II. MERTEBEDEN REGÜLER SİNGÜLERİTEYE SAHİP DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN TERS (INVERSE) PROBLEMLER

Selma GÜLYAZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2003

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

II. MERTEBEDEN REGÜLER SİNGÜLERİTEYE SAHİP DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN TERS (INVERSE) PROBLEMLER

Selma GÜLYAZ
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2003

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Etibar PENAHOV

Üye : Prof. Dr. Mehdi BALAYEV

Üye : Prof. Dr. Fahrettin ABDULLAYEV

Üye : Prof. Dr. Rauf AMİROV

Üye : Doç. Dr. Eşref ORUCOV

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

04/04/2003

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Rauf AMİROV

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Doktora Tezi

II. MERTEBEDEN REGÜLER SİNGÜLERİTEYE SAHİP DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN TERS (INVERS) PROBLEMLER

Selma GÜLYAZ
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Bu çalışma II. mertebeden diferansiyel operatörlerin spektral teorisine aittir. Sunduğumuz çalışmada II. mertebeden singüler diferansiyel operatörlerin spektral karakteristikleri araştırılmıştır. Ayrıca verilen dizilere göre singüler Sturm-Liouville operatörlerin belirlenmesi ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

Kuantum mekaniğinde singüler potansiyelli alanda parçacıkların hareketinin incelenmesi, Singüler Sturm-Liouville operatörlerin belirlenmesi problemlerinde önemli bir yer tutmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Operatör, Spektrum, Inverse Problem, Sturm-Liouville Operatör, İz (Trace)

SUMMARY

Ph.D Thesis

INVERSE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL OPERATORS WHICH HAVE REGULAR SINGULARITIES OF SECOND ORDER

Selma GÜLYAZ
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Rauf AMİROV

This study belongs to spectral theory of second order differential operators. Spectral characteristic of second order singular differential operators have been investigated. Moreover, according to given sequences, theorems which are related to determine of singular Sturm-Liouville operators have been proved.

In Quantum mecanics, investigation of movement of particals in potential field is so important to determinate of singular Sturm-Liouville operators.

Keywords: Operator, Spectrum, Inverse Problem, Sturm-Liouville Operator, Trace.

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof.Dr. Rauf AMİROV' a ve başta Arş.Gör. Yaşar ÇAKMAK olmak üzere tüm emeği geçenlere içten teşekkürlerimi sunarım.

GİRİŞ

Matematiksel fiziğin bir sıra problemlerinde özellikle de Kuantum mekaniğinde singüleriteye sahip diferansiyel operatörlerin incelenmesi önem kazanmaktadır. Kuantum mekaniğinin önemli problemlerinden birisi singüler potansiyelli alanda parçacıkların hareketinin belirlenmesidir. Bu tip problemlerin çözümü sadece Hidrojen atomunun spektrumunun değil Sodyum (Na) gibi bir valentli atomların spektrumlarının belirlenmesinde de önemlidir.

Tezde elde edilen önemli sonuçları vermeden önce II. mertebeden diferansiyel operatörler için spektral teorinin tarihsel gelişimi verilecek ve daha sonra tezde elde edilen sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 0.1: $l(y) = -y'' + q(x)y$ diferansiyel ifadesi verilsin. Eğer, a ve b sonlu olmak üzere $x \in [a,b]$ ve $q(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirse $l(y)$ ifadesine **Regüler diferansiyel ifade** denir. Eğer, a ve b sayılarından herhangi biri ya da her ikisi de sonsuz ise veya $q(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenemezse ve ya da her iki durum birlikte söz konusu ise $l(y)$ ifadesine **Singüler diferansiyel ifade** denir.

Tanım 0.2: L bir lineer operatör olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ fonksiyonuna L operatörünün **özfonksiyonu** denir. λ ya ise L operatörünün $y(x)$ e karşılık gelen **özdeğeri** denir.

Tanım 0.3: $(L - I\lambda)^{-1}$ sınırlı tersinin olmadığı noktalar kümesine L operatörünün **spektrumu** denir ve $\sigma(L)$ ile gösterilir. $\sigma(L) = \{\lambda \mid Ly = \lambda y,\ y \in D(L)\}$

Tanım 0.4: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $\{y(x,\lambda_n)\}$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun.

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x,\lambda_n)dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 0.5: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine L operatörünün **spektral karakteristikleri** denir.

Tanım 0.6: L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerinin bulunması problemine **düz problem,** spektral karakteristikleri verildiğinde bu hangi Sturm-Liouville tipinde L diferansiyel operatörünün spektral karakteristikleri olduğu problemine ise **ters problem** denir.

Diferansiyel operatörler için spektral analizin ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Ayrıca, fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan bu alandaki ilk çalışma V.A. Ambartsumyana [1] aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 0.7: $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \cdots,\lambda_n,\cdots$ 'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \quad (0 < x < \pi), \tag{0.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{0.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V.A. Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler ve farklı problemler ortaya çıkmıştır. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G.Borg'a aittir ve esas sonucu aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir:

Teorem 0.8: $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ (0.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{0.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$'ler ise (0.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \qquad (h \neq h_1) \tag{0.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \qquad (0.4)$$

sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. (h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılardır.)

Borg'un 1945 yılındaki çalışmasında [2] $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin verilen operatörün farklı spektrumları olduğu kabul edilmiş ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirlenmiştir. Yani, bu tip operatörün varlığının önceden belli olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca, Borg aynı çalışmasında bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. Bu yüzden, V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko [3] tarafından kaydedilmiştir.

1950 yılında V.A. Marchenko yapmış olduğu çalışmasında [3] bu tip problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (0.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \qquad \varphi'(0, \lambda) = h, \tag{0.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)dx \tag{0.7}$$

sayılarına verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonuna ise bu operatörün **spektral fonksiyonu** denir. V.A. Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada Borg'un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonun, Sturm-Lioville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı anda M.G. Krein [4], [5] çalışmalarında, Sturm-Liouville tipindeki bir diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V.A. Marchenko'nun çalışması yayınlanmadan önce A.N. Tikhonov [6] tarafından V. A. Marchenko'nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A.N. Tikhonov çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 0.9: $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda\rho^2(x)U = 0, \qquad x > 0, \qquad U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyondur ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$. $R(\lambda) = \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. O halde $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtir.

1951 yılında I.M. Gelfand ve B.M. Levitan [7], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli koşulları vermişler. Ayrıca, bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ $(\alpha_n > 0)$ dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimptotik formüllerin sağlanmasıdır;

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \cdots + \frac{a_{[\![\frac{m}{2}]\!]}}{n^{2[\![\frac{m}{2}]\!]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2[\![\frac{m}{2}]\!]+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \cdots + \frac{b_{[\![\frac{m}{2}]\!]}}{n^{2[\![\frac{m}{2}]\!]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2[\![\frac{m+1}{2}]\!]}},$$

burada $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve

$\sum \left(\frac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek ise $\sum \left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G. Gasimov [8] tarafından yapılan bir çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada iki spektruma göre ters problemin çözümünde kullanılan en önemli formül

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{0.8}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n$. çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.9) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (0.9) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [8] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşullar verilecektir ve bu koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır, yani $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$ olsun,

2) λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

asimptotik formüllere sahiptir,

3) $a_0 \neq a_0'$

Şimdi ise, singüler Sturm-Liouville operatörleriyle ilgili bazı sonuçlardan kısaca bahsedilecektir.

Üç boyutlu

$$-\Delta u + q(x,y,z)u = \lambda u \tag{0.9}$$

Schrödinger denklemi verilsin. Eğer $q(x,y,z)$ potansiyel fonksiyonu $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ değişkenine bağlı ise yani, $q(x,y,z) = q(r)$ ise (0.9) denkleminde

$$u = \Psi_\ell(\theta, \varphi) y(r)$$

dönüşümü yapılırsa, $y(r)$ fonksiyonu için

$$\frac{d^2y}{dr^2} - \left\{ q(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right\} y = \lambda y \tag{0.10}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada $\ell-$pozitif tam sayıdır.

B.Y. Wolk [9] ve V.V. Stasevska'ya [10] farklı yöntemlerle (0.10) denkleminin

$$\lim_{r\to 0} \frac{y(r,\lambda)}{r^{\ell+1}} = \frac{1}{2^{\ell+1}\Gamma(\ell+3/2)} \tag{0.11}$$

koşulunu sağlayan herbir çözümünün

$$y(r,\lambda) = \frac{\sqrt{r} J_\nu\left(r, \sqrt{\lambda}\right)}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^\nu} + \int_0^r K(r,s) \frac{\sqrt{s} J_\nu\left(s, \sqrt{\lambda}\right)}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^\nu} ds \tag{0.12}$$

şeklinde bir gösterime sahip olduğunu ispatlamışlardır. Burada $J_\nu\left(r, \sqrt{\lambda}\right)$ birinci tip Bessel fonksiyondur. V.V. Stasevskaya'nın [10], [11] çalışmalarında I.M. Gelfand ve B.M. Levitan'ın çalışmasındaki yönteme benzer şekilde, verilen (0.10) diferansiyel denklemin spektral fonksiyonuna göre belirlenmesi ile ilgili bazı problemler incelenmiştir. Ayrıca, bu çalışmalarda (0.10) tipinde diferansiyel denklemin spektral fonksiyonuna göre tek olarak belirtilmesi için bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmaların en önemli sonucu aşağıdaki teoremle ifade edilmektedir:

Teorem 0.10: Azalmayan $\rho(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlanyan bir fonksiyon olsun.

1) Her $r > 0$ için

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}r} d\rho(\lambda) < +\infty$$

2) $\sigma(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda^{\ell+3/2}}{2(\ell+3/2)} + \rho(\lambda), & \lambda \geq 0 \\ \rho(\lambda), & \lambda \leq 0 \end{cases}$ ise

$$F(r,u)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^r \sqrt{t}J_\nu\left(t,\sqrt{\lambda}\right)dt\right\}\left\{\int_0^s \sqrt{t}J_\nu\left(t,\sqrt{\lambda}\right)dt\right\}\lambda^{-\nu}d\sigma(x),$$

$(\nu=\ell+1/2)$ fonksiyonu $0\le r<\infty$, $0\le u<\infty$ değişkenlerine göre dördüncü mertebeden sürekli türevlere sahiptir,

3) $N(r)$ ile $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun $(0,r)$ aralığındaki artma göstergeleri noktaları sayısı gösterilsin ve

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r)}{\sqrt{r}}=\infty$$

Eğer $\rho(\lambda)$ fonksiyonu yukarıdaki özelliklere sahip ise spektral fonksiyonu $\rho(\lambda)$ olan (0.10), (0.11) diferansiyel operatörü tektir. Ayrıca, $q(r)$ fonksiyonu süreklidir ve

$$q(r)=2\frac{dK(r,r)}{dr}$$

eşitliği ile verilmektedir.

$$f(r,u)=\frac{\partial^2F(r,u)}{\partial r\partial u}$$

olmak üzere $K(r,u)$ fonksiyonu

$$f(r,u)+\int_0^r f(u,t)K(r,t)dt+K(r,u)=0,\qquad (0\le u\le\tau)$$

integral denkleminin çözümüdür.

Aralığın her iki ucunda yukarıda sözü edilen tipte singüleriteye sahip diferansiyel operatörler için ters problem M.M. Cramm'ın çalışmasında [12] araştırılmıştır.

1965 yılında M.G. Gasimov'un yapmış olduğu bir çalışmada [13]

$$-y''+\left\{\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+q(x)\right\}y=\lambda y \tag{0.13}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0)=0, \tag{0.14}$$

$$y'(\pi)-H_1y(\pi)=0, \tag{0.15}$$

$$(y'(\pi)-H_2y(\pi)=0), \tag{0.15'}$$

sınır koşulları ile verilen diferansiyel operatör incelenmiş ve bu diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü verilmiştir.

Teorem 0.11: ℓ pozitif tamsayı, $q(x) \in L_2[0,\pi]$ olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots$ ve $\mu_0, \mu_1, \cdots$ dizilerinin sırasıyla (0.13), (0.14), (0.15) ve (0.13), (0.14), (0.15$'$) tipindeki diferansiyel operatörlerin özdeğerleri olması için :

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) $\lambda_n = \left(n + \dfrac{\ell}{2}\right)^2 + a + a_n,$

$$\mu_n = \left(n + \frac{\ell}{2}\right)^2 + b + b_n,$$

asimptotik formülleri sağlansın, burada $a \neq b$ ve $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri öyle ki $\sum |a_n|^2$, $\sum |b_n|^2$ serileri yakınsaktır,

3) $\sum |c_n|^2$ serisi yakınsak olmak üzere $\mu_n - \lambda_n = b - a + \dfrac{c_n}{n}$

koşullarının sağlanması gerekli ve yeterli şarttır.

1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh Amirov çalışmasında[14],

$$-y'' + \left\{\frac{A}{x} + q(x)\right\} y = \lambda y \tag{0.16}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0, \tag{0.17}$$

$$y'(\pi) - h_1 y(\pi) = 0, \tag{0.18}$$

$$(y'(\pi) - h_2 y(\pi) = 0), \tag{0.18$'$}$$

sınır koşulları ile verilen diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü ile ilgili teoremi ispatlamışlardır:

Teorem 0.12: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) $\lambda_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{A}{\pi} \ln\left(n + \dfrac{1}{2}\right) + 2c_0 + a_n,$

$$\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi} \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + 2c_0' + a_n',$$

asimptotik formülleri sağlansın, burada $c_0 \neq c_0'$ ve $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri öyle ki $\sum |a_n|^2$, $\sum |a_n'|^2$ serileri yakınsaktır.

O halde bir $q(x)$ sürekli fonksiyonu ve h_1, h_2 gerçel sayıları vardır ki, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ (0.14), (0.15), (0.16) operatörünün, $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ ise (0.14), (0.15), (0.16$'$) operatörünün spektrumlarıdır ve

$$h_1 - h_2 = \pi(c_0' - c_0)$$

eşitliği sağlanır.

1992 yılında H. Hüseynov ve Z.M. Gasimov çalışmasında [15],

$$-y'' + \left(\frac{\delta}{x^p} + q_0(x)\right) y = \lambda^2 y \tag{0.19}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{0.20}$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0, \tag{0.21}$$

$q_0(x) \in L_2[0,\pi]$, $p \in (1, 5/4)$, $\delta-$gerçel sayı olmak üzere diferansiyel operatörü incelenmiş ve bu tip diferansiyel operatörler için ters problemin çözümü ile ilgili teorem ispatlanmıştır.

Teorem 0.13: $\{\mu_k\}_{k\geq 0}$ ve $\{\gamma_k\}_{k\geq 0}$ gerçel sayı dizileri sırasıyla (0.19), (0.20) ve (0.19), (0.21) problemlerin spekturmları olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekli ve yeterlidir:

1) $-\infty < \gamma_1 < \mu_1 < \gamma_2 < \mu_2 < \ldots$ sıralı olmalıdır,

2) $\mu_k = k^2 + \dfrac{2\delta c_p}{\pi} k^{p-1} - 2A + a_k$

$$\gamma_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta c_p}{\pi}\left(k - \frac{1}{2}\right)^{p-1} - 2A + b_k$$

asimptotik formülleri sağlanmalıdır, burada

$$c_p = \int_0^\infty \frac{\sin^2 \varsigma}{\varsigma} d\varsigma = \frac{2^{p-3}\pi}{(p-1)\Gamma(p-1)\sin \pi(\frac{p-1}{2})},$$

A gerçel sayı, $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ dizileri öyle ki $\sum |a_k|^2$, $\sum |b_k|^2$ serileri yakınsaktır.

Literatürde Bessel potansiyelli singülar diferansiyel operatörlerle ilgili bir sıra çalışmalar vardır. Bunlara örnek olarak V.A. Yurko'nun çalışması [16] gösterilebilir. V.A. Yurko çalışmasında, özellikle potansiyelin singülerite noktası aralığın herhangi bir iç noktasında olduğunda bu tip operatörler için ters problemlerin çözümleri verilmiştir.

$$-y'' + \left(\frac{\nu^2 - 1/4}{(x-\gamma)^2} + q(x)\right) y = \lambda y, \; (\lambda = \rho^2), \; 0 \le x \le \pi \tag{0.22}$$

diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Burada $x = \gamma$ noktası $(0, \pi)$ aralığının herhangi bir iç noktasıdır. (0.22) diferansiyel denklemi için

$$y'(0) - h_0 y(0) = 0, \tag{0.23}$$

$$y'(\pi) - h_1 y(\pi) = 0, \tag{0.24}$$

sınır koşullarının ürettiği operatör L olsun. V.A. Yurko bazı çalışmalarında L operatörü için ters problemin ne şekilde konulacağını incelemiş ve bu tip ters problemlerin çözümünde, Weyl fonksiyonu kavramından ve Z.L. Leibenzon yönteminden yararlanarak ilgili teoremleri ispatlanmıştır. Burada en önemli teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Teorem 0.14: $\{\lambda_k, \; \alpha_k\}_{k\ge 0}$, $\alpha_k \neq 0$ ve $\lambda_k \neq \lambda_n$ $(k \neq n)$ dizilerinin L operatörünün spektral karakteristikleri olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekli ve yeterlidir.

1) Öyle bir $\widetilde{L}$ operatörü mevcuttur ki, $a = \widetilde{a}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\rho_k \alpha_k| \, \xi_k < \infty$,

2) Her bir $x \neq \gamma$ için $E + \widetilde{H}(x) : m \to m$ operatörü sınırlı terse sahiptir,

3) $\chi'(x) \, |x - \gamma|^{1 - 2\,\mathrm{Re}\,\nu} \in L_1(0, \pi)$,

burada $\chi(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_{k0} \widetilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \alpha_{k1} \widetilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x)\right)$.

Bu koşullar sağlandığında L operatörü,

$$p(x) = \widetilde{p}(x) - 2\chi'(x)$$

$$h_0 = \widetilde{h}_0 + \chi(0), \; h_1 = \widetilde{h}_1 + \chi(\pi)$$

formülleri yardımıyla kurulur. Burada, $p(x) = \dfrac{\nu^2 - 1/4}{(x-\gamma)^2} + q(x)$, $q(x) \in L_2(0, \pi)$.

Singüler Sturm-Liouville operatörleri için sonlu aralıkta düz ve ters spektral problemlerin araştırıldığı bu tezde aşağıdaki yol izlenmiştir.

Birinci bölümde, singüler ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için düz problem incelendi.

1.1 alt bölümünde, L_1 operatörünün çözümünün varlığı ve tekliği gösterildi.

$$l(y) := -y'' + \left\{ \frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + \frac{A}{x} + q(x) \right\} y \tag{0.25}$$

diferasiyel ifadesi ve

$$y(0) = 0 \quad , \qquad y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0 \tag{0.26}$$

$$(y(0) = 0 \quad , \qquad y'(\pi) - H_2 y(\pi) = 0) \tag{0.26'}$$

$D(L_1) = \{y(x) : y(x) \in W_2^2[0,\pi],\ \ell(y) \in L_2[0,\pi],\ q(x) \in W_2^2[0,\pi],\ y(0) = 0,$ $y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0\}$ olmak üzere sınır koşullarının ürettiği diferansiyel operatör L_1 (L_2) olsun. Burada $\ell \geq 1$ tamsayı ve A, H_1, H_2 gerçel sayılardır.

Tanım 0.15: $W_2^n[a,b] = \{f(x) \mid f^{(k)}(x) \in AC[a,b],\ k = \overline{0,\ n-1},\ f^{(n)} \in L_2[a,b]\}$.

$\varphi(x,\rho)$ fonksiyonu

$$l\left[\varphi(x,\rho)\right] = \rho^2 \varphi(x,\rho),\ \lambda = \rho^2 \tag{0.27}$$

diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\rho) = 0 \tag{0.28}$$

koşulunu sağlayan çözümü olsun.

(0.27)-(0.28) probleminin bir tek çözümünün var olduğu ispatlandı.

1.2 alt bölümünde L_1 operatörünün özdeğerlerinin, özfonksiyonlarının ve normalleştirici sayılarının asimptotik formülleri verildi.

$$\Delta(\rho) := \varphi'(\pi,\rho) - H_1 \varphi(\pi,\rho)$$

olmak üzere, L_1 operatörünün ρ_n özdeğerleri $\Delta(\rho) = 0$ denkleminden bulundu.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\rho_n)dx, \qquad n = 0, 1, \cdots$$

sayılarına L_1 operatörünün **normalleştirici sayıları** denir.

Dolayısıyla, n'nin yeteri kadar büyük değerleri için L_1 operatörünün ρ_n özdeğerleri, $\varphi(x,\rho_n)$ özfonksiyonları ve α_n normalleştirici sayıları için aşağıdaki asimptotik formüller elde edildi:

$$\rho_n = (n+\frac{\ell}{2}) + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{a_0}{n+\ell/2} - \frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{a_1}{(n+\ell/2)^2} - \frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + a_2\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + a_3\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\varphi(x,\rho_n) = \cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x - \tfrac{\ell\pi}{2}\right) + A_0(x)\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{A_1(x)}{n+\ell/2} + A_2(x)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + A_3(x)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \frac{A_4(x)}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{n+\ell/2} + \frac{A^2\pi}{8}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + b_1\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \frac{b_2}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

İkinci bölümünde, $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ özdeğerler dizisi ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılar dizisine göre ters problemin çözümü verildi.

2.1 alt bölümünde $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral karakteristiklerinden yararlanarak

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\rho_n)\varphi_0(t,\rho_n) - \frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(x,\rho_n^0)\varphi_0(t,\rho_n^0)\right]$$

geçici fonksiyonu oluşturuldu ve bu fonksiyonun özellikleri araştırıldı. Burada $\{\alpha_n^0\}_{n\geq 0}$ lar ile L_1 operatörünün $q(x)\equiv 0$ durumuna karşılık gelen operatörün normalleştirici sayıları gösterildi. $F(x,t)$ fonksiyonunun x ve t değişkenlerine göre sürekli türevlenebilir olduğu ispatlandı. Ayrıca, bu alt bölümde $F(x,t)$ fonksiyonunun yardımıyla,

$$F(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi = 0 \qquad (0.29)$$

integral denklemi kuruldu.

2.2 alt bölümünde (0.29) integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlandı. Ayrıca, bu bölümde $K(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesinin $F(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesine eşit olduğu ispatlandı.

2.3 alt bölümünde $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümünü veren aşağıdaki teorem ispatlandı.

Teorem 2.3.3: Eğer her $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ için $\alpha_n > 0$, $n \neq m$ olduğunda $\lambda_n \neq \lambda_m$, λ_n'ler gerçel ve

$$\begin{aligned}
\rho_n = \quad & (n+\frac{\ell}{2}) + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{a_0}{n+\ell/2} - \frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{a_1}{(n+\ell/2)^2} - \\
& -\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + a_2\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + a_3\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_n = \quad & \frac{\pi}{2} + \frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{n+\ell/2} + \frac{A^2\pi}{8}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + b_1\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\
& + \frac{b_2}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

asimptotik formülleri sağlanırsa, spektral karakteristikleri $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ olan L_1 tipinde operatör vardır. Burada a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2 sabitlerdir.

Ayrıca,

$$q(x) = 2\frac{dK(x,x)}{dx}.$$

Tezin üçüncü bölümünde, L_1 ve L_2 operatörlerinin spektrumuna göre ters problem araştırıldı. $\mu_0 < \mu_1 < \ldots$ ler L_2 operatörünün özdeğerlerini göstermektedir.

3.1 alt bölümünde, α_n normalleştirici sayılarını $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ spektrumları ile ifade eden

$$\begin{aligned}
\alpha_n = \quad & \alpha_n^0 \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_n^0 - \mu_n^0}\frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_n^0 - \lambda_0^0}\frac{\lambda_n - \mu_0}{\lambda_n^0 - \mu_0^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k^0} \\
& \times \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k^0}{\lambda_n^0 - \mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n - \mu_k^0}
\end{aligned} \tag{0.30}$$

eşitliği ispatlandı. Burada $\{\mu_n^0\}_{n\geq 0}$ lar ile L_2 operatörünün $q(x) \equiv 0$ durumuna karşılık gelen operatörün özdeğerleri dizisidir.

3.2 alt bölümünde λ_n ve μ_n nin asimptotik formüllerinden yararlanarak (0.30) eşitliğinin yardımıyla α_n normalleştirici sayılarının asimptotik formülleri bulundu:

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{n+\ell/2} + \frac{A^2\pi}{8}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} +$$
$$+ \left\{\frac{A\,(3\pi^2-4)}{12}\left[(a_0-a_0^0)+(a_0'-a_0'^0)\right] + \frac{2}{\pi}b_1^0\right\}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} +$$
$$+ \frac{\pi}{2}\left\{M_\lambda + M_\mu + \left[3 - \frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right]\left[(a_0-a_0^0)+(a_0'-a_0'^0)\right] +\right.$$
$$+ \frac{\pi^2}{2}\left[(a_0-a_0^0)^2+(a_0'-a_0'^0)^2\right] + \frac{1}{2}\left[(a_0+a_0')+(a_0^0+a_0'^0)\right] +$$
$$+ 4\,(a_0^0-a_0) + \left(\lambda_0^0-\lambda_0\right) + (\mu_0^0-\mu_0) - \frac{a_1-a_1'}{a_0-a_0'}\frac{a_1^0-a_1'^0}{a_0^0-a_0'^0} +$$
$$\left. + \frac{2}{\pi}b_2^0\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

burada,

$$M_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda_k - \lambda_k^0 - 2(a_0-a_0^0)\right\},$$

$$M_\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\mu_k - \mu_k^0 - 2(a_0'-a_0'^0)\right\}.$$

3.3 alt bölümünde iki spektruma göre ters problemin çözümü verildi.

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$$

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \cdots$$

gerçel sayı dizileri verilmiş olsun. n'nin yeteri kadar büyük değerleri için λ_n ve μ_n' ler

$$\lambda_n = \left(n+\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln(n+\ell/2) + 2a_0 - \frac{A^2}{4}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{2a_1}{n+\ell/2} -$$
$$-\frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \left(2a_2 + \frac{A^2}{4\pi^2}\right)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \tag{0.31}$$
$$+\left(2a_3 + \frac{Aa_0}{\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \frac{a_0^2}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

ve

$$\mu_n = \left(n+\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln(n+\ell/2) + 2a_0' - \frac{A^2}{4}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{2a_1'}{n+\ell/2} - $$
$$-\frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \left(2a_2' + \frac{A^2}{4\pi^2}\right)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \tag{0.32}$$
$$+\left(2a_3' + \frac{Aa_0'}{\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \frac{a_0'^2}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

asimptotik formüllere sahiptir, burada

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{AM}{4} - H_1 + \frac{A\ln\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right)$$
$$a_0' = \frac{1}{\pi}\left(\frac{AM}{4} - H_2 + \frac{A\ln\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right)$$

Bu alt bölümünde aşağıdaki teorem ispatlandı.

Teorem 3.3.1: Aşağıdaki koşulları sağlayan $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş olsun:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) λ_n ve μ_n ler için (0.30) ve (0.32) asimptotik formülleri ve $a_0 \neq a_0'$ doğrudur.

O halde sürekli $q(x)$ fonksiyonu ve öyle A, H_1, H_2 gerçel sayıları vardır ki, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, L_1 operatörünün spektrumu, $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ ise L_2 operatörünün spektrumudur. Ayrıca,

$$H_1 - H_2 = \pi(a_0' - a_0)$$

şeklindedir. Buradaki A sayısı λ_n'nin asimptotik formülünden bulunur.

3.4 alt bölümünde, L_1 operatörünün regülerize izi hesaplandı. $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ile L_1 operatörünün $q(x) \equiv 0$ olduğu duruma karşılık gelen özdeğerleri gösterildiğinde aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.4.1: Eğer $\int_0^\pi q(t)dt = 0$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda_n - \mu_n] = (-1)^{\ell+1}\frac{q(\pi)-q(0)}{4}$$

formülü doğrudur.

I. BÖLÜM

SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERİN HESAPLANMASI (DÜZ PROBLEM)

1.1. Singüler Sturm-Liouville Problemin Çözümlerinin Davranışı

L operatörü

$$L:\begin{cases} -y''+\left\{\dfrac{\ell(\ell-1)}{x^2}+Q(x)\right\}y=\lambda y, \quad \lambda=\rho^2, 0<x<\pi & (1.1.1)\\ y(0)=0 & (1.1.2)\\ y'(\pi)-Hy(\pi)=0 & (1.1.3)\end{cases}$$

olsun. Burada $Q(x)=\dfrac{A}{x}+q(x)$, $q(x)\in W_2^2[0,\pi]$ gerçel değerli fonksiyon, A, H gerçel sayılar ve $\ell\geq 1$ tamsayıdır. (1.1.1) diferansiyel denkleminin çözümünü bulmak için ilk olarak homojen

$$y''+\left\{\lambda-\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}\right\}y=0, \qquad (1.1.1')$$

denkleminin çözümünü bulalım. (1.1.1$'$) denklemi $x=0$ noktası düzgün tekil (regüler singüler) nokta olan II. mertebeden bir denklemdir. Bu yüzden seri çözümü

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r} \quad \text{şeklinde aranır.}$$

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n+r-1},\ y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_nx^{n+r-2}$$

ifadeleri homojen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$x^2y''+\left\{x^2\lambda-\ell(\ell-1)\right\}y=0,$$

$$[r(r-1)-\ell(\ell-1)]C_0x^r+[r(r+1)-\ell(\ell-1)]C_1x^{r+1}+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{[(n+r)(n+r-1)-\ell(\ell-1)]C_n+\lambda C_{n-2}\right\}x^{n+r}=0$$

olur. İndis denkleminden dolayı $C_0\neq 0$ olduğu için $r_1=\ell$ ve $r_2=-\ell+1$ olarak bulunur.

$r_1 = \ell$ için

$[r(r+1) - \ell(\ell-1)]C_1 = 0$ dır. Buradan $\ell C_1 = 0$ olur. $\ell > 1$ tamsayı olduğundan $C_1 = 0$ bulunur,

$$(n+r)(n+r-1) - \ell(\ell-1)C_n = -\lambda C_{n-2}, \quad n \geqslant 2$$

rekurans formülünden $C_1 = C_3 = C_5 = \cdots = 0$ olur. O halde $r_1 = \ell$ olduğu durumda C_{2n} 'ler için

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n \lambda^n C_0}{2^{2n} n! (\ell - \frac{1}{2} + 1)(\ell - \frac{1}{2} + 2) \ldots (\ell - \frac{1}{2} + n)}, \ n \geq 1$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler $y_1(x)$ çözümünde yerine yazılır ve

$C_0 = \dfrac{\rho^\ell}{2^{\ell - \frac{1}{2}} \Gamma(\ell - \frac{1}{2} + 1)}$ şeklinde alınırsa ($\rho^2 = \lambda$),

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\rho x)^{2n} x^\ell \mu^\ell}{2^{2n} n! 2^{\ell - \frac{1}{2}} \Gamma(\ell - \frac{1}{2} + n + 1)}$$

$$= \sqrt{\rho x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\ell - \frac{1}{2} + n + 1)} \left(\frac{\rho x}{2}\right)^{2n + \ell - \frac{1}{2}}$$

olur. Burada $J_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$ olduğundan,

$y_1(x) = \sqrt{\rho x} J_{(\ell - \frac{1}{2})}(\rho x)$ elde edilir.

Benzer şekilde $r_2 = -\ell + 1$ için

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n \lambda^n C_0}{2^{2n} n! \left(1 - (\ell - \frac{1}{2})\right) \left(2 - (\ell - \frac{1}{2})\right) \ldots \left(n - (\ell - \frac{1}{2})\right)}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler $y_2(x)$ çözümünde yerine yazılır ve

$C_0 = \dfrac{\rho^{-\ell+1}}{2^{-(\ell - \frac{1}{2})} \Gamma\left(-(\ell - \frac{1}{2}) + 1\right)}$ şeklinde alınırsa,

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\rho x)^{2n} x^{-\ell+1} \lambda^{-\ell+1}}{2^{2n} n! 2^{-(\ell - \frac{1}{2})} \Gamma\left(-(\ell - \frac{1}{2}) + n + 1\right)}$$

$$= \sqrt{\rho x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma\left(-(\ell - \frac{1}{2}) + n + 1\right)} \left(\frac{\rho x}{2}\right)^{2n - (\ell - \frac{1}{2})}$$

olur. Buradan $y_2(x) = \sqrt{\rho x} J_{-(\ell - \frac{1}{2})}(\rho x)$ elde edilir. $\ell - \frac{1}{2} =: \nu$ olarak alınırsa, (1.1.1′) denkleminin genel çözümü

$$y_h = C_1\sqrt{\rho x}J_\nu(\rho x) + C_2\sqrt{\rho x}J_{-\nu}(\rho x)$$

şeklinde bulunur.

$\varphi(x,\rho)$ (1.1.1) denkleminin $\varphi(0,\rho) = 0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. (1.1.1) denkleminin genel çözümü ve L operatörünün tanım kümesi göz önünde bulundurulursa, $\varphi(x,\rho)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho x}{2}}J_\nu(\rho x) +$$

$$+ (-1)^\ell\frac{\pi}{2}\int_0^x \sqrt{xt}\left[J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho x) - J_{-\nu}(\rho t)J_\nu(\rho x)\right]\left(\frac{A}{t} + q(t)\right)\varphi(t,\rho)dt$$

integral denklemi sağlayacağı açıktır. Ardışık yaklaşımlar metoduyla bu integral denklemin varlığı ve tekliği gösterilebilir. Bunun için ;

$$\varphi_0(x,\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho x}{2}}J_\nu(\rho x)$$

$$|\varphi_0(x,\rho)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}B$$

$$\varphi_k(x,\rho) = (-1)^\ell\frac{\pi}{2}\int_0^x \sqrt{xt}\left[J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho x) - J_{-\nu}(\rho t)J_\nu(\rho x)\right]Q(t)\varphi_{k-1}(t,\rho)dt$$

ardışık yaklaşımları kurulsun;

$k = 1$ için

$$\varphi_1(x,\rho) = (-1)^\ell\frac{\pi}{2}\int_0^x \sqrt{xt}\left[J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho x) - J_{-\nu}(\rho t)J_\nu(\rho x)\right]Q(t)\varphi_0(t,\rho)dt$$

$$= (-1)^\ell\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^x \sqrt{xt}\left[J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho x) - J_{-\nu}(\rho t)J_\nu(\rho x)\right]Q(t)\sqrt{\rho t}J_\nu(\rho t)dt$$

$\nu = \ell - \frac{1}{2}$ için

$$\left.\begin{array}{ll} |J_\nu(\rho x)| \leq B, & 0 \leq x \leq \pi \\ \left|\sqrt{\rho x}J_\nu(\rho x)\right| \leq B, & 0 \leq x \leq \pi \\ |J_{-\nu}(\rho x)| \leq B, & 0 \leq x \leq \pi \\ \left|\sqrt{\rho x}J_{-\nu}(\rho x)\right| \leq B, & 0 \leq x \leq \pi \end{array}\right\} |\rho x| \geq 1$$

$$|P_1(\rho x)| \leq B, \qquad |\rho x| \leq 1,$$

$$|P_2(\rho x)| \leq B, \qquad\qquad |\rho x| \leq 1,$$

burada $P_1(\rho x)$ ve $P_2(\rho x)$ fonksiyonları $J_\nu(x) = x^\nu P_1(x)$ ve $J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} P_2(x)$.

Şimdi $|\rho x| \geq 1$ olduğu durumda incelenirse,

$k = 1$ için

$$\varphi_1(x,\rho) = (-1)^\ell \frac{\pi}{2} \int_0^x \sqrt{xt}\left[J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho x) - J_{-\nu}(\rho t)J_\nu(\rho x)\right] Q(t)\varphi_0(t,\rho)dt$$

$$|\varphi_1(x,\rho)| \leq \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}B^3 \int_0^x t\,|Q(t)|\,dt$$

$k = 2$ için

$$\varphi_2(x,\rho) = (-1)^\ell \frac{\pi}{2} \int_0^x \sqrt{xt}\left[J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho x) - J_{-\nu}(\rho t)J_\nu(\rho x)\right] Q(t)\varphi_1(t,\rho)dt$$

$$|\varphi_2(x,\rho)| \leq \pi^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}B^5 \frac{1}{2!}\left(\int_0^x t\,|Q(t)|\,dt\right)^2$$

$k = 3$ için

$$\varphi_3(x,\rho) = (-1)^\ell \frac{\pi}{2} \int_0^x \sqrt{xt}\left[J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho x) - J_{-\nu}(\rho t)J_\nu(\rho x)\right] Q(t)\varphi_2(t,\rho)dt$$

$$|\varphi_3(x,\rho)| \leq \pi^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}B^7 \frac{1}{3!}\left(\int_0^x t\,|Q(t)|\,dt\right)^3$$

$\vdots$

$k = n$ için

$$|\varphi_n(x,\rho)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\pi^n B^{2n+1}\frac{1}{n!}\left(\int_0^x t\,|Q(t)|\,dt\right)^n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{B}{n!}\left(\pi B^2 \int_0^x t\,|Q(t)|\,dt\right)^n$$

$$\varphi(x,\rho) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x,\rho) = \varphi_0(x,\rho) + \varphi_1(x,\rho) + \cdots + \varphi_n(x,\rho) + \cdots$$

serisinin yakınsak olduğu gösterilmelidir.

Her n için

$$|\varphi_n(x,\rho)| \leq a_n$$

ve

$$a_n := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{B}{n!}\left(\pi B^2 \int\limits_0^x t\,|Q(t)|\,dt\right)^n$$

dir.

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} B\frac{1}{n!}\left(\pi B^2 \int\limits_0^x t\,|Q(t)|\,dt\right)^n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}B\exp\left(\pi B^2 \int\limits_0^x t\,|Q(t)|\,dt\right)$$

olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır. Weierstrass testinden dolayı $\sum|\varphi_n(x,\rho)|$ serisi düzgün yakınsaktır. O halde $\sum\varphi_n(x,\rho)$ fonksiyonel serisi $[0,\pi]$ aralığında düzgün yakınsaktır. O halde varlık-teklik teoremine göre $\varphi(0,\rho) = 0$ başlangıç koşulunu sağlayan $\varphi(x,\rho)$ fonksiyonu var ve tektir.

$x > 0$ için ρ' nun yeterince büyük değerlerinde $\varphi(x,\rho)$ fonksiyonunun davranışı araştırılır. Bunun için $\varphi(x,\rho)$ fonksiyonunun,

$$\varphi(x,\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho x}J_\nu(\rho x) +$$

$$+(-1)^\ell\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^x \sqrt{xt}\left[J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho x) - J_{-\nu}(\rho t)J_\nu(\rho x)\right]\left(\frac{A}{t}+q(t)\right)\sqrt{\rho t}J_\nu(\rho t)dt + \ldots$$

ifadesinden ve

$$\begin{aligned}
J_p(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left[\cos(t-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right]\\
J_{-p}(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left[\cos(t+\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right]\\
J_p'(t) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left[\sin(t-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right]\\
J_{-p}'(t) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left[\sin(t+\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right]
\end{aligned} \qquad (1.1.4)$$

asimptotik formüllerinden yararlanılır [47].

$$\int\limits_0^x J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho t)dt = \int\limits_0^\infty J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho t)dt - \int\limits_x^\infty J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho t)dt$$

şeklinde yazılırsa ve

$$\int_0^\infty J_{\sigma+p}(at)J_{\sigma-p-1}(bt)dt = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma-p)p!b}\left(\frac{b}{a}\right)^{\sigma-p} F(\sigma,-p,\sigma-p), & b<a \\ \dfrac{(-1)^p}{2a} & , b=a \\ 0 & , b>a \end{cases}$$

eşitliğinden yararlanılırsa,

$$\int_0^x J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho t)dt = -\frac{(-1)^\ell}{2\rho} - \frac{1}{2\pi x}\frac{\cos 2\rho x}{\rho^2} - \frac{1}{4\pi x^2}\frac{\sin 2\rho x}{\rho^3} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right), \ (x>0)$$

elde edilir.

$$\int_0^x J_\nu^2(\rho t)dt = \int_0^x tJ_\nu^2(\rho t)\frac{dt}{t} = \int_0^x \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \xi J_\nu^2(\rho\xi)\xi\right)$$

olduğundan

$$\int xJ_n^2(ax)dx = \frac{x^2}{2}(J_n'(ax))^2 + \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{a^2x^2}\right)(J_n(ax))^2$$

eşitliğinden yararlanılırsa,

$$\int_0^x J_\nu^2(\rho t)dt = x(J_\nu'(\rho x))^2 + x\left(1-\frac{\nu^2}{\rho^2x^2}\right)J_\nu^2(\rho x) + \int_0^x (J_\nu'(\rho t))^2dt - \frac{\nu^2}{\rho^2}\int_0^x \frac{J_\nu^2(\rho t)}{t^2}dt$$

elde edilir. Ayrıca, $J_\nu(\rho t)$ ve $J_\nu'(\rho t)$ fonksiyonlarının davranışlarından yararlanılırsa,

$$\int_0^x (J_\nu'(\rho t))^2dt =$$

$$\begin{cases} \rho t = \xi, \\ dt = \dfrac{d\xi}{\rho} \end{cases} \quad \text{ve } |\rho x| \geq 1$$

$$= \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho x}(J_\nu'(\xi))^2d\xi = \frac{1}{\rho}\int_0^1 (J_\nu'(\xi))^2d\xi + \frac{1}{\rho}\int_1^{\rho x}(J_\nu'(\xi))^2d\xi$$

olduğundan

$$\int_1^{\rho x}(J_\nu'(\xi))^2d\xi = \frac{1}{\pi}\ln\rho x - \frac{(-1)^\ell}{2\pi}\frac{\sin 2\rho x}{\rho x} + \frac{(-1)^\ell}{2\pi}\sin 2 + \frac{(-1)^\ell}{4\pi}\frac{\cos 2\rho x}{\rho^2x^2} -$$

$$-\frac{(-1)^\ell}{4\pi}\cos 2 + \frac{\sin 2\rho x}{\rho^3x^3} - \frac{(-1)^\ell}{4\pi}\sin 2 - \frac{3(-1)^\ell}{4\pi}\int_1^{\rho x}\frac{\sin 2\xi}{\xi^4}d\xi$$

bulunur.

$$\int_0^x \frac{J_\nu^2(\rho t)}{t^2}dt =$$

$$\begin{cases} \rho t = \xi, \\ dt = \dfrac{d\xi}{\rho} \end{cases} \qquad \text{ve } |\rho x| \geq 1$$

$$= \rho \int_0^{\rho x} \frac{J_\nu^2(\xi)}{\xi^2}d\xi = \rho \int_0^1 \frac{J_\nu^2(\xi)}{\xi^2}d\xi + \rho \int_1^{\rho x} \frac{J_\nu^2(\xi)}{\xi^2}d\xi$$

olduğundan

$$\int_1^{\rho x} \frac{J_\nu^2(\xi)}{\xi^2}d\xi = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\rho^2 x^2} + \frac{(-1)^\ell}{2\pi}\frac{\sin 2\rho x}{\rho^3 x^3} - \frac{(-1)^\ell}{2\pi}\sin 2 -$$

$$-\frac{3(-1)^\ell}{4\pi}\frac{\cos 2\rho x}{\rho^4 x^4} + \frac{3(-1)^\ell}{4\pi}\cos 2 - \frac{6(-1)^\ell}{4\pi}\int_1^{\rho x}\frac{\cos 2\xi}{\xi^5}d\xi$$

elde edilir. Dolayısıyla $x > 0$ için bu integralin

$$\int_0^x J_\nu^2(\rho t)dt = \frac{2}{\pi\rho} + \frac{1}{\pi}\frac{\ln \rho x}{\rho} + \frac{(-1)^\ell}{4\pi\rho}[2\sin 2 - \cos 2] - \frac{\nu^2}{2\pi\rho}\left[1 - (-1)^\ell \sin 2\right] +$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 (J_\nu'(\xi))^2 d\xi - \nu^2 \int_0^1 \frac{J_\nu^2(\xi)}{\xi^2}d\xi\right] - \frac{(-1)^\ell}{2\pi}\frac{\sin 2\rho x}{\rho^2 x} + \frac{\nu^2}{\pi\rho^3 x^2} +$$

$$+\frac{(-1)^\ell \nu^2}{\pi\rho^3 x^2}\cos 2\rho x + \frac{(-1)^\ell}{4\pi}\frac{\cos 2\rho x}{\rho^3 x^2} + \frac{\nu^2}{2\pi}\frac{1}{\rho^3 x^2} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

davranışa sahip olduğu görülür.

$$N_1 := \int_0^1 (J_\nu'(\xi))^2 d\xi - \nu^2 \int_0^1 \frac{J_\nu^2(\xi)}{\xi^2}d\xi, \quad N_2 := \frac{(-1)^\ell}{2}[2\sin 2 - \cos 2],$$

$N_3 := \nu^2\left[1 - (-1)^\ell \sin 2\right]$ ile gösterilirse,

$$\int_0^x J_\nu^2(\rho t)dt = \frac{1}{\pi}\frac{\ln \rho x}{\rho} + \frac{1}{2\pi\rho}\left[4 + 2\pi N_1 + N_2 - N_3\right] - \frac{(-1)^\ell}{2\pi}\frac{\sin 2\rho x}{\rho^2 x}$$

$$+\left[\frac{(-1)^\ell \nu^2}{\pi x^2} + \frac{(-1)^\ell}{4\pi x^2}\right]\frac{\cos 2\rho x}{\rho^3} + \frac{\nu^2}{2\pi}\frac{1}{\rho^3 x^2} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

olur. Benzer şekilde, $x > 0$ için ρ' nun yeterince büyük değerlerinde

$$\int_0^x tJ_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho t)q(t)dt = -\frac{1}{2\pi}q(x)\frac{\cos 2\rho x}{\rho^2} + \frac{1}{2\pi\rho^2}q(0)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}q'(x)\frac{\sin 2\rho x}{\rho^3}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

ve

$$\int_0^x tJ_\nu^2(\rho t)q(t)dt=\frac{1}{\pi\rho}\int_0^x q(t)dt+\frac{(-1)^\ell}{2\pi}q(x)\frac{\sin 2\rho x}{\rho^2}+\frac{(-1)^\ell}{4\pi}q'(x)\frac{\cos 2\rho x}{\rho^3}-$$
$$-\frac{(-1)^\ell}{4\pi\rho^3}q'(0)+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

olduğu elde edilir.

Elde edilen ifadeler $\varphi(x,\rho)$ fonksiyonun ifadesinde yerine yazılırsa, $x>0$ ve ρ' nun yeterince büyük değerleri için davranışı

$$\varphi(x,\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho x}J_\nu(\rho x)-$$
$$-(-1)^\ell\frac{A\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho x}J_\nu(\rho x)\left\{-\frac{(-1)^\ell}{2\rho}-\frac{1}{2\pi x}\frac{\cos 2\rho x}{\rho^2}-\frac{1}{4\pi x^2}\frac{\sin 2\rho x}{\rho^3}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\right\}+$$
$$+(-1)^\ell\frac{A\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho x}J_\nu(\rho x)\left\{\frac{1}{\pi}\frac{\ln\rho x}{\rho}+\frac{1}{2\pi\rho}[4+2\pi N_1+N_2-N_3]-\frac{(-1)^\ell}{2\pi}\frac{\sin 2\rho x}{\rho^2 x}+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{(-1)^\ell\nu^2}{\pi x^2}+\frac{(-1)^\ell}{4\pi x^2}\right]\frac{\cos 2\rho x}{\rho^3}+\frac{\nu^2}{2\pi}\frac{1}{\rho^3 x^2}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\right\}-$$
$$-(-1)^\ell\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho x}J_\nu(\rho x)\left\{-\frac{q(x)}{2\pi}\frac{\cos 2\rho x}{\rho^2}+\frac{q(0)}{2\pi\rho^2}+\frac{q'(x)}{4\pi}\frac{\sin 2\rho x}{\rho^3}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\right\}+$$
$$+(-1)^\ell\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho x}J_\nu(\rho x)\left\{\frac{1}{\pi\rho}\int_0^x q(t)dt+\frac{(-1)^\ell}{2\pi}q(x)\frac{\sin 2\rho x}{\rho^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^\ell}{4\pi}q'(x)\frac{\cos 2\rho x}{\rho^3}-\frac{(-1)^\ell q'(0)}{4\pi\rho^3}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\right\}$$

olarak bulunur. $M:=4+2\pi N_1+N_2-N_3$ ile gösterilir ve (1.1.4) asimptotik formüllerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}\varphi(x,\rho)=\;&\sin(\rho x-(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})+(-1)^\ell\frac{A}{2}\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\ln\rho x+\\&+\frac{A\pi}{4}\frac{\sin(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}+\\&+(-1)^\ell\left[\frac{AM}{4}+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right]\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}+\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{4x}+\frac{q(x)}{4}\right]\frac{\sin(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho x-\\
&-(-1)^{\ell}\frac{q(0)}{4}\frac{\sin(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}+\\
&+\left[\frac{q(x)}{4}-\frac{A}{4x}\right]\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho x-\\
&-\left[\frac{q'(0)}{8}-\frac{(-1)^{\ell}A\nu^2}{4x^2}\right]\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}+\\
&+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{8x^2}-\frac{q'(x)}{8}\right]\frac{\sin(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\sin 2\rho x+\\
&+\left[\frac{A\nu^2}{2x^2}+\frac{A}{8x^2}+\frac{q'(x)}{8}\right]\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\cos 2\rho x+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

1.2. Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Özdeğerlerinin Davranışı

$$\varphi(x,\rho): \qquad \varphi(0,\rho)=0 \quad , \quad \varphi'(0,\rho)=1$$

$$\psi(x,\rho): \qquad \psi(\pi,\rho)=1 \quad , \quad \psi'(\pi,\rho)=H$$

fonksiyonları (1.1.1) diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Yukarıdaki koşulları sağlayan $\psi(x,\rho)$ çözümünün varlığı, $\varphi(x,\rho)$ çözümü ile lineer bağımsız olduğu, ayrıca $\varphi(x,\rho)$ ve $\psi(x,\rho)$ fonksiyonlarının ρ parametresine göre tam analitik fonksiyonlar olduğu R. Carlson' un çalışmasında [19] gösterilmiştir.

Tanım 1.2.1: $\Delta(\rho) := \psi'(x,\rho)\varphi(x,\rho)-\psi(x,\rho)\varphi'(x,\rho)$ fonksiyonuna L operatörünün **karakteristik fonksiyonu** denir.

(1.1.5) ifadesinin x 'e göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}
\varphi'(x,\rho) &= \rho\cos(\rho x-(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})-(-1)^{\ell}\frac{A}{2}\sin(\rho x+(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})\ln\rho x+\\
&+(-1)^{\ell}\frac{A}{2}\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho x}+\frac{A\pi}{4}\sin(\rho x-(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})-\\
&-(-1)^{\ell}\left[\frac{AM}{4}+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right]\sin(\rho x+(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})+(-1)^{\ell}\frac{q(x)}{2}\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}-\\
&-(-1)^{\ell}\frac{q(0)}{4}\frac{\cos(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{4x}+\frac{q(x)}{4}\right]\frac{\cos(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\cos 2\rho x+\\
&-(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{2x}+\frac{q(x)}{2}\right]\frac{\sin(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\sin 2\rho x+\\
&+(-1)^{\ell}\left[-\frac{A}{4x^2}+\frac{q'(x)}{4}\right]\frac{\sin(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho x-\\
&-\left[\frac{q(x)}{4}-\frac{A}{4x}\right]\frac{\sin(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\sin 2\rho x+\\
&+\left[\frac{q(x)}{2}-\frac{A}{2x}\right]\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\cos 2\rho x+\\
&+\left[\frac{q'(x)}{4}+\frac{A}{4x^2}\right]\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho x-\\
&-\left[\frac{q'(0)}{8}-\frac{(-1)^{\ell}A\nu^2}{4x^2}\right]\frac{\sin(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}-\\
&-\frac{(-1)^{\ell}A\nu^2}{2x^3}\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}+
\end{aligned}$$

$$+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{8x^2}-\frac{q'(x)}{8}\right]\frac{\cos(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho x+$$

$$+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{4x^2}-\frac{q'(x)}{4}\right]\frac{\sin(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho x+$$

$$-(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{4x^3}+\frac{q''(x)}{8}\right]\frac{\sin(\rho x-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\sin 2\rho x+$$

$$-\left[\frac{A\nu^2}{2x^2}+\frac{A}{8x^2}+\frac{q'(x)}{8}\right]\frac{\sin(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho x-$$

$$-\left[\frac{A\nu^2}{x^2}+\frac{A}{4x^2}+\frac{q'(x)}{4}\right]\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho x+$$

$$+\left[-\frac{A\nu^2}{x^3}-\frac{A}{4x^3}+\frac{q''(x)}{8}\right]\frac{\cos(\rho x+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\cos 2\rho x+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

ifadesi bulunur. Tanım 1.2.1 gereği L operatörünün karakteristik fonksiyonu için,

$$\Delta(\rho)=\varphi'(\pi,\rho)-H\varphi(\pi,\rho)$$

$$=\rho\cos(\rho\pi-(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})-(-1)^{\ell}\frac{A}{2}\cos(\rho\pi+(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})\ln\rho\pi+$$

$$+(-1)^{\ell}\frac{A}{2\pi}\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}+\frac{A\pi}{4}\sin(\rho\pi-(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})-$$

$$-(-1)^{\ell}\left[\frac{AM}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)dt\right]\sin(\rho\pi+(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})+$$

$$+(-1)^{\ell}\frac{q(\pi)}{2}\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}-(-1)^{\ell}\frac{q(0)}{4}\frac{\cos(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}+$$

$$+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{4\pi}+\frac{q(\pi)}{4}\right]\frac{\cos(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\cos 2\rho\pi-$$

$$-(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{2\pi}+\frac{q(\pi)}{2}\right]\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\sin 2\rho\pi+$$

$$+(-1)^{\ell}\left[-\frac{A}{4\pi^2}+\frac{q'(\pi)}{4}\right]\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho\pi-$$

$$-\left[\frac{q(\pi)}{4}-\frac{A}{4\pi}\right]\frac{\sin(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\sin 2\rho\pi+$$

$$+\left[\frac{q(\pi)}{2}-\frac{A}{2\pi}\right]\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\cos 2\rho\pi+$$

$$+\left[\frac{q'(\pi)}{4}+\frac{A}{4\pi^2}\right]\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho\pi-$$

$$-\left[\frac{q'(0)}{8}-\frac{(-1)^{\ell}A\nu^2}{4\pi^2}\right]\frac{\sin(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}-$$
$$-\frac{(-1)^{\ell}A\nu^2}{2\pi^3}\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}+$$
$$+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{8\pi^2}-\frac{q'(\pi)}{8}\right]\frac{\cos(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho\pi+$$
$$+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{4\pi^2}-\frac{q'(\pi)}{4}\right]\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho\pi+$$
$$-(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{4\pi^3}+\frac{q''(\pi)}{8}\right]\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\sin 2\rho\pi+$$
$$-\left[\frac{A\nu^2}{2\pi^2}+\frac{A}{8\pi^2}+\frac{q'(\pi)}{8}\right]\frac{\sin(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho\pi-$$
$$-\left[\frac{A\nu^2}{\pi^2}+\frac{A}{4\pi^2}+\frac{q'(\pi)}{4}\right]\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho\pi+$$
$$+\left[-\frac{A\nu^2}{\pi^3}-\frac{A}{4\pi^3}+\frac{q''(\pi)}{8}\right]\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\cos 2\rho\pi+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)-$$
$$-H\left\{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})+(-1)^{\ell}\frac{A}{2}\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\ln\rho\pi+\right.$$
$$+\frac{A\pi}{4}\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}+(-1)^{\ell}\left[\frac{AM}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)dt\right]\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}+$$
$$+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{4\pi}+\frac{q(\pi)}{4}\right]\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho\pi-(-1)^{\ell}\frac{q(0)}{4}\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}+$$
$$+\left[\frac{q(\pi)}{4}-\frac{A}{4\pi}\right]\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho\pi-$$
$$-\left[\frac{q'(0)}{8}-\frac{(-1)^{\ell}A\nu^2}{4\pi^2}\right]\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}+$$
$$+(-1)^{\ell}\left[\frac{A}{8\pi^2}-\frac{q'(\pi)}{8}\right]\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\sin 2\rho x+$$
$$\left.+\left[\frac{A\nu^2}{2\pi^2}+\frac{A}{8\pi^2}+\frac{q'(\pi)}{8}\right]\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\cos 2\rho\pi+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\right\}$$

ifadesi elde edilir.

Tanım 1.2.2: $\Delta(\rho)=0$ denklemine L operatörünün **karakteristik denklemi** denir.

Buradan, $\rho \neq 0$ ve Tanım 1.2.2 gereği verilen operatörün karakteristik denklemi

$$
\begin{aligned}
&\cos(\rho\pi-(\ell-1)\tfrac{\pi}{2})-(-1)^{\ell}\frac{A}{2}\frac{\sin(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}\ln\rho\pi-\\
&-(-1)^{\ell}M_1\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}+\frac{A\pi}{4}\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}-\\
&-H\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho}-(-1)^{\ell}\frac{AH}{2}\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\ln\rho\pi-\\
&-(-1)^{\ell}\frac{q(0)}{4}\frac{\cos(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}+(-1)^{\ell}M_2\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}-\\
&-\frac{AH\pi}{4}\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}+(-1)^{\ell}M_3\frac{\cos(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho\pi-\\
&-(-1)^{\ell}M_3\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho\pi-\\
&-M_4\frac{\sin(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\sin 2\rho\pi-2M_4\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^2}\cos 2\rho\pi+\\
&+(-1)^{\ell}H\frac{q(0)}{4}\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}+M_5\frac{\sin(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}+\\
&+(-1)^{\ell}M_6\frac{\cos(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\sin 2\rho\pi-\\
&-(-1)^{\ell}HM_3\frac{\sin(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\cos 2\rho\pi+\\
&+M_7\frac{\cos(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\sin 2\rho\pi+M_8\frac{\sin(\rho\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho^3}\cos 2\rho\pi+\\
&+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)=0
\end{aligned}
\tag{1.2.1}
$$

şeklinde elde edilir, burada

$$
M_1:=\frac{AM}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)dt,\quad M_2:=\frac{A}{2\pi}+\frac{q(\pi)}{2}-HM_1,\quad M_3:=\frac{A}{4\pi}+\frac{q(\pi)}{4},
$$

$$
M_4:=\frac{q(\pi)}{4}-\frac{A}{4\pi},\qquad M_5:=\frac{q'(0)}{8}-\frac{(-1)^{\ell}A\nu^2}{4\pi^2},\qquad M_6:=\frac{A}{8\pi^2}-\frac{q'(\pi)}{8},
$$

$$
M_7:=-\frac{A\nu^2}{\pi^2}-\frac{q(\pi)H}{4}+\frac{AH}{4\pi},\qquad M_8:=-\left[\frac{A\nu^2}{2\pi^2}+\frac{A}{8\pi^2}+\frac{q'(\pi)}{8}\right].
$$

Teorem 1.2.3: $\Delta(\rho)=\varphi'(\pi,\rho)-H\varphi(\pi,\rho)=0$ karakteristik denkleminin $\{\rho_n\}$ sıfırları L sınır değer probleminin özdeğerleriyle çakışır. $\varphi(x,\rho_n)$ ve $\psi(x,\rho_n)$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik $(0, \pi)$ aralığında integrallenilirse,

$$\int_0^\pi \left[-\psi''(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n) + \varphi''(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\right] dx =$$

$$= -\psi'(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\lambda_n) + \varphi'(\pi,\lambda_n)\psi(\pi,\lambda) + \lim_{x\to 0^+} \varphi(x,\lambda_n)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(0,\lambda_n)\psi(0,\lambda)$$

$$= (\lambda - \lambda_n) \int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)dx$$

elde edilir. 1994 yılında R. Carlson çalışmasında [19] $\psi(x,\lambda)$her λ için sınırlı fonksiyon ve $\psi'(x,\lambda) = O(x^{-1})$ dir. Yani, $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) = 0$ olduğu gösterilmiştir. Buna göre,

$$\varphi'(\pi,\lambda_n) - H\varphi(\pi,\lambda_n) - \psi(0,\lambda) = (\lambda - \lambda_n) \int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)dx$$

olur. $\Delta(\lambda)$' nın tanımından yararlanılırsa,

$$-\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)dx$$

eşitliği elde edilir.

$$-\dot{\Delta}(\lambda_n) := \lim_{\lambda\to\lambda_n} -\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \lim_{\lambda\to\lambda_n} \int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)dx$$

burada $\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n)$ eşitliğinden yararlanılırsa,

$$-\dot{\Delta}(\lambda_n) = \int_0^\pi \beta_n\varphi^2(x,\lambda_n)dx$$

veya $-\dot{\Delta}(\lambda_n) = \beta_n\alpha_n$ eşitliği elde edilir.

Lemma 1.2.5: (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri basittir.

İspat: $\varphi(x,\rho_n)$ ve $\psi(x,\rho_n)$ fonksiyonları (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonları olduğundan $\beta_n \neq 0$, $\alpha_n \neq 0$ dır. Buradan $-\dot{\Delta}(\rho_n) \neq 0$ elde edilir. Dolayısıyla (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin ρ_n özdeğerleri basittirler.

$S(x,\rho)$ fonksiyonu (1.1.1) diferansiyel denkleminin

$$y(0,\rho) = 0$$

özfonksiyonlardır ve

$$\psi(x,\rho_n) = \beta_n \varphi(x,\rho_n), \qquad \beta_n \neq 0,$$

olacak şekilde $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ dizisi vardır.

İspat: $\rho = \rho_0$, $\Delta(\rho)$'ın sıfırı olsun, yani $\Delta(\rho_0) = 0$ dır. O halde, $\psi(x,\rho_0) = \beta_0\varphi(x,\rho_0)$ ve $\psi(x,\rho_0)$, $\varphi(x,\rho_0)$ fonksiyonları (1.1.2) ve (1.1.3) sınır koşullarını sağlamaktadır. Dolayısıyla, ρ_0-özdeğer, $\psi(x,\rho_0)$ ve $\varphi(x,\rho_0)$ ise uygun özfonksiyonlardır.

Tersine, kabul edelimki, ρ_0 L operatörünün özdeğeri, $y_0(x)$ ise ρ_0'a karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde $U(y_0) = V(y_0) = 0$ dır. Diğer taraftan $y_0(x) \neq 0$. Genelliği bozmadan $y_0(0) = 0$ alınırsa $y_0(x) \equiv \varphi(x,\rho_0)$ olur. Buradan $V(\varphi(x,\rho_0)) = V(y_0(x)) = 0$ olduğundan $\Delta(\rho_0) = 0$ elde edilir.

Böylece her bir özdeğere sabit sayı çarpımı farkıyla bir tek özfonksiyon karşılık gelmektedir. Her ρ_n için $\Delta(\rho_n) = 0$ olduğundan en az bir $\beta_n \neq 0$ vardır ki

$$\psi(x,\rho_n) = \beta_n \varphi(x,\rho_n)$$

olur.

ρ_n özdeğerine karşılık gelen $L(q,\ H)$ sınır değer probleminin özfonksiyonu $\varphi(x,\rho_n)$ olarak gösterilsin.

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \varphi^2(x,\rho_n)dx \tag{1.2.2}$$

şeklinde tanımlanan $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisine verilen sınır değer probleminin normalleştirici sayılar dizisi denir.

Lemma 1.2.4: $\beta_n\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)$ eşitliği doğrudur.

İspat:

$$-\varphi''(x,\lambda_n) + q(x)\varphi(x,\lambda_n) = \lambda_n\varphi(x,\lambda_n)$$
$$-\psi''(x,\lambda) + q(x)\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda)$$

olduğundan

$$-\psi''(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n) + \varphi''(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) = (\lambda-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. O halde açıktır ki, (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\Phi(\rho) = S'(\pi, \rho) - HS(\pi, \rho) = 0$$

fonksiyonunun sıfırları ile çakışmaktadır. $\Phi(\rho)$ denklemine (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin karakteristik denklemi denir. (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin varlığı ve onların asimptotik ifadelerinin bulunması problemi $\Phi(\rho)$ karakteristik fonksiyonun sıfırlarının belirlenmesi problemine indirgenmektedir.

Eğer (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) probleminin sinüs tipli çözümleri için integral denklemi yazılırsa, bu integral denk-
lemi yardımıyla $\Phi(\rho)$ denklemi için ρ'nun yeterince büyük değerlerinde

$$\Phi(\rho) = \rho\cos(\rho\pi - (\ell - 1)\frac{\pi}{2}) + e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi} O\left(\frac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right) = 0 \qquad (1.2.3)$$

asimptotik formülü elde edilir.

Tanım 1.2.6: $M > 0$ herhangi bir sayı olmak üzere

$$\left|\cos(\rho\pi - (\ell - 1)\frac{\pi}{2})\right| \geq M e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

eşitsizliğini sağlayan ve sınırsız olarak genişlenen yörüngesine (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sınır değer problemi için geçerli yörünge denir ve K_n ile gösterilir.

Yukarıda verilen tanımdan yararlanarak $\Phi(\rho)$ fonksiyonunun davranışından açıktır ki, n'nin herhangi bir değerinden sonra bu fonksiyon K_n yörüngesi üzerinde

$$|\Phi(\rho)| \geq M e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

eşitsizliğini sağlamaktadır.

Not: K_n yörüngesi olarak $\cos(\rho\pi - (\ell - 1)\frac{\pi}{2})$ fonksiyonunun sıfırları

$$\frac{\ell}{2}, \pm 1 \mp \frac{\ell}{2}, \pm 2 \mp \frac{\ell}{2}, \cdots$$

noktalarını içine alan Z_ρ yörüngeleri alınabilir.

Teorem 1.2.7: (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) probleminin özdeğerleri sayılabilir sayıdadır ve

$$\rho_n = n + \frac{\ell}{2} + O\left(r_n\right)$$

davranışına sahiptir. Burada

$$r_n = \frac{1}{n+\ell/2} + \int\limits_0^{1/(n+\ell/2)} t\,|Q(t)|\,dt + \frac{1}{n+\ell/2} \int\limits_{1/(n+\ell/2)}^{\pi} |Q(t)|\,dt$$

İspat: $\Phi(\rho)$ karakteristik denkleminin (1.2.3) davranışından görüldüğü gibi bu fonksiyon ρ değişkenine göre tam fonksiyondur. Bundan dolayı bu fonksiyonun sıfırları

$$\cdots, -\rho_n, -\rho_{n-1}, \cdots, -\rho_1, \rho_1, \cdots, \rho_n, \cdots$$

dizileri şeklinde yazılabilir. Burada her i için

$$|\rho_i| \leq |\rho_{i+1}|$$

ve her $i \geq 0$ için $\operatorname{Re}\rho_i \geq 0$ dır.

$$\Gamma_n = \begin{cases} |\operatorname{Re}\rho| \leq n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \\ |\operatorname{Im}\rho| \leq n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

kapalı yörüngeleri içinde kalan $\Phi(\rho)$ fonksiyonun sıfırlarının sayısı bulunabilir. Bunun için önce $\Phi(\rho)$ fonksiyonu Γ_n yörüngesi üzerinde değerlendirilir.

$\rho = \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\right) + iy$ için

$$\left|\cos(\rho\pi - (\ell-1)\tfrac{\pi}{2})\right| = \left|\cos\left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} + iy - \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\right)\pi\right| = |\cos iy\pi|$$

$$= \left|\frac{e^{y\pi} + e^{-y\pi}}{2}\right| \geq \frac{1}{2}e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

$\rho = x + i\left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\right)$ için

$$\left|\cos(\rho\pi - (\ell-1)\tfrac{\pi}{2})\right| = \left|\cos\left(x + i\left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\right)\pi\right| \geq \frac{1}{4}e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

$\rho = x - i\left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\right)$ için

$$\left|\cos(\rho\pi - (\ell-1)\tfrac{\pi}{2})\right| = \left|\cos\left(x - i\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi\right| \geq \frac{1}{4}e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

elde edilir. (1.2.3) eşitliğinden

$$f(\rho) = \cos(\rho\pi - (\ell-1)\frac{\pi}{2}), \qquad g(\rho) = \frac{e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}}{\rho}\left(\frac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)$$

olarak alınırsa, Γ_n yörüngesinde

$$|f(\rho)|_{\Gamma_n} \geq \frac{1}{4}e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}, \qquad |g(\rho)|_{\Gamma_n} \leq C\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}}{\rho}\left(\frac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)$$

eşitsizlikleri korunur. Son eşitsizlikten yararlanılırsa,

$$|f(\rho)|_{\Gamma_n} \geq \frac{1}{\dfrac{4C}{\rho}\left(\dfrac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)}|g(\rho)|_{\Gamma_n} \tag{1.2.4}$$

eşitsizliği elde edilir. $R(\rho)$ ifadesinden görüldüğü gibi n'nin büyük değerlerinde

$$\frac{1}{\dfrac{4C}{\rho}\left(\dfrac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)} > 1 \tag{1.2.5}$$

koşulu sağlanır. (1.2.4) eşitsizliğinden $f(\rho)$, $g(\rho)$ fonksiyonları Γ_n yörüngelerinin iç bölgelerinde Rouché teoreminin koşullarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla Γ_n yörüngelerinin iç bölgelerinde $\Phi(\rho)$ fonksiyonu ile $\cos(\rho\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2})$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı eşittir ve $2n$ sayıdadır. Böylece $\Phi(\rho)$ fonksiyonunun sıfırları sayısının sayılabilir olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca, her bir n için $\Phi(\rho)$ fonksiyonu ρ_n'nun n. sıfırı ise

$$\left|\mathrm{Re}\,\rho - \left(n+\frac{\ell}{2}\right)\right| < \frac{1}{2}$$

bölgelerinde yerleşmektedir. Diğer taraftan $\sigma < \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$\left|\rho - \left(n+\frac{\ell}{2}\right)\right| < \sigma < \frac{1}{2}$$

çemberlerinin iç noktalarında da

$$\left|\cos(\rho\pi - (\ell-1)\frac{\pi}{2})\right| \geq M_1\sigma e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır. Burada M_1 sayısı ρ'ya bağlı değildir.

O halde $|\rho - (n+\ell/2)| < 1/2$ çemberlerin dışında fakat

$$\begin{cases} |\mathrm{Re}\,\rho - (n+\ell/2)| < 1/2, \\ |\mathrm{Im}\,\rho - (n+\ell/2)| < 1/2 \end{cases}$$

diktörtgenin içinde kalan kısımlarında

$$|f(\rho)| \geq M_1 \sigma e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Dolayısıyla bu ρ'lar için

$$|f(\rho)| \geq \frac{M_1\sigma}{\dfrac{C}{\rho}\left(\dfrac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)} |g(\rho)| \tag{1.2.6}$$

eşitsizliği doğrudur. (1.2.6) eşitsizliğinde σ sayısı

$$\frac{M_1\sigma}{\frac{C}{\rho}\left(\frac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)} = 2$$

şeklinde seçilirse,

$$\sigma := \frac{2C}{M_1\rho}\left(\frac{1}{|\rho|} + R(\rho)\right)$$

olur. ρ'nun büyük değerlerinde $\sigma < \dfrac{1}{2}$ koşulu her zaman sağlanacaktır. O halde bu ρ'lar için

$$|f(\rho)| \geq |g(\rho)|$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Böylece Rouché teoreminden $\Phi(\rho)$ fonksiyonun n. sıfırı

$$\left|\rho - \left(n + \frac{\ell}{2}\right)\right| < \sigma$$

çemberi içinde yerleşir. Dolayısıyla

$$\rho_n = (n + \frac{\ell}{2}) + O\left(\frac{1}{|\rho_n|} + R(\rho_n)\right)$$

asimptotik formülü elde edilir. Burada

$$R(\rho_n) = \int_0^{1/|\rho_n|} t\,|Q(t)|\,dt + \frac{1}{|\rho_n|}\int_{1/|\rho_n|}^{\pi} |Q(t)|\,dt$$

şeklindedir.

Eğer $q(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında integrallenebilir ise $R(\rho_n)$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$R(\rho_n)=\int\limits_0^{1/(n+\ell/2)} t\left|\frac{A}{t}+q(t)\right|dt+\frac{1}{n+\ell/2}\int\limits_{1/(n+\ell/2)}^{\pi}\left|\frac{A}{t}+q(t)\right|dt$$

$$=|A|\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{c}{n+\ell/2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

dır.Dolayısıyla $q(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında integrallenebilir ise ρ_n'ler için

$$\rho_n=n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik formülü elde edilir. Burada , $a_0:=\dfrac{A}{2\pi}\ln\pi+\dfrac{M_1}{\pi}-\dfrac{H}{\pi}$ dır.

$q(x)\in W_2^2[0,\pi]$ olmak üzere Rouché teoremi tekrar uygulanırsa, n'nin yeterince büyük değerlerinde ρ_n' ler için, $\delta_n=O\left(\dfrac{1}{(n+\ell/2)^3}\right)=O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ alınırsa,

$$\rho_n=n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n$$

olur. (1.2.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\cos\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)-$$

$$-(-1)^{\ell}\frac{A}{2}\frac{\sin\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n}$$

$$\ln\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)\pi-$$

$$-(-1)^{\ell}M_1\frac{\sin\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\rho}+$$

$$+\frac{A\pi}{4}\frac{\sin\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n}-$$

$$-H\frac{\sin\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n}-$$

$$-(-1)^{\ell}\frac{AH}{2}\frac{\cos\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)^2}$$

$$\ln\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)\pi-$$

$$-(-1)^{\ell}\frac{q(0)}{4}\frac{\cos\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)^2}+$$

$$+(-1)^{\ell}M_2\frac{\cos\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)^2}-$$

$$-\frac{AH\pi}{4}\frac{\sin\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)^2}+$$

$$+(-1)^{\ell}M_3\frac{\cos\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)^2}$$

$$\cos 2\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)\pi-$$

$$-(-1)^{\ell}M_3\frac{\sin\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi-(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)^2}$$

$$\sin 2\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)\pi-$$

$$-M_4\frac{\sin\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)^2}$$

$$\sin 2\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)\pi-$$

$$-2M_4\frac{\cos\left((n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n)\pi+(\ell-1)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)^2}$$

$$\cos 2\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}+\delta_n\right)\pi+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=0$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\delta_n=&-\frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\frac{1}{(n+\ell/2)^2}\left[-\frac{Aa_0\pi}{2}-\frac{AH}{4}\right]+\\
&+\frac{A^3}{48\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}-\frac{A^3}{16\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+\\
&+\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}\left[-\frac{A^3}{16\pi}\ln\pi-\frac{A^2a_0}{4}\ln\pi-\frac{A^2M_1}{8\pi}-\frac{A^2a_0}{8}+3\frac{A^2H}{8\pi}-\frac{A^2}{4\pi^2}\right]+\\
&+\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}\left[\frac{A^2}{4\pi}-\frac{AM_1}{2\pi^2}-\frac{AM_1a_0}{2}+\frac{AH}{2\pi^2}+3\frac{AHa_0}{2}+\frac{A^2H}{4\pi}\ln\pi+\right.\\
&\left.+(-1)^\ell\frac{q(0)A}{8\pi}-\frac{AM_2}{2\pi}+\frac{A^2H}{4\pi}-5\frac{AM_3}{2\pi}+\frac{A^2Ha_0\pi}{4}-\frac{A^2a_0}{4}\ln\pi\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

$$a_1:=-\frac{Aa_0\pi}{2}-\frac{AH}{4},$$

$$a_2:=-\frac{A^3}{16\pi}\ln\pi-\frac{A^2a_0}{4}\ln\pi-\frac{A^2M_1}{8\pi}-\frac{A^2a_0}{8}+3\frac{A^2H}{8\pi}-\frac{A^2}{4\pi^2},$$

$$\begin{aligned}
a_3:=&\frac{A^2}{4\pi}-\frac{AM_1}{2\pi^2}-\frac{AM_1a_0}{2}+\frac{AH}{2\pi^2}+3\frac{AHa_0}{2}+\frac{A^2H}{4\pi}\ln\pi+\\
&+(-1)^\ell\frac{q(0)A}{8\pi}-\frac{AM_2}{2\pi}+\frac{A^2H}{4\pi}-5\frac{AM_3}{2\pi}+\frac{A^2Ha_0\pi}{4}-\frac{A^2a_0}{4}\ln\pi
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\delta_n=&-\frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\frac{a_1}{(n+\ell/2)^2}-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+a_2\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}-\\
&+a_3\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

asimptotik formülü elde edilir. Dolayısıyla ρ_n' nin,

$$\begin{aligned}
\rho_n=&n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}-\frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\frac{a_1}{(n+\ell/2)^2}-\\
&-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+a_2\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+a_3\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

asimptotik formülü bulunur. $\lambda_n = \rho_n^2$ olduğundan dolayı özdeğerlerin asimptotik formülü,

$$\lambda_n = \left(n+\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln(n+\ell/2) + 2a_0 - \frac{A^2}{4}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{2a_1}{n+\ell/2} -$$
$$-\frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \left(2a_2+\frac{A^2}{4\pi^2}\right)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \left(2a_3+\frac{Aa_0}{\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} +$$
$$+\frac{a_0^2}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

şeklinde elde edilir.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (1.1.5) asimptotik formülünde ρ' nun yerine ρ_n yazılırsa L operatörünün $\varphi(x,\rho_n)$ özfonksiyonlarının asimptotik formülleri için,

$$\varphi(x,\rho_n) = \sin(\rho_n x - (\ell-1)\tfrac{\pi}{2}) + (-1)^\ell \frac{A}{2}\frac{\cos(\rho_n x + (\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho_n}\ln\rho_n x +$$
$$+\frac{A\pi}{4}\frac{\sin(\rho_n x - (\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho_n} + (-1)^\ell\left[\frac{AM}{4} + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right]\frac{\cos(\rho_n x + (\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho_n} +$$
$$+(-1)^\ell\left[\frac{A}{4x}+\frac{q(x)}{4}\right]\frac{\sin(\rho_n x - (\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho_n^2}\cos 2\rho_n x - (-1)^\ell\frac{q(0)}{4}\frac{\sin(\rho_n x - (\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho_n^2} +$$
$$+\left[\frac{q(x)}{4}-\frac{A}{4x}\right]\frac{\cos(\rho_n x + (\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho_n^2}\sin 2\rho_n x - \left[\frac{q'(0)}{8} - \frac{(-1)^\ell A\nu^2}{4x^2}\right]\frac{\cos(\rho_n x + (\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho_n^3} +$$
$$+(-1)^\ell\left[\frac{A}{8x^2}-\frac{q'(x)}{8}\right]\frac{\sin(\rho_n x - (\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho_n^3}\sin 2\rho_n x +$$
$$+\left[\frac{A\nu^2}{2x^2}+\frac{A}{8x^2}+\frac{q'(x)}{8}\right]\frac{\cos(\rho_n x + (\ell-1)\frac{\pi}{2})}{\rho_n^3}\cos 2\rho_n x + O\left(\frac{1}{\rho_n^4}\right)$$

olur, burada ρ_n özdeğerinin asimptotik formülü yazıldığında

$$\begin{aligned}\varphi(x,\rho_n) &= \cos\left((n+\frac{\ell}{2})x - \frac{\ell\pi}{2}\right) + A_0(x)\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{A_1(x)}{n+\ell/2} + \\ &\quad + A_2(x)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + A_3(x)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \frac{A_4(x)}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)\end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$A_0(x) := -\frac{Ax}{2\pi}\sin\left((n+\tfrac{\ell}{2})x - \tfrac{\ell\pi}{2}\right) + (-1)^\ell\frac{A}{2}\sin\left((n+\tfrac{\ell}{2})x + \tfrac{\ell\pi}{2}\right),$$

$$A_1(x) := -a_0 x\sin\left((n+\tfrac{\ell}{2})x - \tfrac{\ell\pi}{2}\right) + (-1)^\ell\frac{A}{2}\ln x\sin\left((n+\tfrac{\ell}{2})x + \tfrac{\ell\pi}{2}\right) +$$
$$+\frac{A\pi}{4}\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x - \tfrac{\ell\pi}{2}\right) + (-1)^\ell M_1\sin\left((n+\tfrac{\ell}{2})x + \tfrac{\ell\pi}{2}\right),$$

$$A_2(x) := -\frac{A^2x^2}{8\pi^2}\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)+(-1)^\ell\frac{A^2x}{4\pi}\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}\right),$$

$$A_3(x) := -\frac{Aa_0x^2}{2\pi}\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)+(-1)^\ell\frac{AM_1x}{2\pi}\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}\right)+$$
$$+(-1)^\ell\frac{A^2x}{4\pi}\ln x\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}\right)+(-1)^\ell\frac{Aa_0x}{2}\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}\right),$$

$$A_4(x) := -\frac{a_0^2x^2}{2}\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)-a_1x\sin\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)+$$
$$+(-1)^\ell\frac{Aa_0x}{2}\ln x\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}\right)-\frac{A\pi a_0x}{4}\sin\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)+$$
$$+(-1)^\ell M_1a_0x\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}\right)-(-1)^\ell\frac{q(0)}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)+$$
$$+(-1)^\ell\left[\frac{A}{4x}+\frac{q(x)}{4}\right]\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)\cos(2n+\ell)x+$$
$$+\left[\frac{q(x)}{4}-\frac{A}{4x}\right]\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin\left((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}\right)\sin(2n+\ell)x$$

dır. Şimdi

$$\alpha_n=\int_0^\pi \varphi^2(x,\rho_n)dx$$

eşitliğinden yararlanarak α_n'lerin asimptotik formülü araştırılırsa:

$$\varphi^2(x,\rho_n)=\cos^2\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)+2A_0(x)\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+$$
$$+2\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)\frac{A_1(x)}{n+\ell/2}+2A_2(x)\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+$$
$$+2A_3(x)\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+2\cos\left((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2}\right)\frac{A_4(x)}{(n+\ell/2)^2}+$$
$$+A_0^2(x)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+2A_0(x)A_1(x)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\frac{A_1^2(x)}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)$$

olduğundan, $\varphi^2(x,\rho_n)$ fonksiyonun $[0,\pi]$ aralığında integrali hesaplanırsa ve hesaplanan integraller yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{\pi}{2}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{n+\ell/2}+\frac{A^2\pi}{8}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+b_1\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\\ &+\frac{b_2}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\end{aligned}$$

asimptotik formül

$$+\left(\frac{AM^2\pi}{8}-\frac{A\pi}{8}\right)\int_0^\pi q(t)dt-\left(\frac{A}{4}+\frac{A^2M}{4}\right)\int_0^\pi xq(x)dx+$$

$$+\frac{A}{4}\int_0^\pi x^2q(x)dx+\frac{A}{8}\int_0^\pi\left[\int_0^x q(t)dt\right]^2dx,$$

$$b_2:=\frac{H}{2}\left((-1)^\ell-1\right)+(-1)^\ell\frac{A}{2}+\frac{AH}{2}\left(\pi\ln\pi-\pi-\frac{2}{3}\right)+\frac{H^2\pi}{2}+\frac{5A^2M^2\pi}{32}-$$

$$-\frac{9AMH\pi}{2}-\left(\frac{H}{2}+\frac{3AM}{4}\right)\int_0^\pi xq(x)dx+\left(\frac{A}{4}+\frac{(-1)^\ell}{2}\right)\int_0^\pi\left[\int_0^x q(t)dt\right]^2dx+$$

$$+\frac{3A^2}{8}\left(\pi\ln^2\pi-2\pi\ln\pi+2\pi\right)-2A\int_0^\pi(x\ln x-x)q(x)dx+\frac{A^2\pi^3}{48}-a_0^2(\pi)\frac{\pi^3}{6}+$$

$$+\frac{A^2\pi}{12}(3\ln\pi-\pi)-M(\pi^2-\pi+\pi\ln\pi)+\frac{H\pi}{3}+\frac{A^2M}{8}(\pi\ln\pi-\pi)+$$

$$+\left(\frac{3AM\pi}{4}-\frac{3H\pi}{2}-\frac{A\pi}{4}\ln\pi+\frac{3A\pi}{4}+\sqrt{\frac{\pi}{32}}\right)\int_0^\pi q(t)dt-(-1)^\ell q(0)\sqrt{\frac{\pi^3}{32}}.$$

II. BÖLÜM

SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERE GÖRE SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN BELİRLENMESİ (TERS PROBLEM)

2.1. $F(x,t)$ Fonksiyonun Araştırılması

$$-y'' + \left\{\frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + \frac{A}{x} + q(x)\right\} y = \lambda y, \quad \lambda = \rho^2, \ 0 < x < \pi \tag{2.1.1}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \quad , \qquad y'(\pi) - Hy(\pi) = 0, \tag{2.1.2}$$

sınır koşulları verilmiş olsun. Burada $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$, $\ell \geq 1$ tamsayı, A ve H gerçel sayılardır.

$$\varphi(0,\lambda) = 0 \tag{2.1.3}$$

başlangıç koşulunu sağlayan (2.1.1) denkleminin çözümü $\varphi(x,\lambda)$ olsun. $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots$ ler (2.1.1), (2.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri, $\varphi(x,\lambda_n)$, $n \geq 0$ özfonksiyonları, $q(x) = 0$ olması durumunda ise (2.1.1), (2.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri $\lambda_0^0, \lambda_1^0, \ldots$ ve özfonksiyonları $\varphi_0(x,\lambda_n^0)$, $n \geq 0$ olsun.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx, \qquad n \geq 0 \tag{2.1.4}$$

sayılarına (2.1.1), (2.1.3) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları denir.

α_n^0 , $n \geq 0$ sayları ise (2.1.1), (2.1.3) sınır değer probleminin $q(x) = 0$ durumuna karşılık gelen normalleştirici sayılarıdır.1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [14] yapmış oldukları bir çalışmada $f(x)$, $g(x) \in L_2[0,\pi]$ olmak üzere

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi f(x)\varphi(x,\lambda_n)dx \int_0^\pi g(t)\varphi(t,\lambda_n)dt\right]$$

Parseval eşitliğinin doğru olduğunu göstermişlerdir.

Buradaki $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine (2.1.1), (2.1.2) sınır değer probleminin spektral karakteristikleri denir.

$\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin yardımı ile $F(x,t)$ fonksiyonu

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha_n} \varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n) - \frac{1}{\alpha_n^0} \varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0) \right] \tag{2.1.5}$$

olarak oluşturulsun. Oluşturulan bu fonksiyon yardımı ile, $K(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi = 0 \tag{2.1.6}$$

Volterra tipi integral denklem kurulabilir. Bu integral denklemin çözümünün varlığı ilk kez 1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov tarafından [14] potansiyeli $\left(\frac{A}{x} + q(x)\right)$ olan diferansiyel operatör için gösterilmiştir. Bu çalışmada ise bu integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği $\left(\frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + \frac{A}{x} + q(x)\right)$ potansiyeline sahip bir operatör için araştırılacaktır. Bunu yapmak için $F(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir. Bunun için de $\varphi_0(x,\lambda_n)$ ve $\varphi_0(x,\lambda_n^0)$ fonksiyonlarının asimptotik formüllerinden yararlanılacaktır. Bu asimptotik formüller $x > 0$ ve n' nin yeterince büyük değerleri için geçerlidir.

Birinci bölümde verilen operatörün ρ_n özdeğerleri, $\varphi(x,\rho_n)$ özfonksiyonları ve α_n normalleştirici sayıların asimptotik formüllerinden yararlanarak $q(x) = 0$ durumuna karşılık gelen operatörün ρ_n^0 özdeğerleri, $\varphi_0(x,\rho_n^0)$ özfonksiyonları ve α_n^0 normalleştirici sayıları için,

$$\begin{aligned} \varphi_0(x,\rho_n) &= \cos((n+\ell/2)x - \tfrac{\ell\pi}{2}) + A_0(x)\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \\ &+ A_1^0(x)\frac{1}{n+\ell/2} + A_2(x)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ &+ A_3^0(x)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + A_4^0(x)\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right) \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

elde edilir, burada

$$A_1^0(x) := -a_0 x\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})+(-1)^{\ell}\frac{A}{2}\ln x\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+$$
$$+\frac{A\pi}{4}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})+(-1)^{\ell}\frac{AM}{4}\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}),$$
$$A_3^0(x) := -\frac{Aa_0x^2}{2\pi}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})+(-1)^{\ell}\frac{Aa_0x}{2}cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+$$
$$+(-1)^{\ell}\frac{A^2x}{4\pi}\ln x\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+(-1)^{\ell}\frac{A^2Mx}{8\pi}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}),$$
$$A_4^0(x) := -\frac{a_0^2x^2}{2}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})-a_1x\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})-$$
$$-\frac{Aa_0x\pi}{4}\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})+(-1)^{\ell}\frac{Aa_0x}{2}\ln x\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+$$
$$+(-1)^{\ell}\frac{AMa_0x}{4}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+$$
$$+(-1)^{\ell}\frac{A}{4x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})\cos 2(n+\ell/2)x-$$
$$-\frac{A}{4x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})\sin 2(n+\ell/2)x$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}\rho_n^0 = \quad & (n+\frac{\ell}{2})+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0^0}{n+\ell/2}-\frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\\ & +\frac{a_1^0}{(n+\ell/2)^2}-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+a_2^0\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+\\ & +a_3^0\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+\frac{a_4^0}{(n+1/2)^3}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

burada,

$$a_0^0 := \frac{A}{2\pi}\ln\pi+\frac{AM}{4\pi}-\frac{H}{\pi},$$
$$a_1^0 := -\frac{A^3}{8}\ln\pi-\frac{A^3Ma_0}{16}+\frac{A^2H}{4}-\frac{AH}{4},$$
$$a_2^0 := -\frac{A^3}{16}\ln\pi-a_0^0\left(\frac{A^2}{4}\ln\pi-\frac{A^2}{8}\right)+\frac{A^3M}{32\pi}+\frac{3A^2H}{8\pi}-\frac{A^2}{4\pi},$$
$$a_3^0 := a_0^0\left(\frac{3AH}{2}-\frac{A^2M}{8}+\frac{A^2H\pi}{4}-\frac{A^2}{4}\ln\pi\right)+\frac{A^2}{4\pi}-\frac{A^2M}{8\pi^2}+\frac{AH}{2\pi^2}+$$
$$+\frac{A^2H}{4\pi}\ln\pi+(-1)^{\ell}\frac{q(0)A}{8\pi}-\frac{7A^2}{8\pi^2}+\frac{A^2MH}{8\pi}+\frac{A^2H}{4\pi}$$

$\varphi_0(x,\rho_n^0)$ fonksiyonunun asimptotik formülü

$$\begin{aligned}\varphi_0(x,\rho_n^0) &= \cos((n+\ell/2)x-\tfrac{\ell\pi}{2})+A_0(x)\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\\ &+B_1(x)\frac{1}{n+\ell/2}1+A_2(x)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\\ &+B_2(x)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+B_3(x)\frac{1}{(n+\ell/2)^2}1+O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

şeklinde elde edilir, burada

$$B_1(x):=-a_0^0x\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})+(-1)^\ell\frac{A}{2}\ln x\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+$$
$$+\frac{A\pi}{4}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})-(-1)^\ell\frac{AM}{4}\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}),$$
$$B_2(x):=-\frac{Aa_0^0x^2}{2\pi}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})+(-1)^\ell\frac{Aa_0^0x}{2}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+$$
$$+(-1)^\ell\frac{A^2x}{4\pi}\ln x\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+(-1)^\ell\frac{A^2Mx}{8\pi}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2}),$$
$$B_4(x):=-\frac{{a_0^0}^2x^2}{2}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})-a_1^0x\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})+$$
$$-\frac{A\pi a_0^0x}{4\pi}\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})+(-1)^\ell\frac{AMa_0^0x}{2}\ln x\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+$$
$$+(-1)^\ell\frac{AMa_0^0x}{4}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})+\frac{A}{4x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin((n+\tfrac{\ell}{2})x+\tfrac{\ell\pi}{2})\sin 2(n+\ell/2)x+$$
$$+(-1)^\ell\frac{A}{4x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos((n+\tfrac{\ell}{2})x-\tfrac{\ell\pi}{2})\cos 2(n+\ell/2)x$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\alpha_n = &\frac{\pi}{2}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{n+\ell/2}+\frac{A^2\pi}{8}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+b_1\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\\ &+\frac{b_2}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha_n^0 = &\frac{\pi}{2}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{n+\ell/2}+\frac{A^2\pi}{8}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+b_1^0\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)}+\\ &+\frac{b_2^0}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

$$b_1^0:=\frac{A}{2}(1-\frac{(-1)^\ell}{2})-\frac{A^2M\pi}{16}+\frac{A^3M^2\pi}{32}+\frac{A^2}{4}(\pi\ln\pi-\pi),$$

$$b_2^0 := \frac{H}{2}\left((-1)^\ell - 1\right) + (-1)^\ell\frac{A}{2} + \frac{AH}{2}\left(\pi\ln\pi - \pi - \frac{2}{3}\right) + \frac{H^2\pi}{2} -$$
$$-\frac{9AMH\pi}{2} + \frac{3A^2}{8}\left(\pi\ln^2\pi - 2\pi\ln\pi + 2\pi\right) + \frac{A^2\pi^3}{48} -$$
$$-a_0^{02}(\pi)\frac{\pi^3}{6} + \frac{A^2\pi}{12}(3\ln\pi - \pi) - M(\pi^2 - \pi + \pi\ln\pi) + \frac{H\pi}{3} +$$
$$+\frac{A^2M}{8}(\pi\ln\pi - \pi) - (-1)^\ell q(0)\sqrt{\frac{\pi^3}{32}} + \frac{5A^2M^2\pi}{32}$$

ifadeleri elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_n} = {} & \frac{2}{\pi} - \frac{A}{n+\ell/2} - \frac{A^2}{2\pi}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} - \frac{4b_1}{\pi^2}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + \left(\frac{A^2\pi}{2} - \frac{4b_2}{\pi^2}\right)\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right) \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_n^0} = {} & \frac{2}{\pi} - \frac{A}{n+\ell/2} - \frac{A^2}{2\pi}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} - \frac{4b_1^0}{\pi^2}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + \left(\frac{A^2\pi}{2} - \frac{4b_2^0}{\pi^2}\right)\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right) \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

şeklinde bulunur. Eğer $F(x,t)$ fonksiyonu (2.1.5) ifadesinde (2.1.7), (2.1.9), (2.1.12) ve (2.1.13) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F(x,t) = {} & F_1(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+\ell/2)(x+t))}{n+\ell/2} + F_2(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+\ell/2)(x-t))}{n+\ell/2} + \\ & + F_3(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(n+\ell/2)\cos((n+\ell/2)(x+t))}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + F_4(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(n+\ell/2)\cos((n+\ell/2)(x-t))}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + F_5(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((n+\ell/2)(x+t))}{(n+\ell/2)^2} + F_6(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((n+\ell/2)(x-t))}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + F_7(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+\ell/2)(x+t))}{(n+\ell/2)^2} + F_8(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+\ell/2)(x-t))}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir, burada

$$F_1(x,t) := \frac{(-1)^\ell}{\pi^3}(x+t)\int_0^\pi q(t)dt,$$

$$F_2(x,t) := \frac{1}{\pi^3}(x-t)\int\limits_0^{\pi} q(t)dt,$$

$$F_3(x,t) := \left[\frac{Axt}{\pi^4} - \frac{A}{2\pi^4}(x^2+t^2) + (-1)^{\ell}\frac{A}{\pi}\right]\int\limits_0^{\pi} q(t)dt -$$

$$-(-1)^{\ell}\frac{A(1+\pi^2)}{\pi^3}\int\limits_0^{\pi} xq(x)dx + (-1)^{\ell}\frac{2A}{\pi^3}\int\limits_0^{\pi} x^2q(x)dx,$$

$$F_4(x,t) := \left[-\frac{Axt}{\pi^4} - (-1)^{\ell}\frac{A}{2\pi^4}(x^2+t^2) + \frac{A}{\pi^3}(x+t) + (-1)^{\ell}\frac{A}{\pi}\right]\int\limits_0^{\pi} q(t)dt -$$

$$-(-1)^{\ell}\frac{A(1+\pi^2)}{\pi^3}\int\limits_0^{\pi} xq(x)dx + (-1)^{\ell}\frac{2A}{\pi^3}\int\limits_0^{\pi} x^2q(x)dx,$$

$$F_5(x,t) := (-1)^{\ell}\left\{\left(-\frac{x^2+t^2}{4\pi^4} + \frac{1}{6\pi^2}\right)\left[\int\limits_0^{\pi} q(t)dt\right]^2 + \left[\frac{At\ln t}{2\pi^3} + \frac{Ax\ln x}{2\pi^3} + \frac{Ax\ln t}{2\pi^3} + \right.\right.$$

$$+\frac{3AMt}{4\pi^3} + \frac{AMx}{2\pi^3} + \frac{At\ln x}{2\pi^3} + \frac{x^2+t^2}{\pi^2}\left(\frac{H}{\pi^2} - \frac{AM}{4\pi^2} - \frac{A\ln\pi}{2\pi^2}\right) +$$

$$+\frac{A\pi}{8}(\ln\pi - 1)\left((-1)^{\ell}2+5\right) + \frac{AM\pi}{12}\left((-1)^{\ell}3+1\right) - \frac{13H\pi}{12} - \frac{H}{2} -$$

$$\left.-(-1)^{\ell}\frac{H\pi}{2} + \frac{AM}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4\sqrt{2\pi}} - \frac{A\pi\ln\pi}{12}\right]\int\limits_0^{\pi} q(t)dt$$

$$-\frac{A}{4}\left((-1)^{\ell}+2\right)\int\limits_0^{\pi}(x\ln x - x)q(x)dx - (-1)^{\ell}\frac{\sqrt{2}\pi q(0)}{8} +$$

$$+\frac{1}{8}\left((-1)^{\ell}4+3\right)\int\limits_0^{\pi}\left[\int\limits_0^{x} q(t)dt\right]^2 dx +$$

$$\left.+\left[\frac{H}{4} + (-1)^{\ell}\frac{H}{2} - \frac{7AM}{8} + (-1)^{\ell}\frac{AM}{4} - \frac{1}{4}\right]\int\limits_0^{\pi} xq(x)dx\right\},$$

$$F_6(x,t) := \left(-\frac{x^2+t^2}{4\pi^4} - \frac{1}{6\pi^2}\right)\left[\int\limits_0^{\pi} q(t)dt\right]^2 + \left[\frac{x^2+t^2}{\pi^2}\left(\frac{H}{\pi^2} - \frac{AM}{4\pi^2} - \frac{A\ln\pi}{2\pi^2}\right) + \right.$$

$$+\frac{At\ln t}{2\pi^3} + \frac{Ax\ln x}{2\pi^3} + \frac{Ax\ln t}{2\pi^3} - \frac{AMt}{4\pi^3} + \frac{AMx}{2\pi^3} + \frac{At\ln x}{2\pi^3} +$$

$$+\frac{A\pi}{8}(\ln\pi-1)\left((-1)^\ell 2+5\right)+\frac{AM\pi}{12}\left((-1)^\ell 3+1\right)-\frac{13H\pi}{12}-\frac{H}{2}-$$

$$-(-1)^\ell\frac{H\pi}{2}+\frac{AM}{8}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4\sqrt{2\pi}}-\frac{A\pi\ln\pi}{12}\Bigg]\int\limits_0^\pi q(t)dt-$$

$$-\frac{A}{4}((-1)^\ell+2)\int\limits_0^\pi(x\ln x-x)q(x)dx-(-1)^\ell\frac{\sqrt{2}\pi q(0)}{8}+$$

$$+\frac{1}{8}((-1)^\ell 4+3)\int\limits_0^\pi\left[\int\limits_0^x q(t)dt\right]^2dx+$$

$$+\left[\frac{H}{4}+(-1)^\ell\frac{H}{2}-\frac{7AM}{8}+(-1)^\ell\frac{AM}{4}-\frac{1}{4}\right]\int\limits_0^\pi xq(x)dx,$$

$$F_7(x,t):=(-1)^\ell\left[\frac{A^2}{4\pi^2}-\frac{At}{\pi^2}\right](x+t)\int\limits_0^\pi q(t)dt,$$

$$F_8(x,t):=\frac{A^2}{4\pi^2}(x+t)\int\limits_0^\pi q(t)dt$$

elde edilir.

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\ \sum_{n=1}^\infty\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12},\ 0<x<2\pi,$$

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin nx}{n^2}=x\ln(2\sin\frac{x}{2})-\frac{1}{2}\int x\cot\frac{x}{2}dx\ ,\quad 0\le x\le 2\pi$$

olduğundan $F(x,t)$ fonksiyonu $0<x<\pi$ ve $0<t<\pi$ için x ve t değişkenlerine göre sürekli türevlenebilirdir.

2.2. $K(x,t)$ Fonksiyonuna göre İntegral Denkleminin Çözümünün Varlığı

Bu bölümde (2.1.6) integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanacaktır. Bunun için

$$g(t) + \int_0^x F(s,t)g(s)ds = 0 \tag{2.2.1}$$

homojen integral denklemin $x \leq \pi$ için bir tek $g(t) \equiv 0$ çözümünün var olduğu gösterilmelidir. (2.2.1) denklemin $g(t) \not\equiv 0$ bir çözümü var olduğu kabul edilirse bu durumda, (2.2.1) denkleminin her iki tarafı $g(t)$ fonksiyonu ile çarpılıp $[0,x]$ aralığında t değişkenine göre integrallenirse,

$$\int_0^x g^2(t)dt + \int_0^x \int_0^x F(s,t)g(s)g(t)dsdt = 0$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $F(x,t)$ fonksiyonu yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^x g(t)\varphi_0(t,\rho_n)dt \right)^2 = 0$$

bulunur. Burada her n için α_n pozitif olduğundan

$$\int_0^x g(t)\varphi_0(t,\rho_n)dt = 0 \tag{2.2.2}$$

olur.

Eğer $\varphi_0(t,\lambda_n)$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayında tam olduğu gösterilebilirse, $g(t) \equiv 0$ çelişkisi elde edilir. Bunu göstermek için $L_2[0,\pi]$ uzayından alınan keyfi bir $f(t)$ fonksiyonu $\int_0^\pi f(t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşulun $f(t) \equiv 0$ olduğu gösterilmelidir. M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov yapmış oldukları bu çalışmada [14]

$$\varphi_0(t,\rho_n) = \sqrt{\rho_n t}J_\nu(\rho_n t) + \int_0^t K_0(t,s)\sqrt{\rho_n s}J_\nu(\rho_n s)ds$$

eşitliğini ispat etmişlerdir. Buradaki $\varphi_0(t,\rho_n)$ ifadesini son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\int_0^\pi f(t)\left[\sqrt{\rho_n t}J_\nu(\rho_n t)+\int_0^t K_0(t,s)\sqrt{\rho_n s}J_\nu(\rho_n s)ds\right]dt=\int_0^\pi f(t)\sqrt{\rho_n t}J_\nu(\rho_n t)dt$$

$$+\int_0^\pi f(t)\int_0^t K_0(t,s)\sqrt{\rho_n s}J_\nu(\rho_n s)dsdt$$

$$=\int_0^\pi\left[f(t)+\int_t^\pi K_0(t,s)f(s)ds\right]\sqrt{\rho_n t}J_\nu(\rho_n t)dt=0$$

elde edilir.

$\{J_\nu(\rho_n t)\}$ fonksiyonlar sistemi $L_2[0,\pi]$ uzayında lineer bağımsız ve tam olduğundan $\sup\limits_{0\le t\le\pi}\int_0^t K_0^2(t,s)ds<\infty$ ve $f(t)\in L_2[0,\pi]$ olmak üzere

$$f(t)+\int_t^\pi K_0(t,s)f(s)ds=0.$$

bulunur. Bu son denklem $f(t)$ fonksiyonu için Volterra tipinden integral denklemi olduğundan, Volterra tipindeki integral denklemler teorisinden yararlanılarak $f(t)\equiv 0$ elde edilir ki, bu da $\{\varphi_0(t,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayında tam olduğunu verir. (2.2.2) eşitliğinden $g(t)\equiv 0$ olduğu bulunur. Bu ise ispatı bitirir.

(2.1.6) integral denkleminden görüldüğü gibi $K(x,t)$ fonksiyonunun t'ye göre türevlenebilirlik mertebesi, $F(x,t)$ fonksiyonunun türevlenebilirlik mertebesi ile aynıdır. $K(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre araştırılması B.M. Levitan ve M.G. Gasimov [8] tarafından yapılan benzeri sonuca uygun olarak aşağıdaki lemma ile ifade edilir.

Lemma 2.2.1: $H(t,s,a)$ ve $g(t,a)$ fonksiyonları t değişkenine ve a parametresine göre sürekli olmak üzere,

$$g(t,a)=h(t,a)+\int_0^t H(t,s,a)h(s,a)ds$$

integral denklemi verilmiş olsun. Burada $H(t,s,a)$ verilen integral denklemin çekirdeği, $g(t,a)$ ise serbest terimdir. Eğer verilen integral denkleme karşılık gelen homojen integral denklemin $a = a_0$ için bir tek trivial çözümü var ise verilen integral denklemin $a = a_0$'ın herhangi yakın komşuluğunda $h(t,a)$ çözümü t ve a'ya göre süreklidir. Eğer $H(t,s,a)$ ve $g(t,a)$ fonksiyonları a parametresine göre m. mertebeden türevlere sahip ise $h(t,a)$ fonksiyonu da a parametresine göre m. mertebeden türeve sahiptir.

Lemmanın sonucu olarak; $F(x,t)$ fonksiyonu x ve t değişkenlerine göre sürekli olduğu zaman $K(x,t)$ fonksiyonu da x ve t değişkenlerine göre süreklidir. Ayrıca $K(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesi ile $F(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesi aynıdır.

2.3. Diferansiyel Denklemin ve Sınır Koşullarının Belirlenmesi

Bu bölümde $F(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerinden yaralanarak $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar dizisinin sağladığı diferansiyel denklem ve sınır koşulları belilenecektir. $F(x,t)$ fonksiyonu x ve t değişkenlerine göre ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu durumda Lemma (2.2.1)'e göre $K(x,t)$ fonksiyonu da x ve t değişkenlerine göre ikinci mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

Lemma 2.3.1: (2.1.5) formülüyle verilen $F(x,t)$ fonksiyonu

$$-F_{xx}(x,t)+\left[\frac{A}{x}+\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}\right]F(x,t)=-F_{tt}(x,t)+\left[\frac{A}{t}+\frac{\ell(\ell-1)}{t^2}\right]F(x,t) \quad (2.3.1)$$

diferansiyel denklemini sağlar.

Lemmanın ispatı M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [14] tarafından verilen lemmanın ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 2.3.2: (2.1.6) integral denkleminin çözümü olan $K(x,t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} K_{xx}(x,t)- & \left[\frac{A}{x}+\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}\right]K(x,t)-2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t)= \\ & =K_{tt}(x,t)-\left[\frac{A}{t}+\frac{\ell(\ell-1)}{t^2}\right]K(x,t) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemini sağlar.

İspat:

$$F(x,t)+\int_0^x K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi+K(x,t)=0 \quad (2.3.3)$$

denklemi x değişkenine göre iki kez diferansiyellenirse

$$\begin{aligned} F_{xx}(x,t)+ \quad & K_{xx}(x,t)+\frac{dK(x,x)}{dx}F(x,t)+K(x,x)F_x(x,t)+ \\ & +K_x(x,t)|_{t=x}F(x,t)+\int_0^x K_{xx}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi=0 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

ve yine (2.3.3) denklemi bu kez t değişkenine göre iki kez diferansiyellenirse

$$F_{tt}(x,t)+K_{tt}(x,t)+\int_0^x K(x,\xi)F_{tt}(\xi,t)d\xi=0$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.1) denkleminden yararlanılırsa

$$F_{tt}(x,t)+\int_0^x\left[\frac{A}{t}+\frac{\ell(\ell-1)}{t^2}-\frac{A}{\xi}-\frac{\ell(\ell-1)}{\xi^2}\right]K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi+$$
$$+\int_0^x K(x,\xi)F_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi+K_{tt}(x,t)=0$$

bulunur. Bu son eşitlikte kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned}F_{tt}(x,t)\quad&+\int_0^x\left[\frac{A}{t}+\frac{\ell(\ell-1)}{t^2}-\frac{A}{\xi}-\frac{\ell(\ell-1)}{\xi^2}\right]K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi+\\&+K(x,\xi)F_\xi(t,\xi)|_{\xi=0}^{x}-K_\xi(x,\xi)F(\xi,t)|_{\xi=0}^{x}+\\&+\int_0^x K_{\xi\xi}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi+K_{tt}(x,t)=0\end{aligned}\tag{2.3.5}$$

elde edilir. (2.3.5) eşitliğinde $t\to 0$ iken limit alınırsa, $F(x,t)$ fonksiyonu ikinci mertebeden türevleri sınırlı olduğundan

$$F(x,0)=0\tag{2.3.6}$$

olur. Bu ise (2.3.3) ve (2.3.6) dan $K(x,0)=0$ olduğunu verir. Böylece

$$\begin{aligned}F_{tt}(x,t)+&\int_0^x\left[\frac{A}{t}+\frac{\ell(\ell-1)}{t^2}-\frac{A}{\xi}-\frac{\ell(\ell-1)}{\xi^2}\right]K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi+\\&+K(x,\xi)F_\xi(\xi,t)|_{\xi=x}-K_\xi(x,\xi)F(x,t)|_{\xi=x}+\\&+\int_0^x K_{\xi\xi}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi+K_{tt}(x,t)=0\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.3) eşitliğini $\left[\frac{A}{t}+\frac{\ell(\ell-1)}{t^2}-\frac{A}{x}-\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}-2\frac{K(x,x)}{dx}\right]$ ifadesiyle çarpmakla elde edilen yeni eşitliğe (2.3.4) eşitliği eklenir ve bu son ifadeden (2.3.5) eşitliği çıkarılırsa, (2.3.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&K_{xx}(x,t) - \left[\frac{A}{x}+\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}\right]K(x,t) - K_{tt}(x,t)+ \\
&+\left[\frac{A}{t}+\frac{\ell(\ell-1)}{t^2}\right]K(x,t) - 2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t)+ \\
&+\int_0^x \left\{K_{xx}(x,\xi) - \left[\frac{A}{x}+\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}\right]K(x,\xi) - K_{\xi\xi}(x,\xi)+\right. \\
&\left.+\left[\frac{A}{\xi}+\frac{\ell(\ell-1)}{\xi^2}\right]K(x,\xi) - 2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,\xi)\right\}F(\xi,t)d\xi = 0
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

elde edilir. (2.3.8) eşitliği homojen Volterra tipinde bir integral denklemi olduğu için

$$\begin{aligned}
K_{xx}(x,t)- &\left[\frac{A}{x}+\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}\right]K(x,t) - K_{tt}(x,t)+ \\
&+\left[\frac{A}{t}+\frac{\ell(\ell-1)}{t^2}\right]K(x,t) - 2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t) = 0
\end{aligned}$$

veya

$$K_{xx}(x,t)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}+2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]K(x,t) = K_{tt}(x,t)-\left[\frac{A}{t}+\frac{\ell(\ell-1)}{t^2}\right]K(x,t)$$

olur. Şimdi ise $K(x,t)$ fonksiyonunun yardımıyla,

$$\varphi(x,\rho_n) = \varphi_0(t,\rho_n) + \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\rho_n)dt \tag{2.3.9}$$

şeklinde $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi oluşturulsun. Burada $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi, $q(x)=0$ durumunda (2.1.1) denkleminin (2.1.3) koşullarını sağlayan çözümüdür.

Teorem 2.3.3: (2.3.9) eşitliği ile verilen $\varphi(x,\rho_n)$ fonksiyonu (2.1.1) diferansiyel denklemin çözümüdür ve

$$q(x) = 2\frac{dK(x,x)}{dx}.$$

İspat:

$$\varphi_0''(x,\rho_n) - \left\{\frac{A}{x}+\frac{\ell(\ell-1)}{x^2} - \rho_n^2\right\}\varphi_0(x,\rho_n) = 0 \tag{2.3.10}$$

olduğundan, (2.3.9)'daki $\varphi(x,\rho_n)$'nin ifadesi (2.1.1) diferansiyel denkleminin sol tarafında yerine yazılırsa,

$$-\varphi''(x,\rho_n) - \left[\frac{A}{x} + \frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + 2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]\varphi(x,\rho_n) + \rho_n^2\varphi(x,\rho_n) =$$

$$= -\frac{dK(x,x)}{dx}\varphi_0(x,\rho_n) - \left[\frac{A}{x} + \frac{\ell(\ell-1)}{x^2}\right]\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\rho_n)dt -$$

$$-2\frac{dK(x,x)}{dx}\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\rho_n)dt + \rho_n^2\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\rho_n)dt +$$

$$+K(x,x)\,\frac{d}{dx}\varphi_0(x,\rho_n) + K_x(x,t)\varphi_0(x,\rho_n)\Big|_{t=x} +$$

$$+\int_0^x K_{xx}(x,t)\varphi_0(t,\rho_n)dt$$

edilirse, (2.3.2) eşitliği kullanılarak son eşitlikteki $K_{xx}(x,t)$ 'yi $K_{tt}(x,t)$ ile ifade edersek,

$$\varphi''(x,\rho_n) - \left[\frac{A}{x} + \frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + 2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]\varphi(x,\rho_n) + \rho_n^2\varphi(x,\lambda_n) =$$

$$= -\frac{dK(x,x)}{dx}\varphi_0(x,\rho_n) + \rho_n^2\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\rho_n)dt + \tag{2.3.11}$$

$$+K(x,x)\,\frac{d}{dx}\varphi_0(x,\rho_n) + K_x(x,t)\varphi_0(x,\rho_n)\Big|_{t=x} +$$

$$+\int_0^x K_{tt}(x,t)\varphi_0(t,\rho_n)dt - \int_0^x \left[\frac{A}{t} + \frac{\ell(\ell-1)}{t^2}\right]\varphi_0(t,\rho_n)dt$$

bulunur. Ayrıca,

$$\int_0^x K_{tt}(x,t)\varphi_0(t,\rho_n)dt = K_t(x,t)\varphi_0(t,\rho_n)\Big|_{t=x} -$$

$$-K(x,x)\frac{d}{dx}\varphi_0(x,\rho_n) + \int_0^x K(x,t)\frac{d^2}{dt^2}\varphi_0(t,\rho_n)dt$$

olduğundan, bu ifade (2.3.11) de yerine yazılır ve (2.3.10) kullanılırsa, $\varphi(x,\rho_n)$

fonksiyonu için

$$-\varphi''(x,\rho_n)+\left[\frac{A}{x}+\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}+2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]\varphi(x,\rho_n)=\rho_n^2\varphi(x,\lambda_n)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [14] tarafından yapılan çalışmanın sonuçları kullanılarak, (2.3.9) denklemi ile verilen $\{\varphi(x,\rho_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayında bir tam sistem oluşturduğu açıktır.

Şimdi ise, π noktasında $\varphi(x,\rho_n)$ fonksiyonun sağladığı sınır koşullarını belirtmek için

$$\varphi''(x,\rho_n)+\left[\rho_n^2-q(x)-\frac{A}{x}-\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}\right]\varphi(x,\rho_n)=0$$

ve

$$\varphi''(x,\rho_m)+\left[\rho_m^2-q(x)-\frac{A}{x}-\frac{\ell(\ell-1)}{x^2}\right]\varphi(x,\rho_m)=0$$

denklemlerinin birincisi $\varphi(x,\rho_m)$, ikincisi $\varphi(x,\rho_n)$ fonksiyonları ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa,

$$[\varphi'(x,\rho_n)\varphi(x,\rho_m)-\varphi'(x,\rho_m)\varphi(x,\rho_n)]'=(\rho_m^2-\rho_n^2)\varphi(x,\rho_n)\varphi(x,\rho_m)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik $[0,\pi]$ aralığında integrallenir ve $\{\varphi(x,\rho_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayındaki ortogonalliği kullanılırsa,

$$\varphi'(\pi,\rho_n)\varphi(\pi,\rho_m)-\varphi'(\pi,\rho_m)\varphi(\pi,\rho_n)=0$$

veya

$$\frac{\varphi'(\pi,\rho_n)}{\varphi(\pi,\rho_n)}=\frac{\varphi'(\pi,\rho_m)}{\varphi(\pi,\rho_m)},\qquad (n,\ m=0,1,\cdots)$$

eşitliği bulunur. Buradan, sabit bir $\dfrac{\varphi'(\pi,\rho_n)}{\varphi(\pi,\rho_n)}$ sayısı veya

$$\varphi'(\pi,\rho_n)-H\varphi(\pi,\rho_n)=0$$

sınır koşulu elde edilir.

Böylece, aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.4: $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$ olmak üzere $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin (2.1.1), (2.1.2) tipindeki bir problemin spektral karakteristikleri olması için $k \neq n$, $\lambda_k \neq \lambda_n$ ve her n için $\alpha_n > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\rho_n &= (n+\frac{\ell}{2}) + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{a_0}{n+\ell/2} - \frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{a_1}{(n+\ell/2)^2} - \\ &\quad - \frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + a_2\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + a_3\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{\pi}{2} + \frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{n+\ell/2} + \frac{A^2\pi}{4}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + b_1\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ &\quad + \frac{b_2}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\end{aligned}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması yeterlidir.

III. BÖLÜM

İKİ SPEKTRUMA GÖRE STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN BELİRLENMESİ

3.1. Normalleştirici Sayıların İki Spektrumu Türündenden İfadesi

$$-y'' + \left\{ \frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + \frac{A}{x} + q(x) \right\} y = \lambda y, \qquad \lambda = \rho^2 \tag{3.1.1}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \quad , \qquad y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0, \tag{3.1.2}$$

$$y(0) = 0 \quad , \qquad y'(\pi) - H_2 y(\pi) = 0, \tag{3.1.3}$$

sınır koşulları verilsin.

Burada $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$, $\ell \geq 1$ tamsayı, A, H_1 ve H_2 gerçel sayıları ve $H_1 \neq H_2$ dir. $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ ve $\mu_0 < \mu_1 < \ldots$ ile sırasıyla (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.1), (3.1.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsun.

$$\varphi(0, \lambda) = 0 \tag{3.1.4}$$

başlangıç koşulunu sağlayan (3.1.1) in çözümünü $\varphi(x, \lambda)$ ile gösterilsin. Ayrıca, (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.1), (3.1.3) sınır değer problemlerinin sırasıyla $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ ve $\mu_0, \mu_1, \ldots$ özdeğerleri

$$\Phi_1(\lambda) := \varphi'(\pi, \lambda) - H_1 \varphi(\pi, \lambda), \tag{3.1.5}$$

$$\Phi_2(\lambda) := \varphi'(\pi, \lambda) - H_2 \varphi(\pi, \lambda), \tag{3.1.6}$$

fonksiyonlarının sıfırları ile çakışmaktadır.

$\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$ fonksiyonları (3.1.1), (3.1.2) sınır-değer probleminin özfonksiyonlarıdır.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx \tag{3.1.7}$$

olsun.

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ sayılarına (3.1.1), (3.1.2) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları denir. Bu kısımda $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ ve $\mu_0, \mu_1, \ldots$.spektrumları cinsinden $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ sayıların hesaplanması için bir formül verilecektir.

Lemma 3.1.1: $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) denkleminin (3.1.4) koşullarını sağlayan çözümü ise

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda)dx = \varphi'(\pi,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) - \varphi(\pi,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda) \tag{3.1.8}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$-\varphi''(x,\lambda) + \left\{\frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + \frac{A}{x} + q(x)\right\}\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)$$

$$-\varphi''(x,\mu) + \left\{\frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + \frac{A}{x} + q(x)\right\}\varphi(x,\mu) = \mu\varphi(x,\mu)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerin birincisi $\varphi(x,\mu)$ ile ikinicisi $\varphi(x,\lambda)$ ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$-\varphi''(x,\lambda)\varphi(x,\mu) + \varphi''(x,\mu)\varphi(x,\lambda) = (\lambda-\mu)\varphi(x,\mu)\varphi(x,\lambda)$$

bulunur. Bu eşitlik $[0,\pi]$ aralığında x değişkenine göre integrallenilirse

$$(\lambda-\mu)\int_0^\pi \varphi(x,\mu)\varphi(x,\lambda)dx = \int_0^\pi \left[\varphi''(x,\mu)\varphi(x,\lambda) - \varphi''(x,\lambda)\varphi(x,\mu)\right]dx$$

veya

$$\int_0^\pi \varphi(x,\mu)\varphi(x,\lambda)dx = \varphi(\pi,\lambda)\frac{\varphi'(\pi,\mu)-\varphi'(\pi,\lambda)}{\lambda-\mu} - \varphi'(\pi,\lambda)\frac{\varphi(\pi,\mu)-\varphi(\pi,\lambda)}{\lambda-\mu}$$

eşitliği alınır. Son eşitlikte $\mu \longrightarrow \lambda$ iken limite geçilirse

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda)dx = \varphi'(\pi,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) - \varphi(\pi,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda)$$

elde edilir.

Ayrıca, $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu her x için λ parametresine göre tam fonksiyondur. Tam fonksiyonlar teorisinden [46] bilindiği gibi $\mathbf{\Phi}_1(\lambda)$ ve $\mathbf{\Phi}_2(\lambda)$ fonksiyonları 1/2 büyüme mertebeli tam fonksiyonlar olduğundan Weierstrass teoreminden

$$\varphi'(\pi,\lambda) - H_1\varphi(\pi,\lambda) = C_1\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right) = \mathbf{\Phi}_1(\lambda) \tag{3.1.9}$$

ve

$$\varphi'(\pi,\lambda) - H_2\varphi(\pi,\lambda) = C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right) = \mathbf{\Phi}_2(\lambda) \tag{3.1.10}$$

şeklinde yazılabileceği açıktır. Burada C_1 ve C_2 sabitlerdir. (3.1.9) ve (3.1.10) eşitliklerinden

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda) - H_1\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) =: \dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda)$$
$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda) - H_2\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) =: \dot{\mathbf{\Phi}}_2(\lambda)$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\pi,\lambda) = \frac{1}{H_2-H_1}\left[\dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda) - \dot{\mathbf{\Phi}}_2(\lambda)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi'(\pi,\lambda) = \frac{1}{H_2-H_1}\left[H_2\dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda) - H_1\dot{\mathbf{\Phi}}_2(\lambda)\right]$$

elde edilir. Bu eşitlikler (3.1.8) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda)dx = \frac{1}{H_2-H_1}\left\{\varphi'(\pi,\lambda)\left[\dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda) - \dot{\mathbf{\Phi}}_2(\lambda)\right] - \varphi(\pi,\lambda)\left[H_2\dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda) - H_1\dot{\mathbf{\Phi}}_2(\lambda)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{H_2-H_1}\left\{\left(\varphi'(\pi,\lambda) - H_2\varphi(\pi,\lambda)\right)\dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda) - \left(\varphi'(\pi,\lambda) - H_2\varphi(\pi,\lambda)\right)\dot{\mathbf{\Phi}}_2(\lambda)\right\}$$

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda)dx = \frac{1}{H_2-H_1}\left\{\dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda)\mathbf{\Phi}_2(\lambda) - \dot{\mathbf{\Phi}}_2(\lambda)\mathbf{\Phi}_1(\lambda)\right\}$$

olur. $\mathbf{\Phi}_1(\lambda_n) = 0$ olduğundan

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx = \frac{1}{H_2-H_1}\dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda_n)\mathbf{\Phi}_2(\lambda_n)$$

eşitliği bulunur.

$q(x) \equiv 0$ olduğu durumda (3.1.1) denkleminin (3.1.4) koşullarını sağlayan çözüm $\varphi_0(x,\lambda)$ olsun. $q(x) \equiv 0$ olduğunda $\lambda_0^0, \lambda_1^0, \ldots$ ve $\mu_0^0, \mu_1^0, \ldots$ 'ler sırasıyla (3.1.1)-(3.1.2) ve (3.1.1)-(3.1.3) sınır değer problemlerinin özdeğerlerini göstersin. Bu durumda $\lambda_0^0, \lambda_1^0, \ldots$ ve $\mu_0^0, \mu_1^0, \ldots$ özdeğerleri sırasıyla,

$$\varphi_0'(\pi,\lambda) - H_1\varphi_0(\pi,\lambda) = C_1^0\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k^0}\right) =: \Phi_{01}(\lambda) \tag{3.1.11}$$

ve

$$\varphi_0'(\pi,\lambda) - H_2\varphi_0(\pi,\lambda) = C_2^0\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k^0}\right) =: \Phi_{02}(\lambda) \tag{3.1.12}$$

fonksiyonlarının sıfırları ile çakışır.

$\{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\}_{n\geq 0}$ ile (3.1.1), (3.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonları gösterilirse, bu problemin α_n^0 normalleştirici sayıları,

$$\alpha_n^0 = \int_0^{\pi} \varphi_0^2(x,\lambda_n^0)dx \tag{3.1.13}$$

formülü ile verilecektir. (3.1.11) ve (3.1.12) eşitliklerinin yardımıyla

$$\int_0^{\pi} \varphi_0^2(x,\lambda_n^0)dx = \frac{1}{H_2-H_1}\dot{\Phi}_{01}(\lambda_n^0)\Phi_{02}(\lambda_n^0)$$

olduğu bulunur.

Dolayısıyla α_n ve α_n^0 'ler için,

$$\alpha_n = \frac{1}{H_2-H_1}\dot{\Phi}_1(\lambda_n)\Phi_2(\lambda_n) \tag{3.1.14}$$

ve

$$\alpha_n^0 = \frac{1}{H_2-H_1}\dot{\Phi}_{01}(\lambda_n^0)\Phi_{02}(\lambda_n^0) \tag{3.1.15}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca,

$$\dot{\Phi}_1(\lambda_n) = -\frac{C_1}{\lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)$$

$$\dot{\Phi}_{01}(\lambda_n^0) = -\frac{C_1^0}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)$$

olduğundan (burada $\prod'$ sembolü $k=n$ inci çarpanın sonsuz çarpımında bulunmadığını gösterir) bu formüller ve (3.1.9), (3.1.10) eşitlikleri (3.1.14) ve (3.1.15) yazıldığında

$$\alpha_n = -\frac{C_1 C_2}{H_2 - H_1}\frac{1}{\lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right) \tag{3.1.16}$$

ve

$$\alpha_n^0 = -\frac{C_1^0 C_2^0}{H_2 - H_1}\frac{1}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right) \tag{3.1.17}$$

şekline dönüşür.

α_n sayılarını α_n^0 'larla ifade etmek için $\mathbf{\Phi}_2(\lambda_n)$ ve $\dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda_n)$ fonksiyonları $\mathbf{\Phi}_{02}(\lambda_n)$ ve $\dot{\mathbf{\Phi}}_{01}(\lambda_n)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_2(\lambda_n) &= C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right) = C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)^{-1}\\
&= C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k^0}{\mu_k}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}\\
&= B_2 C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}\\
&= B_2 C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}\\
&= B_2 C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{\Phi}_2(\lambda_n) = B_2 C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} \tag{3.1.18}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $B_2 = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k^0}{\mu_k}$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{\Phi}}_1(\lambda_n) &= -\frac{C_1}{\lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) = -\frac{C_1}{\lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k^0}\right)\frac{\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)}{\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_n^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k^0}\right)}\\
&= \frac{C_1}{\lambda_n}\frac{\lambda_n^0}{\lambda_n-\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k^0}\right)\frac{\lambda_n^0}{\lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}\\
&= \frac{B_1 C_1}{\lambda_n-\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{B_1C_1}{\lambda_n - \lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_n^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_k^0}\right)}{\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k^0}\right)}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}$$

$$= -\frac{B_1C_1}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}$$

$$\dot{\Phi}_1(\lambda_n) = -\frac{B_1C_1}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0} \tag{3.1.19}$$

olduğu görülür, burada $B_1 = \prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}$ dir. (3.1.18) ve (3.1.19) ifadeleri (3.1.14) eşitliğinde yazılırsa,

$$\alpha_n = \frac{1}{H_2-H_1}\dot{\Phi}_1(\lambda_n)\Phi_2(\lambda_n) = -\frac{B_2C_2}{H_2-H_1}\frac{B_1C_1}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}B_2C_2\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}$$

$$= -\frac{B_1B_2C_1C_2}{H_2-H_1}\frac{1}{\lambda_n^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\lambda_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n^0}{\mu_k^0}\right)\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}$$

$$= \frac{C_1C_2}{C_1^0C_2^0}B_1B_2\alpha_n^0\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0}$$

eşitliği elde edilir, burada

$$\frac{C_1C_2}{C_1^0C_2^0}B_1B_2 = 1 \tag{3.1.20}$$

olduğu gösterilmelidir. Bunu göstermek için

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_{01}(\lambda)} = 1$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_{01}(\lambda)} &= \lim_{\lambda\to-\infty}\frac{C_1}{C_1^0}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k^0}\right)^{-1} \\ &= \frac{C_1}{C_1^0}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k^0-\lambda} = 1\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

olduğundan,

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k^0 - \lambda} = \lim_{\lambda \to -\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda}\right) = 1 \tag{3.1.22}$$

eşitliğinin doğruluğu gösterilmelidir.

Asimptotik formüllerden

$$\lambda_k = \left(k + \frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi} \ln\left(k + \frac{\ell}{2}\right) + O(1)$$

ve

$$\lambda_k^0 = \left(k + \frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi} \ln\left(k + \frac{\ell}{2}\right) + O(1)$$

olduğundan $\lambda_k - \lambda_k^0 = O(1)$ dir. Buradan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda} \right|$$

serisi $-\infty < \lambda \leq -1$ için λ'ya göre düzgün yakınsaktır. Böylece (3.1.22) sonsuz çarpımı $-\infty < \lambda \leq -1$ için λ'ya göre düzgün yakınsaktır. Bu durumda bu çarpimda $\lambda \longrightarrow -\infty$ limiti alınırsa,

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda}\right) = 1$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{C_1}{C_1^0} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k} \lim_{\lambda \to -\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda}\right) = 1, \quad B_1 = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}$$

olduğundan

$$\frac{C_1}{C_1^0} B_1 = 1$$

bulunur. Bu ise

$$\frac{C_1 C_2}{C_1^0 C_2^0} B_1 B_2 = 1$$

olduğunu verir. Dolayısıyla α_n'ler için

$$\alpha_n = \alpha_n^0 \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k^0} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n - \mu_k^0}{\lambda_n^0 - \mu_k^0} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n - \mu_k^0}$$

buradan da

$$\alpha_n = \alpha_n^0 \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_n^0 - \mu_n^0} \frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_n^0 - \lambda_0^0} \frac{\lambda_n - \mu_0}{\lambda_n^0 - \mu_0^0} \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0} \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k^0}$$
$$\times \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k^0}{\lambda_n^0 - \mu_k^0} \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n - \mu_k^0} \tag{3.1.23}$$

formülü elde edilmiş olur.

3.2. α_n Sayıları için Asimptotik Formül

$\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ ve $\mu_0, \mu_1, \ldots$ sayı dizileri verilsin. Bu sayı dizileri sırasıyla (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.1), (3.1.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsun. Bu durumda aşağıdaki asimptotik formüller sağlanmaktadır.

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}-\frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\\ &+\frac{a_1}{(n+\ell/2)^2}-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+a_2\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+\\ &+a_3\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\mu_n} &= n+\frac{\ell}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0'}{n+\ell/2}-\frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\\ &+\frac{a_1'}{(n+\ell/2)^2}-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+a_2'\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+\\ &+a_3'\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

burada,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\frac{AM}{4}-H_1+\frac{A}{2}\ln\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right],$$

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\left[\frac{AM}{4}-H_2+\frac{A}{2}\ln\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right],$$

ayrıca,

$$H_1-H_2=\pi(a_0-a_0'). \tag{3.2.3}$$

(3.2.1) ve (3.2.2) den

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \left(n+\frac{\ell}{2}\right)^2+\frac{A}{\pi}\ln(n+\ell/2)+2a_0-\frac{A^2}{4}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\\ &+\frac{2a_1}{n+\ell/2}-\frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\left(2a_2+\frac{A^2}{4\pi^2}\right)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\\ &+\left(2a_3+\frac{Aa_0}{\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\frac{a_0^2}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

ve

$$\mu_n = \left(n+\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln(n+\ell/2) + 2a_0' - \frac{A^2}{4}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} +$$

$$+\frac{2a_1'}{n+\ell/2} - \frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \left(2a_2' + \frac{A^2}{4\pi^2}\right)\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \tag{3.2.5}$$

$$+\left(2a_3' + \frac{Aa_0'}{\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \frac{a_0'^2}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

elde edilir, burada

$$\gamma_1 = 2a_2 + \frac{A^2}{4\pi^2}, \qquad \gamma_2 = 2a_3 + \frac{Aa_0}{\pi}, \qquad \gamma_3 = a_0^2,$$

$$\gamma_1' = 2a_2' + \frac{A^2}{4\pi^2}, \quad , \quad \gamma_2' = 2a_3' + \frac{Aa_0'}{\pi}, \qquad \gamma_3' = a_0'^2$$

işaret edilsin.

λ_n ve μ_n sayıları (3.1.1) denkleminin farklı spektrumları ise (3.1.1), (3.1.2) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları (3.1.23) formülü ile verilir.

Bu kısımda λ_n ve μ_n sayıları için bilinen asimptotik formüller türünden α_n sayıları için asimptotik formüller verilecektir. Bu işlem bir kaç adımda gerçekleştirilecektir. İlk olarak,

$$\Psi(\lambda_n) = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right)$$

sonsuz çarpımı alınırsa,

$$\ln\Psi(\lambda_n) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \ln\left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right)$$

olduğundan yeterince büyük n ve $k \neq n$ için

$$\left|\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right| < \frac{C}{n+\ell/2},$$

eşitsizliği doğrudan (C bir sabite karşılık gelecek) elde edilir. Böylece

$$\ln\Psi(\lambda_n) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p}\left(\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right)^p\right] \tag{3.2.6}$$

olur.

Lemma 3.2.1: $|\lambda_k - \lambda_k^0| \leq a, \quad k = 1, 2, \ldots$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left|\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right|^p \leq \begin{cases} C\dfrac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}, & p = 1 \\ \\ C\dfrac{a^p}{(n+\ell/2)^p}, & p > 1 \end{cases} \tag{3.2.7}$$

İspat: $|\lambda_k - \lambda_k^0| \leq a \quad (k = 1, 2, \ldots)$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left|\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right|^p \leq a^p \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{|\lambda_k^0 - \lambda_n|^p}$$

bulunur. Kolayca görülür ki, eşitsizliğin sağ tarafındaki toplam

$$\int\limits_1^{(n+\ell/2)-1} \frac{dx}{(\lambda_n - x^2)^p} + \int\limits_{(n+\ell/2)+1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \lambda_n)^p}$$

integrallerin toplamı ile yakınsaklık mertebesi aynıdır. Bu integraller hesaplanırsa,

$$\int\limits_{(n+\ell/2)+1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \lambda_n)^p} \leq \frac{C}{(n+\ell/2)^p} \int\limits_{(n+\ell/2)+1}^{\infty} \frac{dx}{(x - \sqrt{\lambda_n})^p} = \frac{C}{(n+1/2)^p}, \qquad (p > 1),$$

$$\int\limits_{(n+\ell/2)+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \lambda_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{\lambda_n}}{x + \sqrt{\lambda_n}}\right|\Bigg|_{x=(n+\ell/2)+1}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \qquad (p = 1),$$

$$\int\limits_1^{(n+\ell/2)-1} \frac{dx}{(\lambda_n - x^2)^p} \leq \frac{C}{(n+\ell/2)^p} \int\limits_1^{(n+\ell/2)-1} \frac{dx}{(\sqrt{\lambda_n} - x)^p} = \begin{cases} O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right), & p = 1 \\ \\ O\left(\dfrac{1}{n^p}\right), & p > 1 \end{cases}$$

olduğu görülür.

$\ln \Psi(\lambda_n)$ ifadesi incelenirse, (3.2.7) değerlendirmesinden

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{\infty}{}' \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right)^p\right| &\leq \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left|\frac{\lambda_k - \lambda_k^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n}\right|^p \leq \\ \leq C \sum_{p=3}^{\infty} \frac{a^p}{(n+\ell/2)^p} &= C\frac{a^3}{(n+\ell/2)^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p}{(n+\ell/2)^p} = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

olduğundan, (3.2.6) formülünden yararlanılarak

$$\ln\Psi(\lambda_n) = -{\sum_{k=1}^{\infty}}' \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p}\left(\frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n}\right)^p\right]$$

$$= {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n} - \frac{1}{2}{\sum_{k=1}^{\infty}}' \left(\frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n}\right)^2 - {\sum_{k=1}^{\infty}}' \left[\sum_{p=3}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p}\left(\frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n}\right)^p\right]$$

$$\ln\Psi(\lambda_n) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n} - \frac{1}{2}{\sum_{k=1}^{\infty}}' \left(\frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.2.9}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi n'nin yeterince büyük değerleri için bu formülde olan toplamların davranışı araştırılacaktır. (3.2.4) ve (3.2.5) asimptotik formülleri yardımı ile (3.2.9) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci toplamın

$$\begin{aligned}
{\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n} &= {\sum_{k=1}^{\infty}}' \{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\}\left[\frac{1}{\lambda_k^0-\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n}\right]+ \\
&+2(a_0-a_0^0){\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{\lambda_k^0-\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n}{\sum_{k=1}^{\infty}}' \{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\} \\
&= S_1 + 2(a_0-a_0^0)S_2 - S_3
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

eşitliğini sağladığı görülür. Şimdi S_3 toplamı için,

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{1}{\lambda_n}{\sum_{k=1}^{\infty}}' \{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\} \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty} \{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\} - \frac{1}{\lambda_n}\{\lambda_n-\lambda_n^0-2(a_0-a_0^0)\}
\end{aligned}$$

dır. λ_n sayıları için asimptotik formülden

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{(n+\ell/2)^2} - \frac{A}{\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^4} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

olduğu elde edilir. λ_n ve λ_n^0 sayıları için asimptotik formüllerden

$$\lambda_n - \lambda_n^0 - 2(a_0-a_0^0) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$

olduğu açıktır. Böylece,

$$M_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\right\}-\frac{1}{\lambda_n}\left\{\lambda_n-\lambda_n^0-2(a_0-a_0^0)\right\} \\ &= \frac{M_\lambda}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^4}\right) \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi S_1 toplamı için,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{\infty}{}'\left\{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\right\}\left[\frac{1}{\lambda_k^0-\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\left\{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\right\}\lambda_k^0}{\lambda_n\left(\lambda_k^0-\lambda_n\right)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\left\{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\right\}\lambda_k^0-(\gamma_1-\gamma_1^0)\ln^2(k+\ell/2)-}{\lambda_n\left(\lambda_k^0-\lambda_n\right)} \\ &\quad \frac{-(\gamma_2-\gamma_2^0)\ln(k+\ell/2)-(\gamma_3-\gamma_3^0)}{\lambda_n\left(\lambda_k^0-\lambda_n\right)}+\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}+ \\ &\quad +\frac{(\gamma_2-\gamma_2^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}+\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\lambda_k^0-\lambda_n} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

yazılabilir. Burada λ_n ve λ_n^0 sayıları için asimptotik formüllerden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} &\lambda_k^0\left\{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\right\}-(\gamma_1-\gamma_1^0)\ln^2(k+\ell/2)- \\ &\quad -(\gamma_2-\gamma_2^0)\ln(k+\ell/2)-(\gamma_3-\gamma_3^0)=O\left(\frac{\ln k}{k}\right) \end{aligned}$$

olduğu alınır. $\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2 k}{k^2}$ serisi yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k^0\left\{\lambda_k-\lambda_k^0-2(a_0-a_0^0)\right\}-(\gamma_1-\gamma_1^0)\ln^2(k+1/2)}{\lambda_n(\lambda_k^0-\lambda_n)}-\right. \\ &\qquad\left.-\frac{(\gamma_2-\gamma_2^0)\ln(k+\ell/2)-(\gamma_3-\gamma_3^0)}{\lambda_n(\lambda_k^0-\lambda_n)}\right| \\ &\leq \frac{C}{(n+\ell/2)^2}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)\left|\lambda_k^0-\lambda_n\right|}\leq\frac{C}{(n+\ell/2)^3} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla S_1 toplamı için

$$S_1=\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}+\frac{(\gamma_2-\gamma_2^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}+$$

$$+\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\lambda_k^0-\lambda_n}$$

olur. Bu ise

$$S_1=\frac{(\gamma_1-\gamma_1^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}+\frac{(\gamma_2-\gamma_2^0)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}+$$
$$+\frac{(\gamma_3-\gamma_3^0)}{\lambda_n}S_2+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

olduğu anlamına gelir. S_1 ve S_3 için asimptotik formüller ve (3.1.10) formülünden

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n} &= \frac{M_\lambda}{(n+\ell/2)^2}+\frac{\gamma_1-\gamma_1^0}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}+\\ &+\frac{\gamma_2-\gamma_2^0}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}+\\ &+\left\{2(a_0-a_0^0)+\frac{\gamma_3-\gamma_3^0}{(n+\ell/2)^2}\right\}S_2+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

olduğu bulunur. Burada, $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots$ ifadesinden yararlanılarak ve $\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}\le\frac{C}{(n+\ell/2)^3}$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]}-\frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^3(k+\ell/2)}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}-$$
$$-2a_0^0\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}+O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{\lambda_k^0-\lambda_n}=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]}-\frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}-$$
$$-2a_0^0\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}+O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)$$

eşitlikleri bulunur. Şimdi de S_2 toplamı hesaplamak için λ_n ve λ_n^0 için asimptotik formüllerden yararlanılırsa,

$$S_2=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\lambda_k^0-\lambda_n}=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(k+\ell/2)^2+\frac{A}{\pi}\ln(k+\ell/2)+2a_0^0-\frac{A^2}{4}\frac{\ln(k+\ell/2)}{k+\ell/2}+}$$

$$\frac{1}{+\frac{2a_1^0}{k+\ell/2}-\frac{A^3}{12\pi}\frac{\ln^3(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)^2}+\gamma_1^0\frac{\ln^2(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)^2}+\gamma_2^0\frac{\ln(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)^2}+}$$

$$\frac{1}{+\frac{\gamma_3^0}{(k+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 k}{k^3}\right)-\lambda_n}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}-\frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}-2a_0^0\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}+O\left(\frac{\ln(k+\ell/2)}{k+\ell/2}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}$$

$$\frac{\left[\frac{A}{\pi}\frac{\ln(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}+\frac{2a_0^0}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}+O\left(\frac{\ln(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]}\right)\right]^2}{1+\frac{A}{\pi}\frac{\ln(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}+\frac{2a_0^0}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}+O\left(\frac{\ln(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]}\right)}$$

elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{(k+\ell/2)\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}\leq\frac{C}{(n+\ell/2)^3}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}S_2=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\lambda_k^0-\lambda_n}=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}-\\-\frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}-2a_0^0\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

eşitliği bulunur.

Şimdi (3.1.9) formülündeki ikinci toplamı hesaplamak için (3.1.4) ve (3.1.5) asimptotik formüllerinden

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\left(\frac{\lambda_k-\lambda_k^0}{\lambda_k^0-\lambda_n}\right)^2=\\=-2\left(a_0-a_0^0\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

olduğu kolayca görülmektedir. (3.1.9) ifadesinde (3.1.12)-(3.1.13) ve (3.1.14) formülleri yazılırsa

$$\ln\Psi(\lambda_n)=\frac{M_\lambda}{(n+\ell/2)^2}+\left\{2(a_0-a_0^0)+\frac{\gamma_2-\gamma_2^0}{(n+\ell/2)^2}\right\}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]}-$$
$$-\frac{2A}{\pi}(a_0-a_0^0)\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}-$$
$$-2\left[2a_0^0(a_0-a_0^0)+(a_0-a_0^0)^2\right]\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.2.15}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^p},\quad (p=1,2)$$

toplamların davranışına bakılırsa,

$$X(\lambda):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+\ell/2)^2-\lambda}=\frac{\pi\tan\pi\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}+\frac{2}{4\lambda-1}$$

eşitliği kullanılarak,

$$X(\lambda_n)=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}=\frac{\pi\tan\pi\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}}+\frac{2}{4\lambda_n-1}-\frac{1}{(n+\ell/2)^2-\lambda_n}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^p}=X^{(p-1)}(\lambda_n)-\frac{1}{[(n+\ell/2)^2-\lambda_n]^p},\quad (p=1,2), \tag{3.2.16}$$

olduğu bulunur. $p=1$ durumu incelenirse,

$$\varepsilon=\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2}+\frac{a_0}{n+\ell/2}-\frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+\ell/2)^2}+\frac{a_1}{(n+\ell/2)^2}-$$
$$-\frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+\ell/2)^3}+a_2\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+\ell/2)^3}+a_3\frac{\ln(n+1/2)}{(n+\ell/2)^3}+ \tag{3.2.18}$$
$$+\frac{a_4}{(n+\ell/2)^3}+O\left(\frac{\ln^3 n}{n^4}\right)$$

olmak üzere $\sqrt{\lambda_n}=n+\ell/2+\varepsilon$ ifadesi (3.1.16) de yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}=\frac{1}{2\,(n+\ell/2)^2}+\frac{\pi\tan\pi\,(n+\ell/2+\varepsilon)}{2\,(n+\ell/2+\varepsilon)}+$$

$$+\frac{1}{(n+\ell/2)^2-(n+\ell/2+\varepsilon)^2}$$

$$=\frac{1}{2\,(n+\ell/2)^2}+\frac{\pi\sin\pi\,(n+\ell/2+\varepsilon)}{2\,((n+\ell/2)+\varepsilon)\cos\pi\,(n+\ell/2+\varepsilon)}+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon\,(n+\ell/2)+\varepsilon^2}+O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)$$

$$=\frac{A\pi}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\frac{3}{4\,(n+\ell/2)^2}+\frac{\pi^2 a_0}{4\,(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(k+\ell/2)^2-\lambda_n}=\frac{A\pi}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\frac{(3+\pi^2 a_0)}{4\,(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \tag{3.2.18}$$

eşitliği elde edilir., $p=2$ durumu incelenirse,

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}=X'(\lambda_n)-\frac{1}{[(n+\ell/2)^2-\lambda_n]^2} \tag{3.2.19}$$

eşitliğinden, benzer işlemler yapılarak,

$$X'(\lambda_n)=\frac{\pi^2}{4\lambda}+\frac{\pi^2\tan^2\sqrt{\lambda}\pi}{4\lambda}-\frac{\pi\tan\sqrt{\lambda}\pi}{4\lambda^{3/2}}-\frac{8}{(4\lambda-1)^2}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}=\frac{\pi^2}{4\lambda_n}+\frac{\pi^2\tan^2\sqrt{\lambda_n}\pi}{4\lambda_n}-\frac{\pi\tan\sqrt{\lambda_n}\pi}{4\lambda_n^{3/2}}-\frac{8}{(4\lambda_n-1)^2}-$$

$$-\frac{1}{[(n+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}$$

$$\frac{1}{(4\lambda_n-1)^2}=O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{4\lambda_n}=\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$\sqrt{\lambda_n}=(n+\ell/2)+\varepsilon$ ifadesi kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}=\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+\frac{\pi^2\tan^2[(n+\ell/2)+\varepsilon]\pi}{4[(n+\ell/2)+\varepsilon]^2}-$$

$$-\frac{\pi\tan[(n+\ell/2)+\varepsilon]\pi}{4[(n+\ell/2)+\varepsilon]^3}-\frac{1}{[(n+\ell/2)^2-[(n+\ell/2)+\varepsilon]]^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{[(k+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}=\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+\frac{\pi^2\sin^2[\ell/2+\varepsilon]\pi}{4[(n+\ell/2)+\varepsilon]^2\cos^2[\ell/2+\varepsilon]\pi}-$$

$$-\frac{\pi\sin\left[\ell/2+\varepsilon\right]\pi}{4\left[(n+\ell/2)+\varepsilon\right]^3\cos\left[\ell/2+\varepsilon\right]\pi}-\frac{1}{\left[2\varepsilon(n+\ell/2)+\varepsilon^2\right]^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}=\frac{\pi^2}{8}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \tag{3.2.20}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln(k+\ell/2)}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}=\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left\{\frac{\ln(k+\ell/2)}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}-\int_k^{k+1}\frac{\ln(x+\ell/2)}{\left[(x+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}dx\right\}+$$

$$+\int_1^{n-1}\frac{\ln(x+\ell/2)}{\left[(x+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}dx+\int_{n+1}^{\infty}\frac{\ln(x+\ell/2)}{\left[(x+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}dx$$

toplamının davranışı incelenecek olunursa,

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left\{\frac{\ln(k+\ell/2)}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}-\int_k^{k+1}\frac{\ln(x+\ell/2)}{\left[(x+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}dx\right\}=O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

sağlanır. İntegraller hesaplanırsa,

$$\int_1^{n-1}\frac{\ln(x+\ell/2)}{\left[(x+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}dx=\int_{1+\ell/2}^{n-1+\ell/2}\frac{\ln t}{\left[t^2-\lambda_n\right]^2}dt=\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}\xi}{\left(1-\xi^2\right)^2}d\xi$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{\ln\xi}{\left(1-\xi^2\right)^2}d\xi+\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n^{3/2}}\int_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{1}{\left(1-\xi^2\right)^2}d\xi$$

$$\int_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{1}{\left(1-\xi^2\right)^2}d\xi=\left[\frac{\xi}{2\left(1-\xi^2\right)}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\right]\Bigg|_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}=$$

$$=\frac{(n+\ell/2-1)\sqrt{\lambda_n}}{2\left[\lambda_n-(n+\ell/2-1)^2\right]}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+(n+\ell/2-1)}{\sqrt{\lambda_n}-(n+\ell/2-1)}-\frac{(1+\ell/2)\sqrt{\lambda_n}}{2\left[\lambda_n-(1+\ell/2)^2\right]}-$$

$$-\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+(1+\ell/2)}{\sqrt{\lambda_n}-(1+\ell/2)}$$

$$\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n^{3/2}}\int\limits_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{1}{\left(1-\xi^2\right)^2}d\xi=\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{2\lambda_n}\frac{(n+\ell/2-1)}{\left[\lambda_n-(n+\ell/2-1)^2\right]}+$$

$$+\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{4\lambda_n^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+(n+\ell/2-1)}{\sqrt{\lambda_n}-(n+\ell/2-1)}-\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{2\lambda_n}\frac{(1+\ell/2)}{\left[\lambda_n-(1+\ell/2)^2\right]}-$$

$$-\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{4\lambda_n^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+(1+\ell/2)}{\sqrt{\lambda_n}-(1+\ell/2)}$$

λ_n ifadesini son eşitlikte yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n^{3/2}}\int\limits_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{1}{\left(1-\xi^2\right)^2}d\xi=\frac{1}{4}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int\limits_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{\ln\xi}{\left(1-\xi^2\right)^2}d\xi=\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\left[\frac{1}{2}\frac{\ln\xi}{\xi}\frac{1}{1-\xi^2}\bigg|_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}-\int\limits_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}\frac{1}{1-\xi^2}d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\left[\frac{1}{2}\frac{\ln\xi}{\xi}\frac{1}{1-\xi^2}-\frac{1}{4}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}+\frac{1}{2\xi}-\frac{\ln\xi}{2\xi}+\frac{1}{4}\ln\xi\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\bigg|_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{1}{2\xi^2}d\xi-\int\limits_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\frac{1}{4\xi}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\left[\frac{1}{2}\frac{\ln\xi}{\xi}\frac{1}{1-\xi^2}-\frac{1}{4}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}-\frac{\ln\xi}{2\xi}+\frac{1}{4}\ln\xi\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{\xi^3}{3^2}+\frac{\xi^5}{5^2}+\cdots\right)\bigg|_{\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\frac{n-1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{(n+\ell/2)-1}\ln\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{\lambda_n}{\lambda_n-[(n+\ell/2)-1]^2}-\right.$$

$$-\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+[(n+\ell/2)-1]}{\sqrt{\lambda_n}-[(n+\ell/2)-1]}-\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\left[(n+\ell/2)-1\right]}\ln\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}+$$

$$+\frac{1}{4}\ln\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+[(n+\ell/2)-1]}{\sqrt{\lambda_n}-[(n+\ell/2)-1]}-$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}+\frac{1}{3^2}\left(\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^3+\frac{1}{5^2}\left(\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^5+\cdots\right)-
$$

$$
-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{1+\ell/2}\ln\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{\lambda_n}{\lambda_n-[1+\ell/2]^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+[1+\ell/2]}{\sqrt{\lambda_n}-[1+\ell/2]}+
$$

$$
+\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2(1+\ell/2)}\ln\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}-\frac{1}{4}\ln\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+[1+\ell/2]}{\sqrt{\lambda_n}-[1+\ell/2]}+
$$

$$
+\frac{1}{2}\left(\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}+\frac{1}{3^2}\left(\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^3+\frac{1}{5^2}\left(\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^5+\cdots\right)\Bigg]
$$

$$
=\frac{1}{2}\frac{1}{(n+\ell/2)-1}\ln\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{1}{\lambda_n-[(n+\ell/2)-1]^2}-
$$

$$
-\frac{1}{4\lambda_n^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+[(n+\ell/2)-1]}{\sqrt{\lambda_n}-[(n+\ell/2)-1]}-\frac{1}{2\lambda_n[(n+\ell/2)-1]}\ln\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}+
$$

$$
+\frac{1}{4\lambda_n^{3/2}}\ln\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+[(n+\ell/2)-1]}{\sqrt{\lambda_n}-[(n+\ell/2)-1]}-
$$

$$
-\frac{1}{2\lambda_n^{3/2}}\left(\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}+\frac{1}{3^2}\left(\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^3+\frac{1}{5^2}\left(\frac{(n+\ell/2)-1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^5+\cdots\right)
$$

$$
-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\ell/2}\ln\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{1}{\lambda_n-[1+\ell/2]^2}+\frac{1}{4\lambda_n^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+[1+\ell/2]}{\sqrt{\lambda_n}-[1+\ell/2]}+
$$

$$
+\frac{1}{2\lambda_n(1+\ell/2)}\ln\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}-\frac{1}{4\lambda_n^{3/2}}\ln\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+[1+\ell/2]}{\sqrt{\lambda_n}-[1+\ell/2]}+
$$

$$
+\frac{1}{2\lambda_n^{3/2}}\left(\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}+\frac{1}{3^2}\left(\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^3+\frac{1}{5^2}\left(\frac{1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^5+\cdots\right)
$$

$$
=\frac{1}{6}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}-\frac{\ln(1+\ell/2)}{4(1+\ell/2)}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)
$$

$$
\int_1^{n-1}\frac{\ln(x+\ell/2)}{[(x+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}dx=\frac{5}{12}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}-\frac{\ln(1+\ell/2)}{4(1+\ell/2)}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)
$$

$$
\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_{n+1}^{\infty}\frac{\ln(x+\ell/2)}{[(x+\ell/2)^2-\lambda_n]^2}dx=\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_{n+1+\ell/2}^{\infty}\frac{\ln t}{[t^2-\lambda_n]^2}dt=\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_{\frac{n+1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}\xi}{(\xi^2-1)^2}d\xi
$$

$$
=\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_{\frac{n+1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty}\frac{\ln\xi}{(\xi^2-1)^2}d\xi+\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n^{3/2}}\int_{\frac{n+1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty}\frac{1}{(\xi^2-1)^2}d\xi
$$

$$\int\limits_{\frac{n+1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty} \frac{1}{\left(\xi^2-1\right)^2} d\xi = \left[\frac{\xi}{2\left(\xi^2-1\right)} + \frac{1}{4}\ln\frac{\xi+1}{\xi-1}\right]\Bigg|_{\frac{n+1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty}$$

$$= -\frac{(n+\ell/2+1)\sqrt{\lambda_n}}{2\left[(n+\ell/2+1)^2-\lambda_n\right]} - \frac{1}{4}\ln\frac{(n+\ell/2+1)+\sqrt{\lambda_n}}{(n+\ell/2+1)-\sqrt{\lambda_n}}$$

$$\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n^{3/2}} \int\limits_{\frac{n+1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty} \frac{1}{\left(\xi^2-1\right)^2} d\xi = -\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{2\lambda_n}\frac{(n+\ell/2+1)}{\left[(n+\ell/2+1)^2-\lambda_n\right]} - $$

$$-\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{4\lambda_n^{3/2}}\ln\frac{(n+\ell/2+1)+\sqrt{\lambda_n}}{(n+\ell/2+1)-\sqrt{\lambda_n}}$$

$$\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n^{3/2}} \int\limits_{\frac{n+1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty} \frac{1}{\left(\xi^2-1\right)^2} d\xi = -\frac{1}{4}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int\limits_{\frac{n+\ell/2+1}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty} \frac{\ln\xi}{\left(\xi^2-1\right)^2} d\xi = \frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln\xi}{\xi}\frac{1}{1-\xi^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi} - \frac{\ln\xi}{4\xi} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{8}\ln\xi\ln\frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{3^2}\frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{5^2}\frac{1}{\xi^5} + \cdots\right)\Bigg|_{\frac{n+\ell/2+1}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(n+\ell/2)+1}\ln\frac{(n+\ell/2)+1}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{1}{\lambda_n-\left[(n+\ell/2)+1\right]^2} -$$

$$-\frac{1}{4\lambda_n^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+\left[(n+\ell/2)+1\right]}{\sqrt{\lambda_n}-\left[(n+\ell/2)+1\right]} + \frac{1}{4\lambda_n\left[(n+\ell/2)+1\right]}\ln\frac{(n+\ell/2)+1}{\sqrt{\lambda_n}} +$$

$$+\frac{1}{8\lambda_n^{3/2}}\ln\frac{(n+\ell/2)+1}{\sqrt{\lambda_n}}\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+\left[(n+\ell/2)+1\right]}{\sqrt{\lambda_n}-\left[(n+\ell/2)+1\right]} -$$

$$-\frac{1}{4\lambda_n^{3/2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{(n+\ell/2)+1} + \frac{1}{3^2}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{(n+\ell/2)+1}\right)^3 + \frac{1}{5^2}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{(n+\ell/2)+1}\right)^5 + \cdots\right)$$

$$\frac{\ln\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n^{3/2}}\int\limits_{\frac{n+1+\ell/2}{\sqrt{\lambda_n}}}^{\infty}\frac{1}{\left(\xi^2-1\right)^2}d\xi=O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\left\{\frac{\ln(k+\ell/2)}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}-\int\limits_{k}^{k+1}\frac{\ln(x+\ell/2)}{\left[(x+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}dx\right\}+$$
$$+\int\limits_{1}^{n-1}\frac{\ln(x+\ell/2)}{\left[(x+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}dx+\int\limits_{n+1}^{\infty}\frac{\ln(x+\ell/2)}{\left[(x+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}dx$$

elde edilir. Bulunan ifadeler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\ln(k+\ell/2)}{\left[(k+\ell/2)^2-\lambda_n\right]^2}&=\frac{1}{6}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}-\\&-\frac{\ln(1+\ell/2)}{4(1+\ell/2)}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned}\tag{3.2.21}$$

olur. Böylece (3.2.15) ifadesinde (3.2.18), (3.2.20) ve (3.2.21) serileri yazılırsa,

$$\begin{aligned}\ln\Psi(\lambda_n)=&\frac{M_\lambda}{(n+\ell/2)^2}+\left\{2(a_0-a_0^0)+\frac{\gamma_2-\gamma_2^0}{(n+\ell/2)^2}\right\}\left\{\frac{A\pi}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{\left(n+\ell/2\right)^2}+\right.\\&\left.+\frac{3}{4\left(n+\ell/2\right)^2}+\frac{\pi^2 a_0}{4\left(n+\ell/2\right)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\right\}-\frac{2A}{\pi}(a_0-a_0^0)\left\{\frac{1}{6}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}-\right.\\&\left.-\frac{\ln(1+\ell/2)}{4(1+\ell/2)}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\right\}-\\&-2\left[2a_0^0(a_0-a_0^0)+(a_0-a_0^0)^2\right]\left\{\frac{\pi^2}{8}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}\ln\Psi(\lambda_n)&=A(a_0-a_0^0)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{\left(n+\ell/2\right)^2}+\\&+\left\{M_\lambda+\frac{1}{2}\left[3+\pi^2(a_0-a_0^0)+\frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right](a_0-a_0^0)-\right.\\&\left.-\frac{\pi^2(a_0-a_0^0)^2}{4}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzden

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda_n) &= 1 + A(a_0 - a_0^0)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ &+ \left\{M_\lambda + \frac{1}{2}\left[3 + \pi^2(a_0 - a_0^0) + \frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right](a_0 - a_0^0) - \right. \\ &\left. -\frac{\pi^2(a_0 - a_0^0)^2}{4}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k^0} &= 1 + A(a_0 - a_0^0)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ &+ \left\{M_\lambda + \frac{1}{2}\left[3 + \pi^2(a_0 - a_0^0) + \frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right](a_0 - a_0^0) - \right. \\ &\left. -\frac{\pi^2(a_0 - a_0^0)^2}{4}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

bulunur. Şimdi benzer işlemler yapılarak

$$\varphi(\lambda_n) = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n - \mu_k^0} = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\mu_k - \mu_k^0}{\mu_k^0 - \lambda_n}\right)$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n - \mu_k^0} &= 1 + A(a_0' - a_0'^0)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ &+ \left\{M_\mu + \frac{1}{2}\left[3 + \pi^2(a_0' - a_0'^0) + \frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right](a_0' - a_0'^0) - \right. \\ &\left. -\frac{\pi^2(a_0' - a_0'^0)^2}{4}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

sonsuz çarpımların durumunu incelenir. Burada,

$$M_\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\{\mu_k - \mu_k^0 - 2(a_0' - a_0'^0)\},$$

sonsuz çarpımı için

$$\Psi(\lambda_n^0) = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_k^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0} = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\right)$$

olur.

$$\ln\Psi(\lambda_n^0) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \ln\left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\right)$$

olduğundan yeterince büyük n. ve $k \neq n$ için

$$\left|\frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\right| < \frac{C}{n + \ell/2}$$

dır. Benzer şekilde,

$$\ln \Psi(\lambda_n^0) = -\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \left(\frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\right)^p\right]$$

$$\ln \Psi(\lambda_n^0) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n^0} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n^0}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.2.25}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n^0} = \left(\lambda_n - \lambda_n^0\right) \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\lambda_k^0 - \lambda_n^0} = 2(a_0 - a_0^0) \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\lambda_k^0 - \lambda_n^0} + O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\lambda_k^0 - \lambda_n^0} = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(k + \ell/2)^2 - \lambda_n^0} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln(k + \ell/2)}{\left[(k + \ell/2)^2 - \lambda_n^0\right]^2} -$$
$$-2a_0^0 \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\left[(k + \ell/2)^2 - \lambda_n^0\right]^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

olur. Benzer işlemler yapılırsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(k + \ell/2)^2 - \lambda_n^0} = \frac{A\pi}{8} \frac{\ln(n + \ell/2)}{(n + \ell/2)^2} + \frac{3}{4\,(n + \ell/2)^2} + \frac{\pi^2 a_0^0}{4\,(n + \ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\ln(k + \ell/2)}{\left[(k + \ell/2)^2 - \lambda_n^0\right]^2} = \frac{1}{6} \frac{\ln(n + \ell/2)}{(n + \ell/2)^2} - \frac{\ln(1 + \ell/2)}{4(1 + \ell/2)} \frac{1}{(n + \ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\left[(k + \ell/2)^2 - \lambda_n^0\right]^2} = \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(n + \ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n^0} = A(a_0 - a_0^0) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3\pi}\right) \frac{\ln(n + \ell/2)}{(n + \ell/2)^2} +$$
$$+ \left\{\frac{(a_0 - a_0^0)}{2} \left[3 + \frac{\pi^2 a_0^0}{2} - \frac{A \ln(1 + \ell/2)}{2\pi(1 + \ell/2)}\right]\right\} \frac{1}{(n + \ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right) \tag{3.2.26}$$

olduğu elde edilir. (3.2.25) ifadesindeki ikinci seri hesaplanırsa

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n^0}\right)^2 = -\frac{1}{2} \left(\lambda_n - \lambda_n^0\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\left(\lambda_k^0 - \lambda_n^0\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lambda_n - \lambda_n^0\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\left((k+\ell/2)^2 - \lambda_n^0\right)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}(a_0 - a_0^0)^2 \frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_k^0 - \lambda_n^0}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{4}(a_0 - a_0^0)^2 \frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.2.27}$$

(3.2.25) ifadesinde (3.2.26), (3.2.27) yazılırsa

$$\begin{aligned}\ln \Psi(\lambda_n^0) = {} & A(a_0 - a_0^0)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + \left\{\frac{(a_0 - a_0^0)}{2}\left[3 + \frac{\pi^2 a_0^0}{2} - \frac{A\ln(1+\ell/2)}{2\pi(1+\ell/2)}\right] - \right. \\ & \left. - \frac{\pi^2(a_0 - a_0^0)^2}{4}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda_n^0) & = 1 + A(a_0 - a_0^0)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + \left\{\frac{(a_0 - a_0^0)}{2}\left[3 + \frac{\pi^2 a_0^0}{2} - \frac{A\ln(1+\ell/2)}{2\pi(1+\ell/2)}\right] - \right. \\ & \left. - \frac{\pi^2(a_0 - a_0^0)^2}{4}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

elde edilir. Buradan

$$\Psi(\lambda_n^0) = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n - \mu_k^0}{\lambda_n^0 - \mu_k^0} = \prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda_n^0}{\lambda_n^0 - \mu_k^0}\right)$$

ve (3.2.28) den dolayı

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda_n^0) & = 1 + A(a_0 - a_0^0)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + \left\{\frac{(a_0 - a_0^0)}{2}\left[3 + \frac{\pi^2 a_0^0}{2} - \frac{A\ln(1+\ell/2)}{2\pi(1+\ell/2)}\right] - \right. \\ & \left. - \frac{\pi^2(a_0 - a_0^0)^2}{4}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned}$$

olduğu bulunur. (3.2.4) ve (3.2.5) asimptotik formüllerinden yararlanılarak,

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0} = 1 + A(a_0-a_0^0)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+ \\ +\left\{\frac{(a_0-a_0^0)}{2}\left[3+\frac{\pi^2 a_0^0}{2}-\frac{A\ln(1+\ell/2)}{2\pi(1+\ell/2)}\right]- \\ -\frac{\pi^2(a_0-a_0^0)^2}{4}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right) \tag{3.2.28$'$}$$

olur. Benzer şekilde

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0} = 1 + A(a_0'-a_0'^0)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3\pi}\right)\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+ \\ +\left\{\frac{(a_0'-a_0'^0)}{2}\left[3+\frac{\pi^2 a_0'^0}{2}-\frac{A\ln(1+\ell/2)}{2\pi(1+\ell/2)}\right]- \\ -\frac{\pi^2(a_0'-a_0'^0)^2}{4}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right) \tag{3.2.29}$$

dır. (3.2.4) ve (3.2.5) asimptotik formüllerinden dolayı

$$\frac{\lambda_n-\mu_n}{\lambda_n^0-\mu_n^0} = \frac{2\,(a_0-a_0')+\dfrac{2\,(a_1-a_1')}{n+\ell/2}+(\gamma_1-\gamma_1')\dfrac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+}{2\,(a_0^0-a_0'^0)+\dfrac{2\,(a_1^0-a_1'^0)}{n+\ell/2}+(\gamma_1^0-\gamma_1'^0)\dfrac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+}$$

$$\frac{+(\gamma_2-\gamma_2')\dfrac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\dfrac{(\gamma_3-\gamma_3')}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^3}\right)}{+(\gamma_2^0-\gamma_2'^0)\dfrac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\dfrac{(\gamma_3^0-\gamma_3'^0)}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^3}\right)}$$

$$= 2\,(a_0-a_0')\left\{1+\frac{a_1-a_1'}{a_0-a_0'}\frac{1}{n+\ell/2}+\frac{(\gamma_1-\gamma_1')}{2\,(a_0-a_0')}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\gamma_2-\gamma_2')}{2\,(a_0-a_0')}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\frac{(\gamma_3-\gamma_3')}{2\,(a_0-a_0')}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{2\,(a_0^0-a_0'^0)}\left\{1-\frac{a_1^0-a_1'^0}{a_0^0-a_0'^0}\frac{1}{n+\ell/2}-\frac{(\gamma_1^0-\gamma_1'^0)}{2\,(a_0^0-a_0'^0)}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\gamma_2^0-\gamma_2'^0)}{2\,(a_0^0-a_0'^0)}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}-\frac{(\gamma_3^0-\gamma_3'^0)}{2\,(a_0^0-a_0'^0)}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\right\}$$

olur. (3.2.3) den dolayı $\dfrac{2(a_0-a_0')}{2(a_0^0-a_0'^0)}=1$ ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_n-\mu_n}{\lambda_n^0-\mu_n^0} &= 1+\\ &+\left\{\frac{1}{2}\left[(a_0+a_0')+(a_0^0+a_0'^0)\right]-\frac{a_1-a_1'}{a_0-a_0'}\frac{a_1^0-a_1'^0}{a_0^0-a_0'^0}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+ \\ &+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

bulunur.

$$\frac{\lambda_n-\lambda_0}{\lambda_n^0-\lambda_0^0}=\frac{\lambda_n}{\lambda_n^0}\left[1-\frac{\lambda_0}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right)\right]\left[1+\frac{\lambda_0^0}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right)\right]$$

$$=\frac{\lambda_n}{\lambda_n^0}\left[1-\frac{\lambda_0-\lambda_0^0}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right)\right]$$

$$=\left[1-\frac{\lambda_0-\lambda_0^0}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right)\right]\left[1+\frac{2(a_0^0-a_0)}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\right]$$

$$\frac{\lambda_n-\lambda_0}{\lambda_n^0-\lambda_0^0}=1+\frac{2(a_0^0-a_0)+(\lambda_0^0-\lambda_0)}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \tag{3.2.31}$$

$$\frac{\lambda_n-\mu_0}{\lambda_n^0-\mu_0^0}=1+\frac{2(a_0^0-a_0)+(\mu_0^0-\mu_0)}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \tag{3.2.32}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_n-\mu_n}{\lambda_n^0-\mu_n^0}\frac{\lambda_n-\lambda_0}{\lambda_n^0-\lambda_0^0} &= 1+\left[\frac{1}{2}\left[(a_0+a_0')+(a_0^0+a_0'^0)\right]-\frac{a_1-a_1'}{a_0-a_0'}\frac{a_1^0-a_1'^0}{a_0^0-a_0'^0}\right]\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+\\ &+\frac{2(a_0^0-a_0)+(\lambda_0^0-\lambda_0)}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_n-\mu_n}{\lambda_n^0-\mu_n^0}\frac{\lambda_n-\lambda_0}{\lambda_n^0-\lambda_0^0}\frac{\lambda_n-\mu_0}{\lambda_n^0-\mu_0^0} &= 1+\left\{\frac{1}{2}\left[(a_0+a_0')+(a_0^0+a_0'^0)\right]+4(a_0^0-a_0)+\right.\\ &\left.+(\lambda_0^0-\lambda_0)+(\mu_0^0-\mu_0)-\frac{a_1-a_1'}{a_0-a_0'}\frac{a_1^0-a_1'^0}{a_0^0-a_0'^0}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0} &= 1+A(a_0-a_0^0)\frac{3\pi^2-4}{6\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+\\ &+\left[M_\lambda+(a_0-a_0^0)\left[3+\pi^2(a_0-a_0^0)-\frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right]-\frac{\pi^2(a_0-a_0^0)^2}{2}\right]\frac{1}{(n+\ell/2)^2}\\ &+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\end{aligned}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} = 1 + A(a_0'-a_0'^0)\frac{3\pi^2-4}{6\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+$$

$$\left[M_\mu + (a_0'-a_0'^0)\left(3+\pi^2(a_0'-a_0'^0) - \frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{\pi^2(a_0'-a_0'^0)^2}{2}\right]\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} =$$

$$= 1 + A\left[(a_0-a_0^0)+(a_0'-a_0'^0)\right]\frac{3\pi^2-4}{6\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+$$

$$+\left\{M_\lambda + M_\mu + \left[3-\frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right]\left[(a_0-a_0^0)+(a_0'-a_0'^0)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^2}{2}\left[(a_0-a_0^0)^2+(a_0'-a_0'^0)^2\right]\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

Buna göre,

$$\frac{\lambda_n-\mu_n}{\lambda_n^0-\mu_n^0}\frac{\lambda_n-\mu_0}{\lambda_n^0-\mu_0^0}\frac{\lambda_n-\lambda_0}{\lambda_n^0-\lambda_0^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\lambda_k^0}{\lambda_n^0-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\mu_k^0}{\lambda_n^0-\mu_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\mu_k^0} =$$

$$= 1 + A\left[(a_0-a_0^0)+(a_0'-a_0'^0)\right]\frac{3\pi^2-4}{6\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+$$

$$+\left\{M_\lambda + M_\mu + \left[3-\frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right]\left[(a_0-a_0^0)+(a_0'-a_0'^0)\right]+\right.$$

$$+\frac{\pi^2}{2}\left[(a_0-a_0^0)^2+(a_0'-a_0'^0)^2\right]+\frac{1}{2}\left[(a_0+a_0')+(a_0^0+a_0'^0)\right]+$$

$$\left.+4\left(a_0^0-a_0\right)+\left(\lambda_0^0-\lambda_0\right)+\left(\mu_0^0-\mu_0\right)-\frac{a_1-a_1'}{a_0-a_0'}\frac{a_1^0-a_1'^0}{a_0^0-a_0'^0}\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+$$

$$+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

α_n^0'ler için,

$$\begin{aligned}\alpha_n^0 &= \frac{\pi}{2}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{n+\ell/2}+\frac{A^2\pi}{8}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+b_1^0\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)}+ \\ &+\frac{b_2^0}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

asimptotik formülü sağlanır. (3.2.22), (3.2.24), (3.2.25), (3.2.26), (3.2.27), (3.2.28), (3.2.29), (3.2.30) ve (3.2.33) formülleri yardımıyla, α_n sayıları için aşağıdaki asimptotik formül elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\alpha_n = {} & \frac{\pi}{2}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{n+\ell/2}+\frac{A^2\pi}{8}\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+ \\
& +\left\{\frac{A\left(3\pi^2-4\right)}{12}\left[(a_0-a_0^0)+(a_0'-a_0'^0)\right]+\frac{2}{\pi}b_1^0\right\}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2}+ \\
& +\frac{\pi}{2}\left\{M_\lambda+M_\mu+\left[3-\frac{2A\ln(1+\ell/2)}{\pi(1+\ell/2)}\right]\left[(a_0-a_0^0)+(a_0'-a_0'^0)\right]+\right. \\
& +\frac{\pi^2}{2}\left[(a_0-a_0^0)^2+(a_0'-a_0'^0)^2\right]+\frac{1}{2}\left[(a_0+a_0')+(a_0^0+a_0'^0)\right]+ \\
& +4\left(a_0^0-a_0\right)+\left(\lambda_0^0-\lambda_0\right)+\left(\mu_0^0-\mu_0\right)-\frac{a_1-a_1'}{a_0-a_0'}\frac{a_1^0-a_1'^0}{a_0^0-a_0'^0}+ \\
& \left.+\frac{2}{\pi}b_2^0\right\}\frac{1}{(n+\ell/2)^2}+O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)
\end{aligned}
\tag{3.2.34}
$$

Uyarı 3.2.2: α_n için (3.2.34) asimptotik formülü yeterince büyük n' ler için sağlanır. Küçük n'ler için α_n sayıları, $H_2 - H_1$ farkı (3.2.3) denklemi ile verilmiş olmak üzere, (3.1.20) formülünden direkt olarak elde edilir.

3.3. Sturm-Liouville Operatörü için Ters (Inverse) Problemin Çözümü

Teorem 3.3.1: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$, sayı dizileri aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ sayıları ortak olarak sıralıdır,

2) $a_0 \neq a_0'$ ve $\sum a_n^2$, $\sum a_n'^2$ yakınsak seriler olmak üzere,

$$\lambda_n = (n+\ell/2)^2 + \frac{A}{\pi}\ln(n+\ell/2) + 2a_0 + a_{1n}$$

ve

$$\mu_n = (n+\ell/2)^2 + \frac{A}{\pi}\ln(n+\ell/2) + 2a_0' + a_{1n}'$$

asimptotik formülleri geçerlidir.

Bu durumda $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ (3.1.1), (3.1.2) probleminin $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ ise (3.1.1), (3.1.3) probleminin spektrumudur ve

$$H_1 - H_2 = \pi(a_0' - a_0)$$

olacak biçimde $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$ ve $H_1,\ H_2$ gerçel sayıları vardır.

İspat: Yukarıdaki özelliklere sahip $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizileri verilmiş olsun. (3.1.21) formülünün yardımıyla $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisi oluşturulursa, α_n 'ler için (3.2.34) asimptotik formülü sağlanır. Şimdi her n için $\alpha_n > 0$ olduğu gösterilmelidir. Teoremin ilk koşuluna göre $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralıdır. Buradan $n = 0,1,...$ için $\mu_n > \lambda_n$ veya $\mu_n < \lambda_n$ dir. α_n'ler (3.1.21) eşitliği ile verilmekte olup

$$\alpha_n = \alpha_n^0 \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_n^0 - \mu_n^0}\frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_n^0 - \lambda_0^0}\frac{\lambda_n - \mu_0}{\lambda_n^0 - \mu_0^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n^0 - \mu_k^0}$$

şeklindedir. Buradan

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0} > 0, \qquad \prod_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\lambda_n - \mu_k}{\lambda_n^0 - \mu_k^0} > 0$$

yazılabilir.

$\alpha_n^0 > 0$, λ_n , μ_n ve λ_n^0 , μ_n^0 'ler sıralı olduğundan, α_n formülünden $n = 0,1,\ldots,$ için $\alpha_n > 0$ olduğu açıktır. Bu ise, Sturm-Liouville operatörlerinin $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$

ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre oluşturulabiliyor olmasından M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [14], verilen $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre de Sturm-Liouville operatörlerinin oluşturulabildiğini gösterir.

3.4. L Operatörünün Regülerize İzinin Hesaplanması

$W_2^2[0,\pi]$ uzayında

$$l(y) = -y'' + \left\{\frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + \frac{A}{x} + q(x)\right\} y \tag{3.4.1}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y(0) = 0, \qquad y'(\pi) - Hy(\pi) = 0, \tag{3.4.2}$$

sınır koşullarının ürettiği L operatörü ele alınsın. Burada $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$, $\ell \geq 1$ tamsayı, A, H gerçel sayılardır. Bu alt bölümde L operatörünün regülerize izi hesaplanacaktır. Operatörler için iz kavramı denildiğinde;

Sonlu boyutlu durumda A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Teorem gereği eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisi köşegenleştirilebilir.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

köşegen matrisi olmak üzere, bu bir dönüşümdür ve her matris dönüşümüne bir lineer operatör gibi bakılabilir. Burada $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ toplamına A matrisinin **izi (trace)** denir.

Sonsuz boyutlu durum için, $A : H \to H$ bir lineer operatör olsun. H bir Hilbert uzayıdır. Hilbert uzayı ayrılabilir uzay olduğundan ortonormal sistemler alınabilir. $\{e_n\} \in H$ ortonormal sistem ve $\|e_n\|_H = 1$ dir. $\{e_n\}$ sistemi A nın özfonksiyonları şeklinde alınırsa $Ae_n = \lambda_n e_n$ olur. Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda_n e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$ ise bu seriye A operatörünün izi (trace) denir ve $tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ olur.

$L : L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi]$, $L_2[0,\pi]$ Hilbert uzayı olduğu için $\{y_n\}$ ortonormal sistem seçilebilir. $L_2[0,\pi]$ den $\{y_n\}_{n\geq 0}$ sistemi L operatörünün özfonksiyonları olacak şeklinde alınırsa

$Ly_n = \lambda_n y_n$ olur. Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle Ly_n, y_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda_n y_n, y_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y_n, y_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

şeklindedir. Ancak bu seri yakınsak değildir. Dolayısıyla regülerize edilmiş ize bakılacaktır. μ_n ile $q(x)=0$ olduğu duruma karşılık gelen (3.4.1), (3.4.2) probleminin özdeğerlerini göstersin. $\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n - \mu_n]$ ifadesine (3.4.1), (3.4.2) probleminin **regülerize edilmiş izi** denir.

$\varphi(x,\rho)$ ile

$$l[\varphi(x,\rho)] = \rho^2 \varphi(x,\rho)$$

diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\rho) = 0$$

koşulunu sağlayan çözümü

$$\varphi(x,\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho x}{2}} J_\nu(\rho x) +$$

$$+(-1)^{\ell}\frac{\pi}{2}\int_0^x \sqrt{xt}\,[J_\nu(\rho t)J_{-\nu}(\rho x) - J_{-\nu}(\rho t)J_\nu(\rho x)]\left(\frac{A}{t}+q(t)\right)\varphi(t,\rho)dt$$

integral denklemini sağlamaktadır.

Birinci bölümde gösterildiği gibi n'nin yeterince büyük değerleri için L operatörünün özdeğerleri

$$\begin{aligned}\rho_n = \quad & n + \frac{\ell}{2} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\ell/2)}{n+\ell/2} + \frac{a_0}{n+\ell/2} - \frac{A^2}{8}\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^2} + \\ & + \frac{a_1}{(n+\ell/2)^2} - \frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + a_2\frac{\ln^2(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + \\ & + a_3\frac{\ln(n+\ell/2)}{(n+\ell/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

davranışa sahiptir.

μ_n'ler ile

$$-y'' + \left\{\frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + \frac{A}{x} - \mu\right\} y = 0$$

denklemi ve (3.4.2) sınır koşulları tarafından üretilen operatörün özdeğerleri gösterilsin. O halde ρ_n' lerin (3.4.3) davranışından görüldüğü gibi

$(\lambda_1 - \mu_1) + (\lambda_2 - \mu_2) + \cdots$ serisi $\int\limits_0^\pi q(t)dt = 0$ koşulu sağlandığında yakınsaktır.

$\psi(x,\rho)$ fonksiyonu

$$-\psi''(x,\rho) + \left\{\frac{\ell(\ell-1)}{x^2} + \frac{A}{x} + q(x)\right\}\psi(x,\rho) = -\rho^2\psi(x,\rho)$$

denkleminin

$$\psi(0,\rho) = 0$$

koşulunu sağlayan çözümü ve $\psi_0(x,\rho)$ ise bu problemin $q(x) \equiv 0$ durumuna karşılık gelen çözümü olsun. M.G. Gasimov [17] çalışmasında

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda_n - \mu_n] = -\lim_{\rho\to i\infty}\frac{\rho^3}{2}\frac{d}{d\rho}\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho) - H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho) - H\psi_0(\pi,\rho)}\right) \tag{3.4.4}$$

eşitliğini gösterilmiştir. (3.4.4) eşitliğinden yararlanmak için $\psi'(\pi,\rho) - H\psi(\pi,\rho)$ ve $\psi_0'(\pi,\rho) - H\psi_0(\pi,\rho)$ ifadelerinin $\rho \to i\infty$ iken davranışları bilinmelidir. Bunun için $\psi(x,\rho)$ ve $\psi_0(x,\rho)$ fonksiyonlarının sağladığı integral denklemlerden yararlanılır.

O halde $\ell = 2k+1$ için

$$\psi(x,\rho) = -i\sqrt{\rho x}e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(i\rho x) +$$
$$+(-1)^\ell\frac{\pi}{2}\int\limits_0^x\sqrt{xt}\left[J_\nu(i\rho t)J_{-\nu}(i\rho x) - J_{-\nu}(i\rho t)J_\nu(i\rho x)\right]\left(\frac{A}{t} + q(t)\right)\psi(t,\rho)dt$$

olduğundan I. bölümde kullanılan yöntem uygulanarak $\psi(x,\rho)$ fonksiyonu için $\rho \to i\infty$ iken

$$\psi(x,\rho) = (-1)^k e^{-i\nu\pi/2}\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\left\{\sinh\rho x + \frac{A}{2}\frac{\cosh\rho x}{\rho}\ln\rho x + \frac{A\pi}{4}\frac{\sinh\rho x}{\rho} +\right.$$
$$+\frac{\cosh\rho x}{2\rho}\left[\int\limits_0^x q(t)dt + \frac{A}{2}(4 + 4N_1' - N_2' + N_3')\right] - \frac{\sinh\rho x}{4\rho^2}[q(x) + q(0)] +$$
$$+\frac{A}{4x}\frac{\sinh 3\rho x}{\rho^2} + \frac{A}{8x^2}\frac{\cosh 3\rho x}{\rho^3} + \frac{A\nu^2}{4x^2}\frac{\cosh\rho x}{\rho^3} + \frac{\cosh\rho x}{8\rho^3}[q'(x) - q'(0)] -$$

$$-\frac{A\nu^2}{2x^2}\frac{\cosh\rho x}{\rho^3}\cosh 2\rho x+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\Big\}$$

elde edilir. Bu durumda $\psi'(x,\rho)$ fonksiyonu için $\rho\to i\infty$ iken

$$\psi'(x,\rho)=(-1)^k e^{-i\nu\pi/2}\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\Big\{\rho\cosh\rho x+\frac{A}{2}\sinh\rho x\ln\rho x+\frac{A\pi}{4}\cosh\rho x+$$

$$+\frac{\sinh\rho x}{2}\left[\int_0^x q(t)dt+\frac{A}{2}(4+4N_1'-N_2'+N_3')\right]+\frac{A}{2}\frac{\cosh\rho x}{\rho x}+$$

$$+\frac{\cosh\rho x}{4\rho}[q(x)-q(0)]+\frac{3A}{4x}\frac{\cosh 3\rho x}{\rho}-\frac{A}{4x^2}\frac{\sinh 3\rho x}{\rho^2}+\frac{3A}{8x^2}\frac{\sinh 3\rho x}{\rho^2}+$$

$$+\frac{A\nu^2}{4x^2}\frac{\sinh\rho x}{\rho^2}+\frac{\sinh\rho x}{8\rho^2}[q'(x)-q'(0)]-\frac{A\nu^2}{2x^2}\frac{\sinh\rho x}{\rho^2}\cosh 2\rho x-$$

$$-\frac{A\nu^2}{x^2}\frac{\cosh\rho x}{\rho^2}\sinh 2\rho x-\frac{A}{4x^3}\frac{\cosh 3\rho x}{\rho^3}+\frac{A\nu^2}{2x^3}\frac{\cosh\rho x}{\rho^3}+\frac{\cosh\rho x}{8\rho^3}q''(x)+$$

$$+\frac{A\nu^2}{x^3}\frac{\cosh\rho x}{\rho^3}\cosh 2\rho x+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\Big\}$$

davranışı bulunur.

$$\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)=(-1)^k e^{-i\nu\pi/2}\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\rho\Big\{\cosh\rho\pi+\frac{A}{2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi+\frac{A\pi}{4}\frac{\cosh\rho x}{\rho}+$$

$$+M_1'\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}-H\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}-\frac{AH}{2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi-\frac{AH\pi}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+$$

$$+\frac{\cosh\rho\pi}{4\rho^2}[q(\pi)-q(0)]+\frac{3A}{4\pi}\frac{\cosh 3\rho\pi}{\rho^2}-HM_1'\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A}{8\pi^2}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+$$

$$+\frac{A\nu^2}{4\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}+\frac{\sinh\rho\pi}{8\rho^3}[q'(\pi)-q'(0)]-\frac{A\nu^2}{2\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\cosh 2\rho\pi-$$

$$-\frac{A\nu^2}{\pi^2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^3}\sinh 2\rho\pi+H\frac{\sinh\rho\pi}{4\rho^3}[q(\pi)+q(0)]-\frac{AH}{4\pi}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\Big\}$$

Burada $M_1':=\frac{1}{2}\left[\int_0^x q(t)dt+\frac{A}{2}(4+4N_1'-N_2'+N_3')\right]$ ve

$M':=\frac{A}{4}(4+4N_1'-N_2'+N_3')$ dir.

Benzer şekilde

$$\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)=(-1)^k e^{-i\nu\pi/2}\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\rho\Big\{\cosh\rho\pi+\frac{A}{2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi+$$

$$+\frac{A\pi}{4}\frac{\cosh\rho x}{\rho}+\frac{AM'}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}-H\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}-\frac{AH}{2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi-$$

$$-\frac{AH\pi}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{3A}{4\pi}\frac{\cosh 3\rho\pi}{\rho^2}-\frac{AM'H}{4}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+$$
$$+\frac{A}{8\pi^2}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+\frac{A\nu^2}{4\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}-\frac{A\nu^2}{2\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\cosh 2\rho\pi-$$
$$-\frac{A\nu^2}{\pi^2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^3}\sinh 2\rho\pi-\frac{AH}{4\pi}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\Bigg\}$$

elde edilir.

$$\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}=1+$$
$$+\frac{\begin{array}{c}\frac{\cosh\rho\pi}{4\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\\ \hline \cosh\rho\pi+\frac{A}{2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi+\frac{A\pi}{4}\frac{\cosh\rho x}{\rho}+\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}-\end{array}}{}$$
$$\frac{+\frac{\sinh\rho\pi}{8\rho^3}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]+}{-\frac{AH}{2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi-\frac{AH\pi}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{3A}{4\pi}\frac{\cosh 3\rho\pi}{\rho^2}-} \tag{3.4.5}$$
$$\frac{+\frac{H}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\left[q(\pi)+q(0)\right]+}{-\frac{AM'H}{4}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A}{8\pi^2}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+\frac{A\nu^2}{4\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}-\frac{AH}{4\pi}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}-}$$
$$\frac{+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)}{-\frac{A\nu^2}{2\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\cosh 2\rho\pi-\frac{A\nu^2}{\pi^2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^3}\sinh 2\rho\pi+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)}$$

ifadesi bulunur.

Şimdi ise (3.4.4) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadede bulunan

$$\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)$$

fonksiyonun $\rho\to i\infty$ iken davranışı araştırılır. (3.4.5) ifadesinden yararlanılarak;

$$\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)=\ln\left(1+\frac{B_1(\rho)}{C_1(\rho)}\right)$$
$$=\frac{1}{4\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\frac{1}{8\rho^3}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]+\frac{H}{4}\frac{1}{\rho^3}\left[q(\pi)+q(0)\right]+$$
$$+\frac{e^{-2\rho\pi}}{4\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{e^{-2\rho\pi}}{8\rho^3}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]--\frac{H}{4}\frac{e^{-2\rho\pi}}{\rho^3}\left[q(\pi)+q(0)\right]$$

$$-\frac{A}{8}\frac{\ln\rho\pi}{\rho^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{A\pi}{16}\frac{1}{\rho^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]-$$
$$-\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{1}{4\rho^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\frac{A}{8}\frac{e^{-2\rho\pi}}{\rho^3}\ln\rho\pi\left[q(\pi)-q(0)\right]-$$
$$-\frac{A\pi}{16}\frac{e^{-2\rho\pi}}{\rho^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{e^{-2\rho\pi}}{4\rho^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]+O\left(\frac{\ln\rho}{\rho^4}\right)$$

elde edilir, burada,

$$B_1(\rho):=\frac{\cosh\rho\pi}{4\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\frac{\sinh\rho\pi}{8\rho^3}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]+$$
$$+\frac{H}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\left[q(\pi)+q(0)\right]+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right),$$

$$C_1(\rho):=\cosh\rho\pi+\frac{A}{2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi+\frac{A\pi}{4}\frac{\cosh\rho x}{\rho}+\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}-$$
$$-\frac{AH}{2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi-\frac{AH\pi}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{3A}{4\pi}\frac{\cosh 3\rho\pi}{\rho^2}-$$
$$-\frac{AM'H}{4}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A}{8\pi^2}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+\frac{A\nu^2}{4\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}-\frac{A\nu^2}{2\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\cosh 2\rho\pi-$$
$$-\frac{A\nu^2}{\pi^2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^3}\sinh 2\rho\pi-\frac{AH}{4\pi}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

dır. Dolayısıyla

$$\frac{d}{d\rho}\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)=-\frac{\pi e^{-2\rho\pi}}{2\rho}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{A\pi}{4}\frac{e^{-2\rho\pi}}{\rho^2}\ln\rho\pi\left[q(\pi)-q(0)\right]+$$
$$+\frac{\pi e^{-2\rho\pi}}{4\rho^2}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]+\frac{H}{2}\frac{\pi e^{-2\rho\pi}}{\rho^2}\left[q(\pi)+q(0)\right]+\frac{A\pi^2}{8}\frac{e^{-2\rho\pi}}{\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]-$$
$$-\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{\pi e^{-2\rho\pi}}{2\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{1}{2\rho^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

bulunur. Buradan

$$-\frac{\rho^3}{2}\frac{d}{d\rho}\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)=\frac{\pi}{4}\rho^2e^{-2\rho\pi}\left[q(\pi)-q(0)\right]+$$
$$+\frac{A\pi}{8}\rho e^{-2\rho\pi}\ln\rho\pi\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{\pi}{8}\rho e^{-2\rho\pi}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]-$$
$$-\frac{H\pi}{4}\rho e^{-2\rho\pi}\left[q(\pi)+q(0)\right]-\frac{A\pi^2}{16}\rho e^{-2\rho\pi}\left[q(\pi)-q(0)\right]+$$
$$+\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{\pi}{4}\rho e^{-2\rho\pi}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\frac{q(\pi)-q(0)}{4}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

olduğundan $\int\limits_0^\pi q(t)dt=0$ koşulu sağladığında

$$-\lim_{\rho\to i\infty}\frac{\rho^3}{2}\frac{d}{d\rho}\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)=\frac{q(\pi)-q(0)}{4}$$

eşitliği elde edilir. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda_n-\mu_n]=\frac{q(\pi)-q(0)}{4}$$

olur.

Şimdi benzer işlemler $\ell=2k$ için yapılırsa;

$$\psi(x,\rho)=i\sqrt{\rho x}e^{i\nu\pi/2}J_{-\nu}(i\rho x)+$$
$$+\frac{\pi}{2}\int_0^x\sqrt{xt}\left[J_\nu(i\rho t)J_{-\nu}(i\rho x)-J_{-\nu}(i\rho t)J_\nu(i\rho x)\right]\left(\frac{A}{t}+q(t)\right)\psi(t,\rho)dt$$

olduğundan birinci bölümde kullanılan yöntem uygulanarak $\psi(x,\rho)$ fonksiyonu için $\rho\to i\infty$ iken

$$\psi(x,\rho)=-(-1)^k e^{i\nu\pi/2}\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\left\{\sinh\rho x+\frac{A}{2}\frac{\cosh\rho x}{\rho}\ln\rho x-\frac{A\pi}{4}\frac{\sinh\rho x}{\rho}+\right.$$
$$+\frac{\cosh\rho x}{2\rho}\left[-\int_0^x q(t)dt+\frac{AM'}{2}\right]+\frac{\sinh\rho x}{4\rho^2}[q(x)+q(0)]+\frac{A}{4x}\frac{\sinh 3\rho x}{\rho^2}+$$
$$+\frac{A}{8x^2}\frac{\cosh 3\rho x}{\rho^3}+\frac{A\nu^2}{4x^2}\frac{\cosh\rho x}{\rho^3}-\frac{\cosh\rho x}{8\rho^3}[q'(x)-q'(0)]-$$
$$\left.-\frac{A\nu^2}{2x^2}\frac{\cosh\rho x}{\rho^3}\cosh 2\rho x+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\right\}$$

elde edilir. Bu durumda $\psi'(x,\rho)$ fonksiyonu için $\rho\to i\infty$ iken

$$\psi'(x,\rho)=-(-1)^k e^{i\nu\pi/2}\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\left\{\rho\cosh\rho x+\frac{A}{2}\sinh\rho x\ln\rho x-\frac{A\pi}{4}\cosh\rho x+\right.$$
$$+\frac{\sinh\rho x}{2}\left[-\int_0^x q(t)dt+\frac{AM'}{2}\right]+\frac{A}{2}\frac{\cosh\rho x}{\rho x}-\frac{\cosh\rho x}{4\rho}[q(x)-q(0)]+$$
$$+\frac{3A}{4x}\frac{\cosh 3\rho x}{\rho}-\frac{A}{4x^2}\frac{\sinh 3\rho x}{\rho^2}+\frac{3A}{8x^2}\frac{\sinh 3\rho x}{\rho^2}+\frac{A\nu^2}{4x^2}\frac{\sinh\rho x}{\rho^2}-$$
$$-\frac{\sinh\rho x}{8\rho^2}[q'(x)-q'(0)]-\frac{A\nu^2}{2x^2}\frac{\sinh\rho x}{\rho^2}\cosh 2\rho x-\frac{A\nu^2}{x^2}\frac{\cosh\rho x}{\rho^2}\sinh 2\rho x-$$
$$-\frac{A}{4x^3}\frac{\cosh 3\rho x}{\rho^3}-\frac{A\nu^2}{2x^3}\frac{\cosh\rho x}{\rho^3}-\frac{\cosh\rho x}{8\rho^3}q''(x)+$$
$$\left.+\frac{A\nu^2}{x^3}\frac{\cosh\rho x}{\rho^3}\cosh 2\rho x+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\right\}$$

davranışı bulunur.

$$\psi'(\pi,\rho) - H\psi(\pi,\rho) = -(-1)^k e^{i\nu\pi/2}\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\rho\left\{\cosh\rho\pi + \frac{A}{2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi - \right.$$

$$-\frac{A\pi}{4}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho} + M_2'\frac{\sinh\rho\pi}{\rho} - H\frac{\sinh\rho\pi}{\rho} - \frac{AH}{2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi + \frac{AH\pi}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^2} +$$

$$+\frac{A}{2\pi}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2} - \frac{\cosh\rho\pi}{4\rho^2}[q(\pi)-q(0)] + \frac{3A}{4\pi}\frac{\cosh 3\rho\pi}{\rho^2} - HM_2'\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2} +$$

$$+\frac{A}{8\pi^2}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3} + \frac{A\nu^2}{4\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3} - \frac{\sinh\rho\pi}{8\rho^3}[q'(\pi)-q'(0)] - \frac{A\nu^2}{2\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\cosh 2\rho\pi -$$

$$\left. -\frac{A\nu^2}{\pi^2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^3}\sinh 2\rho\pi - H\frac{\sinh\rho\pi}{4\rho^3}[q(\pi)+q(0)] - \frac{AH}{4\pi}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\right\}$$

Burada $M_2' := \dfrac{AM'}{2} - \displaystyle\int_0^x q(t)dt$ dır.

Benzer şekilde

$$\psi_0'(\pi,-\rho) - H\psi_0(\pi,-\rho) = (-1)^k e^{i\nu\pi/2}\sqrt{\frac{2}{\pi i}}\rho\left\{\cosh\rho\pi + \frac{A}{2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi - \right.$$

$$-\frac{A\pi}{4}\frac{\cosh\rho x}{\rho} + \frac{AM'}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho} - H\frac{\sinh\rho\pi}{\rho} - \frac{AH}{2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi +$$

$$+\frac{AH\pi}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^2} + \frac{A}{2\pi}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2} + \frac{3A}{4\pi}\frac{\cosh 3\rho\pi}{\rho^2} - \frac{AM'H}{4}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2} +$$

$$+\frac{A}{8\pi^2}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3} + \frac{A\nu^2}{4\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3} - \frac{A\nu^2}{2\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\cosh 2\rho\pi -$$

$$\left. -\frac{A\nu^2}{\pi^2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^3}\sinh 2\rho\pi - \frac{AH}{4\pi}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)\right\}$$

elde edilir.

$$\frac{\psi'(\pi,\rho) - H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho) - H\psi_0(\pi,\rho)} = 1 +$$

$$\frac{-\dfrac{\cosh\rho\pi}{4\rho^2}[q(\pi)-q(0)] -}{\cosh\rho\pi + \dfrac{A}{2}\dfrac{\sinh\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi - \dfrac{A\pi}{4}\dfrac{\cosh\rho x}{\rho} + \left(\dfrac{AM'}{4} - H\right)\dfrac{\sinh\rho\pi}{\rho} -}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{-\dfrac{\sinh\rho\pi}{8\rho^3}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]-}{-\dfrac{AH}{2}\dfrac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi+\dfrac{AH\pi}{4}\dfrac{\sinh\rho\pi}{\rho^2}+\dfrac{A}{2\pi}\dfrac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\dfrac{3A}{4\pi}\dfrac{\cosh 3\rho\pi}{\rho^2}-} \\
&\frac{-\dfrac{H}{4}\dfrac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\left[q(\pi)+q(0)\right]+}{-\dfrac{AM'H}{4}\dfrac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\dfrac{A}{8\pi^2}\dfrac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+\dfrac{A\nu^2}{4\pi^2}\dfrac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}-\dfrac{AH}{4}\dfrac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}-} \qquad (3.4.6)\\
&\frac{+O\left(\dfrac{1}{\rho^4}\right)}{-\dfrac{A\nu^2}{2\pi^2}\dfrac{\sinh\rho\pi}{\rho^2}\cosh 2\rho\pi-\dfrac{A\nu^2}{\pi^2}\dfrac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\sinh 2\rho\pi+O\left(\dfrac{1}{\rho^4}\right)}
\end{aligned}
$$

ifadesi bulunur.

Şimdi ise (3.4.4) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadede bulunan

$$
\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)
$$

fonksiyonun $\rho\to i\infty$ iken davranışı araştırılır. (3.4.6) ifadesinden yararlanılarak;

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)=\ln\left(1+\frac{B_2(\rho)}{C_2(\rho)}\right)\\
&=-\frac{1}{4\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{1}{8\rho^3}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]-\frac{H}{4}\frac{1}{\rho^3}\left[q(\pi)+q(0)\right]-\\
&-\frac{e^{-2\mu\pi}}{4\mu^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\frac{e^{-2\mu\pi}}{8\mu^3}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]+\frac{H}{4}\frac{e^{-2\mu\pi}}{\mu^3}\left[q(\pi)+q(0)\right]+\\
&+\frac{A}{8}\frac{\ln\mu\pi}{\mu^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{A\pi}{16}\frac{1}{\mu^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\\
&+\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{1}{4\mu^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{A}{8}\frac{e^{-2\mu\pi}}{\mu^3}\ln\mu\pi\left[q(\pi)-q(0)\right]+\\
&+\frac{A\pi}{16}\frac{e^{-2\mu\pi}}{\mu^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{e^{-2\mu\pi}}{4\mu^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]+O\left(\frac{\ln\mu}{\mu^4}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir, burada,

$$
\begin{aligned}
&B_2(\rho):=-\frac{\cosh\rho\pi}{4\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{\sinh\rho\pi}{8\rho^3}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]-\\
&-\frac{H}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}\left[q(\pi)+q(0)\right]+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
C_2(\rho):=\cosh\rho\pi+\frac{A}{2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}\ln\rho\pi-\frac{A\pi}{4}\frac{\cosh\rho x}{\rho}+\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{\sinh\rho\pi}{\rho}-
$$

$$-\frac{AH}{2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\ln\rho\pi+\frac{AH\pi}{4}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{3A}{4\pi}\frac{\cosh 3\rho\pi}{\rho^2}-$$
$$-\frac{AM'H}{4}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}+\frac{A}{8\pi^2}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+\frac{A\nu^2}{4\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^3}-\frac{A\nu^2}{2\pi^2}\frac{\sinh\rho\pi}{\rho^2}\cosh 2\rho\pi-$$
$$-\frac{A\nu^2}{\pi^2}\frac{\cosh\rho\pi}{\rho^2}\sinh 2\rho\pi-\frac{AH}{4}\frac{\sinh 3\rho\pi}{\rho^3}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

dır. Dolayısıyla

$$\frac{d}{d\rho}\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)=\frac{\pi e^{-2\rho\pi}}{2\rho}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\frac{A\pi}{4}\frac{e^{-2\rho\pi}}{\rho^2}\ln\rho\pi\left[q(\pi)-q(0)\right]-$$
$$-\frac{\pi e^{-2\rho\pi}}{4\rho^2}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]-\frac{H}{2}\frac{\pi e^{-2\rho\pi}}{\rho^2}\left[q(\pi)+q(0)\right]-\frac{A\pi^2}{8}\frac{e^{-2\rho\pi}}{\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]+$$
$$+\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{\pi e^{-2\rho\pi}}{2\rho^2}\left[q(\pi)-q(0)\right]+\frac{1}{2\rho^3}\left[q(\pi)-q(0)\right]+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

bulunur. Buradan

$$-\frac{\rho^3}{2}\frac{d}{d\rho}\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)=-\frac{\pi}{4}\rho^2e^{-2\rho\pi}\left[q(\pi)-q(0)\right]-$$
$$-\frac{A\pi}{8}\rho e^{-2\rho\pi}\ln\rho\pi\left[q(\pi)-q(0)\right]+\frac{\pi}{8}\rho e^{-2\rho\pi}\left[q'(\pi)-q'(0)\right]+$$
$$+\frac{H\pi}{4}\rho e^{-2\rho\pi}\left[q(\pi)+q(0)\right]+\frac{A\pi^2}{16}\rho e^{-2\rho\pi}\left[q(\pi)-q(0)\right]-$$
$$-\left(\frac{AM'}{4}-H\right)\frac{\pi}{4}\rho e^{-2\rho\pi}\left[q(\pi)-q(0)\right]-\frac{q(\pi)-q(0)}{4}+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

olduğundan $\int_0^{\pi} q(t)dt=0$ koşulu sağlandığında

$$-\lim_{\rho\to i\infty}\frac{\rho^3}{2}\frac{d}{d\rho}\ln\left(\frac{\psi'(\pi,\rho)-H\psi(\pi,\rho)}{\psi_0'(\pi,\rho)-H\psi_0(\pi,\rho)}\right)=-\frac{q(\pi)-q(0)}{4}$$

eşitliği elde edilir. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n-\mu_n\right]=-\frac{q(\pi)-q(0)}{4}$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlandı.

Teorem 3.4.1: Eğer $\int_0^{\pi} q(t)dt=0$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n-\mu_n\right]=(-1)^{\ell+1}\frac{q(\pi)-q(0)}{4}$$

eşitliği doğrudur.

KAYNAKLAR

[1]. V.A. Ambartsumyan, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53 (1929), 690-695.

[2]. G.Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78 (1945), 1-96.

[3]. V.A. Marchenko, Some Problems in the Theory of Second-Order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72 (1950), 457-560.

[4]. M.G. Krein, Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76 (1951), 21-24.

[5]. M.G. Krein, On a Method of the Effective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95 (1954), 767-770.

[6] A.N. Tichknov, Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 1949, 797-800.

[7]. I.M. Gelfand and B. M. Levitan, On the Determmination of a Differential Equation by its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 15 (1951), 309-360.

[8]. M.G. Gasimov and B. M. Levitan, About Sturm-Liouville Differential. Operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3, (1964).

[9] B.Y. Wolk, Transform Operator for Differential Equations Singularity in Point $x = 0$., Survey Math. Sci., Vol 8, No 4(56), (1953), 141-151.

[10] V.V. Stasevskaya, Inverse Problems of Spectral Analysis for a Class Differential Equations., Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol. 93, No 3, (1953), 409-412.

[11] V.V. Stasevskaya, Inverse Problems for Spectral Analysis of Differential Operators Singularity in Point $x = 0$., Kharkiv Univ. Bilimsel Yayınlar Dergisi, Vol 25, No 4, (1957), 49-86.

[12] M.M. Cramm, Associated Sturm-Liouville Systems, Quart. J. Math., Oxford (2), Vol 6, No 2, (1955), 121-128.

[13]. M.G. Gasimov, Determination of Singular Sturm-Liouville Operators According to two Spectrums., Dokl. Akad., Nauk SSSR, vol. 161. No.2, (1965), 274-276.

[14]. M.G. Gasimov, R. Kh. Amirov, Direct and Inverse Spectral Problems for Second order Differential Operators which has Coulumb Singularity., Dokl. Akad., Nauk Az.SSR, vol. 41. No.8, (1985), 1-5.

[15]. H. Hüseynov and Z. M. Gasimov, Young Scientists, The Catalog of abstract of among University Conference, Sankt-Petersburg, (1992), 73.

[16] V.A. Yurko, On Recovering Sturm-Liouville Differential Operators with Singularities inside the Interval, Math. Notes, No 1, 64 (1998), 121-132.

[17] M.G. Gasimov, About an Inverse Problem for Sturm-Liouville Equation, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol. 154, No. 2, (1964).

[18] V.A. Marchenko, Reconstruction of the Potential Energy from the Phases of the Scattered Waves, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 104 (1955), 590-622.

[19] R. Carlson, A Borg-Levinson Theorem for Bessel Operators., Pacific Journal of Math., Vol. 177, No.1, (1997), 1-26.

[20] Z.S. Agranovich and V.A. Marchenko, The Inverse Problem in the Theory of Scattering, Kharkov Univ., (1960).

[21] L.D. Faddeev, The Inverse Problem in the Quatum Theory of Scattering, Uspekhi Math. Nauk. 14 (1959), No.4, 57-119.

[22] V.A. Marchenko, Theorems of Tauberian Typein the Spectral Theory of Differential Operators, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 19 (1955), 381-422.

[23] B.M. Levitan, On the Asymptotic Behavior of the Spectral Function and on the Eigenfunction Expansion for a Self-Adjoint Second-Order Differential Operator, I, Izv.Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 17 (1953), 331-364.

[24] B.M. Levitan, On the Asymptotic Behavior of the Spectral Function and on the Eigenfunction Expansion for a Self-Adjoint Second-Order Differential Operator, II, Izv.Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 19 (1955), 33-58.

[25] V.B. Uvarov, Dissertation, Moscow (1962).

[26] V.A. Marchenko, Some Problems in the Theory of One-Dimensional Linear Second-Order Differential Operator, I, Trudy Moskov. Math. Obshch. (1952), 327-420.

[27] E.C. Titchmarsh, Eigenfunctions Expansions Associated with Second-Order Differential Equations, Oxford Univ. Press., 2nd edition, (1962).

[28] N. Levinson, Gap and Density Theorems, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, No.26, Providence, R.I., (1940).

[29] B.Ya. Levin, Distribution of Zeros of Entire Functions. Moscow,(1956).

[30] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Moskow, (1950).

[31] V.A. Marchenko, Eigenfunction Expansions for Non-Self-Adjoint Singular Second-Order Differential Operators, Math. Sb. 52 (94), (1960), 739-788.

[32] M.G. Gasimov, Determination of a Sturm-Liouville Differential Equation by two of its Spectra, Dissertation, Moscow, (1950).

[33] A.Ya. Povsner, On Differential Equations of the Sturm-Liouville Type on a Semi-Axis, Math. Sb. 23 (65) (1948), 3-52.

[34] B.M. Levitan, Generalized Translation Operators and Some of their Applications, Moscow, (1962).

[35] N.Levinson, The Inverse Sturm-Liouville Problem., Math.Tidsskrift B (1949), 25-30.

[36] M. G. Krein, On the Transfer Function of a One-Dimensional Second-Order Boundary Value Problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 88, (1953), 405-408.

[37] B.M. Levitan, On the Determination of a Sturm-Liouville Differential Equation by two of its Spectra, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 150, (1963), 474-476.

[38] B.M. Levitan, On the Determination of a Differential Equation by two of its Spectra, Izv. Akad. Nauk SSSR 28 (1964), 63-78.

[39] M.G. Gasimov and B. M. Levitan, On the Sum of the Differences of the Eigenvalues of two Singular Sturm-Liouville Operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 151, (1963), 1014-1017.

[40] M.G. Gasimov and B. M. Levitan, On Sturm-Liouville Differential Operators, Math. Sb. 63 (105) (1964), 445-458.

[41] M.G. Gasimov, On the Inverse Problem for the Sturm-Liouville Equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR 154 (1964), 254-257.

[42] B.M. Levitan, Letter to the Editor, Survey Math. Nauk. 18 (1963), No. 4, 239-241.

[43] B.M. Levitan and I.S. Sargsyan, Some Problems in the theory of Sturm-Liouville Equations, Uspekhi Math. Nauk. 15 (1960), No. 1, 3-98.

[44] R.Courant and D.Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. 1, Moscow, (1951).

[45] E.A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Mcgraw-Hill Book Company, Inc. Newyork-Tronto-London, 1955.

[46] L.V. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill book company, Inc., Newyork-Tronto-London, 1953.

[47] Z.X. Wang, D.R. Guo, Special Functions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore-New Yersey-London-Hong Kong, (1989)

[48] R.Kh. Amirov and S. Gulyaz, Inverse Spectral Problem for the Differential Equation of the Second Order with Singularity., Proceeding of the Eigth Int. Colloqulum on Differential Equations Plovdiv ,Bulgaria, 18-23 August,1998, 17-24.

[49] R.Kh. Amirov, S. Gulyaz, Inverse Problem for the Sturm-Liouville According to a Specturm and Normalizing., Proceeding of the Ninth Int. Colloqulum on Differential Equations Plovdiv ,Bulgaria, 18-23 August,1999, 15-22

ÖZGEÇMİŞ

Selma GÜLYAZ 1970 yılında Sivas' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sivas' da tamamladı. 1989 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 1993 yılında mezun oldu. 1994 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak işe başladı. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Yüksek Lisans sınavını kazanarak, Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve buradan 1996 yılında mezun oldu. Halen Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.