ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Barış ALBAYRAK

Danışman
Prof. Dr. Neşet AYDIN

Aralık, 2007
ÇANAKKALE

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Barış ALBAYRAK

Danışman

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Aralık, 2007

ÇANAKKALE

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında bana her yönden destek olan tez danışmanım sayın Prof.Dr.Neşet AYDIN'a ve her türlü zorlukta arkamda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Barış ALBAYRAK

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

ÖZET

Bu çalışmada, karakteristiği 2'den farklı olan halkalarda komütatiflik koşullarını inceleyen makaleler özetlenmiş, d türevi için bulunan sonuçları genelleştirilmiş türev için uygulayan makaleler ve genelleştirilmiş türevli halkaların bazı özelliklerini veren makaleler incelenmiştir.

Bölüm 2'de, halkalarla ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir.

Bölüm 3'te, genelleştirilmiş türevli ve genelleştirilmiş (α, β)-türevli asal halkaların özelliklerini ve komütatiflik koşullarını inceleyen bazı makaleler verilmiştir.

Bölüm 4'de, türevli bir asal halkanın I ideali için yapılan çalışmaları, genelleştirilmiş türeve genişleten bazı makaleler verilmiştir.

Bölüm 5'te, genelleştirilmiş türevli asal halkalarda I ideali için yapılan çalışmaları Lie ideale genişleten bazı makaleler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asal Halka, Türev, Genelleştirilmiş Türev.

GENERALIZED DERIVATIONS IN PRIME RINGS

ABSTRACT

In this research, articles that commutativity in rings with characteristic different than 2 have been summarized and some properties about rings with generalized derivation have been given.

Some general information about rings have been given in chapter 2.

In chapter 3, some papers that search for commutativity conditions of prime rings with generalized derivation and generalized (α,β)- derivartion have been given.

In chapter 4, articles have been given that generalize the studies carried out for Ideal I of prime rings with derivation to the generalized derivation.

In chapter 5, some articles have been given that generalize the studies carried out for Ideal I of prime rings with derivation to the Lie Ideal.

Keywords: Prime ring, derivation, generalized derivation.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

R bir halka, $d : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise, d'ye R halkası üzerinde bir türev denir.

Bir R halkasında, Z merkez, $[x,y] = xy - yx$, $x \circ y = xy + yx$ olmak üzere aşağıdaki koşulları düşünelim.

a) Her $x \in R$ için $[d(x),x] = 0$

b) Her $x \in R$ için $[d(x),x] \in Z$

c) $a \in R$ için $ad(R) = 0$

d) Her $x, y \in R$ için $[d(x),d(y)] = 0$

e) $d^2(R) \subset Z$

f) Her $x \in R$ için $d(x) \circ y = 0$

g) Her $x \in R$ için $d(x) \circ y \in Z$

h) $d(R) \subset Z$

i) $d_1 ,d_2 : R \to R$ iki türev olmak üzere $d_1 d_2 (R) = 0$

j) Her $x, y \in R$ için $d([x,y]) = [x,y]$

Yukarıdaki koşullardan birini sağlayan halkaların komütatifliği, pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. İlk önce R halkası üzerinde yapılan çalışmalar, daha sonra R halkası yerine onun bir I ideali alınarak genelleştirilmiştir. Bundan sonra I ideali yerine tek yanlı ideal ve Lie ideali alınarak, yapılan çalışmalarla daha da genelleştirilmiştir. Diğer taraftan da türev yerine, (α,β)-türev, genelleştirilmiş türev, genelleştirilmiş (α,β)-türev alınarak, önceki çalışmalar genelleştirilmiştir. Bu çalışmalarla ilgili örnekler aşağıda verilmiştir.

Posner [32] de, d_1 ve d_2 karakteristiği 2'den farklı R asal halkasının iki türevi olmak üzere $d_1 d_2$ türev ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olduğunu ispatladı. Ayrıca Lanski [25,26] da, d_1 ve d_2, $[d_1(x),d_2(x)] = 0$ şartını sağlayan türevleri incelemiştir. Bölüm 3'te bu koşullar genelleştirilmiş türeve sahip halkalar için incelenmiştir. [29] da T.K.Lee her genelleştirilmiş türevin, $Q_r(R)$ halkasının genelleştirilmiş türevine teklikle genişletilebileceğini gösterdi. Bölüm 3'te bu koşullara sahip genelleştirilmiş türevlerle ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir.

I.N.Herstein [21] de, d, karakteristiği 2'den farklı R asal halkasının türevi olmak üzere (d) koşulu altında halkanın komütatif olduğunu ispatladı. Bu teorem $[d(R),d(R)] \subseteq Z$ koşulu altında P.H.Lee ve T.K.Lee tarafından genelleştirildi. Aynı teorem U Lie ideal ve alt halka olmak üzere $[d(u),u] \in Z$ koşulu altında R. Awtar tarafından genelleştirildi. Bölüm 3'te bu koşulun genelleştirilmiş türevlere genişletilmesiyle ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir.

Daif ve Bell [13] de (j) koşulunu sağlayan türevler için halkanın komütatif olma şartlarını incelediler. Bölüm 4'te bu koşulu, halkanın ideali ve genelleştirilmiş türev için inceleyen makaleler verilmiştir.

Herstein. [22] de, $a \in R$ $[d(R),a] = 0$ ise $a = 0$ veya R halkasının komütatif olduğunu ispatladı. $[d(R),a] \subset Z$ koşulu altında P.H.Lee ve T.K.Lee tarafından [27] de ve $d^2(I) \subset Z$ ve $[a,d(I)] \subset Z$ koşulu altında [28] de R halkasının idealine genişletildi. Bölüm 5'te bu koşulların, genelleştirilmiş türevlere genişletildiği makaleler verilmiştir.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1: I, R halkasının sıfırdan farklı toplamsal alt grubu olsun. Eğer $\forall\, a \in I$, $\forall\, r \in R$ için, ar, $ra \in I$ oluyorsa I ya R halkasının bir ***ideali*** denir.

Tanım 2.2: R bir halka ve A, B, P onun idealleri olsun. AB $\subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının ***asal ideali*** denir.

Teorem 2.3: R bir halka ve P onun ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) P asal idealdir.

(2) a, b $\in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) a, b $\in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(4) U, V R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$

(5) U, V R halkasının iki sağ ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$

Tanım 2.4: (0) ideali asal ideal olan halkaya ***asal halka*** denir.

Önerme 2.5: R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) R asal halkadır.

(2) a, $b \in R$ için aRb=(0) ise a=0 veya b=0 dır.

(3) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

(4) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 2.6: R bir halka A ve Q , R halkasının iki ideali olsun. $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ oluyorsa Q idealine R halkasının ***yarı asal ideali*** denir.

Teorem 2.7: R bir halka Q onun bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) Q yarı asal idealdir.

(2) $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(3) $a \in R$ için $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur.

(4) U R halkasının bir sağ ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

(5) U R halkasının bir sol ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

Tanım 2.8: R bir halka A onun ideali olsun. A idealinin keyfi olarak alınan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemanları için $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$ ise A ya R halkasının ***nilpotent ideali*** denir.

Tanım 2.9: Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya ***yarı asal halka*** denir.

Uyarı 2.10: Bir R halkasının yarı asal olması için gerek ve yeter koşul, $a \in R$ için aRa = 0 olduğunda a = 0 olmasıdır.

Tanım 2.11: $\forall a \in R$ için na = 0 olacak biçimde $n \in Z^+$ tamsayısı varsa bunların en küçüğüne R halkasının ***karakteristiği*** denir ve char R = n ile gösterilir. Eğer böyle bir pozitif tamsayı yoksa halkanın karakteristiği sıfırdır.

Tanım 2.12: R bir halka $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. $\forall x \in R$ için mx = 0 olduğunda x = 0 oluyorsa R halkasına ***m-torsion free halka*** denir.

Önerme 2.13: R asal halka olsun. a, b $\in R$ için ab, b $\in Z$ ise b = 0 veya $a \in Z$ dir.

Gösterim 2.14: $x,y \in R$ olmak üzere R halkasının xy – yx elemanını [x,y] ile, xy + yx elemanını $x \circ y$ ile gösterelim ve bu gösterimlere sırasıyla ***Lie komütatör*** ve ***Jordan komütatör*** diyelim.

Yine σ, τ R halkasının iki dönüşümü olmak üzere x, y $\in R$ için $[x,y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$ ve $(x,y)_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) + \tau(y)x$ ifadelerine de sırasıyla ***(σ,τ)-Lie komütatör*** ve ***(σ,τ)-Jordan komütatör*** diyelim.

Uyarı 2.15: (σ,τ)-Lie komütatörü için σ ve τ dönüşümleri olarak $1{:}R \rightarrow R$ birim dönüşüm alınırsa $[x,y]_{1,1} = xy - yx = [x,y]$ olur.

Tanım 2.16: R bir halka ve A, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. $\forall$ a, b $\in A$ için ab – ba $\in A$ oluyorsa A'ya R halkasının ***Lie alt halkası*** denir.

Tanım 2.17: A R halkasının bir Lie alt halkası ve $U \subseteq A$ toplamsal alt grubu olsun. $\forall u \in U$, $\forall a \in A$ için $ua - au \in U$ oluyorsa U'ya A'nın bir ***Lie ideali*** denir.

Bu tanımdan yola çıkarak R halkasının U toplamsal alt grubu için $[U,R] \subseteq U$ oluyorsa U'ya R halkasının Lie ideali denir.

Tanım 2.18: R bir halka σ, τ: $R \rightarrow R$ iki dönüşüm olsun. R halkasının U toplamsal alt grubu için,

(1) $[U,R]_{\sigma,\tau} \subseteq U$ ise U'ya R halkasının ***(σ,τ)-sağ Lie ideali*** denir.

(2) $[R,U]_{\sigma,\tau} \subseteq U$ ise U'ya R halkasının ***(σ, τ)-sol Lie ideali*** denir.

(3) U, R halkasının hem (σ, τ)-sağ Lie ideali hem de (σ, τ)-sol Lie ideali ise U ya R halkasının***(σ, τ) - Lie ideali*** denir.

R halkasının her Lie ideali 1, R'nin özdeşlik dönüşümü olmak üzere (1, 1)-sağ, sol Lie idealidir.

Sık kullanılan bağıntılar:

(i) $[x,y+z] = [x,y] + [x,z]$

(ii) $[x+y,z] = [x,z] + [y,z]$

(iii) $[xy,z] = [x,z]y + x[y,z]$

(iv) $[x,yz] = [x,y]z + y[x,z]$

(v) $[xy,z]_{\sigma,\tau} = x\,[y,z]_{\sigma,\tau} + [x\,,\tau(z)]y = x[y,\sigma(z)] + [x,z]_{\sigma,\tau}\,y$

(vi) $[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau} = [[x,z]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau} + [x,[y,z]]_{\sigma,\tau}$

(vii) $[x,yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\,\sigma(z)$

(viii) $(x,yz)_{\sigma,\tau} = \tau(y)(x,z)_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\,\sigma(z)$

(ix) $(xy,z)_{\sigma,\tau} = x(y,z)_{\sigma,\tau} - [x,\tau(z)]y$

Tanım 2.19: $Z = \{ r\in R \mid rx = xr\ ,\ \forall x\in R \} = \{ r\in R \mid [r,x] = 0\ ,\ \forall x\in R \}$ kümesine R halkasının ***merkezi*** denir.

Tanım 2.20: d: $R\to R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer,

$d(xy) = d(x)y + xd(y),\ \forall\, x,y\in R$

ise d ye R halkasının ***türevi*** denir.

Tanım 2.21: $a\in R$ sabit bir eleman olmak üzere $d_a : R\to R$ dönüşümü, $x\in R$ için

$d_a(x) = [a,x]$

olarak tanımlansın. d_a dönüşümüne R halkasının a elemanı tarafından belirlenmiş ***iç türevi*** denir.

Tanım 2.22: R bir halka ve $d:R\to R$ toplamsal dönüşüm olsun. $\forall\, x\in R$ için $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$ ise o zaman d dönüşümüne R halkasının ***Jordan türevi*** denir.

Tanım 2.23: $d : R\to R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer,

$$d(xy) = d(x)y + x\alpha(y) \ , \forall \ x,y \in R$$

olacak şekilde R halkasının bir α türevi varsa, d 'ye R halkasının ***genelleştirilmiş türevi*** denir ve genellikle (d, α) ile gösterilir.

R bir halka olsun. a, b $\in$ R için, d : R $\to$ R , d(x) = ax + xb ile tanımlanan dönüşüm olsun. Bu durumda

$$d(x + y) = d(x) + d(y)$$

$$d(xy) = d(x)y + I_b(y)$$

koşullarını sağlar.

Tanım 2.24 : a,b $\in$ R olmak üzere, $\forall$ x $\in$ R için

$$d(x) = ax + xb$$

ile tanımlı d : R $\to$ R dönüşümüne ***genelleştirilmiş iç türev*** denir.

Tanım 2.25: R bir halka ve α, β R halkasının otomorfizmleri olsun. δ:R $\to$ R ye toplamsal dönüşümü için δ(xy) = δ(x) α(y) + β(x)δ(y) şartı sağlanıyorsa δ ya, **(** α,β **) -** *türev* denir.

Tanım 2.26: a $\in$ R olmak üzere $\forall$ x $\in$ R için

$$\delta(x) = a\alpha(x) - \beta(x)a$$

ile tanımlı δ : R $\to$ R dönüşümüne, a $\in$ R ile belirlenmiş **(** α,β ***)-iç türev*** denir.

Tanım 2.27: R bir halka ve α , β R halkasının otomorfizmleri ve δ, (α,β)-türevi olsun. f:R $\to$ R ye toplamsal dönüşümüne ,

(1) f(xy) = f(x)α(y) + β(x)δ(y) şartını sağlıyorsa sol genelleştirilmiş (α,β)-türev denir.

(2) f(xy) = δ(x)α(y) + β(x)f(y) şartını sağlıyorsa sağ genelleştirilmiş (α,β)-türev denir.

Eğer f hem sağ hem de sol genelleştirilmiş (α,β)- türevse **genelleştirilmiş (** α,β **)-türev** olarak adlandırılır.

Tanım 2.28 : K bir toplamsal abelian grup olmak üzere,

$$KxR \to K \ , (k,r) \to kr \qquad RxK \to K \ , (r,k) \to rk$$

İşlemleri tanımlansın. Eğer $\forall k, k_1, k_2 \in$ K ve $\forall r, r_1, r_2 \in$ R için,

(i) $k(r_1 + r_2) = kr_1 + kr_2$

(ii) $(k_1 + k_2)r = k_1 r + k_2 r$

(iii) $k(r_1r_2) = (kr_1)r_2$

özellikleri sağlanırsa K ya bir *sağ R-modül*,

(i) $(r_1 + r_2)k = r_1k + r_2k$

(ii) $r(k_1 + k_2) = rk_1 + rk_2$

(iii) $(r_1r_2)k = r_1(r_2k)$

özellikleri sağlanırsa K ya bir *sol R-modül* denir. Her ikiside sağlanıyorsa K ya *R-bimodül* denir.

Tanım 2.29: R ve S iki halka ve f:R$\rightarrow$S toplamsal dönüşüm olsun.

f(xy) = f(x)f(y) , $\forall$ x,y$\in$R ise f dönüşümüne *halka homomorfizması*,

f(xy) = f(y)f(x) , $\forall$ x,y$\in$R ise f dönüşümüne *ters- homomorfizma* denir.

Tanım 2.30: R halka, A ve B R-modül olsun. f:A$\rightarrow$B dönüşümü, r$\in$R, $a, a_1, a_2 \in$ A için

(i) $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

(ii) $f(ar) = f(a)r$

(iii) $f(ra) = r f(a)$

koşullarını sağlıyorsa f dönüşümüne bir ***R-modül homomorfizması*** denir.

Tanım 2.31 : R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. U dan R içine olan tüm sağ R-modül homomorfizmalarının kümesine *M* diyelim.

$M = \{ (U, f) \mid f : U \rightarrow R$ sağ R-modül homomorfizması $\}$

M üzerinde bir " ~ " denklik bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

"$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow$ R nin sıfırdan farklı bir W$\subseteq$ U$\cap$V ideali üzerinde $f = g$ dir"

M kümesinin bir (U, f) elemanının denklik sınıfını $\overline{(U, f)}$ ile gösterelim. *M* nin denklik sınıflarının kümesine *Q(R)* diyelim. *Q(R)* kümesi aşağıdaki işlemler altında R yi kapsayan bir asal halkadır.

$\overline{(U, f)} + \overline{(V, g)} = \overline{(U \cap V, f + g)}$

$\overline{(U, f)}\ \overline{(V, g)} = \overline{(VU, fg)}$

Q(R) halkasına ***Martindale kesirler halkası*** denir. Burada f:U$\rightarrow$R sağ R-modül homomorfizması (sol R-modül homomorfizması) ise $\overline{(U, f)}$ denklik sınıflarının kümesine *sağ (sol)Martindale kesirler halkası* denir ve $Q_r(R)$ ($Q_l(R)$) ile gösterilir.

Q(R) nin merkezine R asal halkasının ***genişletilmiş merkezi*** *(extended centroid)* denir ve C ile gösterilir. Üstelik bir R asal halkasının genişletilmiş merkezi bir cisimdir.

R asal halkasının sağ Martindale kesirler halkası $Q_r(R)$ aşağıdaki özellikler yardımıyla karakterize edilebilir:

(i) R$\subseteq Q_r(R)$

(ii) q$\in Q_r(R)$ için qU$\subseteq$ R olacak biçimde R halkasının sıfırdan farklı bir U ideali vardır.

(iii) q$\in Q_r(R)$ve R halkasının sıfırdan farklı herhangi bir U ideali için qU = 0 ise o zaman q = 0 dır.

(iv) R halkasının sıfırdan farklı bir ideali U ve φ:U$\rightarrow$R sağ R-modül dönüşümü ise o zaman $\forall x \in$U için $\varphi(x) = qx$ olacak şekilde q$\in Q_r(R)$ vardır.

Tanım 2.32 : R_C **=** RC halkasına R nin ***merkezi kapanışı*** *(central closure)* denir. R_C bir asal halkadır.

Tanım 2.33 : $q_1, q_2, ..., q_n \in Q_r(R)$ ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in$C olmak üzere

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \cdots + \lambda_n q_n = 0$$

olduğunda $\forall i \in$ {1,...,n} için $\lambda_i = 0$ oluyorsa q_i elemanlarına *C-bağımsız*, en az bir $i \in$ {1,...,n} için $\lambda_i \neq 0$ olmak üzere yukarıdaki eşitlik gerçekleniyorsa q_i elemanlarına ***C-bağımlıdır*** denir.

Lemma 2.34: (Brauer's Trick) Bir G grubu iki özalt grubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat: A, G nin altgrubu olsun. 0 toplamsal birim olmak üzere,

A$\neq$ {0} ve A$\neq$G$\Rightarrow$A özaltgruptur.

A ve B, G nin iki özaltgrubu olsun ve G=A$\cup$B şeklinde yazılsın. Kabul edelim ki G$\neq$A olsun.G=B olduğunu gösterelim.

G$\neq$A olduğundan x$\in$G ve x$\notin$A olacak bir x elemanı vardır. G=A$\cup$B olduğundan x$\in$B dir.

<u>İddia</u>: G$\subset$ B dir.

$G \not\subset B$ olsun. O zaman $y \in G$ ve $y \notin B$ olacak bir y elemanı vardır. $G = A \cup B$ olduğundan $y \in A$ dır.

İddia: $x+y \in B$ dir.

$x+y \notin B$ olsa, $G = A \cup B$ olduğundan $x+y \in A$ olur. Ayrıca $y \in A$ ve A altgrup olduğundan $x \in A$ elde edilir. Bu $x \notin A$ olmasıyla çelişir. O halde iddia doğrudur.

$x+y \in B$ ve $x \in B \Rightarrow y \in B$ olur. Bu $y \notin B$ olmasıyla çelişir. O halde iddia doğrudur, $G \subset B$ dir. $G \subset B$ ve $B \subset G$ olduğundan $G=B$ dir.

BÖLÜM 3

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ HALKALAR

Bu kısımda bir R halkasında türevle ilgili yapılan çalışmaları, genelleştirilmiş türev alınarak yapılan genelleştirmeleri içeren makalelere yer verilmiştir.

3.1 Bojan Hvala, Generalized Derivations in Rings, (1998)

Bu makalede R asal halka, $Q_r(R_C)$ ve $Q_s(R_C)$ sırasıyla sağ ve simetrik Martindale kesirler halkası ve char$R \neq 2$ olarak alınacaktır. A ile R, R_C, Q_r(R), Q_s(R), $Q_s(R_C)$, $Q_r(R_C)$ halkalarından birisi gösterilecektir.

İki genelleştirilmiş türevin çarpımı:

Lemma 3.1.1:[12] R bir asal halka ve $a_i, b_i \in$ A olsun. Her $x \in R$ için $\sum a_i x b_i = 0$ ise o zaman tüm a_i ler veya tüm b_i lerin hepsi sıfır olmadıkça a_i ve b_i elemanları C-bağımlıdırlar.

Önerme 3.1.2:[12] R bir asal halka olsun. $1 \leq i \leq k$ ve $1 \leq j \leq n$ için $a_{j,} c_i \in$ R ve $f_j : R \to R$ ve $h_i : R \to R$ herhangi dönüşümler olmak üzere her x,z$\in$R için, $\sum_{j=1}^{n} f_j(z) x a_j + \sum_{i=1}^{k} c_i z h_i(x) = 0$ olsun. $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ve $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$ kümeleri C-bağımsız ise o zaman,

$$f_j(z) = -\sum_{i=1}^{k} c_i z q_{ij} \quad \text{ve} \quad h_i(z) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x a_j$$

olacak şekilde $q_{ij} \in Q_r(R_C)$ elemanları vardır.

Lemma 3.1.3: f : R$\to R_C$, $\forall$ x,y$\in$R için f(xy) = f(x)y şartını sağlayan toplamsal dönüşüm olsun. O zaman f(x) = qx olacak şekilde q$\in Q_r(R_C)$ elemanı vardır.

İspat: f dönüşümünü, $\bar{f} : R_C \to R_C$, $\bar{f}(\sum x_i \lambda_i) = \sum f(x_i)\lambda_i$, $x_i \in R$, $\lambda_i \in C$ olacak biçimde genişletelim.

$\bar{f}$ nin iyi tanımlı olduğunu göstermek için $\sum x_i\lambda_i = 0 \Rightarrow \sum f(x_i)\lambda_i = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Her bir i için $\lambda_i I \subseteq R$ olacak $0 \neq I \subseteq R$ ideali vardır. $a \in I$ için $\lambda_i a \in R$ olduğundan $\sum x_i(\lambda_i a) \in R$ dir. Böylece

$$0 = \sum x_i\lambda_i = (\sum x_i\lambda_i)a = \sum (x_i\lambda_i)a = \sum x_i(\lambda_i a) \in R$$

bulunur. Buradan

$$f(\sum x_i(\lambda_i a)) = f(0) = 0$$

elde edilir. f'nin toplamsal olması kullanılarak

$$0 = \sum f(x_i(\lambda_i a)) = \sum f(x_i)(\lambda_i a) = (\sum f(x_i)\lambda_i)a$$

olur. Her $a \in I$ için geçerli olduğundan $\sum f(x_i)\lambda_i = 0$ elde edilir. O halde $\bar{f}$ iyi tanımlıdır.

Şimdi $\bar{f}(xy) = \bar{f}(x)y$, $\forall x, y \in R_C$ olduğunu görelim.

$$\bar{f}((\sum x_i\lambda_i)(\sum y_j\gamma_j)) = \bar{f}(\sum (x_i y_i)\lambda_i\gamma_j) = \sum f(x_i y_j)\lambda_i\gamma_j = \sum (f(x_i)y_j)\lambda_i\gamma_j$$
$$= (\sum f(x_i)\lambda_i)(\sum y_j\gamma_j) = \bar{f}(\sum x_i\lambda_i)(\sum y_j\gamma_j)$$

olduğundan $\bar{f} : R_C \to R_C$ sağ R_C-modül dönüşümüdür. $\forall x \in R_C$ için $\bar{f}(x) = qx$ olacak biçimde q$\in Q_r(R_C)$ vardır. $\bar{f}$, f dönüşümünün genişlemesi olduğundan $\forall$ $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak şekilde q$\in Q_r(R_C)$ vardır.

Lemma 3.1.4: R komütatif olmayan bir halka ve F : R$\to$C genelleştirilmiş türev olsun. O zaman F = 0 dır.

İspat: F: R$\to$C bir genelleştirilmiş türev olduğundan ve x,y$\in$R için F(x), F(xy)$\in$C olması kullanılarak

0 = [F(xy),y] = [F(x)y + xD(y)] = [F(x)y,y] + [xD(y),y] = [F(x),y]y + F(x)[y,y] + [xD(y),y] = [xD(y),y] bulunur. Buradan, xD(y)y = yxD(y) , $\forall$ x,y$\in$R elde edilir. Lemma 3.1.1 den, Her y$\in$R için, y$\in$C veya D(y) = 0 dır.

K = {y$\in$R | y$\in$C } ve L = { y$\in$R | D(y) = 0 } kümelerini tanımlayalım. K ve L, R halkasının toplamsal alt grupları ve R = K$\cup$L dir. Brauer's Trick'ten, R = K veya R = L olmak zorundadır. R halkası komütatif olmadığından, R = L dir. O halde her y$\in$R için, D(y) = 0 olur. Böylece F(xy) = F(x)y$\in$C elde edilir.

0 = [F(x)y,r] = F(x)[y,r] + [F(x),r]y = F(x)[y,r] ve böylece F(x)R[y,r] = 0 olur. R halkasının asallığı kullanılarak, F(x)R = 0 veya [y,r] = 0 yani F(x) = 0 veya

$[y,r] = 0$ bulunur. R komütatif olmadığından $\forall x \in R$ için, $F(x) = 0$ yani $F = 0$ bulunur.

Lemma 3.1.5: $a,b \in A$ ve $f : R \rightarrow A$, $\forall x \in R$ için $f(x) = axb$ olsun. Eğer f genelleştirilmiş türev ise $a \in C$ veya $b \in C$ dir.

İspat : (f, δ) genelleştirilmiş türev olsun.

$f(xy) = f(x)y + x\delta(y) = axby + x\delta(y) = axyb$ ve böylece $ax(yb-by) - x\delta(y) = 0$ elde edilir. Lemma 3.1.1 den, $a \in C$ veya $[y,b] = 0$ olur. Buradan $a \in C$ veya $b \in C$ elde edilir.

Teorem 3.1.6: R asal halka, char$R \neq 2$, ve f_1, $f_2 : R \rightarrow R$ genelleştirilmiş türev olsun. $f_3 = f_1 f_2$ genelleştirilmiş türev $\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in R$ için, aşağıdakilerden biri sağlanır.

(i) $f_1(x) = \gamma x$ veya $f_2(x) = \gamma x$ olacak biçimde $\gamma \in C$ vardır.

(ii) $f_1(x) = xa$ ve $f_2(x) = xb$ olacak biçimde $a,b \in Q_r(RC)$vardır.

(iii) $f_1(x) = ax$ ve $f_2(x) = bx$ olacak biçimde $a,b \in Q_r(RC)$vardır.

(iv) $f_1(x) = ax + xb$ ve $f_2(x) = \lambda x + \mu(ax-xb)$ olacak biçimde $a,b \in Q_r(RC)$ ve λ, $\mu \in C$ vardır.

İspat: ($\Rightarrow$) f_1, f_2 ve $f_3 = f_1 f_2$ genelleştirilmiş türev olsunlar. i = 1, 2, 3, her $x,y \in R$ için $f_i(xy) = f_i(x)y + x\delta_i(y)$ olacak δ_i türevleri vardır. $x, y \in R$ için

$f_3(xy) = f_3(x)y + x\delta_3(y) = f_1 f_2(x)y + x\delta_3(y)$ ve $f_3(xy) = f_1(f_2(xy)) = f_1(f_2(x)y + x\delta_2(y)) = f_1 f_2(x)y + f_2(x)\delta_1(y) + f_1(x)\delta_2(y) + x\delta_1\delta_2(y)$ olduğundan, yukarıdaki iki ifade kullanılarak $f_2(x)\delta_1(y) + f_1(x)\delta_2(y) + x(\delta_1\delta_2(y) - \delta_3(y)) = 0$ elde edilir. Burada x yerine zx, $z \in R$ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
0 &= f_2(zx)\delta_1(y) + f_1(zx)\delta_2(y) + zx(\delta_1\delta_2(y) - \delta_3(y)) \\
&= f_2(z)x\delta_1(y) + z\delta_2(x)\delta_1(y) + f_1(z)x\delta_2(y) + zx\delta_1(x)\delta_2(y) \\
&\quad + zx(\delta_1\delta_2(y) - \delta_3(y)) \\
&= f_1(z)x\delta_2(y) + f_2(z)x\delta_1(y) + z(\delta_2(x)\delta_1(y) + \delta_1(x)\delta_2(y) \\
&\quad + x(\delta_1\delta_2(y) - \delta_3(y))
\end{aligned}
$$

yani,

$f_1(z)x\delta_2(y)$ + $f_2(z)x\delta_1(y)$ + $z(\delta_2(x)\ \delta_1(y) + \delta_1(x)\delta_2(y)$ + $x(\delta_1\ \delta_2(y) - \delta_3(y)) = 0$ (2.1)

elde edilir. Burada Önerme 3.1.2 den, iki durum vardır,

I. Her $y \in R$ için, $\delta_1(y)$ ve $\delta_2(y)$, C bağımlıdır.

II. $f_1(z) = -zq_1$ ve $f_2(z) = -zq_2$ olacak $q_1, q_2 \in Q_r(RC)$ vardır.

Eğer II. durum sağlanıyorsa teoremin (ii) şıkkı ispatlanmış olur. I. durumun sağlandığını varsayalım. O zaman $\delta_1(y) = \lambda\ \delta_2(y)$ olacak $\lambda \in C$ vardır. Böylece her $y \in R$ için, $[\lambda\ \delta_1(y), \delta_2(y)] = 0$ olur. $\lambda \in C$ ve R nin asal olması kullanılarak $[\delta_1(y), \delta_2(y)] = 0$, $\forall y \in R$ elde edilir. R nin karakteristiğinin 2 den farklı olması ve [25, Teorem 4] kullanılarak δ_1 ve δ_2 nin C-bağımlı olduğu elde edilir. Böylece $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ için

$$\alpha_1\ \delta_1 + \alpha_2\ \delta_2 = 0 \qquad (2.2)$$

bulunur. (2.2) de $\delta_1 = 0$ ise, her $x,y \in R$ için $f_1(xy) = f_1(x)y$ olur. Bu durumda Lemma 3.1.3 den, $f_1(x) = ax$ olacak şekilde $a \in Q_r(RC)$ vardır. Bunu (2.1) ifadesinde yerine yazarsak

$$azx\delta_2(y) - zx\delta_3(y) = 0\ ,\ \forall x,y,z \in R \qquad (2.3)$$

elde edilir. Yine (2.2) de $\delta_2 = 0$ ise, her $x,y \in R$ için $f_2(xy) = f_2(x)y$ olur. Böylece Lemma 3.1.3 den $f_2(x) = bx$ olacak şekilde $b \in Q_r(RC)$ vardır. Buradan Teoremin (iii) şıkkı sağlanmış olur.

Eğer $\delta_2 \neq 0$ ise bu durumda $x\delta_2(y) \neq 0$ olacak şekilde $x,y, \in R$ vardır. Bunu (2.3) ifadesinde kullanırsak Lemma 3.1.1 den, $az = \lambda_1 z$ olacak şekilde $\lambda_1 \in C$ vardır. Böylece her $z \in R$ için $(a-\lambda_1)z = 0$ bulunur. R asal halka olduğundan $a = \lambda_1 \in C$ elde edilir. Bu durumda $a = \gamma$ ile gösterirsek, $f_1(x) = \gamma x$ olacak $\gamma \in C$ vardır. Teoremin (i) şıkkı da sağlanır.

Benzer olarak $\delta_2 = 0$ ve $\delta_1 \neq 0$ için yapıldığında $f_2(x) = \gamma x$ bulunur. Yine teoremin (i) şıkkı sağlanmış olur.

$\delta_1 \neq 0$ ve $\delta_2 \neq 0$ ise; δ_1 ve δ_2 C bağımlı olduklarından $\delta_2 = \tau\ \delta_1$ olacak $\tau \in C$ vardır. $F : R \to RC$, $F(x) = f_2(x) - \tau\ f_1(x)$ dönüşümünü alalım. $F(xy) = F(x)y$

olduğundan Lemma 3.1.3 kullanılarak $q \in Q_r(RC)$ olmak üzere F(x) = qx elde edilir. Bunu yukarıda yerine yazarsak

$$f_2(x) = \tau\ f_1(x) + qx\ ,\ \forall x \in R \tag{2.4}$$

elde edilir. Bulunanlar (2.1) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$(2\tau\ f_1(z) + qz)x\delta_1(y) + z(2\tau\ \delta_1(x)\ \delta_2(y) + x(\delta_1\ \delta_2 - \delta_3)(y)) = 0$$

elde edilir. Bir $y \in R$ için $\delta_1(y) \neq 0$ olsun. Böylece Önerme 3.1.2 den, $2\tau\ f_1(z) + qz = -zq'$,$q' \in C$ vardır. Bu ifadeden $2\tau\ f_1(z) = -zq' - qz$ ve böylece $f_1(z) = (2\tau)^{-1}(-zq' - qz) = -(2\tau)^{-1}(zq' + qz)$ bulunur. Bu ifadede $-(2\tau)^{-1}q' = b$, $-(2\tau)^{-1}q = a$ ile gösterilirse, $f_1(x) = ax + xb$ elde edilir. Bunu (2.4) ifadesinde yerine yazarsak $f_2(x) = \tau\ f_1(x) + qx = \tau(ax + xb) + qx = (\tau a + q)x + x\tau b$ bulunur. Bu ifadeler $f_3(x) = f_1(f_2(x))$ de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} f_3(x) = f_1(f_2(x)) &= f_1((\tau a + q)x + x\tau b) \\ &= a((\tau a + q)x + x\tau b) + ((\tau a + q)x + x\tau b)b \\ &= (\tau a^2 + aq)x + x\tau b^2 + (2\tau a + q)x\,b \end{aligned}$$

ve böylece

$$f_3(x) - ((\tau a^2 + aq)x + x\tau b^2) = (2\tau a + q)xb$$

bulunur. $x \to (\tau a^2 + aq)x + x(\tau b^2)$ dönüşümü ve f_3 genelleştirilmiş türev olduğundan, bunların farkı da bir genelleştirilmiş türevdir. Lemma 3.1.5 den $2\tau a + q \in C$ veya $b \in C$ bulunur.

$b \in C$ ise, $f_1(x) = (a + b)x$ ve $f_2(x) = (\tau(a + b) + q)x$ olur. Böylece teoremin (iii) şıkkı sağlanmış olur.

$2\tau a + q \in C$ ise, $\mu = -\tau$, $q = \lambda + 2\mu a$ ile gösterilirse,

$f_2(x) = \tau\ f_1(x) + qx = \tau(ax + xb) + qx = \lambda x + \mu(ax - xb)$ elde edilir. Teoremin (iv) şıkkı sağlanmış olur.

($\Leftarrow$) (i) $f_1(x) = \gamma x$ veya $f_2(x) = \gamma x$ olacak biçimde $\gamma \in C$ olsun.

$f_1(x) = \gamma x$ ise $x,y \in R$ için, $f_3(xy) = f_1 f_2(xy) = \gamma\ (f_2(x)y + x\delta_2(y)) = \gamma\ (f_2(x))y + x\gamma\ \delta_2(y) = f_1(f_2(x))y + x\gamma\ \delta_2(y) = f_3(x)y + x\gamma\ \delta_2(y)$ olduğundan f_3 genelleştirilmiş türev olur. $f_2(x) = \gamma x$ olması durumda da benzer şekilde elde edilir.

(ii) $f_1(x) = xa$ ve $f_2(x) = xb$ olacak biçimde a, $b \in Q_r(RC)$ olsun. $f_3(xy) = f_1 f_2(xy) = xyba + xbay - xbay = f_2(x)ay + x(yba - bay) = f_3(x)y + xI_{ba}(y)$ olduğundan f_3 genelleştirilmiş türevdir.

(ii) de olduğu gibi (iii) ve (iv) sağlanması durumunda da f_3 genelleştirilmiş türev olur.

Sonuç 3.1.7: $f_1, f_2 : R \rightarrow R$ genelleştirilmiş türev olsun. $f_1 f_2 = 0 \Leftrightarrow \forall x,y \in R$ için, aşağıdakilerden biri sağlanır.

(i) $f_1 = 0$ veya $f_2 = 0$

(ii) $f_1(x) = xa$ ve $f_2(x) = xb$ ve $ba = 0$ olacak biçimde $a,b \in Q_r(RC)$vardır.

(iii) $f_1(x) = ax$ ve $f_2(x) = bx$ ve $ab = 0$ olacak biçimde $a,b \in Q_r(RC)$vardır.

(iv) $f_1(x) = ax + xb$ ve $f_2(x) = \lambda x + \mu(ax - xb)$ ve $\lambda a + \mu a^2 = \mu b^2 - \lambda b \in C$ olacak biçimde $a,b \in Q_r(RC)$ ve $\lambda, \mu \in C$ vardır.

İspat : $\Rightarrow$ $f_1 f_2 = 0$ olsun. Sıfır dönüşümü bir genelleştirilmiş türev olduğundan Teorem 3.1.6'nın sonuçlarından biri sağlanacaktır.

(i) nin sağlandığını kabul edelim. $f_1(x) = \gamma x$, $\gamma \in C$ olsun. O zaman

$0 = f_1 f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \gamma\ f_2(x)$

olduğundan $\gamma = 0$ veya $f_2(x) = 0$, $\forall x \in R$ bulunur. Yani

$f_1 = 0$ veya $f_2 = 0$

olur. Böylece (i) şıkkı ispatlanmış olur.

$f_2(x) = \gamma x$, $\gamma \in C$ olsun. Bu durumda

$0 = f_1 f_2(x) = f_1(f_2(x))\ f_1(\gamma x)$

olur. Burada x yerine xy, $y \in R$ yazılırsa, $0 = f_1(\gamma xy) = f_1(\gamma x)y + \gamma x \delta_1(y) = \gamma x \delta_1(y)$ elde edilir. R nin asal olması kullanılırsa $\gamma = 0$ veya $\delta_1 = 0$ yani

$f_2 = 0$ veya $\delta_1 = 0$

bulunur..

Eğer $\gamma \neq 0$ ve $\delta_1 = 0$ ise $f_1(xy) = f_1(x)y$ olduğundan Lemma 3.1.3 den $f_1(x) = qx$ olacak şekilde $q \in Q_r(RC)$ vardır. Böylece $0 = f_1(\gamma x) = q\gamma x = \gamma qx$ elde edilir. Burada $\gamma \neq 0$ olduğundan qx = $f_1(x) = 0$ bulunur. O halde $f_1 = 0$ veya $f_2 = 0$ olur. Böylece (i) nin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.6'nın (ii) koşulundan, $0 = f_1 f_2(x) = f_1(xb) = xba$ ve böylece ba=0 bulunur. Benzer olarak Teorem 3.1.6'nın (iii) koşulundan, $0 = f_1 f_2(x) = f_1(bx) = abx$ ve böylece ab = 0 olur. Son olarak Teorem 3.1.6'nın (iv) koşulundan, her $x \in R$ için $0 = f_1 f_2(x) = 0 = f_1(\lambda x + \mu(ax - xb)) = (\lambda a + \mu a^2)x + x(\lambda b - \mu b^2)$ elde edilir. Lemma 3.1.1 kullanılarak , $\lambda a + \mu a^2 \in C$ ve $\lambda b - \mu b^2 \in C$ elde edilir.

Sonuç 3.1.8 : $f : R \to R$ genelleştirilmiş türev ve c, $d \in R$ olsun. Her $x \in R$ için cf(x) + f(x)d = 0 ise aşağıdakilerden biri sağlanır.

(i) c, $d \in C$ ve c + d = 0

(ii) $c \in C$ ve f(x) = xb ve b(c + d) = 0 olacak biçimde $b \in Q_r(RC)$vardır.

(iii) $d \in C$ ve f(x) = bx ve (c + d)b = 0 olacak biçimde $b \in Q_r(RC)$vardır.

(iv) $f(x) = \lambda x + \mu(cx - xd)$ ve $\lambda c + \mu c^2 = \mu d^2 - \lambda d \in C$ olacak biçimde $\lambda, \mu \in C$ vardır.

İspat: g(x) = cx + xd dönüşümünü tanımlayalım. (gf)(x) = g(f(x)) = cf(x) + f(x)d = 0 olduğundan, Sonuç 3.1.7'nin şıklarından biri sağlanacaktır.

(i) sağlanıyorsa, g = 0 veya f = 0 olur.

g = 0 ise, c, $d \in C$ olduğundan 0 = cx + xd = (c + d)x yani c + d = 0 bulunur. Böylece (i) sağlanır.

f = 0 ise, $\lambda = \mu = 0 \in C$ olmak üzere, f(x) = 0x + 0(cx – xc) yazılabildiğinden, (iv) sağlanmış olur.

(ii) sağlanıyorsa, $b \in Q_r(RC)$ için f(x) = xb dir. $c \in C$ için, 0 = cf(x) + f(x)d = cxb + xbd = xb(c+d) ve böylece b(c + d) = 0 bulunur. Böylece (ii) sağlanır.

(iii) sağlanıyorsa, $b \in Q_r(RC)$ için f(x) = bx dir. $d \in C$ için, 0 = cf(x) + f(x)d = cbx + xbd = (c+d)bx ve böylece (c + d)b = 0 bulunur, O halde (iii) sağlanır.

(iv) sağlanıyorsa, $\lambda, \mu \in C$, c, $d \in Q_r(RC)$ için $f(x) = \lambda x + \mu(cx - xd)$ dir.

$0 = cf(x) + f(x)d = c\lambda x + c\mu(cx - xd) + \lambda xd + \mu(cx - xd)d = c\lambda x + c\mu cx - c\mu xd + \lambda xd + \mu cx d - \mu xd^2 = (\lambda c + \mu c^2)x + x(\lambda d - \mu d^2)$ olur.

Lemma 3.1.1'den, $\lambda c + \mu c^2 \in C$ ve $\lambda d - \mu d^2 \in C$ elde edilir. $\lambda c + \mu c^2 + \lambda d - \mu d^2 \in C \Rightarrow \lambda c + \mu c^2 = \mu d^2 - \lambda d \in C$ bulunur. (iv) sağlanmış olur.

Sonuç 3.1.9: f : R$\rightarrow$R genelleştirilmiş türev ve $c \in$ R-C olsun. Her $x \in R$ için cf(x) = f(x)c ise f(x) = $\lambda x + \mu(cx + xc)$ ve $\lambda c + \mu c^2 \in C$ olacak biçimde λ, $\mu \in C$ vardır.

İspat: d = -c için Sonuç 3.1.8'in özel bir halidir. $c \notin C$ olduğundan, $d \notin C$ dir. O zaman Sonuç 3.1.8'in (iv) şıkkı sağlanmak zorundadır. Böylece f(x) = $\lambda x + \mu(cx + xc)$ ve $\lambda c + \mu c^2 \in C$ olacak biçimde λ, $\mu \in C$ vardır.

Sonuç 3.1.10: f:R$\rightarrow$R genelleştirilmiş türev ve $c \in$ R-{0} olsun. Her $x \in R$ için cf(x) + f(x)c = 0 ise f(x) = $\mu(cx + xc)$ ve $\mu c^2 \in C$ olacak biçimde $\mu \in C$ vardır.

İspat: Sonuç 3.1.8'in d = c $\neq 0$ için özel halidir. charR$\neq 2$ olduğundan Sonuç 3.1.8'in (iv) şıkkı sağlanır. f(x) = $\mu(cx + xc)$ ve $\mu c^2 \in C$ olacak biçimde $\mu \in C$ vardır.

Önerme 3.1.11: f:R$\rightarrow$R genelleştirilmiş türev olsun. Eğer, f(R) ile değişmeli olacak biçimde a, $b \in R$ elemanları var ve {a, b, 1} kümesi C-bağımsız ise f = 0 dır.

İspat: Her $x \in R$ için, f(x)a = af(x) ve f(x)b = bf(x) olsun. a, $b \notin C$ olduğundan, Sonuç 3.1.9 kullanılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Her $x \in R$ için

$$f(x) = \lambda_a x + \mu_a (ax + xa) = \lambda_b x + \mu_b (bx + xb) \qquad (2.5)$$

ve $\lambda_a a + \mu_a a^2 \in C$, $\lambda_b b + \mu_b b^2 \in C$ olacak biçimde λ_a, μ_a, λ_b, $\mu_b \in C$ vardır. (2.5) bağıntısından her $x \in R$ için $((\lambda_a - \lambda_b) + \mu_a a - \mu_b b)x + x(\mu_a a - \mu_b b) = 0$ elde edilir. Lemma 3.1.1 kullanılarak $\mu_a a - \mu_b b \in C$ ve {a, b, 1} kümesi C-bağımsız olduğundan, $\mu_a = \mu_b = 0$ bulunur. Ayrıca $\lambda_a a$, $\lambda_b b \in C$ olduğu kullanılırsa, $\lambda_a = \lambda_b = 0$ olur. Böylece her $x \in R$ için f(x) = 0 yani f = 0 bulunur.

Sonuç 3.1.12 : f : R$\rightarrow$R genelleştirilmiş türev olsun. f^2 genelleştirilmiş türevdir $\Leftrightarrow \forall x \in R$ için f(x) = ax veya f(x) = xa olacak biçimde $a \in Q_r(RC)$ vardır. Ayrıca, $f^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0$, f(x) = ax veya f(x) = xa dır.

İspat : ($\Rightarrow$) f^2 genelleştirilmiş türev olsun. Teorem 3.1.6 da $f_1 = f_2 = f$ alınarak uygulanırsa. (i) , (ii), (iii) şıklarından biri sağlanır. Böylece f(x) = γx veya f(x) = ax veya f(x) = xa , $\gamma \in$C, a$\in Q_r$(RC) olacağından, f sol ya da sağ çarpım olur. Bu ispatı bitirir.

Şimdi varsayalım ki (iv) sağlansın. O zaman f(x) = ax + xb = λx + μ(ax–xb) olacak şekilde a,b$\in Q_r$(RC) ve λ, $\mu \in$C vardır. Bu durumda

$$0 = \mu ax - \mu xb + \lambda x - ax - xb = (\mu - 1)ax + \lambda x - x(\mu + 1)b$$
$$= ((\mu - 1)a + \lambda)x - x(\mu + 1)b$$

olur. Lemma 3.1.1'den, $(\mu - 1)a + \lambda \in C$ olduğundan , $(\mu - 1) = 0$ veya a$\in$C ve benzer olarak $(\mu + 1)b \in C$ olduğundan, $(\mu + 1) = 0$ veya b$\in$C elde edilir. $(\mu + 1) = 0$ ve $(\mu - 1) = 0$ olması durumunda da, yine a$\in$C ve b$\in$C elde edilir. f(x) = ax + xb olduğundan, f sol ya da sağ çarpımdır. Bu da ispatı bitirir.

($\Leftarrow$:) Varsayalım ki f(x) = ax olsun. $f^2(x) = f(ax) = a^2x$ olur.

$f^2(x + y) = a^2(x + y) = a^2x + a^2y = f^2(x) + f^2(y)$

$f^2(xy) = a^2xy = f^2(x)y + x0(y)$

olduğundan, f^2 genelleştirilmiş türev olur.

Varsayalım ki f(x) = xa olsun. $f^2(x) = f(xa) = xa^2$ olur.

$f^2(x + y) = (x + y)a^2 = xa^2 + ya^2 = f^2(x) + f^2(y)$

$f^2(xy) = xya^2 + xa^2y - xa^2y = (xa^2)y + x(ya^2 - a^2y) = f^2(x)y + I_{a^2}(y)$

olduğundan, f^2 genelleştirilmiş türev olur.

Şimdi ikinci kısmını ispatlayalım.

(:$\Rightarrow$) $f^2 = 0$ olsun. Bu durumda f^2 genelleştirilmiş türev olduğundan birinci kısımdan, her x$\in$R için f(x) = ax veya f(x) = xa olacak biçimde a$\in Q_r$(RC) vardır. Böylece $f^2(x) = a^2x$ yani $a^2x = 0$ bulunur. R asal halka olduğundan $a^2 = 0$ elde edilir.

($\Leftarrow$:) Her x$\in$R için f(x) = ax olsun. $f^2(x) = a^2x = 0$ olduğundan $f^2 = 0$ bulunur.

Benzer olarak f(x) = xa olduğu durum için de $f^2 = 0$ sonucu elde edilir.

Uyarı 3.1.13: Eğer d, komütatif olmayan R asal halkasının türevi ve charR$\neq$2 ise [d(x),d(y)]=0 ise d = 0 olduğu [21] de ispatlanmıştır. Ancak bu sonuç genelleştirilmiş türev için doğru değildir. Örneğin, R = M_2(F) olsun. c = $e_{11} - e_{22}$

olarak alınırsa $f(x) = xc + cx$ genelleştirilmiş türevi için $[f(x),f(y)] = 0$ sağlanır. Üstelik $f \neq 0$ dır.

Önerme 3.1.14: R komütatif olamayan bir halka ve $0 \neq f:R \rightarrow R$, $[f(x), f(y)] = 0$ şartını sağlayan genelleştirilmiş türev olsun. O zaman her $x \in R$ için, $f(x) = xc + cx$ ve $f(x)=\gamma(x)c + \phi(x)$, olacak şekilde $c \in RC\text{-}C$ ve γ, ϕ : $R \rightarrow C$ toplamsal dönüşümleri vardır. Ayrıca, $c^2 \in C$ dir.

İspat: Lemma 3.1.4'den f, C ye giden bir dönüşüm olamaz. O halde $f(y_0) = c_1 \notin Z$ olacak $y_0 \in R$ elemanı vardır. Hipotezden $f(x)\, c_1 = c_1 f(x)$ yazılabilir. Sonuç 3.1.9 kullanıldığında, $f(x)=\lambda x + \mu(c_1 x + x\, c_1)$ ve $\lambda\, c_1 + \mu\, c_1{}^2 \in C$ olacak biçimde $\lambda \in C$, $0 \neq \mu \in C$ vardır. $c = \mu c_1 + \frac{1}{2}\lambda \notin C$ elemanını alırsak, $f(x) = xc + cx$ ve $c^2 \in C$ elde edilir. Ayrıca, c ve 1, f(R) ile değişmelidir. $f \neq 0$ olduğundan, Önerme 3.1.11'den dolayı {f(x), c, 1} kümesi C-bağımlı olmak zorundadır. γ, ϕ : $R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümler olmak üzere, $f(x) = \gamma(x)c + \phi(x)$ elde edilmiş olur.

$[f_1(x), f_2(x)] = 0$ şartını sağlayan genelleştirilmiş türevler:

Teorem 3.1.15 : R komütatif olmayan halka, $\mathrm{char}R \neq 2$ ve f_1, f_2 : $R \rightarrow R$ sıfırdan farklı genelleştirilmiş türevleri için,

$$[f_1(x), f_2(x)] = 0 \ , \ \forall x \in R \tag{2.6}$$

ise o zaman her $x \in R$ için $f_1(x) = \lambda f_2(x)$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır.

İspat : $Y = \{y \in R \mid f_1(y), f_2(y)$ ve 1, C bağımsız$\}$, $X = R - Y$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\alpha_1(x)\, f_1(x) + \alpha_2(x)\, f_2(x) + \alpha_0(x) = 0 \tag{2.7}$$

olacak biçimde $i = 0, 1, 2$, $0 \neq \alpha_i(x) \in C$ elemanları vardır.

Teoremi dört adımda ispatlayalım.

1.Adım : Kabul edelim ki $x_0 \in X$, $\lambda \in C$ için $f_1(x_0) - \lambda f_2(x_0) \in C$ olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ veya $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ olduğunu ispatlayalım.

Varsayalım ki $[f_2(x),\ f_2(x_0)] \neq 0$ olsun. O halde $f_2(x) \notin C$ dir. (2.7) bağıntısından,

$-\alpha_0(x) = \alpha_1(x)\, f_1(x) + \alpha_2(x)\, f_2(x)$ ve böylece

$-(\alpha_1(x))^{-1}\, \alpha_0(x) = f_1(x) + (\alpha_1(x))^{-1}\ \alpha_2(x)\, f_2(x) \in C$

olur. $\beta_x = (\alpha_1(x))^{-1}\ \alpha_2(x)$ ile gösterirsek $f_1(x) - \beta_x\ f_2(x) \in C$, $\beta_x \in C$ elde edilir. $[f_1(x), f_2(x)] = 0$ bağıntısı lineerleştirilirse,

$$[f_1(x), f_2(y)] = [f_2(x), f_1(y)]\ ,\ \forall\, x, y \in R \qquad (2.8)$$

bulunur. Özel olarak $x_0 \in X$ için, $[f_1(x), f_2(x_0)] = [f_2(x), f_1(x_0)]$ olur. $f_1(x) - \beta_x$ $f_2(x) \in C$ olduğundan $a \in C$ için $f_1(x) = \beta_x f_2(x) + a$ ve ayrıca $f_1(x_0) - \lambda f_2(x_0) \in C$ olduğundan $b \in C$ için $f_1(x_0) = \lambda f_2(x_0) + b$ yazılır. $[f_1(x),\ f_2(x_0)] = [f_2(x),$ $f_1(x_0)]$ da yerine yazılırsa $[\beta_x f_2(x) + a,\ f_2(x_0)] = [f_2(x),\ \lambda f_2(x_0) + b]$ ve buradan

$$(\beta_x - \lambda)\,[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$$

bulunur. $\beta_x - \lambda \in C$ olduğu ve R nin asallığı kullanılırsa $\beta_x = \lambda$ elde edilir. Böylece $[f_2(x), f_2(x_0)] \neq 0$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ olarak aynı λ alınabilir. Buradan her $x \in R$ için $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ veya $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ elde edilir.

2. Adım: Teoremin

$$[f_1(x), f_1(y)] = 0 \text{ ve } [f_2(x), f_2(y)] = 0\ ,\ \forall\, x, y \in R \qquad (2.9)$$

ek koşulu ile doğru olduğunu gösterelim. Önerme 3.1.14'den, $\forall\, x \in R$, $c_i \in RC - C$, $c_i^{\,2} \in C$, $i = 1, 2$ için,

$$f_i(x) = xc_i + c_i x = \gamma_i(x)c_i + \phi_i(x) \qquad (2.10)$$

elde edilir. (2.10) eşitlikleri (2.6) da yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= [\gamma_1(x)c_1 + \phi_1(x)\ ,\ \gamma_2(x)c_2 + \phi_2(x)] \\ &= \gamma_1(x)[c_1, \gamma_2(x)c_2] + [\gamma_1(x),\ \gamma_2(x)c_2] \\ &= \gamma_1(x)\gamma_2(x)[c_1, c_2] \end{aligned}$$

Böylece $c_1, c_2 \in RC - C$ için $[c_1, c_2] = 0$ elde edilir. O halde

$$0 = [f_1(x), f_2(x)] = [x c_1 + c_1 x\ , \gamma_2(x)c_2 + \phi_2(x)] = \gamma_2(x)[\, x c_1 + c_1 x\ ,\ c_2\,]$$

bulunur. Buradan her $x \in R$, $c_1, c_2 \in RC - C$ için $[\, x c_1 + c_1 x\ ,\ c_2\,] = 0$ yani

$$x\,c_1 c_2 - c_2 x\, c_1 + c_1 x\, c_2 - c_2 c_1 x = 0 \qquad (2.11)$$

olur. Lemma 3.1.1'den $\{c_1 c_2,\ c_2,\ c_1,\ 1\}$ kümesi C-bağımlıdır. Böylece $c_1 c_2 = \alpha\, c_2 + \beta\, c_1 + \tau$ olacak şekilde $\alpha, \beta, \tau \in C$ vardır. Bunu (2.11) de yerine yazarsak

$$0 = x\,(\alpha\, c_2 + \beta\, c_1 + \tau) - (\alpha\, c_2 + \beta\, c_1 + \tau)x - c_2 x\, c_1 + c_1 x\, c_2$$

$$= (\alpha + c_1)x\, c_2 + (\beta - c_2)x c_1 - (\alpha\, c_2 + \beta\, c_1)x$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.1.1'den $\{c_2,\ c_1,\ 1\}$ kümesi C-bağımlıdır. O zaman $\lambda, \rho \in C$ için $c_2 = \lambda\, c_1 + \rho$ yazılabilir. (2.10) bağıntısından, $f_2(x) = x\, c_2 + c_2 x = x(\lambda\, c_1 + \rho) + (\lambda\, c_1 + \rho)x = \lambda\, f_1(x) + 2\rho\, x$ elde edilir. Bu sonuç hipotezde yerine yazılırsa,

$$0 = [f_1(x), f_2(x)] = [f_1(x),\ \lambda\ f_1(x) + 2\rho\, x]$$

$$= 2\rho\,[\,f_1(x),\, x] = 2\rho\,[\gamma_1(x)c_1 + \phi_1(x), x] = 2\rho\ \gamma_1(x)[c_1, x]$$

ve böylece her $x \in R$ için

$$2\rho\ \gamma_1(x) = 0 \text{ veya } [c_1, x] = 0$$

bulunur. $c_1 \notin C$ olduğundan $2\rho\ \gamma_1(x) = 0$ olur. $\gamma_1 \neq 0$ olduğundan $2\rho = 0$ elde edilir. Böylece her $x \in R$ için $f_1(x) = \lambda\, f_2(x)$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır. Bu da ispatı bitirir.

3. Adım : $X = R$ olduğu durumda teoremin doğru olduğunu görelim. $X = R$ olması, her $y \in R$ için $f_1(y)$, $f_2(y)$ ve 1'in C bağımlı olması demektir. $f_2 \neq 0$ ve R komütatif olmadığından, Lemma 3.1.4'den $f_2 : R \to C$ olamaz. O zaman $f_2(x_0) \notin C$ olacak şekilde bir $x_0 \in R$ vardır. $\alpha_1(x_0) \neq 0$ dır. Böylece

$$\alpha_1(x_0)\, f_1(x_0) + \alpha_2(x_0)\, f_2(x_0) + \alpha_0(x_0) = 0$$

olur. Buradan $-\alpha_1(x_0)^{-1}\, \alpha_0(x_0) = f_1(x_0) + \alpha_1(x_0)^{-1}\, \alpha_2(x_0)\, f_2(x_0) \in C$ elde edilir. O halde $x_0 \in R$, $\lambda \in C$ için $f_1(x_0) - \lambda\, f_2(x_0) \in C$ olur. Bu durumda 1. adımdan, her $x \in R$ için

$$[f_2(x), f_2(x_0)] = 0 \text{ veya } f_1(x) - \lambda\, f_2(x) \in C$$

elde edilir. Burada eğer her $x \in R$ için $f_1(x) - \lambda\, f_2(x) \in C$ ise $F(x) = f_1(x_0) - \lambda\, f_2(x_0) \in C$ bulunur. Yani $F : R \to C$ genelleştirilmiş türevdir. Bu durumda $F = 0$ olur. O halde her $x \in R$ için $f_1(x) = \lambda\, f_2(x)$ bulunur. Bu da ispatı bitirir.

Eğer $\forall x \in R$ için $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ ise, $\alpha_1(x_0) \neq 0$ dır. $\alpha_1(x_0) = 0$ ise $f_2(x_0) \in C$ olur. Ancak $f_2(x_0) \notin C$ olduğundan çelişkidir. Yani her $x_0 \in R$ için $\alpha_1(x_0) \neq 0$ dır. Bu durumda 3. adımın başına dönülür. Böylece her $x, y \in R$ için

$$[f_2(x), f_2(y)] = 0 \text{ veya } f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$$

sonucuna ulaşılır. Her $x, y \in R$ için $[f_2(x), f_2(y)] = 0$ ise 3. adımın başına dönülüp, f_2 yerine f_1 alınarak devam edilirse benzer sonuçlar f_1 için de ispatlanır. Yani, her $x, y \in R$ için, $[f_2(x), f_2(y)] = 0$ ve $[f_1(x), f_1(y)] = 0$ dır. Bu durumda da 2. adım kullanılarak teorem ispatlanır.

4. Adım : 3. adımda X = R olduğu durumda teoremin doğruluğu ispatlandı, şimdi X = R olmak zorunda olduğunu görelim.

Varsayalım ki $X \neq R$ olsun. Y nin tanımından, $a = f_1(y_0)$, $b = f_2(y_0)$ ve 1, C-bağımsız olacak şekilde bir $y_0 \in Y$ vardır. (2.6) bağıntısından, $0 = [f_1(x), f_2(x)] = [a, b]$ yani $ab = ba$ bulunur. f_i genelleştirilmiş türev olduğundan, δ_i türev , i = 1, 2 , her $x, z \in R$ için

$$f_i(xz) = f_i(x)z + x\delta_i(z) \qquad (2.12)$$

dir. (2.8) bağıntısında, y yerine y_0, x yerine xz alınırsa, $[f_1(x)z + x\delta_1(z), b] = [f_2(x)z + x\delta_2(z), a]$ ve böylece

$$(af_2(x) - bf_1(x))z - f_2(x)za + f_1(x)zb + x(\delta_1(z)b - \delta_2(z)a) + ax\delta_2(z) - bx\delta_1(z) = 0 \qquad (2.13)$$

elde edilir. Burada

$$F_1(x) = af_2(x) - bf_1(x) \qquad H_1(z) = \delta_1(z)b - \delta_2(z)a \qquad c_1 = 1$$

$$F_2(x) = -f_2(x) \qquad H_2(z) = \delta_2(z) \qquad c_2 = a$$

$$F_3(x) = f_1(x) \qquad H_3(z) = -\delta_1(z) \qquad c_3 = b$$

olarak alınırsa, (2.13) ifadesinin

$$\sum_{i=1}^{3} F_i(x)zc_i + \sum_{j=1}^{3} c_j xH_j(z) = 0$$

biçiminde olduğu görülür. Burada a, b ve 1, C-bağımsız olduğundan, Önerme 3.1.2'den $F_j(x) = -\sum_{i=1}^{3} c_i x q_{ij}$ ve $H_i(z) = \sum_{j=1}^{3} q_{ij} z a_j$, $q_{ij} \in Q_r(RC)$ elde edilir. Yani,

$$F_3(x) = f_1(x) = -xq_{13} - axq_{23} - bxq_{33} \tag{2.14}$$

$$-F_2(x) = f_2(x) = xq_{12} + axq_{22} + bxq_{32} \tag{2.15}$$

$$F_1(x) = af_2(x) - bf_1(x) = -xq_{11} - axq_{21} - bxq_{31} \tag{2.16}$$

$$-H_3(z) = \delta_1(z) = -q_{31}z - q_{32}za - q_{33}zb \tag{2.17}$$

$$H_2(z) = \delta_2(z) = q_{21}z + q_{22}za + q_{23}zb \tag{2.18}$$

$$H_1(z) = \delta_1(z)b - \delta_2(z)a = q_{11}z + q_{21}za + q_{13}zb \tag{2.19}$$

olur. Şimdi q_{ij} elemanlarına bakalım. i = 1 için, (2.12) bağıntısı alınıp (2.14) ve (2.17) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= -xzq_{13} - axzq_{23} - bxzq_{33} \\
&= -xq_{13}z - axq_{23}z - bxq_{33}z - xq_{31}z - xq_{32}za - xq_{33}zb \\
&= x(q_{13}z + q_{31}z + q_{32}za + q_{33}zb - zq_{13}) + ax(q_{23}z - zq_{23}) \\
&\quad + bx(q_{33}z - zq_{33}) \\
&= x((q_{13} + q_{31})z + q_{32}za + q_{33}zb - zq_{13}) + ax[q_{23}, z] + bx[q_{33}, z]
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1.1'den, her $z \in R$ için $[q_{23}, z] = 0$ ve $[q_{33}, z] = 0$ ve $(q_{13} + q_{31})z + q_{32}za + q_{33}zb - zq_{13} = 0$ bulunur. O halde

$$q_{23}, q_{33} \in C \text{ ve } (q_{13} + q_{31})z + q_{32}za + q_{33}zb - zq_{13} = 0 \tag{2.20}$$

olur. Benzer işlemler f_2 için yapılırsa

$$q_{22}, q_{32} \in C \text{ ve } (q_{12} + q_{21})z + q_{22}za + q_{23}zb - z\,q_{12} = 0 \tag{2.21}$$

elde edilir. Ayrıca δ_1 türev ve $q_{32}, q_{33} \in C$ olduğu (2.17) de kullanılırsa, $\delta_1(xz) = -q_{31}xz - q_{32}xza - q_{33}xzb$ ve buradan $\delta_1(x)z + x\delta_1(z) = -q_{31}xz - q_{32}xza - q_{33}xzb$ olur. Böylece $-q_{31}xz - q_{32}xaz - q_{33}xbz - xq_{31}z - xq_{32}az - xq_{33}bz + q_{31}xz + q_{32}xza + q_{33}xzb = 0$ elde edilir. O halde her $x, z \in R$ için $(q_{32}xa + q_{33}xb + xq_{31})z = 0$ olur. R nin asallığı kullanılarak $q_{32}a + q_{33}xb + xq_{31} = 0$ bulunur. Buradan $q_{32}a +$

$q_{33}b + q_{31} = 0$ olur. Benzer olarak δ_2 türev olduğundan, $q_{22}a + q_{23}b + q_{21} = 0$ bulunur. Bu bulduğumuzu (2.20) bağıntısında kullanalım.

$$\begin{aligned} 0 &= (q_{13} + q_{31})z + q_{32}za + q_{33}zb - zq_{13} \\ &= (q_{13} + q_{31})z + z(q_{32}a + q_{33}b) - zq_{13} + zq_{31} - zq_{31} \\ &= (q_{13} + q_{31})z + z(q_{32}a + q_{33}b + q_{31}) - z(q_{13} + q_{31}) \\ &= (q_{13} + q_{31})z - z(q_{13} + q_{31}) \end{aligned}$$

olur. Böylece $q_{13} + q_{31} \in C$ elde edilir. Benzer olarak (2.21) den, $q_{12} + q_{21} \in C$ bulunur.

(2.16) da, (2.14), (2.15) ve q_{ij} elemanlarıyla ilgili bulduklarımızı kullanırsak, $a(xq_{12} + axq_{22} + bxq_{32}) - b(-xq_{13} - axq_{23} - bxq_{33}) = -xq_{11} - axq_{21} - bxq_{31}$ ve bu eşitlikten

$$\begin{aligned} 0 &= axq_{12} + a^2xq_{22} + abxq_{32} + bxq_{13} + baxq_{23} + b^2xq_{33} + xq_{11} + axq_{21} + bxq_{31} \\ &= xq_{11} + ((q_{12} + q_{21})a + (q_{13} + q_{31})b + q_{22}a^2 + (q_{23} + q_{32})ab + q_{33}b^2)x \end{aligned}$$

bulunur. Lemma 3.1.1 kullanılırsa, $q_{11} \in C$ ve $(q_{12} + q_{21})a + (q_{13} + q_{31})b + q_{22}a^2 + (q_{23} + q_{32})ab + q_{33}b^2 \in C$ elde edilir. O halde her $x \in R$ için $(q_{11} + (q_{12} + q_{21})a + (q_{13} + q_{31})b + q_{22}a^2 + (q_{23} + q_{32})ab + q_{33}b^2)x = 0$ olur. Bu son ifadeden de $-q_{11} = (q_{12} + q_{21})a + (q_{13} + q_{31})b + q_{22}a^2 + (q_{23} + q_{32})ab + q_{33}b^2$ elde edilir.

$q_{32}a + q_{33}b + q_{31} = 0$ bağıntısını b ile, $q_{22}a + q_{23}b + q_{21} = 0$ bağıntısını a ile çarparsak $q_{32}ab + q_{33}b^2 + q_{31}b = 0$ ve $q_{22}a^2 + q_{23}ab + q_{21}a = 0$ ifadeleri elde edilir. Bunları üstteki bağıntıda kullanırsak, $q_{12}a + q_{13}b + q_{11} = 0$ bulunur. Şimdi q_{ij} elemanları ile ilgili bildiklerimizi yazalım. $q_{11}, q_{22}, q_{23}, q_{32}, q_{33}, q_{12} + q_{21}, q_{13} + q_{31} \in C$ ve

$$q_{i1} + q_{i2}a + q_{i3}b = 0 \ , \ i = 1, 2, 3 \tag{2.22}$$

dir. Bulunan sonuçlar (2.14) bağıntısında kullanılırsa, $f_1(x) = -xq_{13} - axq_{23} - bxq_{33} + x\,q_{31} - x\,q_{31} + x\,q_{32}a - x\,q_{32}a + xq_{33}b = -x(q_{13} + q_{31}) - x(q_{32}a + q_{33}b) - (q_{23}a + q_{33}b)x + x(q_{31} + q_{32}a + q_{33}b)$ bulunur. Benzer olarak (2.15) bağıntısında (2.22) kullanılırsa,

$f_1(x) = -x(q_{13}+q_{31}) - x(q_{32}a + q_{33}b) - (q_{23}a + q_{33}b)x$

$f_2(x) = x(q_{12}+q_{21}) + x(q_{22}a + q_{23}b) + (q_{22}a + q_{32}b)x$

ifadeleri bulunur.

$\zeta, \xi, \alpha, \beta, \tau, \gamma \in C$ olmak üzere, $\zeta = -\frac{1}{2}(q_{13}+q_{31})$, $\xi = \frac{1}{2}(q_{12}+q_{21})$, $\alpha = -q_{23}$, $\beta = q_{33}$, $\gamma = q_{22}$, $\tau = -q_{32}$ ile gösterelim. Bu durumda

$$u = \zeta + \alpha a - \beta b = -\frac{1}{2}(q_{13}+q_{31}) - q_{23}a - q_{33}b$$

$$t = \zeta + \tau a - \beta b = -\frac{1}{2}(q_{13}+q_{31}) - q_{32}a - q_{33}b$$

$$v = \xi + \gamma a - \tau b = \frac{1}{2}(q_{12}+q_{21}) + q_{22}a + q_{32}b$$

$$s = \xi + \gamma a - \alpha b = \frac{1}{2}(q_{12}+q_{21}) + q_{22}a + q_{23}b$$

olarak tanımlanırsa, .

$$f_1(x) = ux + xt \ , \ f_2(x) = vx + xs \qquad (2.23)$$

olduğu görülür.

Bulunan u, t, s, v katsayıları, en başta seçilen $y_0 \in Y$ elemanı için doğrudur. Farklı $y \in Y$ elemanları için, faklı a, b elemanları ve y'ye bağlı farklı u(y), t(y), s(y), v(y) katsayıları bulunacaktır. O halde herhangi bir $y \in Y$ için,

$$f_1(x) = ux + xt = u(y)x + xt(y) \ , \ f_2(x) = vx + xs = v(y)x + xs(y)$$

yazabiliriz. Bu eşitliklerden $(u(y) - u)x + x(t(y) - t) = 0$ ve $(v(y) - v)x + x(s(y) - s) = 0$ olur. Lemma 3.1.1 kullanılırsa, $u(y) - u$, $t(y) - t$, $v(y) - v$, $s(y) - s \in C$ elde edilir. Buradan, $u(y) - u - t(y) + t = \zeta(y) + \alpha(y)a(y) - \beta(y)b(y) - \zeta - \alpha a + \beta b - \zeta(y) - \tau(y)a(y) + \beta(y)b(y) + \zeta + \tau a - \beta b = (\alpha(y) - \tau(y))a(y) - (\alpha - \tau)a \in C$ ve benzer olarak, $v(y) - v - s(y) + s = (\alpha(y) - \tau(y))b(y) - (\alpha - \tau)b \in C$ bulunur.

Varsayalım ki $\alpha = \tau$ olsun O zaman $(\alpha(y) - \tau(y))a(y) \in C$ olur. Buradan $\alpha(y) \notin C$ olduğundan her $y \in R$ için $\alpha(y) - \tau(y) = 0$ yani $\alpha(y) = \tau(y)$ elde edilir. O halde her $y \in R$ için $\alpha(y) = \tau(y)$ veya her $y \in R$ için $\alpha(y) \neq \tau(y)$ dir.

Eğer $\alpha(y) \neq \tau(y)$ ise,

$$f_1(y) \in Ca + C \text{ ve } f_2(y) \in Cb + C \qquad (2.24)$$

olur. $\alpha = \tau$ olduğu durumda da (2.24) ü elde etmeye çalışalım. Bu durumda u = t, v = s olur. O zaman $f_1(x) = ux + xu$, $f_2(x) = vx + xv$ elde edilir. Ayrıca $u(y) - u \in C$ olduğundan, $u(y) - u = \zeta(y) + \alpha(y)a(y) - \beta(y)b(y) - \zeta - \alpha a + \beta b = q \in C$ ve böylece $\alpha(y)a(y) - \beta(y)b(y) = q - \zeta(y) + \zeta + \alpha a - \beta b \in C + Ca + Cb$ bulunur. Benzer işlemler, $v(y) - v \in C$ için de yapılarak,

$$\alpha(y)a(y) - \beta(y)b(y) \in C + Ca + Cb$$

$$\gamma(y)a(y) - \alpha(y)b(y) \in C + Ca + Cb$$

elde edilir. Bulunan birinci bağıntıyı $\alpha(y)$ ile, ikinciyi $\beta(y)$ ile çarparsak, $\alpha(y)^2 a(y) - \alpha(y)\beta(y)b(y) \in C + Ca + Cb$, $\beta(y)\gamma(y)a(y) - \beta(y)\alpha(y)b(y) \in C + Ca+Cb$ ifadeleri bulunur. İki bağıntıyı topladığımızda i = 1 ve her $y \in Y$ için $(\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y))f_i(y) \in C + Ca + Cb$ elde edilir.

Benzer olarak, birinci bağıntıyı $\gamma(y)$ ile, ikinci bağıntıyı $\alpha(y)$ ile çarparsak, i= 2 ve her $y \in Y$ için, $(\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y))\, f_i(y) \in C + Ca + Cb$ bulunur.

Eğer her $y \in Y$ için $\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y) \neq 0$ ise

$$f_1(y),\, f_2(y) \in C + Ca + Cb \tag{2.25}$$

olur.

$\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y) = 0$ olacak biçimde bir $y \in Y$ elemanı olduğunu varsayalım. Bu durumda $\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y) = \gamma(y)(\zeta(y) + \alpha(y)a(y) - \beta(y)b(y)) - \alpha(y)(\xi(y) + \gamma(y)a(y) - \tau(y)b(y)) = \gamma(y)\zeta(y) - \alpha(y)\xi(y) + (\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y))\, b(y)$ ve böylece $\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y) = \gamma(y)\zeta(y) - \alpha(y)\xi(y) \in C$ elde edilir. $\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y) = \rho \in C$ ile gösterirsek, $\gamma(y)f_1(x) - \alpha(y)f_2(x) = \gamma(y)(u(y)x + xu(y)) - \alpha(y)(v(y)x + xv(y)) = (\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y))x + x(\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y)) = \rho x + x\rho = 2\rho x$ olur. Yani, her $x \in R$ için

$$\gamma(y)f_1(x) - \alpha(y)f_2(x) = 2\rho x \tag{2.26}$$

elde edilir. Burada $\rho = 0$ ise, Y boş küme olmadığından, $\gamma(y) = \alpha(y) = 0$ olur. Böylece, $f_2(x) = v(y)x + xv(y) = 2\xi(y)x$ bulunur. O halde $[f_2(x),x] = [2\xi(y)x,x] = 0$ olur. Benzer işlemler $f_1(x)$ için de yapılırsa, i = 1, 2 ve her $x \in R$ için,

$$[f_i(x),x] = 0$$

elde edilir. Yani f_1 ve f_2 değişmeli dönüşümlerdir. [10] dan, i = 1, 2 ve her $x \in R$ için $f_i(x) = \lambda_i x + \mu_i(x)$ olacak şekilde $\lambda_i \in C$ elemanı ve $\mu_i: R \to C$ toplamsal dönüşümü vardır. O halde $\lambda_2 f_1(x) - \lambda_1 f_2(x) = \lambda_2 \lambda_1 x + \mu_1(x) - \lambda_2 \lambda_1 x - \mu_1(x) \in C$ dir. Yani her $x \in R$ için $f_1(x)$, $f_2(x)$, 1 C-bağımlıdır. Ancak bu sonuç $Y \neq \varnothing$ olmasıyla çeliştiğinden varsayımımız yanlıştır, $\rho \neq 0$ olmak zorundadır. Bulduğumuz bu sonucu ve f_1= ux + xu eşitliğini (2.26) da kullanırsak f_2 değişmeli, f_2 = vx +xv eşitliğini kullanırsak f_1 değişmeli bulunur ve aynı çelişkiye ulaşılır. O halde varsayımımız yanlıştır, her $y \in Y$ için $\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y) \neq 0$ yani i =1,2 ve her $y \in Y$ için $f_i(y) \in C + Ca + Cb$ olmalıdır.

Yani $\alpha(y) = \tau(y)$ olduğu durumda da, $\alpha(y) \neq \tau(y)$ olduğu durumda da (2.25) bağıntısı elde edilir.

Şimdi, F: $R \to C + Ca + Cb$, $F(x) = \rho_1 f_1(x) + \rho_2 f_2(x)$ biçimindeki dönüşümlerin C-kombinasyonları bulalım. Burada (2.23) bağıntısı kullanılırsa, $F(x) = (\rho_1 u + \rho_2 v)x + x(\rho_1 t + \rho_2 s)$ bulunur. Yani $F : RC \to RC$ genelleştirilmiş iç türevdir. Ayrıca R ve RC nin genişletilmiş merkezi C aynıdır. Bu durumda $F : RC \to C + Ca + Cb$ bir dönüşüm olduğundan, her $x \in RC$ için a ve b, F(x) ile değişmelidir. Önerme 3.1.12'den a, b elemanları f(RC) ile değişmeli ve {a, b, 1} kümesi C-bağımsız olduğundan F = 0 olmak zorundadır. O halde her $x \in R$ için $\rho_1 f_1(x) + \rho_2 f_2(x) = 0$ olur.

Eğer $\rho_1 \neq 0$ veya $\rho_2 \neq 0$ ise, $\{f_1(x), f_2(x), 1\}$ kümesi C bağımlı olur ve $Y \neq \varnothing$ olmasıyla çelişir. O halde $\rho_1 = \rho_2 = 0$ olmak zorundadır. Yani f_1 ve f_2 nin, C + Ca + Cb kümesinde sıfırdan farklı C-kombinasyonları yoktur.

Şimdi $f_2: X \to C$ şeklinde olamayacağını görelim. Böyle olsaydı, (2.25) bağıntısından, $f_2 : R \to C + Ca + Cb$ şeklinde bir dönüşüm olurdu ve $f_2 = 0$ çelişkisi elde edilirdi. O halde $f_2(x_0) \notin C$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı vardır. (2.7) bağıntısından $\alpha_1(x_0) \neq 0$ ve $f_1(x_0) - \lambda f_2(x_0) \in C$ elde edilir. Bu şekilde bir x_0 elemanı bulunduğu için 1. adımdan, $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ veya $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ olur. Burada (2.25) kullanılırsa, her $x \in R$ için,

$$f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C + Ca + Cb \text{ veya } [f_2(x), f_2(x_0)] = 0$$

elde edilir. Brauer's Trick'ten, her $x \in R$ için $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C + Ca + Cb$ veya her $x \in R$ için $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ olmalıdır. Eğer her $x \in R$ için $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C + Ca + Cb$ ise, f_1 ve f_2 nin sıfırdan farklı C-kombinasyonları vardır. Ancak bu daha önce bulduğumuz f_1 ve f_2 nin sıfırdan farklı C-kombinasyonları olamayacağı sonucuyla çelişir. O halde her $x \in R$ için $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ olur.

$\alpha_1(x_0) \neq 0$ olacak şekildeki her $x_0 \in X$ elemanı için yukarıdaki sonuca ulaşılır. $\alpha_1(x_0) = 0$ olan x_0 elemanları için ise, $f_2(x_0) \in C$ olacağından yine $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ koşulu sağlanır. O halde bulunan sonuç, X kümesinin her elemanı için doğrudur. Her $x \in R$ ve $z \in X$ için,

$$[f_2(x), f_2(z)] = 0$$

olur. Eğer x ile z, Y kümesinin elemanı ise, (2.25) den $f_1(x), f_2(z) \in C + Ca + Cb$ bulunur ve yine $[f_2(x), f_2(z)] = 0$ elde edilir. $x_0 \in X$ olsa da, $x_0 \in Y$ olsa da aynı sonuç elde edildiğinden, her $x, y \in R$ için $[f_2(x), f_2(y)] = 0$ elde edilir. Benzer işlemleri $f_1(x)$ için yaparsak her $x, y \in R$ için $[f_1(x)\ f_1(y)] = 0$ bulunur. Bu da 2. adımın başındaki koşulun sağlanması demektir. Koşul sağlandığından, 2. adımdan devam edilirse, her $x \in R$ için, $f_1(x) = \lambda f_2(x)$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır. O zaman her $x \in R$ için $\{f_1(x), f_2(x), 1\}$ kümesi C-bağımlıdır. Yani Y kümesi boş kümedir. X= R olur. Buradan da 3. adım kullanılarak ispat tamamlanır.

3.2 E. Albaş, N. Argaç, Generalized Derivations of Prime Rings, (2004)

Bu makale boyunca R asal halka olarak alınmıştır.

Lemma 3.2.1: $d : R \rightarrow R$ türev olsun. $d(R) \subseteq R$ ise $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 3.2.2: [32, Teorem 2] $d : R \rightarrow R$ sıfırdan farklı türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $[d(x),x] \in Z$ ise R halkası komütatiftir.

Lemma 3.2.3: [27, Teorem 3] $\mathrm{char}R \neq 2$ ve d, R halkasının türevi olsun. Eğer $d^2(R) \subseteq Z$ ise $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 3.2.4: [11, Teorem 1] charR$\neq 2$ ve J, R halkasının bir ideali ve f:R$\rightarrow$R toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her x$\in$J için xf(x) + f(x)x = 0 ise her x$\in$J için f(x) = 0 dır.

Lemma 3.2.5: [14, Teorem 1] R bir asal halka ve d:R$\rightarrow$R bir türevi olsun. n$\geq$1 sabit bir tamsayı olmak üzere, her x$\in$R için $d(x)^n$ = 0 ise o zaman d = 0 dır.

Lemma 3.2.6 : [7, Uyarı 2.3.1] R bir asal halka ve q$\in Q_r(R_C)$ olsun. q elemanı, R halkasının her elemanıyla yer değiştiriyorsa o zaman $q \in C$ dir.

Lemma 3.2.7: [12, Lemma 1] R bir asal halka ve $a_i, b_i \in Q_r(R_C)$ olsun. Her $x \in R$ için $\sum a_i x b_i = 0$ ise o zaman tüm a_i lerin veya tüm b_i lerin hepsi sıfır olmadıkça a_i ve b_i elemanları C-bağımlıdırlar.

Lemma 3.2.8: [30, Lemma 1] a_i, b_i, c_i, $d_i \in Q_r(R)$ ve 1$\leq$i$\leq$m, 1$\leq$j$\leq$n olmak üzere her x$\in$R için $\sum_{i=1}^{m} a_i x b_i + \sum_{j=1}^{n} c_j x d_j = 0$ olsun. Eğer $a_1, a_2, ..., a_m$ C–bağımsız ise, b_i ler $d_1, d_2, ..., d_n$ ile C-bağımlıdırlar. Benzer olarak $b_1, b_2, ..., b_m$ C-bağımsız ise, a_i ler $c_1, c_2, ..., c_n$ ler ile C-bağımlıdır.

Lemma 3.2.9: [12, Önerme 8] R bir asal halka olsun. $1 \leq i \leq k$ ve $1 \leq j \leq n$ için $a_j, c_i \in$R ve $f_j : R \rightarrow R$ ve $h_i : R \rightarrow R$ herhangi dönüşümler olmak üzere her x, z$\in$R için $\sum_{j=1}^{n} f_j(z) x a_j + \sum_{i=1}^{k} c_i z h_i(x) = 0$ olsun. $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ve $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$ kümeleri C-bağımsız ise o zaman

$$f_j(z) = -\sum_{i=1}^{k} c_i z q_{ij} \quad \text{ve} \quad h_i(z) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x a_j$$

olacak şekilde $q_{ij} \in Q_r(R_C)$ vardır.

Lemma 3.2.10 : [23, Lemma 2] R bir asal halka ve $f : R \rightarrow R_C$ her x,y$\in$R için f(xy) = f(x)y koşulunu sağlayan bir toplamsal dönüşüm olsun. O zaman her x$\in$R için f(x) = qx olacak şekilde q$\in Q_r(R_C)$ vardır.

Lemma 3.3.11 : [23, lemma3] R komütatif olmayan halka ve F : R$\rightarrow$C genelleştirilmiş türev olsun. O zaman F = 0 dır.

Lemma 3.2.12 : [23, Sonuç 5] d : R$\rightarrow$R genelleştirilmiş türev olsun. d^2 genelleştirilmiş türevdir. $\Leftrightarrow$ her x$\in$R için f(x) = ax veya f(x) = xa olacak şekilde a$\in Q_r$(RC) vardır. Ayrıca, d^2 = 0 $\Leftrightarrow$ a^2 = 0 d(x) = ax veya d(x) = xa dır.

Lemma 3.2.13 : [30, Teorem 13] R değişmeli olmayan asal halka, g_1 ve g_2 R halkasının sıfırdan farklı genelleştirilmiş türevleri olsun. Her $x\in$R için $[g_1(x), g_2(x)] = 0$ ise o zaman her $x\in$R için $g_2(x) = \lambda g_1(x)$ olacak şekilde $\lambda \in$C vardır.

Lemma 3.2.14 : R değişmeli olmayan bir halka ve R nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi (d, α) olsun. Her x$\in$R için [x,d(x)] = 0 ise o zaman her x$\in$R için d(x) = λ x olacak şekilde $\lambda \in$C vardır.

İspat : I(xy) = xy = I(x)y + x0(y) şeklinde yazılabildiği için, R üzerinde birim dönüşüm, R üzerinde sıfır dönüşümü ile belirlenen genelleştirilmiş türevdir.

Hipotezden 0 = [x,d(x)] = [I(x),d(x)] elde edilir. Burada Lemma 3.2.13 kullanılırsa, her x$\in$R için d(x) = λ x olacak şekilde $\lambda \in$C vardır.

Teorem 3.2.15: R değişmeli olmayan bir halka ve R halkasının bir genelleştirilmiş türevi (d, α) olsun. Her x,y$\in$R için d([x,y]) = 0 ise o zaman d = 0 dır.

İspat: Her x,y$\in$R için d([x,y]) = 0 olsun. y yerine yx alınıp hipotez kullanılırsa, her x,y $\in$R için, 0 = d([x,y]) = d([x,y]x) = d([x,y])x + [x,y]α(x) = [x,y]α(x) elde edilir. Buradan her r,x,y $\in$R için

[x,yr]α(x)= [x,y]rα(x)+ y[x,r]α(x)=0

olur. Yukarıdaki bağıntıda toplamın ikinci terimi sıfır olduğundan, [x,y]Rα(x)=0 bulunur. R bir asal halka olduğundan, son eşitlik x$\in$Z veya α(x)=0 olmasını gerektirir.

R halkasının H = {x$\in$R| x$\in$Z} ve K = {x$\in$R| α(x)=0} alt kümelerini tanımlayalım. H ve K, H$\cup$K = R olacak şekilde R halkasının iki toplamsal alt grubudur. Fakat bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamadığından, R=H veya R = K olmalıdır. R değişmeli olmayan bir halka olduğundan R$\neq$H dır, R=K olmalıdır. Bu ise α = 0 demektir. Böylece Lemma 3.2.10'dan her x$\in$R için d(x) = qx olacak şekilde q$\in Q_r(R_C)$ vardır. Öyleyse hipotezden, d([x,y]) = q[x,y] = 0 elde edilir.

Son eşitlikte y yerine yr yazılırsa, her r,x,y $\in$R için 0 = q[x,yr] = q[x,y]r + qy[x,r] = qy[x,r] olur. R değişmeli olmayan bir asal halka olduğundan, q = 0 dır. Bu durumda d(x) = qx olduğundan d = 0 elde edilir.

Teorem 3.2.16: R değişmeli olmayan halka ve (d,α) R halkasının bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her x,y $\in$R için d([x,y]) = [x,y] veya d([x,y]) = – [x,y] ise o zaman sırasıyla d = I_R veya d = – I_R dır.

İspat: Her x,y$\in$R için d([x,y]) = [x,y] olduğunu kabul edelim. y yerine yx alınıp hipotez kullanılarak, her x,y $\in$R için, d([x,y x]) = d([x,y]x) = d([x,y])x + [x,y]α(x) = [x,y]x olur ve buradan [x,y]α(x) = 0 elde edilir. Teorem 3.2.15 in ispatındaki benzer işlemler yapılarak α = 0 bulunur. Böylece Lemma 3.2.10 dan, d(x) = qx olacak şekilde q$\in Q_r(R_C)$ vardır. Bulunan bu sonuç hipotezde kullanılarak, her x,y $\in$R için d([x,y]) = q[x,y] = [x,y] elde edilir. Bu eşitlikte x yerine rx, r$\in$R alınırsa, q[rx,y] = [rx,y] ve böylece qr[x,y] = r[x,y] bulunur. Buradan her x, y$\in$R için (qr – r)[x,y] = 0 dır. Son eşitlikte x yerine zx yazıldığında, her r,x,y,z $\in$R için (qr – r)z[x,y] = 0 elde edilir. R halkası sıfırdan farklı değişmeli olmayan bir asal halka olduğundan, (qr – r) = 0 veya [x,y] = 0 yani her r $\in$R için qr = r bulunur. Bu ise d = I_R demektir.

Her x,y $\in$R için d([x,y]) = – [x,y] olduğunu kabul edelim. İlk durumdaki benzer işlemler kullanılarak, r$\in$R için qr = – r ve buradan da d = – I_R elde edilir.

Sonuç 3.2.17: R değişmeli olmayan bir halka ve (d,α) R halkasının bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her x,y $\in$R için d(xy) = xy veya d(xy) = – xy ise o zaman sırasıyla d = I_R veya d = – I_R dır.

İspat: Her x,y$\in$R için d(xy) = xy ve d(yx) = yx olduğundan d([x,y]) = d(xy – yx) = d(xy) – d(yx) = xy – yx = [x,y] yazabiliriz

O zaman Teorem 3.2.16 dan d = I_R bulunur. Benzer biçimde d(xy) = – xy ise d= – I_R olur.

Teorem 3.2.18: R halkasının bir genelleştirilmiş türevi (d,α) olsun. d, R üzerinde homomorfizma (sırasıyla, ters-homomorfizma) olarak hareket ediyorsa o zaman d = 0 veya d = I_R dır.

İspat: İlk olarak d nin, R üzerinde bir homomorfizma olarak hareket ettiğini kabul edelim. O zaman her x,y $\in$R için

$$d(xy) = d(x)d(y) = d(x)y + x\alpha(y) \qquad (2.27)$$

olur. (2.27) de y yerine yz alınırsa, her x, y, z$\in$R için d(x)d(yz) = d(x)yz + xα(yz) bulunur. Buradan (d,α) bir genelleştirilmiş türev ve α bir türev olduğundan, d(x)d(y)z + d(x)yα(z) = d(x)yz + xα(y)z + xyα(z) bağıntısına ulaşılır. Son eşitlikte (2.27) kullanılırsa, d(x)yz + xα(yz) + d(x)yα(z) = d(x)yz + xα(y)z + xyα(z), buradan her x,y $\in$R için (d(x) – x)Rα(z) = 0 elde edilir.

R nin asallığından, (d(x) – x) = 0 veyaα(z) = 0 yani d, R üzerinde birim dönüşümdür veya α=0 dır.

İlk olarak d, birim dönüşüm olsun. O zaman genelleştirilmiş türev tanımından d(xy) = I(xy) = I(x)y + xα(y) = xy olması için α= 0 olmalıdır. Böylece her iki durumdan α= 0 elde edilir. Lemma 3.2.10 dan d(x) = qx olacak şekilde q$\in Q_r(R_C)$ vardır. Böylece (2.27) den her x,y $\in$R için qxy = qxqy olur. Bu ise, her x,y $\in$R için qx(qy – y) = 0 olmasını gerektirir. R nin asallığından, q = 0 veya her y$\in$R için qy = y elde edilir. Bu ise d = 0 veya d = I_R demektir.

Şimdi d genelleştirilmiş türevinin R üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket ettiğini kabul edelim. O zaman her x,y $\in$R için d(xy) = d(y)d(x) = d(x)y + xα(y) olur. Bu bağıntıda x yerine xy alınırsa, d(y)d(xy) = d(xy)y + xyα(y) ve buradan da d(y)d(x)y + d(y)xα(y) = d(y)d(x)y + xyα(y) bulunur. Bu bağıntı, her x,y $\in$R için d(y)xα(y) = xyα(y) eşitliğini verir. Buradan x yerine d(x) yazılıp, d nin R üzerinde bir ters homomorfizma olduğu kullanılarak, her x,y$\in$R için d(y)d(x)α(y) = d(xy)α(y) = d(x)yα(y) bulunur. d aynı zamanda bir genelleştirilmiş türev olduğundan, her x, y$\in$R için d(xy)α(y) = d(x)yα(y) + x$\alpha(y)^2$ = d(x)yα(y) olur. Buradan her x,y $\in$R için, x$\alpha(y)^2$ = 0 yani R$\alpha(y)^2$ = 0 elde edilir. Böylece her y $\in$R için $\alpha(y)^2$ = 0 olur. Lemma 3.2.5 den α= 0 dır. O zaman Lemma 3.2.10 den d(x) = qx olacak şekilde bir q$\in Q_r(R_C)$ vardır. d dönüşümü R üzerinde ters homomorfizma olarak hareket ettiğinden, her x$\in$R için d(xy) = qxy = qyqx dir. Bu eşitliğin her iki tarafı sağdan r ile çarpılarak, her r,x,y $\in$R için, qxyr = qyqxr bulunur ve yine aynı eşitlikte x yerine xr alınarak, qxry = qyqxr elde edilir. Son iki eşitlik karşılaştırılırsa, her r,x,y$\in$R için

$$qx[r,y] = 0$$

eşitliğine ulaşılır. R halkasının asallığı kullanılırsa q = 0 veya [r,y] = 0 buradan da q=0 veya R değişmeli bulunur. O halde d = 0 veya R değişmelidir.

R değişmeli ise d(xy) = d(y)d(x) = d(x)d(y) yani d homomorfizma olur. Teoremin birinci kısmından, d = 0 veya d = I_R elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.19: R halkasının iki genelleştirilmiş türevi (d,α) ve (g,β) ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için ad(x) = g(x)a ise o zaman aşağıdaki koşullardan biri sağlanır.

(i) $a \in C$ dir. Bu durumda a = 0 veya d = g dir.

(ii) Her $x \in R$ için α(x) = [x,p], d(x) = wx + xp, β(x) = [q,x], g(x) = px – xq olacak şekilde $q \in Q_r(R_C)$ ve $w \in Q_r(R)$ vardır. Üstelik, bu durumda $qa \in C$, qa + aw = 0 dır.

İspat : Her $x \in R$ için

ad(x) = g(x)a (2.28)

olduğunu kabul edelim. (2.28) de x yerine xr alınırsa, her $r,x \in R$ için

ad(x)r+axα(r)-g(x)ra-xβ(r)a=0 (2.29)

elde edilir.

F_1(x) = ad(x), F_2(x) = – g(x), H_1(r) = –β(r)a, H_2(r) = α(r), a_1= 1, a_2= a, c_1 = 1, c_2= a olarak seçildiğinde (2.29) bağıntısının,

$$\sum_{j=1}^{2} F_j(x) r a_j + \sum_{i=1}^{2} c_i x H_i(r) = 0$$

formunda olduğu görülür. Burada iki durum söz konusudur:

I) $a \in C$ ise o zaman a = 0 veya d = g dir.

$a \in C$ ise her $x \in R$ için 0 = ad(x) – g(x)a = ad(x) – ag(x) = a(d(x) – g(x)) olur. R halkası asal olduğundan a = 0 veya d = g elde edilir.

II) $a \notin C$ ise {1,a} kümesi C-bağımsızdır.

{1,a} kümesinin C-bağımlı olduğunu varsayalım. C cisim olduğundan, ax + 1y = 0 olacak şekilde $0 \neq x,y \in C$ elemanları vardır. Bu eşitlikten ax = 1(–y) yani $ax(-y)^{-1}$ = 1 bulunur. $x(-y)^{-1} = b \in C$ ile gösterilirse, ab =1 ve böylece $a \in C$ elde edilir. Bu sonuç $a \notin C$ olmasıyla çeliştiği için varsayımımız yanlıştır, {1,a} kümesi C-bağımsızdır.

Buradan i, j = 1,2 olmak üzere Lemma 3.2.9 dan, her r,x$\in$R için

$$F_j(x) = -\sum_{i=1}^{2} c_i x q_{ij} \quad \text{ve } H_i(r) = \sum_{j=1}^{2} q_{ij} r a_j$$

olacak şekilde $q_{ij} \in Q_r(R_C)$ vardır. O zaman

$$ad(x) = -xq_{11} - ax\, q_{21} \tag{2.30}$$

$$g(x) = x\, q_{12} + ax\, q_{22} \tag{2.31}$$

$$-\beta(r)a = q_{11} r + q_{12} r \tag{2.32}$$

$$\alpha(r) = q_{21} r + q_{22} ra \tag{2.33}$$

elde edilir. (2.30) da x yerine xz, z$\in$R alınarak, ad(x)z + ax $\alpha(z) = -x\, q_{11} - axq_{21}$ bulunur. Son eşitlikte (2.31) ve (2.33) kullanılarak, $x(z\, q_{11} - q_{11} z) + ax(q_{22} za + z\, q_{21}) = 0$ elde edilir. {1,a} kümesi C-bağımsız olduğundan, Lemma 3.2.7 ve Lemma 3.2.6 göz önüne alınarak, $1x(z\, q_{11} - q_{11} z) + ax(q_{22} za + z\, q_{21}) = 0$ ve buradan da $[z,q_{11}] = 0$ ve $(q_{22} za + z\, q_{21}) = 0$ bulunur. O halde $q_{11} \in C$ ve $(q_{22} za + z\, q_{21}) = 0$ dır. Lemma 3.2.7 den, son bağıntı $q_{22} \in C$ ve $q_{22} a = -q_{21}$ bağıntılarını gerektirir. (2.31) de x yerine xr alınıp, (2.31) kullanılırsa, her r,x $\in$R için $x(\beta(r) + [q_{12},r]) = 0$ elde edilir. Böylece R nin asallığından, her r $\in$R için $\beta(r) = [r,q_{12}]$ dır. Son eşitlik (2.32) de kullanılarak, her r $\in$R için $q_{11} r + r\, q_{12} a = 0$ bulunur ve $q_{11} \in C$ olduğundan, $r(q_{11} + q_{12} a) = 0$ elde edilir. Böylece $q_{11} = -q_{12} a$ olur. (2.33) bağıntısına göre $\alpha(r) = q_{21} r + q_{22} ra = q_{21} r + rq_{22} a = q_{21} r - rq_{21} = [q_{21},r]$ yani her r $\in$R için $\alpha(r) = [q_{21}, r]$ olur. $-q_{12} = q$, $-q_{21} = p$ ve $q_{22} = \lambda$ olarak gösterilirse her r $\in$R için

$$qa \in C,\ p = \lambda a \in Q_r(R),\ \beta(r) = [q,r],\ \alpha(r) = [r,p] \tag{2.34}$$

elde edilir. Böylece (2.31) den, her r $\in$R için

$$g(r) = pr - rq \tag{2.35}$$

olur.

Genelliği bozmaksızın R nin herhangi bir genelleştirilmiş türevi $Q_r(R)$ nin bir genelleştirilmiş türevine tek türlü genişletilebilir. Buradan her x$\in$R için d(x) = ux + α(x) olacak şekilde u$\in Q_r(R)$ vardır. Böylece (2.34) den, her x $\in$R için d(x) =

$ux + \alpha(x) = ux + [x,p] = ux + xp - px = (u - p)x + xp$ elde edilir. Son eşitlikte $u - p = w$ diyelim. Buradan her $x \in R$ için

$$d(x) = wx + xp \qquad (2.36)$$

olacak şekilde $w \in Q_r(R)$ vardır. Böylece d, bir genelleştirilmiş iç türevdir. (2.28), (2.35) ve (2.36) bağıntılarından, her $x \in R$ için $awx + axp = pxa - xqa$ bulunur. (2.34) den $qa \in C$ ve her $x \in R$ için $axp = ax\lambda a = \lambda axa = pxa$ olduğundan, her $x \in R$ için $(aw + qa)x = 0$ olur. R nin asallığından $aw + qa = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Özel olarak d = g alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.20: R halkasının bir genelleştirilmiş türevi (d, α) ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $[a,d(x)] = 0$ ise o zaman $a \in C$ veya her $x \in R$ için $d(x) = \mu x + \lambda(ax + xa)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in C$ vardır.

İspat: $a \in C$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. $a \notin C$ olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 3.2.19 kullanılırsa her $x \in R$ için $d(x) = wx + xp = px - xq$ olacak şekilde $p, q \in Q_r(R_C)$ vardır. Son bağıntıdan her $x \in R$ için $(w - p)x + x(p + q) = 0$ elde edilir. Böylece Lemma 3.2.7 den, yukarıdaki bağıntı $p + q$ ve $w - p \in C$ olmasını gerektirir. Buradan her $x \in R$ için, $0 = (w - p + p + q)x = (w + q)x$ dır. R halkasının asallığından $w + q = 0$ bulunur. Son eşitlik ve ayrıca $p = \lambda a$ olduğu kullanılırsa, her $x \in R$ için, $d(x) = wx + xp = -qx + xp = -qx + xp + px - px = -(p + q)x + \lambda(xa + ax)$ olur.

Böylece $-(p + q) = \mu \in C$ olarak gösterilirse $d(x) = \mu x + \lambda(ax + xa)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in C$ elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.21: R değişmeli olmayan bir halka ve (d, α) R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x \in R$ için $[x,d(x)] \in Z$ ise o zaman her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak şekilde $q \in C$ vardır.

İspat: $Z = (0)$ ise $[x,d(x)] = 0$ olur. O zaman Lemma 3.2.14 den her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak şekilde $q \in C$ vardır. Bu da ispatın tamamlanması demektir.

$\alpha = 0$ ise o zaman $d(xy) = d(x)y + x0(y) = d(x)y$ olur. Lemma 3.2.10 dan, her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak şekilde $q \in Q_r(R_C)$ vardır. Şimdi $q \in C$ olduğunu görelim. Son bağıntının hipotezde kullanılmasıyla, her $x \in R$ için $[x,q]x \in Z$ elde edilir. Bu bağıntının lineerleştirilmesiyle, her $x,y \in R$ için $[x,q]y + [y,q]x \in Z$ bulunur.

Özel olarak, yukarıdaki bağıntıda y yerine $c \in Z$ alınırsa, her $x \in R$, $c \in Z$ için $[x,q]c + [c,q]x = [x,q]c \in Z$ elde edilir. O zaman $[x,q] \in Z$ veya $Z = 0$ dir.

$Z = (0)$ durumu yukarıda incelenmişti. $[x,q] \in Z$ olsun. Lemma 3.2.11 kullanılırsa, R halkasının iç türevi I_q olmak üzere $I_q(x) = [x,q] = 0$ elde edilir. Böylece, Lemma 3.2.6 dan $q \in C$ dir. Bu da ispatın tamamlanması demektir.

Şimdi $\alpha \neq 0$ ve $Z \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. $[x,d(x)] \in Z$ bağıntısının lineerleştirilmesiyle, her $x \in R$ için $[x,d(y)] + [y,d(x)] \in Z$ elde edilir.

Yukarıdaki bağıntıda y yerine yx alınarak, her $x,y \in R$ için

$$\begin{aligned}[x,d(xy)] + [yx,d(x)] &= [x,d(y)x + y\alpha(x)] + [yx,d(x)] \\ &= [x,d(y)]x + [x,y]\alpha(x) + y[x,\alpha(x)] \\ &\quad + [y,d(x)]x+y[x,d(x)]\end{aligned}$$

ve böylece

$$[x,d(y)]x + [x,y]\alpha(x) + y[x,\alpha(x)] + [y,d(x)]x+y[x,d(x)] \in Z \qquad (2.37)$$

bağıntısına ulaşılır. c, Z nin herhangi bir elemanı olmak üzere (2.37) de x yerine c alınarak, $[c,d(y)]c + [c,y]\alpha(c) + y[c,\alpha(c)] + [y,d(c)]c + y[c,d(c)] = [y,d(c)]c \in Z$ bulunur. O zaman, $c = 0$ veya $[y,d(c)] \in Z$ dir. Her $y \in R$ için $[y,d(c)] \in Z$ ise, yani $I_{d(c)}(y) = [y,d(c)] \in Z$ ise Lemma 3.3.1 den, her $y \in R$ için $I_{d(c)}(y) = 0$ dır. Böylece her iki durum da $d(Z) \subseteq Z$ olmasını gerektirir. $Z \neq (0)$ olduğundan, $0 \neq c_0 \in Z$ elemanı seçilebilir. (2.37) de y yerine c_0 yazılıp $d(Z) \subseteq Z$ olması kullanılırsa, her $x \in R$ için $c_0([x,\alpha(x)] + [x,d(x)]) \in Z$ bağıntısı elde edilir. Buradan $c_0 = 0$ veya $([x,\alpha(x)] + [x,d(x)]) \in Z$ bulunur. Böylece $c_0 \neq 0$ olduğundan, her $x \in R$ için $[x,\alpha(x)] + [x,d(x)] \in Z$ olur. $[x,d(x)] \in Z$ olduğundan, her $x \in R$ için $[x, \alpha(x)] \in Z$ dir ve Lemma 3.2.2 den R değişmelidir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\alpha \neq 0$ ve $Z \neq (0)$ olamaz.

Teorem 3.2.22: $\mathrm{char}R \neq 2$ ve (d,α) R halkasının sıfırdan farklı genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x \in R$ için $xd(x) + d(x)x \in Z$ ise o zaman her $x \in R$ için $[x,d(x)] = 0$ dır.

İspat: $Z = (0)$ ise o zaman Lemma 3.2.4 den $d = 0$ olur ve hipotezde d nin sıfırdan farklı verilmesiyle çelişir. Bu nedenle $Z \neq (0)$ olmak zorundadır. $xd(x) + d(x)x \in Z$ bağıntısını lineerleştirelim. Her $x,y \in R$ için, $(x + y)d(x + y) + d(x + y)(x + y) = (x + y)(d(x) + d(y)) + (d(x) + d(y))(x + y) = xd(x) + xd(y) + yd(x) + yd(y) + d(x)x + d(x)y + d(y)x + d(y)y \in Z$ bulunur. Buradan,

$$xd(y) + yd(x) + d(x)y + d(y)x \in Z \qquad (2.38)$$

elde edilir.

Sıfırdan farklı bir $c \in Z$ elemanı seçelim. (2.38) de y ve x yerine sırasıyla yc ve c yazılarak, her $y \in R$ için $c(2y\alpha(c) + 2d(y)c + d(c)y + yd(c)) \in Z$ bağıntısına ulaşılır. $c \neq 0$ olduğundan, her $y \in R$ için

$$2y\alpha(c) + 2d(y)c + d(c)y + yd(c) \in Z \qquad (2.39)$$

elde edilir. (2.38) de x yerine c alınarak, her $y \in R$ için

$$cd(y) + yd(c) + d(c)y + d(y)c \in Z \qquad (2.40)$$

bulunur. (2.39) bağıntısında (2.40) bağıntısı kullanılarak $2y\alpha(c) \in Z$ elde edilir. $charR \neq 2$ olduğundan, her $y \in R$ için $y\alpha(c) \in Z$ dir. Buradan α bir türev olduğundan $\alpha(xc) = \alpha(x)c + x\alpha(c)$ ve $\alpha(cx) = \alpha(c)x + c\alpha(x)$ yazabiliriz. $\alpha(xc) = \alpha(xc)$ olduğundan $\alpha(c) \in Z$ elde edilir. O zaman $\alpha(c) = 0$ veya R değişmelidir.

$\alpha(c) = 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece (2.39) da y yerine c alınarak, $2d(c)c + d(c)c + cd(c) \in Z$ elde edilir. Hipotezde $d(c)c + cd(c) \in Z$ olduğundan, yukarıdaki bağıntı $2d(c)c \in Z$ ye indirgenir. $charR \neq 2$ olduğundan, $d(c)c \in Z$ dir. Buradan $0 \neq c \in Z$ gerçeğinden, $d(c) \in Z$ sonucuna ulaşılır. O zaman (2.40) den, her $y \in R$ için $d(c)y + d(y)c \in Z$ dir. Özel olarak, her $y \in R$ için $0 = [d(c)y + d(y)c, y] = [d(c),y]y + [d(y),y]c = [d(y),y]c$ olur.

$c \in Z$ ve R halkasının asallığından, $[d(y),y] = 0$ veya $c = 0$ elde edilir. $0 \neq c$ olduğundan her $y \in R$ için $[d(y),y] = 0$ bulunur.

Sonuç 3.2.23: $charR \neq 2$ ve R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi (d,α) olsun. Her $x \in R$ için $xd(x) + d(x)x \in Z$ ise o zaman R değişmelidir.

İspat: R halkasının değişmeli olmadığını kabul edelim. Teorem 3.2.22 dikkate alındığında, her $x \in R$ için $[d(x),x] = 0$ dır. O zaman Lemma 3.2.14 den, her $x \in R$ için $d(x) = \lambda x$ olacak şekilde $\lambda \in R$ vardır. Böylece hipotezden, her $x \in R$ için $x(\lambda x) + (\lambda x)x = 2\lambda x^2 \in Z$ olur. R halkasının asallığından, $charR \neq 2$ ve $\lambda \in C$ olmasından, her $r \in R$ için, $0 = [\lambda x^2, r] = \lambda[x^2, r]$ ve böylece $\lambda = 0$ veya $x^2 \in Z$ elde edilir.

Eğer $\lambda = 0$ ise $d = 0$ olur. Bu sonuç hipotezde d nin sıfırdan farklı verilmesiyle çelişir.

Eğer $x^2 \in Z$ ise, her $x,y \in R$ için $xy + yx \in Z$ dir. Özel olarak $c \in Z$ için $xc + cx = 2cx \in Z$ olur. Buradan $charR \neq 2$ olduğu kullanılırsa $cx \in Z$ elde edilir. R halkası komütatif olmadığından her $c \in Z$ için c = 0 yani Z = 0 bulunur. Hipotezden, xd(x) + d(x)x = 0 olur. Lemma 3.3.4 den d = 0 elde edilir, çelişkidir. O halde varsayımımız yanlıştır, R halkası değişmelidir.

Teorem 3.2.24: R değişmeli olmayan bir halka, R halkasının $\alpha(Z) \neq 0$ olacak şekilde bir genelleştirilmiş türevi (d, α) ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için, $[a,d(x)] \in Z$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

İspat: Her $x \in R$ için $[a,d(x)] \in Z$ olduğunu kabul edelim. $\alpha(Z) \neq 0$ olduğundan, $\alpha(c) \neq 0$ olacak şekilde bir $c \in Z$ vardır. Üstelik α bir türev olduğundan, $\alpha(c) \in Z$ olur. Hipotezde x yerine xy yazalım. O zaman her $x,y \in R$ için

$$[a,d(x)]y+d(x)[a,y]+[a,x]\alpha(y)+x[a,\alpha(y)] \in Z$$

olur. Yukarıdaki bağıntıda y yerine c yazılıp hipotez kullanılırsa, $[a,x]\alpha(c) \in Z$ elde edilir. $0 \neq \alpha(c) \in Z$ ve R asal olduğundan, her $x \in R$ için $[a,x] \in Z$ olur. Son bağıntı, R halkasının bir iç türevi $I_a(x)$ = ax – xa olmak üzere $I_a(x) \in Z$ şeklinde yazılabilir. Böylece Lemma 3.2.1 den, her $x \in R$ için $I_a(x) \in Z$ elde edilir. Buradan $I_a(R) \subseteq Z$ ve R değişmeli olmadığından, her $x \in R$ için $I_a(x)$ = [a,x] = 0 bulunur. O halde $a \in Z$ dir.

Sonuç 3.2.25: R değişmeli olmayan bir halka olsun. $\alpha(Z) \neq (0)$ olacak şekilde R halkasının bir (d,α) genelleştirilmiş türevini ele alalım. $[d(R),d(R)] \subseteq Z$ ise o zaman d = 0 dır.

İspat : $[d(R),d(R)] \subseteq Z$ olsun. O halde her $x,y \in R$ için $[d(x),d(y)] \in Z$ olur. Teorem 3.2.24 kullanılırsa her $x \in R$ için $d(x) \in Z$ yani $d(R) \subseteq Z$ elde edilir. Buradan Lemma 3.2.11 den d = 0 bulunur.

Teorem 3.2.26: R komütatif olmayan halka, $\text{char}R \neq 2$ ve $(d,\alpha) \neq 0$ olsun. $d^2(R) \subset Z$ ise $\alpha(Z) = (0)$ dır ve aşağıdakilerden biri sağlanır.

(i) $a^2 = 0$, her $x \in R$ için d(x) = ax ve $\alpha(x) = [x,a] \neq 0$ olacak şekilde $a \in Q_r(R_C)$ vardır.

(ii) $a^2 = 0$, her $x \in R$ için d(x) = ax ve $\alpha = 0$ olacak şekilde $a \in Q_r(R_C)$ vardır.

(iii) Her $x \in R$ için $d(x) = \lambda x + \alpha(x)$ ve $\alpha \neq 0$ olacak şekilde $0 \neq \lambda \in C$ vardır.

İspat: $d \neq 0$ olduğundan Lemma 3.2.11 den $d(R) \not\subset Z$ yazılabilir. $d^2(R) \subseteq Z$ olsun. Her $x,y \in R$ için, $d^2(xy) = d(d(x)y + x\alpha(y)) = d^2(x)y + 2d(x)\alpha(y) + x\alpha^2(y) \in Z$ bulunur. Özel olarak y yerine $c \in Z$ alınırsa, $d^2(x)c + 2d(x)\alpha(c) + x\alpha^2(c) \in Z$ olur. Buradan her $x \in R$, $c \in Z$ için

$$2d(x)\alpha(c) + x\alpha^2(c) \in Z \tag{2.41}$$

elde edilir. (2.41) bağıntısında x yerine d(x) alınırsa $x\alpha^2(c) \in Z$ bulunur. Böylece $d(x) \in Z$ veya $\alpha^2(c) = 0$ elde edilir. $d(R) \not\subset Z$ olduğundan $\alpha^2(Z) = 0$ olur. Bu durumda (2.41) den $2d(x)\alpha(c) \in Z$ dir. $\mathrm{char}R \neq 2$ ve $d(R) \not\subset Z$ olduğu kullanılırsa $\alpha(Z) = 0$ bulunur. O halde $d(xc) = d(x)c + x\alpha(c) = d(cx) = d(c)x + c\alpha(x)$ olur. Buradan her $x \in R$, $c \in Z$ için

$$d(c)x + c\alpha(x) = d(x)c \tag{2.42}$$

elde edilir (2.16) eşitliğinde x yerine d(x) alınıp $d^2(R) \subseteq Z$ olduğu kullanılırsa her $x \in R$, $c \in Z$ için

$$d^2(x)c \in Z \tag{2.43}$$

bulunur. (2.43) bağıntısında x yerine d(x) alınırsa, $d(c)d^2(x) \in Z$ ve buradan da $d(Z) \subseteq Z$ veya $d^2(R) = 0$ elde edilir.

Eğer $d^2(R) = 0$ ise Lemma 3.2.12 den $a^2 = 0$ olmak üzere $d(x) = ax$ veya $d(x) = xa$ olacak $a \in Q_r(R_C)$ vardır.

$a^2 = 0$ olmak üzere $d(x) = xa$ olduğu durumu ele alalım. O zaman her $x,y \in R$ için $d(xy) = xya = d(x)y + x\alpha(y) = xay + x\alpha(y)$ olur. Buradan $xya = xay + x\alpha(y)$ elde edilir. Bu eşitlik sağdan a ile çarpılırsa ve R halkasının asallığı kullanılırsa $\alpha(y)a = -aya$ elde edilir. y yerine yr, $r \in R$ yazılırsa, her $x,y \in R$ için $(\alpha(y) - ya + ay)ra = 0$ elde edilir. R asal halka olduğundan her $y \in R$ için $\alpha(y) = [y,a]$ veya $a = 0$ bulunur. $d \neq 0$ olduğundan her $y \in R$ için $\alpha(y) = [y,a]$ olur. (i) şıkkı sağlanmış olur.

$a^2 = 0$ olmak üzere $d(x) = ax$ olduğu durumu ele alalım. O zaman her $x,y \in R$ için $d(xy) = axy = d(x)y + x\alpha(y) = axy + x\alpha(y)$ olur. Buradan $x\alpha(y) = 0$ yani $\alpha = 0$ elde edilir. (ii) şıkkı sağlanmış olur.

Şimdi, varsayalım ki $d(Z) \subseteq Z$ olsun. Bu durumda her $x \in R$, $c \in Z$ için $d(xd(c)) = d(d(c)x)$ olduğundan $d(x)d(c) + x\alpha(d(c)) = d^2(c)x + d(c)\alpha(x)$

yazabiliriz. Buradan $d(x)d(c) = d^2(c)x + d(c)\alpha(x)$ ve böylece $d(d(x)d(c)) = d(d^2(c)x + d(c)\alpha(x)) = d(xd^2(c) + \alpha(x)d(c))$ elde edilir. O halde her $x \in R$, $c \in Z$ için

$$d(d(x)d(c)) = d(x)d^2(c) + d\alpha(x)d(c) \qquad (2.44)$$

olur. Ayrıca,

$$d(d(x)d(c)) = d(d(c)x) = d^2(c)d(x) + d(c)\alpha d(x) \qquad (2.45)$$

olduğundan (2.44) ve (2.45) kullanılırsa, $d(c)(d\alpha(x) - \alpha d(x)) = 0$ bulunur. Buradan $d(Z) = 0$ veya $d\alpha = \alpha d$ elde edilir.

Eğer $d(Z) = 0$ ise (2.42) eşitliğinden her $x \in R$, $c \in Z$ için $c = 0$ veya $\alpha(x) = d(x)$ yani $Z = 0$ veya $\alpha = d$ olur. Burada $Z = 0$ ise hipotezden $d^2(R) = 0$ elde edilir. Bu durum daha önce incelenmişti. (i) ve(ii) şıkları elde edilir. $\alpha = d$ ise $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ olduğundan d, türevdir. Bu durumda Lemma 3.2.3'den $d = 0$ veya R komutatiftir. Ancak her iki durumda hipotezle çelişir.

Eğer $d\alpha = \alpha d$ ise $c \in Z$ için, $d(c) \in Z$ ve $d\alpha(c) = \alpha d(c)$ dir. Buradan

$$d(d(x)d(c)) = d^2(x)d(c) \qquad (2.46)$$

elde edilir. (2.45) ve (2.46) eşitliklerinden,

$$d^2(x)d(c) = d^2(c)d(x) + d(c)\alpha d(x) \in Z \qquad (2.47)$$

olur. (2.44) ve (2.46) eşitliklerinden

$$d^2(x)d(c) = d^3(c)x + d^2(c)\alpha(x) + d\alpha(x)d(c) \in Z \qquad (2.48)$$

bulunur. (2.47) ve (2.48) bağıntılarından, $d^3(c)x + d^2(c)\alpha(x) - d^2(c)d(x) \in Z$ dir. Buradan her $x \in R$, $c \in Z$ için

$$0 = [x, d^3(c)x + d^2(c)\alpha(x) - d^2(c)d(x)]$$
$$= [x, d^3(c)]x + [x, d^2(c)(\alpha - d)(x)]$$
$$= d^2(c)[x, (\alpha - d)(x)]$$

elde edilir. O halde her $x \in R$ için $d^2(Z) = 0$ veya $[x, (\alpha - d)(x)] = 0$ dır.

$d^2(Z) = 0$ ise (2.47) den $d(c)\alpha d(x) \in Z$ olduğu kullanılırsa $d(Z) = 0$ veya $\alpha d(R) \subseteq Z$ bulunur. $d(Z) = 0$ olması durumu daha önce incelenmişti. Bu durumda (i) ve (ii) şıkları sağlanır. $\alpha d(R) \subseteq Z$ olması durumunda (2.43) den $d(c)d(x) + \alpha d(x) = d^2(x)c \in Z$ ve böylece her $x \in R$, $c \in Z$ için $d(c)d(x) \in Z$ elde edilir. Bu durumda Lemma 3.2.11'den $d(Z) = 0$ bulunur. Yani (i) ve (ii) sağlanmış olur.

$[x, (\alpha - d)(x)] = 0$ ise Lemma 3.2.3'den $\alpha - d \neq 0$ dır. Ayrıca, $\alpha - d$, sıfır dönüşümü ile belirlenmiş genelleştirilmiş türevdir. Lemma 3.2.14'ten $(\alpha - d)(x) = -\lambda x$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır. O zaman $d(x) = \alpha(x) + \lambda x$ olur. Bu durumda $\lambda \neq 0$ dır. Çünkü, $\lambda = 0$ olsaydı, $\alpha = d$ olurdu yani d, türev olurdu ve Lemma 3.2.3'den d = 0 veya R komütatif bulunurdu ki her iki durumda mümkün değildir. Ayrıca $\alpha \neq 0$ dır. Çünkü $\alpha = 0$ olsaydı, hipotezden $d^2(x) = \lambda^2 x \in Z$ yani $\lambda^2 = 0$ veya $x \in Z$ olur. Buradan da $\lambda = 0$ veya R komütatif sonucu elde edilir ki iki olasılık da hipotezle çelişir. O halde $\lambda \neq 0$ ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere $d(x) = \alpha(x) + \lambda x$ dir. (iii) şıkkı sağlanmış olur.

BÖLÜM 4
GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ HALKALARDA İDEALLER

Bu kısımda, R halkasında türevle ilgili yapılan çalışmalar yerine onun bir idealini ve türev yerine genelleştirilmiş türev alarak yapılan genelleştirmeleri içeren makaleler incelenmiştir

4.1. Mohammad Ashraf, Asma Ali, Rekha Rani, On Generalized Derivations Of Prime Rings, (2005)

Lemma 4.1.1:[5, Lemma 2.8] R, 2-torsion free halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. R halkasının d türevi , her $x\in I$ için $d^2(x) = 0$ şartını sağlıyorsa $d = 0$ dır.

Lemma 4.1.2: [8,Teorem 4] R, asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer her $x\in I$ için $[x ,d(x)]\in Z$ olacak şekilde d türevi varsa R komütatiftir.

Lemma 4.1.3: [31, Lemma 3] R asal halkası sıfırdan farklı komütatif sağ ideal içeriyorsa R komütatiftir.

Lemma 4.1.4: [8, Lemma 3] R asal halka, I sıfırdan farklı sol ideali olsun Eğer d, R halkası üzerinde sıfırdan farklı türevse, I ideali üzerinde de sıfırdan farklıdır.

Teorem 4.1.5: R, 2-torsion free asal halka ve I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R, F genelleştirilmiş türevini belirleyen ve her $x,y\in I$ için $d(x)\circ F(y) = 0$ şartını sağlayan d türevi içeriyorsa $d = 0$ veya R komütatiftir.

İspat: Her $x,y\in I$ için $d(x)\circ F(y) = 0$ olsun. $r \in R$ olmak üzere y yerine yr alınırsa, $0 = d(x)\circ F(yr) = (d(x)\circ F(y)r) + (d(x)\circ yd(r)) = (d(x)\circ F(y)r) – F(y) [d(x),r] + (d(x)\circ y)d(r) – y[d(x),d(r)]$ ve buradan da her $x,y\in I$, $r\in R$ için $(d(x) \circ y) d(r) – y[d(x),d(r)] – F(y) [d(x),r] = 0$ elde edilir.

Yukarıdaki eşitlikte r yerine d(x) alınırsa her $x,y\in I$ için

$$0 = (d(x)\circ y)d^2(x) – y[d(x), d^2(x)] \qquad (3.1)$$

eşitliği elde edilir. (3.1) eşitliğinde y yerine zy, $z\in I$ alınırsa her $x,y,z\in I$ için

$$0 = (d(x)\circ zy) d^2(x) – zy[d(x), d^2(x)]$$

$$= z(d(x)\circ y)d^2(x) + [d(x),z]yd^2(x) – zy[d(x), d^2(x)]$$

olur. (3.1) eşitliği kullanılarak her $x,y,z \in I$ için $(d(x),z)yd^2(x) = 0$ elde edilir. Böylece $[d(x),z] I R d^2(x) = 0$ elde edilir. R halkasının asallığından her $x, z \in I$ için $[d(x),z] I = 0$ veya $d^2(x) = 0$ bulunur.

$A = \{x \in I \mid d^2(x) = 0\}$ ve $B = \{ x \in I \mid [d(x),z] I = 0 , \forall z \in I\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B, I'nın toplamsal alt gruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten I = A veya I = B olmalıdır. Eğer I = A ise her $x \in I$ için $d^2(x) = 0$ olur. Lemma 3.1.1 kullanılırsa d = 0 bulunur. Bu da ispatı bitirir. Eğer I = B ise her $x, z \in I$ için $[d(x),z] I = 0$ ve buradan da $[d(x),z] = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte z yerine xz alınırsa, her $x, z \in I$ için $[d(x),x]z = 0$ olur. R halkasının asallığından her $x \in I$ için $[d(x),x] = 0$ sonucuna ulaşılır. Lemma 4.1.2'den R komütatiftir. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 4.1.6: R, 2-torsion free asal halka ve I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkasının her $x, y \in I$ için $[d(x), F(y)] = 0$ şartını sağlayan d türevi ile belirli F genelleştirilmiş türevi varsa d = 0 veya R komütatiftir.

İspat: Her $x, y \in I$ için

$$[d(x) \circ F(y)] = 0 \tag{3.2}$$

olsun. (3.2) de y yerine yz, $z \in I$ alınırsa $0 = [d(x),F(yz)] = [d(x),F(y)]z + F(y) [d(x),z] + [d(x),y]d(z) + y[d(x),d(z)] d^2(x)$ bulunur. Buradan her $x, y \in I$ için

$$F(y) [d(x),z] + y[d(x),d(z)] + [d(x),y]d(z) = 0 \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir. (3.3) de z yerine zd(x) alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= F(y)[d(x),z]d(x) + F(y)z[d(x),d(x)] + y[d(x),d(z)]d(x) + yd(z)[d(x),d(x)] \\ &\quad + y[d(x),z]d^2(x) + yz[d(x), d^2(x)] + [d(x),y]d(z)d(x) + [d(x),y]z\, d^2(x) \\ &= yz[d(x), d^2(x)] + y[d(x),z]d^2(x) + [d(x),y]z\, d^2(x) \end{aligned}$$

ve böylece

$$yz[d(x), d^2(x)] + y[d(x),z]d^2(x) + [d(x),y]z\, d^2(x) = 0$$

bulunur. Bu eşitlikte y yerine ry, $r \in R$ alınırsa, $ryz[d(x), d^2(x)] + ry[d(x),z]\, d^2(x) + [d(x),r]yz\, d^2(x) + r\, [d(x),y]zd^2(x) = 0$ olur. Yine üstteki eşitlik kullanılarak her $x,y,z \in I$, $r \in R$ için $[d(x),r]yz\, d^2(x) = 0$ elde edilir. R halkasının asallığından her $x, z \in I$ için $[d(x),r] = 0$ veya $d^2(x) = 0$ ifadesine ulaşılır.

$A = \{x \in I \mid d^2(x) = 0\}$ ve $B = \{ x \in I \mid [d(x),r] = 0 , \forall r \in R\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B, I'nın toplamsal alt gruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten I = A veya I = B olmalıdır. Eğer I = A ise her $x \in I$ için $d^2(x) = 0$ olur. Lemma 4.1.1 kullanılırsa d = 0 bulunur. Bu da ispatı bitirir. Eğer I = B ise her $x \in I$

için $[d(x),r] = 0$ olur. r yerine xr alınırsa $[d(x),x]R = 0$ ifadesi be buradan da. R halkasının asallığı kullanılarak $[d(x),x] = 0$ ifadesi elde edilir. Lemma 4.1.2'den R komütatiftir. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 4.1.7: R, 2-torsion free asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkası d türevi ile belirli ve her $x, y \in I$ için $d(x) \circ F(y) = x \circ y$ koşulunu sağlayan F genelleştirilmiş türevi içeriyorsa $d = 0$ veya R komütatiftir.

İspat: Eğer $F = 0$ ise her $x,y \in I$ için $x \circ y = 0$ olur. y yerine yz, $z \in I$ alınırsa, $0 = x \circ yz = (x \circ y)z - y[x,z] = y[x,z]$ elde edilir. Burada R halkasının asal olması kullanılarak her $x, z \in I$ için $[x,z] = 0$ bulunur. Lemma 4.1.3'den R komütatiftir.

$F \neq 0$ olsun. $d(x) \circ F(y) = x \circ y$ ifadesinde y yerine yr, $r \in R$ alınırsa $(d(x) \circ y)d(r) - y[d(x),d(r)] - F(y)[d(x),r] = (x \circ y)r - y[x,r] + (d(x) \circ F(y))r$ ve buradan da

$$(d(x) \circ y)d(r) - y[d(x),d(r)] - F(y)[d(x),r] + y[x,r] = 0$$

elde edilir. Üstteki eşitlikte r yerine d(x) alınırsa her $x,y \in I$ için

$$(d(x) \circ y)d^2(x) - y[d(x), d^2(x)] + y[x,d(x)] = 0 \qquad (3.4)$$

eşitliği bulunur. (3.4) de y yerine zy alınırsa, her $x,y,z \in I$ için

$$0 = (d(x) \circ zy)\, d^2(x) - zy[d(x), d^2(x)] + zy[x,d(x)]$$

$$= z(d(x) \circ y)\, d^2(x) + [d(x) \circ z]\, yd^2(x) - zy[d(x), d^2(x) + zy[x,d(x)]$$

ve böylece

$$[d(x),z]y\, d^2(x) = 0\ ,\ \forall x,y,z \in I$$

bulunur. R halkası asal olduğundan $[d(x),z]\, I = 0$ veya $d^2(x) = 0$ elde edilir.

$A = \{x \in I \mid d^2(x) = 0\}$ ve $B = \{ x \in I \mid [d(x),z]\, I = 0\ , \forall z \in I\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B, I'nın toplamsal alt gruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten $I = A$ veya $I = B$ olmalıdır. Eğer $I = A$ ise her $x \in I$ için $d^2(x) = 0$ olur. Lemma 4.1.1 kullanılırsa $d = 0$ bulunur. Bu da ispatı bitirir. Eğer $I = B$ ise her $x, z \in I$ için $[d(x),z]\, I = 0$ ve buradan da $[d(x),z] = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte z yerine xz alınırsa, her $x, z \in I$ için $[d(x),x]z = 0$ olur. R halkasının asallığından her $x \in I$ için $[d(x),x] = 0$ sonucuna ulaşılır. Lemma 4.1.2'den R komütatiftir. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 4.1.8: R, 2-torsion free asal halka ve I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkasının, d türevi ile belirli ve her $x,y \in I$ için $d(x) \circ F(y) + x \circ y = 0$ koşulunu sağlayan F genelleştirilmiş türevi varsa $d = 0$ veya R komütatiftir.

İspat: $F = 0$ ise her $x,y \in I$ için $x \circ y = 0$ olur. Önceki teoremden R halkası komütatiftir. Bu da ispatı bitirir.

$F \neq 0$ ise hipotezde y yerine yr, $r \in R$ alınırsa, $(d(x) \circ y)d(r) - y[d(x),d(r)] + (d(x) \circ F(y))r - F(y)[d(x),r] - (d(x) \circ F(y)) - y[x,r] = 0$ ve buradan da

$(d(x) \circ y)d(r) - y[d(x),d(r)] - F(y)[d(x),r] - y[x,r] = 0$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte r yerine d(x) alınırsa, $(d(x) \circ y)d^2(x) - y[d(x),d^2(x)] - y[x,d(x)] = 0$ bulunur. Burada y yerine zy, $z \in I$ alınırsa,

$$0 = (d(x) \circ zy)d(r) - zy[d(x), d^2(x)] - z\,y[x,d(x)]$$
$$= z(d(x) \circ y)d^2(x) + [d(x),z]yd^2(x) - zy[d(x),d^2(x)] - zy[x,d(x)]$$

ve böylece $[d(x),z]yd^2(x) = 0$ elde edilir. R halkası asal olduğundan

$[d(x),z]\,I = 0$ veya $d^2(x) = 0$

ifadesine ulaşılır.

$A = \{x \in I \mid d^2(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in I \mid [d(x),z]\,I = 0, \forall z \in I\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B, I'nın toplamsal alt gruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten $I = A$ veya $I = B$ olmalıdır. Eğer $I = A$ ise her $x \in I$ için $d^2(x) = 0$ olur. Lemma 4.1.1 kullanılırsa $d = 0$ bulunur. Bu da ispatı bitirir. Eğer $I = B$ ise her $x, z \in I$ için $[d(x),z]\,I = 0$ ve buradan da $[d(x),z] = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte z yerine xz alınırsa, her $x, z \in I$ için $[d(x),x]z = 0$ olur. R halkasının asallığından her $x \in I$ için $[d(x),x] = 0$ sonucuna ulaşılır. Lemma 4.1.2'den R komütatiftir. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 4.1.9: R asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkası d türevi ile belirli ve her $x,y \in I$ için $d(x)F(y) - xy \in Z(R)$ koşulunu sağlayan F genelleştirilmiş türevi içeriyorsa $d = 0$ veya R komütatiftir.

İspat: Eğer $F = 0$ ise her $x,y \in I$ için $xy \in Z(R)$ dir. O zaman $0 = [xy,x] = x[y,x]$ yazılabilir. y yerine yz, $z \in I$ alınırsa, $0 = x[yz,x] = xy[z,x] + x[y,x]z$ ve böylece $xRI[z,x] = 0$ bulunur. R halkasının asallığı kullanılırsa her $x,z \in I$ için $x = 0$ veya $I[z,x] = 0$ elde edilir.

$x = 0$ ise zaten $I[z,x] = 0$ 'dır. Yani her iki durumda da her $x,z \in I$ için, $I[z,x]=0$ olur. R asal halka, $I \neq 0$ olduğundan, I komütatiftir. Lemma 4.1.3 ten R komütatiftir.

$F \neq 0$ ise, $d(x)F(y) - xy \in Z(R)$ bağıntısında. $r \in R$ olmak üzere, y yerine yr alınırsa, $d(x)F(yr) - xyr = d(x)F(y)r + d(x)yd(r) - xyr = (d(x)F(y) - xy)r + d(x)yd(r) \in Z(R)$ olur. Buradan her $x,y \in I$, $r \in R$ için

$$\begin{aligned}0 &= [(d(x)F(y) - xy)r + d(x)yd(r),r] \\ &= [d(x)F(y) - xy)r,r] + [d(x)yd(r),r] \\ &= (d(x)F(y) - xy)[r,r] + [d(x)F(y) - xy,r]\, r + [d(x)yd(r),r] \\ &= d(x)\, [yd(r),r] + [d(x),r]yd(r)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte y yerine d(x)y alınırsa, her $x,y \in I$, $r \in R$ için $0 = [d(x),r]d(x)yd(r)$ ve böylece $[d(x),r]d(x)RId(r) = 0$ bulunur. R asal halka olduğundan her $x \in I$, $r \in R$ için

$$[d(x),r]d(x) = 0 \text{ veya } Id(r) = 0$$

olur.

$A = \{ r \in R \mid [d(x),r]d(x) = 0,\ \forall x \in I \}$ ve $B = \{ r \in R : Id(r) = 0\}$ kümeleri R halkasının toplamsal alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$'dir. Brauer's Trick'den R = A veya R = B olmalıdır. R = B ise her $r \in R$ için Id(r) = 0 yani d = 0 dır. Bu da ispatı bitirir. R = A ise her $r \in R$ için $[d(x),r]d(r) = 0$ dır. $s \in R$ olmak üzere r yerine rs alınırsa, $0 = [d(x),rs]d(x) = [d(x),r]sd(x) + r[d(x),s]d(x) = [d(x),r]sd(x)$ bulunur. Burada r halkasının asallığı kullanılırsa her $x \in I$, $r \in R$ için $[d(x),r] = 0$ veya $d(x) = 0$ elde edilir.

d(x) = 0 ise Lemma 4.1.4'den d = 0 bulunur. $d(x) \in Z$ ise Lemma 4.1.2'den R komütatiftir. Her iki durumda ispatı bitirir.

Aşağıdaki teoremin ispatı da benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.10: R asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkası d türevi ile belirli ve her $x,y \in I$ için $d(x)F(y) + xy \in Z(R)$, koşulunu sağlayan F genelleştirilmiş türevi içeriyorsa d = 0 veya R komütatiftir.

Teorem 4.1.11: R , 2-torsion free asal halka , I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkası d türevi ile belirli ve her $x,y \in I$ için, $[d(x),F(y)] = [x,y]$ koşulunu sağlayan F genelleştirilmiş türevi içeriyorsa d = 0 veya R komütatiftir.

İspat: F = 0 ise [x,y] = 0 olur. Lemma 4.1.3'den R komütatiftir. Bu da ispatı bitirir. O halde $F \neq 0$ olduğunu varsayalım. Hipotezden, her $x, y \in I$ için

$$[d(x),F(y)] = [x,y] \qquad (3.5)$$

dır. (3.5) eşitliğinde $z \in I$ olmak üzere y yerine yz alınırsa, $[d(x),F(y)z + yd(z)] = [x,y]z + y[x,z]$ ve buradan da$[d(x),F(y)]z + F(y)[d(x),z] + [d(x),y]d(z) + y[d(x),d(z)] = [x,y]z + y[x,z]$ bulunur. Böylece her $x, y, z \in I$ için

$$f(y)[d(x),z] + y[d(x),d(z)] + [d(x),y]d(z) = y[x,z] \qquad (3.6)$$

eşitliği bulunur. (3.6) da z yerine zd(x) alınırsa,

$F(y)[d(x),z]d(x) + y[d(x),d(z)d(x) + zd^2(x)] + [d(x),y]\,(d(z)d(x) + zd^2(x)) = y[x,z]d(x) + yz[x,d(x)]$ ve böylece $F(y)[d(x),z]d(x) + y\,[d(x),d(z)]d(x) + y[d(x),z]\,d^2(x) + yz[d(x),\ d^2(x)] + [d(x),y]d(z)d(x) + [d(x),y]z\ d^2(x) = y[x,z]d(x) + yz[x,d(x)]$ elde edilir. Yani her $x, y, z \in I$ için

$$y[d(x),z]\, d^2(x) + yz[d(x), d^2(x)] + [d(x),y]z\, d^2(x) = yz[x,d(x)] \quad (3.7)$$

olur. $r \in R$ olmak üzere y yerine ry alınırsa, $ry[d(x),z]\ d^2(x) + ryz\,[d(x),\ d^2(x)] + [d(x),r]yz\ d^2(x) + r[d(x),y]z\ d^2(x) = ryz[x,d(x)]$ olur. Bu eşitlikten her $x,\ y,\ z \in I$, $r \in R$ için $[d(x),r]yzd^2(x) = 0$ yani $[d(x),r]IRd^2(x) = 0$ elde edilir. R halkası asal olduğundan her $x, z \in I$ için

$[d(x),r] = 0$ veya $d^2(x) = 0$

ifadesine ulaşılır.

$A = \{x \in I \mid d^2(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in I \mid [d(x),r] = 0,\ \forall r \in R\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B, I'nın toplamsal alt gruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten I = A veya I = B olmalıdır. Eğer I = A ise her $x \in I$ için $d^2(x) = 0$ olur. Lemma 4.1.1 kullanılırsa d = 0 bulunur. Bu da ispatı bitirir. Eğer I = B ise her $x \in I$ için $[d(x),r] = 0$ olur. r yerine xr alınırsa $[d(x),x]R = 0$ ifadesi ve buradan da. R halkasının asallığı kullanılarak $[d(x),x] = 0$ ifadesi elde edilir. Lemma 4.1.2'den R komütatiftir. Bu da ispatı bitirir.

Aşağıdaki teoremin ispatı da benzer yoldan yapılır.

Teorem 4.1.12: R, 2-torsion free asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkası d türevi ile belirli ve her $x,y \in I$ için, $[d(x),F(y)] + [x,y] = 0$ şartını sağlayan F genelleştirilmiş türevi içeriyorsa, d = 0 veya R komütatiftir.

Teorem 4.1.13: R asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

(i) R halkası, $0 \neq d$ türevi ile belirli ve her $x,y \in I$ için $d(x)F(y) - xy \in Z$ veya $d(x)F(y) + xy \in Z$ şartını sağlayan F genelleştirilmiş türevi içerir.

(ii) R, 2-torsion free halkadır ve $0 \neq d$ türevi ile belirli veher $x,y \in I$ için $[d(x),F(y)] - [x,y] = 0$ veya $[d(x),F(y)] + [x,y] = 0$ şartını sağlayan F genelleştirilmiş türevi içerir.

(iii) R komütatiftir.

İspat: (iii) $\Rightarrow$ (i) ve (iii) $\Rightarrow$ (ii) olduğu kolayca görülmektedir.

(i) $\Rightarrow$(iii) $x \in I$ olmak üzere, A = $\{y \in I \mid d(x)F(y) - xy \in Z(R)\}$ve B =$\{y \in I \mid d(x)F(y) - xy \in Z(R)\}$kümeleri I nın toplamsal alt gruplarıdır ve I = $A \cup B$ dir. Brauer's Trick'den I = A veya I = B olmalıdır. Yani I = $\{x \in I \mid A = I\}$ veya I =$\{x \in I \mid B = I\}$ yazabiliriz. Teorem 4.1.9 ve 4.1.10 kullanılarak, R nin komütatif olduğu sonucuna ulaşılır. Bu da ispatı bitirir.

(ii) $\Rightarrow$(iii) $x \in I$ olmak üzere, A =$\{y \in I \mid [d(x),F(y)] - [x,y] = 0\}$ ve B =$\{y \in I \mid [d(x),F(y)] + [x,y] = 0\}$ kümeleri I idealinin toplamsal alt gruplarıdır ve I = $A \cup B$ dir. Brauer's Trick'den I = A veya I = B olmalıdır. Teorem 4.1.11 ve Teorem 4.1.12 kullanılarak R nin komütatiftir olduğu sonucuna ulaşılır. Bu da ispatı bitirir..

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi bu sonuçlar herhangi bir halka için doğru olmayabilir.

Örnek 4.1.14: S herhangi bir halka olsun. R = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b \in S \right\}$ olarak alınırsa I=$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b \in S \right\}$, R halkasının idealidir. $F : R \rightarrow R$, $F(x) = 2e_{11}x - xe_{11}$ olarak tanımlayalım.

$F(xy) = 2e_{11}xy - xye_{11} - xe_{11}y + xe_{11} = (2e_{11}x - xe_{11})y + x(e_{11}y - ye_{11}) = F(x)y + xd(y)$ olduğundan, F, d türevi ile belirli genelleştirilmiş türevdir. Her $x,y \in I$ için aşağıdakiler sağlanır.

(i) $d(x) \circ F(y) = 0$ **(ii)** $[d(x), F(y)] = 0$ **(iii)** $d(x) \circ F(y) = x \circ y$ **(iv)** $d(x) \circ F(y) + x \circ y = 0$ **(v)** $d(x)F(y) - xy \in Z(R)$ **(vi)** $d(x)F(y) + xy \in Z(R)$ **(vii)** $[d(x),F(y)] = [x,y]$ **(viii)** $[d(x),F(y)] + [x,y] = 0$

F türevi bu bölümdeki teoremlerin koşullarını sağlamasına rağmen R halkası komütatif değildir.

4.2 M. A. Quadri, M. Shadab Khan, N. Rehman, Generalized Derivations and Commutativity of Prime Rings, (2005)

Lemma 4.2.1 : [8, Lemma 3] R asal halka, I sıfırdan farklı sağ ideali olsun. $0 \neq d$, R halkasının türevi ise d, I üzerinde sıfırdan farklıdır.

Lemma 4.2.2: [31, Lemma3] R asal halkası sıfırdan farklı komütatif sağ ideal içeriyorsa R komütatiftir.

Teorem 4.2.3: R asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkası, sıfırdan farklı d türeviyle belirlenen ve her $x,y \in I$ için $F([x,y]) = [x,y]$ şartını sağlayan F genelleştirilmiş türevi içeriyorsa R komütatiftir.

İspat: $F = 0$ olsa I komütatif olacağından Lemma 4.2.2 den R komütatiftir, ispat biter. O halde $F \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden $x,y \in I$ için,

$$F([x,y]) = F(xy - yx) = F(xy) - F(yx)$$
$$= F(x)y + xd(y) - F(y)x - yd(x) = [x,y]$$

olur. Buradan her $x,y \in I$ için

$$F(x)y + xd(y) - F(y)x - yd(x) - [x,y] = 0 \qquad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) de y yerine yz, $z \in I$ alınırsa,

$$0 = F(x)yz + xd(yz) - F(yz)x - yzd(x) - [x,yz]$$
$$= F(x)yz + xd(y)z + xyd(z) - F(y)zx - yd(z)x - yzd(x) - y[x,z] - [x,y]z$$

bulunur. (3.8) denklemi sağdan z ile çarpılıp, F(x)yz yalnız bırakılarak yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$0 = F(x)yz + yd(x)z + xyd(z) - F(y)zx - yd(z)x - yzd(x) - y[x,z]$$
$$= F(x)yz + yd(x)z + xyd(z) - F(y)zx - yd(z)x - yzd(x) - y[x,z] - yxd(z) +$$
$$+ yxd(z)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse her $x, y, z \in I$ için

$$F(y)[x,z] + y[d(x),z] + [x,y]d(z) + y[x,d(z)] - y[x,z] = 0 \qquad (3.9)$$

denklemi elde edilir. (3.9) da z yerine zx alınırsa,

$$0 = F(y)[x,zx] + y[d(x),zx] + [x,y]d(zx) + y[x,d(zx)] - y[x,zx]$$
$$= F(y)[x,z]x + yz[d(x),x] + y[d(x),z]x + [x,y]d(z)x + [x,y]zd(x)$$
$$+ y[x,d(z)]x + yz[x,d(x)]\ y[x,z]d(x) - y[x,z]x$$

olur. (3.9) denklemi sağdan x ile çarpılıp yukarıdaki denklem düzenlenirse, $yz[d(x),x] + [x,y]zd(x) + yz[x,d(x)] + y[x,z]d(x) = 0$ ve buradan da

$$[x,y]zd(x) + y[x,z]d(x) = 0\ , \forall\, x,y \in I \qquad (3.10)$$

bulunur. (3.10) da y yerine y_1y, $y_1 \in I$ yazılıp yine bu eşitlik kullanılırsa, $0 = [x, y_1y]zd(x) + y_1y\ [x,z]d(x) = [x, y_1]yzd(x)$ elde edilir. Buradan R nin asallığı kullanılarak her $x,y, y_1 \in I$ için $[x,y_1]y = 0$ veya $Id(x) = 0$ olur.

$A = \{x \in I \mid Id(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in I \mid [x, y_1]y = 0\ , \forall\, y,y_1 \in I\}$ kümeleri I idealinin toplamsal altgruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten I = A veya I = B olmalıdır. I = A ise her $x \in I$ için $d(I) = 0$ bulunur. Ancak bu sonuç Lemma 4.1.15

den çelişkidir. O halde $I = B$ olmalıdır. Her $x, y, y_1 \in I$ için $[x, y_1]y = 0$ olduğu kullanılırsa $[x, y_1] = 0$ elde edilir. I ideali sıfırdan farklı komütatif sağ ideal olduğundan Lemma 4.2.2 dan R halkası komütatiftir.

Teorem 4.2.4: R asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkası, sıfırdan farklı d türeviyle belirlenen ve her $x,y \in I$ için $F([x,y]) + [x,y] = 0$ şartını sağlayan F genelleştirilmiş türevi içeriyorsa R komütatiftir.

İspat: Yukarıdaki teoremdekine benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.5: R asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkası, sıfırdan farklı d türeviyle belirlenen ve her $x,y \in I$ için $F(x \circ y) = x \circ y$ şartını sağlayan F genelleştirilmiş türevi içeriyorsa R komütatiftir.

İspat : Eğer $F = 0$ ise, her $x,y \in I$ için $x \circ y = 0$ dır. Bu eşitlikte y yerine yz, $z \in I$ alınırsa, $0 = x \circ yz = (x \circ y)z - y[x,z] = y[x,z]$ ve böylece her $x,z \in I$ için $[x,z] = 0$ bulunur. O halde I ideali komütatiftir, Lemma 4.1.16 dan R halkası komütatiftir, ispat biter.

$F \neq 0$ olsun. Hipotezden, $F(x \circ y) = x \circ y$ olduğunu kullanılırsa $F(xy + yx) = F(x)y + xd(y) + F(y)x + yd(x) = x \circ y$ elde edilir. Buradan her $x,y \in I$ için

$$F(x)y + xd(y) + F(y)x + yd(x) - x \circ y = 0 \qquad (3.11)$$

bulunur. (3.11) de y yerine yx alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= F(x)yx + xd(yx) + F(yx)x + yxd(x) - x \circ yx \\ &= F(x)yx + xd(y)x + xyd(x) + F(y)x^2 + yd(x)x + yxd(x) - (x \circ y)x \end{aligned}$$

elde edilir. (3.11) denklemi sağdan x ile çarpılıp yukarıdaki denklemde kullanılırsa, her $x,y \in I$ için

$$0 = xyd(x) + yxd(x) = (x \circ y)d(x)$$

olur. $z \in I$ olmak üzere, y yerine zy alınırsa, $0 = (x \circ zy)d(x) = z(x \circ y)d(x) + [x,z]yd(x) = [x,z]yd(x)$ ve böylece her $x,z \in I$ için

$$[x,z]I = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

elde edilir.

$A = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in I \mid [x,z]I = 0, \forall z \in I\}$ kümeleri I nın toplamsal altgruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten $I = A$ veya $I = B$ olmalıdır. $I = A$ ise Lemma 4.2.1 den $d = 0$ olur, ancak bu sonuç hipotezle çelişir. O halde $I = B$ olmalıdır. Yani her $x,z \in I$ için $[x,z]I = 0$ dır. Buradan $[x,z] = 0$ yani I idealinin komütatif olduğu sonucuna ulaşılır. Lemma 4.2.2 den R halkası komütatiftir.

Teorem 4.2.6: R asal halka, I sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkası, sıfırdan farklı d türeviyle belirlenen ve her $x,y \in I$ için $F(x \circ y) + x \circ y = 0$ şartını sağlayan F genelleştirilmiş türevi içeriyorsa R komütatiftir.

İspat: Yukarıdaki teoremdeki benzer olarak sonuca ulaşılır.

4.3 Nadeem-Ur-Rehman, On Generalized Derivations as Homomorphisms and Anti-Homomorphisms, (2004)

Lemma 4.3.1: R asal halkası sıfırdan farklı komütatif sağ ideal içeriyorsa, o zaman R komütatiftir.

Teorem 4.3.2: R, 2-torsion free asal halka, I sıfırdan farklı ideali, $F:R \rightarrow R$, d türevi ile belirli sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun.

(i) F, I üzerinde homomorfizma ve $d \neq 0$ ise R komütatiftir.

(ii) F, I üzerinde anti-homomorfizma ve $d \neq 0$ ise R komütatiftir.

İspat: (i) F, I üzerinde homomorfizma olduğundan, her $x,\ y \in I$ için,

$$F(xy) = F(x)y + xd(y) = F(x)F(y) \qquad (3.12)$$

olur. $x,\ y,\ z \in I$ için F genelleştirilmiş türev olduğundan

$$F(xyz) = F(xy)z + xyd(z) \qquad (3.13)$$

ve aynı zamanda F, I üzerinde homomorfizma olduğundan

$$F(xyz) = F(xy)F(z) = F(x)F(y)z + F(x)yd(z) \qquad (3.14)$$

yazabiliriz. (3.13) ve (3.14) ifadeleri birbirine eşitlenirse, her $x,\ y,\ z \in I$ için, $(F(x) - x)yd(z) = 0$ ve buradan da $(F(x) - x)Id(z) = 0$ bulunur. R halkasının asallığı kullanılırsa, her $x,\ z \in I$ için,

$$(F(x) - x) = 0 \text{ veya } d(z) = 0$$

ifadesi elde edilir.

Eğer her $z \in I$ için, $d(z) = 0$ ise o zaman $d = 0$ olur. Ancak bu sonuç hipotezle çelişir. Eğer her $x \in I$ için, $F(x) = x$ ise o zaman $xy = F(xy) = F(x)y + xd(y)$ ve böylece $xd(y) = 0$ yani $Id(y) = 0$ bulunur. Burada R halkasının asallığı ve $I \neq 0$ olması kullanılarak yine $d = 0$ çelişkisine ulaşılır.

(ii) F, I üzerinde anti-homomorfizma olduğundan, her $x,\ y \in I$ için,

$$F(xy) = F(x)y + xd(y) = F(y)F(x) \qquad (3.15)$$

yazabiliriz. (3.15) de x yerine xy alınıp yine (3.15) kullanılırsa her x, $y \in I$ için,

$$xyd(y) = F(y)xd(y) \tag{3.16}$$

ve (3.16) de x yerine zx alınarak

$$zxyd(y) = F(y)zxd(y) \tag{3.17}$$

bulunur. (3.16) yı soldan z ile çarparsak

$$xyd(y) = F(y)xd(y) \tag{3.18}$$

ifadesine ve böylece (3.17) ile (3.18) den her x, y, $z \in I$ için, $[F(y),z]xd(y) = 0$ yani $[F(y),z]Id(y) = 0$ ifadesine ulaşılır. R halkasının asallığı kullanılarak

$$[F(y),z] = 0 \text{ veya } d(y) = 0$$

elde edilir.

$A = \{y \in I \mid [F(y),z] = 0, \ \forall z \in I\}$ ve $B = \{y \in I \mid d(y) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B, I idealinin toplamsal altgruplarıdır ve $I = A \cup B$ biçimindedir. Brauer's Trick'den I = A veya I = B olmalıdır. I = B ise her $y \in I$ için, d(y) = 0 yani d= 0 dır. Ancak bu sonuç hipotezle çelişeceğinden $I \neq B$ olur. O halde I = A yani her y, $z \in I$ için, $[F(y),z] = 0$ olmalıdır. y yerine yz alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [F(yz),z] = [F(y)z + yd(z),z] \\ &= F(y)[z,z] + [F(y),z]z + y[d(z),z] + [y,z]d(z) \end{aligned}$$

ve böylece

$$y[d(z),z] + [y,z]d(z) = 0$$

elde edilir. Bu ifadede y yerine xy alınırsa $[x,z]yd(z) = 0$ olur. R halkasının asallığı kullanılarak her $z \in I$ için

$$[x,z] = 0 \text{ veya } d(z) = 0$$

ifadesine ulaşılır. Yine Brauer's Trick kullanılarak her $z \in I$ için d(z) = 0 veya her $z \in I$ için $[x,z] = 0$ bulunur. Eğer d(z) = 0 ise d = 0 çelişkisine ulaşılır. O halde her $z \in I$ için $[x,z] = 0$ dır. Lemma 4.3.1. den R komütatiftir.

4.4 Ivica Gusic, A Note on Generalized Derivations of Prime Rings, (2005)

Teorem 4.4.1: R asal halka, d, R üzerinde bir fonksiyon (türev ya da toplamsal olması gerekmeyen), F, her $x,y \in R$ için $F(xy) = F(x)y + xd(y)$ şartını sağlayan bir fonksiyon (toplamsal olması gerekmeyen), I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun.

(i) Varsayalım ki her $x, y \in I$ için $F(xy) = F(x)F(y)$ olsun. O zaman $d = 0$ ve her $x \in R$ için $F = 0$ veya $F(x) = x$ dir.

(ii) Varsayalım ki her $x, y \in I$ için $F(xy) = F(y)F(x)$ olsun. O zaman $d = 0$ ve her $x \in R$ için $F = 0$ veya $F(x) = x$ dir.

İspat : (i) F, I üzerinde homomorfizma gibi hareket etsin. $F(xyz)$ üzerinde [34, Teorem 3.3.2] de yapılan işlemler yapılırsa, her $x, y, z \in I$ için $(F(x) - x)yd(z) = 0$ bulunur. R asal halka olduğundan ,her $x, y, z \in I$ için

$F(x) = x$ veya $d(z) = 0$

olur. Eğer $d(z) \neq 0$ ise, $F(xy) = f(x)y + xd(y) = xy + xd(y) = xy$ yazabiliriz. Buradan $xd(y) = 0$ yani, her $x \in I$ için $d(y)= 0$ elde edilir. Ancak bu sonuç $d(z) \neq 0$ olmasıyla çelişir. $d(z) = 0$ olmalıdır. Yani d, I üzerinde sıfırdır. O halde $F(x)y = F(x)F(y)$ dir. Bu eşitlikte $z,t \in R$ olmak üzere x yerine zt alınırsa, $F(zt)y = F(zt)F(y)$ ve buradan da $F(z)ty = F(z)tF(y)$ eşitliğine ulaşılır. R halkasının asallığı kullanılırsa her $y,z \in I$ için $F(z)= 0$ veya $F(y) = y$ olur.

Eğer $F(z) = 0$ ise, $r \in R$ olmak üzere, $0 = F(rz) = F(r)z$ ve buradan $F(R) = 0$ elde edilir. Yani F, R üzerinde sıfırdır.

Eğer $F(y) = y$ ise $ry = F(ry) = F(r)y$ ve böylece her $r \in R$ için $F(r) = r$ sonucuna ulaşılır.

O halde her $x \in R$ için $F = 0$ veya $F(x) = x$ dir.

$F = 0$ olduğunda $d = 0$ olduğunu ispatlayalım. $0 = F(zr) = F(z)r + zd(r) = zd(r)$ olduğu kullanılarak $d(r) = 0$, $\forall r \in R$ yani $d = 0$ bulunur.

F birim fonksiyon olduğunda $d = 0$ olduğunu ispatlayalım. $zr = F(zr) = zr + zd(r)$ olduğu kullanılarak $d(r) = 0$, $\forall r \in R$, yani $d = 0$ elde edilir.

(ii) F, I üzerinde anti-homomorfizma gibi hareket etsin. [34, Teorem 3.3.2] deki gibi ispat yapılırsa, her $x, y, z \in I$ için $[F(z),y] = 0$ veya $d(z) = 0$ olur.

$z \in I$ için $d(z) \neq 0$ olduğunu varsayalım. O halde , her $y \in I$ için $[F(z),y] = 0$ dır. Buradan $r \in R$ olmak üzere, $0 = [F(z),ry] = [F(z),r]y$ ve böylece, her $r \in R$ için $[F(z),r] = 0$ elde edilir. F'in genelleştirilmiş türev olmasından

$$\begin{aligned} F(xy)z + xyd(z) &= F(xyz) = F(z)F(y)F(x) = F(y)F(z)F(x) \\ &= F(y)F(xz) = F(y)(F(x)z + xd(z)) \end{aligned}$$

$= F(xy)z + F(y)xd(z)$

yazabiliriz. Bu eşitlik düzenlenirse, her $x, y, z \in I$ için

$$(xy - F(y)x)d(z) = 0 \qquad (3.12)$$

denklemi elde edilir. (3.12) de, $t \in R$ olmak üzere x yerine tx alınırsa, $txyd(z) = F(y)txd(z)$ ve (3.12) denklemi soldan t ile çarpılırsa, $txyd(z) = tF(y)xd(z)$ bulunur. İki denklem eşitlenirse $(F(y)t - tF(y))xd(z) = 0$ ve burada R halkasının asallığı ve $d(z) \neq 0$ olması kullanılırsa, her $y \in I$,her $t \in R$ için $F(y)t = tF(y)$ olacaktır. Yani F, I üzerinde homomorfizmadır. (i) şıkkından d = 0 çelişkisine ulaşılır. O halde varsayımımız yanlıştır, d, I üzerinde sıfırdır. Bu durumda

$F(x)yz = F(xz)y = F(z)F(x)y = F(z)F(xy) = F(xyz) = F(x)yz$ yani $F(xt)zy = F(xt)yz$ olur. Böylece $F(x)t[z,y] = 0$, $\forall\, t, x, y, z \in I$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanılırsa, her $x, y, z \in I$ için

$F(x) = 0$ veya $[z,y] = 0$

ifadesine ulaşılır.

$[z,y] = 0$ ise R halkası komütatiftir, bu durumda F, I üzerinde homomorfizma olacağından (i) şıkkından $\forall\, x \in R$ için $F = 0$ veya $F(x) = x$ bulunur. (i) deki gibi devam edilirse d = 0 elde edilir.

Örnek 4.4.2: Varsayalım ki $R = Z[X] \oplus Z[X]$ olsun. O zaman R asal halka değildir. $I = (0) \oplus Z[X]$ ve $J = Z[X] \oplus (0)$, R halkasının idealleridir. $d: R \to R$, I üzerinde sıfır olan ve J üzerinde $d((f(x),0)) = (f'(x),0)$ olarak verilen türev olsun. J üzerinde F = d ve I üzerinde $F((0,g(x))) = (0,g(x))$ olmak üzere F, d ile belirli ve I üzerinde homomorfizma olarak hareket eden genelleştirilmiş türevdir.

4.5. Öznur Gölbaşı, On Left İdeals of Prime Rings with Generalized Derivation, (2005)

Bu makale süresince, R asal halka, $\mathrm{char}R \neq 2$ ve I, R halkasının sıfırdan farklı sol ideali olarak alınacaktır.

Lemma 4.5.1: [16,Lemma 1]: R asal halka, U sıfırdan farklı sol ideali yarıasal halka olsun. Eğer $a \in R$ için $Ua=0$ $(aU=0)$ ise a = 0 dır.

Lemma 4.5.2: [23, Lemma 2]: f: $R\rightarrow$ RC, her $x,y\in R$ için f(xy) = f(x)y şartını sağlayan toplamsal dönüşüm olsun. O zaman her $x\in R$ için f(x) = qx olacak şekilde $q\in Q_r$(RC) vardır.

Lemma 4.5.3: R asal halka, U kendi başına yarıasal halka olan sıfırdan farklı sol ideali olsun. R halkasının bir d türevi için d(U) = 0 ise d = 0 dır.

İspat: Hipotezden, her $x\in U$, $r\in R$ için, 0 = d(ru) = d(r)u + rd(u) = d(r)u yani d(R)U = 0 bulunur. Burada Lemma 4.5.1 kullanılarak d = 0 elde edilir.

Teorem 4.5.4: R asal halka, U kendi başına yarıasal halka olan sıfırdan farklı sol ideali ve f genelleştirilmiş türev olsun. Eğer U komütatif değilse ve her $x,y\in U$ için f([x,y]) = 0 ise f(x) = qx olacak $q\in Q_r$(RC) vardır.

İspat: Her $x,y\in U$ için f([x,y]) = 0 olsun. Bu eşitlikte y yerine yx alınırsa 0 = f([x,y]) = f([x,yx]) = f([x,y])x = f([x,y])x + [x,y]d(x) = [x,y]d(x) elde edilir. $r\in R$ olmak üzere y yerine ry alınırsa her $x,y\in U$, $r\in R$ için

$$0 = [x,ry]dx = [x,r]ydx + r[x,y]dx = [x,r]yd(x)$$

bulunur. Burada R halkasının asallığı kullanılırsa her $x\in U$, $r\in R$ için

$$[x,r] = 0 \text{ veya } Ud(x) = 0$$

elde edilir. Lemma 4.5.1 kullanılarak her $x\in U$ için $x\in Z$ veya d(x) = 0 sonucuna ulaşılır.

$A = \{x\in U \mid x\in Z\}$ ve $B = \{x\in U \mid d(x) = 0\}$ kümeleri U sol idealinin toplamsal altgruplarıdır ve $U = A\cup B$ biçimindedir. Brauer's Trick'den U = A veya U= B olmalıdır.

U = A ise $U\subset Z$ olur, ancak bu sonuç hipotezde U'nun komütatif olmamasıyla çelişir. O halde U = B dir.Yani her $x\in U$ için d(x) = 0 dır. Lemma 4.5.3'den d = 0 olduğu bulunur. O halde Lemma 4.5.2'den her $x\in R$ için f(x) = qx olacak biçimde $q\in Q_r$(RC) vardır.

Teorem 4.5.5: R asal halka, U kendi başına yarıasal halka olan sıfırdan farklı sol ideali ve f genelleştirilmiş türev olsun. Eğer U komütatif değilse ve her $x,y\in U$ için f([x,y]) = $\pm$[x,y] ise her $x\in R$ için f(x) = qx olacak biçimde $q\in Q_r$(RC) vardır.

İspat: Varsayalım ki her $x,y\in U$ için f([x,y]) = $\pm$[x,y] olsun. Bu eşitlikte y yerine yx alınırsa

$$f([x,yx]) = (f([x,y])x) = f([x,y])x + [x,y]d(x)$$

elde edilir. Buradan

$$\pm[x,xy] = \pm[x,y]x + [x,y]d(x)$$

$$\pm[x,y]x = \pm[x,y]x + [x,y]d(x)$$

ve böylece her $x,y \in U$ için $[x,y]d(x) = 0$ olur.

Teorem 4.5.4'deki gibi devam edilirse, $d = 0$ bulunur. O halde Lemma 4.5.2'den her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(RC)$ vardır.

Sonuç 4.5.6: R asal halka, U U kendi başına yarıasal halka olan sıfırdan farklı sol ideali ve f genelleştirilmiş türev olsun. Eğer U değişmeli değilse ve her $x,y \in U$ için $f(xy) = \pm xy$ ise her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(RC)$ vardır.

İspat: Her $x,y \in U$ için $f(xy) = xy$ olsun. $f([x,y]) = f(xy) - f(yx) = xy - yx = [x,y]$ olduğundan Teorem 4.5.5 uygulanarak ispat tamamlanır.

Benzer olarak $f(xy) = -xy$ için de gösterilir.

Teorem 4.5.7: R asal halka, U kendi başına yarıasal halka olan sıfırdan farklı sol ideali ve f genelleştirilmiş türev olsun. Eğer f, U üzerinde homomorfizma veya anti- homomorfizma olarak hareket ediyorsa, her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(RC)$ vardır.

İspat: Varsayalım ki f, U üzerinde homomorfizma olarak hareket etsin. O zaman her $x,y \in U$ için

$$f(xy) = f(x)f(y) = f(x)f(y) = f(x)y + xdy, \qquad (3.19)$$

yazabiliriz. (3.19) eşitliğinde $z \in U$ olmak üzere x yerine xz alınırsa,

$$f(xz)f(y) = f(xz)y + xzd(y)$$

$$f(x)f(zy) = f(x)f(z)y + xzd(y)$$

$$f(x)f(z)y + f(x)zd(y) = f(x)f(z)y + xzd(y)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse her $x,y,z \in U$ için $(f(x) - x)zd(y) = 0$ bulunur. Bu eşitlikte $r \in R$ olmak üzere z yerine rz alınırsa her $x,y,z \in U$ için $(f(x) - x)rzd(y) = 0$ ve böylece $(f(x) - x)Rzd(y) = 0$ olur. Burada R'nin asal halka olması kullanılırsa, f, U üzerinde birim dönüşümdür veya $Ud(U)=0$ dır.

Varsayalım ki her $x \in U$ için $f(x) = x$ olsun. O zaman her $x,y \in U$ için $xy = f(xy) = f(x)y + xd(y)$ yazabiliriz. Buradan $xd(y) = 0$ elde edilir. O halde her iki durumda da $Ud(U) = 0$ dır. Lemma 4.5.1'den $d(U) = 0$ yani $d = 0$ elde edilir. Lemma 4.5.2'den, her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(RC)$ vardır.

Şimdi varsayalım ki f, U üzerinde anti-homomorfizma olarak hareket etsin. O zaman her $x,y \in U$ için

$$f(xy) = f(y)f(x) = f(x)y + xd(y) \quad (3.20)$$

yazabiliriz. (3.20) de x yerine xy alınırsa, $f(y)f(x)y + f(y)xd(y) = f(y)f(x)y + xyd(y)$ olur. Buradan her $y \in U$, $r \in R$ için $(f(y)r - rf(y))xd(y) = 0$ yani $[f(y),r]xd(y) = 0$ elde edilir. R halkasının asallığından her $y \in U$, $r \in R$ için

$$[f(y),r] = 0 \text{ veya } Ud(y) = 0$$

olur. Brauer's Trick ve Lemma 4.5.1 kullanılırsa $f(U) \subset Z$ veya $d(U) = 0$ sonucuna ulaşılır. 2. durumda $d = 0$ olduğundan Lemma 4.5.2'den, her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(RC)$ vardır. Bu da ispatı bitirir.

$f(U) \subset Z$ ise f, U üzerinde homomorfizma olarak hareket eder. Teoremin 1. kısmından her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak $q \in Q_r(RC)$ vardır.

Teorem 4.5.8: R asal halka, char $R \neq 2$, U kendi başına yarıasal halka olan sıfırdan farklı sol ideali ve f, R halkasının genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer U komütatif değil ve her $x \in U$ için $[x,f(x)] = 0$ ise her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(RC)$ vardır.

İspat: Her $x \in U$ için $[x,f(x)] = 0$ olsun. Bu eşitlik lineerleştirilirse, $0 = [x + y,f(x + y)] = [x,f(y)] + [y,f(x)]$ olur. y yerine yx alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= [x,f(yx)] + [yx,f(x)] \\ &= [x,f(y)x + yd(x)] + [yx,f(x)] \\ &= [x,f(y)]x + f(y)[x,x] + [x,y]d(x) + y[x,d(x)] + y[x,f(x)] + [y,f(x)]x \end{aligned}$$

bulunur. bu denklem düzenlenirse her $x,y \in U$ için

$$[x,y]d(x) + y[x,d(x)] = 0 \quad (3.21)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.21) de $z \in U$ olmak üzere y yerine yz alınırsa, $0 = [x,y]zd(x) + y[x,z]d(x) + yz[x,d(x)]$ bulunur. Bu denklemde yine (3.21) eşitliğini kullanırsak her $x,y,z \in U$ için $[x,y]zd(x) = 0$ elde edilir. R asal halka olduğundan her $x,y \in U$ için

$$[x,y] = 0 \text{ veya } Ud(x) = 0$$

olur. Brauer's Trick kullanılırsa, U komütatif olmadığından $d(U) = 0$ yani $d = 0$ dır. Lemma 4.5.2'den ispat biter.

Teorem 4.5.9: R asal halka, char $R \neq 2$, U kendi başına yarıasal halka olan sıfırdan farklı sol ideali ve f genelleştirilmiş türev olsun. Eğer U komütatif değilse ve

$d(Z)\neq 0$ ve her $x,y\in U$ için $[f(x),f(y)] = [x,y]$ ise her $x\in R$ için $f(x) = qx$ olacak $q\in Q_r(RC)$ vardır.

İspat: Hipotezde y yerine yx alınırsa, $[x,y]x = [f(x),f(y)x + yd(x)] = [f(x),f(y)]x + f(y)[f(x),x] + [f(x),y]d(x) + y[f(x),d(x)]$ ve buradan her $x,y\in U$ için

$$f(y)[f(x),x] + [f(x),y]\, d(x) + y[f(x), d(x)]d(x) = 0 \qquad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) da $c\in Z$ olmak üzere, y yerine yc alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= f(yc)[f(x),x] + [f(x),yc]d(x) + yc[f(x),d(x)] \\ &= f(y)c[f(x),x] + yd(c)\,[f(x),x] + [f(x),y]cd(x) + yc\,[f(x),d(x)] \end{aligned}$$

olur. Bu denklem düzenlenirse her $x,y\in U$, $c\in Z$ için $yd(c)\,[f(x),x] = 0$ yani $d(c)U[f(x),x] = 0$ elde edilir. R halkasının asallığından her $x\in U$, $c\in Z$ için

$$d(c) = 0 \text{ veya } U[f(x),x] = 0$$

olur. $d(Z)\neq 0$ ve U yarı asal olduğundan her $x\in U$ için $[f(x),x] = 0$ olur. Teorem 4.5.8 uygulanırsa ispat biter.

Teorem 4.5.10: R asal halka, char $R\neq 2$, U kendi başına yarıasal halka olan sıfırdan farklı sol ideali ve f genelleştirilmiş türev olsun. Eğer U komütatif değilse ve $f(U)\subseteq Z$ ise her $x\in R$ için $f(x) = qx$, olacak biçimde $q\in Q_r(RC)$ vardır.

İspat: Hipotezden $x,y\in U$ için $f(xy)\in Z$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} 0 &= [f(xy),y] = [f(x)y + xd(y),y] \\ &= [f(x),y]y + f(x)[y,y] + [x,y]d(y) + x[d(y),y] \\ &= xyd(y) - yxd(y) + xd(y)y - xyd(y) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan her $x,y\in U$ için

$$yxd(y) = xd(y)y \qquad (3.23)$$

elde edilir. $z\in I$ olmak üzere (3.23) de x yerine xz alınırsa, $yxzd(y) = xzd(y)y = xyzd(y)$ ve böylece her $x,y,z\in U$ için $[x,y]zd(y) = 0$ olur.

Üstteki eşitlikte $r\in R$ olmak üzere z yerine rz alınırsa ve R halkasının asallığı kullanılırsa, her $x,y\in U$ için

$$[x,y] = 0 \text{ veya } d(y) = 0$$

bulunur. Brauer's Trick'ten U komütatif olmadığı için $d = 0$ dır. Lemma 4.5.2'den ispat biter.

Teorem 4.5.11: R asal halka, char $R\neq 2$, U kendi başına yarıasal halka olan sıfırdan farklı sol ideali, f genelleştirilmiş türev ve $a\in R$ olsun. Eğer U komütatif değilse, $d(Z)\neq 0$ ve her $x\in U$ için $[a,f(x)]\in Z$ ise $a\in Z$ dir.

İspat: $d(Z) \neq 0$ olduğundan, $d(c) \neq 0$ olacak şekilde $c \in Z$ elemanı vardır. d türev olduğundan $d(c) \in Z$ dir. Hipotezde x yerine xc alınırsa,

$$[a,f(xc)] = [a,f(x)c + xd(c)$$
$$= [af(x)]c + f(x)[a,c] + [a,x]d(c) + x[a,d(c)]$$

yazabiliriz. Buradan $[a,x]d(c) \in Z$ olduğu bulunur. $d(c) \neq 0$ olduğundan her $x \in U$ için $[a,x] \in Z$ elde edilir. O halde her $r \in R$ için

$$[[a,x],r] = 0 \qquad (3.24)$$

yazabiliriz. (3.24) de x yerine x^2 alınırsa,

$$0 = [[a,x^2],r] = [[a,x]x + x[a,x],r]$$
$$= [a,x][x,r] + [[a,x],r]x + x[[a,x],r] + [x,r][a,x]$$
$$= 2[a,x][x,r]$$

elde edilir. R halkasının karakteristiği sıfırdan farklı olduğundan her $x \in U$, $r \in R$ için $[a,x]\,[x,r] = 0$ olur.

Bu eşitlikte r yerine rs, $s \in R$ yazılırsa

$$[a,x]\,R\,[x,r] = 0$$

bulunur. R halkasının asal olmasından

$$[a,x] = 0 \text{ veya } x \in Z$$

elde edilir. Burada $A = \{x \in U \mid [a,x] = 0\}$ ve $B = \{x \in U \mid x \in Z\}$ kümeleri tanımlansın. A ve B, U nun toplamsal alt gruplarıdır ve $U= A \cup B$ biçimindedir. Brauer's Trick'ten, A = U veya B = U olmalıdır. U komütatif olmadığından A = U olmalıdır. Yani, her $x \in U$ için $[a,x] = 0$ olur. O halde $a \in Z$ dir.

Sonuç 4.5.12: R asal halka, char $R \neq 2$, U sıfırdan farklı sol ideali yarı asal halka ve f genelleştirilmiş türev olsun. Eğer U komütatif değilse ve $d(Z) \neq 0$ ve $[f(U),f(U)] \subseteq Z$ ise her $x \in R$ için $f(x) = qx$, olacak biçimde $q \in Q_r(RC)$ vardır.

İspat: Hipotezden her $x,y \in U$ için $[f(x),f(y)] \in Z$ dir. Burada Teorem 4.5.11 uygulanırsa her $x \in U$ için $f(x) \in Z$ olur. Teorem 4.5.8'den, her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(RC)$ vardır.

4.6. Yong-Soo Jung, Kyoo- Hong Park, On Generalized (α,β) Derivations and Commutativity in Prime Rings, (2006)

Lemma 4.6.1: R asal halkası sıfırdan farklı komütatif sağ ideal içeriyorsa R komütatiftir.

Teorem 4.6.2: R asal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkasında her x,y$\in$I için g([μ(x),y]) = [ν(x),y]$_{\alpha,\tau}$ olacak şekilde sıfırdan farklı (α,β)-türevi δ ile belirli g genelleştirilmiş (α,β)-türevi varsa R halkası komütatiftir.

İspat: Her x,y$\in$I için

$$g([\mu(x),y]) = [\nu(x),y]_{\alpha,\tau}, \quad (3.25)$$

(3.25) eşitliğinde z$\in$I olmak üzere y yerine zy yazılırsa, her x,y,z$\in$I için

$$g(z[\mu(x),y] + [\mu(x),z]y) = \tau(z)[\nu(x),y]_{\alpha,\tau} + [\nu(x),z]_{\alpha,\tau}\alpha(y)$$

$$g(z[\mu(x),y]) + g([\mu(x),z]y) = \tau(z)[\nu(x),y]_{\alpha,\tau} + [\nu(x),z]_{\alpha,\tau}\alpha(y)$$

olur. Buradan devam edilirse $g(z)\alpha([\mu(x),y]) + \beta(z)\delta([\mu(x),y]) + g([\mu(x),z])\alpha(y) + \beta([\mu(x),z])\delta(y) = \tau(z)[\nu(x),y]_{\alpha,\tau} + [\nu(x),z]_{\alpha,\tau}\alpha(y)$, eşitliği elde edilir. Bu eşitliği düzenlersek, her x,y,z$\in$I için

$$g(z)\alpha([\mu(x),y]) + \beta(z)\delta([\mu(x),y]) + \beta([\mu(x),z])\delta(y) = \tau(z)[\nu(x),y]_{\alpha,\tau}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte y yerine yμ(x) yazılırsa,

$$g(z)\alpha([\mu(x),y]\mu(x)) + \beta(z)\delta([\mu(x),y]\ \mu(x)) + \beta([\mu(x),z])\delta(y\mu(x)) = \tau(z)(\tau(y)[\nu(x),\mu(x)]_{\alpha,\tau} + [\nu(x),y]_{\alpha,\tau}\alpha(\mu(x)))$$

elde edilir. Eşitlik açılarak

$$g(z)\alpha([\mu(x),y])\alpha(\mu(x)) + \beta(z)\delta([\mu(x),y])\ \alpha(\mu(x)) + \beta(z)\beta([\mu(x),y])\delta(\mu(x)) + \beta([\mu(x),z])\delta(y)\alpha(\mu(x)) + \beta([\mu(x),z])\beta(y)\delta(\mu(x)$$
$$= \tau(z)\tau(y)[\nu(x),\mu(x)]_{\alpha,\tau} + \tau(z)[\nu(x),y]_{\alpha,\tau}\alpha(\mu(x)) = \tau(z)\tau(y)g([\mu(x),\mu(x)]) + \tau(z)[\nu(x),y]_{\alpha,\tau}\alpha(\mu(x)) = \tau(z)[\nu(x),y]_{\alpha,\tau}\alpha(\mu(x)),$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse , her x,y,z$\in$I için

$g(z)\ \alpha([\mu(x),y])\ \ \alpha(\mu(x))\ +\ \beta(z)\ \ \delta([\mu(x),y])\ \ \alpha(\mu(x))\ +\ \beta(z)$ $\beta([\mu(x),y])\delta(\mu(x)) + \beta([\mu(x),z])\delta(y)\alpha(\mu(x)) + \beta([\mu(x),z])\beta(y)\delta(\mu(x)) =$ $\tau(z)[\nu(x),y]_{\alpha,\tau}\ \alpha(\mu(x))$ (3.26)

eşitliği elde edilir. (3.25) eşitliğini sağdan $\alpha(\mu(x))$ ile çarpıp (3.26) ile karşılaştırırsak, her $x,y,z\in I$ için

$$\begin{aligned}0 &= \beta(z)\beta([\mu(x),y])\delta(\mu(x)) + \beta([\mu(x),z])\beta(y)\delta(\mu(x))\\ &= \{\beta(z)\beta([\mu(x),y]) + \beta([\mu(x),z])\beta(y)\}\delta(\mu(x))\\ &= \{\beta(z[\mu(x),y] + [\mu(x),z]y)\}\delta(\mu(x))\\ &= (z[\mu(x),y] + [\mu(x),z]y)\}\beta^{-1}\delta(\mu(x))\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte $w\in R$ olmak üzere z yerine wz yazılırsa, her $x,y,z\in I$, $w\in R$ için

$$\begin{aligned}0 &= (wz[\mu(x),y] + [\mu(x),wz]y)\}\beta^{-1}\delta(\mu(x)) = 0\\ &= (wz[\mu(x),y] + w[\mu(x),z]y)\beta^{-1}\delta(\mu(x)) + [\mu(x),w]zy\beta^{-1}\delta(\mu(x))\\ &= w(z[\mu(x),y] + [\mu(x),z]y)\beta^{-1}\delta(\mu(x)) + [\mu(x),w]zy\beta^{-1}\delta(\mu(x))\end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $x,y,z\in I$, $w\in R$ için

$$[\mu(x),w]zy\beta^{-1}\delta(\mu(x)) = 0 \qquad (3.27)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte z yerine $z\beta^{-1}\delta(\mu(x))$ ve y yerine $y[\mu(x),w]z$ alınırsa, $[\mu(x),w]z\beta^{-1}\delta(\mu(x))y[\mu(x),w]z\beta^{-1}\delta(\mu(x)) = 0$, $\forall x,y,z\in I$, $w\in R$ bulunur. R halkası asal olduğundan her $x,z\in I$, $w\in R$ için $[\mu(x),w]z\beta^{-1}\delta(\mu(x)) = 0$ olur. Buradan yine R halkasının asallığından her $w\in R$, $x\in I$ için $[\mu(x),w] = 0$ veya $\beta^{-1}\delta(\mu(x)) = 0$ ve böylece

$$[\mu(x),w] = 0 \text{ veya } \delta(\mu(x)) = 0$$

elde edilmiş olur.

$A = \{x\in I \mid [\mu(x),w] = 0,\ \forall w\in R\}$ ve $B = \{x\in I \mid \delta(\mu(x)) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. Brauer's Trick'den I = A veya I = B dir.

I = B ise her $x\in I$ için $\delta(\mu(x)) = 0$ olur. O zaman her $x\in I$, $y\in R$ için

$$\begin{aligned}0 &= \delta(\mu(xy)) = \delta(\mu(x)\mu(y))\\ &= \delta(\mu(x))\alpha(\mu(y)) + \beta(\mu(x))\delta(\mu(y))\\ &= \beta(\mu(x))\delta(\mu(y)) = (\beta o\mu)(x)\delta(\mu(y))\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikten her $x \in I$, $y \in R$ için $x(\beta o \mu)^{-1} \delta(\mu(y)) = 0$ elde edilir.

Son eşitlikte $r \in R$ olmak üzere x yerine xr yazılırsa, $xr(\beta o \mu)^{-1} \delta(\mu(y)) = 0$, bulunur. R asal halka olduğundan her $x \in I$, $y \in R$ için $x = 0$ veya $(\beta o \mu)^{-1} \delta(\mu(y))=0$ elde edilir. Buradan $I \neq 0$ olduğundan her $y \in R$ için $(\beta o \mu)^{-1} \delta(\mu(y)) = 0$ bulunur. O halde her $y \in R$ için $\delta(\mu(y)) = 0$ yani $\delta = 0$ dır. Ancak bu sonuç, hipotezde δ nın sıfırdan farklı verilmesiyle çelişir. I = B olamaz. O halde I = A dır. Her $x \in I$, $w \in R$ için $[\mu(x),w] = 0$ yani $\mu(I) \subset Z(R)$ dir. $\mu(I)$, R halkasının sıfırdan farklı ideali olduğu için. Lemma 4.6.1 uygulanarak R halkasının komütatif olduğu bulunur.

Sonuç 4.6.3: [34 ,Teorem 2.1]**:** R asal halka, I ise R halkasının sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer R halkasında her $x,y \in I$ için $g([x,y]) = [x,y]$ olacak şekilde sıfırdan farklı δ türeviyle belirli, g genelleştirilmiş türevi varsa R halkası komütatiftir.

İspat: Bir önceki teoremde 1 birim dönüşüm olmak üzere $\alpha = \beta = \mu = \nu = \tau = 1$ alınırsa, $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ olacağından, δ bir türev ve $g(xy) = g(x)y + x\delta(y)$ bulunur. Bu durumda g de bir genelleştirilmiş türev olur.

Sonuç 4.6.4: R asal halka, I da R halkasının sıfırdan farklı ideali olsun. Her $x,y \in I$ için $g(xy) = g(yx)$ olacak şekilde sıfırdan farklı δ, (α,β)-türeviyle belirli g genelleştirilmiş (α,β)-türevi varsa R halkası komütatiftir.

İspat: Teorem 4.6.2'de, 1 birim dönüşüm ve 0 da sıfır dönüşümü olmak üzere $\mu = 1$ ve $\nu = 0$ alınırsa R halkası komütatif bulunur.

Aşağıdaki örnek asal halka yerine yarı asal halka alındığında R halkasının komütatif olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek: R_1 komütatif olmayan asal halka, R_2 komütatif asal halka olsun. $R = R_1 \oplus R_2$ halkasının yarı asal halka olduğunu görelim

Her $r_1, r_2 \in R$ için $a(r_1,r_2)a = (0,0)$ olsun. Bu durumda $(ar_1a, ar_2a) = (0,0)$ yazabiliriz. O halde $ar_1a = 0$, her $r_1 \in R$ ve $ar_2a = 0$, her $r_2 \in R$ olur. Buradan R_1 ve R_2 nin asal olması kullanılırsa $a = 0$ elde edilir. $R = R_1 \oplus R_2$ halkası yarı asal halkadır.

α_2 ve β_2, $\alpha_2 \neq \beta_2$ olmak üzere R_2 halkasının endomorfizmleri olsunlar. Her x,y için$\in$ R_2 için,

$$(\alpha_2 - \beta_2)(x + y) = \alpha_2(x + y) - \beta_2(x + y) = \alpha_2(x) + \alpha_2(y) - \beta_2(x) - \beta_2(y)$$
$$= (\alpha_2 - \beta_2)(x) + (\alpha_2 - \beta_2)(y)$$
$$(\alpha_2 - \beta_2)(xy) = \alpha_2(xy) - \beta_2(xy)$$
$$= \alpha_2(x)\alpha_2(y) - \beta_2(x)\beta_2(y) - \beta_2(x)\alpha_2(y) + \beta_2(x)\alpha_2(y)$$
$$= (\alpha_2 - \beta_2)(x)\alpha_2(y) + \beta_2(x)\,(\alpha_2 - \beta_2)(y)$$

olduğundan $\alpha_2 - \beta_2 \neq 0$, R_2 halkası üzerinde (α_2, β_2)-türevdir.

Her $(x_1,x_2) \in R$ için $\alpha(x_1,x_2) = (0, \alpha_2(x_2))$ ve $\beta(x_1,x_2) = (0, \beta_2(x_2))$ ile tanımlanan α ve β, R halkasının endomorfizmleri olmak üzere, her $(x_1,x_2) \in R$ için $\delta(x_1,x_2) = (0, (\alpha_2 - \beta_2)(x_2)$ ile tanımlanan $\delta : R \to R$ dönüşümü R halkası üzerinde (α, β) türevdir.

$\alpha(x_1,x_2) = (0, \alpha_2(x_2))$ ile tanımlanan α dönüşümünün endomorfizm olduğunu gösterelim. Her $(x_1,x_2) \in R$ için,

$$\alpha((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (0, \alpha_2(x_2 + y_2))$$
$$= (0, \alpha_2(x_2)) + (0, \alpha_2(y_2))$$
$$= \alpha(x_1,x_2) + \alpha(y_1,y_2)$$
$$\alpha((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = \alpha(x_1y_1, x_2y_2) = (0, \alpha_2(x_2y_2))$$
$$= (0, \alpha_2(x_2))(0, \alpha_2(y_2))$$
$$= \alpha(x_1,x_2)\alpha(y_1,y_2)$$

olduğundan α dönüşümü endomorfizmdir. Benzer şekilde β dönüşümünün de endomorfizm olduğu görülür.

Şimdi $\delta : R \to R$ dönüşümünün sıfırdan farklı (α, β)-türev olduğunu gösterelim. Her x,y$\in$R için $x = (x_1,x_2)$ ve $y = (y_1,y_2)$ olsun.

$$\delta((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) = \delta(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (0, (\alpha_2 - \beta_2)(x_2 + y_2)$$
$$= (0, \alpha_2(x_2 + y_2) - \beta_2(x_2 + y_2))$$
$$= (0, (\alpha_2 - \beta_2)(x_2)) + (0, (\alpha_2 - \beta_2)(y_2))$$

$$= \delta(x_1,x_2) + \delta(y_1,y_2)$$

$$\delta((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = \delta(x_1y_1,x_2y_2) = (0,(\alpha_2-\beta_2)(x_2y_2)$$
$$= (0,\alpha_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) - (0,\beta_2(x_2))(0,\beta_2(y_2))$$
$$-(0,\beta_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) + (0,\beta_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2))$$
$$= (0,(\alpha_2-\beta_2)(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) + (0,\beta_2(x_2))(0,(\alpha_2-\beta_2)(y_2))$$
$$= \delta(x_1,x_2)\alpha(y_1,y_2) + \beta(x_1,x_2)\delta(y_1,y_2)$$

olduğundan δ:R$\rightarrow$R dönüşümü (α,β) türevdir. Bu dönüşümün sıfırdan farklı olduğunu gösterelim. $\delta = 0$ olsaydı her $(x_1,x_2)\in$R için, $\delta(x_1,x_2) = (0,(\alpha_2-\beta_2)(x_2)$ olduğundan $(\alpha_2-\beta_2)(x_2) = 0$ olur ki bu da $\alpha_2(x_2)=\beta_2(x_2)$ demektir. Bu ifade ise $\alpha_2 \neq \beta_2$ olmasıyla çelişir. O halde $\delta \neq 0$ dır.

Şimdi $a\in R_2$ olmak üzere $\gamma(x_1,x_2) = (0,a\alpha_2(x_2))$ ile γ:R$\rightarrow$R dönüşümünü tanımlayalım. g = $\alpha - \beta + \gamma$ ise her x,y$\in$R için g(xy) = g(yx) olacak şekilde, sıfırdan farklı (α,β)-türevi δ ile belirli genelleştirilmiş (α,β)-türevdir. Her x,y$\in$R için $x = (x_1,x_2)$ ve $y = (y_1,y_2)$ olsun.

$$g(x+y) = g((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) = (\alpha-\beta+\gamma)(x_1+y_1,x_2+y_2)$$
$$= (0,\alpha_2(x_2+y_2)) - (0,\beta_2(x_2+y_2)) + (0,a\alpha_2(x_2+y_2))$$
$$= \alpha(x_1,x_2) - \beta(x_1,x_2) + \gamma(x_1,x_2) + \alpha(y_1,y_2) - \beta(y_1,y_2)$$
$$+\gamma(y_1,y_2)$$
$$= (\alpha-\beta+\gamma)(x_1,x_2) + (\alpha-\beta+\gamma)(y_1,y_2)$$
$$= g(x_1,x_2) + g(y_1,y_2)$$

$$g(xy) = g((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = (\alpha-\beta+\gamma)(x_1y_1,x_2y_2)$$
$$= (0,\alpha_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) - (0,\beta_2(x_2))(0,\beta_2(y_2)) + (0,a\alpha_2(x_2)$$
$$\alpha_2(y_2)) - (0,\beta_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) + (0,\beta_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2))$$
$$= \{(0,\alpha_2(x_2)) - (0,\beta_2(x_2)) + (0,a\alpha_2(x_2))\}(0,\alpha_2(y_2))$$
$$+ (0,\beta_2(x_2))\{(0,\alpha_2(y_2)) - (0,\beta_2(y_2))\}$$
$$= (\alpha-\beta+\gamma)(x_1,x_2)\alpha(y_1,y_2) + \beta(x_1,x_2)\delta(y_1,y_2)$$
$$= g(x)\alpha(y) + \beta(x)\delta(y)$$

Yine her $x,y \in R$ için $x = (x_1,x_2)$ ve $y = (y_1,y_2)$ olsun.

$$g(xy) = g((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = (\alpha - \beta + \gamma)(x_1y_1,x_2y_2)$$

$$= (0,\alpha_2(x_2y_2)) - (0,\beta_2(x_2y_2)) + (0,a\alpha_2(x_2y_2))$$

$$= (0,\alpha_2(y_2x_2)) - (0,\beta_2(y_2x_2)) + (0,a\alpha_2(y_2x_2))$$

$$= (\alpha - \beta + \gamma)(y_1x_1, y_2x_2) = g((y_1,y_2)(x_1,x_2)) = g(yx)$$

elde edilir.

Yani teoremdeki bütün şartlar sağlanır. Fakat $(a,b), (c,d) \in R$ için $(a,b)(c,d) = (ac,bd) = (ac,db) \neq (c,d)(a,b)$ olduğundan R halkası komütatif değildir.

BÖLÜM 5
GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ ASAL HALKALARDA LİE İDEALLER

Bu bölümde, R halkalarında türevle ilgili yapılan çalışmalar yerine onun bir Lie ideali ve türev yerine halka üzerinde genelleştirilmiş türev alınarak yapılan genelleştirmeleri içeren makaleler ele alınmıştır.

5.1. Ö. Gölbaşı, K.Kaya, On Lie Ideals with Generalized Derivations, (2006)

Bu kısım boyunca, R asal halka, char $R \neq 2$, $f : R \to R$ d türevi ile belirli genelleştirilmiş türev ve U, R halkasının sıfırdan farklı Lie ideali olarak alınacaktır.

Uyarı 5.1.1: Her $x,y \in R$ için

$f([x,y]) = f(xy - yx) = f(x)y + xd(y) - d(y)x - yf(x) = [f(x),y] + [x,d(y)]$ dir.

Lemma 5.1.2: $f(U) = 0$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat : $u \in U$, $x \in R$ için, $[u,x] \in U$ olduğundan hipotezden, her $u \in U$, $x \in R$ için $0 = f([u,x]) = [f(u),x] + [u,d(x)] = [u,d(x)]$ ve böylece $[U,d(R)] = 0$ elde edilir. [22] den $U \subset Z$ dir.

Lemma 5.1.3: $f(U) \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat : u, $w \in U$ için, $f([u,w]) \in Z$ olduğundan hipotezden, her u, $w \in U$ için $f([u,w]) = [f(u),w] + [u,d(w)] = [u,d(w)] \in Z$ yani $[U,d(U)] \subset Z$ elde edilir. [28,Teorem2]'den $U \subset Z$ dir.

Lemma 5.1.4: $a \in R$ için,

(i) $af(U) = 0$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

(ii) $f(U)a = 0$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat : (i) U, merkez tarafından kapsanmayan Lie ideal olsun. [9,Lemma 1]'den, R halkasının $[R,M] \subset U$, fakat $[R,M] \not\subset Z$ olacak şekilde sıfırdan farklı M ideali vardır. Her $x \in R$, $m \in M$ için $[R,M] \subset U$ olduğundan, $[xm,m] = [x,m]m \in U$ yazabiliriz. Buradan

$$0 = af([x,m]m) = af([x,m])m + a[x,m]d(m) = a[x,m]d(m) = 0$$

elde edilir. $u \in U$ olmak üzere x yerine $f(u)x$ yazılırsa, her $x \in R$, $m \in M$, $u \in U$ için

$0 = a[f(u)x,m]d(m) = af(u)[x,m]d(m) + a[f(u),m]xd(m) = a[f(u),m]xd(m)$ bulunur. Burada R halkasının asallığı kullanılırsa, her $m \in M$, $u \in U$ için

$a[f(u),m] = 0$ veya $d(m) = 0$

elde edilir.

$L = \{m \in M \mid a[f(u),m] = 0 , \forall u \in U\}$ ve $K = \{m \in M \mid d(m) = 0\}$ kümeleri M nin toplamsal altgruplarıdır ve $M = K \cup L$ dir. Brauer's Trick'ten M = K veya M = L olmak zorundadır. $M \neq 0$ ve $d \neq 0$ olduğundan M = L dir. Her $m \in M$,$u \in U$ için, $a[f(u),m] = 0$ yani $aMf(U) = 0$ dır. Buradan a= 0 veya f(U) = 0 elde edilir. Lemma 5.1.2'den a = 0 veya $U \subset Z$ dir.

(ii) Her $x \in R$, $m \in M$ için $m[x,m] \in U$ ve f'in sağ genelleştirilmiş türev olduğu kullanılarak, benzer yolla sonuca ulaşılır.

Lemma 5.1.5: $d(Z) \neq 0$ ve $a \in R$ olsun. $[a,f(U)] = 0$ ise $a \in Z$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat: $d(Z) \neq 0$ olduğundan $d(\alpha) \neq 0$ olacak şekilde $\alpha \in Z$ elemanı vardır ve $d(\alpha) \in Z$ dir. $u \in U$, $x \in R$ için $[u,\alpha x] = \alpha [u, x] + [u,\alpha]x = \alpha [u, x] \in U$ olduğundan hipotezden,

$0 = [a,f(\alpha [u, x])] = [a,d(\alpha)[u,x]] + [a,\alpha f([u,x])] = d(\alpha)[a,[u,x]]$

olur. Bu eşitlikte R halkasının asallığı kullanılırsa $d(\alpha)= 0$ veya $[a,[u,x]] = 0$ elde edilir. $d(\alpha) \neq 0$ olduğundan her $u \in U$, $x \in R$ için $[a,[u,x]] = 0$ bulunur.

$I_a : R \to R$, $I_a(x) = [a,x]$ ve $I_u : R \to R$, $I_u(x) = [u,x]$ iç türevlerini tanımlayalım.

$I_a I_u(R) = 0$ olduğunda [32, Teorem 1] den $I_a = 0$ veya $I_u = 0$ dır. O halde her $u \in U$, $x \in R$ için $[a,x] = 0$ veya $[u,x]=0$ olur. Buradan $a \in Z$ veya $U \subset Z$ dir.

Lemma 5.1.6: $a \in R$ ve $[a,f(U)] = 0$ ise $a \in Z$ veya $d(a) = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat: $u \in U$ için, $[u,a] \in U$ olduğundan hipotezden

$0 = [a,f[u,a]] = [a,[f(u),a]] + [a,[u,d(a)]] = [a,[u,d(a)]]$

yani $[[d(a),U],a] = 0$ elde edilir. Buradan $[I_{d(a)}(U),a] = 0$ yazabiliriz. O halde $I_a I_{d(a)}(U) = 0$ olur. [6, Teorem 4]'ten, $a \in Z$ veya $d(a) \in Z$ veya $U \subset Z$ dir.

Varsayalım ki $d(a) \in Z$ olsun. $[u,a^2] \in U$ olduğu hipotezde kullanılırsa

$0 = [a,f[u,a^2]] = [a,[f(u), a^2]] + [a,[u,d(a^2)]]$

$= [[a,f(u)],a^2] + [[a,a^2]f(u)] + [a,[u,d(a)a]] + [a,[u,ad(a)]]$

bulunur. Bu eşitlikte $d(a)\in Z$ olduğu kullanılırsa $2[a,[u,ad(a)]] = 0$ elde edilir. R halkasının karakteristiği 2'den farklı olduğundan $[a,[u,ad(a)]] = 0$ olur. Buradan $[a,[u,a]]d(a) = 0$ ve böylece $d(a)\in Z$ olduğundan $[a,[u,a]] = 0$ veya $d(a) = 0$ bulunur. Bağıntılar düzenlenirse $[a, I_a(u)] = 0$ veya $d(a) = 0$ yani $I_a I_a(u) = 0$ veya $d(a) = 0$ yazabiliriz. O halde $I_a^2(U) = 0$ veya $d(a) = 0$ dır.

$I_a^2(U) = 0$ ise [9, Teorem 1]'den $a\in Z$ veya $U\subset Z$ olur. O halde $a\in Z$ veya $d(a) = 0$ veya $U\subset Z$ dir.

Teorem 5.1.7 : $f^2(U) = 0$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat: Varsayalım ki $U\not\subset Z$ olsun. u, $w\in U$ için, hipotezden

$$0 = f^2([f(u),w]) = f([f^2,u],w + [f(u),d(w)])$$
$$= f([f(u),d(w)]) = [f(u),d^2(w)]$$

olur. Yani , her $u,w\in U$ için

$$[f(u),d^2(w)] = 0 \qquad (4.1)$$

eşitliği elde edilir. Lemma 5.1.6'dan, $d^2(w)\in Z$ veya $d^3(w) = 0$ veya $U\subset Z$ olur. Burada $U\not\subset Z$ olduğu kullanılırsa her $w\in U$ için

$$d^2(w)\in Z \text{ veya } d^3(w) = 0$$

elde edilir.

$A = \{w\in U \mid d^2(w)\in Z\}$ ve $B = \{w\in U \mid d^3(w) = 0\}$ kümeleri U nun toplamsal altgruplarıdır ve $U = A\cup B$ dir. Brauer's Trick'ten U = A veya U = B olmak zorundadır. U = A ise [4, Teorem 1] den $U\subset Z$ elde edilir ki bu varsayımla çelişir. O halde U = B dir. $d^3(U) = 0$ olduğundan [9, Lemma 11] den, $d^3(R) = 0$ dır. Her $u\in U$, $r\in R$ için hipotezden,

$$0 = f^2([u,r]) = f(f([u,r])) = f([f(u),r]) + f([u,d(r)])$$
$$= [f^2(u),r] + [f(u),d(r)] + [f(u),d(r)] + [u,d^2(r)]$$

bulunur. O halde her $u\in U$, $r\in R$ için

$$2[f(u),d(r)] + [u,d^2(r)] = 0 \qquad (4.2)$$

eşitliği elde edilir. $v\in U$ olmak üzere r yerine $r\,d^2(v)$ yazılırsa ve $d^3(R) = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$0 = 2[f(u),d(rd^2(v))] + [u,d^2(rd^2(v))]$$
$$= 2[f(u),d(r)d^2(v)] + [u,d(d(rd^2(v)))] = 2[f(u),d(r)d^2(v)] + [u,d(d(r)d^2(v))]$$

$=2[f(u),d(r)d^2(v)] + [u, d^2(r)d^2(v)] = 2d(r)[f(u),d^2(v)] + 2[f(u),d(r)]d^2(v)]$
$+ d^2(r)[u, d^2(v)] + [u, d^2(r)]d^2(v)$

olur. Bu eşitlikte (4.1) ve (4.2) bağıntıları kullanılırsa, her $u,v \in U$, $r \in R$ için

$$d^2(r)[u, d^2(v)] = 0 \qquad (4.3)$$

elde edilir.

$I_{d^2(v)}: R \to R$, $I_{d^2(v)}(x) = [x, d^2(v)]$ şeklindeki iç türevi tanımlayalım. O zaman (4.3) bağıntısından $d^2(r)\, I_{d^2(v)}(U) = 0$ elde edilir. [9, Teorem 4] ten, $d^2(R)=0$ veya $d^2(U) \subseteq Z$ dir.

$d^2(R) = 0$ ise [27, Teorem 3] ten, R komütatiftir. $U \subset Z$ elde edilir ki bu varsayımla çelişir. O halde $d^2(U) \subseteq Z$ olmalıdır. Bu durumda da [28, Teorem 1] den, $U \subset Z$ şeklindeki aynı çelişkiye ulaşılır. O halde varsayım yanlıştır, $U \subset Z$ dir.

Uyarı 5.1.8 : Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ise $(u + v)^2 \in U$ olduğundan $(u + v)^2 - u^2 - v^2 = uv + vu \in U$ olur. Ayrıca U, Lie ideal olduğundan $uv - vu \in U$ dur. Bu durumda $2vu \in U$ bulunur.

Teorem 5.1.9 : Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Her $u,v \in U$ için $f(uv) = f(u)f(v)$ ise $U \subset Z$dir.

İspat: Varsayalım ki $U \not\subset Z$ olsun. f, U üzerinde homomorfizma olarak hareket ettiğinden, her $u,v \in U$ için

$$f(uv) = f(u)v + ud(v) = f(u)f(v) \qquad (4.4)$$

eşitliği elde edilir. (4.4) de $w \in U$ olmak üzere u yerine 2uw alınırsa,

$$f(2uw)v + 2uwd(v) = f(2uw)f(v)$$
$$2f(uw)v + 2uwd(v) = 2f(uw)f(v)$$
$$2f(uw)v + 2uwd(v) = 2f(u)f(wv) = 2f(u)(f(w)v + wd(v))$$
$$= 2f(u)f(w)v + 2f(u)wd(v)$$

olur. O halde $2uwd(v) = 2f(u)wd(v)$ dir. R halkasının karakteristiğinin 2'den farklı olduğu kullanılırsa , her $u,v,w \in U$ için $(u - f(u))wd(v) = 0$ elde edilir. [9, Lemma 4] den , her $u \in U$ için $d(U) = 0$ veya $u = f(u)$ olur.

Eğer her $u \in U$ için $u = f(u)$ ise $2uv \in U$ olduğundan $2uv = f(2uv) = 2f(uv)$ yazabiliriz. Buradan $2uf(v) = 2d(u)v + 2uf(v)$ olduğundan, her $u,v \in U$ için $d(u)v = 0$ yani $d(U)U = 0$ dır. [9, Lemma 7] den, $U = 0$ elde edilir ki bu çelişkidir. O halde varsayım yanlıştır, $U \subset Z$ dir.

Teorem 5.1.10: Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Eğer her $u,v \in U$ için $f(uv) = f(v)f(u)$ ise $U \subset Z$dir.

İspat: Varsayalım ki $U \not\subset Z$ olsun. f, U üzerinde anti-homomorfizma olarak hareket ettiğinden, her $u,v \in U$ için

$$f(uv) = d(u)v + uf(v) = f(v)f(u) \tag{4.5}$$

olur. (4.5) de v yerine 2uv alınırsa,

$$d(u)2uv + uf(2uv) = f(2uv)f(u)$$

$$2d(u)uv + 2uf(v)f(u) = 2f(uv)f(u)$$

$$2d(u)uv + 2uf(v)f(u) = 2d(u)vf(u) + 2uf(v)f(u)$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılıp, R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu kullanılırsa $d(u)uv - d(u)vf(u) = 0$ elde edilir. O halde her $u,v \in U$ için

$$d(u)uv = d(u)vf(u) \tag{4.6}$$

bulunur. (4.6) da $w \in U$ olmak üzere v yerine 2vw alınırsa, $2d(u)uvw = 2d(u)vwf(u)$ olur. Bu eşitlikte R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması ve (4.6) bağıntısı kullanılırsa her $u,v,w \in U$ için $d(u)v[f(u),w] = 0$ elde edilir. [9, Lemma 4] den , her $u,w \in U$ için $d(u) = 0$ veya $[f(u),w] = 0$ olur.

$A = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$ ve $B = \{u \in U \mid [f(u),w] = 0 , \ \forall w \in U \}$ kümeleri U nun toplamsal altgruplarıdır ve $U = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten $U = A$ veya $U = B$ olmak zorundadır. $U = A$ ise, $d(U) = 0$ dır, [9, Lemma 5] den $U \subset Z$ elde edilir ki bu varsayımla çelişir. $U = B$ olmalıdır. Her $u,w \in U$ için $[f(u),w] = 0$ yani $[f(U),U] = 0$ dır. Burada Lemma 5.1.6 kullanılırsa $d(U) = 0$ veya $U \subset Z$ dir. Her iki durum da hipotezle çelişeceği için varsayım yanlıştır, $U \subset Z$'dir.

Teorem 5.1.11 : Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Eğer her $u,v \in U$ için $f(uv) = f(vu)$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat : Her $u,v \in U$ için $f(uv) = f(vu)$ olsun. Bu eşitliği düzenlersek

$$0 = f(uv) - f(vu) = f(uv - vu) = f([u,v])$$

yazabiliriz. O halde $[u,v] = c \in U$ denilirse $f(c) = 0$ olur.

Hipotezden her $w \in U$ için, $f(cw) = f(wc)$ olduğu kullanılarak $f(c)w + cd(w) = d(w)c + wf(c)$ ve $f(c) = 0$ olduğundan dolayı $cd(w) = d(w)c$ elde edilir. Yani her $w \in U$ için

$$[c,d(w)] = 0 \tag{4.7}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.7) de w yerine 2uc alınırsa,

$$0 = [c,d(2uc)] = 2[c,d(uc)]$$
$$= [c,d(uc)] = [c,d(u)c + ud(c)]$$
$$= d(u)[c,c] + [c,d(u)]c + u[c,d(c)] + [c,u]d(c)$$

ve buradan da her $u \in U$ için $[c,u]d(c) = 0$ bulunur.

Yukarıdaki eşitlikte u yerine 2uv alınırsa, ve R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $u,v \in U$ için $[c,u]vd(c) = 0$ olur. Böylece her $u \in U$ için $[c,u] = 0$ veya $d(c) = 0$, ve böylece $c \in Z$ veya $d(c) = 0$ yani her $u,v \in U$ için $[u,v] \in Z$ veya $d([u,v]) = 0$ sonucuna ulaşılır.

$A = \{u \in U \mid [u,v] \in Z$ ve $B = \{u \in U \mid d([u,v]) = 0, \ \forall u,v \in U\}$ kümeleri U nun toplamsal altgruplarıdır ve $U = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten U = A veya U = B olmak zorundadır. U = A ise, $[U,U] \subset Z$ demektir ve [20, Lemma 1] den $U \subset Z$ dir. U = B ise $d([U,U]) = 0$ olur. [U,U] Lie ideal olduğundan, [9, Lemma 5] ten $[U,U] \subset Z$ bulunur ve [20, Lemma 1] den $U \subset Z$ elde edilir.

5.2. M. Ashraf, A. Ali, S. Ali, On Lie Ideals and Generalized (θ,ϕ) Derivations in Prime Rings, (2004)

Bu makale boyunca $x^y = F(xy) - F(x)\theta(y) - \phi(x)d(y)$ gösterimi kullanılacaktır. F, ϕ, θ, d toplamsal dönüşümler olduğundan $x, y, z \in R$ için, $x^{y+z} = x^y + x^z$ ve $(x + y)^z = x^z + y^z$ sağlanır.

Lemma 5.2.1: [9, Lemma 4] R, 2-torsion free asal halka ve $U \not\subset Z$ olmak üzere U, R halkasının Lie ideali olsun. $aUb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Lemma 5.2.2 : R, 2-torsion free asal halka, her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olmak üzere U, R halkasının Lie ideali, θ ve ϕ R halkasının endomorfizmleri ve d, (θ,ϕ)-türev olsun. Eğer $F : R \to R$ toplamsal dönüşümü her $u \in U$ için $F(u^2) = F(u)\theta(u) + \phi(u)d(u)$ şartını sağlıyorsa aşağıdakiler sağlanır.

(i) $F(uv + vu) = F(u)\theta(v) + \phi(u)d(v) + F(v)\theta(u) + \phi(v)d(u), \forall u,v \in U$

(ii) $F(uvu) = F(u)\theta(vu) + \phi(uv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(u), \ \forall u,v \in U$

(iii) $F(uvw + wvu) = F(u)\theta(vw) + F(w)\theta(vu) + \phi(uv)d(w) + \phi(wv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(w) + \phi(w)d(v)\theta(u), \ \forall u,v,w \in U$

(iv) $u^v[\theta(u),\theta(v)] = 0$, $\forall$ u,v$\in$U

(v) $u^v\,\theta(w)[\theta(u),\theta(v)] = 0$, $\forall$ u,v,w$\in$U

İspat : (i) u,v$\in$U için, hipotez kullanılarak

$$F(uv + vu) = F((u + v)^2) - F(u^2) - F(v^2)$$
$$= F(u+v)\theta(u+v) + \phi(u + v)d(u + v) - F(u)\theta(u) - \phi(u)d(u)$$
$$- F(v)\theta(v) - \phi(v)d(v)$$
$$= F(u)\theta(v) + \phi(u)d(v) + F(v)\theta(u) + \phi(v)d(u)$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) u,v$\in$U için, $uv + vu = (u + v)^2 - u^2 - v^2 \in U$ olduğundan (i) şıkkında v yerine uv + vu alınırsa,

$F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u)\theta(uv + vu) + \phi(u)d(uv + vu) + F(uv+vu)\theta(u) + \phi(uv + vu)d(u)$

olur. Burada d : R$\to$R bir (θ,ϕ)-türev olduğundan her u,v$\in$U $d(uv+vu) = d(u)\theta(v) + \phi(u)d(v) + d(v)\theta(u) + \phi(v)d(u)$ olduğu kullanılırsa

$F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u)\theta(uv) + F(u)\theta(v)\theta(u) + F(u)\theta(v)\theta(u) + \phi(u)d(v)\theta(u) + F(v)\theta(u)^2 + \phi(v)d(u)\theta(u) + \phi(u)d(u)\theta(v) + \phi^2(u)d(v) + \phi(u)d(v)\theta(u) + \phi(u)\phi(v)d(u) + \phi(uv)d(u) + \phi(vu)d(u) = F(u)\theta(uv) + 2F(u)\theta(vu) + F(v)\theta(u^2) + 2\phi(u)d(v)\theta(u) + \phi(v)d(u)\theta(u) + \phi(u)d(u)\theta(v) + \phi(u^2)d(v) + 2\phi(uv)d(u) + \phi(vu)d(u)$

eşitliği bulunur. Aynı zamanda,

$F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u^2v + vu^2) + 2F(uvu) = F(u^2)\theta(v) + \phi(u^2)d(v) + F(v)\theta(u^2) + \phi(v)d(u^2) + 2F(uvu) = F(u)\theta(uv) + \phi(u)d(u)\theta(v) + F(v)\theta(u^2) + \phi(v)d(u)\theta(u) + \phi(v)\phi(u)d(v) + 2F(uvu) + \phi(u^2)d(v)$

olduğundan, bulunan iki denklem birbirine eşitlenir ve charR$\neq$2 olduğu kullanılırsa, her u,v$\in$U için

$$F(uvu) = F(u)\theta(vu) + \phi(uv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(u)$$

sonucuna ulaşılır.

(iii) (ii) de w$\in$U olmak üzere u yerine u + w alınırsa,

$F((u + w)\, v\, (u + w)) = F(u + w)\theta(v(u + w)) + \phi(u + w)\, d(v)\theta(u + w) + \phi((u + w)v)\, d(u) = F(u)\theta(vu) + F(u)\theta(vw) + F(w)\theta(vu) + F(w)\theta(vw) +$

$\phi(u)d(v)\theta(u) + \phi(w)d(v)\theta(w) + \phi(uv)d(u) + \phi(uv)d(w) + \phi(wv)d(u) + \phi(wv)d(w) + \phi(u)d(v)\theta(w) + \phi(w)d(v)\theta(u) = F(uvu) + F(wvw) + F(u)\theta(vw) + F(w)\theta(vu) + \phi(uv)d(w) + \phi(wv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(w) + \phi(w)d(v)\theta(u)$

olur. Aynı zamanda,

$$F((u + w)\, v\, (u + w)) = F(uvu) + F(wvw) + F(uvw + wvu)$$

olduğundan, bulunan iki denklem birbirine eşitlenirse, her $u,v,w \in U$ için

$$F(uvw + wvu) = F(u)\theta(vw) + F(w)\theta(vu) + \phi(uv)d(w) + \phi(wv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(w) + \phi(w)d(v)\theta(u)$$

elde edilir.

(iv) $uv + vu$, $uv - vu \in U$ olduğundan $2uv \in U$ dur. Hipotezden, $F((uv)^2) = F(uv)\theta(uv) + \phi(uv)d(uv)$ olur. O zaman,

$F(uv(uv) + (uv)vu) = F((uv)^2) + F(uv^2u) = F(uv)\theta(uv) + \phi(uv)d(uv) + F(u)\theta(v^2u) + \phi(uv^2)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(vu) + \phi(uv)d(v)\theta(u)$

eşitliğine ulaşırız. Aynı zamanda (iii) de w yerine 2uv alınırsa,

$F(uv(uv) + (uv)vu) = F(u)\theta(vuv) + F(uv)\theta(vu) + \phi(uv)d(uv) + \phi(uv^2)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(uv) + \phi(u)d(v)\theta(u)$

olduğundan, bulunan iki denklem birbirine eşitlenirse, her $u,v \in U$ için

$$\begin{aligned} 0 &= F(uv)(\theta(uv) - \theta(vu)) - F(u)\theta(v)(\theta(uv) - \theta(vu)) - \phi(u)d(v)(\theta(uv) - \theta(vu)) \\ &= F(uv) - F(u)\theta(v) - \phi(u)d(v)(\theta(uv) - \theta(vu)) \\ &= u^v[\theta(u), \theta(v)] \end{aligned}$$

olduğu ispatlanmış olur.

(v) (iii) den,

$$\begin{aligned} F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) &= F(uv)\theta(wvu) + F(vu)\theta(w(uv)) + \phi(uvw)d(vu) \\ &\quad + \phi(vuw)d(uv) + \phi(uv)d(w)\theta(vu) + \phi(vu)d(w)\theta(uv) \\ &= F(uv)\theta(wvu) + F(vu)\theta(wuv) + \phi(uvw)d(v)\theta(u) \\ &\quad + \phi(uvwv)d(u) + \phi(vuw)d(u)\theta(v) + \phi(vuwu)d(v) \\ &\quad + \phi(uv)d(w)\theta(vu) + \phi(vu)d(w)\theta(uv) \qquad (4.8) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(u(vwv)u) + F(v(uwu)v)$$

$= F(u)\theta(vwvu) + \phi(uvwv)d(u) + \phi(u)d(vwv)\theta(u)$

$+ F(v)\theta(uwuv) + \phi(vuwu)d(v) + \phi(v)d(uwu)\theta(v)$

dır. $4uw \in U$ için,

$$d(4uwu) = 4d(u(wu)) = 4(d(u)\theta(wu) + \phi(u)d(w)\theta(u) + \phi(uw)d(u))$$

eşitliği bulunur. Burada, $charR \neq 2$ olduğundan dolayı

$$d(u(wu)) = d(u)\theta(wu) + \phi(u)d(w)\theta(u) + \phi(uw)d(u)$$

eşitliği elde edilir. Bunu yukarıdaki ifadede kullanırsak

$$F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(u)\theta(vwvu) + \phi(uvwv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(wvu) + \phi(uvw)d(v)\theta(u) + \phi(uv)d(w)\theta(vu) + F(v)\theta(uwuv) + \phi(vuwu)d(v) + \phi(v)d(u)\theta(wuv) + \phi(vuw)d(u)\theta(v) + \phi(vu)d(w)\theta(uv)$$

olduğu görülür. Bu denklem (4.8) denklemine eşitlenir ve

$$x^{y} = F(xy) - F(x)\theta(y) - \phi(x)d(y)$$

$$y^{x} = F(yx) - F(y)\theta(x) - \phi(y)d(x)$$

olmak üzere, $x^{y} = y^{x}$ olduğu kullanılırsa, her $u,v,w \in U$ için

$$F(uv)\theta(wvu) + F(vu)\theta(wuv) = F(u)\theta(vwvu) + \phi(u)d(v)\theta(wvu) + F(v)\theta(uwuv) + \phi(v)d(u)\theta(wuv)$$ olur ve böylece

$$u^{v}\,\theta(w)[\theta(u),\theta(v)] = 0$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 5.2.3 : R, 2-torsion free asal halka, her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olmak üzere U, R halkasının komütatif olmayan Lie ideali, θ ve ϕ R halkasının endomorfizmleri, θ birebir ve örten ve $d : R \to R$, (θ,ϕ)-türev olsun. Eğer $F : R \to R$, U üzerinde genelleştirilmiş Jordan (θ,ϕ)-türev ise, F, U üzerinde genelleştirilmiş (θ,ϕ) türevdir.

İspat : Lemma 5.2.2 (v) den her $u,v,w \in U$ için $u^{v}\,\theta(w)[\theta(u),\theta(v)] = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$0 = \theta^{-1}(\,u^{v}\,\theta(w)[\theta(u),\theta(v)]) = \theta^{-1}(\,u^{v})w[u, v]$$

olur. Bu eşitliğe Lemma 5.2.1 uygulanırsa $\theta^{-1}(u^{v}) = 0$ veya $[u, v] = 0$ yani her $u,v \in U$ için

$$u^{v} = 0 \text{ veya } [u, v] = 0$$

elde edilir.

$U_1 = \{v \in U : u^v = 0, \forall u \in U\}$ ve $U_2 = \{v \in U : [u, v] = 0, \forall u \in U\}$ kümelerini tanımlayalım. $U = U_1 \cup U_2$ olduğundan, Brauer's Trick'ten $U = U_1$ veya $U = U_2$ olmalıdır. U değişmeli olmadığından $U = U_1$ dir. Yani her $u,v \in U$ için

$$0 = u^v = F(uv) - F(u)\theta(v) - \phi(u)d(v)$$

olur. O halde $F(uv) = F(u)\theta(v) + \phi(u)d(v)$ yani F, U üzerinde genelleştirilmiş (θ,ϕ) türevdir.

Sonuç 5.2.4 : R, 2-torsion free komütatif olmayan asal halka ve $F : R \to R$ genelleştirilmiş Jordan türev olsun. O zaman F, genelleştirilmiş türevdir.

İspat: Genelleştirilmiş Jordan türev, 1 birim dönüşüm olmak üzere, genelleştirilmiş (1,1)-Jordan türevdir. O zaman Teorem 5.2.1 uygulanırsa genelleştirilmiş (1,1)-türev, yani genelleştirilmiş türev olduğu görülür.

Teorem 5.2.5 : R, 2-torsion free asal halka, R halkasının sıfırdan farklı U komütatif Lie ideali için, $u^2 \in U$, $\forall u \in U$ şartı sağlansın. θ, R halkasının otomorfizması ve $d: R \to R$, (θ,ϕ)-türev olsun. Eğer $F : R \to R$, U üzerinde genelleştirilmiş Jordan (θ,ϕ)-türev ise, F, U üzerinde genelleştirilmiş (θ,ϕ)-türevdir.

İspat : U komütatif Lie ideal olduğundan $u,v \in U$ için $[u,v] = 0$ dır. [19 Lemma 1.3] den $U \subset Z$ olur. Lemma 5.2.2 (iii) den , her $u,v,w \in U$ için

$$F(uvw + wvu) = F(u)\theta(vw) + F(w)\theta(vu) + \phi(uv)d(w) + \phi(wv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(w) + \phi(w)d(v)\theta(u) \qquad (4.9)$$

bulunur. Hipotezden her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olduğundan, her $u,v \in U$ için $2uv \in U$ dur. U komütatif olduğu için Lemma 4.2.2(i) den,

$$\begin{aligned} 2F(uvw + wvu) &= F((2uv)w + w(2uv)) \\ &= F(2uv)\theta(w) + \phi(2uv)d(w) + F(w)\theta(2uv) + \phi(w)d(2uv) \\ &= 2F(uv)\theta(w) + 2\phi(uv)d(w) + 2F(w)\theta(uv) + 2\phi(w)d(uv) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$F(uvw+wvu)=F(uv)\theta(w)+\phi(uv)d(w)+F(w)\theta(uv)+\phi(w)d(uv) \qquad (4.10)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.9) ve (4.10) birbirine eşitlenir, $[u,v] = 0$, $U \subset Z$ ve θ otomorfizma olduğundan her $u \in U$ için $\theta(u) \in Z$ olduğu kullanılırsa,

$$0 = F(uv)\theta(w) - F(u)\theta(v)\theta(w) - \phi(u)d(v)\theta(w)$$

$= (F(uv) - F(u)\theta(v) - \phi(u)d(v))\theta(w)$

$= u^{v}\,\theta(w) = 0$

olur. O halde $u^{v} = 0$ veya $\theta(w) = 0$ dır. Buradan $u^{v} = 0$ yani $F(uv) - F(u)\theta(v) - \theta(u)d(v) = 0$ elde edilir. O halde $F(uv) = F(u)\theta(v) + \phi(u)d(v)$ yani F, U üzerinde genelleştirilmiş (θ, ϕ)-türevdir.

Sonuç 5.2.6: R, 2-torsion free asal halka olsun. Eğer $F:R \to R$, genelleştirilmiş Jordan türev ise, F genelleştirilmiş türevdir.

İspat: Genelleştirilmiş Jordan türev, 1 birim dönüşüm olmak üzere, genelleştirilmiş (1,1)-Jordan türevdir. O zaman Teorem 5.2.5'ten genelleştirilmiş (1,1)-türev, yani genelleştirilmiş türev olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte, yukarıdaki sonucun hipotezinde R halkasının asal olması gerektiği gösterilmiştir.

Örnek 5.2.7: S, her elemanının karesi sıfır, bazı elemanlarının çarpımı sıfırdan farklı olan bir halka olsun. R = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y \in S \right\}$ ve $F:R \to R$,

$F\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dönüşümünü tanımlayalım. d = 0 ve U = R için,

$$F(r^2) = F(r)r + rd(r) = F(r)r = F(r)s = 0, \quad \forall\, r,s \in R$$

olur. Fakat, bazı $r,s \in R$ elemanları için $F(rs) \neq 0$ dır.

Teorem 5.2.8 : R, 2-torsion free asal halka, R halkasının U Lie ideali için $u^2 \in U$ şartı sağlansın. θ ve ϕ R halkasının endomorfizmaları, θ birebir ve üzerine, $d:R \to R$, (θ, ϕ)-türev olsun. U da sıfır bölen olmayan komütatör olduğunu varsayalım. Eğer $F:R \to R$, U üzerinde genelleştirilmiş Jordan (θ, ϕ)-türev ise, F, U üzerinde genelleştirilmiş (θ, ϕ)-türevdir.

İspat: $F : R \to R$, genelleştirilmiş Jordan (θ, ϕ)-türev olduğundan her $u \in U$ için $F(u^2) = F(u)\theta(u) + \phi(u)d(u)$ olacak şekilde $d : R \to R$, (θ, ϕ) türevi vardır. $u,v \in U$ için $u^{v} = F(uv) - F(u)\theta(v) - \phi(u)d(v)$ ise, θ otomorfizma olduğundan

Lemma 5.2.2 (iv) den, $0 = u^{v}[\theta(u),\theta(v)] = u^{v}\theta[u,v] = \theta^{-1}(u^{v})[u,v]$ bulunur. Yani her $u,v \in U$ için

$$\theta^{-1}(u^{v})[u,v] = 0 \qquad (4.11)$$

elde edilir. $a,b \in U$ elemanları, $c[a,b] = 0$ veya $[a,b]c = 0$ olacak şekildeki sabit elemanlar olsun. Hipotezden $[a,b]$ sıfır bölen olmadığından $c = 0$ dır. (4.11) de a, b elemanları kullanılırsa $\theta^{-1}(a^{b}) = 0$ ve buradan da

$$a^{b} = 0 \qquad (4.12)$$

sunucuna ulaşılır. (4.11) de u yerine u + a alınırsa,

$$0 = \theta^{-1}((u + a)^{v})[u + a,v]$$

$$= \theta^{-1}(u^{v} + a^{v})[u + a,v]$$

$$= \theta^{-1}(u^{v})[u + a,v] + \theta^{-1}(a^{v})[u + a,v]$$

ve bu eşitlikten , her $u,v \in U$ için

$$\theta^{-1}(u^{v})[a,v] + \theta^{-1}(a^{v})[u,v] = 0 \qquad (4.13)$$

denklemi elde edilir. (4.13) de v yerine b alınırsa ve [a,b] nin sıfır bölen olmadığı kullanılırsa $\theta^{-1}(u^{b})[a,b]=0$ olur. Buradan,

$$\theta^{-1}(u^{b}) = 0 , \forall u \in U \qquad (4.14)$$

bulunur. (4.13) de v yerine v + b yazılırsa,

$\theta^{-1}(u^{v+b})[a,v + b] + \theta^{-1}(a^{v+b})[u,v + b] = \theta^{-1}(u^{v}+u^{b})[a,v + b] + \theta^{-1}(a^{v} + a^{b})[u,v + b] = (\theta^{-1}(u^{v}) + \theta^{-1}(u^{b}))([a,v] + [a,b]) + (\theta^{-1}(a^{v}) + \theta^{-1}(a^{b}))([u,v] + [u,b])$

ve bu denklem düzenlenirse

$$\theta^{-1}(u^{v})[a,b] + \theta^{-1}(a^{v})[u,b] = 0 , \forall u,v \in U \qquad (4.15)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.15) de özel olarak u = a alınırsa, $2\theta^{-1}(a^{v})[a,b] = 0$ ve R nin 2-torsion free asal halka olması kullanılırsa $\theta^{-1}(a^{v})[a,b] = 0$ olur. Böylece $\theta^{-1}(a^{v}) = 0$ yani

$$a^{v} = 0 \qquad (4.16)$$

elde edilir. (4.15) ve (4.16) dan, $\theta^{-1}(u^{v})[a,b] = 0$ bulunur. Bu eşitlikten her $u,v \in U$ için $\theta^{-1}(u^{v}) = 0$ yani $u^{v} = 0$ dır.O halde $F(uv) = F(u)\theta(v) + \phi(u)d(v)$ yani F, U üzerinde genelleştirilmiş (θ,ϕ)-türevdir.

Sonuç 5.2.9 : [1, Teorem] R, 2-torsion free halka, $F:R\rightarrow R$ genelleştirilmiş Jordan türev olsun. Eğer R halkasının sıfır bölen olmayan komütatörü varsa F, R üzerinde genelleştirilmiş türevdir.

Uyarı 5.2.10: R halkasında her ideal aynı zamanda Lie ideal olduğundan, yukarıdaki teoremin sonucunda U, ideal olarak alınabilir. Her $u\in U$, $u^2 \in U$ kabulü, U nun ideal olması kabulüne yakın olmasına rağmen, bu özelliğe sahip olup da ideal olmayan Lie idealler de vardır. Örneğin; R halka, U, R halkasının idempotent elemanlarından oluşan toplamsal altgrubu yani $U = \{e\in R \mid e^2 = e\}$ olsun. Eğer e elemanı idempotent eleman ise $x\in R$ olmak üzere, $u = e + ex - exe$, $v = e + xe - exe$ elemanları da idempotenttir, yani U kümesinin elemanlarıdır. O halde her $e\in U$, $x\in R$ için, $ex - xe = u - v\in U$ yani $[U,R]\subset U$ olur yani U, Lie idealdir. Ayrıca her $u\in U$ için $u^2 \in U$ şartı sağlanır, ancak U, ideal değildir.

Kaynaklar

1. Albaş E., Argaç N., Generalized Derivations of Prime Rings, Algebra Colloquium, 11:3, 399-410 (2004)
2. Ashraf M., Asma A., Shakir A., On Lie Ideals and Generalized (θ,φ)-derivations in Prime Rings, Communications in Algebra, 32:8, 2977 – 2985, (2004)
3. Ashraf, M., Asma A. and Rani R., On Generalized Derivations of Prime Rings, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 29:669-675, (2005)
4. Ashraf, M. and Rehman, N., On Generalized Derivations in Rings, Math. J. Okayama Univ., 42:7-9, (2000)
5. Ashraf M. and Rehman N., On Commutativity of Rings with Derivations, Results in Math., 42:3-8, (2002)
6. Asma A., Rehman N. and Shakir A., On Lie Ideals with Derivations as Homomorphisms and Anti-homomorphisms, Acta Math. Hungar., 101:1-2, 79-82, (2003)
7. Beidar K.I., Martindale W.S. and Mikhalev A.V., Rings with generalized Identities, Marcel Dekker, INC, (1996)
8. Bell. H.E. and Martindale and W.S., Centralizing Mappings of Semiprime Rings, Canad. Math.Bull., 30:92-101, (1987)
9. Bergen J and Herstein I.N. and Kerr J.W., Lie Ideals and Derivations of Prime Rings, J. Algebra, 71:259-267, (1981)
10. Bresar M.,Centralizing Mappings and Derivations in Prime Rings. J.Algebra, 156:385 – 394, (1993)
11. Bresar M., On Skew-comutting Mappings of Rings, Bull. Austral. Math. Soc.47 291-296, (1993)
12. Bresar M., Functional Identities of Degree Two, J. Algebra, 172:690-720,(1995)
13. Daif M.N. and Bell H.E., Remarks on Derivations on semiprime Rings, Internat. J. Math. And Math. Sci., 15:205-206, (1992)
14. Giambruno A. and Herstein I.N., Derivations with Nilpotent Values, Rend. Circ. Mat. Palermo, 30:199-206, (1981)

15. Gölbaşı Ö., On Left Ideals of Prime Rings with Generalized Derivations, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume. 34, 27-32, (2005)

16. Gölbaşı Ö. and Aydın N., Some Results on Endomorphisms of Prime Rings which are (σ,τ) Derivation, East Asian Math. J.,18(2):195-203, (2002)

17. Gölbaşı Ö. and Kaya K., On Lie Ideals with Generalized Derivations, Siberian Mathematical Journal, 47:5, 862-866, (2006)

18. Gusic I., A Note on generalized Derivations of Prime Rings, Glasnik Matematicki, 40(60), 17-19, (2005)

19. Herstein, I. N., Topics in Ring Theory, Chicago Univ., Chicago Pres., (1969)

20. Herstein I.N., On the Lie Structure of an Associative Ring, J. Algebra, 14:561-771, (1970)

21. Herstein I.N., A Note on Derivations, Canad. Math. Bull., 21:369-370,(1978)

22. Herstein I.N., A Note on Derivations II, Canad. Math. Bull., 22:509-511,(1979)

23. Hvala B., Generalized Derivations in Prime Rings, Comm. Algebra 26:1147-1166, (1998)

24. Jung Yong-Soo and Park Kyoo-Hong, On Generalized (α,β)-derivations and Commutativity in prime Rings, bull. Korean Math. Soc., 43, No:1, pp. 101-106, (2006).

25. Lanski, C., Differential Identities of Prime Rings, Kharchenko's Theorem and Applications, Contemporary Mathematics,124: 111-128, (1992).

26. Lanski, C., Quadratic Central Differantial Identities of Prime Rings, Nova J. Alg. Geom.,1:185-206, (1992).

27. Lee P.H. and Lee T.K., On Derivations of Prime Rings, Chinese J. Math, 9:107-110, (1981)

28. Lee P.H. and Lee T.K., Lie Ideals of Prime Rings with Derivations, Bull. Inst. Math., Acad. Sin., 11: 75-80, (1983).

29. Lee T.K., Generalized derivations of Left Faithful Rings, Comm. Algebra, 27:793-810, (1999)

30. Lee T.K. and Shiue W.K., Identities with Generalized Derivations, Comm. Algebra, 29:4437-4450, (2001)

31. Mayne, J.H., Centralizing mappings of Prime Rings, Canad. Math. Bull.,27:122-126, (1984)

32. Posner E., Derivations in Prime Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 8:1093-1100, (1957).

33. Quadri M. A., Shadab Khan M. and Rehman N., Generalized Derivations and Commutativity of Prime Rings, Indian J. Pure Appl. Math., (34), 9: 1393-1396, (2003)

34. Rehman N., On Generalized Derivations as Homomorphisms and Anti-homomorphisms, Glasnik Math., 39(59):27-30, (2004)