerine yazıldığında

$$\ln\Psi(\mu)=\frac{1}{\mu}M_\lambda-\frac{1}{\mu}\left(\lambda_0-\frac{1}{4}-c_1 2^{2-p}+\frac{A}{\pi}\ln 2-2c_2-2^{4-2p}c_7+2^{3-p}c_4\ln 2\right.$$

$$-2^{3-p}c_8-4c_{10}-2^{6-3p}c_{31}+2^{5-2p}c_{12}\ln 2-2^{4-2p}\gamma_1+c_{14}2^{3-p}\ln^2 2+2^{3-p}\gamma_2\ln 2$$

$$\left.-2^{3-p}\gamma_3-\frac{A^3}{3\pi}\ln^3 2-4\gamma_4\ln^2 2+4\gamma_5\ln 2\right)$$

$$-\frac{1}{\mu}\left[-\frac{\pi}{2}\frac{\gamma_6}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]+2c_2\left[\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}-\frac{3}{2\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+2c_7\left[\frac{\pi}{2\sin(p-1)\pi}\frac{1}{\mu^{2-p}}-\frac{9^{p-1}}{2^{2p-1}(p-1)}\frac{1}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+2c_4\left[\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(3-p)/2}}+\frac{2\pi}{(1-p)\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{1}{\mu^{(3-p)/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}\left(\ln(3/2)+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{1}{\mu}+O\left(\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+2c_8\left[\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{1}{\mu^{(3-p)/2}}-\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}(p-1)}\frac{1}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+2c_{10}\left[\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu}-\frac{\ln(3/2)}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+2c_{31}\left[-\frac{3^{3p-4}}{2^{3p-4}(3p-4)}\frac{1}{\mu}-\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{3p-2}{2}\right)\pi}\frac{1}{\mu^{(6-3p)/2}}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+2c_{12}\left[\frac{3^{2p-3}}{2^{2p-3}}\left(\frac{2\ln(3/2)}{(3-2p)}+\frac{1}{(3-p)^2}\right)\frac{1}{\mu}-\frac{3^{2p-3}}{2^{2p-2}(3-2p)}\frac{\ln\mu}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+\gamma_1\left[\frac{3^{2p-3}}{2^{2p-3}(3-2p)}\frac{1}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+2c_{14}\left[\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}-\frac{\pi^2}{2}\frac{\cos\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}{\sin^2\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}+\frac{\pi^3}{8}\frac{1+\cos\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}{\sin^3\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{1}{\mu^{(4-p)/2}}\right.$$

$$-\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}(p-1)}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+\left(\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{\ln(3/2)}{(p-1)}\right)\frac{3^{p-1}}{2^{p-2}}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}$$

$$\left.+\left(\frac{2}{(p-1)^3}+\frac{2\ln(3/2)}{(p-1)^2}-\frac{\ln^2(3/2)}{(p-1)}\right)\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}\frac{1}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{5/2}}\right)\right]$$

$$+\gamma_2\left[\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}-\frac{\pi^2}{4}\frac{\cos\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}{\sin^2\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{1}{\mu^{(4-p)/2}}-\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}(p-1)}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{\ln(3/2)}{(p-1)}\right)\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}}\frac{1}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{5/2}}\right)\right]$$

$$+\gamma_3\left[\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{1}{\mu^{(4-p)/2}}-\frac{3^{p-1}}{2^{p-1}(p-1)}\frac{1}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{1}{\mu^{5/2}}\right)\right]$$

$$-\frac{A^3}{12\pi}\left[\left(\frac{2\ln^2(3/2)}{3}+6\ln(3/2)+4\right)\frac{1}{\mu}-\frac{\pi}{2}\frac{\ln^3\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}-6\pi\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{\ln^3\sqrt{\mu}}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+\gamma_4\left[\left(\frac{2\ln^2(3/2)+4\ln(3/2)+4}{3}\right)\frac{1}{\mu}-\frac{\pi}{2}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}-\frac{2\pi}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+\gamma_5\left[\frac{2}{3}\left(\ln(3/2)+1\right)\frac{1}{\mu}-\frac{\pi}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^2}\right)\right]$$

$$+\frac{c_1\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\frac{1}{\mu^{(2-p)/2}}+\frac{A}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}+\left[\frac{3A}{2\pi}\left(1+\ln(3/2)\right)-\frac{3^pc_1}{2^{p-1}p}\right]\frac{1}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\ln\Psi(\mu)=\frac{c_1\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\frac{1}{\mu^{(2-p)/2}}+\frac{A}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}+\frac{c_2\pi}{\sqrt{\mu}}+\frac{c_7\pi}{\sin(p-1)\pi}\frac{1}{\mu^{2-p}}$$
$$+\frac{c_4\pi}{\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(3-p)/2}}+\frac{a_1}{\mu^{(3-p)/2}}+a_2\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu}+\frac{a_3}{\mu}$$
$$-\frac{c_{31}\pi}{\sin\left(\frac{3p-2}{2}\right)\pi}\frac{1}{\mu^{(6-3p)/2}}-\frac{c_{14}\pi}{\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}+a_4\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}} \tag{3.4.4}$$
$$+\frac{a_5}{\mu^{(4-p)/2}}+\frac{A^3}{24}\frac{\ln^3\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+a_6\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+a_7\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+\frac{a_8}{\mu^{3/2}}$$
$$+O\left(\frac{\ln^3\sqrt{\mu}}{\mu^2}\right)$$

olur, burada,

$$a_1 := \frac{2c_4\pi}{(1-p)\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi} + \frac{c_8\pi}{\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi},$$

$$a_2 := 2c_{10} - \frac{3^{2p-3}}{2^{2p-2}(3-2p)},$$

$$a_3 := M_\lambda + \left(2^{2-p} - \frac{3^p}{2^{p-1}p}\right)c_1 + \frac{A}{\pi}\left(\frac{3}{2}(1+\ln(3/2)) - \ln 2\right) - c_2$$
$$+ \left(2^{4-2p} - \frac{9^{p-1}}{2^{2p-2}(p-1)}\right)c_7 + \left[\frac{3^{p-1}}{2^{p-2}}\left(\ln(3/2) + \frac{1}{(p-1)^2}\right) - 2^{3-p}\ln 2\right]c_4$$
$$+ \left[2^{3-p} - \frac{3^{p-1}}{2^{p-2}(p-1)}\right]c_8 + [4 - 2\ln(3/2)]\,c_{10} + \left[2^{6-3p} - \frac{3^{3p-4}}{2^{3p-5}(3p-4)}\right]c_{31}$$
$$+ \left[\frac{3^{2p-3}}{2^{2p-4}}\left(\frac{2\ln(3/2)}{(3-p)} + \frac{1}{(3-p)^2}\right) - 2^{5-2p}\ln 2\right]c_{12} + \left[2^{4-2p} + \frac{3^{2p-3}}{2^{2p-3}(3-2p)}\right]\gamma_1$$
$$-2^{3-p}\ln 2\gamma_2 + 2^{3-p}\gamma_3 + \left[4\ln^2 2 + \frac{2\ln^2(3/2) + 4\ln(3/2) + 4}{3}\right]\gamma_4 - 2^{3-p}\ln^2 2c_{14}$$
$$+ \left[\frac{2}{3}(1+\ln(3/2)) - 4\ln 2\right]\gamma_5 + \frac{A^3}{3\pi}\ln^3 2 - \frac{A^3}{12\pi}\left(\frac{2\ln^2(3/2)}{3} + 6\ln(3/2) + 4\right),$$

$$a_4 := \frac{c_{14}\pi^2\cos\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}{\sin^2\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi} + \frac{\gamma_2\pi}{2\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi},$$

$$a_5 := -\frac{\pi^3}{4}\frac{c_{14}\left(1+\cos\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi\right)}{\sin^3\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi} - \frac{\gamma_2\pi^2}{4}\frac{\cos\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}{\sin^2\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi} + \frac{\gamma_3\pi}{2\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi},$$

$$a_6 := \frac{c_{14}3^{p-1}}{2^{p-1}(p-1)} - \frac{\gamma_4\pi}{2},$$

$$a_7 := \frac{3^{p-1}c_{14}}{2^{p-3}}\left(\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{\ln(3/2)}{(p-1)}\right) - \frac{3^{p-1}\gamma_2}{2^{p-1}(p-1)} + \frac{A^3}{2} - \frac{\pi\gamma_5}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}},$$

$$a_8 := \frac{c_{14}3^{p-1}}{2^{p-2}}\left(\frac{2}{(p-1)^3} + \frac{2\ln(3/2)}{(p-1)^2} - \frac{\ln^2(3/2)}{(p-1)}\right) + \frac{3^{p-1}\gamma_2}{2^{p-1}}\left(\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{\ln(3/2)}{(p-1)}\right)$$
$$-\frac{3^{p-1}\gamma_3}{2^{p-1}(p-1)} - 2\pi\gamma_4$$

şeklinde sabitlerdir. (3.4.4) eşitliğinden,

$$\Psi(\mu) = \exp\left\{\frac{c_1\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\frac{1}{\mu^{(2-p)/2}} + \frac{A}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} + \frac{c_2\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{c_7\pi}{\sin(p-1)\pi}\frac{1}{\mu^{2-p}}\right.$$
$$+\frac{c_4\pi}{\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(3-p)/2}} + \frac{a_1}{\mu^{(3-p)/2}} + a_2\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu} + \frac{a_3}{\mu} - \frac{c_{31}\pi}{\sin\left(\frac{3p-2}{2}\right)\pi}\frac{1}{\mu^{(6-3p)/2}}$$
$$-\frac{c_{14}\pi}{\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}} + a_4\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}} + \frac{a_5}{\mu^{(4-p)/2}} + \frac{A^3}{24}\frac{\ln^3\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}} + a_6\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}$$

$$+a_7\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+\frac{a_8}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{\ln^3\sqrt{\mu}}{\mu^2}\right)\Bigg\}$$

bulunur. Buradan,

$$\Psi(\mu)=1+\frac{c_1\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\frac{1}{\mu^{(2-p)/2}}+\frac{A}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}+\frac{c_2\pi}{\sqrt{\mu}}+\frac{b_1}{\mu^{2-p}}+b_2\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(3-p)/2}}+\frac{b_3}{\mu^{(3-p)/2}}$$
$$+\frac{A^2}{8}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu}+b_4\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu}+\frac{b_5}{\mu}+\frac{b_6}{\mu^{(6-3p)/2}}+b_7\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(5-2p)/2}}+\frac{b_8}{\mu^{(5-2p)/2}}+b_9\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}$$
$$+b_{10}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}+\frac{b_{11}}{\mu^{(4-p)/2}}+\frac{A^3}{16}\frac{\ln^3\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+b_{12}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+b_{13}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+\frac{b_{14}}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{1}{\mu^{4-2p}}\right)$$

elde edilir, burada,

$$b_1:=\frac{c_7\pi}{\sin(p-1)\pi}+\frac{c_1^2\pi^2}{2\sin^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)},\qquad b_2:=\frac{c_4\pi}{\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}+\frac{Ac_1\pi}{2\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)},$$

$$b_3:=a_1+\frac{c_1c_2\pi^2}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)},\qquad b_4:=a_2+\frac{Ac_2\pi}{2},\qquad b_5:=a_3+\frac{c_2^2\pi^2}{2},$$

$$b_6:=-\frac{c_{31}\pi}{\sin\left(\frac{3p-2}{2}\right)\pi}+\frac{c_1c_7\pi^2}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\sin(p-1)\pi}+\frac{c_1^3\pi^3}{6\sin^3\left(\frac{p\pi}{2}\right)},$$

$$b_7:=\frac{c_1c_4\pi^2}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\sin(\frac{p-1}{2})\pi}+\frac{Ac_7\pi}{\sin(p-1)\pi}+\frac{Ac_1^2\pi^2}{4\sin^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)},$$

$$b_8:=\frac{c_1a_1\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}+\frac{c_2c_7\pi^2}{\sin(p-1)\pi}+\frac{c_1^2c_2\pi^3}{2\sin^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)},$$

$$b_9:=-\frac{c_{14}\pi}{\sin\left(\frac{p-1}{2}\right)\pi}+\frac{Ac_4\pi}{2\sin(\frac{p-1}{2})\pi}+\frac{A^2c_1\pi}{8\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)},$$

$$b_{10}:=\left(a_4+\frac{c_1a_2\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}+\frac{Aa_1}{2}+\frac{c_2c_4\pi^2}{\sin(\frac{p-1}{2})\pi}\right)\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}},$$

$$b_{11}:=a_5+\frac{c_1a_3\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}+c_2a_1\pi+\frac{c_1c_2^2\pi^3}{2\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)},\qquad b_{12}:=a_6+\frac{Aa_2}{2}+\frac{A^2c_2}{8},$$

$$b_{13}:=a_7+\frac{Aa_3}{2}+c_2a_2\pi+\frac{Ac_2^2\pi^2}{4},\qquad b_{14}:=a_8+c_2a_3\pi+\frac{c_2^3\pi^3}{6}$$

şeklinde sabitlerdir.

Dolayısıyla $c=\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1/2)^2}{\lambda_n}\right)$ olmak üzere $\Phi(-\mu)=c\Psi(\mu)\cosh\sqrt{\mu}\pi$ ifadesi,

$$\Phi(-\mu)=c\Bigg\{1+\frac{c_1\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\frac{1}{\mu^{(2-p)/2}}+\frac{A}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}+\frac{c_2\pi}{\sqrt{\mu}}+\frac{b_1}{\mu^{2-p}}+b_2\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(3-p)/2}}+\frac{b_3}{\mu^{(3-p)/2}}$$

$$+\frac{A^2}{8}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu}+b_4\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu}+\frac{b_5}{\mu}+\frac{b_6}{\mu^{(6-3p)/2}}+b_7\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(5-2p)/2}}+\frac{b_8}{\mu^{(5-2p)/2}}$$

$$+b_9\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}+b_{10}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}+\frac{b_{11}}{\mu^{(4-p)/2}}+\frac{A^3}{16}\frac{\ln^3\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+b_{12}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}$$

$$+b_{13}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+\frac{b_{14}}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{1}{\mu^{4-2p}}\right)\Bigg\}\cosh\sqrt{\mu}\pi$$

şeklinde yazılır. Öte yandan

$$\cosh\sqrt{\mu}\pi=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}+e^{-\sqrt{\mu}\pi}}{2}=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}}{2}\left(1+e^{-2\sqrt{\mu}\pi}\right)=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}}{2}+O\left(e^{-2\sqrt{\mu}\pi}\right).$$

olduğundan dolayı,

$$\Phi(-\mu)=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}}{2}c\left\{1+\frac{c_1\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\frac{1}{\mu^{(2-p)/2}}+\frac{A}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}+\frac{c_2\pi}{\sqrt{\mu}}+\frac{b_1}{\mu^{2-p}}+b_2\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(3-p)/2}}\right.$$

$$+\frac{b_3}{\mu^{(3-p)/2}}+\frac{A^2}{8}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu}+b_4\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu}+\frac{b_5}{\mu}+\frac{b_6}{\mu^{(6-3p)/2}}+b_7\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(5-2p)/2}}+\frac{b_8}{\mu^{(5-2p)/2}}$$

$$+b_9\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}+b_{10}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{(4-p)/2}}+\frac{b_{11}}{\mu^{(4-p)/2}}+\frac{A^3}{16}\frac{\ln^3\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+b_{12}\frac{\ln^2\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}$$

$$\left.+b_{13}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\mu^{3/2}}+O\left(\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)\right\}$$

olur.

Diğer taraftan $\varphi'(\pi,-\mu)-H\varphi(\pi,-\mu)$ fonksiyonunun asimptotik ifadesi için,

$$\begin{cases}-y''+\left\{\dfrac{A}{x}+\dfrac{\delta}{x^p}+q(x)\right\}y=-\mu y, & 0<x<\pi\\ y(0)=0\\ y'(\pi)-Hy(\pi)=0\end{cases}$$

probleminin $\varphi(0,-\mu)=0$ ve $\varphi'(0,-\mu)=1$ koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,-\mu)$ olsun. Bu durumda,

$$\varphi(x,-\mu)=\frac{\sinh\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}}+\int_0^x\frac{\sinh\sqrt{\mu}(x-t)}{\sqrt{\mu}}\left\{\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}+q(t)\right\}\varphi(t,-\mu)dt$$

elde edilir. Birinci bölümde yapılan işlemlere benzer olarak

$$\varphi(x,-\mu)=\frac{\sinh\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}}+\frac{\delta\alpha_2}{2}\frac{\sinh\sqrt{\mu}x}{\mu^{(3-p)/2}}-\delta\alpha_4\frac{\cosh\sqrt{\mu}x}{\mu^{(3-p)/2}}+\frac{A\cosh\sqrt{\mu}x}{2\mu}\ln\sqrt{\mu}x$$

$$+\left(-A\alpha_3+\frac{\delta}{2(1-p)x^{p-1}}+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right)\frac{\cosh\sqrt{\mu}x}{\mu}-\frac{A\alpha_1\sinh\sqrt{\mu}x}{2\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)$$

ve

$$\varphi'(x,-\mu)=\cosh\sqrt{\mu}x+\frac{\delta\alpha_2\cosh\sqrt{\mu}x}{2\mu^{(2-p)/2}}-\frac{\delta\alpha_4\sinh\sqrt{\mu}x}{\mu^{(2-p)/2}}+\frac{A\sinh\sqrt{\mu}x}{2\sqrt{\mu}}\ln\sqrt{\mu}x$$

$$+\left(\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt-A\alpha_3+\frac{\delta}{2(1-p)x^{p-1}}\right)\frac{\sinh\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}}+\frac{A\alpha_1\cosh\sqrt{\mu}x}{2\sqrt{\mu}}$$

$$+\left(\frac{q(x)-q(0)}{4}+\frac{A}{4x}+\frac{\delta}{4x^p}\right)\frac{\cosh\sqrt{\mu}x}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)$$

asimptotik formülleri elde edilir, burada,

$$\alpha_1:=-\cosh 1+M_1,\qquad \alpha_2:=2^{p-1}\left(M_3-\cosh 1\right),$$

$$\alpha_3:=-\frac{\sinh 2}{4}+M_2,\qquad \alpha_4:=M_4+\frac{1}{2(p-1)}-\frac{\sinh 2}{4}$$

O halde,

$$\varphi'(\pi,-\mu)-H\varphi(\pi,-\mu)=\cosh\sqrt{\mu}\pi+\frac{\delta\alpha_2\cosh\sqrt{\mu}\pi}{2\mu^{(2-p)/2}}-\frac{\delta\alpha_4\sinh\sqrt{\mu}\pi}{\mu^{(2-p)/2}}$$

$$+\left(\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt-A\alpha_3+\frac{\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}}\right)\frac{\sinh\sqrt{\mu}\pi}{\sqrt{\mu}}+\frac{A\sinh\sqrt{\mu}\pi}{2\sqrt{\mu}}\ln\sqrt{\mu}\pi$$

$$+\frac{A\alpha_1\cosh\sqrt{\mu}\pi}{2\sqrt{\mu}}+\left(\frac{q(\pi)-q(0)}{4}+\frac{A}{4\pi}+\frac{\delta}{4\pi^p}\right)\frac{\cosh\sqrt{\mu}\pi}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)$$

$$-H\left[\frac{\sinh\sqrt{\mu}\pi}{\sqrt{\mu}}+\frac{\delta\alpha_2}{2}\frac{\sinh\sqrt{\mu}\pi}{\mu^{(3-p)/2}}-\delta\alpha_4\frac{\cosh\sqrt{\mu}\pi}{\mu^{(3-p)/2}}+\frac{A\cosh\sqrt{\mu}\pi}{2\mu}\ln\sqrt{\mu}\pi\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}}-A\alpha_3+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right)\frac{\cosh\sqrt{\mu}\pi}{\mu}-\frac{A\alpha_1\sinh\sqrt{\mu}\pi}{2\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)\right]$$

olur. Öte yandan

$$\cosh\sqrt{\mu}\pi=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}+e^{-\sqrt{\mu}\pi}}{2}=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}}{2}\left(1+e^{-2\sqrt{\mu}\pi}\right)=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}}{2}+O\left(e^{-2\sqrt{\mu}\pi}\right)$$

$$\sinh\sqrt{\mu}\pi=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}-e^{-\sqrt{\mu}\pi}}{2}=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}}{2}\left(1-e^{-2\sqrt{\mu}\pi}\right)=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}}{2}+O\left(e^{-2\sqrt{\mu}\pi}\right)$$

olduğundan dolayı

$$\varphi'(\pi,-\mu)-H\varphi(\pi,-\mu)=\frac{e^{\sqrt{\mu}\pi}}{2}\left\{1+\frac{\delta(\alpha_2-2\alpha_4)}{2}\frac{1}{\mu^{(2-p)/2}}+\frac{A}{2}\frac{\ln\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}+\right.$$

$$+\left[\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt - A\alpha_3 + \frac{\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}} + \frac{A\ln\pi}{2} + \frac{A\alpha_1}{2} - H\right]\frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

$$-\frac{\delta H(\alpha_2-2\alpha_4)}{2}\frac{1}{\mu^{(3-p)/2}} - \frac{AH\ln\sqrt{\mu}}{2\mu} + \left[\frac{q(\pi)-q(0)}{4} + \frac{A}{4\pi} + \frac{\delta}{4\pi^p} - \frac{H}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right.$$

$$\left.-\frac{H\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}} + AH\alpha_3 - \frac{AH\ln\pi}{2} - \frac{AH\alpha_1}{2}\right]\frac{1}{\mu}\Bigg\} + O\left(\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)$$

asimptotik formülü elde edilir. Sonuç olarak $\varphi'(\pi,-\mu) - H\varphi(\pi,-\mu) = C\Phi(-\mu)$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
M_\lambda = {} & \frac{q(\pi)-q(0)}{4} + \frac{A}{4\pi} + \frac{\delta}{4\pi^p} - \frac{H}{2}\int_0^\pi q(t)dt - \frac{H\delta}{2(1-p)\pi^{p-1}} \\
& + AH\alpha_3 - \frac{AH\ln\pi}{2} - \frac{AH\alpha_1}{2} - \frac{c_2^2\pi^2}{2} - \left(2^{2-p} - \frac{3^p}{2^{p-1}p}\right)c_1 \\
& - \frac{A}{\pi}\left(\frac{3}{2}(1+\ln(3/2)) - \ln 2\right) + c_2 - \left(2^{4-2p} - \frac{9^{p-1}}{2^{2p-2}(p-1)}\right)c_7 \\
& - \left[\frac{3^{p-1}}{2^{p-2}}\left(\ln(3/2) + \frac{1}{(p-1)^2}\right) - 2^{3-p}\ln 2\right]c_4 - \left[4 - 2\ln(3/2)\right]c_{10} \\
& - \left[2^{3-p} - \frac{3^{p-1}}{2^{p-2}(p-1)}\right]c_8 - \left[2^{6-3p} - \frac{3^{3p-4}}{2^{3p-5}(3p-4)}\right]c_{31} \\
& - \left[\frac{3^{2p-3}}{2^{2p-4}}\left(\frac{2\ln(3/2)}{(3-p)} + \frac{1}{(3-p)^2}\right) - 2^{5-2p}\ln 2\right]c_{12} + 2^{3-p}\ln 2\gamma_2 \\
& - 2^{3-p}\gamma_3 - \frac{A^3}{3\pi}\ln^3 2 - \left[2^{4-2p} + \frac{3^{2p-3}}{2^{2p-3}(3-2p)}\right]\gamma_1 \\
& - \left[4\ln^2 2 + \frac{2\ln^2(3/2) + 4\ln(3/2) + 4}{3}\right]\gamma_4 + 2^{3-p}\ln^2 2c_{14} \\
& + \frac{A^3}{12\pi}\left(\frac{2\ln^2(3/2)}{3} + 6\ln(3/2) + 4\right) - \left[\frac{2}{3}(1+\ln(3/2)) - 4\ln 2\right]\gamma_5
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 3.4.1: L_1 operatörünün regülerize izi için (3.4.5) formülü doğrudur.

KAYNAKLAR

[1]. V.A. Ambartsumyan, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53 (1929), 690-695.

[2]. G.Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78 (1945), 1-96.

[3]. V.A. Marchenko, Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72 (1950), 457-560.

[4]. M.G. Krein, Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76 (1951), 21-24.

[5]. M.G. Krein, On a Method of the Effective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95 (1954), 767-770.

[6] A.N. Tikhonov, Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 1949, 797-800.

[7]. I.M. Gelfand and B. M. Levitan, On the Determination of a Differential Equation by its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 15 (1951), 309-360.

[8]. M.G. Gasimov and B. M. Levitan, About Sturm-Liouville Differential. Operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3, (1964).

[9] B.Y. Wolk, Transform Operator for Differential Equations Singularity in Point $x = 0$., Survey Math. Sci., Vol 8, No 4(56), (1953), 141-151.

[10] V.V. Stasevskaya, Inverse Problems of Spectral Analysis for a Class Differential Equations., Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol. 93, No 3, (1953), 409-412.

[11] V.V. Stasevskaya, Inverse Problems for Spectral Analysis of Differential Operators Singularity in Point $x = 0$., Kharkiv Univ. Bilimsel Yayınlar Dergisi, Vol 25, No 4, (1957), 49-86.

[12] M.M. Cramm, Associated Sturm-Liouville Systems, Quart. J. Math., Oxford (2), Vol 6, No 2, (1955), 121-128.

[13]. M.G. Gasimov, Determination of Singular Sturm-Liouville Operators According to two Spectrums., Dokl. Akad., Nauk SSSR, vol. 161. No.2, (1965), 274-276.

[14]. M.G. Gasimov and R. Kh. Amirov, Direct and Inverse Spectral Problems for Second Order Differential Operators which has Coulumb Singularity., Dokl. Akad., Nauk Az.SSR, vol. 41. No.8, (1985), 1-5.

[15]. H. Hüseynov and Z. M. Gasimov, Young Scientists, The Catalog of Abstract of Among University Conference, Sankt-Petersburg, (1992), 73.

[16] V.A. Yurko, On Recovering Sturm-Liouville Differential Operators with Singularities Inside the Interval, Math. Notes, No 1, 64 (1998), 121-132.

[17] M.G. Gasimov, About an Inverse Problem for Sturm-Liouville Equation, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol. 154, No. 2, (1964).

[18] V.A. Marchenko, Reconstruction of the Potential Energy from the Phases of the Scattered Waves, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 104 (1955), 590-622.

[19] R. Carlson, Inverse Sturm-Liouville Problems with a Singularity at zero., Inverse Problems 10 (1994), 851-864.

[20] Z.S. Agranovich and V.A. Marchenko, The Inverse Problem in the Theory of Scattering, Kharkov Univ., (1960).

[21] L.D. Faddeev, The Inverse Problem in the Quatum Theory of Scattering, Uspekhi Math. Nauk. 14 (1959), No.4, 57-119.

[22] V.A. Marchenko, Theorems of Tauberian Typein the Spectral Theory of Differential Operators, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 19 (1955), 381-422.

[23] B.M. Levitan, On the Asymptotic Behavior of the Spectral Function and on the Eigenfunction Expansion for a Self-Adjoint Second-Order Differential Operator, I, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 17 (1953), 331-364.

[24] B.M. Levitan, On the Asymptotic Behavior of the Spectral Function and on the Eigenfunction Expansion for a Self-Adjoint Second-Order Differential Operator, II, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 19 (1955), 33-58.

[25] V.B. Uvarov, Dissertation, Moscow (1962).

[26] V.A. Marchenko, Some Problems in the Theory of One-Dimensional Linear Second-Order Differential Operator, I, Trudy Moskov. Math. Obshch. (1952), 327-420.

[27] E.C. Titchmarsh, Eigenfunctions Expansions Associated with Second-Order Differential Equations, Oxford Univ. Press., 2nd edition, (1962).

[28] N. Levinson, Gap and Density Theorems, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, No.26, Providence, R.I., (1940).

[29] B.Ya. Levin, Distribution of Zeros of Entire Functions. Moscow,(1956).

[30] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Moskow, (1950).

[31] V.A. Marchenko, Eigenfunction Expansions for Nonself-Adjoint Singular Second-Order Differential Operators, Math. Sb. 52 (94), (1960), 739-788.

[32] M.G. Gasimov, Determination of a Sturm-Liouville Differential Equation by two of its Spectra, Dissertation, Moscow, (1950).

[33] A.Ya. Povsner, On Differential Equations of the Sturm-Liouville Type on a Semi-Axis, Mat. Sb. 23 (65) (1948), 3-52.

[34] B.M. Levitan, Generalized Translation Operators and Some of their Applications, Moscow, (1962).

[35] N.Levinson, The Inverse Sturm-Liouville Problem., Math.Tidsskrift B (1949), 25-30.

[36] M. G. Krein, On the Transfer Function of a One-Dimensional Second-Order Boundary Value Problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 88, (1953), 405-408.

[37] B.M. Levitan, On the Determination of a Sturm-Liouville Differential Equation by two of its Spectra, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 150, (1963), 474-476.

[38] B.M. Levitan, On the Determination of a Differential Equation by two of its Spectra, Izv. Akad. Nauk SSSR 28 (1964), 63-78.

[39] M.G. Gasimov and B. M. Levitan, On the Sum of the Differences of the Eigenvalues of two Singular Sturm-Liouville Operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 151, (1963), 1014-1017.

[40] M.G. Gasimov and B. M. Levitan, On Sturm-Liouville Differential Operators, Math. Sb. 63 (105) (1964), 445-458.

[41] M.G. Gasimov, On the Inverse Problem for the Sturm-Liouville Equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR 154 (1964), 254-257.

[42] B.M. Levitan, Letter to the Editor, Survey Math. Nauk. 18 (1963), No. 4, 239-241.

[43] B.M. Levitan and I.S. Sargsyan, Some Problems in the Theory of Sturm-Liouville Equations, Uspekhi Math. Nauk. 15 (1960), No. 1, 3-98.

[44] R.Courant and D.Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. 1, Moscow, (1951).

[45] E.A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Mcgraw-Hill Book Company, Inc. Newyork-Tronto-London, 1955.

[46] L.V. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., Newyork-Tronto-London, 1953.

[47] R.Kh. Amirov and Y. Cakmak, Trace Formula for the Sturm-Liouville Operator with Singularity., Proceeding of the Eigth Int. Colloqulum on Differential Equations Plovdiv ,Bulgaria, 18-23 August,1998, 9-16.

[48] R.Kh. Amirov, Y.Cakmak, Inverse Spectral Problem for the Differential Equation of the Second Order with Singularity, Proceeding of the Ninth Int. Colloqulum on Differential Equations Plovdiv ,Bulgaria, 18-23 August,1999, 7-14.

ÖZGEÇMİŞ

Yaşar ÇAKMAK 1970 yılında Sivas' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sivas' da tamamladı. 1988 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 1992 yılında mezun oldu. 1994 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak işe başladı. 1995 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Yüksek Lisans sınavını kazanarak, Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve buradan 1997 yılında mezun oldu. Halen Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.