ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI UZAY-ZAMANLARIN EĞRİLİK SİMETRİLERİ

Mevlüt BAŞER

DANIŞMAN

Prof. Dr. Uğur CAMCI

Ocak, 2008
ÇANAKKALE

BAZI UZAY-ZAMANLARIN EĞRİLİK SİMETRİLERİ

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

FİZİK Anabilim Dalı

Mevlüt BAŞER

Danışman:

Prof. Dr. Uğur CAMCI

Ocak, 2008

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Yüksek Lisans öğrencisi **Mevlüt BAŞER,** tarafından **Prof. Dr. Uğur CAMCI** yönetiminde hazırlanan **"BAZI UZAY-ZAMANLARIN EĞRİLİK SİMETRİLERİ"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Uğur CAMCI

Yönetici

Doç. Dr. Hüsnü BAYSAL

Jüri Üyesi

Doç. Dr. İsmail TARHAN

Jüri Üyesi

Jüri Üyesi

(5 üyeli jürilerde)

Jüri Üyesi

(5 üyeli jürilerde)

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi: 04/01/2008

Prof. Dr. Mehmet Emin ÖZEL

Müdür

TEŞEKKÜR

Lisansüstü çalışmalarım boyunca bana çalışmalarımda yardımcı olan ve bu tezin hazırlanma sürecinde bilgi ve deneyimlerini esirgemeden yol gösteren, bana emek ve zaman harcayan değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Uğur CAMCI'ya teşekkür ederim. Yüksek lisans öğrenimimin her aşamasında yanımda olan, maddi ve manevi destek veren ağabeyime, aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Mevlüt BAŞER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

(,)	Kısmi türev
(´)	r değişkenine göre türev
(.)	t değişkenine göre türev
g_{ab}	Metrik tensörü
$£_{\vec{\xi}}$	$\vec{\xi}$ vektör alanı yönündeki Lie türev operatörü
$R^{a}{}_{bcd}$	Riemann eğrilik tensörü
R_{ab}	Ricci tensörü
R	Ricci skaleri

Kısaltmalar

AC	**A**ffine **C**ollineation
CC	**C**urvature (Eğrilik) **C**ollineation (Kollinasyonları)
CKV	proper (Öz) **C**onformal **K**illing **V**ector
EFE	**E**instein **F**ield (Alan) **E**quations (Denklemleri)
GRT	**G**enel **R**elativite **T**eorisi
HV	**H**omothetic **V**ektör
KV	**K**illing **V**ektör
RC	**R**icci **C**ollineation (Kollinasyonları)
SCKV	**S**pecial (Özel) **C**onformal (Konformal) **K**illing **V**ector

Konvansiyon

Tezimizde metrik signatürü +2(-,+,+,+) dir.

ABSTRACT

In this study, curvature collineations obtained for spherically symmetric static space-times. Curvature collineation with $\vec{\xi}$ vector field has been obtained for Minkowski, De Sitter, anti-De Sitter, Einstein, Schwarzschild, Reissner-Nordstörm and Bertotti-Robinson space-times. Also $\vec{\xi}$ vector field are obtained for general spherically symmetric static space-times.

Key Words: Spherically symmetric static space-times; Curvature collineations; Einstein; Schwarzschild; Minkowski; De Sitter; anti-De Sitter; Reissner-Nordstörm; Bertotti-Robinson.

The present M.Sc. Thesis was supported by The Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under the project no of 106T669.

ÖZET

Bu çalışmada, küresel simetrik statik uzay-zaman metriğinin özel durumları olan Einstein, Schwarzchild, Minkowski, De Sitter, Anti De Sitter, Reissner-Nordstörm ve Bertotti Robinson uzay-zamanları için eğrilik kollinasyonları öncelikle belirlenmiştir. Ayrıca; genel küresel simetrik statik uzay-zaman için çözümler yapılmış ve 6x6 Riemann tensör matrisine ait rank argümanı kullanılarak, eğrilik kollinasyon simetrisini doğuran vektör alanlar elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Küresel Simetrik Statik Uzay-Zaman; Eğrilik Kollinasyonları; Einstein; Schwarzschild; Minkowski; De Sitter; anti-De Sitter; Reissner-Nordstörm; Bertotti-Robinson.

Hazırlanan bu Yüksek Lisans Tezi, TÜBİTAK tarafından 106T669 no'lu proje kapsamında desteklenmiştir.

İÇERİK

BÖLÜM 1
GİRİŞ

İzometriler (yani uzunlukların invaryant kaldığı dönüşümler); metrik tensörün Lie türevinin, uzay zamanın izin verdiği Killing vektörleri (KV) yönü boyunca sıfır olması ile verilir. Her bağımsız KV, uzay-zaman için bir korunum yasasına yol açtğı bilinmektedir (Katzin ve diğ., 1972). İzometriler kullanılarak Einstein alan denklemlerinin (EFE) çözümlerinin sınıflanması üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Kramer ve diğ., 1980). Qadir ve arkadaşlarının (Qadir ve Ziad, 1995) yaklaşımında, izometrilerle uzay-zamanlar sınıflanmakta ve farklı uzay zaman metrikleri için tam bir liste verilmektedir. Uzay zamanların izometrilerle sınıflanmasının önemli olması yanında; Katzin ve arkadaşları (Katzin ve diğ., 1969), madde alanının simetrilerinin (Ricci tensörünün Lie türevinin sıfır olduğu yöndeki) Ricci kollinasyonları (RC) ile verildiğini iddia etmişlerdir. Statik küresel simetrik metriklerin RC ler cinsinden sınıflamaları yapılmıştır (Bokhari ve diğ. 1992, 1993, 1994).

Einstein tarafından 1915 yılında ortaya konulan Genel Relativite Teorisi (GRT) çerçevesinde uzay-zamanların eğrilik simetrileri incelenmektedir (Bokhari ve diğ., 1992, 1993, 1994, 1996, 1997, 2003). Genel durumda, simetrilerin çok fazla özelliği vardır ve bu özellikler sonlu boyutlu Lie cebri ile ifade edilebilirler (Hall, 2004). Katzin ve arkadaşları (Katzin ve Levine, 1972), aynı zamanda, $R^{a}{}_{bcd}$ Riemann eğrilik tensörünün (Lie türevinin sıfır olduğu) eğrilik kollinasyonları (CC) denilen simetrilerinin genel relativiteye yeni bakış açısı sağladığını savunmuşlardır. RC'ler ve CC'ler arasında bir teorem vermelerine rağmen, uzay-zamanları CC'lerine göre sınıflamak için herhangi bir teşebbüste bulunmamışlardır.

Bu tezde; statik küresel simetrik uzay-zamanlara ait eğrilik kollinasyonlar incelenirken, eğrilik tensörüne ait rank argümanı dikkate alınacaktır (Hall ve Costa, 1991). CC denklem sisteminin karışıklığı akılda tutularak; statik küresel simetrik uzay-zamanların Riemann tensör matrisine ait rank durumları belirlenip bu durumlarda ortaya çıkan CC'ler elde edilecektir.

BÖLÜM 2
EĞRİLİK SİMETRİLERİ

Riemanian manifoldu (M,g) üzerinde; ψ skaler fonksiyon ve $\pounds_{\vec{\xi}}$, $\vec{\xi}$ vektör alanı yönünde Lie türev operatörü olmak üzere,

$$\pounds_{\vec{\xi}}\Omega = 2\psi\Omega + K \tag{2.1}$$

Ω ve K simetri koşulunu sağlayan ve aynı türden olmayan geometrik veya fiziksel nesneler olsun. Burada simetriyi $\vec{\xi} = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ vektör alanı doğurur. En önemli ve yaygın simetriler Ω'nın Riemann geometrisi ve Einstein Teorisinde ortaya çıkan temel tensör alanlarından birisi olduğu durumdaki simetrilerdir.

2.1 Metrik Tensörün Simetrileri

Einstein alan denklemleri (EFE); uzay-zaman koordinatlarında, 10 tane ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemden oluştukları için bu denklemlerin kesin çözümlerini elde etmek oldukça zordur. Metrik tensörün bazı geometrik simetri özellikleri olduğunu kabul edilirse, çözüm bir dereceye kadar kolaylaşabilir.

Eğer (2.1) denkleminde $\Omega = g$ ve K=0 ise $\vec{\xi}$ konformal killing vektör alanıdır. Konformal hareketler, g_{ab} metrik tensörü bileşeni cinsinden

$$\pounds_{\vec{\xi}} g_{ab} = 2\psi g_{ab} \tag{2.1.1}$$

veya

$$\pounds_{\vec{\xi}} g^{ab} = 2\psi g^{ab} \tag{2.1.2}$$

denklemleri ile ifade edilir (Katzin ve ark, 1969). Burada $\psi_{;ab} \neq 0$ ise $\vec{\xi}$ vektör alanına proper konformal killing vektör (CKV) alanı; $\psi_{;ab} = 0$ ve $\psi_{;a} \neq 0$ ise özel konformal killing vektör (SCKV) alanı denir. Bunlar matematiksel fizik ve kozmolojide birçok uygulamaya sahip oldukları için fiziksel açıdan çok önemlidirler. Eğer $\psi_{;a} = 0$ ve $\psi = 0$ ise $\vec{\xi}$ sırasıyla, homotatik vektör (HV) alanı ve Killing vektör

(KV) alanı adını alır. Metrik tensörün invaryant olduğu simetrilere, hareket veya izometriler denir. İzometri, bir vektörün uzunluğunu koruduğu için katı hareket olarak adlandırılır.

Killing denklemlerinin bir çözümü varsa uzay-zaman bir hareket simetrisine ya da izometriye sahip denir. Einstein alan denklemlerinin farklı simetri yapılarında birçok çözümü vardır (Petrov, 1969). Ayrıca bu çözümler, özelliklerine ve onların izin verdiği hareket gruplarına göre sınıflandırılmışlardır (Kramer ve ark., 1980).

2.2 Eğrilik Kollinasyon Simetrileri

Riemann geometrisinde uzay-zaman metriğinin yanı sıra Γ^a_{bc}, R_{ab} ve $R^a{}_{bcd}$ gibi tensör bileşenlerinin de cebirsel özellikleri, uzay-zamanın geometrik yapısının anlaşılmasında önemli rol oynarlar.

$$£_{\vec{\xi}}\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ab}\left[\left(£_{\vec{\xi}} g_{bd}\right)_{;c} + \left(£_{\vec{\xi}} g_{cd}\right)_{;b} - \left(£_{\vec{\xi}} g_{bc}\right)_{;d}\right] \qquad (2.2.1)$$

şeklindedir. (2.1.1), (2.2.1) de kullanılırsa

$$£_{\vec{\xi}}\Gamma^a_{bc} = \delta^a_b \psi_{,c} + \delta^a_c \psi_{,b} - g_{bc}\psi^{,a} \qquad (2.2.2)$$

denklemi elde edilir. (2.2.2) denklemini sağlayan bir $\vec{\xi}$ vektör alanı varsa; uzay-zaman bir konformal kollinasyona izin veriyor denir. Riemann eğrilik tensörü,

$$R^a{}_{bcd} \equiv \Gamma^a{}_{bd,c} - \Gamma^a{}_{bc,d} + \Gamma^a{}_{ec}\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{ed}\Gamma^e{}_{bc} \qquad (2.2.3)$$

bileşenlerinden;

$$£_{\vec{\xi}} R^a{}_{bcd} = \left(£_{\vec{\xi}}\Gamma^a_{bd}\right)_{;c} - \left(£_{\vec{\xi}}\Gamma^a_{bc}\right)_{;d} \qquad (2.2.4)$$

olur. Böylece (2.1.2), (2.2.4) de kullanılarak

$$£_{\vec{\xi}} R^a{}_{bcd} = 2\delta^a_{[d}\psi_{;|b|c]} + 2g_{b[c}\psi^a{}_{;d]} \qquad (2.2.5)$$

elde edilir. (2.2.5) in a ve c indislerine göre kontraksiyonu alınırsa

$$£_{\vec{\xi}} R_{ab} = -2\psi_{ab} - g_{ab}\Box\psi \qquad (2.2.6)$$

olur, burada $\Box\psi = g^{ab}\psi_{;ab}$ dir (Laplace operatörü). R eğrilik skalerine $£_{\vec{\xi}}$ Lie türev operatörü uygulanır ve (2.1.2) ve (2.2.6) kullanılırsa

$$£_{\vec{\xi}} R = -2\psi R - 6\Box\psi \qquad (2.2.7)$$

bulunur. G_{ab} Einstein tensörünün $\vec{\xi}$ vektör alan yönündeki Lie türevi

$$£_{\vec{\xi}} G_{ab} = -2\psi_{;ab} + 2g_{ab}\Box\psi \qquad (2.2.8)$$

dir. Eğer $\psi_{;a} = 0$ ve $\psi = 0$ ise (2.2.2) denklemini sağlayan $\vec{\xi}$ vektör alanına Affine kollinasyon (AC) denir. Eğer $\psi_{;ab} = 0$ veya $\psi_{;a} = 0$ veya $\psi = 0$ ise (2.2.5) ve (2.2.6) denklemlerini sağlayan $\vec{\xi}$ vektör alanı sırasıyla eğrilik kollinasyon (CC) ve Ricci kollinasyon (RC) adı verilir.

Eğrilik kollinasyonlarının çalışılmasında önemli bir kavram, eğrilik tensörüne aitrank'dır. Herhangi bir noktada eğrilik tensörü 6x6 matris şeklinde gösterilebilir. Bir *p* noktasındaki eğriliğin rank'ı, *p* deki bu 6x6 matrisin rankı'ı yani p deki bütün bivektörlerin vektör uzayınıkendisine taşıyan lineer *f* dönüşümünün rank'ı olarak tanımlıdırç *f* lineer dönüşümü, her bir *F* bivektörü için

$$f\colon F_{ab} \to R_{abcd}F^{cd}$$

şeklinde verilmektedir. Bu dönüşüm

$$R_{abcd}k^{d} = 0 \qquad (2.2.9)$$

koşulunu sağlayan, *p* noktasında *M* manifolduna teğet T_pM uzayının S_p alt uzayı ile yakından ilişkili olup *k*, T_pM nin elemanıdır. *p* deki eğrilik tensörü, aşağıdaki cebirsel sınıflardan birini kesin olarak sağlar (Hall ve Costa, 1991):

(i). Rank 2 olduğunda S_p nin boyutu sıfır yani $\dim S_p = 0$ dır.

(ii). Rank 2 veya 3 olduğunda (2.2.9) denkleminin yalnız bir tane *k* çözümü mevcuttur. Dolayısıyla ve S_p nin boyutu $\dim S_p = 1$ dir.

(iii). Eğrilik tensör matrisinin rank'ı 1 olup (2.2.9) denklemi iki bağımsız çözüme izin verir. Bu durumda $\dim S_p = 2$ alınmaktadır.

(iv). Eğrilik tensör matrisinin rank'ı 0 olup (dolayısıyla $R_{abcd} = 0$) $\dim S_p = 4$ dür.

(v). Yukarıdaki (i), (ii), (iii) ve (iv) koşulları sağlanmıyor yani rank 6,5,4 veya rank 3 iken $\dim S_p = 0$ ise Riemann tensörü bu sınıfa aittir denir.

BÖLÜM 3

KÜRESEL SİMETRİK STATİK UZAY-ZAMANLARIN EĞRİLİK KOLLİNASYON SİMETRİLERİ

3.1 Eğrilik Kollinasyon Denklemleri

Statik küresel simetrik uzay zaman metriği,

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dr^2 + e^{\rho}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \qquad (3.1.1)$$

ile verilmektedir. Burada $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $\rho = \rho(r)$ dır. (1) metriğine ait $R^a{}_{bcd}$ Riemann eğrilik tensör bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\begin{array}{lll} R^1{}_{212} = -e^{\rho-\lambda} B & R^1{}_{313} = -\sin^2\theta\, e^{\rho-\lambda} B & R^1{}_{010} = e^{\nu-\lambda} A \\ R^2{}_{112} = B & R^2{}_{323} = \sin^2\theta\, C & R^2{}_{020} = D \\ R^3{}_{113} = B & R^3{}_{223} = -C & R^3{}_{030} = D \\ R^0{}_{110} = A & R^0{}_{220} = e^{\rho-\nu} D & R^0{}_{330} = \sin^2\theta\, e^{\rho-\nu} D \end{array} \qquad (3.1.2)$$

Burada A,B,C ve D

$$A \equiv \frac{1}{4}(2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda') \qquad (3.1.3)$$

$$B \equiv \frac{1}{4}(2\rho'' + \rho'^2 - \rho'\lambda') \qquad (3.1.4)$$

$$C \equiv \frac{1}{4}(4 - \rho'^2 e^{\rho-\lambda}) \qquad (3.1.5)$$

$$D \equiv \frac{1}{4}\rho'\nu' e^{\nu-\lambda} \qquad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır. 6x6 simetrik matris olarak yazılabilen R_{abcd} Riemann tensör bileşenleri

$$R_{0101} = e^{\nu} A,\ R_{0202} = e^{\rho} D,\ R_{0303} = \sin^2\theta e^{\rho} D,$$

$$R_{1212} = -e^{\rho} B,\ R_{1313} = -\sin^2\theta e^{\rho} B,\ R_{2323} = \sin^2\theta e^{\rho} C$$

eşitlikleri ile verilmektedir. Tüm indisleri kovaryant olan bu Riemann tensörü matris olarak

$$R_{IJ} = R_{abcd} = \begin{pmatrix} e^{\nu}A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\rho}D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\theta e^{\rho}D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\rho}B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin^2\theta e^{\rho}B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin^2\theta e^{\rho}C \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $IJ \in \{01, 02, 03, 12, 13, 23\}$ dir. Eğer $\vec{\xi}$ vektör alanı yönünde $R^a{}_{bcd}$ 'nin Lie türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$£_{\xi} R^a{}_{bcd} = 0 \tag{3.1.7}$$

CC denklemi elde edilir. Bu denklemi daha açık şekilde kısmi türevli haliyle şöyle yazabiliriz;

$$R^a{}_{bcd,e}\xi^e + R^a{}_{ecd}\xi^e{}_{,b} + R^a{}_{bed}\xi^e{}_{,c} + R^a{}_{bce}\xi^e{}_{,d} - R^e{}_{bcd}\xi^a{}_{,e} = 0 \tag{3.1.8}$$

(3.1.8) ile verilen CC denklem sistemi, dört-boyutlu uzayda 256 tane denklemden oluşmaktadır. Küresel simetrik ve statik (3.1.1) metriği için 45 tane sıfır olmayan bağımsız CC denklemi vardır. Bu denklemler aşağıdaki şekilde kısa olarak yazılabilir.

$$f\xi^0{}_{,\alpha} = 0 \tag{3.1.9}$$

$$f\xi^{\alpha}{}_{,0} = 0 \tag{3.1.10}$$

$$h\xi^{\alpha}{}_{,\beta} = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{3.1.11}$$

$$h_{1uv}(Ae^{-\lambda})'\xi^1 + (Ae^{-\lambda})£_{\xi} h_{1uv} = 0 \tag{3.1.12}$$

$$h_{2pq}(Ce^{-\rho})'\xi^1 + (Ce^{-\rho})£_{\xi} h_{2pq} = 0 \tag{3.1.13}$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(Be^{-\lambda})'\xi^1 + (Be^{-\lambda})£_{\xi} \tilde{g}_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.1.14}$$

$$\bar{g}_{mn}(De^{-\nu})'\xi^1 + (De^{-\upsilon})£_{\xi} \bar{g}_{mn} = 0 \tag{3.1.15}$$

$$Ag_{00}\xi^0{}_{,p} + Bg_{33}\xi^p{}_{,t} = 0 \tag{3.1.16}$$

$$Ag_{00}\xi^1{}_{,p} - Dg_{33}\xi^p{}_{,r} = 0 \tag{3.1.17}$$

$$Bg_{22}\xi^1{}_{,p} \pm Cg_{33}\xi^p{}_{,r} = 0, \qquad (p = 2 \;\; için \;\; "-"\,;\; p = 3 \;\; için \;\; "+") \tag{3.1.18}$$

$$Dg_{22}\xi^0{}_{,p} \pm Cg_{33}\xi^p{}_{,t} = 0, \qquad (p = 2 \;\; için \;\; "+"\,;\; p = 3 \;\; için \;\; "-") \tag{3.1.19}$$

$$D\xi^0{}_{,r} + B\xi^1{}_{,t} = 0 \tag{3.1.20}$$

Burada f, h, h_{1uv}, h_{2pq}, $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ ve $\bar{g}_{mn}$,

$$f=\begin{cases} Be^{\nu}-De^{\lambda}, & \alpha=1 \quad için \\ A-B \quad veya \quad C+e^{\rho-\nu}D, & \alpha=2,3 \quad için \end{cases} \tag{3.1.21}$$

$$h=Be^{\rho-\lambda}+C \ veya \ Ae^{\nu-\lambda}, \ \{(\alpha,\beta)\}=\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\} \quad için \tag{3.1.22}$$

$$h_{1uv}=diag(-e^{\nu},e^{\lambda}), \quad u,v=0,1 \tag{3.1.23}$$

$$h_{2pq}=diag(e^{\rho},\sin^2\theta e^{\rho}), \qquad p,q=2,3 \tag{3.1.24}$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}=diag(e^{\lambda},e^{\rho},\sin^2\theta e^{\rho}), \quad \alpha,\beta=1,2,3 \tag{3.1.25}$$

$$\bar{g}_{mn}=diag(-e^{\nu},e^{\rho},\sin^2\theta\, e^{\rho}), \qquad m,n=0,2,3 \tag{3.1.26}$$

olarak tanımlıdırlar. Bu uzay zaman için

$$\xi^0=\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.1.27}$$

$$\xi^0=\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{3.1.28}$$

$$\xi^0=\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{3.1.29}$$

$$\xi^0=\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{3.1.30}$$

şeklinde minimum dört tane bağımsız Killing Vektör vardır.

3.2 Eğrilik Kollinasyon Denklemlerinin Bazı Çözümleri

Bu bölümde CC denklemleri; Einstein, Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, De Sitter, Anti De Sitter ve Bertotti Robinson metrikleri için belirlenecek ve bu denklemlerden simetriyi doğuran CC vektör bileşenleri elde edilecektir.

3.2.1 Einstein Uzay-Zamanı

Einstein uzay-zamanı için (3.1.1) metriğinde;

$$e^{\nu}=1, \qquad e^{\lambda}=\frac{R^2}{R^2-r^2}, \qquad e^{\rho}=r^2, \tag{3.2.1.1}$$

alınmaktadır. Böylece (3.1.3)-(3.1.6) kullanılarak;

$$A=0, \qquad B=-\frac{1}{R^2-r^2}, \qquad C=\frac{r^2}{R^2}, \qquad D=0 \tag{3.2.1.2}$$

elde edilir. A ve D'nin sıfır olması bize rank(R_{IJ})=3 durumunu verir. Böylece; (3.1.9)-(3.1.20) denklemlerinden Einstein metriği için CC denklemleri:

$$\xi^0,_r=0, \quad \xi^0,_\theta=0, \quad \xi^0,_\phi=0 \tag{3.2.1.3}$$

$$\xi^1,_t=0, \quad \xi^2,_t=0, \quad \xi^3,_t=0 \tag{3.2.1.4}$$

$$\xi^2,_\phi+\sin^2\theta\,\xi^3,_\theta=0 \tag{3.2.1.5}$$

$$\xi^1+r\xi^2,_\theta=0 \tag{3.2.1.6}$$

$$r\xi^1+(R^2-r^2)\xi^1,_r=0 \tag{3.2.1.7}$$

$$\xi^1+r(\cot\theta\,\xi^2+\xi^3,_\phi)=0 \tag{3.2.1.8}$$

$$\xi^1,_\theta+r^2(1-\frac{r^2}{R^2})\xi^2,_r=0 \tag{3.2.1.9}$$

$$\xi^1,_\phi+r^2(1-\frac{r^2}{R^2})\sin^2\theta\,\xi^3,_r=0 \tag{3.2.1.10}$$

şeklini alır. (3.2.1.3)- (3.2.1.4)denklemlerinden;

$$\xi^0=\xi^0(t), \quad \xi^\alpha=\xi^\alpha(r,\theta,\phi), \quad \alpha=1,2,3 \tag{3.2.1.11}$$

olur. (3.2.7) denkleminden,

$$\xi^1=\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}F(\theta,\phi) \tag{3.2.1.12}$$

bulunur. Burada $F(\theta,\phi)$ integrasyon fonksiyonudur. Şimdi elde edilen ξ^1'in θ ya göre türevini alıp (3.2.1.9) denkleminde yerine yazar ve çözüm yaparsak,

$$\xi^2=\frac{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{r}F(\theta,\phi),_\theta+G(\theta,\phi) \tag{3.2.1.13}$$

elde edilir. Burada $G(\theta,\phi)$ integrasyon fonksiyonudur. Böylece; ξ^1 ve ξ^2 (3.2.1.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{r}\left[F(\theta,\phi),_{\theta\theta}+F(\theta,\phi)\right]+G(\theta,\phi),_\theta=0 \tag{3.2.1.14}$$

olur. Bu eşitliğin sağlanması için,

$$G(\theta,\phi)_{,\theta}=0, \quad F(\theta,\phi)_{,\theta\theta}+F(\theta,\phi)=0 \tag{3.2.1.15}$$

olmalıdır. Bu denklemlerin çözümü,

$$G=G_1(\phi), \qquad F=F_1(\phi)\cos\theta+F_2\left(\phi\right)\sin\theta \tag{3.2.1.16}$$

şeklinde bulunur. Burada $G_1(\phi)$, $F_1(\phi)$ ve $F_2\left(\phi\right)$ integrasyon fonksiyonlarıdır. (3.2.1.16), (3.2.1.12) ve (3.2.1.13) de kullanılıp elde edilen ξ^1 ve ξ^2 ler (3.2.1.10) denkleminde yerine yazılır ve çözüm yapılırsa;

$$\xi^3=\frac{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{r\sin^2\theta}\left[\cos\theta\, F_1(\phi)_{,\phi}+\sin\theta\, F_2(\phi)_{\phi}\right]+H(\theta,\phi) \tag{3.2.1.17}$$

elde edilir. (3.2.1.16) sonucu dikkate alınarak ξ^2 ve ξ^3, (3.2.1.5) denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$F_1(\phi)_{,\phi}=0, \qquad H(\theta,\phi)_{,\theta}=-\frac{1}{\sin^2\theta}G_1(\phi)_{,\phi} \tag{3.2.1.18}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemin çözümünden; c_1 sabit ve $E(\phi)$ integrasyon fonksiyonu olmak üzere

$$F_1=c_1, \qquad H(\theta,\phi)=\cot\theta\, G_1(\phi)_{,\phi}+E(\phi) \tag{3.2.1.19}$$

elde edilir. (3.2.1.16) ve (3.2.1.19) denklemleri dikkate alınarak ξ^1, ξ^2 ve ξ^3 bileşenleri (3.2.1.8) denkleminde kullanılırsa;

$$\begin{aligned} F_2 &= c_2\cos\phi+c_3\sin\phi \\ E &= c_6 \\ G_1 &= c_4\cos\phi+c_5\sin\phi \end{aligned} \tag{3.2.1.20}$$

bulunur. Burada c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 integrasyon sabitleridir. Böylece; (3.2.1.16), (3.2.1.19) ve (3.2.1.20) sonuçları (3.2.1.12), (3.2.1.13) ve (3.2.1.17) ile verilen ξ^1,

ξ^2 ve ξ^3 ifadelerinde yerlerine yazıldığında, CC vektör bileşenleri,

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = \xi(t)\\
&\xi^1 = \sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}(c_1\cos\theta + \sin\theta(c_2\cos\phi + c_3\sin\phi))\\
&\xi^2 = \frac{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{r}\left[-c_1\sin\theta + \cos\theta(c_2\cos\phi + c_3\sin\phi)\right] + c_4\cos\phi + c_5\sin\phi\\
&\xi^3 = \frac{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{r\sin\theta}\left[-c_2\sin\phi + c_3\cos\phi\right] + \cot\theta\left[-c_4\sin\phi + c_5\cos\phi\right] + c_6
\end{aligned} \tag{3.2.1.21}$$

olur.

3.2.2 Schwarzschild Uzay-Zamanı

Bu uzay-zaman için (3.1.1) metrik katsayıları;

$$e^{\upsilon} = 1-\frac{2m}{r}, \qquad e^{\lambda} = \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}, \qquad e^{\rho} = r^2, \tag{3.2.2.1}$$

alınmaktadır. Bu eşitlikler, (3.1.3)-(3.1.6) dikkate alındığında;

$$A = -\frac{2m}{r^3\left(1-\frac{2m}{r}\right)}, \quad B = \frac{m}{r^3\left(1-\frac{2m}{r}\right)}, \quad C = \frac{2m}{r}, \quad D = \frac{m}{r^3}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \tag{3.2.2.2}$$

ifadelerini verir. Burada hiçbir Riemann tensör bileşeni sıfır olmadığı için, Riemann tensör matrisine ait rank 6 olmaktadır. (3.1.9)-(3.1.20) denklemlerinden Schwarzschild metriği için CC denklemleri,

$$\xi^0{}_{,r} = 0, \quad \xi^0{}_{,\theta} = 0, \quad \xi^0{}_{,\phi} = 0, \tag{3.2.2.3}$$

$$\xi^1{}_{,t} = 0, \quad \xi^1{}_{,\theta} = 0, \quad \xi^1{}_{,\phi} = 0, \tag{3.2.2.4}$$

$$\xi^2{}_{,t} = 0, \quad \xi^2{}_{,r} = 0, \tag{3.2.2.5}$$

$$\xi^3{}_{,t} = 0, \quad \xi^3{}_{,r} = 0, \tag{3.2.2.6}$$

$$\xi^2{}_{,\phi} + \sin^2\theta\,\xi^3{}_{,\theta} = 0 \quad , \tag{3.2.2.7}$$

$$\left[B' + B(\rho-\lambda)'\right]\xi^1 + 2B\xi^2{}_{,\theta} = 0, \tag{3.2.2.8}$$

$$\left[B' + B(\rho-\lambda)'\right]\xi^1 + 2B(\cot\theta\,\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi}) = 0, \tag{3.2.2.9}$$

$$\left[A' + A(\nu - \lambda)'\right]\xi^1 + 2A\xi^o,_t = 0\,, \tag{3.2.2.10}$$

$$B'\xi^1 + 2B\xi^1,_r = 0\,, \tag{3.2.2.11}$$

$$C'\xi^1 + 2C(\cot\theta\xi^2 + \xi^3,_\phi) = 0 \tag{3.2.2.12}$$

$$D'\xi^1 + 2D\xi^0,_t = 0\,, \tag{3.2.2.13}$$

$$C'\xi^1 + 2C\xi^2,_\theta = 0\,, \tag{3.2.2.14}$$

$$A'\xi^1 + 2A\xi^1,_r = 0\,, \tag{3.2.2.15}$$

$$\left[D' + D(\rho - \nu)'\right]\xi^1 + 2D\xi^2,_\theta = 0\,, \tag{3.2.2.16}$$

$$\left[D' + D(\rho - \nu)'\right]\xi^1 + 2D(\cot\theta\,\xi^2 + \xi^3,_\phi = 0\,, \tag{3.2.2.17}$$

şeklinde bulunur. (3.2.2.3)- (3.2.2.6) denklemlerinden

$$\xi^0 = \xi^0(t),\;\; \xi^1 = \xi^1(r),\;\; \xi^2 = \xi^2(\theta,\phi),\;\; \xi^3 = \xi^3(\theta,\phi)$$

elde edilir. $A = -2B$ olduğundan (3.2.2.11) ve (3.2.2.15) denklemleri aynıdır. (3.2.2.8) ve (3.2.2.14) denklemlerinden

$$C = e^{\rho-\lambda}B$$

bulunur. (3.2.2.14) ve (3.2.2.16) denklemleri incelenirse

$$C = e^{\rho-\nu}D$$

elde edilir. Böylece

$$D = e^{\nu-\lambda}B$$

olur. Buradan (3.2.2.8), . (3.2.2.14) ve (3.2.2.16)'nın aynı denklem olduğu anlaşılır. Aynı şekilde (3.2.2.9), . (3.2.2.12) ve (3.2.2.17) denklemlerinin de özdeş olduğu görülmektedir. (3.2.2.15) denkleminden, c_1 integrasyon sabiti olmak üzere,

$$\xi^1 = \frac{c_1}{\sqrt{A}} \tag{3.2.2.18}$$

bulunur. (3.2.2.14) denkleminde ξ^1 kullanıldığında,

$$\frac{C'}{2C}\frac{c_1}{\sqrt{A}} = c_2 \tag{3.2.2.19}$$

$$\xi^2 = -c_2\theta + f_1(\phi) \tag{3.2.2.20}$$

elde edilir. Bulunan ξ^2 bileşeni (3.2.2.7) denkleminde kullanıldığında;

$$\xi^3 = \cot\theta\, f_1(\phi)_{,\phi} + f_2(\phi) \tag{3.2.2.21}$$

bulunur. ξ^1, ξ^2, ξ^3 bileşenleri ve (3.2.2.9) kısıtlama denklemi (3.2.2.12) de kullanılırsa

$$\cot\theta(f_1(\phi)_{,\phi\phi} + f_1(\phi)) + c_2(1-\theta\cot\theta) + f_2(\phi)_{,\phi} = 0 \tag{3.2.2.22}$$

olur. Bu denklemin sağlaması için

$$f_1(\phi) = c_3\cos\phi + c_4\sin\phi, \qquad c_2 = 0, \qquad f_2 = c_5$$

olmalıdır. (3.2.2.19) kısıtlama denkleminden;

$$\frac{C'}{2C}\frac{c_1}{\sqrt{A}} = 0 \tag{3.2.2.23}$$

bulunur. Bu denklemden A, C' ve C sıfır olmadığı için $c_1 = 0$ sonucu çıkar. Böylece $\xi^1 = 0$ olur. (3.2.2.13) denkleminden,

$$\xi^0 = c_0$$

elde edilir. Bu nedenle; (3.2.2.10) denklemi özdeş olarak sağlanmaktadır. Sonuç olarak $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= c_0 \\
\xi^1 &= 0 \\
\xi^2 &= c_1\cos\phi + c_2\sin\phi \\
\xi^3 &= \cot\theta\left[-c_1\sin\phi + c_2\cos\phi\right] + c_3
\end{aligned} \tag{3.2.2.24}$$

şeklini almaktadır.

3.2.3 Reissner-Nordstörm Uzay-Zamanı

(3.1.1) metriğinde

$$e^{\upsilon} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}, \qquad e^{\lambda} = e^{-\nu}, \qquad e^{\rho} = r^2, \tag{3.2.3.1}$$

alındığında Reissner-Nordstörm uzay-zaman ifadesi verilmiş olur. Bu metrik katsayıları (3.1.3)-(3.1.6) da kullanılarak *A, B, C* ve *D* için

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{2(mr - 6\pi Q^2)}{r^2\left(r^2 - 2mr + 4\pi Q^2\right)}, \qquad & B &= \frac{mr - 4\pi Q^2}{r^2\left(r^2 - 2mr + 4\pi Q^2\right)} \\
C &= \frac{2(mr - 2\pi Q^2)}{r^2}, \qquad & D &= \frac{\left(r^2 - 2mr + 4\pi Q^2\right)\left(mr - 4\pi Q^2\right)}{r^6}
\end{aligned} \tag{3.2.3.2}$$

elde edilir. Böylece; A, B, C ve D lerden hiçbirinin sıfır olmaması nedeniyle, bu durumda rank(R_{IJ})=6 ya olmaktadır. Bu nedenle önceki bölümde elde edilen CC denklemleri ve dolayısıyla aynı CC vektörleri elde edilir.

3.2.4 De Sitter ve Anti De Sitter Uzay-Zamanları

De Sitter ve Anti De Sitter uzay-zamanı için (3.1.1) metriğinde

$$e^{\upsilon} = 1 \pm \frac{r^2}{R^2}, \qquad e^{\lambda} = e^{-\nu}, \qquad e^{\rho} = r^2, \tag{3.2.4.1}$$

alınmakta olup bu ifadeler; (3.1.3)-(3.1.6) eşitliklerinde kullanıldığında

$$A = \pm \frac{1}{R^2 + r^2}, \; B = \pm \frac{1}{R^2 + r^2}, \; C = \pm \frac{r^2}{R^2}, \; D = \pm \frac{R^2 + r^2}{R^4} \tag{3.2.4.2}$$

bulunur. Buradan rank(R_{IJ})=6 sonucu çıkar. Böylece (3.2.1) bölümünde elde edilen aynı CC denklemleri ve bu nedenle (3.2.2.24) CC vektör bileşenleri, bu uzay-zamanlar için aynı şekilde geçerlidir.

3.2.5 Bertotti –Robinson Uzay-Zamanları

Birinci tür Bertotti-Robinson uzay-zamanı (Bertotti-Robinson **1**) için (3.1.1) metriğinde

$$e^{\nu} = (B + r)^2, \qquad e^{\lambda} = 1, \qquad e^{\rho} = a^2, \tag{3.2.5.1}$$

alınmaktadır. Bu sonuçları (3.1.3)-(3.1.6) eşitliklerinde kullanacak olursak

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 1, \qquad D = 0 \tag{3.2.5.2}$$

bulunur. Burada sadece C sıfırdan farklı olduğu için Riemann tensör matrisine ait rank 1 dir. (3.1.9) ile (3.1.20) arasındaki CC denklemleri, birinci tür Bertotti-Robinson metriği aşağıdaki sisteme indirgenmektedir:

$$\xi^0{}_{,\theta} = 0, \;\; \xi^0{}_{,\phi} = 0 \tag{3.2.5.3}$$

$$\xi^1{}_{,\theta} = 0, \;\; \xi^1{}_{,\phi} = 0 \tag{3.2.5.4}$$

$$\xi^2{}_{,t} = 0, \;\; \xi^2{}_{,r} = 0, \;\; \xi^2{}_{,\theta} = 0 \tag{3.2.5.5}$$

$$\xi^3{}_{,t} = 0, \;\; \xi^3{}_{,r} = 0 \tag{3.2.5.6}$$

$$\xi^2{}_{,\phi} + \sin^2\theta\xi^3{}_{,\theta} = 0 \qquad (3.2.5.7)$$

$$\cot\theta\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi} = 0 \qquad (3.2.5.8)$$

(3.2.5.3)-(3.2.5.6) denklemlerinden

$$\xi^0 = \xi^0(t,r),\ \ \xi^1 = \xi^1(r,r),\ \ \xi^2 = \xi^2(\phi),\ \ \xi^3 = \xi^3(\theta,\phi)$$

bulunur. (3.2.5.8) denkleminden

$$\xi^3 = \cot\theta\xi^2{}_{,\phi} + f(\phi) \qquad (3.2.5.9)$$

elde edilir. Bu bileşen (3.2.5.7)'de kullanılırsa

$$\cot\theta(\xi^2{}_{,\phi\phi} + \xi^2) + f(\phi)_{,\phi} = 0 \qquad (3.2.5.10)$$

olur. Bu eşitliğinin sağlaması için

$$\xi^2{}_{,\phi\phi} + \xi^2 = 0, \qquad f(\phi)_{,\phi} = 0$$

olmalıdır. Böylece

$$\xi^2 = c_1\cos\phi + c_2\sin\phi, \qquad f = c_3$$

çözümleri elde edilir. Sonuç olarak CC vektör alanı bileşenleri

$$\begin{aligned} \xi^0 &= G(r,t) \\ \xi^1 &= F(r,t) \\ \xi^2 &= c_1\cos\phi + c_2\sin\phi \\ \xi^3 &= \cot\theta\left[-c_1\sin\phi + c_2\cos\phi\right] + c_3 \end{aligned} \qquad (3.2.5.11)$$

şeklini alır.

İkinci tür Bertotti-Robinson uzay-zamanı (Bertotti-Robinson **2**) için metrik katsayıları

$$e^{\nu} = \cos^2(c + \sqrt{\alpha}r), \qquad e^{\lambda} = 1, \qquad e^{\rho} = a^2, \qquad (3.2.5.12)$$

şeklindedir. Bunlar (3.1.3)-(3.1.6) eşitliklerinde kullanıldığında

$$A = -\alpha, \qquad B = 0, \qquad C = 1, \qquad D = 0 \qquad (3.2.5.13)$$

olur. Bu durum da Riemann tensör matrisine ait rank 2 dir. (3.1.9)-(3.1.20) CC denklemleri ikinci tür Bertotti-Robinson metriği için

$$\xi^0{}_{,\theta} = 0,\ \ \xi^0{}_{,\phi} = 0 \qquad (3.2.5.14)$$

$$\xi^1{}_{,r} = 0,\ \ \xi^1{}_{,\theta} = 0,\ \ \xi^1{}_{,\phi} = 0 \qquad (3.2.5.15)$$

$$\xi^2{}_{,t} = 0,\ \ \xi^2{}_{,r} = 0,\ \ \xi^2{}_{,\theta} = 0 \qquad (3.2.5.16)$$

$$\xi^3{,_t} = 0, \quad \xi^3{,_r} = 0 \tag{3.2.5.17}$$

$$\xi^2{,_\phi} + \sin^2\theta\xi^3{,_\theta} = 0 \tag{3.2.5.18}$$

$$\cot\theta\xi^2 + \xi^3{,_\phi} = 0 \tag{3.2.5.19}$$

$$\frac{\nu'}{2}\xi^1 + \xi^0{,_t} = 0 \tag{3.2.5.20}$$

$$\xi^0{,_r} - e^{-\nu}\xi^1{,_t} = 0 \tag{3.2.5.21}$$

şeklinde bulunur. (3.2.5.14)-(3.2.5.17) denklemlerinden

$$\xi^0 = \xi^0(t,r), \; \xi^1 = \xi^1(t), \; \xi^2 = \xi^2(\phi), \; \xi^3 = \xi^3(\theta,\phi)$$

sonucu çıkar. (3.2.5.19) denkleminden

$$\xi^3 = \cot\theta\xi^2{}_{,\phi} + f(\phi) \tag{3.2.5.22}$$

bulunur. Bu bileşen (3.2.5.18) denkleminde kullanılırsa

$$\cot\theta(\xi^2{}_{,\phi\phi} + \xi^2) + f(\phi)_{,\phi} = 0 \tag{3.2.5.23}$$

olur. Bu eşitliğin sağlaması için

$$\xi^2{}_{,\phi\phi} + \xi^2 = 0, \qquad f(\phi)_{,\phi} = 0$$

olmalıdır. Bu kısıtlama denklemlerinin çözümü

$$\xi^2 = c_1\cos\phi + c_2\sin\phi, \qquad f = c_3$$

şeklindedir. (3.2.5.21) denkleminden

$$\xi^0 = \xi^1{,_t}\int e^{-\nu}dr + f_2(t)$$

elde edilir. Elde edilen ξ^0 (3.2.5.20) denkleminde kullanılmasıyla

$$\frac{\xi^1{,_{tt}}}{\xi^1} = -\frac{e^{\nu}\nu''}{2} = \gamma^2 \tag{3.2.5.24}$$

bulunur. Burada γ^2 ayırım sabiti olup $\gamma^2 = 0$, $\gamma^2 > 0$ ve $\gamma^2 < 0$ olasılıkları mevcuttur. $\gamma^2 = 0$ alınıp gerekli işlemler yapılırsa (3.2.5.24) denkleminden

$$\xi^1 = c_4 t + c_5$$

elde edilir. Bulunan ξ^1 bileşeni ξ^0 bileşeninde yerine yazılırsa, elde edilen CC vektör bileşenleri

$$
\begin{aligned}
\xi^0 &= -c_4 \int e^{-\nu} dr + c_6 \\
\xi^1 &= c_4 t + c_5 \\
\xi^2 &= c_1 \cos\phi + c_2 \sin\phi \\
\xi^3 &= \cot\theta \left[-c_1 \sin\phi + c_2 \cos\phi \right] + c_3
\end{aligned}
\tag{3.2.5.25}
$$

şeklinde elde edilir. Aynı şekilde $\gamma^2 > 0$ olasılığı gerekli işlemler yapılırsa

$$
\xi^1 = c_4 \cosh(\gamma t) + c_5 \sinh(\gamma t), \quad \nu = \ln\left(a e^{br} + 2\tilde{\gamma} \right)
$$

olur. CC vektör alan bileşenleri

$$
\begin{aligned}
\xi^1 &= c_4 \cosh(\gamma t) + c_5 \sinh(\gamma t) \\
\xi^0 &= -\frac{\nu'}{2\gamma} \left(c_4 \sinh(\gamma t) + c_5 \cosh(\gamma t) \right) + c_6 \\
\xi^2 &= c_1 \cos\phi + c_2 \sin\phi \\
\xi^3 &= \cot\theta \left[-c_1 \sin\phi + c_2 \cos\phi \right] + c_3
\end{aligned}
\tag{3.2.5.26}
$$

şeklinde olur. $\gamma^2 < 0$ olasılığı için; $\gamma^2 = -\tilde{\gamma}^2$ (burada $\tilde{\gamma}^2 > 0$) alınarak (3.2.5.24) denleminde gerekli işlemler yapılarak

$$
\xi^1 = c_4 \cos(\tilde{\gamma} t) + c_5 \sin(\tilde{\gamma} t), \quad \nu = \ln\left(a e^{br} - 2\tilde{\gamma} \right)
$$

bulunur. Böylece CC vektör alan bileşenleri

$$
\begin{aligned}
\xi^1 &= c_4 \cos(\tilde{\gamma} t) + c_5 \sin(\tilde{\gamma} t) \\
\xi^0 &= \frac{\nu'}{2\tilde{\gamma}} \left(-c_4 \sin(\tilde{\gamma} t) + c_5 \cos(\tilde{\gamma} t) \right) + c_6 \\
\xi^2 &= c_1 \cos\phi + c_2 \sin\phi \\
\xi^3 &= \cot\theta \left[-c_1 \sin\phi + c_2 \cos\phi \right] + c_3
\end{aligned}
\tag{3.2.5.27}
$$

şeklini alır.

Üçüncü tür Bertotti-Robinson uzay-zamanı (Bertotti Robinson **3**) için (3.1.1) metriğinde;

$$
e^{\nu} = \cosh^2(c + \sqrt{\alpha} r) \qquad e^{\lambda} = 1 \qquad e^{\rho} = a^2 \tag{3.2.5.28}
$$

alınmaktadır. Bu eşitlikler (3.1.3)-(3.1.6) denklemlerinde kullanılarak

$$
A = \alpha, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0 \tag{3.2.5.29}
$$

bulunur. İkinci tür Bertotti-Robinson uzay-zamanındaki gibi; bu durumda da rank(R_{IJ})=2 olmaktadır. Bu nedenle ikinci tür Bertotti-Robinson metriği için bulunan CC denklemlerinin aynısı üçüncü tür Bertotti-Robinson metriği için de bulunmaktadır. Böylece; bu durumdaki CC vektör alan bileşenleri (3.2.5.25), (3.2.5.26) veya (3.2.5.27) deki çözümler gibidir. Tek fark; (3.2.5.25), (3.2.5.26) ve (3.2.5.27) çözümlerinde "cot" ve "tan" terimleri yerine "coth" ve "tanh" terimlerinin gelmesidir.

3.3 Eğrilik Kollinasyon Denkleminin Genel Çözümü

Bu bölümde (3.1.9)-(3.1.20) CC denklemlerinden simetriyi doğuran $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri genel olarak elde edilecektir. Bu vektör alan bileşenleri elde edilirken; "6x6 Riemann matrisinin rankı 3'ten büyük iken öz (proper) CC'ler mevcut değildir" (Hall ve Costa, 1991), teoremi dikkate alınacak ve bulunan sonuçlar bu teoreme göre değerlendirilecektir.

Küresel simetrik statik uzay zamanına ait R_{abcd} Riemann eğrilik tensörü

$$R_{abcd} = diag(e^{\nu} A, e^{\rho} D, \sin^2\theta e^{\rho} D, -e^{\rho} B, -\sin^2\theta e^{\rho} B, \sin^2\theta e^{\rho} C) \qquad (3.3.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada 6x6 Riemann eğrilik tensörü matrisinin rank olasılıkları aşağıdaki şekildedir.

Durum (1): Rank(R_{IJ})=1

A=0, B=0, D=0 ve C$\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' = 0,\ \ 2\rho'' + \rho'^2 - \rho'\lambda' = 0$ ve $\rho'\nu' = 0$.

Durum (2): Rank(R_{IJ})=2

a) B=0, D=0 ve A$\neq 0$, C$\neq 0 \Leftrightarrow$ $\rho' = 0,\ \lambda = \lambda(r),\ \nu = \nu(r),\ 2\rho'' + \rho'^2 - \rho'\lambda' = 0$.

b) A=0, B=0, C=0 ve D$\neq 0 \Leftrightarrow$ $\rho'^2 = 4e^{\lambda-\rho},\ 2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' = 0,\ \ 2\rho'' + \rho'^2 - \rho'\lambda' = 0$.

Durum (3): Rank(R_{IJ})=3

a) A=0, D=0 ve B$\neq 0$, C$\neq 0 \Leftrightarrow$ $\nu' = 0,\ \rho = \rho(r),\ \lambda = \lambda(r)$.

b) A=0, B=0 ve C$\neq 0$, D$\neq 0 \Leftrightarrow$ $2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' = 0,\ \ 2\rho'' + \rho'^2 - \rho'\lambda' = 0$.

c) B=0, C=0 ve A$\neq 0$, D$\neq 0 \Leftrightarrow$ $\rho'^2 = 4e^{\lambda-\rho},\quad 2\rho'' + \rho'^2 - \rho'\lambda' = 0$.

Durum (4): Rank(R_{IJ})=4

a) A=0, C=0 ve B$\neq 0$, D$\neq 0 \Leftrightarrow$ $2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' = 0$, $\rho'^2 = 4e^{\lambda-\rho}$.

b) B=0 ve A$\neq 0$, C$\neq 0$, D$\neq 0 \Leftrightarrow$ $2\rho'' + \rho'^2 - \rho'\lambda' = 0$.

Durum (5): Rank(R_{IJ})=5

a) A=0 ve B$\neq 0$, C$\neq 0$, D$\neq 0 \Leftrightarrow$ $2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' = 0$.

b) C=0 ve A$\neq 0$, B$\neq 0$, D$\neq 0 \Leftrightarrow$ $\rho'^2 = 4e^{\lambda-\rho}$.

Durum (6): Rank(R_{IJ})=6

A$\neq 0$, B$\neq 0$, C$\neq 0$, D$\neq 0$.

Şimdi sırasıyla bu durumları inceleyelim:

Durum (1): A=0, B=0, D=0 ve C $\neq$ 0. Bu durumdaki kısıtlamalar

$$2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' = 0\,,\ 2\rho'' + \rho'^2 - \rho'\lambda' = 0\,,\ \rho'\nu' = 0$$

$$C = 1 - \frac{1}{4}\rho'^2 e^{\rho-\lambda} \neq 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece; $\rho' = 0, \nu' \neq 0$ veya $\rho' \neq 0, \nu' = 0$ olasılıkları ortaya çıkmaktadır.

Alt Durum (1.i) $\rho' \neq 0, \nu' = 0 \left(\Leftrightarrow \nu = \nu_0 = sabit\right)$.

Eğer $\rho = 2\ln r$ ise $C'(r) = 0$ (yani $C = sabit$) olmaktadır. Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) CC denklemleri aşağıdaki şekildedir:

$$\xi^0 = \xi^0(t,r),\ \xi^1 = \xi^1(t,r),\ \xi^2 = \xi^2(\theta,\phi),\ \xi^3 = \xi^3(\theta,\phi) \tag{3.3.1}$$

$$\xi^2{}_{,\phi} + \sin^2\theta\,\xi^3{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.2}$$

$$C'\xi^1 + 2C(\cot\theta\,\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.3}$$

$$C'\xi^1 + 2C\xi^2{}_{,\theta} = 0\,. \tag{3.3.4}$$

Böylece (3.3.4) denkleminden,

$$\xi^2{}_{,\theta} = 0 \Rightarrow \xi^2 = \xi^2(\phi)$$

bulunur. (3.3.2) denkleminden

$$\xi^3 = \cot\theta\,\xi^2{}_{,\phi} + f(\phi) \tag{3.3.5}$$

elde edilir. Bu bileşen (3.3.3) denkleminde yerine yazılıp işlem yapıldığında

$$\xi^2{}_{,\phi\phi} + \xi^2 = 0\,, \qquad f(\phi)_{,\phi} = 0 \tag{3.3.6}$$

olmalıdır. Bu eşitliklerin çözümünden

$$\xi^2 = c_1\cos\phi + c_2\sin\phi\,, \qquad f = c_3$$

bulunur. Böylece $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= G(r,t)\\
\xi^1 &= F(r,t)\\
\xi^2 &= c_1\cos\phi + c_2\sin\phi\\
\xi^3 &= \cot\theta\left[-c_1\sin\phi + c_2\cos\phi\right] + c_3
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

şeklini alır.

Eğer $\rho \neq 2\ln r$ ve dolayısıyla $C' \neq 0$ ise, (3.3.4) denkleminden

$$\xi^1 = c_1 \frac{2C}{C'}, \quad (3.3.8)$$

$$\xi^2 = -c_1\theta + f_1(\phi) \quad (3.3.9)$$

bulunur. ξ^2 bileşeni (3.3.2) denkleminde kullanılırsa,

$$\xi^3 = \cot\theta\, f_1(\phi)_{,\phi} + f_2(\phi) \quad (3.3.10)$$

elde edilir. Böylece; bulunan ξ^1, ξ^2 ve ξ^3 bileşenleri (3.3.3) denkleminde yerlerine yazıldığında

$$\cot\theta(f_1(\phi)_{,\phi\phi} + f_1(\phi) - c_1\theta) + f_2(\phi)_{,\phi} + c_1 = 0 \quad (3.3.11)$$

bağıntısının sağlanması gerekir. Bu kısıtlama denkleminin çözümünden

$$f_1(\phi) = c_2 \cos\phi + c_3 \sin\phi, \qquad c_1 = 0, \qquad f_2 = c_4$$

elde edilir. Sonuç olarak; $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned} \xi^0 &= G(r,t) \\ \xi^1 &= 0 \\ \xi^2 &= c_2 \cos\phi + c_3 \sin\phi \\ \xi^3 &= \cot\theta\left[-c_2 \sin\phi + c_3 \cos\phi\right] + c_4 \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

şeklinde bulunur.

Alt Durum (1.ii) $\rho' = 0\left(\Leftrightarrow \rho = \rho_0 = sabit\right), \nu' \neq 0$.

Bu alt durumda, $C' = 0\left(C = 1\right)$ olduğundan $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri (3.3.7) denklemleriyle aynıdır.

Durum (2.a): A=0, B=0, C=0 ve D$\neq$0.

Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) CC denklemlerinden kalanlar şunlardır:

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(r),\ \xi^2 = \xi^2(\theta,\phi),\ \xi^3 = \xi^3(\theta,\phi) \quad (3.3.13)$$

$$\xi^2{}_{,\phi} + \sin^2\theta\,\xi^3{}_{,\vartheta} = 0 \quad (3.3.14)$$

$$D'\xi^1 + 2D\xi^0{}_{,t} = 0 \quad (3.3.15)$$

$$\left[D' + D(\rho-\nu)'\right]\xi^1 + 2D\xi^2{}_{,\theta} = 0 \quad (3.3.16)$$

$$\left[D' + D(\rho-\nu)'\right]\xi^1 + 2D(\cot\theta\,\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi} = 0 \quad (3.3.17)$$

(3.3.13) eşitlikleri dikkate alındığında, (3.3.16) denkleminden

$$\xi^1 = 2c_1 \frac{De^{\rho-\nu}}{\left(De^{\rho-\nu}\right)'}, \; D \neq e^{\nu-\rho} \tag{3.3.18}$$

$$\xi^2 = -c_1\theta + f_1(\phi) \tag{3.3.19}$$

elde edilir. Bu ξ^2 bileşenin kullanılmasıyla, (3.3.16) ve (3.3.17) denklemlerinden

$$\xi^3 = \cot\theta\, f_1(\phi)_{,\phi} + f_2(\phi) \tag{3.3.20}$$

bulunur. Bulunan ξ^1, ξ^2 ve ξ^3 bileşenleri (3.3.17) denkleminde tekrar kullanılırsa

$$\cot\theta(f_1(\phi)_{,\phi\phi} + f_1(\phi) - c_1\theta) + f_2(\phi)_{,\phi} + c_1 = 0, \tag{3.3.21}$$

kısıtlama bağıntısı elde edilir. Bu bağıntının sağlaması için

$$f_1(\phi) = c_2\cos\phi + c_3\sin\phi, \qquad c_1 = 0, \qquad f_2 = c_4$$

olmalıdır. Böylece $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 0 \\ \xi^1 &= c_0 \\ \xi^2 &= c_2\cos\phi + c_3\sin\phi \\ \xi^3 &= \cot\theta\left[-c_2\sin\phi + c_3\cos\phi\right] + c_4 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

olur.

Durum (2.b): B=0, D=0 ve A$\neq$0, C$\neq$0 $\Leftrightarrow$ $\rho' = 0,\ \lambda = \lambda(r),\ \nu = \nu(r)$.

Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) CC denklemleri

$$\xi^0 = \xi^0(t,r),\ \ \xi^1 = \xi^1(t,r),\ \ \xi^2 = \xi^2(\theta,\phi),\ \ \xi^3 = \xi^3(\theta,\phi) \tag{3.3.23}$$

$$\xi^1_{,t} + e^{\nu-\lambda}\xi^0{}_{,r} = 0 \tag{3.3.24}$$

$$\xi^2{}_{,\phi} + \sin^2\theta\,\xi^3{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.25}$$

$$C'\xi^1 + 2C\xi^2{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.26}$$

$$C'\xi^1 + 2C(\cot\theta\,\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.27}$$

$$A'\xi^1 + 2A\xi^1{}_{,r} = 0 \tag{3.3.28}$$

$$\left[A' + A(\nu-\lambda)'\right]\xi^1 + 2A\xi^o{}_{,t} = 0 \tag{3.3.29}$$

şeklindedir. Kısıtlama bağıntılarından C=1 olduğu için $C' = 0$ dır. Böylece (3.3.25), (3.3.26) ve (3.3.27) denklemlerinden

$$\xi^2 = c_1\cos\phi + c_2\sin\phi, \ \ \xi^3 = \cot\theta\left[-c_1\sin\phi + c_2\cos\phi\right] + c_3$$

elde edilir. Burada c_1, c_2 ve c_3 integrasyon sabitleridir. (3.3.28) denkleminden, $f_2(t)$ integrasyon fonksiyonu olmak üzere,

$$\xi^1 = \frac{f_2(t)}{\sqrt{A}} \tag{3.3.30}$$

bulunur. Bu bileşen, (3.3.24) denkleminde yerine yazılır ve çözüm yapılırsa

$$\xi^0 = -\dot{f}_2(t)\int \frac{e^{\lambda-\nu}}{\sqrt{A}}dr + f_3(t) \tag{3.3.31}$$

elde edilir. Bulunan ξ^0 ve ξ^1 bileşenleri, (3.3.29) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\ddot{f}_2(t)\int \frac{e^{\lambda-\nu}}{\sqrt{A}}dr - \frac{f_2(t)}{2\sqrt{A}}\left(\nu' - \lambda' + \frac{A'}{A}\right) - \dot{f}_3(t) = 0 \tag{3.3.32}$$

kısıtlama denklemi ortaya çıkar. Bu denklemin r'ye göre türevini alırsak, $\tilde{\alpha}^2$ sabit olmak üzere,

$$\frac{\ddot{f}_2(t)}{f_2(t)} = \left[\left(\nu' - \lambda' + \frac{A'}{A}\right)\frac{1}{2\sqrt{A}}\right]' \sqrt{A}e^{\nu-\lambda} = \tilde{\alpha}^2 \tag{3.3.33}$$

elde edilir. Burada üç olasılık vardır: $\tilde{\alpha}^2 = 0$, $\tilde{\alpha}^2 > 0$ ve $\tilde{\alpha}^2 < 0$.

$\tilde{\alpha}^2 = 0$ iken (3.3.33) denkleminden

$$f_2(t) = c_4 t + c_5, \qquad \left(\nu' - \lambda' + \frac{A'}{A}\right)\frac{1}{2\sqrt{A}} = k \tag{3.3.34}$$

bulunur. Burada k integrasyon sabitidir. (3.3.34) eşitlikleri (3.3.32) kısıtlama denkleminde kullanılırsa

$$k\left(c_4 t + c_5\right) + \dot{f}_3(t) = 0 \tag{3.3.35}$$

bulunur ve bu denklemin çözümünden

$$f_3 = k\left(c_4\frac{t^2}{2} + c_5 t\right) + c_6$$

elde edilir. Böylece ξ^0, ξ^1, ξ^2 ve ξ^3 bileşenlerinin son hali

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= -c_4\int \frac{e^{\lambda-\nu}}{\sqrt{A}}dr + k\left(c_4\frac{t^2}{2} + c_5 t\right) + c_6 \\
\xi^1 &= \frac{\left(c_4 t + c_5\right)}{\sqrt{A}} \\
\xi^2 &= c_1\cos\phi + c_2\sin\phi \\
\xi^3 &= \cot\theta\left[-c_1\sin\phi + c_2\cos\phi\right] + c_3
\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

şeklindedir.

$\tilde{\alpha}^2 > 0$ iken; (3.3.33) denkleminin çözümü,

$$f_2(t) = c_4 \cosh(\tilde{\alpha} t) + c_5 \sinh(\tilde{\alpha} t)\,, \qquad \int \frac{e^{\lambda-\nu}}{\sqrt{A}} = \frac{1}{2\sqrt{A}\tilde{\alpha}^2}\left(\nu' - \lambda' + \frac{A'}{A}\right) \tag{3.3.37}$$

olur. Bu eşitlikler (3.3.32) kısıtlama denkleminde kullanılırsa

$$f_3 = c_6$$

elde edilir. Burada c_6 bir integrasyon sabitidir. Böylece $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= -\frac{1}{2\sqrt{A}\alpha}\left(\nu' - \lambda' + \frac{A'}{A}\right)\left(c_4 \sinh(\alpha t) + c_5 \cosh(\alpha t)\right) + c_6 \\
\xi^1 &= \frac{\left(c_4 \cosh(\alpha t) + c_5 \sinh(\alpha t)\right)}{\sqrt{A}} \\
\xi^2 &= c_1 \cos\phi + c_2 \sin\phi \\
\xi^3 &= \cot\theta\left[-c_1 \sin\phi + c_2 \cos\phi\right] + c_3
\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

haline gelir.

$\tilde{\alpha}^2 < 0,\ \tilde{\alpha}^2 = -\alpha^2\left(\alpha^2 > 0\right)$ iken (3.3.33) kısıtlama denkleminin çözümü

$$f_2(t) = c_4 \cos(\alpha t) + c_5 \sin(\alpha t)\,, \qquad \int \frac{e^{\lambda-\nu}}{\sqrt{A}} = -\left(\nu' - \lambda' + \frac{A'}{A}\right)\frac{1}{2\sqrt{A}\alpha^2} \tag{3.3.39}$$

şeklindedir. Bulunan $f_2(t)$ fonksiyonu ve kısıtlama denklemi (3.3.32) eşitliğinde kullanılırsa, c_6 integrasyon sabiti olmak üzere $f_3 = c_6$ elde edilir. Böylece $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= \frac{1}{2\sqrt{A}\alpha}\left(\nu' - \lambda' + \frac{A'}{A}\right)\left(-c_4 \sin(\alpha t) + c_5 \cos(\alpha t)\right) + c_6 \\
\xi^1 &= \frac{-\left(c_4 \cos(\alpha t) + c_5 \sin(\alpha t)\right)}{\sqrt{A}} \\
\xi^2 &= c_1 \cos\phi + c_2 \sin\phi \\
\xi^3 &= \cot\theta\left[-c_1 \sin\phi + c_2 \cos\phi\right] + c_3
\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

şeklini alır.

Durum (3.a): A=0, D=0 ve B$\neq$0, C$\neq$0$\Leftrightarrow$ $2\nu''+\nu'2-\nu'\lambda'=0$ ve $\nu'=0$

Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) ile verilen CC denklemleri aşağıdaki şekli alır:

$$\xi^0{}_{,r}=0,\ \xi^0{}_{,\theta}=0,\ \xi^0{}_{,\phi}=0 \tag{3.3.41}$$

$$\xi^1{}_{,t}=0,\ \left(Be^{\rho-\lambda}+C\right)\xi^1{}_{,\theta}=0,\ \left(Be^{\rho-\lambda}+C\right)\xi^1{}_{,\phi}=0 \tag{3.3.42}$$

$$\xi^2{}_{,t}=0,\ \left(Be^{\rho-\lambda}+C\right)\xi^2{}_{,r}=0 \tag{3.3.43}$$

$$\xi^3{}_{,t}=0,\ \left(Be^{\rho-\lambda}+C\right)\xi^3{}_{,r}=0 \tag{3.3.44}$$

$$\xi^1{}_{,\theta}+e^{\rho-\lambda}\xi^2{}_{,r}=0,\quad B\xi^1{}_{,\theta}-C\xi^2{}_{,r}=0 \tag{3.3.45}$$

$$\xi^1{}_{,\phi}+\sin^2\theta e^{\rho-\lambda}\xi^3{}_{,r}=0,\quad B\xi^1{}_{,\phi}-\sin^2\theta C\xi^3{}_{,r}=0 \tag{3.3.46}$$

$$\xi^2{}_{,\phi}+\sin^2\theta\xi^3{}_{,\theta}=0 \tag{3.3.47}$$

$$B'\xi^1+2B\xi^1{}_{,r}=0 \tag{3.3.48}$$

$$\left[B'+B(\rho-\lambda)'\right]\xi^1+2B\xi^2{}_{,\theta}=0 \tag{3.3.49}$$

$$\left[B'+B(\rho-\lambda)'\right]\xi^1+2B(\cot\theta\xi^2+\xi^3{}_{,\phi})=0 \tag{3.3.50}$$

$$C'\xi^1+2C\xi^2{}_{,\theta}=0 \tag{3.3.51}$$

$$C'\xi^1+2C(\cot\theta\xi^2+\xi^3{}_{,\phi})=0 \tag{3.3.52}$$

Burada; (3.3.49) ve (3.3.51) denklemlerinden *k* integrasyon sabiti olmak üzere

$$C=kBe^{\rho-\lambda}$$

eşitliği bulunmaktadır. Her *k* için (3.3.41) denkleminden $\xi^0=\xi^0(t)$ olmaktadır.

k = +1 durumunda, (3.3.42)-(3.3.44) dan

$$\xi^1=\xi^1(r),\ \xi^2=\xi^2(\theta,\phi),\ \xi^3=\xi^3(\theta,\phi)$$

elde edilir. $\rho=2\ln r$ iken $C'=0$ yani *C*=sabit olur. Böylece $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned}&\xi^0=F(t),\qquad \xi^1=0\\&\xi^2=c_1\cos\phi+c_2\sin\phi\\&\xi^3=\cot\theta\left[-c_1\sin\phi+c_2\cos\phi\right]+c_3\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

şeklinde bulunur.

$\rho\neq 2\ln r$ ve dolayısıyla $C'\neq 0$ iken (3.3.41)-(3.3.52) denklemlerinden (3.3.53) ile aynı vektör bileşenleri elde edilmektedir.

$k=-1$ iken (3.3.42)-(3.3.44) denklemlerinden

$$\xi^1=\xi^1(r,\theta,\phi),\ \xi^2=\xi^2(r,\theta,\phi),\ \xi^3=\xi^3(r,\theta,\phi)$$

bulunur. Bu durumda, $C'=0$ ($\Leftrightarrow C$=sabit) için $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri (3.3.53) ile aynıdır.

Eğer $\rho\neq 2\ln r$ ve dolayısıyla $C'\neq 0$ ise (3.3.48) denkleminden $f_1(\theta,\phi)$ integrasyon fonksiyonu olmak üzere

$$\xi^1=\frac{f_1(\theta,\phi)}{\sqrt{B}} \tag{3.3.54}$$

elde edilir. (3.3.45) denkleminde ξ^1 yerine yazılarak işlem yapılırsa

$$\xi^2=-f_{1,\theta}(\theta,\phi)\int\frac{e^{\lambda-\rho}}{\sqrt{B}}dr+f_2(\theta,\phi) \tag{3.3.55}$$

şeklindedir. Burada $f_2(\theta,\phi)$ integrasyon fonksiyonudur. Elde edilen ξ^2 denklemi (3.3.46) denkleminde kullanılırsa

$$\xi^3=-\frac{f_{1,\phi}(\theta,\phi)}{\sin^2\theta}\int\frac{e^{\lambda-\rho}}{\sqrt{B}}dr+f_3(\theta,\phi) \tag{3.3.56}$$

$f_3(\theta,\phi)$ integrasyon fonksiyonu olmak üzere bulunur. ξ^2 ve ξ^3 eşitlikleri (3.3.47) denkleminde kullanılırsa

$$-2f_{1,\theta\phi}(\theta,\phi)\int\frac{e^{\lambda-\rho}}{\sqrt{B}}dr+2\cot\theta\int\frac{e^{\lambda-\rho}}{\sqrt{B}}dr+f_{2,\phi}(\theta,\phi)+\sin^2\theta\, f_{3,\theta}(\theta,\phi)=0 \tag{3.3.57}$$

olur. (3.3.57) eşitliğinin r' ye göre türev alınırsa

$$f_1(\theta,\phi)=\sin^2\theta\int g_1(\phi)d\phi+g_2(\theta)$$

eşitliği bulunur. Burada $g_1(\phi)$ ve $g_2(\theta)$ integrasyon fonksiyonlarıdır. (3.3.51) denkleminde $f_1(\theta,\phi)$ kullanılırsa

$$g_2(\theta)=a_1\cos\theta+a_2\sin\theta,\qquad f_2=g_3(\phi)$$

olur. Burada $\left(\frac{C'}{2C\sqrt{B}}\right)'=-\frac{e^{\lambda-\rho}}{\sqrt{B}}$ kısıtlama bağıntısı vardır. (3.3.57) denkleminden

$$f_3(\theta,\phi)=\cot\theta\, g_3(\phi)+g_4(\phi)$$

bulunur. Aynı şekilde (3.3.52) denkleminde ξ^1 , ξ^2 ve ξ^3 yerlerine yazılırsa

$$g_1(\phi) = a_3 \cos\phi + a_4 \sin\phi \qquad a_2 = 0$$
$$g_3(\phi) = a_5 \cos\phi + a_6 \sin\phi\,, \qquad g_4 = a_7\,,$$

elde edilir. Böylece vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= F(t) \\
\xi^1 &= \frac{1}{\sqrt{B}}\left(\sin\theta\left(a_3 \sin\phi - a_4 \cos\phi\right) + a_1 \cos\theta\right) \\
\xi^2 &= \frac{C'}{2C\sqrt{B}}\left(\cos\theta\left(a_3 \sin\phi - a_4 \cos\phi\right) + a_1 \cos\theta\right) + a_5 \cos\phi + a_6 \sin\phi \\
\xi^3 &= \frac{C'}{2C\sqrt{B}} \frac{\left(a_3 \sin\phi - a_4 \cos\phi\right)}{\sin\theta} + \cot\theta\left(-a_5 \sin\phi + a_6 \cos\phi\right) + a_7
\end{aligned} \tag{3.3.58}$$

şeklinde elde edilir.

Durum (3.b): A=0, B=0 ve C $\neq$ 0, D $\neq$ 0.

Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) denklemleri aşağıdaki şekilde indirgenir.

$$\xi^0{}_{,r} = 0, \quad \left(Ce^{\nu-\rho} + D\right)\xi^0{}_{,\theta} = 0, \quad \left(Ce^{\nu-\rho} + D\right)\xi^0{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.59}$$

$$\xi^1{}_{,t} = 0, \ \xi^1{}_{,\theta} = 0, \ \xi^1{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.60}$$

$$\xi^2{}_{,r} = 0, \quad \left(Ce^{\nu-\rho} + D\right)\xi^2{}_{,t} = 0 \tag{3.3.61}$$

$$\xi^3{}_{,r} = 0, \quad \left(Ce^{\nu-\rho} + D\right)\xi^3{}_{,t} = 0 \tag{3.3.62}$$

$$\xi^0{}_{,\theta} - e^{\rho-\nu}\xi^2{}_{,t} = 0, \quad D\xi^0{}_{,\theta} + C\xi^2{}_{,t} = 0 \tag{3.3.63}$$

$$\xi^0{}_{,\phi} - \sin^2\theta e^{\rho-\nu}\xi^3{}_{,t} = 0, \quad D\xi^1{}_{,\theta} + \sin^2\theta C\xi^3{}_{,t} = 0 \tag{3.3.64}$$

$$\xi^2{}_{,\phi} + \sin^2\theta\xi^3{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.65}$$

$$C'\xi^1 + 2C\xi^2{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.66}$$

$$C'\xi^1 + 2C(\cot\theta\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.67}$$

$$D'\xi^1 + 2D\xi^0{}_{,t} = 0 \tag{3.3.68}$$

$$\left[D' + D(\rho - \nu)'\right]\xi^1 + 2D\xi^2{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.69}$$

$$\left[D' + D(\rho - \nu)'\right]\xi^1 + 2D(\cot\theta\,\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.70}$$

Bu denklemlerden; (3.3.66) ve (3.3.69) denklemleri incelenirse

$$D = kCe^{\nu-\rho}$$

elde edilir. $k = +1$ iken (3.3.59)-(3.3.62) denklemlerinden

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(r),\ \xi^2 = \xi^2(\theta,\phi),\ \ \xi^3 = \xi^3(\theta,\phi)$$

olur. $\rho = 2\ln r$ ve dolayısıyla $C' = 0$ ise $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned} &\xi^0 = c_1, \qquad \xi^1 = 0 \\ &\xi^2 = c_2\cos\phi + c_3\sin\phi \\ &\xi^3 = \cot\theta\left[-c_2\sin\phi + c_3\cos\phi\right] + c_4 \end{aligned} \tag{3.3.71}$$

şeklindedir.

$C' \neq 0$ $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned} &\xi^0 = F(r,t), \qquad \xi^1 = 0 \\ &\xi^2 = c_1\cos\phi + c_2\sin\phi \\ &\xi^3 = \cot\theta\left[-c_1\sin\phi + c_2\cos\phi\right] + c_3 \end{aligned} \tag{3.3.72}$$

şeklinde bulunur.

$k = -1$ iken (3.3.59)-(3.3.62) denklemlerinden

$$\xi^0 = \xi^0(t,\theta,\phi),\ \xi^1 = \xi^1(r),\ \xi^2 = \xi^2(t,\theta,\phi),\ \ \xi^3 = \xi^3(t,\theta,\phi)$$

bulunur. $C' = 0$ ise (3.3.59)-(3.3.70) denklemlerinin incelenmesiyle $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri (3.3.71)'deki sonuçlar ile aynıdır.

$C' \neq 0$ $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned} &\xi^0 = -c_2 t + c_3,\ \ \xi^1 = 0 \\ &\xi^2 = c_4\cos\phi + c_5\sin\phi \\ &\xi^3 = \cot\theta\left(-c_4\sin\phi + c_5\cos\phi\right) + c_6 \end{aligned}$$

Olarak elde edilir.

Durum (3.c): B=0, C=0 ve A$\neq$0, D$\neq$0.

Bu durumdaki (3.1.9)-(3.1.20) ile verilen CC denklemleri

$$\xi^0{}_{,r} = 0,\ \ \xi^0{}_{,\theta} = 0,\ \ \xi^0{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.73}$$

$$\xi^1{}_{,t} = 0,\ \ \left(Ae^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^1{}_{,\theta} = 0,\ \ \left(Ae^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^1{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.74}$$

$$\xi^2{}_{,t} = 0,\ \ \left(Ae^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^2{}_{,r} = 0 \tag{3.3.75}$$

$$\xi^3{}_{,t} = 0,\ \ \left(Ae^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^3{}_{,r} = 0 \tag{3.3.76}$$

$$A\xi^1{}_{,\theta} + e^{\rho-\nu}D\xi^2{}_{,r} = 0 \tag{3.3.77}$$

$$A\xi^1{}_{,\phi} - \sin^2\theta e^{\rho-\nu} D\xi^3{}_{,r} = 0 \tag{3.3.78}$$

$$\xi^2{}_{,\phi} + \sin^2\theta \xi^3{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.79}$$

$$A'\xi^1 + 2A\xi^1{}_{,r} = 0 \tag{3.3.80}$$

$$\left[A' + A(\nu-\lambda)'\right]\xi^1 + 2A\xi^o{}_{,t} = 0 \tag{3.3.81}$$

$$D'\xi^1 + 2D\xi^0{}_{,t} = 0 \tag{3.3.82}$$

$$\left[D' + D(\rho-\nu)'\right]\xi^1 + 2D\xi^2{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.83}$$

$$\left[D' + D(\rho-\nu)'\right]\xi^1 + 2D(\cot\theta\,\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.84}$$

şeklindedir. (3.3.80) ve (3.3.82) denklemlerinden

$$D = kAe^{\nu-\lambda}$$

bulunur. Buradaki k sabiti eksi bir olarak alınırsa $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_7 \\ \xi^1 &= 0 \\ \xi^2 &= c_3\cos\phi + c_4\sin\phi \\ \xi^3 &= \cot\theta\left[-c_3\sin\phi + c_4\cos\phi\right] + c_5 \end{aligned} \tag{3.3.85}$$

Eğer $k = +1$ olursa vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned} \xi^0 &= a_8 t + a_9 \\ \xi^1 &= \frac{1}{\sqrt{B}}\left(\sin\theta\left(a_3\sin\phi - a_4\cos\phi\right) + a_1\cos\theta\right) \\ \xi^2 &= \frac{C'}{2C\sqrt{B}}\left(\cos\theta\left(a_3\sin\phi - a_4\cos\phi\right) + a_1\cos\theta\right) + a_5\cos\phi + a_6\sin\phi \\ \xi^3 &= \frac{C'}{2C\sqrt{B}}\frac{\left(a_3\sin\phi - a_4\cos\phi\right)}{\sin\theta} + \cot\theta\left(-a_5\sin\phi + a_6\cos\phi\right) + a_7 \end{aligned} \tag{3.3.86}$$

olur.

Durum (4.a): A=0, C=0 ve B $\neq$ 0, D $\neq$ 0.

Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) CC denklemleri

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^{0}{}_{,r} = 0,\ \ \xi^{0}{}_{,\theta} = 0,\ \ \xi^{0}{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.87}$$

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^{1}{}_{,t} = 0,\ \ \xi^{1}{}_{,\theta} = 0,\ \ \xi^{1}{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.88}$$

$$\xi^{2}{}_{,t} = 0,\ \ \xi^{2}{}_{,r} = 0 \tag{3.3.89}$$

$$\xi^{3}{}_{,t} = 0,\ \ \xi^{3}{}_{,r} = 0 \tag{3.3.90}$$

$$\xi^{2}{}_{,\phi} + \sin^2\theta\,\xi^{3}{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.91}$$

$$D'\xi^{1} + 2D\xi^{0}{}_{,t} = 0 \tag{3.3.92}$$

$$\left[D' + D(\rho-\nu)'\right]\xi^{1} + 2D\xi^{2}{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.93}$$

$$\left[D' + D(\rho-\nu)'\right]\xi^{1} + 2D(\cot\theta\,\xi^{2} + \xi^{3}{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.94}$$

$$B'\xi^{1} + 2B\xi^{1}{}_{,r} = 0 \tag{3.3.95}$$

$$\left[B' + B(\rho-\lambda)'\right]\xi^{1} + 2B\xi^{2}{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.96}$$

$$\left[B' + B(\rho-\lambda)'\right]\xi^{1} + 2B(\cot\theta\,\xi^{2} + \xi^{3}{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.97}$$

olur. (3.3.93) ve (3.3.96) denklemlerinden $\xi^1 \neq 0$ olmak üzere

$$D = kBe^{\nu-\lambda} \tag{3.3.98}$$

bulunur. Aynı şekilde (3.3.94) ve (3.3.97) denklemlerinden de aynı (3.3.98) eşitliği elde edilmektedir. $k = -1$ iken (3.3.95) denkleminden, c_1 integrasyon sabiti olmak üzere,

$$\xi^1 = \frac{c_1}{\sqrt{B}} \tag{3.3.99}$$

olur. Bu ξ^1 bileşeni (3.3.93) denkleminde kullanılırsa, $f_1(\phi)$ integrasyon fonksiyonu olmak üzere,

$$c_1\left(\frac{D'}{D} + \left(\rho-\nu\right)'\right) = 2c_2\sqrt{B} \tag{3.3.100}$$

$$\xi^2 = -c_2\theta + f_1(\phi) \tag{3.3.101}$$

elde edilir. ξ^2 bileşeni (3.3.91) denkleminde kullanılırsa, $f_2(\phi)$ integrasyon fonksiyonu olmak üzere

$$\xi^3 = \cot\theta\, f_1(\phi)_{,\phi} + f_2(\phi) \tag{3.3.102}$$

bulunur. Böylece; (3.3.92), (3.3.94) ve (3.3.101) denklemlerinden, c_2 sabitinin sıfırlanması yanında

$$\xi^0 = -c_6 t + c_7 \tag{3.3.103}$$

$$f_1(\phi) = c_3 \cos\phi + c_4 \sin\phi, \qquad f_2 = c_5$$

$$\frac{D'}{D} = 2c_6\sqrt{B} = (\nu - \rho)' \tag{3.3.14}$$

sonuçlarına ulaşılır. Böylece; (3.3.98) ve (3.3.104) kısıtlama denklemleri sağlanmak üzere; $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned} \xi^0 &= -c_6 t + c_7 \\ \xi^1 &= \frac{c_1}{\sqrt{B}} \\ \xi^2 &= c_3 \cos\phi + c_4 \sin\phi \\ \xi^3 &= \cot\theta\left[-c_3 \sin\phi + c_4 \cos\phi\right] + c_5 \end{aligned} \tag{3.3.105}$$

şeklindedir.

$k = +1$ iken $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_1 \\ \xi^1 &= 0 \\ \xi^2 &= c_3 \cos\phi + c_4 \sin\phi \\ \xi^3 &= \cot\theta\left[-c_3 \sin\phi + c_4 \cos\phi\right] + c_5 \end{aligned} \tag{3.3.106}$$

olur.

Durum (4.b): B=0 ve A $\neq$ 0, C $\neq$ 0, D $\neq$ 0.

Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) CC denklemleri aşağıdaki şekildedir:

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \ \xi^1 = \xi^1(r),\ \ \xi^2 = \xi^2(\theta,\phi),\ \ \xi^3 = \xi^3(\theta,\phi) \tag{3.3.107}$$

$$\xi^2{}_{,\phi} + \sin^2\theta\,\xi^3{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.108}$$

$$D'\xi^1 + 2D\xi^0{}_{,t} = 0 \tag{3.3.109}$$

$$\left[D' + D(\rho - \nu)'\right]\xi^1 + 2D\xi^2{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.110}$$

$$\left[D' + D(\rho - \nu)'\right]\xi^1 + 2D(\cot\theta\,\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.111}$$

$$C'\xi^1 + 2C\xi^2{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.112}$$

$$C'\xi^1 + 2C(\cot\theta\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.113}$$

$$A'\xi^1 + 2A\xi^1,_r = 0 \tag{3.3.114}$$

$$\left[A' + A(\nu-\lambda)'\right]\xi^1 + 2A\xi^o,_t = 0 \tag{3.3.115}$$

Eğer $\rho = 2\ln r$ ise ve $C = 1-k$, $k = e^{\lambda} = sabit$ $(\neq 1)$ olur. Bu koşul için $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_1 \\ \xi^1 &= 0 \\ \xi^2 &= c_2\cos\phi + c_3\sin\phi \\ \xi^3 &= \cot\theta\left[-c_2\sin\phi + c_3\cos\phi\right] + c_4 \end{aligned} \tag{3.3.116}$$

şeklindedir. Burada c_1, c_2, c_3 ve c_4 ler sabit paramatrelerdir.

$C' \neq 0$ iken $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri (3.3.105) deki gibi olup $D = Ae^{\nu-\lambda}$ kısıtlama bağıntısı bulunur.

Durum (5.a): A=0 ve B$\neq$0, C$\neq$0, D$\neq$0.

Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) ile verilen CC denklemleri

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^0{}_{,r} = 0,\ \ \xi^0{}_{,\theta} = 0,\ \ \xi^0{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.117}$$

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^1{}_{,t} = 0,\ \ \xi^1{}_{,\theta} = 0,\ \ \xi^1{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.118}$$

$$\xi^2{}_{,t} = 0,\ \ \xi^2{}_{,r} = 0 \tag{3.3.119}$$

$$\xi^3{}_{,t} = 0,\ \ \xi^3{}_{,r} = 0 \tag{3.3.120}$$

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^1{}_{,t} = 0 \tag{3.3.121}$$

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^0{}_{,r} = 0 \tag{3.3.122}$$

$$D\xi^0{}_{,r} - B\xi^1{}_{,t} = 0 \tag{3.3.123}$$

$$\xi^2,_\phi + \sin^2\theta\xi^3,_\theta = 0 \tag{3.3.124}$$

$$D'\xi^1 + 2D\xi^0,_t = 0 \tag{3.3.125}$$

$$\left[D' + D(\rho-\nu)'\right]\xi^1 + 2D\xi^2,_\theta = 0 \tag{3.3.126}$$

$$\left[D' + D(\rho-\nu)'\right]\xi^1 + 2D(\cot\theta\,\xi^2 + \xi^3,_\phi) = 0 \tag{3.3.127}$$

$$C'\xi^1 + 2C\xi^2,_\theta = 0 \tag{3.3.128}$$

$$C'\xi^1 + 2C(\cot\theta\xi^2 + \xi^3,_\phi) = 0 \tag{3.3.129}$$

$$B'\xi^1 + 2B\xi^1{}_{,r} = 0 \tag{3.3.130}$$

$$\left[B' + B(\rho-\lambda)'\right]\xi^1 + 2B\xi^2{}_{,\theta} = 0 \tag{3.3.131}$$

$$\left[B' + B(\rho-\lambda)'\right]\xi^1 + 2B(\cot\theta\xi^2 + \xi^3{}_{,\phi}) = 0 \tag{3.3.132}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemlerden (3.3.128) ve (3.3.131) denklemlerinden

$$C = ke^{\rho-\lambda}B$$

elde edilir. (3.3.126) ve (3.3.131) denklemlerinden

$$C = le^{\rho-\nu}D$$

olur. Böylece $B = me^{\nu-\lambda}D$ bulunur. Burada k,l ve m sabitlerdir. Bu durumdaki kısıtlama denklemleri durum (4.a) daki gibi çıktığından $m=-1$ iken $\rho = 2\ln r$ ve dolayısıyle $C' = 0$ böylece $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri (3.3.116) daki gibidir.

Eğer $C' \neq 0$ ise yine (3.3.116) denklemindeki ile aynı vektör alan bileşenleri elde edilir.

$m = -1$ ise $C' = 0$ iken (3.3.116) ile aynı vektör alanları bulunur.

$C' \neq 0$ iken durum (4.a) da ki (3.3.106) denklemiyle aynı $\vec{\xi}$ vektör alanları şeklindedir.

Durum (5.b): C=0 ve A$\neq$0, B$\neq$0, D$\neq$0.

Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) denklemleri aşağıdaki şekilde indirgenir.

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^0{}_{,r} = 0,\ \ \xi^0{}_{,\theta} = 0,\ \ \xi^0{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.133}$$

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^1{}_{,t} = 0,\ \ \xi^1{}_{,\theta} = 0,\ \ \xi^1{}_{,\phi} = 0 \tag{3.3.134}$$

$$\xi^2{}_{,t} = 0,\ \ \xi^2{}_{,r} = 0 \tag{3.3.135}$$

$$\xi^3{}_{,t} = 0,\ \ \xi^3{}_{,r} = 0 \tag{3.3.136}$$

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^1{}_{,t} = 0 \tag{3.3.137}$$

$$\left(Be^{\nu-\lambda} - D\right)\xi^0{}_{,r} = 0 \tag{3.3.138}$$

$$\left(Be^{\rho-\lambda} + C\right)\xi^3{}_{,r} = 0 \tag{3.3.139}$$

$$\left(De^{\rho-\nu} + C\right)\xi^2{}_{,t} = 0 \tag{3.3.140}$$

$$\left(A - B\right)\xi^2{}_{,t} = 0 \tag{3.3.141}$$

$$\left(A-B\right)\xi^{0}{}_{,\phi}=0 \tag{3.3.142}$$

$$\left(A-B\right)\xi^{3}{}_{,t}=0 \tag{3.3.143}$$

$$\xi^{0}{}_{,r}-e^{\lambda-\nu}\xi^{1}{}_{,t}=0 \tag{3.3.144}$$

$$D\xi^{0}{}_{,r}-B\xi^{1}{}_{,t}=0 \tag{3.3.145}$$

$$\xi^{2}{}_{,\phi}+\sin^{2}\theta\xi^{3}{}_{,\theta}=0 \tag{3.3.146}$$

$$D'\xi^{1}+2D\xi^{0}{}_{,t}=0 \tag{3.3.147}$$

$$\left[D'+D(\rho-\nu)'\right]\xi^{1}+2D\xi^{2}{}_{,\theta}=0 \tag{3.3.148}$$

$$\left[D'+D(\rho-\nu)'\right]\xi^{1}+2D(\cot\theta\,\xi^{2}+\xi^{3}{}_{,\phi})=0 \tag{3.3.149}$$

$$A'\xi^{1}+2A\xi^{1}{}_{,r}=0 \tag{3.3.150}$$

$$\left[A'+A(\nu-\lambda)'\right]\xi^{1}+2A\xi^{o}{}_{,t}=0 \tag{3.3.151}$$

$$B'\xi^{1}+2B\xi^{1}{}_{,r}=0 \tag{3.3.152}$$

$$\left[B'+B(\rho-\lambda)'\right]\xi^{1}+2B\xi^{2}{}_{,\theta}=0 \tag{3.3.153}$$

$$\left[B'+B(\rho-\lambda)'\right]\xi^{1}+2B(\cot\theta\xi^{2}+\xi^{3}{}_{,\phi})=0 \tag{3.3.154}$$

Denklem sisteminin çözümünde (3.3.148) ve (3.3.153) denklemleri incelenirse

$$D=ke^{\nu-\lambda}B$$

bulunur. $k=-1$ için $\vec{\xi}$ vektör alanı (3.3.36) veya (3.3.38) veya (3.3.40) daki çözümler ile aynıdır.

$k=1$ alınırsa vektör alan bileşenleri (3.3.106) ile aynıdır.

Durum (6): A $\neq$ 0, B $\neq$ 0, C $\neq$ 0, D $\neq$ 0

Bu durumda (3.1.9)-(3.1.20) denklemlerinden CC denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\left(Be^{\rho-\lambda}+C\right)\xi^{1}{}_{,\phi}=0, \qquad \left(Be^{\nu-\lambda}-D\right)\xi^{1}{}_{,t}=0 \tag{3.3.155}$$

$$\left(Be^{\rho-\lambda}+C\right)\xi^{1}{}_{,\theta}=0, \qquad \left(Ae^{\nu-\lambda}-D\right)\xi^{1}{}_{,\phi}=0 \tag{3.3.156}$$

$$\left(De^{\rho-\nu}+C\right)\xi^{0}{}_{,\theta}=0, \qquad \left(Ae^{\nu-\lambda}-D\right)\xi^{1}{}_{,\theta}=0 \tag{3.3.157}$$

$$\left(De^{\rho-\nu}+C\right)\xi^{2}{}_{,t}=0, \qquad \left(Ae^{\nu-\lambda}-D\right)\xi^{2}{}_{,r}=0 \tag{3.3.158}$$

$$\left(A-B\right)\xi^{2}{}_{,t}=0, \qquad \left(Be^{\rho-\lambda}+C\right)\xi^{2}{}_{,r}=0 \tag{3.3.159}$$

$$(A-B)\xi^0{}_{,\phi}=0\,,\qquad \left(Be^{\rho-\lambda}+C\right)\xi^3{}_{,r}=0 \tag{3.3.160}$$

$$(A-B)\xi^0{}_{,\theta}=0\,,\qquad \left(Be^{\nu-\lambda}-D\right)\xi^0{}_{,r}=0 \tag{3.3.161}$$

$$(A-B)\xi^3{}_{,t}=0\,,\qquad \left(De^{\rho-\nu}+C\right)\xi^3{}_{,t}=0 \tag{3.3.162}$$

$$\left(Ae^{\nu-\lambda}-D\right)\xi^3{}_{,r}=0\,,\qquad \left(De^{\rho-\nu}+C\right)\xi^0{}_{,\phi}=0 \tag{3.3.163}$$

$$Ae^{\lambda-\rho}\xi^0{}_{,\theta}-B\xi^2{}_{,t}=0\,,\qquad D\xi^0{}_{,r}-B\xi^1{}_{,t}=0 \tag{3.3.164}$$

$$D\xi^0{}_{,\theta}+C\xi^2{}_{,t}=0\,,\qquad \xi^0{}_{,\theta}-e^{\rho-\nu}\xi^2{}_{,t}=0 \tag{3.3.165}$$

$$\xi^0{}_{,r}-e^{\lambda-\nu}\xi^1{}_{,t}=0\,,\qquad \xi^0{}_{,\theta}+e^{\rho-\lambda}\xi^2{}_{,r}=0 \tag{3.3.166}$$

$$B\xi^1{}_{,r}-C\xi^2{}_{,r}=0\,,\qquad A\xi^1{}_{,\theta}-De^{\rho-\lambda}\xi^2{}_{,r}=0 \tag{3.3.167}$$

$$\xi^1{}_{,\phi}+\sin^2\theta e^{\rho-\lambda}\xi^3{}_{,r}=0\,,\qquad A\xi^1{}_{,\phi}-B\sin^2\theta e^{\rho-\nu}\xi^3{}_{,r}=0 \tag{3.3.168}$$

$$B\xi^1{}_{,\phi}-\sin^2\theta C\xi^3{}_{,r}=0\,,\qquad D\xi^0{}_{,\phi}-\sin^2\theta C\xi^3{}_{,t}=0 \tag{3.3.169}$$

$$\xi^0{}_{,\phi}-\sin^2\theta e^{\rho-\nu}\xi^3{}_{,t}=0\,,\qquad A\xi^1{}_{,\phi}+D\sin^2\theta e^{\rho-\nu}\xi^3{}_{,r}=0 \tag{3.3.170}$$

$$\xi^2{}_{,\phi}+\sin^2\theta\xi^3{}_{,\theta}=0 \tag{3.3.171}$$

$$A'\xi^1+2A\xi^1{}_{,r}=0\,, \tag{3.3.172}$$

$$\left[A'+A(\nu-\lambda)'\right]\xi^1+2A\xi^o{}_{,t}=0 \tag{3.3.173}$$

$$B'\xi^1+2B\xi^1{}_{,r}=0 \tag{3.3.174}$$

$$\left[B'+B(\rho-\lambda)'\right]\xi^1+2B\xi^2{}_{,\theta}=0 \tag{3.3.175}$$

$$\left[B'+B(\rho-\lambda)'\right]\xi^1+2B(\cot\theta\xi^2+\xi^3{}_{,\phi})=0\,, \tag{3.3.176}$$

$$C'\xi^1+2C\xi^2{}_{,\theta}=0\,, \tag{3.3.177}$$

$$C'\xi^1+2C(\cot\theta\xi^2+\xi^3{}_{,\phi})=0\,, \tag{3.3.178}$$

$$D'\xi^1+2D\xi^0{}_{,t}=0\,, \tag{3.3.179}$$

$$\left[D'+D(\rho-\nu)'\right]\xi^1+2D\xi^2{}_{,\theta}=0\,, \tag{3.3.180}$$

$$\left[D'+D(\rho-\nu)'\right]\xi^1+2D(\cot\theta\,\xi^2+\xi^3{}_{,\phi}=0\,, \tag{3.3.181}$$

Eğer $\rho=2\ln r$ ve dolayısıyla $C'=0$ ise (3.3.175) ve (3.3.180) denklemlerinden

$$D=ke^{\nu-\lambda}B$$

olur. (3.3.172) ve (3.3.174) denklemlerinden

$$A = lB$$

elde edilir. (3.3.175) ve (3.3.177) denklemlerinden

$$C = me^{\rho-\lambda}B$$

bulunur. (3.3.177) ve (3.3.180) denklemlerinden

$$C = ne^{\rho-\nu}D$$

olur. Böylece $A = pe^{\lambda-\nu}D$ olarak bulunur. Bu kısıtlama denklemlerindeki sabitler $k=-1$, $m=-1$, $p=1$, $l=-1$ ve $n=1$ olduğunda

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(r),\ \xi^2 = \xi^2(\theta,\phi),\ \xi^3 = \xi^3(\theta,\phi)$$

şeklindedir. $C' = 0$ $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri için (3.3.65) deki aynı sonuçlar bulunur.

Eğer $C' \neq 0$ ise bu durumda; $\vec{\xi}$ vektör alan bileşenleri (3.3.36), (3.3.38) veya (3.3.40) şeklindedir.

$k=1$, $m=-1$, $p=1$, $l=-1$ ve $n=1$ iken $C'=0$ ise (3.3.65) de ki vektör alan bileşenleri elde edilir.

$C' \neq 0$ iken vektör alan bileşenleri (3.3.86) ile aynıdır.

BÖLÜM 4

TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezin birinci bölümünde yapılan girişten sonra, ikinci bölümde temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde öncelikle bazı önemli küresel simetrik statik uzay-zamanların ve daha sonra genel uzay-zaman CC denklemleri verilerek çözümler elde edilmiştir. Bu çözümler yapılırken rank argümanı kullanılmıştır.

Üçüncü bölümün (3.1) alt bölümünde, statik küresel simetrik uzay zaman metriği ve bu metrik için elde edilen 45 tane CC denklemi kısa şekilde verilmiştir. Daha sonra (3.2) alt bölümünde; statik küresel simetrik Einstein, Schwarzchild, Reissner-Nordstörm De Sitter, Anti De Sitter, ve Bertotti Robinson uzay-zamanları için CC vektör alanlarının elde edilişi açıklanmıştır.Bu çözümlerin sonuçlarını içeren tablo aşağıda verilmiştir:

Tablo 1. Önemli uzay-zamanlar için elde edilen CC lerin, KV ler ve RC ler ile sayı bakımından karşılaştırılması.

	KV	**RC**	**CC**
Minkowski	10	Keyfi	Keyfi
De Sitter/ anti De Sitter	10	10	10
Einstein/ anti Einstein	**7**	$6+\xi^0(Keyfi)(x^\alpha)$	$6+\xi^0(Keyfi)(t)$
Bertotti Robinson 1	6	$3+\xi^0(x^\alpha)$ ve $\xi^1(x^\alpha)$	$3+\xi^0(t,r)$ ve $\xi^1(t,r)$
Bertotti Robinson 2	6	6	6
Bertotti Robinson 3	6	6	6
Schwarzschild	4	Keyfi	4
Reisner-Nordström	4	4	4

Bu tablodan; izometriler daima sonlu sayıda ve belirli iken, kollinasyonlar sonsuz miktarda olabileceği açıkca görülmektedir. Bunun gerekçesi şudur; metrik tensör dejenere değildir, halbuki Ricci ve Riemann tensörleri dejenere olabilirler. Özel olarak; eğer ilgili tensör sıfır ise tüm vektörler kollinasyonlardır. Riemann anlamında düz olan yalnız bir tane uzay-zaman vardır (Minkowski uzay-zamanı) ve bu durumda her vektör bir CC'dir. Her hangi bir vakum uzay-zamanda, Ricci düzdür ve bu nedenle bu tür uzay-zamanlar için bütün vektörler RC'dir. Benzer şekilde Einstein ve anti Einstein uzaylarında RC'lerin CC'lerden daha fazla serbestliği vardır. RC'ler için dört değişkenli bir keyfi fonksiyon vardır; CC'ler için ise sadece bir değişkenli keyfi fonksiyon mevcuttur. Benzer şekilde birinci tür Bertotti-Robinson metriği için iki keyfi fonksiyon vardır; bunlar RC'ler için $\xi^0\left(x^\alpha\right) ve\ \xi^1\left(x^\alpha\right)$, CC'ler için $\xi^0(t,r)\ ve\ \xi^1(t,r)$ dır. Schwarzschild metriği durumunda CC'ler KV'lere özdeş olmasına karşın, her vektör bir RC'dir.

Üçüncü Bölümün son kısmı (3.3) alt bölümünde küresel simetrik statik uzay-zaman için rank argümanı kullanılarak genel çözüm yapılmış ve küresel simetrik metrikler için CC'ler açık bir şekilde hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

Bokhari, A. H., 1992. Ricci Tensor With Six Collineations, International Journal Theoretical Physics 31. 2091.

Bokhari, A. H., ve Qadir, A., 1993. Collineations of Ricci Tensor, Journal of Mathematical Physics, 10. 3543.

Bokhari, A. H., Amir, M. J., ve Qadir, A., 1994. Ricci Collineations of Static Spherically Symmetric Space-Times, Journal of Mathematical Physics, 35. 3005-3012.

Bokhari, A. H. Kashif A. R., 1996. Curvature Collineations of Some Static Spherically Symmetric Space-Times, Journal of Mathematical Physics, 37. 3498

Bokhari, A. H., Qadir, A., Ahmed M. S. ve Asghar M., 1997. Classification of Sperivally Symmetric Static Space-Times by Their Curvature Collineations, Journal of Mathematical Physics, 38. 3639-3649

Bokhari, A. H. Kashif A. R. ve Qadir, A., 2003. A Complate Classification of Curvaure Collneations od Cylindrically Static Metric General Relativity and Gravitation 35. 1059

Hall G. S. ve Costa, J. Da 1991. Curvature Collineations in General-Relativity Journal of Mathematical Physics, 32, 2848

Hall G. S. 2004. Symmetries and Curvature Structure in General Relativity, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Katzin, G. H., Levine, J. ve Davis, H. R., 1969. Curvature Collineations: A Fundamental Symmetry Property of the Space-Times of General Relativity Defined by the Vanishing Lie Derivatives of the Riemann Curvature Tensor, Journal of Mathematical Physics, 10, 617.

Katzin, G. H., ve Levine, J., 1972. Applications of Lie Derivatives to Symmetries, Geodesic Mappings, and First Integrals in Riemannian Spaces, Colloquium Mathematicum 26, 21.

Kramer, D., Stephani, H., Hearlt, E. ve MacCallum, M. A. H., 1980. Exact Solutions of Einstein Field Equations, Cambridge University, Cambridge.

Petrov, A.Z., 1969. Einstein Spaces, Pergamon Pres.

Qadir, A. ve Ziad, M., 1995. Classification of static cylindrically symmetric space-times, Nuovo Cimento B 110, 317.

Shabbir G., 2003. Proper Curvature Collinations in Spherically Symmetric Static Space-Times, Nuovo Cimento. 118. 41-51.

Tablolar

Tablo 1. Önemli uzay-zamanlar için elde edilen CC lerin, KV ler ve RC ler ile sayı bakımından karşılaştırılması.

YAŞAM ÖYKÜSÜ

Adı Soyadı : Mevlüt BAŞER
Doğum Yeri ve Yılı : Sivas-Kangal / 1980
Adres : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü

Eğitim Durumu

1994-1998 : Sivas Kongre Lisesi, Sivas

2000-2004 : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi- Fizik Bölümü

2004- : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi- Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı

Staj-Kurslar

2000 Bilgisayar İşletmenliği Özel Saytek Bilgisayar Kursu

Katıldığı Seminer

2007 24. Uluslararası Fizik Kongresi İnönü Üniversitesi