T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

f(R) GRAVİTE TEORİLERİ

İbrahim ŞENER

Danışman

Prof. Dr. İhsan YILMAZ

Aralık, 2007

ÇANAKKALE

f(R) GRAVİTE TEORİLERİ

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

İbrahim ŞENER

Danışman

Prof. Dr. İhsan YILMAZ

Aralık, 2007

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

İbrahim ŞENER tarafından Prof. Dr. İhsan YILMAZ danışmanlığında hazırlanan ***“f(R)* Gravite Teorileri”** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yönetici

Jüri Üyesi

Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi:…../…../……

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

SİMGELER VE KISALTMALAR

G	Gravitasyon sabiti
N	Uzay zamanın boyutu
$\alpha,\beta,\gamma........,\mu,\nu,\lambda.....$	0 ’ dan $N-1$’ kadar olan doğal sayıları
$i,j,k,l.......$	1’ dan $N-1$’ kadar olan doğal sayıları
$g_{\mu\nu}$, g	Metrik tensör ve determinantı
$\Im^{\mu}_{\nu}$	Kronecker deltası
ds^2	Yay elemanının karesi
u^{μ}	Komoving hız vektörü
$\Gamma_{\mu\nu\lambda},\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$	Afin bağlantı katsayıları
$\{\mu\nu,\lambda\},\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$	Levi-Civita afin bağlantı katsayıları
$R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}.R_{\mu\nu},R$	Riemann tensörü, Ricci tensörü ve Ricci skaleri
∇_{λ}	Kovaryant türev
$\mathcal{D}_{\lambda}$	Metriğe göre kovaryant türev
$\Box$	d’ Alambert işlemcisi
ρ	Yoğunluk
p	Basınç
$T_{\mu\nu}$	Enerji-momentum tensörü
$a(t)$	Ölçek çarpanı
H	Hubble parametresi

f(R) GRAVİTE TEORİLERİ

ÖZET

Son zamanlarda yapılan Süpernova, WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) ve CMB (Cosmic Microwave Background) gözlemleri evrenimizin ivmelenerek genişlediğini göstermiştir. Bu ivmelenmeyi açıklamak için egzotik madde kaynaklı kozmolojik modeller ve genel rölativitenin teorisinin yeniden düzenlenmesiyle oluşturulan (modifikasyonunu içeren) $f(R)$ gravite teorileri önerilmiştir. $f(R)$ gravite teorilerinin uzay zamanın afin ve metrik yapıda olmasına göre Palatini formalizmi ve Metrik formalizmi olarak iki tür formalizme sahiptir.

Anahtar Sözcükler : $f(R)$ Gravite Teorileri, Palatini Formalizmi, Metrik Formalizmi, Yüksek Mertebeden Gravitasyon Teorileri, İvmeli Genişleme

f(R) GRAVITY THEORIES

ABSTRACT

In recently; Supernovae, WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) and CMB (Cosmic Microwave Background) observations have shown that our univers expands as accelerating. To explain this accelerating, cosmological models based on the exotic matter and *f(R)* gravity theories which contain modification of general relativity have been suggested. *f(R)* gravity theories have two formalism as Palatini formalism and metric formalism with respect to afin and metric structure of space-time.

Key Words : *f(R)* Gravity Theories, Palatini Formalism, Metric Formalism, Higher Order Graviy Theories, Accelerated Expansion.

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Son zamanlarda yapılan Süpernova, WMAP ve CMB gözlemleri evrenimizin ivmelenerek genişlediğini göstermiştir (Dekel ve diğ., 1996; Viana ve Liddle, 1999; Schmidt ve diğ., 1998; Riess ve diğ., 1998; Perlmutter ve diğ., 1999; Efstathiou ve diğ., 1999; Netterfield ve diğ., 2002; Halverson ve diğ.,, 2002; Bennett ve diğ., 2003; Spergel ve diğ., 2003; Tonry ve diğ., 2003; Daly ve Djorgovski, 2003; Lahanas ve diğ., 2003; Seljak ve diğ., 2005; Eisenstein ve diğ., 2005; Riess ve diğ., 2005; Astier ve diğ., 2006). Bu ivmelenmeyi açıklamak için yapılan çalışmaları; egzotik madde kaynaklı (sıfır basınç ve pozitif yoğunluklu karanlık madde, negatif basınç ve pozitif yoğunluklu karanlık enerji, boşluk enerjisi v.b.) kozmolojik modeller (Veerson, 1997; Carroll, 1998; Capozziello ve diğ., 1999; Carroll, 2001 (a); Carroll, 2001 (b); Carroll ve diğ., 2002; Carroll ve diğ., 2003; Carroll ve diğ., 2005; Bean ve diğ.,2005; Capozziello ve diğ., 2006 (a); Capozziello ve diğ., 2006 (b); Capozziello ve diğ., 2006 (c)) ve genel relativitenin teorisinin yeniden düzenlenmesiyle oluşturulan $f(R)$ gravite teorileri (Carroll 2003; Dolgov ve Kawasaki, 2003; Nojiri ve Odintsov, 2003; Meng ve Wang, 2003; Vollick, 2003; Allemandi ve diğ., 2004 (a); Allemandi ve diğ., 2004 (b); Carroll ve diğ., 2004; Flanagan, 2004; Meng ve Wang, 2004 (a); Meng ve Wang, 2004 (b); Allemandi ve diğ., 2005 (a); Allemandi ve diğ., 2005 (b); Carroll ve diğ., 2005) olmak üzere iki ana başlık altında toplayabiliriz. Bunlardan $f(R)$ gravite teorileri tez çalışmamızın konusunu oluşturmaktadır.

$f(R)$ gravite teorilerinin asıl çıkış noktası olarak, erken evrende kuantum etkileri için eğriliğin R^2, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ve $R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}$ gibi yüksek mertebeden terimlerinin Einstein-Hilbert Lagrange yoğunluna düzeltme terimi olarak eklenmesini gösterebiliriz (Starobinsky, 1980; Ford, 1997). Einstein-Hilbert Lagrange yoğunluna düzeltme terimlerinin eklenmesi ile oluşan bu gravitasyon teorileri, doğrusal olmayan gravitasyon teorileri, genişletilmiş gravitasyon teorileri ve yüksek mertebeden gravitasyon teorileri olarak da isimlendirilmektedir (Schmidt, 1986; Schmidt, 1987; Schmidt, 1988; Schimming ve Schmidt, 1990; Quvet ve Schmidt, 1991; Magnano ve Sokolowski, 1994; Kasper ve diğ., 1994; Schmidt, 1994; Magnano, 1995; Schmidt, 1995; Kluske ve Schmidt, 1996; Schmidt, 1996;Schmidt, 1997 (a); Schmidt, 1997 (b); Capozziello, 1998 (a); Capozziello, 1998 (b); Schmidt, 1998; Schmidt, 2000; Allemvei ve diğ., 2006; Schmidt, 2007).

Genel relativite teorisi, gravitasyona geometrik bir yaklaşım getirmiştir. Bu geometrik yaklaşım Riemann geometrisidir. Bilindiği gibi Riemann geometrisi genel olarak eğrilikli bir uzayda eğri ve yüzeylerin davranışlarını belirlemeye çalışır. Bu nedenle Riemann geometrisinin özelliklerini anlamak için, uzayın bir metrik özelliklerini veya uzayda iki nokta arasında bir vektörün taşınması ile ortaya çıkacak olan afin özelliklerinin belirlenmesi şeklinde iki yaklaşımda bulunabiliriz. Uzaydaki eğrilme, esas olarak bir vektörün paralel taşıması sonucu, kovaryant türevlerinin komütatif olmaması sonucu ortaya çıkar ve

$$\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu\right) A^\lambda \neq 0 \tag{1.1}$$

şeklinde yazılabilir. Bir vektörün kovaryant türevi için $\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda$ ifadesini hatırlanırsa

$$\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu\right) A^\lambda = \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\upsilon\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\right) A^\sigma \tag{1.2}$$

şeklinde yazılabilir ve burada sağ taraftaki ifade

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\upsilon\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \tag{1.3}$$

Riemann eğrilik tensörüdür ve uzayın eğriliğini belirler. Eğer λ ve μ indisleri üzerinde kontraksiyon yapıp yeniden düzenlenirse

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} \tag{1.4}$$

Ricci tensörü elde edilir. Bu tensörden de uzayın skaler eğriliği belirleyen R Ricci skaleri

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma, \partial\Gamma) \tag{1.5}$$

şeklinde yazılabilir. Görüldüğü üzere Ricci skaleri metriğe ve afin bağlantı katsayılarına bağlıdır.

Einstein' ın genel relativite teorisine baktığımızda uzay zamanın bir metrik ile donatılmış olduğunu rahatça görebiliriz. Bu nedenle de eğrilikli uzay zamanın afin yapısını Christoffel sembolleri olarak da bilinen Levi - Civita afin katsayaları belirler. Bu sebeple Einstein' ın genel relativite teorisini, metrik tabanlı bir gravitasyon teorisidir. Bu sebeple de afin yapı

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(-\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} \right) \tag{1.6}$$

şeklinde belirlenir. Genel relativite teorisinde alan denklemleri

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R \, d^N x + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m \, d^N x \tag{1.7}$$

etki fonksiyonundan türetilebilir. Burada $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m\left(g^{\mu\nu}\right)$ maddesel alana ait Lagrange yoğunluğudur. Bunun metriğe göre varyasyonundan da

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{1.8}$$

şeklinde enerji momentum tensörü elde edilir. (1.7) etki fonksiyonunun varyasyonu

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^N x$$

$$-\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \left\{ \Im^{\sigma}_{\lambda} \Im^{\rho}_{\nu} - \Im^{\sigma}_{\nu} \Im^{\rho}_{\lambda} \right\} \mathcal{D}_\rho \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} d^N x \tag{1.9}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathcal{D}_\rho$ metriğe göre kovaryant türevdir. (1.9) denkleminden

$$\mathcal{D}_\rho \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) = 0 \tag{1.10}$$

ve

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.11}$$

şeklinde metriğin süreklilik denklemi ve alan denklemi elde edilir. Görüldüğü gibi genel relativite teorisi metrik tabanlı bir teoridir. Ancak $f(R)$ gravite teorilerinde uzay zamanın yapısını yalnızca metriğe göre değil aynı zamanda afine göre de belirlenebiliriz. Bu nedenle uzay zamanın afin veya metrik olmasına göre $f(R)$ gravite teorileri için iki yaklaşım önerilmiştir. Bunlar, Palatini (afin) ve metrik formalizmidir. Bunun yanında, $f(R)$ gravite teorilerine skaler gravitasyon teorilerinden de ulaşabilmemiz mümkündür. Skaler alanlı gravitasyon teorisi, Brans–Dicke' nın skaler gravitasyon teorisidir (Brans ve Dicke, 1961). Bu teoride etki fonksiyonu

$$S=\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(-\frac{\phi R}{16\pi}+L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right)+L_{m}\left(g^{\mu\nu}\right)\right)d^{N}x \qquad (1.16)$$

ile verilir. Burada $\phi R/16\pi$ terimi bir nev' i gravitasyon ile skaler alanın etkileşimini ifade etmektedir. Skaler alanla gravitasyonun etkileşimi $F(\phi,R)=-\phi R/16\pi$ şeklinde keyfi bir fonksiyonla tanımlanabilir. O halde bu etkileşim için $\mathcal{L}=\sqrt{-g}F(\phi,R)$ şeklinde bir Lagrange yoğunluğu yazabiliriz. Böylece (1.16) etki fonksiyonu

$$S=\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(F(\phi,R)+L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right)+L_{m}\left(g^{\mu\nu}\right)\right)d^{N}x \qquad (1.17)$$

olacaktır. Burada $L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right)$

$$L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right)=-\omega(\phi)g^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu}\phi\mathcal{D}_{\nu}\phi-V(\phi) \qquad (1.18)$$

şeklindedir. Burada $\omega(\phi)$ Brans Dicke parametresidir. (1.17) etki fonksiyonundan

$$\frac{\partial F}{\partial R}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}F(\phi,R)g_{\mu\nu}-\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\frac{\partial F}{\partial R}+g_{\mu\nu}\Box\frac{\partial F}{\partial R}$$
$$+\omega(\phi)\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi-\mathcal{D}_{\mu}\phi\mathcal{D}_{\nu}\phi\right)+\frac{1}{2}V(\phi)g_{\mu\nu}-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}=0 \qquad (1.19)$$

şeklinde alan denklemleri ve

$$\frac{\partial F}{\partial\phi}+\frac{d\omega}{d\phi}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi+2\omega(\phi)\Box\phi-\frac{dV}{d\phi}=0 \qquad (1.20)$$

denklemi elde edilir.

$$\omega(\phi) = -\frac{1}{16\pi}\frac{\varepsilon\tilde{\omega}_0}{\phi} \qquad (\tilde{\omega}_0 = sabit) \tag{1.22}$$

ve

$$V(\phi) = 0 \tag{1.23}$$

seçimlerini yapalım. (1.19)’ nin izini alıp (1.20) ile karşılaştırdığımızda

$$\Box\phi = -\frac{8\pi}{\tilde{\omega}_0(N-2)+(N-1)}T \tag{1.24}$$

şeklinde Poisson denklemi elde edilir. $\tilde{\omega}_0 >> 1$ büyük olduğu durum için

$$\phi \approx \langle\phi\rangle + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tilde{\omega}_0}\right) \tag{1.25}$$

yazılabilir (Weinberg, 1972). Bu durumda (1.19) ile verilen alan denklemini

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2\varepsilon\left(\langle\phi\rangle + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tilde{\omega}_0}\right)\right)}T_{\mu\nu} \tag{1.26}$$

olarak yazılabilir. $\tilde{\omega}_0 \to \infty$ limit hali için $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\tilde{\omega}_0}\right) \to 0$ olacağından ve Sciama’ nın modelinde olduğu gibi $\langle\phi\rangle \approx \frac{1}{G}$ seçilmek suretiyle Einstein alan denklemine indirgenir:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (1.27)$$

$f(R)$ gravite teorileri, metriğe bağlı maddesel bir alanla, Brans-Dicke parametresi $\omega = 0$ olacak şekilde seçilen bir skaler alanın etkileşim olarak ele alınabilir. Bu etkileşimin neticesinde gravitasyona doğrusal olmayan bir teori olarak yaklaşmak mümkün olur. Bu etkileşime ait Lagrange yoğunluğunu

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(F(\phi, R) - V(\phi)\right) + \mathcal{L}_m\left(g^{\mu\nu}\right) \qquad (1.28)$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun $\delta\phi$' ye göre varyasyonu ile alan denklemi

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{dV}{d\phi} = 0 \qquad (1.29)$$

olarak elde edilir. $F(\phi, R) = \varepsilon\phi R$ ve $V(\phi) = V_0 \phi^{m+1}$ olarak seçilirse bu alan denklemi

$$\varepsilon R - V_0 (m+1) \phi^m = 0 \qquad (1.30)$$

elde edilir ve ϕ skaleri de yalnız bırakıldığında ise

$$\phi = \left(\frac{\varepsilon R}{V_0 (m+1)} \right)^{\frac{1}{m}} \qquad (1.31)$$

olur. Sonuçta $\mathcal{L}$ Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left((\varepsilon R - V_0)\left(\frac{\varepsilon R}{V_0(m+1)} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{\varepsilon R}{(m+1)} \right) + \mathcal{L}_m\left(g^{\mu\nu}\right) \tag{1.32}$$

şeklinde Ricci skalerine göre doğrusal olmayan bir yapıda olur. Burada $(\varepsilon \in \Re)$ $(V_0, m \in \Re)$, $(m \neq 0)$ ve $(m \neq -1)$dir. (1.32) denkleminde

$$f(R) = -16\pi G\left\{ (\varepsilon R - V_0)\left(\frac{\varepsilon R}{V_0(m+1)} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{\varepsilon R}{(m+1)} \right\} \tag{1.33}$$

tanımlaması yapılırsa doğrusal olmayan gravitasyonal etkileşim için Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\, f(R) + \mathcal{L}_m\left(g^{\mu\nu}\right) \tag{1.34}$$

şeklinde eğriliğin keyfi bir fonksiyonu olan $f(R)$ fonksiyonuna bağlı genel bir ifade ile verilebilir. Eğer $F(\phi, R) = \varepsilon\phi R$ ve $V(\phi) = V_0 \exp(\lambda\phi)$ şeklinde seçecek olursak (1.29) denklemi

$$\varepsilon R - \lambda V_0 \exp(\lambda\phi) = 0 \tag{1.35}$$

olur ve ϕ fonksiyonu

$$\phi = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon R}{\lambda V_0} \right) \tag{1.36}$$

olacaktır. Bu durumda Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\frac{\varepsilon R}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon R}{\lambda V_0}\right) - \frac{\varepsilon R}{\lambda V_0}\right) + \mathcal{L}_m\left(g^{\mu\nu}\right) \tag{1.37}$$

olacaktır. Burada

$$f(R) = -16\pi G\left\{\frac{\varepsilon R}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon R}{\lambda V_0}\right) - \frac{\varepsilon R}{\lambda V_0}\right\} \tag{1.38}$$

tanımlaması yapılırsa (1.37) denklemi

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\, f(R) + \mathcal{L}_m\left(g^{\mu\nu}\right) \tag{1.39}$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak gravitasyonal alana ilişkin Lagrange yoğunluğu eğriliğin keyfi bir fonksiyonu ile belirlenebilir. Eğer $f(R) = R - 2\Lambda$ olarak seçilirse, $f(R)$ gravite teorilerinin Einstein' ın genel relativite teorisine indirgeneceği rahatça görülebilir. $f(R)$ fonksiyonu için $d^2 f / dR^2 \neq 0$ olmalı, aksi halde $f(R) = Sabit$ şeklinde anlamsız bir durum ortaya çıkar.

$f(R)$ gravite teorileri ile ilgili yapılan çalışmaları Palatini formalizminde (Burton, ve Mann, 1998; Meng ve Wang, 2003 (a); Meng ve Wang, 2003 (b);Allemvei ve diğ., 2004;Dominguez ve Barraco 2004;Flanagan, 2004;Kremer.ve Alves, 2004; Meng ve Wang, 2004 (a);Meng ve Wang, 2004 (b); Meng ve Wang, 2004 (c);Olmo ve Komp, 2004; Vollick, 2004;Wang ve Meng, 2004; Ding ve diğ., 2005; Meng ve Wang, 2005; Vollick 2005;Koivisto ve Suonio, 2006; Li ve Chu, 2006 (a); Li.ve Chu, 2006 (b); Sotiriou, 2006 (a); Sotiriou, 2006 (b); Wang ve diğ., 2006; Li.ve Chu, 2007; Kainulainen ve diğ., 2006) ve metrik formalizminde (Tegmark, 2002; Olmo, 2005; Keeton ve Petters, 2006; Obukhov, 2006; Poplawski, 2006 (a); Poplawski, 2006 (b); Sotiriou ve Liberati, 2007; Sotiriou ve Liberati, 2007; Raffaele ve diğ., 2007; Live Barrow, 2007;) yapılan çalışmalar olmak üzere iki ana başlık altında toplayabiliriz.

Metrik formalizmde afin bağlantı katsayıları Levi - Civita afin bağlantı katsayıları olarak tanımlanmaktadır. Bu nedenle metrik formalizmde alan denklemleri dördüncü mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi oluşturmaktadır. Palatini formalizminde ise afin bağlantı katsayıları metrikten bağımsızdır. Bu nedenle alan denklemleri ikinci mertebeden kısmi türevli denklem sistemi oluşturmaktadır.

Her iki formalizmde de yapılan çalışmaların ana konusunu eğriliğin $1/R$ ve R^2 terimlerinin Einstein - Hilbert Lagrange yoğunluğuna eklenmesiyle Friedmann denklemlerinin düzeltilmesi yapılıp sonra, yoğunluk, eğriliğe bağlı olarak kızıla kayma parametresi, ışınım, evrenin yaşı gibi kozmolojik parametrelerin hesaplanması ve gözlemlerle korelasyonu; erken dönemdeki ivmelenme, teorilerin Newtonsal kozmolojiye limit durumlarındaki yaklaşımı, güneş sistemi içindeki Merkür' ün perihelinin kayması, ışığın sapması gibi genel relativistik testlerin yer aldığını görmekteyiz.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, Palatini ve Metrik yaklaşımda f(R) teorisinin alan denklemleri elde edildi. Üçüncü bölümde, N-boyutlu Robertson – Walker metriği için bu iki yaklaşımda alan denklemleri elde edilerek boşluk için çözümler bulundu. Sonuç ve tartışma bölümünde ise elde edilen çözümler özetlendi.

BÖLÜM 2

f(R) GRAVİTE TEORİLERİNİN LAGRANGE FORMALİZMİ

f(R) gravite teorileri, Einstein denklemlerinin bir anlamda modifikasyonudur. Buna göre $G_{\mu\nu} \overset{?}{\approx} T_{\mu\nu}$ sorusu karşımıza çıkar. Bu sorunun cevabından çok anlamı önemlidir. $\tilde{G}_{\mu\nu} \approx T_{\mu\nu}$ şeklinde yeni bir eğrilik tensörü var mıdır? Ya da $G_{\mu\nu} \approx T_{\mu\nu} + \tilde{T}_{\mu\nu}$ şeklinde maddesel alan olmaksızın gravitasyon alanı yaratabilecek yeni bir enerji momentum tensörü var mıdır? Her iki durumda da korunum sağlanmalıdır: $\nabla_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} \approx \nabla_\mu T^{\mu\nu} \equiv 0$ ve $\nabla_\mu G^{\mu\nu} \approx \nabla_\mu \left(T^{\mu\nu} + \tilde{T}^{\mu\nu}\right) \equiv 0$. Bu bağlamda Einstein denkleminde modifikasyonu *f(R)* gravite teorileri çerçevesinde iki şekilde yapabilmekteyiz: Palatini formalizmi ve metrik formalizmi.

2.1. Palatini Formalizmi

Palatini formalizminin özelliği, uzay-zamanın yalnızca metrik ile değil aynı zamanda afin ile de donatılı olmasıdır. Bu bağlamda afin bağlantı katsayıları, metrik uzayda olduğu gibi Levi-Civita afin bağlantı katsayıları (yani Cristoffel sembolleri) değildir yani metrikten bağımsızdır. *f(R)* gravite teorileri için (1.34) ve (1.39) ile verilen Lagrange yoğunluğu için

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\, f(R)\, d^N x + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m\, d^N x \qquad (2.1.1)$$

şeklinde bir etki fonksiyonu yazılabilir. Burada $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma, \partial\Gamma)$ olarak tanımlanan Ricci skaleridir. Bu etki fonksiyonunun varyasyonu

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \delta\left(\sqrt{-g}\, f(R)\right) d^N x + \int_{\mathcal{M}} \delta\mathcal{L}_m\, d^N x \tag{2.1.2}$$

olarak yazılabilir. Burada $\delta\left(\sqrt{-g}\, f(R)\right) = f(R)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\,\delta f$ dir ve

$$\delta f = \frac{df}{dR}\delta R = \frac{df}{dR}\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right) \tag{2.1.3}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{-g}\, f(R)\right) &= \sqrt{-g}\left(\delta f - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) \\ &= \sqrt{-g}\left(\frac{df}{dR}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\,\frac{df}{dR} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

olacaktır. Sonuç olarak etki fonksiyonunun varyasyonu

$$\begin{aligned}\delta S = &-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\left(\frac{df}{dR}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} d^N x \\ &-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\,\frac{df}{dR} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d^N x + \int_{\mathcal{M}} \delta\mathcal{L}_m\, d^N x\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

olur. Burada ikinci integrali

$$\delta I = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\,\frac{df}{dR} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d^N x \tag{2.1.6}$$

şeklinde gösterelim. Aynı zamanda $\delta R_{\mu\nu}$ varyetesi için Palatini eşitliğini (B.13) kullanacak olursak

$$\delta I = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\,\frac{df}{dR}\,g^{\mu\nu}\left(\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right)d^{N}x \qquad (2.1.7)$$

olarak yazılabilir. Aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa,

$$\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\nabla_{\lambda}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) = \nabla_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right) \qquad (2.1.8)$$

$$\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right) = \nabla_{\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right) - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\nabla_{\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right) \qquad (2.1.9)$$

olur ve integrali

$$\delta I = \int_{\mathcal{M}} \nabla_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right)d^{N}x + \int_{\mathcal{M}} \nabla_{\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right)d^{N}x$$
$$+ \int_{\mathcal{M}} \left\{\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\nabla_{\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right) - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right)\right\}d^{N}x \qquad (2.1.10)$$

olarak yazarız. Burada ilk iki integral varyasyonun hesaplandığı sınır şartlarında sıfır olacak şekilde seçilirse

$$\delta I = \int_{\mathcal{M}} \left\{\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\nabla_{\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right) - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right)\right\}d^{N}x \qquad (2.1.11)$$

olarak elde edilir. $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Im^{\sigma}_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$, $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \Im^{\sigma}_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$, $\nabla_{\nu} = \Im^{\rho}_{\nu}\nabla_{\rho}$, $\nabla_{\lambda} = \Im^{\rho}_{\lambda}\nabla_{\rho}$ düzenlemelerini yapacak olursak

$$\delta I = \int_{\mathcal{M}} \left\{\Im^{\sigma}_{\lambda}\Im^{\rho}_{\nu} - \Im^{\sigma}_{\nu}\Im^{\rho}_{\lambda}\right\}\nabla_{\rho}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right)\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}d^{N}x \tag{2.1.12}$$

şeklinde olur. $\delta\mathcal{L}_m$ için

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.1.13}$$

yazabiliriz. Sonuçta toplam varyasyonumuz

$$\begin{aligned}\delta S = &-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(\frac{df}{dR}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + 8\pi G T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^{N}x \\ &-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}\left\{\Im^{\sigma}_{\lambda}\Im^{\rho}_{\nu} - \Im^{\sigma}_{\nu}\Im^{\rho}_{\lambda}\right\}\nabla_{\rho}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right)\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}d^{N}x + \int_{\mathcal{M}}\delta\mathcal{L}_m\,d^{N}x\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

şeklinde olur. $\delta S = 0$ koşulundan

$$\frac{df}{dR}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.1.15}$$

ve

$$\nabla_{\rho}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right) = 0 \tag{2.1.16}$$

şeklinde Palatini formalizminin alan ve süreklilik denklemleri bulunur. Burada ∇, Γ afin bağlantı katsayılarına göre kovaryant türevdir. Bu alan denklemi koordinatlara göre birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. (2.1.15) ile verilen alan denklemde kontraksiyon yaptığımızda iz denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$f' R - \frac{N}{2} f(R) = -8\pi G T \tag{2.1.17}$$

Palatini formalizmi, uzay zamanın afin yapısı üzerine kurulduğundan bu afin yapıyı belirleme ihtiyacımız vardır. Bunun için en uygun yöntem koordinatlara bağlı bir Φ skaler fonksiyon yardımıyla metrik tensörün konformal dönüşümünü kullanmaktır. Konformal dönüşüm

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Phi\, g_{\mu\nu} \tag{2.1.18}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda süreklilik denklemini

$$\nabla_\rho \left(\sqrt{-\tilde{g}}\, \tilde{g}^{\mu\nu} \right) = 0 \tag{2.1.19}$$

olur. Böylece afin bağlantı katsayılarına göre olan ∇ kovaryant türevi $\tilde{g}$ metriğine göre olur. (1.10) ve (2.1.19) denklemleri özdeş olup bunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz. Bunun sonucu da

$$\Phi = \left(f' \right)^{\frac{N}{2}-1} \tag{2.1.20}$$

şeklinde olur. Burada $f' = df / dR$ dir. Konformal dönüşüm sonucu Ricci tensörü

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(g) + \left(\frac{N-1}{N-2}\right)\frac{1}{f'^2}\mathcal{D}_\mu f' \mathcal{D}_\nu f' - \frac{1}{f'}\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu f' - \frac{1}{(N-2)}\frac{1}{f'} g_{\mu\nu} \Box f' \quad (2.1.21)$$

şeklinde olur. Burada $\mathcal{D}$, g metriğine göre kovaryant türev ve $\Box = g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu$ d' Alambert işlemcisidir.

Palatini formalizminde ∇ kovaryant türevini $\nabla = \partial \pm \Gamma$ şeklinde yazabiliriz. Γ afin bağlantı katsayıları için metriğin (2.1.18) ile verilen konformal dönüşümü ile elde edilen (A.10) ifadesini göz önüne alacak olursak $\Gamma = \{\ \} + C$ yazabiliriz. Böylece ∇ kovaryant türevi için $\nabla = \partial \pm \{\ \} \pm C$ ifadesini yazabiliriz. Burada $\partial \pm \{\ \}$ ifadesi metriğe göre kovaryant türev ifadesidir: $\mathcal{D} = \partial \pm \{\ \}$. Böylece iki kovaryant türev arasında $\nabla = \mathcal{D} \pm C$ ilişkisini yazarız. İkinci ranktan ve simetrik bir $\tau^{\mu\nu}$ tensörünün kovaryant türevi için

$$\nabla_\lambda \tau^{\mu\nu} = \partial_\lambda \tau^{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}\tau^{\mu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}\tau^{\nu\beta} \quad (2.1.22)$$

ifadesini yazabiliriz. (A.10) ifadesini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda \tau^{\mu\nu} &= \partial_\lambda \tau^{\mu\nu} + \left\{ {\nu \atop \lambda\alpha} \right\}\tau^{\mu\alpha} + \left\{ {\mu \atop \lambda\beta} \right\}\tau^{\nu\beta} + C^{\nu}_{\lambda\alpha}\tau^{\mu\alpha} + C^{\mu}_{\lambda\beta}\tau^{\nu\beta} \\ &= \mathcal{D}_\lambda \tau^{\mu\nu} + C^{\nu}_{\lambda\alpha}\tau^{\mu\alpha} + C^{\mu}_{\lambda\beta}\tau^{\nu\beta} \quad (2.1.23)\end{aligned}$$

ifadesini yazabiliriz. $C^{\lambda}_{\mu\nu}$ terimleri için (A.11) ifadesini kullanacak olursak

$$C^{\nu}_{\lambda\alpha} = \frac{1}{2\Phi}\left(-g^{\nu\rho}g_{\lambda\alpha}\mathcal{D}_\rho \Phi + \Im^{\nu}_{\lambda}\mathcal{D}_\alpha \Phi + \Im^{\nu}_{\alpha}\mathcal{D}_\lambda \Phi\right) \quad (2.1.24)$$

$$C^{\mu}_{\lambda\beta} = \frac{1}{2\Phi}\left(-g^{\mu\sigma}g_{\lambda\beta}\mathcal{D}_{\sigma}\Phi + \Im^{\mu}_{\lambda}\mathcal{D}_{\beta}\Phi + \Im^{\mu}_{\beta}\mathcal{D}_{\lambda}\Phi\right) \tag{2.1.25}$$

yazarız. Buradan da

$$C^{\nu}_{\lambda\alpha}\tau^{\mu\alpha} + C^{\mu}_{\lambda\beta}\tau^{\nu\beta} = \frac{1}{2\Phi}\left(-\tau^{\mu}_{\lambda}g^{\nu\rho}\mathcal{D}_{\rho}\Phi + \tau^{\mu\alpha}\Im^{\nu}_{\lambda}\mathcal{D}_{\alpha}\Phi + \tau^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\lambda}\Phi\right)$$
$$+\frac{1}{2\Phi}\left(-\tau^{\nu}_{\lambda}g^{\mu\sigma}\mathcal{D}_{\sigma}\Phi + \tau^{\nu\beta}\Im^{\mu}_{\lambda}\mathcal{D}_{\beta}\Phi + \tau^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\lambda}\Phi\right) \tag{2.1.26}$$

ifadelerini yazabiliriz. Böylece (2.1.22) kovaryant türev ifadesi

$$\nabla_{\nu}\tau^{\mu\nu} = \mathcal{D}_{\nu}\tau^{\mu\nu} + \frac{1}{2\Phi}\left(-\tau^{\mu\rho}\mathcal{D}_{\rho}\Phi + N\tau^{\mu\alpha}\mathcal{D}_{\alpha}\Phi + \tau^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\nu}\Phi\right)$$
$$+\frac{1}{2\Phi}\left(-\tau^{\nu}_{\nu}g^{\mu\sigma}\mathcal{D}_{\sigma}\Phi + \tau^{\mu\beta}\mathcal{D}_{\beta}\Phi + \tau^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\nu}\Phi\right)$$
$$= \mathcal{D}_{\nu}\tau^{\mu\nu} + \frac{1}{2\Phi}\left((N+2)\tau^{\mu\nu} - \tau\, g^{\mu\nu}\right)\mathcal{D}_{\nu}\Phi \tag{2.1.27}$$

olacaktır. Bianchi özdeşliklerinin sonucu olarak Einstein alan denklemleri

$$\nabla_{\nu}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right) \approx \nabla_{\nu}T^{\mu\nu} \equiv 0 \tag{2.1.28}$$

şeklinde olur. Palatini formalizminin (2.1.15) ile verilen alan denklemini

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{f'}T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{f(R)}{f'} - R\right)g^{\mu\nu} \tag{2.1.29}$$

Bu ifadenin sağ tarafı için (2.1.28) ile uygun olacak şekilde yeni bir tensör tanımlayabiliriz:

$$\tau^{\mu\nu} = \frac{1}{f'}T^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{f(R)}{f'} - R\right)g^{\mu\nu} \qquad (2.1.30)$$

Böylece alan denklemini

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = -8\pi G\tau^{\mu\nu} \qquad (2.1.31)$$

olarak yazabiliriz ve (2.1.28) ifadesini

$$\nabla_\nu\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right) \equiv -8\pi G\nabla_\nu\tau^{\mu\nu} \equiv 0 \qquad (2.1.32)$$

şeklinde yazarız. Burada $\mathcal{D}_\nu\tau^{\mu\nu}$ ifadesi (2.1.30)' dan

$$\mathcal{D}_\nu\tau^{\mu\nu} = \frac{1}{f'}\mathcal{D}_\nu T^{\mu\nu} - \frac{f''}{f'^2}\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi G}f(R)g^{\mu\nu}\right)\mathcal{D}_\nu R \qquad (2.1.33)$$

olarak hesaplanır. Korunum denklemi $\mathcal{D}_\nu T^{\mu\nu} = 0$ olacağından

$$\mathcal{D}_\nu\tau^{\mu\nu} = -\frac{f''}{f'^2}\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi G}f(R)g^{\mu\nu}\right)\mathcal{D}_\nu R \qquad (2.1.34)$$

olarak yazarız. Φ skaler fonksiyonu (2.1.20)' de verildiği üzere

$$\Phi = (f')^{\frac{N}{2}-1} \tag{2.1.35}$$

dir. Bunu (2.1.27) ile birlikte da kullanarak

$$\nabla_\nu \tau^{\mu\nu} \equiv \frac{f''}{4f'}\left\{(N^2-8)T^{\mu\nu} - (N-2)Tg^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi G}\left[(N-4)f(R) - (N-2)Rf'\right]g^{\mu\nu}\right\}\mathcal{D}_\nu R \equiv 0 \tag{2.1.36}$$

şeklinde elde edilir. Eğer $\mathcal{D}_\nu R \neq 0$ ise

$$(N^2-8)T^{\mu\nu} - (N-2)Tg^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi G}\left[(N-4)f(R) - (N-2)Rf'\right]g^{\mu\nu} = 0 \tag{2.1.37}$$

olacaktır. Kontraksiyon yapacak olursak

$$16\pi(N-4)GT = N(N-4)f(R) - N(N-2)Rf' \tag{2.1.38}$$

elde edilir. Eğer $N = 4$ olursa

$$Rf' = 0 \tag{2.1.39}$$

olacaktır ve bu da anlamsız bir durumdur. O halde

$$\mathcal{D}_\nu R = 0 \tag{2.1.40}$$

olmalıdır. Palatini formalizmin (2.1.16) ile verilen süreklilik denklemini göz önüne alalım:

$$\nabla_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f' \right) = 0 \tag{2.1.41}$$

Parantez içerisini

$$q^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f' \tag{2.1.42}$$

şeklinde tanımlayalım. İkinci ranktan bir tensörün afin bağlantı katsayılarına göre kovaryant türevini veren (2.1.27) ifadesini ve (2.1.27)' yi kullanarak

$$\nabla_\nu q^{\mu\nu} = \mathcal{D}_\nu q^{\mu\nu} + \frac{N-2}{4} \frac{f''}{f'} \left((N+2) q^{\mu\nu} - q\, g^{\mu\nu} \right) \mathcal{D}_\nu R \tag{2.1.43}$$

olarak yazabiliriz. Burada $q = q^{\alpha}_{\alpha} = \sqrt{-g}\, N f'$ dır. Böylece

$$\nabla_\nu q^{\mu\nu} = \mathcal{D}_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f' \right) + \frac{N-2}{2} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f'' \mathcal{D}_\nu R \tag{2.1.44}$$

olacaktır. Metrik için $\mathcal{D}_\rho \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) = 0$ olduğundan

$$\nabla_\nu q^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu f' + \frac{N-2}{2} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f'' \mathcal{D}_\nu R$$

$$= \frac{N}{2} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f'' \mathcal{D}_\nu R = \frac{N}{2} \mathcal{D}_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f' \right) \tag{2.1.45}$$

olacaktır. Yani süreklilik denklemi

$$\nabla_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f' \right) \equiv \frac{N}{2} \mathcal{D}_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f' \right) \equiv \frac{N}{2} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} f'' \mathcal{D}_\nu R \equiv 0 \tag{2.1.46}$$

olur. Bu ifadeden anlaşıldığı üzere Palatini formalizminde skaler eğrilik, sabit bir değere sahip olmalıdır ve afine göre Ricci tensörü, özdeş olarak .

$$R^{\mu\nu} \equiv \mathcal{K} g^{\mu\nu} \qquad \left(\mathcal{K} \in \Re \right) \tag{2.1.47}$$

$$R \equiv N\mathcal{K} = \mathcal{C} = Sabit \tag{2.1.48}$$

şeklindeki bir ifadeyi sağlar. Buna göre

$$\left. \frac{df(R)}{dR} \right|_{R=\mathcal{C}} = Sabit \tag{2.1.49}$$

olur ve Palatini formalizminin (2.2.2.4) ile verilen afine bağlı süreklilik denklemi, metrik uzay zamanın süreklilik denklemine indirgenir:

$$\nabla_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \frac{df(\mathcal{C})}{dR} \right) \equiv \mathcal{D}_\rho \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) \equiv 0 \tag{2.1.50}$$

Buradan da görmekteyiz ki, sabit eğrilikte afin bağlantı katsayıları Levi-Civita afin bağlantı katsayılarına, modifiye edilmiş Ricci tensörü ve Ricci skaleri de metriğe göre Ricci tensörü ve Ricci skalerine indirgenir:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(-\partial_{\rho} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} \right) \tag{2.1.51}$$

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) \equiv R_{\mu\nu}(g) \tag{2.1.52}$$

$$R(\Gamma) \equiv R(g) \tag{2.1.53}$$

Bu durum metrikte yaptığımız konformal dönüşümün bir sonucudur.

Palatini formalizmindeki alan denklemleri ile skaler alan için elde edilen alan denklemlerinin uyuştuğunu göstermek için (2.1.15) ile verilen alan denklemini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\frac{f(R)}{f'} - R \right) g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{f'} T_{\mu\nu} \tag{2.1.54}$$

$G_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ ile verilen Einstein tensörü için (2.1.21)' deki Ricci tensörünü kullanırsak

$$G_{\mu\nu}(\Gamma) = G_{\mu\nu}(g) + \frac{1}{f'^2} \left(\frac{N-1}{N-2} \right) \left(\mathcal{D}_{\mu} f' \mathcal{D}_{\nu} f' - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{D}^{\lambda} f' \mathcal{D}_{\lambda} f' \right) - \frac{1}{f'} \left(\mathcal{D}_{\mu} \mathcal{D}_{\nu} f' - g_{\mu\nu} \Box f' \right) \tag{2.1.55}$$

olur. Burada $G_{\mu\nu}(g) = R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}R(g)$ dir. Buna göre

$$G_{\mu\nu}(g) + \frac{1}{f'^2}\left(\frac{N-1}{N-2}\right)\left(\mathcal{D}_\mu f' \mathcal{D}_\nu f' - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{D}^\lambda f' \mathcal{D}_\lambda f'\right)$$

$$-\frac{1}{f'}\left(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu f' - g_{\mu\nu} \Box f'\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{f(R)}{f'} - R\right) g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{f'} T_{\mu\nu} \qquad (2.1.56)$$

olacaktır. Skaler alan için (1.19) ile verilen alan denkleminde $F(\phi, R) = -\frac{\phi R}{16\pi}$ ve

$\omega(\phi) = -\frac{1}{16\pi}\frac{\tilde{\omega}_0}{\phi}$ yazarsak

$$G_{\mu\nu}(g) - \frac{\tilde{\omega}_0}{\phi^2}\left(\mathcal{D}_\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{D}_\lambda \phi \mathcal{D}^\lambda \phi\right)$$

$$-\frac{1}{\phi}\left(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \phi - g_{\mu\nu} \Box \phi\right) - 8\pi \frac{V(\phi)}{\phi} g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} \qquad (2.1.57)$$

olur. Bunu (2.1.56) ile karşılaştırdığımızda $f(R)$ gravite teorilerinin $\tilde{\omega}_0 = -\left(\frac{N-1}{N-2}\right)$ parametreli skaler gravitasyon teorileri ile eşdeğer olduğunu görürüz.

2.2. Metrik Formalizmi

Metrik formalizmde uzay zaman bir metrik ile donatılmıştır. Bu sebeple de afin yapısı Levi-Civita afin bağlantı katsayıları ile verilir. Sonuç olarak eğrilik metriğe bağlı olur. Metrik formalizm için de etki fonksiyonu

$$S=-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\,f(R)\,d^N x+\int_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_m\,d^N x \tag{2.2.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun varyasyonu ise

$$\begin{aligned}\delta S=&-\frac{1}{16\pi G}\int_M\sqrt{-g}\left(\frac{df}{dR}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^N x\\&-\frac{1}{16\pi G}\int_M\sqrt{-g}\,\frac{df}{dR}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^N x+\int_{\mathcal{M}}\delta\mathcal{L}_m\,d^N x\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

şeklinde yazılabilir. İkinci integrali

$$\delta I=\int_M\sqrt{-g}\,\frac{df}{dR}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^N x \tag{2.2.3}$$

ile gösterelim. $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ ifadesini Palatini eşitliğinde kullanacak olursak

$$g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\lambda\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}-\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu\delta g^{\mu\nu}-\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu\delta g^{\mu\nu}\right) \tag{2.2.4}$$

$$g^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = -\frac{1}{2}g_{\lambda\rho}\Box\delta g^{\lambda\rho} \tag{2.2.5}$$

ve

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \mathcal{D}_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right)$$

$$= g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu} + \mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \tag{2.2.6}$$

olacaktır. Böylece integralimizi

$$\delta I = \int_{M}\sqrt{-g}\,\frac{df}{dR}\left\{g_{\mu\nu}\Box - \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu} + \mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\right)\right\}\delta g^{\mu\nu}d^{N}x \tag{2.2.7}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.2.7)' deki $\mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu} + \mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}$ ifadesi bir skaler için hesapladırsa afin bağlantı katsayılarının simetrisinden dolayı $\mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu} + \mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu} \equiv 2\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}$ olur ve böylece

$$\delta I = \int_{M}\sqrt{-g}\left(g_{\mu\nu}\Box\frac{df}{dR} - g_{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right)\delta g^{\mu\nu}d^{N}x \tag{2.2.8}$$

olacaktır. $\delta\mathcal{L}_{m}$ için

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_{m}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.2.9}$$

yazabiliriz. Sonuçta δS varyasyonu

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G}\int_M \sqrt{-g}\left(\frac{df}{dR}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu\frac{df}{dR} + g_{\mu\nu}\Box\frac{df}{dR} + 8\pi G T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^N x$$

(2.2.10)

olarak bulunur. Sonuçta metrik formalizmde alan denklemleri

$$\frac{df}{dR}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu\frac{df}{dR} + g_{\mu\nu}\Box\frac{df}{dR} = -8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (2.2.11)$$

şeklinde olur. Eğer kontraksiyon yaparsak

$$f' R - \frac{N}{2}f(R) + (N-1)\Box f' = -8\pi G T \qquad (2.2.12)$$

iz denklemi elde edilir. Burada

$$\Box f' = f''' \mathcal{D}_\lambda R \mathcal{D}^\lambda R + f'' \Box R \qquad (2.2.13)$$

yazabileceğimizden iz denklemini aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$f' R - \frac{N}{2}f(R) + (N-1)\left(f''' \mathcal{D}_\lambda R \mathcal{D}^\lambda R + f'' \Box R\right) = -8\pi G T \qquad (2.2.14)$$

Metrik formalizmdeki alan denklemlerinin skaler alan için elde edilen alan denklemleri ile uyuştuğunu göstermek için (2.2.11) ile verilen alan denklemlerini

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{1}{f'}\left(\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu f' - g_{\mu\nu}\Box f'\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{f(R)}{f'} - R\right)g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{f'}T_{\mu\nu} \qquad (2.2.15)$$

şeklinde yazabiliriz. Skaler alan için (2.1.57) ile verdiğimimz denklemde $\tilde{\omega}_0 = 0$ seçersek

$$G_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{\phi}\left(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \phi - g_{\mu\nu} \Box \phi\right) - 8\pi \frac{V(\phi)}{\phi} g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} \qquad (2.2.16)$$

olur. (2.2.15) ile karşılaştırırsak $f(R)$ gravite teorilerinin $\tilde{\omega}_0 = 0$ parametreli skaler gravitasyon teorileri ile eşdeğer olduğunu görürüz.

BÖLÜM 3

N BOYUTLU ROBERTSON – WALKER METRİĞİNDE KOZMOLOJİK ALAN DENKLEMLERİ

Einstein alan denklemlerini

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Aşağıdaki gibi verilen

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right\} \tag{3.2}$$

N boyutlu Robertson Walker metriğini göz önüne alalım. Burada

$$\begin{aligned} d\Omega^2 &= d\theta_1^2 + sin^2\,\theta_1 d\theta_2^2 + sin^2\,\theta_1\, sin^2\,\theta_2 d\theta_3^2 + \ldots\ldots.. + sin^2\,\theta_1\, sin^2\,\theta_2 \ldots. sin^2\,\theta_{N-3} d\theta_{N-2}^2 \\ &= \sum_m^{N-2}\left(\prod_{i=1}^{m} sin^2\theta_{i-1}\right) d\theta_m^2 \qquad \left(sin\,\theta_0 = 1\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

dir. (3.2) metriği için Ricci tensörünün bileşenleri

$$R_0^0(g) = (N-1)\frac{\ddot{a}}{a} \tag{3.4}$$

$$R_j^j(g) = \frac{\ddot{a}}{a} + (N-2)\frac{k+\dot{a}^2}{a^2} \tag{3.5}$$

şeklinde bulunur. Buradan Friedmann Lemaitre denklemleri ise

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G\left\{\frac{(N-3)\rho + (N-1)p}{(N-1)(N-2)}\right\} + \frac{2\Lambda}{(N-1)(N-2)} \tag{3.6}$$

$$H^2 = \frac{16\pi G}{(N-1)(N-2)}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{2\Lambda}{(N-1)(N-2)} \tag{3.7}$$

şeklinde olur. Boşluk durumunda

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{2\Lambda}{(N-1)(N-2)} \tag{3.8}$$

şeklinde olur ve buradan da de-Sitter evreni çözümünü yazabiliriz:

$$a(t) = a_0\, exp\left[\left(\frac{2\Lambda}{(N-1)(N-2)}\right)^{1/2} t\right] \qquad (a_0 \in \Re) \tag{3.9}$$

İdeal bir akışkan için enerji momentum tensörü ve durum denklemi

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\,u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \qquad \left(u_0 \equiv u^0 \equiv 1 \text{ ve } u^\lambda u_\lambda = 1\right) \tag{3.10}$$

$$p = w\rho \qquad (w \in \Re) \tag{3.11}$$

şeklindedir. Enerji momentum tensörünün bileşenleri ve izi

$$T_0^0 = \rho \tag{3.12}$$

$$T_j^j = p \tag{3.13}$$

$$T = \rho - (N-1)p = (1-(N-1)w)\rho \tag{3.14}$$

dir. $\mathscr{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ifadesinden korunum denklemi

$$\dot{\rho} + (N-1)(1+w)H\rho = 0 \tag{3.15}$$

olur. Burada $(\dot{\ })$ zamana göre türev ve $H = \dot{a}/a$ Hubble parametresidir. (3.11) ile verilen durum denklemi ve (3.15) ile verilen korunum denkleminden yoğunluk için

$$\rho = \rho_0 a^{-(N-1)(w+1)} \qquad (\rho_0 \in \Re) \tag{3.16}$$

ve $\dot{T}$ için de

$$\dot{T} = -(N-1)(1+w)[1-(N-1)w]H\rho \tag{3.17}$$

elde edilir.

3.1. Palatini Formalizminde Kozmolojik Alan Denklemleri

Palatini formalizminde (2.1.15) ile verilen alan denklemini

$$R_{\nu}^{\mu} = -\frac{8\pi G}{f'} T_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'}\Im_{\nu}^{\mu} \tag{3.1.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin bileşenleri ise

$$R_{0}^{0} = -\frac{8\pi G}{f'} T_{0}^{0} + \frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'}\Im_{0}^{0} \tag{3.1.2}$$

$$R_{j}^{j} = -\frac{8\pi G}{f'} T_{j}^{j} + \frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'}\Im_{j}^{j} \tag{3.1.3}$$

şeklindedir. Palatini formalizminde (2.1.21) ile verilen Ricci tensörünün bileşenleri

$$R_{0}^{0}(\Gamma) = (N-1)\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{N-1}{N-2}\right)\left[\left(\frac{\dot{f}'}{f'}\right)^{2} - \frac{\ddot{f}'}{f'} + 2H\frac{\dot{f}'}{f'}\right] \tag{3.1.4}$$

$$R_{j}^{j}(\Gamma) = \frac{\ddot{a}}{a} + (N-2)\left(\frac{k}{a^{2}} + H^{2}\right) - \frac{1}{(N-2)}\left[2(2N-3)H\frac{\dot{f}'}{f'} - \frac{\ddot{f}'}{f'}\right] \tag{3.1.5}$$

şeklinde olur. Böylece (3.10) ile verilen ideal akışkan için alan denklemleri

$$(N-1)\frac{\ddot{a}}{a}+\left(\frac{N-1}{N-2}\right)\left[\left(\frac{\dot{f}'}{f'}\right)^2-\frac{\ddot{f}'}{f'}+2H\frac{\dot{f}'}{f'}\right]=-\frac{8\pi G}{f'}\rho+\frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'} \tag{3.1.6}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}+(N-2)\left(\frac{k}{a^2}+H^2\right)-\frac{1}{(N-2)}\left[2(2N-3)H\frac{\dot{f}'}{f'}-\frac{\ddot{f}'}{f'}\right]=\frac{8\pi G}{f'}p+\frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'} \tag{3.1.7}$$

olur. Friedmann ve ivme denklemleri ise

$$\left(H+\frac{\dot{f}'}{(N-2)f'}\right)^2=\frac{8\pi G(\rho+(N-1)p)}{(N-1)(N-2)f'}+\frac{1}{2(N-1)}\frac{f(R)}{f'}-\frac{k}{a^2} \tag{3.1.8}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{8\pi G\rho}{(N-1)f'}+\frac{1}{2(N-1)}\frac{f(R)}{f'}-\frac{1}{(N-2)}\left(\left(\frac{\dot{f}'}{f'}\right)^2-\frac{\ddot{f}'}{f'}+2H\frac{\dot{f}'}{f'}\right) \tag{3.1.9}$$

şeklinde olur. İdeal akışkan için enerji momentum tensörünün yoğunlukla ilişkisi $T \propto \rho_i$ şeklinde olduğundan, eğrilik $R = R(\rho_i)$ şeklinde yoğunluğun bir fonksiyonu olur. Buna göre

$$f'R-\frac{N}{2}f(R)=-8\pi GT \tag{3.1.10}$$

şeklindeki iz denkleminin R ’ ye göre reel köklerinin kümesi

$$R=\{R_j(\rho_i)\} \tag{3.1.11}$$

olur. Boş uzay zaman durumunda ise eğrilik değerleri sabit değerler alır:

$$R = \{R_j\} \qquad (R_j \in \Re) \tag{3.1.12}$$

Boşluk durumunda $(\rho_i = 0)$ (2.1.17) denkleminden sabit eğrilik elde edilir ve ayrıca $f(R) = f_0 R^{N/2}$ olacağından aşağıdaki ifade elde edilir:

$$a(t) = a_0\, exp\left(\left(\frac{R}{N(N-1)}\right)^{1/2} t\right) \tag{3.1.13}$$

3.2. Metrik Formalizminde Kozmolojik Alan Denklemleri

Metrik formalizmde (2.2.11) ile verilen alan denklemini

$$R_{\nu}^{\mu} = -\frac{8\pi G}{f'} T_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'} \Im_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{f'} \mathcal{D}^{\mu} \mathcal{D}_{\nu} f' - \frac{1}{f'} \Im_{\nu}^{\mu} \Box f' \tag{3.2.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin Ricci bileşenleri

$$R_{0}^{0} = -\frac{8\pi G}{f'} T_{0}^{0} + \frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'} \Im_{0}^{0} + \frac{1}{f'} \mathcal{D}^{0} \mathcal{D}_{0} f' - \frac{1}{f'} \Im_{0}^{0} \Box f' \tag{3.2.2}$$

$$R_{j}^{j} = -\frac{8\pi G}{f'} T_{j}^{j} + \frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'} \Im_{j}^{j} + \frac{1}{f'} \mathcal{D}^{j} \mathcal{D}_{j} f' - \frac{1}{f'} \Im_{j}^{j} \Box f' \tag{3.2.3}$$

olarak yazalır. Böylece alan denkleminin bileşenleri

$$(N-1)\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{f'} \rho + \frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'} + 2(N-1)H \frac{\dot{f}'}{f'} \tag{3.2.4}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + (N-2)\frac{k+\dot{a}^{2}}{a^{2}} = \frac{8\pi G}{f'} p + \frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'} - \frac{\ddot{f}'}{f'} + 2(N-2)H \frac{\dot{f}'}{f'} \tag{3.2.5}$$

olur. Friedmann ve ivme denklemleri ise

$$H^2 = \frac{8\pi G(\rho + (N-1)p)}{(N-1)(N-2)f'} + \frac{1}{2(N-1)}\frac{f(R)}{f'} + \frac{1}{(N-2)}\frac{\ddot{f}'}{f'} + \frac{2H}{(N-1)(N-2)}\frac{\dot{f}'}{f'} - \frac{k}{a^2}$$

(3.2.6)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{(N-1)f'}\rho + \frac{1}{2(N-1)}\frac{f(R)}{f'} + 2H\frac{\dot{f}'}{f'} \tag{3.2.7}$$

şeklinde olur. Metrik formalizmde (2.2.14) ile verilen iz denklemini göz önüne alalım;

$$f'R - \frac{N}{2}f(R) + (N-1)\left(f''' \mathfrak{D}_\lambda R \mathfrak{D}^\lambda R + f'' \Box R\right) = -8\pi GT \tag{3.2.10}$$

Burada $\mathfrak{D}_\lambda R \mathfrak{D}^\lambda R = \dot{R}^2$ ve $\Box R = \ddot{R} - 2(N-1)H\dot{R}$ dir. İz denklimi bu durumda

$$f'R - \frac{N}{2}f(R) - (N-1)\left(f''' \dot{R}^2 + f'' \ddot{R} - 2(N-1)f'' H\dot{R}\right) = -8\pi GT \tag{3.2.13}$$

olur. Boşluk durumunda $(\rho_i = 0)$ iz denkleminden sabit eğrilik elde edilir. Ayrıca $f(R) = f_0 R^{N/2}$ olacağından

$$a(t) = a_0\, exp\left(\left(\frac{R}{N(N-1)}\right)^{1/2} t\right) \tag{3.2.14}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Einstein' ın genel relativite teorisinden bilmekteyiz ki, Robertson Walker metriği ile temsil edilen homojen ve izotrop bir uzay zamanda alan denkleminin çözümünden evrenimizin (Hubble' in gözlemleri ile de bu kanıtlandığı üzere) genişlediğini bilmekteyiz $\left(H^2 > 0\right)$. Alan denkleminin çözümünün diğer bir sonucu da evrenin yavaşladığıdır $(\ddot{a} < 0)$. Ancak son zamanlardaki astronomik gözlemler evrenimizin ivmeli olarak $\left(\ddot{a} > 0, H^2 > 0\right)$ genişlediğini göstermiştir. Bu ivmelenmeyi açıklamak üzere önerilen teorilerinden birisi olan ve Einstein - Hilbert Lagrange yoğunluğunda düzeltme terimlerinin eklenmesi ile oluşan $f(R)$ gravite teorileri bu çalışmada incelenmiştir. $f(R)$ gravite teorileri, Brans-Dicke parametresinin sıfır olduğu,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(F(\phi, R) - V(\phi)\right) + \mathcal{L}_m\left(g^{\mu\nu}\right)$$

şeklindeki skaler gravitasyon teorilerinden, ϕ alanına göre varyasyonu neticesinde

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\, f(R) + \mathcal{L}_m\left(g^{\mu\nu}\right)$$

şeklinde, eğriliğin keyfi bir fonksiyonu olarak türetilmiştir. Burada R Ricci skaleri $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma, \partial\Gamma)$ şeklinde afin ve metriğe bağlıdır.

Palatini formalizminde $f(R)$ gravite teorilerinin alan denklemleri

$$\frac{df}{dR} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu},$$

süreklilik denklemi

$$\nabla_\rho\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{df}{dR}\right)=0$$

ve iz denklemi sırasıyla

$$\frac{df}{dR}R-\frac{N}{2}f(R)=-8\pi GT$$

şeklinde elde edilmiştir. Palatini formalizminde, uzay zamanın afin yapısını $\nabla_\rho\left(\sqrt{-\tilde{g}}\,\tilde{g}^{\mu\nu}\right)=0$ şeklindeki metrik bir yaklaşımla belirlemek için metrik tensörde $\Phi=(f')^{\frac{N}{2}-1}$ şeklindeki bir fonksiyon yardımıyla yapılan konformal bir dönüşümle eğrilik

$$R_{\mu\nu}(\Gamma)=R_{\mu\nu}(g)+\left(\frac{N-1}{N-2}\right)\frac{1}{f'^2}\mathcal{D}_\mu f'\mathcal{D}_\nu f'-\frac{1}{f'}\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu f'-\frac{1}{(N-2)}\frac{1}{f'}g_{\mu\nu}\Box f'$$

şeklinde belirlenmiş, bunun alan denkleminde yazılması ile Palatini formalizminin $\tilde{\omega}_0=-(N-1)/(N-2)$ Brans Dicke parametreli skaler gravitasyon teorileri ile eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Alan denklemi için yazılan kovaryant korunum ifadesinde, metriğin konformal dönüşümü nedeniyle Palatini formalizminde uzay zamanın afin yapısının

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\equiv\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(-\partial_\rho g_{\mu\nu}+\partial_\mu g_{\nu\rho}+\partial_\nu g_{\rho\mu}\right)$$

Levi-Civita afin yapısında, eğriliğin ise $R^{\mu\nu} \equiv \mathcal{K} g^{\mu\nu}$ ve $R \equiv N\mathcal{K} = Sabit$ olduğu, bunun sonucu olarak da $R_{\mu\nu}(\Gamma) \equiv R_{\mu\nu}(g)$ olduğu gösterilmiştir.

Metrik formalizmde $f(R)$ gravite teorilerinin alan ve iz denklemleri

$$\frac{df}{dR} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \frac{df}{dR} + g_{\mu\nu} \Box \frac{df}{dR} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$\frac{df}{dR} R - \frac{N}{2} f(R) + (N-1) \Box \frac{df}{dR} = -8\pi G T$$

şeklinde elde edilmiştir. Metrik formalizminin $\tilde{\omega}_0 = 0$ Brans Dicke parametreli skaler gravitasyon teorileri ile eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

Hem Palatini formalizminde hem de metrik formalizmde alan denklemleri Robertson Walker metriği ile temsil edilen N boyutlu homojen ve izotrop uzay için çözülerek alan denklemleri elde edilmiş, her iki formalizmde de boşluk durumunda de-Sitter çözümüne ulaşılmıştır. Friedmann Lemaitre denkleminin boşluk için çözümü ile karşılaştırıldığında, kozmolojik sabit, herhangi bir skaler alan, yeni bir madde ve enerji formu olmaksızın yalnızca Einstein - Hilbert Lagrange yoğunluğunda eğriliğin değişik düzeltme terimlerinin eklenmesiyle kozmik ivmelenmenin açıklanabileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Allemandi, G., Borowiec, A. ve Francaviglia M. 2004a. Accelerated Cosmological Models in First-Order Non-Linear Gravity. *Phys. Rev.*, D70, 043524.

Allemandi, G., Borowiec, A. ve Francaviglia M. 2004b. Accelerated Cosmological Models in Ricci squared Gravity. *Phys. Re.,*. D70, 103503.

Allemandi, G., Borowiec, A. ve Francaviglia M. ve Odintsov, S. D. 2005a. Dark Energy Dominance and Cosmic Acceleration in First Order Formalism. *Phys. Rev.,* D72, 063505.

Allemandi, G., Francaviglia, M., Ruggiero, M. L. ve Tartaglia A. 2005b. Post-Newtonian Parameters from Alternative Theories of Gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 37, 1891-1904.

Allemandi, G., Capone, M., Capozziello, S. ve Francaviglia, M. 2006. Conformal aspects of Palatini approach in Extended Theories of Gravity. *Gen. Rel. Grav.,* 38, 33-60.

Allemvei, G., Capone, M., Capozziello, S. ve Francaviglia, M. 2004. Conformal aspects of Palatini approach in Extended Theories of Gravity. http://arxiv.org/abs/hep-th/0409198.

Astier, P., Guy, J., Regnault, N., Pain, R., Aubourg, E., Balam, D., Basa, S., Carlberg, R. G., Fabbro, S., Fouchez, D., Hook, I. M., Howell, D. A., Lafoux, H., Neill, J. D., Palanque-Delabrouille, N., Perrett, K., Pritchet, C. J., Rich, J., Sullivan, M., Taillet, R., Aldering, G., Antilogus, P., Arsenijevic, V., Balland, C., Baumont, S., Bronder, J., Courtois, H., Ellis, R. S., Filiol, M., Goncalves, A. C., Goobar, A., Guide, D., Hardin, D., Lusset, V., Lidman, C., McMahon, R., Mouchet, M., Mourao, A., Perlmutter, S., Ripoche, P., Tao, C. ve Walton, N. 2006. The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω and w from the First Year Data Set. *Astron. Astrophys.*, 447, 31-48.

Anderson, G. W. ve Carroll, S. M. 1997. Dark Matter with Time-Dependent Mass http://arxiv.org/abs/astro-ph/9711288.

Bean, R., Carroll, S. ve Trodden M. 2005. Insights into Dark Energy: Interplay Between Theory and Observation. http://arxiv.org/abs/astro-ph/0510059.

Bennett, C. L., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Page, L., Spergel, D. N., Tucker, G. S., Wollack, E., Wright, E. L., Barnes, C., Greason, M. R., Hill, R. S., Komatsu, E., Nolta, M. R., Odegard, N., Peirs, H. V., Verde, L. ve Weiland J. L. 2003. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP1) Observ.: Pre. Maps and Basic Results. http://arxiv.org/abs/astro-ph/0302207.

Brans, C. ve Dicke, R.H. 1961. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev.,* 124, 925.

Burton, H. ve Mann, R.B. 1998. Palatini Variational Principle for an Extended Einstein-Hilbert Action. *Phys. Rev.,* D57, 4754-4759.

Capozziello, S., de Ritis R. ve Marino, A.A. Recovering the effective cosmological constant in extended gravity theories. 1998a. *Gen. Rel. Grav.,* 30, 1247-1272.

Capozziello, S., de Ritis R. ve Marino, A.A. 1998b. The effective cosmological constant in higher order gravity theories. http://arxiv.org/abs/gr-qc/9806043.

Capozziello, S., ve Lambiase G. (1999). Nonminimal Derivative Coupling and the Recovering of Cosmological Constant. *Gen. Rel. Grav.,* 31, 1005-1014.

Capozziello, S., Nojiri, S. ve Odintsov, S. D. 2006a. Dark Energy: the equation of state description versus scalar-tensor or modified gravity. *Phys. Lett.,* B634, 93-100.

Capozziello, S., Nojiri, S. ve Odintsov, S. D. 2006b. Unified phantom cosmology: inflation, dark energy and dark matter under the same Standard. *Phys. Lett.,* B632, 597-604.

(c) Capozziello, Cardone, V.F., Elizalde, E., S., Nojiri, S. ve Odintsov, S. D. (2006). Observational constraints on dark energy with generalized equations of state. *Phys. Rev.,* D73, 043512.

Carroll, S. M. 1998. Quintessence and the Rest of the World. *Phys. Rev. Lett.*, 81, 3067-3070.

Carroll, S. M. 2001a. The Cosmological Constant. *Living Rev. Rel.,* 4, 1.

Carroll, S. M. 2001b. Dark Energy and the Preposterous Universe. http://arxiv.org/abs/astro-ph/0107571.

Carroll, S. M. ve Kaplinghat, M. 2002. Testing The Friedmann Equation: The Expansion of the Universe During Big-Bang Nucleosynthesis. *Phys. Rev.*, D65, 063507.

Carroll, S.M., Hoffman, M. ve Trodden. M. 2003. Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than-1?. *Phys. Rev.*, D68, 023509.

Carroll S. M. 2003. Why is the Universe Accelerating?. http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310342.

Carroll, S. M., Duvvuri, V., Trodden, M. ve Turner, M. S. 2004. Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics?. *Phys. Rev.*, D70, 043528.

Carroll, S.M., De Felice, A. ve Trodden, M. 2005. Can we be tricked into thinking that w is less than -1?. *Phys. Rev.*, D71, 023525.

Carroll, S. M., De Felice, A., Duvvuri, V., Easson, D. A., Trodden, M. ve Turner, M. S. 2005. The Cosmology of Generalized Modified Gravity Models. *Phys. Rev.*, D71, 063513.

Daly, R. A., ve Djorgovski, S. G. 2003. A Model-Independent Determination of the Expan. and Acce. Rates of the Universe as a Function of Redshift and Constraints on Dark Energy. *Astrophys.J.*, 597, 9-20.

Ding, Y., Ma, Y., Han, M. ve Shao, J. 2005. Palatini Formalism of 5-Dimensional Kaluza-Klein Theory. *Mod. Phys. Lett.,* A20, 345-354.

Dekel, A., Burstein, D. ve White, S. D. M. 1996. (Measuring Omega); http://arxiv.org/abs/astro-ph/9611108.

Dolgov, A.D. ve Kawasaki, M. 2003. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?. *Phys. Lett.*, B573, 1-4.

Dominguez, A. E. ve Barraco, D. E. 2004. Newtonian limit of the singular f(R) gravity in the Palatini formalism. *Phys. Rev.*, D70, 043505.

Efstathiou, G., Bridle S. L., Lasenby, A.N., Hobson, M.P. ve Ellis R.S. 1999. Constraints on and from Distant Type 1a Supernovae and Cosmic Microwave Background Anisotropies. http://arxiv.org/abs/astro-ph/9812226.

Eisenstein, D. J., Zehavi, I., Hogg, D. W., Scoccimarro, R., Blanton, M. R., Nichol, R. C., Scranton, R., Seo, H., Tegmark, M., Zheng, Z., Anderson, S., Annis, J., Bahcall, N., Brinkmann, J., Burles, S., Castander, F. J., Connolly, A., Csabai, I., Doi, M., Fukugita, M., Frieman, J. A., Glazebrook, K., Gunn, J. E., Hendry, J. S., Hennessy, G., Ivezic, Z., Kent, S., Knapp, G. R., Lin, H., Loh, Y., Lupton, R. H., Margon, B., McKay, T., Meiksin, A., Munn, J. A., Pope, A., Richmond, M., Schlegel, D., Schneider, D., Shimasaku, K., Stoughton, C., Strauss, M., SubbaRao, M., Szalay, A. S., Szapudi, I., Tucker, D., Yanny, B. ve York, D. 2005. Detection of The Baryon Acoustic Peak În The Large-Scale Corre. Func. of SDSS Lumın. Red Galaxıes *Astrophys.J.*, 633, 560-574.

Flanagan, E. E. 2004. Palatini form of 1/R gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 92, 071101.

Ford, L.H. 1997. Quantum Field Theory In Curved Spacetime. http://arxiv.org/abs/gr-qc/9707062.

Halverson, N. W., Leitch, E. M., Pryke, C., Kovac, J., Carlstrom, J. E., Holzapfel, W. L., Dragovan, M., Cartwright, J. K., Mason, B. S., Padin, S., Pearson, T. J., Shepherd, M. C. ve Readhead, A. C. S. (2002). Dasi First Results: A Measurement of The Cosmıc Microwave Background Angular Power Spectrum. *Astrophys.J.*, 568, 38-45.

Kainulainen, K., Reijonen, V. ve Sunhede, D. 2006. The interior spacetimes of stars in Palatini f(R) gravity. http://arxiv.org/abs/gr-qc/0611132.

Kasper, U., Kluske, S., Rainer, Reuter, M. S. ve Schmidt H.-J. 1994 Stability Properties of the Starobinsky Cosmological Model. http://arxiv.org/abs/gr-qc/9410030.

Keeton, C. R. ve Petters, A. O. 2006. Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects. II: Probing Post-Post- Newtonian metrics) Phys.Rev. D73, 044024.

Kluske S. ve Schmidt H.J.; 1996.Towards a no hair theorem for higher order gravity) *Astron.Nachr.*, 317, 337-348.

Koivisto, T. ve Suonio, H. K. 2006. Cosmological perturbations in the Palatini formulation of modified gravity. *Class. Quant. Grav.*, 23, 2355-2369.

Kremer, G. M. ve Alves, D. S. M. 2004. Palatini approach to 1/R gravity ve its implications to the late Universe. *Phys. Rev.*, D70, 023503

Lahanas, A. B., Mavromatos, N. E. ve Nanopoulos, D. V. 2003. WMAPing the Universe: Supersymmetry, Dark Matter, Dark Energy, Proton Decay and Collider Physics. *Int. J. Mod.Phys.*, D12, 1529-1591.

Li, B.ve Chu, M. 2006a. Cosmological constraints on f(R) gravity theories within the Palatini approach. *Astron. Astrophys.*, 454, 707-714.

Li, B.ve Chu, M. 2006b. CMB ve Matter Power Spectra of Early f(R) Cosmology in Palatini Formalism. *Phys. Rev.,* D74, 104010.

Li, B.ve Chu, M. C. 2007. Constraints on f(R) Cosmology in the Palatini Form. *Phys. Rev.,* D76, 024002.

Li, B. ve Barrow, J. D. 2007. The Cosmology of f(R) Gravity in the Metric Variational Approach. *Phys. Rev.,* D75, 084010.

Magnano, G. ve Sokolowski, L. M. 1994. On Physical Equivalence between Nonlinear Gravity Theories. *Phys. Rev.,* D50, 5039-5059.

Magnano, G. 1995. Are there metric theories of gravity other than General Relativity?. http://arxiv.org/abs/gr-qc/9511027.

Meng, X. ve Wang, P. 2003. Modified Friedmann Equations in Modified Gravity) *Class. Quant. Grav.,* 20, 4949-4962.

Meng, X. ve Wang, P. 2003a. Palatini formulation of modified gravity with squared scalar curvature. http://arxiv.org/abs/astro-ph/0308284.

Meng, X. ve Wang, P. 2003b. Matter loops corrected modified gravity in Palatini form. http://arxiv.org/abs/hep-th/0310038.

Meng, X. ve Wang, P. 2004a. Palatini Form.on of Modified Gravity with ln R Terms. *Phys. Lett.,* B584, 1-7.

Meng, X. ve Wang, P. 2004b. Gravitational potential in Palatini form. of modified gravity. *Gen. Rel. Grav.,* 36, 1947-1954.

Meng, X. ve Wang, P. 2004c. R^2 corrections to the cosmological dynamics of inflation in the Palatini formulation. *Class. Quant. Grav.,* 21, 2029-2036.

Meng, X. ve Wang, P. 2004a. Cosmological Evolution in 1/R-Gravity Theory. *Class. Quant. Grav.,* 21, 951-960.

Meng, X. ve Wang, P. 2004b. Palatini formulation of modified gravity with squared scalar curvature. http://arxiv.org/abs/astro-ph/0308284.

Meng, X. ve Wang, P. 2005. Palatini formulation of the R^-1 modified gravity with an additionally squared scalar curvature term. *Class. Quant. Grav.,* 22, 23-32.

Netterfield, C.B., Ade, P.A.R., Bock, J.J., Bond, J.R., Borrill, J., Boscaleri, A., Coble, K., Contaldi, C.R., Crill, B.P., de Bernardis, P., Farese, P., Ganga, K., Giacometti, M., Hivon, E., Hristov, V.V., Iacoangeli, A., Jaffe, A.H., Jones, W.C., Lange, A.E., Martinis, L., Masi, S., Mason, P., Mauskopf, P.D., Melchiorri, A., Montroy, T., Pascale, E., Piacentini, F., Pogosyan, D., Pongetti, F., Prunet, S., Romeo, G., Ruhl, J.E. ve Scaramuzzi, F. 2002. A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background. *Astrophys.J.,* 571, 604-614.

Nojiri, S. ve Odintsov, S. D. 2003. Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: unification of the inflation and of the cosmic acceleration. *Phys. Rev.,* D68, 123512

Obukhov, Y. N. 2006. Plane waves in metric-affine gravity. *Phys. Rev.,* D73, 024025.

Olmo, G. J. ve Komp, W. 2004. Nonlinear Gravity Theories in the Metric ve Palatini Formalisms. http://arxiv.org/abs/gr-qc/0403092.

Olmo, G. 2005. Post-Newtonian constraints on f(R) cosmologies in metric formalism. *Phys. Rev.,* D72, 083505.

Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R.A., Nugent, P., Castro, P.G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D.E., Hook, I. M., Kim, A.G., Kim, M.Y., Lee, J.C., Nunes, N.J., Pain, R., Pennypacker, C.R., Quimby, R., Lidman, C., Ellis, R.S., Irwin, M., McMahon, R.G., Ruiz-Lapuente, P., Walton, N., Schaefer, B., Boyle, B.J., Filippenko, A.V., Matheson, T., Fruchter, A.S., Panagia, N., Newberg, H. J. M. ve Couch, W.J. 1999. Measurements of and From 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys.J.,* 517, 565-586.

(a) Poplawski, N. J. 2006. Acceleration of the universe in the Einstein frame of a metric- affine f(R) gravity. *Class. Quant. Grav.,* 23, 2011-2020.

(b) Poplawski, N. J. 2006. The present universe in the Einstein frame, metric-affine R+1/R gravity. *Class. Quant. Grav.,* 23, 4819-4828.

Quandt, I.. ve Schmidt H. J. 1991. The Newtonian limit of fourth and higher order gravity. *Astron.Nachr.,* 312, 97.

Raffaele Punzi, Frederic P. Schuller, Mattias N.R. 2007. Wohlfarth (Area metric gravity ve accelerating cosmology) JHEP 0702 030.

Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiattia, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., Kirshner, R. P., Leibundgut, B., Phillips, M. M., Reiss, D., Schmidt, B. P., Schommer, R. A., Smith, R. C., Spyromilio, J., Stubbs, C., Suntzeff, N. B. ve Tonry, J. 1998. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and Cosmological Constanta. *Astron. J.,* 116, 1009-1038.

Riess, A. G., Li,W., Stetson, P. B., Filippenko, A. V., Jha, S., Kirshner, R. P., Challis, P. M., Garnavich, P. M. ve Chornock, R. 2005. Cepheid Calibrations from the Hubble Space Telescope of the Lum. of Two Recent Type Ia Supernovae and a Re-determination of the Hubble Constant1. Astrophys.J. 627, 579-607.

Schimming, R. ve Schmidt, H. J. 1990. On the history of fourth order metric theories of gravitation. *NTM Schriftenr. Gesch. Naturw. Tech. Med.,* 27, 41-48.

Schmidt, B. P., Suntzeff, N. B., Phillips, M. M., Schommer, R. A., Clocchiatti, A., Kirshner, R. P., Garnavich, P., Challis, P., Leibundgut, B., Spyromilio, J., Riess, A. G., Filippenko, A. V., Hamuy, M., Smith, R. C., Hogan, C., Stubbs, C., Diercks, A., Reiss, D., Gilliland, R., Tonry, J., Maza, J., Dressler, A., Walsh, J. ve Ciardullo, R. 1998. The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae1. *Astrophys. J.* 507, 46-63.

Schmidt, H. J. 1986. The Newtonian limit of fourth-order gravity. *Astron.Nachr.,* 307, 339.

Schmidt, H.-J. 1987. Comparing selfinteracting scalar fields and R + R^3 cosmological models. *Astron.Nachr.,* 308, 183.

Schmidt, H.-J. 1988. On Ellis' programme within fourth order gravity. *Astron.Nachr.,* 309, 307.

Schmidt H. J. 1994. Stability and Hamiltonian formulation of higher derivative theories. *Phys. Rev.,* D49, 6354-6366.

Schmidt, H. J. 1995. An alternate Hamiltonian formulation of fourth-order theories and its application to cosmology. http://arxiv.org/abs/gr-qc/9501019.

Schmidt, H.-J. 1996. The Einstein equation should be divided by two. *Grav. Cosmol.,* 2, 250-252.

Schmidt, H.J. 1997a. A new duality transformation for fourth-order gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 29, 859-867.

Schmidt, H.J. 1997b. Conformal relations and Hamiltonian formulation of fourth-order gravity. *Grav. Cosmol.*, 3, 266-274.

Schmidt, H.-J. 1998. Exact Cosmological Solutions of Nonlinear F(R)-Gravity. *Current topics in mathematical cosmology, Eds.: M. Rainer et al., WSPC Singapore*, 288-292.

Schmidt, H.-J. 2000. Nonminimal Derivative Couplings and Inflation in Generalized Theories of Gravity. *Annalen Phys.*, 9, 39-48.

Schmidt, H. J. 2007. Fourth order gravity: equations, history, and applications to cosmology. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 4, 209-248.

Seljak, U., Makarov, A., McDonald, P., Anderson, S., Bahcall, N., Brinkmann, J., Burles, S., Cen, R., Doi, M., Gunn, J., Ivezic, Z., Kent, S., Lupton, R., Munn, J., Nichol, R., Ostriker, J., Schlegel, D., Tegmark, M., Van den Berk, D., Weinberg, D. ve York, D. 2005. Cosmological parameter analysis including SDSS Ly_ forest and galaxy bias constraints on the primordial spectrum of fluc., neutrino mass, and dark energy. *Phys.Rev.*, D71,103515.

Sotiriou, T. 2006a. Unification of inflation ve cosmic acceleration in the Palatini form. *Phys. Rev.*, D73, 063515.

Sotiriou, T. P. 2006b. Constraining f(R) gravity in the Palatini formalism. *Class. Quant. Grav.*, 23, 1253-1267.

Sotiriou, T. P. ve Liberati, S. 2007a. Metric-affine f(R) theories of gravity. *Annals Phys.*, 322, 935-966.

Sotiriou, T. P. ve Liberati, S. 2007b. The metric-affine formalism of f(R) gravity. *J. Phys. Conf.*, Ser. 68, 012022.

Spergel, D. N., Verde, L., Peiris, H. V., Komatsu, E., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Page, L., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E. ve Wright, E. L. 2003. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 148, 175.

Starobinsky, A. A. 1980. A New Type Of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett.*, B91, 99.

Tegmark, M. 2002. Measuring the metric: a parametrized post-Friedmanian approach to the cosmic dark energy problem. *Phys. Rev.*, D66 103507.

Tonry, J. L., Schmidt, B. P., Barris, B., Candia, P., Challis, P., Clocchiatti, A., Coil, A. L., Filippenko, A. V., Garnavich, P., Hogan, C., Holland, S. T., Jha, S., Kirshner, R. P., Krisciunas, K., Leibundgut, B., Li, W., Matheson, T., Phillips, M. M., Riess, A. G., Schommer, R., Smith, R. C., Sollerman, J., Spyromilio, J., Stubbs, C. W. ve Suntzeff, N. B. 2003. Cosmological Results from High-z Supernovae. *Astrophys. J.*, 594, 1-24.

Viana, T. P. ve Liddle, A. R. 1999. Galaxy clusters at $0.3 < z < 0.4$ and the value of Ω_0. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 303, 535.

Vollick, D. N. 2003. 1/R Curvature Corrections as the Source of the Cosmological Aceleration. *Phys. Rev.* D68, 063510.

Vollick, D. N. 2004. On the viability of the Palatini form of 1/R gravity. *Class. Quant. Grav.*, 21, 3813-3816.

Vollick, D. N. 2005. On the Dirac field in the Palatini form of 1/R gravity. *Phys. Rev.*, D71, 044020.

Wang, P. ve Meng, X. 2004. Palatini formulation of L(R) gravity. http://arxiv.org/abs/astro-ph/0406455.

Wang, P., Kremer, G. M., Alves, D. S. M., Meng, X. H. 2006. A Note on Energy-Momentum Conservation in Palatini Formulation of L(R) Gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 38, 517-521.

Weinberg, S. 1972. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity; *Wiley and Sons.*

EKLER

Ek A. Afin Bağlantı Katsayılarının Modifikasyonu

Metrik tensör kompakt bir yapıya sahiptir ve bu ise kovaryant türevinin sıfıra eşit olması, yani bir geodezik eğri ailesi ile temsil edilir:

$$\mathscr{D}_\rho g_{\mu\nu} \equiv \mathscr{D}_\rho g^{\mu\nu} \equiv 0 \tag{A.1}$$

$\mathscr{D}_\rho g_{\mu\nu}$ ifadesini açarsak

$$\mathscr{D}_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho} g_{\mu\rho} \tag{A.2}$$

olarak yazabiliriz. $\mathscr{D}_\rho g_{\mu\nu} = 0$ olduğundan

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\beta}_{\nu\rho} g_{\mu\rho} \tag{A.3}$$

yazabiliriz. Bilindiği üzere metrik uzay zamanın afin bağlantı katsayıları

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu}\right) \tag{A.4}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho}\Gamma_{\mu\nu\rho} \tag{A.5}$$

olarak yazılır. Metrik tensörün $\delta g_{\mu\nu}$ gibi bir varyasyonu göz önüne alırsak (metrik tensörün simetrisinden dolayı $\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\nu\mu}$ dir) bunun kovaryant türevi

$$\mathcal{D}_\rho \delta g_{\mu\nu} = \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} \delta g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho} \delta g_{\mu\rho} \tag{A.6}$$

olur. Buradan da

$$\partial_\rho \delta g_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\rho \delta g_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} \delta g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\beta}_{\nu\rho} \delta g_{\mu\rho} \tag{A.7}$$

yazarız. İndislerin kombinasyonunu

$$\partial_\mu \delta g_{\nu\rho} = \mathcal{D}_\mu \delta g_{\nu\rho} + \Gamma^{\xi}_{\nu\mu} \delta g_{\xi\rho} + \Gamma^{\eta}_{\rho\mu} \delta g_{\nu\eta} \tag{A.8}$$

$$\partial_\nu \delta g_{\rho\mu} = \mathcal{D}_\nu \delta g_{\rho\mu} + \Gamma^{\chi}_{\rho\nu} \delta g_{\chi\mu} + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} \delta g_{\rho\varepsilon} \tag{A.9}$$

olarak yazarız. $\delta\Gamma_{\mu\nu\rho}$ varyasyonu

$$\delta\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\rho \delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \delta g_{\nu\rho} + \partial_\nu \delta g_{\rho\mu}\right) \tag{A.10}$$

şeklinde olur. $\partial_\rho \delta g_{\mu\nu}$ için elde edilen ifadeleri burada yerine yazarsak

$$\delta\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\rho \delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \delta g_{\nu\rho} + \partial_\nu \delta g_{\rho\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\mathcal{D}_\rho \delta g_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \delta g_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\nu \delta g_{\rho\mu}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\eta}_{\rho\mu}\delta g_{\nu\eta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\delta g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\chi}_{\rho\nu}\delta g_{\chi\mu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\delta g_{\mu\rho} + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}\delta g_{\rho\varepsilon} + \Gamma^{\xi}_{\nu\mu}\delta g_{\xi\rho}\right) \tag{A.11}$$

olur ve indislerin düzenlenmesi ile

$$\delta\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(-\mathcal{D}_\rho \delta g_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \delta g_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\nu \delta g_{\rho\mu}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\eta}_{\rho\mu}\delta g_{\nu\eta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\delta g_{\alpha\nu}\right) \qquad (\alpha \to \eta)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\chi}_{\rho\nu}\delta g_{\chi\mu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\delta g_{\mu\rho}\right) \qquad (\beta \to \chi)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}\delta g_{\rho\varepsilon} + \Gamma^{\xi}_{\nu\mu}\delta g_{\xi\rho}\right) \qquad (\xi \to \varepsilon) \tag{A.12}$$

olarak elde edilir. Christoffel sembolleri ve metriğin simetrisinden dolayı

$$\delta\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(-\mathcal{D}_\rho \delta g_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \delta g_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\nu \delta g_{\rho\mu}\right) + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}\delta g_{\rho\varepsilon} \tag{A.13}$$

olarak elde edilir. $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho}\Gamma_{\mu\nu\rho}$ ifadesini aşağıdaki gibi yazarız:

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho}\delta\Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho}\delta g^{\lambda\rho} \tag{A.14}$$

$\partial_\rho g_{\mu\nu}$ ifadelerini $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ içerisinde yazarsak

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\eta}_{\rho\mu} g_{\nu\eta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\chi}_{\rho\nu} g_{\chi\mu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho} g_{\mu\rho} + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} g_{\rho\varepsilon} + \Gamma^{\xi}_{\nu\mu} g_{\xi\rho}\right)$$

$$= \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} g_{\rho\varepsilon} \qquad \text{(A.15)}$$

elde edilir. Buradn da

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(-\mathscr{D}_\rho \delta g_{\mu\nu} + \mathscr{D}_\mu \delta g_{\nu\rho} + \mathscr{D}_\nu \delta g_{\rho\mu}\right) + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} g_{\rho\varepsilon} \delta g^{\lambda\rho} + g^{\lambda\rho} \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} \delta g_{\rho\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(-\mathscr{D}_\rho \delta g_{\mu\nu} + \mathscr{D}_\mu \delta g_{\nu\rho} + \mathscr{D}_\nu \delta g_{\rho\mu}\right) + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}\left(g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\varepsilon} + \delta g_{\rho\varepsilon} \delta g^{\lambda\rho}\right) \qquad \text{(A.16)}$$

olarak elde edilir.

$$\delta\left(g_{\rho\varepsilon} g^{\lambda\rho}\right) = \delta\left(\Im^{\lambda}_{\varepsilon}\right) = g^{\lambda\rho} \delta g_{\rho\varepsilon} + \delta g_{\rho\varepsilon} \delta g^{\lambda\rho} = 0 \qquad \text{(A.17)}$$

olacaktır (burada $\Im^{\lambda}_{\varepsilon}$ Kronecker deltasıdır) ve sonuçta

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(-\mathscr{D}_\rho \delta g_{\mu\nu} + \mathscr{D}_\mu \delta g_{\nu\rho} + \mathscr{D}_\nu \delta g_{\rho\mu}\right) \qquad \text{(A.18)}$$

olarak elde edilir. Levi Civita afin bağlantı katsayıları (ikinci tür Cristoffel sembolleri)

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(-\partial_{\rho} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu}\right) \tag{A.19}$$

şeklindedir. Ancak metrik tensörde yapılacak

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu} \tag{A.20}$$

şeklindeki bir konformal dönüşüm ile (A.19) ifadesi

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\lambda\rho}\left(-\partial_{\rho} \tilde{g}_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \tilde{g}_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \tilde{g}_{\rho\mu}\right) \tag{A.21}$$

şeklinde yazılabilir. $\tilde{g}_{\mu\nu}$ için yukarıdaki dönüşümünü kullanark

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(-\partial_{\rho} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu}\right) + \frac{1}{2\Phi} g^{\lambda\rho}\left(-g_{\mu\nu}\partial_{\rho}\Phi + g_{\nu\rho}\partial_{\mu}\Phi + g_{\rho\mu}\partial_{\nu}\Phi\right) \\ &= \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\Phi} g^{\lambda\rho}\left(-g_{\mu\nu}\partial_{\rho}\Phi + g_{\nu\rho}\partial_{\mu}\Phi + g_{\rho\mu}\partial_{\nu}\Phi\right) \end{aligned} \tag{A.22}$$

elde ederiz. Metrik tensörün konformal dönüşüm sonucu elde edilen $\tilde{g}_{\mu\nu}$ için

$$\mathcal{D}_{\rho} \tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} \mathcal{D}_{\rho} \Phi \tag{A.23}$$

$$\partial_{\rho}\Phi = \mathcal{D}_{\rho}\Phi \tag{A.24}$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\Phi} g^{\lambda\rho}\left(- g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\rho}\Phi + g_{\nu\rho}\mathcal{D}_{\mu}\Phi + g_{\rho\mu}\mathcal{D}_{\nu}\Phi\right)$$

$$= \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\Phi}\left(- g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\rho}\Phi + g^{\lambda\rho} g_{\nu\rho}\mathcal{D}_{\mu}\Phi + g^{\lambda\rho} g_{\rho\mu}\mathcal{D}_{\nu}\Phi\right) \tag{A.25}$$

olacaktır.

$$g^{\lambda\rho} g_{\nu\rho} = \Im^{\lambda}_{\nu} \tag{A.26}$$

$$g^{\lambda\rho} g_{\rho\mu} = \Im^{\lambda}_{\mu} \tag{A.27}$$

olacağından modifiye edilmiş afin bağlantı katsayıları

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\Phi}\left(- g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\rho}\Phi + \Im^{\lambda}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu}\Phi + \Im^{\lambda}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\Phi\right) \tag{A.28}$$

olarak elde edilir. Burada ikinci terim aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv C^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2\Phi}\left(- g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\rho}\Phi + \Im^{\lambda}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu}\Phi + \Im^{\lambda}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\Phi\right) \tag{A.29}$$

Ek B. Riemann Ve Ricci Tensörlerinin Modifikasyonu

Üçüncü ranktan Q^z_{xy} şeklindeki karışık bir tensörü kontravaryant ve kovaryant tensörlerin çarpımı olarak

$$Q^z_{xy} = A_x B_y C^z \tag{B.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece bu tensörün kovaryant türevini

$$\begin{aligned}
\nabla_w Q^z_{xy} &= (\nabla_w A_x) B_y C^z + A_x (\nabla_w B_y) C^z + A_x B_y (\nabla_w C^z) \\
&= (\partial_w A_x - \Gamma^a_{wx} A_a) B_y C^z + (\partial_w B_y - \Gamma^b_{wy} B_b) B_y C^z + (\partial_w C^z + \Gamma^z_{wc} C^c) A_x B_y \\
&= \partial_w (A_x B_y C^z) - \Gamma^a_{wx} A_a B_y C^z - \Gamma^b_{wy} A_x B_b C^z + \Gamma^z_{wc} A_x B_y C^c \\
&= \partial_w Q^z_{xy} - \Gamma^a_{wx} Q^z_{ay} A_a B_y C^z - \Gamma^b_{wy} Q^z_{xb} + \Gamma^z_{wc} Q^c_{xy}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan da bu karışık tensörün kısmi türevini

$$\partial_w Q^z_{xy} = \nabla_w Q^z_{xy} + \Gamma^a_{wx} Q^z_{ay} + \Gamma^b_{wy} Q^z_{xb} - \Gamma^z_{wc} Q^c_{xy} \tag{B.3}$$

şeklinde yazarız. Riemann tensörü Γ afin bağlantı katsayıları ve onların kısmi türevlerinin fonksiyonudur. Yani

$$R^\lambda_{\mu\nu\sigma} = R^\lambda_{\mu\nu\sigma}(\Gamma, \partial\Gamma) \tag{B.4}$$

şeklindedir. Bilindiği üzere $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}$ ’ nin açık ifadesi

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} \qquad \text{(B.5)}$$

şeklindedir. Riemann tensöründe $\delta R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}$ varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} &= \partial_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\right) - \partial_{\sigma}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) \\ &\quad + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \end{aligned} \qquad \text{(B.6)}$$

olarak yazarız. $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ afin bağlantı katsayıları tensör olmamasına karşın $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ varyasyonu bir tensördür. O halde yukarıdaki

$$\partial_{w}Q^{z}_{xy} = \nabla_{w}Q^{z}_{xy} + \Gamma^{a}_{wx}Q^{z}_{ay} + \Gamma^{b}_{wy}Q^{z}_{xb} - \Gamma^{z}_{wc}Q^{c}_{xy} \qquad \text{(B.7)}$$

ifadesini $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ afin bağlantı katsayıları için kullanabiliriz. Böylece

$$\partial_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} = \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} + \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\sigma} \qquad \text{(B.8)}$$

$$\partial_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} \qquad \text{(B.9)}$$

olur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
\delta R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} &= \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \\
&+ \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} + \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} \\
&+ \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}
\end{aligned} \tag{B.10}
$$

yazarız. İndislerin değişimi ile

$$
\begin{aligned}
\delta R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} &= \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} && (\alpha \to \rho) \\
&+ \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\sigma} && (\gamma \to \rho) \\
&+ \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} && (\alpha \to \rho) \\
&+ \Gamma^{\lambda}_{\sigma\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} && (\gamma \to \rho)
\end{aligned} \tag{B.11}
$$

elde edilir. Sonuçta

$$
\delta R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{B.12}
$$

olarak elde ederiz. Ricci tensörü $R_{\mu\sigma} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\sigma}$ şeklinde olup $\delta R_{\mu\sigma}$ varyasyonunu

$$
\delta R_{\mu\sigma} = \nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \tag{B.13}
$$

olarak yazabiliriz ve bu da Palatini eşitliği olarak bilinir. (A.18)’ i burada kullanırsak

$$\mathcal{D}_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(-\mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\rho \delta g_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\mu \delta g_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\nu \delta g_{\rho\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\Box \delta g_{\mu\nu} - \delta g_{\nu\rho} \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\mu \delta g^{\lambda\rho} - g_{\rho\mu} \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\nu \delta g^{\lambda\rho}\right) \quad \text{(B.14)}$$

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(-\mathcal{D}_\rho \delta g_{\mu\lambda} + \mathcal{D}_\mu \delta g_{\lambda\rho} + \mathcal{D}_\lambda \delta g_{\rho\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda} \mathcal{D}_\rho \delta g^{\lambda\rho} - g_{\lambda\rho} \mathcal{D}_\mu \delta g^{\lambda\rho} - g_{\rho\mu} \mathcal{D}_\lambda \delta g^{\lambda\rho}\right) \quad \text{(B.15)}$$

$$\mathcal{D}_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\rho \delta g^{\lambda\rho} - g_{\lambda\rho} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \delta g^{\lambda\rho} - g_{\rho\mu} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\lambda \delta g^{\lambda\rho}\right) \quad \text{(B.16)}$$

$$g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-g^{\mu\nu} \Box \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\mu \delta g^{\lambda\rho} - g^{\mu\nu} g_{\rho\mu} \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\nu \delta g^{\lambda\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu} \Box \delta g^{\mu\nu} - 2\mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\rho \delta g^{\lambda\rho}\right) \quad \text{(B.17)}$$

$$g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\rho \delta g^{\lambda\rho} - g^{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \delta g^{\lambda\rho} - g^{\mu\nu} g_{\rho\mu} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\lambda \delta g^{\lambda\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\rho \delta g^{\lambda\rho} - g_{\lambda\rho} \Box \delta g^{\lambda\rho} - \mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\lambda \delta g^{\lambda\rho}\right) \quad \text{(B.18)}$$

denklemleri elde edilir. Sonuçta

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu} \Box \delta g^{\mu\nu} - 2\mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\rho \delta g^{\lambda\rho} - \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\rho \delta g^{\lambda\rho} + g_{\lambda\rho} \boldsymbol{1} \delta g^{\lambda\rho} + \mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\lambda \delta g^{\lambda\rho}\right)$$

$$= \left(g_{\lambda\rho} \Box - \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\rho\right) \delta g^{\lambda\rho} - \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\rho - \mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\lambda\right) \delta g^{\lambda\rho} \quad \text{(B.19)}$$

olarak elde edilir. Γ afin bağlantı katsayılarında meydanda gelecek $\delta\Gamma$ değişimi sonrasında Riemann tensöründe de $\delta R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}$ değişimi olur. Buna göre bu değişimi

$$\delta R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}\left(\Gamma + \delta\Gamma, \partial\Gamma + \delta(\partial\Gamma)\right) - R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}\left(\Gamma, \partial\Gamma\right) \tag{B.20}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$\mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}\left(\Gamma + \delta\Gamma, \partial\Gamma + \delta(\partial\Gamma)\right) \tag{B.21}$$

gösterimi yapalım. Böylece

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} &= \partial_{\nu}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\right) - \partial_{\sigma}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right)\\ &\quad + \left(\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\right)\left(\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\right) - \left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right)\left(\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\right)\end{aligned} \tag{B.22}$$

olarak yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} &= \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\\ &\quad + \partial_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\right) - \partial_{\sigma}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\\ &\quad + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\\ &= R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} + \partial_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\right) - \partial_{\sigma}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\\ &\quad + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{B.23}$$

yazarız. $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ varyasyonu için yukarıda bulunan sonuçları kullanırsak

$$\mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}$$

$$+ \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} + \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}$$

$$+ \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \tag{B.24}$$

elde edilir. İndislerin değişimi ile

$$\mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}$$

$$+ \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} \qquad (\alpha \to \rho)$$

$$+ \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}$$

$$+ \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\sigma} \qquad (\gamma \to \rho)$$

$$+ \Gamma^{\lambda}_{\sigma\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \qquad (\gamma \to \rho) \tag{B.25}$$

Sonuçta modifiye edilmiş Riemann tensörünü

$$\mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} \tag{B.26}$$

olarak elde ederiz. Modifiye edilmiş Ricci tensörünü ise

$$\mathcal{R}_{\mu\sigma} = R_{\mu\sigma} + \nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} \tag{B.27}$$

olarak yazabiliriz yani

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \tag{B.28}$$

şeklinde olur. Eğer (A.11) denklemini göz önüne alırsak

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = C^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{B.29}$$

olduğunu görürüz. Böylece

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = C^{\lambda}_{\mu\nu} = -g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu} \mathcal{D}_{\rho}\Omega + \Im^{\lambda}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu}\Omega + \Im^{\lambda}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\Omega \tag{B.30}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$\Omega = \ln\sqrt{\Phi} \tag{B.31}$$

$$\mathcal{D}_{\rho}\Omega = \frac{1}{2\Phi}\mathcal{D}_{\rho}\Phi \tag{B.32}$$

olarak tanımlanmıştır. Buna göre modifiye edilmiş Riemann ve Ricci tensörlerini

$$\mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} + \mathcal{D}_{\nu}C^{\lambda}_{\mu\sigma} - \mathcal{D}_{\sigma}C^{\lambda}_{\mu\nu} + C^{\rho}_{\mu\sigma}C^{\lambda}_{\rho\nu} - C^{\rho}_{\mu\nu}C^{\lambda}_{\rho\sigma} \tag{B.33}$$

$$\mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\lambda\sigma} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\sigma} + \mathcal{D}_{\lambda}C^{\lambda}_{\mu\sigma} - \mathcal{D}_{\sigma}C^{\lambda}_{\mu\lambda} + C^{\rho}_{\mu\sigma}C^{\lambda}_{\rho\lambda} - C^{\rho}_{\mu\lambda}C^{\lambda}_{\rho\sigma} \tag{B.34}$$

yazarız. Ricci tensörünü tekrar düzenlersek

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \mathcal{D}_{\lambda}C^{\lambda}_{\mu\nu} - \mathcal{D}_{\nu}C^{\lambda}_{\mu\lambda} + C^{\rho}_{\mu\nu}C^{\lambda}_{\rho\lambda} - C^{\rho}_{\mu\lambda}C^{\lambda}_{\rho\nu} \tag{B.35}$$

şeklinde yazabiliriz. $C^{\lambda}_{\mu\nu}$ niceliğinin kovaryant türevleri

$$C^{\lambda}_{\mu\nu} = -g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu} \mathcal{D}_{\rho} \boldsymbol{\Omega} + \Im^{\lambda}_{\nu} \mathcal{D}_{\mu} \boldsymbol{\Omega} + \Im^{\lambda}_{\mu} \mathcal{D}_{\nu} \boldsymbol{\Omega} \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\lambda} C^{\lambda}_{\mu\nu} &= -g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu} \mathcal{D}_{\lambda} \mathcal{D}_{\rho} \boldsymbol{\Omega} + \Im^{\lambda}_{\nu} \mathcal{D}_{\lambda} \mathcal{D}_{\mu} \boldsymbol{\Omega} + \Im^{\lambda}_{\mu} \mathcal{D}_{\lambda} \mathcal{D}_{\nu} \boldsymbol{\Omega} \\ &= -g_{\mu\nu} \Box \boldsymbol{\Omega} + \mathcal{D}_{\nu} \mathcal{D}_{\mu} \boldsymbol{\Omega} + \mathcal{D}_{\mu} \mathcal{D}_{\nu} \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \tag{B.37}$$

$$\begin{aligned} C^{\lambda}_{\mu\lambda} &= -g^{\lambda\rho} g_{\mu\lambda} \mathcal{D}_{\rho} \boldsymbol{\Omega} + \Im^{\lambda}_{\lambda} \mathcal{D}_{\mu} \boldsymbol{\Omega} + \Im^{\lambda}_{\mu} \mathcal{D}_{\lambda} \boldsymbol{\Omega} \\ &= N \mathcal{D}_{\mu} \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \tag{B.38}$$

$$\mathcal{D}_{\nu} C^{\lambda}_{\mu\lambda} = N \mathcal{D}_{\nu} \mathcal{D}_{\mu} \boldsymbol{\Omega} \tag{B.39}$$

olarak elde edilir. Burada $\Im^{\lambda}_{\lambda} = N$ dir ve devamla

$$\mathcal{D}_{\lambda} C^{\lambda}_{\mu\nu} - \mathcal{D}_{\nu} C^{\lambda}_{\mu\lambda} = -g_{\mu\nu} \Box \boldsymbol{\Omega} - (N-2) \mathcal{D}_{\mu} \mathcal{D}_{\nu} \boldsymbol{\Omega} \tag{B.40}$$

olur. $C^{\rho}_{\mu\nu} C^{\lambda}_{\rho\lambda} - C^{\rho}_{\mu\lambda} C$ terimi için de

$$C^{\rho}_{\mu\nu} = -g^{\rho\xi} g_{\mu\nu} \mathcal{D}_{\xi} \boldsymbol{\Omega} + \Im^{\rho}_{\nu} \mathcal{D}_{\mu} \boldsymbol{\Omega} + \Im^{\rho}_{\mu} \mathcal{D}_{\nu} \boldsymbol{\Omega} \tag{B.41}$$

$$C^{\lambda}_{\rho\lambda} = \mathcal{D}_{\rho} \boldsymbol{\Omega} \tag{B.42}$$

$$C^{\rho}_{\mu\nu}C^{\lambda}_{\rho\lambda} = -g^{\rho\xi}g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\xi}\Omega\mathcal{D}_{\rho}\Omega + \Im^{\rho}_{\nu}\mathcal{D}_{\mu}\Omega\mathcal{D}_{\rho}\Omega + \Im^{\rho}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\Omega\mathcal{D}_{\rho}\Omega$$

$$= -g_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\xi}\Omega\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\Omega\right) + 2\mathcal{D}_{\mu}\Omega\mathcal{D}_{\nu}\Omega \qquad \text{(B.43)}$$

$$C^{\rho}_{\mu\lambda} = -g^{\rho\zeta}g_{\mu\lambda}\mathcal{D}_{\zeta}\Omega + \Im^{\rho}_{\lambda}\mathcal{D}_{\mu}\Omega + \Im^{\rho}_{\mu}\mathcal{D}_{\lambda}\Omega \qquad \text{(B.44)}$$

$$C^{\lambda}_{\rho\nu} = -g^{\lambda\gamma}g_{\rho\nu}\mathcal{D}_{\gamma}\Omega + \Im^{\lambda}_{\nu}\mathcal{D}_{\rho}\Omega + \Im^{\lambda}_{\rho}\mathcal{D}_{\nu}\Omega \qquad \text{(B.45)}$$

$$C^{\rho}_{\mu\lambda}C^{\lambda}_{\rho\nu} = \left(-g^{\rho\zeta}g_{\mu\lambda}\mathcal{D}_{\zeta}\Omega + \Im^{\rho}_{\lambda}\mathcal{D}_{\mu}\Omega + \Im^{\rho}_{\mu}\mathcal{D}_{\lambda}\Omega\right)$$

$$\times\left(-g^{\lambda\gamma}g_{\rho\nu}\mathcal{D}_{\gamma}\Omega + \Im^{\lambda}_{\nu}\mathcal{D}_{\rho}\Omega + \Im^{\lambda}_{\rho}\mathcal{D}_{\nu}\Omega\right)$$

$$= -2g_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\xi}\Omega\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\Omega\right) + (N+2)\mathcal{D}_{\mu}\Omega\mathcal{D}_{\nu}\Omega \qquad \text{(B.46)}$$

$$\Im^{\rho}_{\lambda}\Im^{\lambda}_{\rho} = N \qquad \text{(B.47)}$$

$$C^{\rho}_{\mu\nu}C^{\lambda}_{\rho\lambda} - C^{\rho}_{\mu\lambda}C^{\lambda}_{\rho\nu} = g_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\xi}\Omega\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\Omega\right) - N\mathcal{D}_{\mu}\Omega\mathcal{D}_{\nu}\Omega \qquad \text{(B.48)}$$

ifadesini buluruz. O halde

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Box\Omega - (N-2)\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\Omega + g_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\xi}\Omega\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\Omega\right) - N\mathcal{D}_{\mu}\Omega\mathcal{D}_{\nu}\Omega \qquad \text{(B.49)}$$

olur. (B.15) ve (B.9) denklemlerini karşılaştıralım:

$$\delta R_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}$$

Görüleceği üzere (B.9)' da fazla dan terimler vardır. Konformal dönüşüm sonucu Ricci tensörünün invaryant kalması için bu ilave terimlerin yok olması gerekir. (B.30) denkleminde büzme işlemi yapacak olursak bu fazla terimlerin yok olduğunu görürüz: $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\Box\Omega - (N-2)g^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\Omega + g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\xi}\Omega\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\Omega\right) - Ng^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu}\Omega\mathcal{D}_{\nu}\Omega \\
&= R - 2(N-1)\Box\Omega + N\left(\mathcal{D}_{\xi}\Omega\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\Omega\right) - N\left(\mathcal{D}_{\xi}\Omega\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\Omega\right) \\
&= R - 2(N-1)\Box\Omega \qquad \text{(B.50)}
\end{aligned}$$

O halde (B.48) ile verilen ifadenin sıfıra eşit olması gerekir. Yani

$$C^{\rho}_{\mu\nu}C^{\lambda}_{\rho\lambda} - C^{\rho}_{\mu\lambda}C^{\lambda}_{\rho\nu} = g_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\xi}\Omega\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\Omega\right) - N\mathcal{D}_{\mu}\Omega\mathcal{D}_{\nu}\Omega = 0 \qquad \text{(B.51)}$$

olur. Bunu da

$$g_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\xi}\Omega\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\Omega\right) = N\mathcal{D}_{\mu}\Omega\mathcal{D}_{\nu}\Omega \qquad \text{(B.52)}$$

olarak da yazabiliriz. Bu nedenle (B.49) denklemi ile verilen modifiye edilmiş Ricci tensörünü

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Box\Omega - (N-2)\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\Omega \qquad \text{(B.53)}$$

olarak yazarız.

$f(R)$ gravite teorilerinin **Palatini formalizmi**nde metriğin konformal dönüşümü

$$\Phi = \varphi^{\frac{2}{N-2}} \tag{B.54}$$

şeklindeki bir fonksiyon ile yapılır. Burada $\varphi = df(R)/dR$ dir. Böylece

$$\Omega = \ln\left(\varphi^{\frac{2}{N-2}}\right)^{1/2} = \frac{1}{N-2}\ln\varphi \tag{B.54}$$

olacaktır. Bu fonksiyon için

$$\mathcal{D}_\nu \Omega = \frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi}\mathcal{D}_\nu \varphi \tag{B.56}$$

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \Omega = \frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi}\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \varphi - \frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi^2}\mathcal{D}_\mu \varphi \mathcal{D}_\nu \varphi \tag{B.57}$$

$$\Box \Omega = \frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi}\Box\varphi - \frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi^2}\left(\mathcal{D}_\xi \varphi\right)\left(\mathcal{D}^\xi \varphi\right) \tag{B.58}$$

şeklindeki nicelikler hesaplanır. (B.56) ifadesini göz önüne alırsak (B.52)’ i

$$g_{\mu\nu}\frac{1}{(N-2)^2}\frac{1}{\varphi^2}\left(\mathcal{D}_\xi \varphi\right)\left(\mathcal{D}^\xi \varphi\right) = N\frac{1}{(N-2)^2}\frac{1}{\varphi^2}\mathcal{D}_\mu \varphi \mathcal{D}_\nu \varphi$$

$$g_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\xi}\varphi\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\varphi\right)=N\mathcal{D}_{\mu}\varphi\mathcal{D}_{\nu}\varphi \tag{B.59}$$

şeklinde yazabiliriz. Sonuçta Ricci tensörü aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi}\Box\varphi+\frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi^{2}}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_{\xi}\varphi\right)\left(\mathcal{D}^{\xi}\varphi\right)\\ &\quad+\frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi}\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\varphi-\frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi^{2}}\mathcal{D}_{\mu}\varphi\mathcal{D}_{\nu}\varphi\\ &= R_{\mu\nu}+\left(\frac{N-1}{N-2}\right)\frac{1}{\varphi^{2}}\mathcal{D}_{\mu}\varphi\mathcal{D}_{\nu}\varphi-\frac{1}{\varphi}\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\varphi-\frac{1}{(N-2)}\frac{1}{\varphi}g_{\mu\nu}\Box\varphi\end{aligned} \tag{B.60}$$

Ek C. Skaler Alanlar İçin Alan Denklemleri

Bir ϕ skaler alanı için Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L}_\phi\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_\lambda\phi\right)=\sqrt{-g}\,L_\phi\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_\lambda\phi\right) \tag{C.1}$$

şeklinde yazılabilir. Bu Lagrange yoğunluğunun sağlayacağı etki fonksiyonu

$$S_\phi=\int_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_\phi d^N x \tag{C.2}$$

ve bu fonksiyonun varyasyonu

$$\delta S_\phi=\int_{\mathcal{M}}\delta\mathcal{L}_\phi d^N x \tag{C.3}$$

şeklinde olacaktır. Burada $\delta\mathcal{L}_\phi$ varyasyonu

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_\phi &= L_\phi\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_\lambda\phi\right)\delta\sqrt{-g}+\sqrt{-g}\,\delta L_\phi\\ &=\sqrt{-g}\left(\delta L_\phi-\frac{1}{2}L_\phi\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_\lambda\phi\right)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{C.4}$$

olacaktır. Bu ifadede δL_ϕ varyasyonu aşağıdaki gibi bir diferansiyel olarak yazılabilir:

$$\delta L_{\phi} = \frac{\partial L_{\phi}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial L_{\phi}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L_{\phi}}{\partial (\mathcal{D}_{\lambda}\phi)} \delta (\mathcal{D}_{\lambda}\phi) \tag{C.5}$$

Bu denklemde

$$\frac{\partial L_{\phi}}{\partial (\mathcal{D}_{\lambda}\phi)} \delta (\mathcal{D}_{\lambda}\phi) = \mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial (\mathcal{D}_{\lambda}\phi)} \delta \phi \right) - \mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial (\mathcal{D}_{\lambda}\phi)} \right) \delta \phi \tag{C.6}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\delta L_{\phi} = \frac{\partial L_{\phi}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial \phi} - \mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial (\mathcal{D}_{\lambda}\phi)} \right) \right) \delta \phi + \mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial (\mathcal{D}_{\lambda}\phi)} \delta \phi \right) \tag{C.7}$$

olarak yazılır. Buradan da δL_{ϕ} varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\phi} = \sqrt{-g} \Bigg\{ & \left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} L_{\phi}\left(g^{\mu\nu}, \phi, \mathcal{D}_{\lambda}\phi\right) g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ & + \left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial \phi} - \mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial (\mathcal{D}_{\lambda}\phi)} \right) \right) \delta \phi + \mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial (\mathcal{D}_{\lambda}\phi)} \delta \phi \right) \Bigg\} \end{aligned} \tag{C.8}$$

olur. Sonuçta δS_{ϕ} varyasyonunu

$$\delta S_{\phi} = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right) g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} d^N x$$

$$+ \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\,\mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial(\mathcal{D}_{\lambda}\phi)}\delta\phi\right) d^N x \; + \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial \phi} - \mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial(\mathcal{D}_{\lambda}\phi)}\right)\right)\delta\phi d^N x \qquad \text{(C.9)}$$

şeklinde yazarız. Bu ifadedeki son integral varyasyonun hesaplandığı sınır koşullarında sıfır olacak şekilde seçilirse. Sonuçta toplam varyasyon $\delta g^{\mu\nu}$ ve $\delta\phi$ gibi iki değişkene bağlı olarak

$$\delta S_{\phi} = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right) g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} d^N x$$

$$+ \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial \phi} - \mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial(\mathcal{D}_{\lambda}\phi)}\right)\right)\delta\phi d^N x \qquad \text{(C.10)}$$

şeklinde olacaktır. Burada

$$L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right) = -\omega(\phi) g^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu}\phi\mathcal{D}_{\nu}\phi - V(\phi) \qquad \text{(C.11)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\omega(\phi)$ Brans-Dicke parametresidir. Buna göre

$$\frac{\partial L_{\phi}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\omega(\phi) g^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu}\phi\mathcal{D}_{\nu}\phi \qquad \text{(C.12)}$$

$$\frac{\partial L_{\phi}}{\partial \phi} = -\frac{d\omega}{d\phi}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi - \frac{dV}{d\phi} \qquad \text{(C.13)}$$

$$\frac{\partial L_{\phi}}{\partial(\mathcal{D}_{\lambda}\phi)} = -\omega(\phi)\left(g^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu}\phi + g^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\nu}\phi\right) \equiv -2\omega(\phi)\mathcal{D}^{\lambda}\phi \tag{C.14}$$

$$\mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial(\mathcal{D}_{\lambda}\phi)}\right) = -2\frac{d\omega}{d\phi}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi - 2\omega(\phi)\Box\phi \tag{C.15}$$

ifadelerini elde ederiz. O halde toplam varyasyonu

$$\begin{aligned}\delta S_{\phi} &= \int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\omega(\phi)g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi - \omega(\phi)\mathcal{D}_{\mu}\phi\mathcal{D}_{\nu}\phi + \frac{1}{2}V(\phi)g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^{N}x \\ &+ \int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(\frac{d\omega}{d\phi}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi + 2\omega(\phi)\Box\phi - \frac{dV}{d\phi}\right)\delta\phi d^{N}x\end{aligned} \tag{C.16}$$

olarak $\delta g^{\mu\nu}$ ve $\delta\phi$ gibi iki değişkene bağlı elde ederiz. $\delta S_{\phi} = 0$ şartındn da

$$\frac{1}{2}\omega(\phi)g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi - \omega(\phi)\mathcal{D}_{\mu}\phi\mathcal{D}_{\nu}\phi + \frac{1}{2}V(\phi)g_{\mu\nu} = 0 \tag{C.17}$$

$$\frac{d\omega}{d\phi}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi + 2\omega(\phi)\Box\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{C.18}$$

skaler bir alana ait alan denklemleri elde edilir. Skaler alan ve gravitasyon için aşağıdaki şekilde bir Lagrange yoğunluğu tanımlayabiliriz

$$\mathcal{L}_{\phi-R} = \sqrt{-g}F(\phi, R) \tag{C.19}$$

Etki fonksiyonunu

$$S_{\phi-R} = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_{\phi-R} d^N x \tag{C.20}$$

olarak yazabiliriz. $\delta S_{\phi-R}$ varyasyonunu

$$\delta S_{\phi-R} = \int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{L}_{\phi-R} d^N x \tag{C.21}$$

yazarız. Burada

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\phi-R} &= F(\phi, R)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\,\delta F \\ &= \sqrt{-g}\left(\delta F - \frac{1}{2}F(\phi, R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{C.22}$$

yazılabilir. Bilindiği üzere R Ricci skaleridir ve bunu

$$R\left(g^{\mu\nu}, \Gamma\right) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) \tag{C.23}$$

şeklinde yazabiliriz. Bunu kullanarak

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial R}\delta R + \frac{\partial F}{\partial \phi}\delta\phi \tag{C.24}$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}(\Gamma)\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{C.25}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\delta\mathcal{L}_{\phi-R} = \sqrt{-g}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial R}R_{\mu\nu}(\Gamma)-\frac{1}{2}F(\phi,R)g_{\mu\nu}\right)+\frac{\partial F}{\partial R}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}+\frac{\partial F}{\partial \phi}\delta\phi\right\} \tag{C.26}$$

olur ve sonuçta $\delta S_{\phi-R}$ varyasyonu

$$\begin{aligned}\delta S_{\phi-R} &= \int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial F}{\partial R}R_{\mu\nu}(\Gamma)-\frac{1}{2}F(\phi,R)g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^{N}x \\ &\quad +\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\,\frac{\partial F}{\partial R}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^{N}x+\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\,\frac{\partial F}{\partial \phi}\delta\phi d^{N}x\end{aligned} \tag{C.27}$$

üç ayrı değişkene bağlı olarak elde edilir. Toplam varyasyonu

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial F}{\partial R}R_{\mu\nu}(\Gamma)-\frac{1}{2}F(\phi,R)g_{\mu\nu}+\frac{\partial L_{\phi}}{\partial g^{\mu\nu}}-\frac{1}{2}L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right)g_{\mu\nu\,\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^{N}x \\ &\quad +\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\,\frac{\partial F}{\partial R}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^{N}x+\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}+\frac{\partial L_{\phi}}{\partial \phi}-\mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial(\mathcal{D}_{\lambda}\phi)}\right)\right)\delta\phi d^{N}x\end{aligned} \tag{C.28}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \left(-\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}+g_{\mu\nu}\Box\right)\delta g^{\mu\nu} \tag{C.29}$$

dir. Böylece

$$\delta S=\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial F}{\partial R}R_{\mu\nu}(\Gamma)-\frac{1}{2}F(\phi,R)g_{\mu\nu}-\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\frac{\partial F}{\partial R}+g_{\mu\nu}\Box\frac{\partial F}{\partial R}+\frac{\partial L_{\phi}}{\partial g^{\mu\nu}}-\frac{1}{2}L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right)g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^{N}x$$
$$+\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi}+\frac{\partial L_{\phi}}{\partial\phi}-\mathcal{D}_{\lambda}\left(\frac{\partial L_{\phi}}{\partial(\mathcal{D}_{\lambda}\phi)}\right)\right)\delta\phi d^{N}x \qquad \text{(C.30)}$$

olacaktır. Skaler alanın dinamiğini belirleyen $L_{\phi}\left(g^{\mu\nu},\phi,\mathcal{D}_{\lambda}\phi\right)$ Lagrange fonksiyonu için (C.13) ifadesini kullanabiliriz. (C.18) denklemini göz önüne aldığımızda toplam varyasyonumuzu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\delta S=\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial R}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}F(\phi,R)g_{\mu\nu}-\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\frac{\partial F}{\partial R}+g_{\mu\nu}\Box\frac{\partial F}{\partial R}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\omega(\phi)g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi-\omega(\phi)\mathcal{D}_{\mu}\phi\mathcal{D}_{\nu}\phi+\frac{1}{2}V(\phi)g_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu}d^{N}x$$
$$+\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi}+\frac{d\omega}{d\phi}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi+2\omega(\phi)\Box\phi-\frac{dV}{d\phi}\right)\delta\phi d^{N}x \qquad \text{(C.31)}$$

Böylece skaler gravitasyon teorilerinde alan denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{\partial F}{\partial R}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}F(\phi,R)g_{\mu\nu}-\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}\frac{\partial F}{\partial R}+g_{\mu\nu}\Box\frac{\partial F}{\partial R}$$
$$+\omega(\phi)\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi-\mathcal{D}_{\mu}\phi\mathcal{D}_{\nu}\phi\right)+\frac{1}{2}V(\phi)g_{\mu\nu}=0 \qquad \text{(C.32)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\phi}+\frac{d\omega}{d\phi}\mathcal{D}_{\lambda}\phi\mathcal{D}^{\lambda}\phi+2\omega(\phi)\Box\phi-\frac{dV}{d\phi}=0 \qquad \text{(C.33)}$$

YAŞAM ÖYKÜSÜ

24 Ağustos 1978 tarihinde Çorum' da doğan İbrahim ŞENER, 1996 yılında Çorum Atatürk Lisesi Fen Bilimleri alanından mezun olmuş, 2001 yılında ise bir kamu kuruluşunda göreve başlamıştır. Lisans öğrenimi için 2002 yılında (Isparta) Süleyman Demirel Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Jeofizik Mühendisliği Bölümüne girerek buradan 2006 yılında mezun olmuştur. Lisans öğrenimi sırasında, 2005 – 2006 eğitim öğretim yılı güz ve bahar yarıyıllarında Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında özel öğrenci statüsünde lisansüstü derslere kayıt yaptırarak başarılı olmuştur. 2006 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başlamıştır. Halen bir kamu kuruluşunda görev yapmaktadır.