ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Özge SARIEFE

Danışman:
Prof. Dr. Kazım KAYA

Ocak, 2008
ÇANAKKALE

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Özge SARIEFE

Danışman:

Prof. Dr. Kazım KAYA

Ocak, 2008

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

ÖZGE SARIEFE, tarafından **PROF. DR. KAZIM KAYA** yönetiminde hazırlanan **"ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Kazım KAYA

Yönetici

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Jüri Üyesi

Doç. Dr. İsmail TARHAN

Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi: 31/01/2008

Prof. Dr. Mehmet Emin ÖZEL

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince yardım ve katkılarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Kazım KAYA'ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Özge SARIEFE

SİMGELER VE KISALTMALAR

Semboller	**Anlam**
charR	Halkanın karakteristiği
Kerf	f dönüşümünün çekirdeği
Z	Halkanın merkezi
$C_{\sigma,\tau}$	Halkanın (σ,τ)-merkezi

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

ÖZET

Bu tezde, halkaların komütatifliği üzerine yapılan çalışmalarda türevin değişik özellikler üzerinde nasıl kullanıldığı ile ilgili bazı makaleler incelenmiştir.

Bölüm 2'de, halka ile ilgili genel bilgi verilmiştir.

Bölüm 3'de, türevin kullanıldığı bazı çalışmalar verilmiştir.

Bölüm 4'de, yarı türev konusu verilmiştir.

Bölüm 5'de, genelleştirilmiş türevler, asal halkada (σ, τ)-türevler, modül değerli (σ, τ)-türevler ve genelleştirilmiş (α, β)-türevler hakkında yapılan bazı çalışmalar verilmiştir.

Bölüm 6'da, Lie ve Jordan idealler üzerinde genelleştirilmiş türevler kullanılarak yapılan çalışmalar ve aynı zamanda homomorfizm olan türevler kullanılarak yapılan çalışmalar irdelenmiştir.

Bölüm 7'de ise genelleştirilmiş Lie idealler üzerindeki çalışmalara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Asal Halka, İdeal, Türev, Genelleştirilmiş Türev

GENERALIZED DERIVATIONS IN PRIME RINGS

ABSTRACT

In this thesis, articles about commutativity of rings investigated and about use of different properties of the derivation over those rings were studied.

Some general informations have been given in chapter 2.

In chapter 3, some articles have been given about derivations.

In chapter 4, semiderivations have been given.

In chapter 5, some articles have been given about generalized derivations, (σ,τ)-derivations in prime rings, (σ,τ)-derivations with module values and generalized (α,β)-derivations.

In chapter 6, articles about generalized derivations on Lie and Jordan Ideals and derivations which are homomorphisms have been analyzed.

In chapter 7, some articles have been given about generalized Lie Ideals.

Key Words : Prime Ring, Ideal, Derivation, Generalized Derivation

İÇERİK

Sayfa

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Halkaların komütatifliği ile ilgili yapılan çalışmalarda, türevin ayrı bir yeri vardır. R halkasında, d(xy) = d(x)y + xd(y), $\forall$ x,y$\in$R koşulunu sağlayan bir d toplamsal dönüşümüne türev denir.

Bir R halkasında,

(i) [x,y] = xy – yx, $\forall$ x,y$\in$R

(ii) $[x,y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$, $\forall$ x,y$\in$R

(iii) (x,y) = xy + yx, $\forall$ x,y$\in$R

(iv) $(x,y)_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) + \tau(y)x$, $\forall$ x,y$\in$R

ifadelerini düşünelim. Bir R halkasında (veya onun bir U ideali, Lie ideali, Jordan ideali) üzerinde verilen;

(i) d(x)d(y) = d(y)d(x), $\forall$ x,y$\in$R

(ii) ad(x) = 0, $\forall$ x$\in$R

(iii) d(R)$\subset$Z

(iv) $d_1(x)d_2(y) = d_2(y)d_1(x)$, $\forall$ x,y$\in$R

(v) vd(x) – d(x)v = 0, $\forall$ x$\in$R, v$\in$U

(vi) d(R,a) = (0)

(vii) d[R,a] = (0)

gibi özelliklerden birini içeren halkanın komütatifliği ile ilgili yapılan bir çok çalışma incelendi.

Daha sonra değişik araştırmacılar bu çalışmalarda halka yerine ideal (tek yanlı ideal, Lie ideal, genelleştirilmiş Lie ideal) ve türev yerine genelleştirilmiş türev (α-türev, (σ,τ)-türev) alarak sonuçları daha da genelleştirdiler.

Karakteristiği ikiden farklı bir asal halkada, d:R$\rightarrow$R bir türev olmak üzere, d(x)d(y) = d(y)d(x) özelliği sağlanırsa halkanın komütatif olduğu (Posner, 1957) de kanıtlandı. Daha sonra değişik yazarlar değişik zamanlarda, R halkasının U ideali (Lie ideali) için d(x)d(y) = d(y)d(x) ise R nin komütatif olduğunu gösterdi. Öte yandan bazı araştırmacılar d türevi yerine (σ,τ)-türev (α-türev, genelleştirilmiş türev) alarak aynı özelliği sağlayan asal halkanın komütatif olduğunu kanıtladı.

Halkalarla ilgili $ad(x) = 0$, $d(R) \subset Z$, $d[R,a] = (0)$ gibi bir çok özellik için aynı irdeleme yöntemleri kullanıldı.

Bu tezde türevle ilgili yapılan çalışmalar incelenerek bu konu hakkında uzmanlaşılması amaçlanmıştır.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1 : Boş kümeden farklı bir R kümesi üzerinde, $+ : RxR \rightarrow R$, $(a,b) \rightarrow a + b$ ve $\cdot : RxR \rightarrow R$, $(a,b) \rightarrow ab$ işlemleri tanımlansın. Buna göre aşağıdaki koşullar sağlanırsa R kümesine bir *halka* denir.

(i) (R,+) bir değişmeli grup

(ii) $a(bc) = (ab)c$, $\forall a,b,c \in R$

(iii) $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$, $\forall a,b,c \in R$

Tanım 2.2 : R bir halka olsun. $0 \neq a \in R$ için $ab = 0$ olacak biçimde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına *sol sıfır bölen* denir. $ba = 0$ olacak biçimde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına *sağ sıfır bölen* denir. Hem sağ sıfır hem de sol sıfır bölen olan elemana *sıfır bölen* denir.

Tanım 2.3 : R bir halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir toplamsal alt grubu olsun. Eğer $ar, ra \in I$, $\forall r \in R, a \in I$ ise I ya R nin bir *ideali* denir.

Tanım 2.4 : R bir halka, A,B ve P, R nin idealleri olsunlar. $AB \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ koşulu sağlanıyorsa, P ye *asal ideal* denir.

Teorem 2.5 : R bir halka ve P, R nin bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(i) P asal idealdir.

(ii) $\forall a,b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iii) $\forall a,b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iv) U ve V, R halkasının iki sol (sağ) ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ ise $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

Tanım 2.6 : Bir R halkasının (0) ideali asal ideal ise R ye *asal halka* denir.

Uyarı 2.7 : $a,b \in R$ için $aRb = (0) \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$ koşulu sağlanıyorsa, R bir *asal halkadır*.

Tanım 2.8 : $n \in I^+$ tamsayısı, $na = 0$, $\forall a \in R$ olacak biçimde en küçük tamsayı ise n ye R nin *karakteristiği* denir ve char $R = n$ ile gösterilir.

Tanım 2.9 : R bir halka olmak üzere $Z = \{a \in R \mid ax = xa, \forall x \in R\}$ kümesine R halkasının *merkezi* denir.

Teorem 2.10 : (Brauer's Trick) Bir grup iki özalt grubun birleşimi olarak yazılamaz.

Teorem 2.11 : Bir R asal halkasında x, xy$\in$ Z ise x = 0 veya y$\in$ Z dir.

Teorem 2.12 : Bir asal halkanın merkezi sıfır bölensizdir.

Lemma 2.13 : Bir R asal halkası sıfırdan farklı bir komütatif sağ ideal kapsıyorsa komütatiftir.

Lemma 2.14 : R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve d:R$\rightarrow$R, sıfırdan farklı bir türev ise d, I ideali üzerinde sıfırdan farklıdır.

Gösterim 2.15 : x,y$\in$ R için [x,y] = xy − yx ve (x,y) = xy + yx diyelim.

Tanım 2.16 : A, R halkasının bir toplamsal alt grubu olmak üzere $\forall$ a,b$\in$ A için [a,b]$\in$ A ise A ya *Lie halkası* denir.

Tanım 2.17 : R bir halka ve U, R nin bir toplamsal alt grubu olsun. [u,r]$\in$ U, $\forall$ r$\in$ R,u$\in$ U ise U ya R nin bir *Lie ideali* denir.

Gösterim 2.18 : R bir halka , x,y$\in$ R olsun. α ve β, R üzerinde iki dönüşüm olmak üzere $[x,y]_{\alpha,\beta} = x\alpha(y) - \beta(y)x$ ve $(x,y)_{\alpha,\beta} = x\alpha(y) + \beta(y)x$ ile gösterelim.

Tanım 2.19 : U, R halkasının bir toplamsal alt grubu ve σ,τ:R→R iki dönüşüm olsun. Buna göre, $[U,R]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U ya *sağ* (σ,τ)*- Lie ideal*, $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U ya *sol* (σ,τ)*-Lie ideal* denir. U hem sağ ve hemde sol (σ,τ)*-Lie ideal* ise U ya (σ,τ)*- Lie ideal* denir.

1 birim dönüşüm olmak üzere her Lie ideal bir $(1,1)$ - Lie idealdir.

Lemma 2.20 : R, karekteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve U$\not\subset$Z olacak biçimde U, R nin bir Lie ideali olsun. Buna göre a,b$\in$ R için aUb = (0) ise a = 0 veya b = 0 dır.

Tanım 2.21 : R bir halka ve U, R nin bir toplamsal alt grubu olsun. (u,r)$\in$ U, $\forall$ r$\in$ R,u$\in$ U ise U ya R nin bir *Jordan ideali* denir.

Tanım 2.22 : d:R$\rightarrow$R toplamsal bir dönüşüm olsun. d(xy) = d(x)y + xd(y), $\forall$ x,y$\in$ R ise d ye bir *türev* denir.

Tanım 2.23 : d:R$\rightarrow$R toplamsal bir dönüşüm olsun. $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$, $\forall$ x$\in$ R ise, d ye bir *Jordan türev* denir.

$d(x^2) = 2xd(x)$, $\forall x \in R$ ise d ye *sol Jordan türev* denir.

Tanım 2.24 : $a \in R$ sabit bir eleman olmak üzere $d_a : R \to R$ dönüşümü, $d_a(x) = [a,x]$, $\forall x \in R$ olarak tanımlansın. d_a ya R halkasının a elemanı tarafından belirlenmiş *iç türevi* denir.

Tanım 2.25 : α ve β, R halkası üzerinde iki dönüşüm ve $d:R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere $d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$, $\forall x,y \in R$ ise d ye bir sağ (α,β) **-** *türev* denir.

$d: R \to R$ toplamsal dönüşümü için $d(xy) = \alpha(x)d(y) + \beta(y)d(x)$, $\forall x,y \in R$ ise d ye bir *sol* (α,β) **-** *türev* denir.

$1: R \to R$ birim dönüşüm olmak üzere her türev bir (1,1) türevdir.

Tanım 2.26 : $f:R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere $f(x^2) = f(x)\alpha(x) + \beta(x)f(x)$, $\forall x \in R$ ise f *ye sağ Jordan* (α,β) **-** *türev* denir.

$f(x^2) = \alpha(x)f(x) + \beta(x)f(x)$, $\forall x \in R$ ise f dönüşümü *sol Jordan* (α,β) **-** *türev* adını alır.

Tanım 2.27 : $a \in R$ sabit bir eleman olmak üzere $d_a : R \to R$ dönüşümü $d_a(x) = [a,x]_{\alpha,\beta}$, $\forall x \in R$ olarak tanımlansın. d_a ya (α,β) **-** *iç türev* denir.

Tanım 2.28 : $f:R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. $f(xy)=f(x)y+xd(y)$, $\forall x,y \in R$ olacak biçimde bir d türevi varsa f ye, d türeviyle yapılan bir *genelleştirilmiş sağ türev* denir.

$f(xy) = d(x)y + xf(y)$, $\forall x,y \in R$ olacak biçimde bir d türevi varsa f ye, d türeviyle yapılan bir *genelleştirilmiş sol türev* denir.

f, hem sağ hem de sol genelleştirilmiş türev ise f dönüşümüne *genelleştirilmiş türev* denir.

Tanım 2.29 : F: $R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. $F(x^2) = F(x)x + xd(x)$, $\forall x \in R$ ise F ye *genelleştirilmiş Jordan türev* denir.

Tanım 2.30 : $a,b \in R$ sabit elemanlar olmak üzere $f_{a,b}:R \to R$ dönüşümü, $f_{a,b}(x) = ax + xb$, $\forall x \in R$ olarak tanımlansın. $f_{a,b}$ ye *genelleştirilmiş iç türev* denir.

$f_{a,b}:R \to R$ dönüşümü genelleştirilmiş iç türev ve $d_{-b}:R \to R$ dönüşümü iç türev olmak üzere $\forall x,y \in R$ için $f_{a,b}(xy) = f_{a,b}(x)y + x\, d_{-b}(y)$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.31 : $\alpha,\beta:R \to R$ iki dönüşüm olsun. $g:R \to R$ dönüşümü için $g(xy) = g(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$, $\forall x,y \in R$ ise g ye *genelleştirilmiş* (α,β) *- türev* denir.

Her türev bir genelleştirilmiş (1,1)-türevdir.

Tanım 2.32 : $a,b \in R$ sabit elemanlar ve $g_{a,b}:R \to R$ toplamsal dönüşüm olmak üzere $g_{a,b}(x) = a\alpha(x) + \beta(x)b$, $\forall x \in R$ ise $g_{a,b}$ ye *genelleştirilmiş* (α,β) *- iç türev* denir.

$g_{a,b}$ dönüşümü bir genelleştirilmiş iç türev ve d_{-b} dönüşümü (α,β) - iç türev olmak üzere $\forall x,y \in R$ için $g_{a,b}(xy) = g_{a,b}(x)\alpha(y) + \beta(x)d_{-b}(y)$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.33 : R bir halka olmak üzere $C_{\alpha,\beta} = \{c \in R \mid c\alpha(r) = \beta(r)c,\ \forall r \in R\}$ $= \{c \in R \mid [c,r]_{\alpha,\beta} = 0,\ \forall r \in R\}$ kümesine R nin (α,β) *- merkezi* denir. Burada 1 birim dönüşüm olmak üzere $\alpha = \beta = 1$ alınırsa $C_{\alpha,\beta} = Z$ olur.

Tanım 2.34 : R bir asal halka ve α,β iki dönüşüm olsun. $F(x^2) = F(x)\alpha(x) + \beta(x)d(x)$, $\forall x \in R$ olacak biçimde bir $d:R \to R$, (α,β)-türevi varsa F ye *genelleştirilmiş Jordan* (α,β) *-türev* denir.

Tanım 2.35 : R bir halka ve M bir toplamsal abelian grup olmak üzere $\alpha:MxR \to M$, $(m,r) \to mr$ ve $\beta:RxM \to M$, $(r,m) \to rm$ dönüşümleri tanımlansın. Bu işlemler altında, $\forall m,m_1,m_2 \in M$, $a,b \in R$ için,

(i) $m(a + b) = ma + mb$

(ii) $(m_1 + m_2)a = m_1 a + m_2 b$

(iii) $m(ab) = (ma)b$

ise M ye *sağ R-modül*,

(iv) $(a + b)m = am + bm$

(v) $a(m_1 + m_2) = a m_1 + am_2$

(vi) $(ab)m = a(bm)$

ise M ye *sol R-modül* denir. M hem sağ hem de sol R-modül ise M ye *R-bimodül* denir.

Tanım 2.36 : A ve B iki sağ R-modül ve $f:A\rightarrow B$ bir dönüşüm olsun. $\forall a_1, a_2 \in A$, $r\in R$ için,

(i) $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

(ii) $f(ar) = f(a)r$

ise f ye sağ *R-modül homomorfizmi* denir.

Tanım 2.37 : R bir halka, X bir R-bimodül, $d:R\rightarrow X$ toplamsal bir dönüşüm ve σ,τ R üzerinde otomorfizm olsunlar. $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$, $\forall x,y\in R$ ise d ye *modül değerli (σ,τ)- türev* denir.

Tanım 2.38 : R bir asal halka ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre, $M = \{(U,f) \mid f:U\rightarrow R$ sağ R-modül hom.$\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki biçimde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

$(U,f)\sim(V,g) \Leftrightarrow$ R halkasının sıfırdan farklı bir $W\subset U\cap V$ ideali üzerinde $f = g$ dir.

$cl(U,f) = \hat{f}$ ve denklik sınıflarının kümesi Q olsun. Buna göre,

$$\hat{f} + \hat{g} = cl(U\cap V, f + g)$$

$$\hat{f}\,\hat{g} = cl(VU, fg)$$

işlemlerine göre Q, R yi kapsayan birimli bir asal halkadır. Bu halkaya *Martindale Kesirler Halkası* denir.

Tanım 2.39 : Q nun merkezi olan $C = \{\hat{x}\in Q \mid \hat{x}\hat{q} = \hat{q}\hat{x},\ \forall \hat{q}\in Q\}$ kümesine R asal halkasının *genişletilmiş merkezi* denir. C kümesi bir cisimdir.

Teorem 2.40 : R bir halka ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $\phi:U\rightarrow R$ bir (R,R)-bimodül dönüşümü ise $\phi(u) = \lambda u$, $\forall u\in U$ olacak biçimde bir $\lambda\in C$ vardır.

Kullanılacak Eşitlikler:

(i) $[x,y+z]=[x,y]+[x,z]$

(ii) $[xy,z]=[x,z]y+x[y,z]$

(iii) $[[x,y],z] = [x,[y,z]] + [[x,z],y]$

(iv) $(xy,z) = x[y,z] + (x,z)y = x(y,z) – [x,z]y$

(v) $(x,yz) = y(x,z) + [x,y]z = (x,y)z – y[x,z]$

(vi) $([x,y],z) = [x,(y,z)] – ([x,z],y)$

(vii) $[x,yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$

(viii) $[xy,z]_{\sigma,\tau} = x[y,z]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(z)]y = x[y,\sigma(z)] + [x,z]_{\sigma,\tau}y$

(ix) $(x,yz)_{\sigma,\tau} = \tau(y)(x,z)_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$

(x) $(xy,z)_{\sigma,\tau} = x(y,z)_{\sigma,\tau} - [x,\tau(z)]y = x[y,\sigma(z)] + (x,z)_{\sigma,\tau}y$

(xi) $[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau} = [x,[y,z]]_{\sigma,\tau} + [[x,z]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau}$

(xii) $[x,[y,z]]_{\sigma,\tau} = ((x,y)_{\sigma,\tau},z)_{\sigma,\tau} - ((x,z)_{\sigma,\tau},y)_{\sigma,\tau}$

(xiii) $[(x,y)_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau} = ([x,z]_{\sigma,\tau},y)_{\sigma,\tau} + (x,[z,y])_{\sigma,\tau}$

BÖLÜM 3
TÜREV

3.1. Asal Halkalarda Türev

Lemma 3.1.1 : R bir asal halka, $a\in R$ ve $d:R\to R$ bir türev olsun. $ad(x) = 0$, $\forall x\in R$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat : $d\neq 0$ olsun. $ad(x) = 0$, $\forall x\in R$ ifadesinde x yerine $xy, y\in R$ alınırsa, $0 = ad(xy) = ad(x)y + axd(y)$ olur. Hipotezden ilk terim sıfır olacağından $axd(y) = 0, \forall x,y\in R$, yani $aRd(R) = (0)$ bulunur. R nin asallığından $a = 0$ veya $d(R) = (0)$ elde edilir. $d\neq 0$ kabul etmiştik. O halde $a = 0$ dır.

Lemma 3.1.2 : R bir asal halka ve $p,q,r\in R$ olsun. Buna göre, $paqar = 0$, $\forall a\in R$ ise $p = 0$ veya $q = 0$ veya $r = 0$ dır.

İspat : $\forall a\in R$ için $paqar = 0$ olsun. a üzerinde lineerleştirme yapılırsa, $0 = p(a + b)q(a + b)r = paqar + paqbr + pbqar + pbqbr$, $\forall a,b\in R$ olur. Hipoteze göre ilk ve son terim sıfırdır. O halde $paqbr + pbqar = 0$, $\forall a,b\in R$ bulunur.

$pa = 0$ ise, $pbqar = 0$, $\forall b\in R$, yani $pRqar = (0)$ olur. R asal olduğundan $p = 0$ veya $qar = 0$ dır.

Öte yandan $pa = 0$ olduğundan $pat = 0, \forall t\in R$ dir. Öyleyse $p = 0$ veya $qatr = 0$, $\forall t\in R$, yani $p = 0$ veya $qaRr = (0)$ olur. R nin asallığından $p = 0$ veya $qa = 0$ veya $r = 0$ bulunur.

Sonuç olarak $pa = 0$ ise $p = 0$ veya $qa = 0$ veya $r = 0$ elde edilir. O halde hipotezden $paqar = 0$ ise $p = 0$ veya $r = 0$ veya $qaqar = 0$ olur.

$qaqar = 0, \forall a\in R$ olsun. a üzerinde linnerleştirme yapılırsa, $0 = q(a + b)q(a +b)r = qaqbr + qbqar$ olduğundan $qaqbr + qbqar = 0$, $\forall a,b\in R$ bulunur.

$ar = 0$ ise $qaqbr = 0$, $\forall b\in R$, yani $qaqRb = (0)$ dır. R asal olduğundan $qaq = 0$ veya $r = 0$ olur.

Yine $ar = 0$ ise $tar = 0$, $\forall t \in R$ dir. O halde $r = 0$ veya $qtaq = 0$, $\forall t \in R$, yani $r = 0$ veya $qRaq = (0)$ dır. R nin asallığından $r = 0$ veya $q = 0$ veya $aq = 0$ bulunur.

Sonuçta $ar = 0$ ise $r = 0$ veya $q = 0$ veya $aq = 0$ elde edilir. O halde $qaqar = 0$, $\forall a,b \in R$ ise $r = 0$ veya $q = 0$ veya $qaqaq = 0$ dır.

$qaqaq = 0$, $\forall a \in R$ ise a üzerinde lineerleştirme yapılırsa $0 = q(a + b)q(a + b)q = qaqaq + qaqbq + qbqaq + qbqbq$, yani $qaqbq + qbqaq = 0$, $\forall a,b \in R$ olur. b yerine aqb alınırsa, $qaq(aqb)q + q(aqb)qaq = 0$, $\forall a,b \in R$, yani $qaqbqaq = 0$, $\forall a,b \in R$ bulunur. Yani $qaqRqaq = (0)$, $\forall a \in R$ dir. R asal olduğundan $qaq = 0$, $\forall a \in R$ olur. Bu da $qRq = (0)$ demektir. Yine R nin asallığından $q = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak $paqar = 0$, $\forall a \in R$ ise $p = 0$ veya $q = 0$ veya $r = 0$ bulunur.

Teorem 3.1.3 : R bir asal halka, $\mathrm{char}R \neq 2$ ve $d_1, d_2 : R \to R$ iki türev olsun. Buna göre, $d_1 d_2$ türev ise d_1 ve d_2 den en az birisi sıfırdır.

İspat: $d_1 d_2$ türev ise $d_1 d_2(ab) = d_1 d_2(a)b + a\, d_1 d_2(b), \forall a,b \in R$ dir.

Öte yandan, $d_1 d_2(ab) = d_1(d_2(a)b) + d_1(ad_2(b)) = d_1 d_2(a)b + d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) + ad_1 d_2(b)$, $\forall a,b \in R$ dir. İlk bulunan eşitlikle bu son eşitlik karşılaştırılırsa,

$$d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) = 0, \ \forall a,b \in R \qquad (3.1)$$

olur. (3.1) eşitliğinde a yerine $ad_1(c)$, $c \in R$ alınırsa, $0 = d_2(ad_1(c))d_1(b) + d_1(ad_1(c))d_2(b) = d_2(a)d_1(c)d_1(b) + ad_2 d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + ad_1^2(c)d_2(b)$, yani $d_2(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + a(d_2 d_1(c)d_1(b) + d_1^2(c)d_2(b)) = 0$, $\forall a,b,c \in R$ bulunur. (3.1) kullanılırsa, bu eşitliğin üçüncü terimi sıfıra eşit olur. Öyleyse,

$$d_2(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) = 0, \ \forall a,b,c \in R \qquad (3.2)$$

dır. Yine (3.1) de a yerine c alınırsa, $d_2(c)d_1(b) + d_1(c)d_2(b) = 0$, $\forall b,c \in R$, yani $d_1(c)d_2(b) = -d_2(c)d_1(b)$, $\forall b,c \in R$ bulunur. Bu ifade (3.2) de yerine yazılırsa, $d_2(a)d_1(c)d_1(b) - d_1(a)d_2(c)d_1(b) = 0$, $\forall a,b,c \in R$ olur. Bu eşitliği

$(d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c))d_1(b) = 0,\ \forall a,b,c \in R$ şeklinde yazabiliriz. Lemma 3.1.1 kullanılırsa, $d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0,\ \forall a,c \in R$ veya $d_1 = 0$ bulunur.

$d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0,\ \forall a,c \in R$ olsun. (3.1) de b yerine c alınırsa, $d_2(a)d_1(c) + d_1(a)d_2(c) = 0,\ \forall a,c \in R$ olur. İki eşitlik toplanırsa, $\text{char}R \neq 2$ olduğundan $d_2(a)d_1(c) = 0,\ \forall a,c \in R$ bulunur. Lemma 3.1.1 den $d_1 = 0$ veya $d_2(a) = 0,\ \forall a \in R$ elde edilir. Sonuç olarak $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ bulunur.

Lemma 3.1.4 : R bir asal halka ve $d{:}R \to R$ bir türev olsun. $ad(a) - d(a)a = 0,\ \forall a \in R$ ise R komütatif veya $d = 0$ dır.

İspat : $\forall a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ olsun. a üzerinde lineerleştirme yapılırsa, $0 = (a + b)d(a + b) - d(a + b)(a + b) = ad(a) + ad(b) + bd(a) + bd(b) - d(a)a - d(a)b - d(b)a - d(b)b,\ \forall a,b \in R$ olur. Hipotez kullanılırsa $ad(b) - d(a)b = d(b)a - bd(a),\ \forall a,b \in R$ bulunur.

Öte yandan, d türev olduğu için $d(ab) = d(a)b + ad(b),\ \forall a,b \in R$ dir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi bir üst paragrafta bulduğumuz son eşitlikte her iki tarafa eklersek,

$$2ad(b) = d(b)a - bd(a) + d(ab),\ \forall a,b \in R \qquad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) de b yerine ax, $x \in R$ alınırsa,

$$a^2 d(x) = d(a)xa + ad(x)a - axd(a),\ \forall a,x \in R \qquad (3.4)$$

elde edilir. Bu kez (3.3) eşitliğinde b yerine xa, $x \in R$ alınırsa, $2ad(x)a + 2axd(a) = d(x)a^2 + xd(a)a - xad(a) + d(a)xa + ad(x)a + axd(a),\ \forall a,x \in R$ olur. Hipotezden $xad(a) - xd(a)a = 0,\ \forall a,x \in R$, yani $xd(a)a - xad(a) = 0,\ \forall a,x \in R$ olacağından,

$$d(x)a^2 = ad(x)a + axd(a) - d(a)xa,\ \forall a,x \in R \qquad (3.5)$$

bulunur. (3.4) ve (3.5) toplanırsa,

$$a^2 d(x) + d(x)a^2 = 2ad(x)a,\ \forall a,x \in R \qquad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$a(d(x)a - ad(x)) = (d(x)a - ad(x))a,\ \forall a,x \in R \qquad (3.7)$$

olur. (3.7) de a yerine $a + d(x)$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, $d(x)(d(x)a - ad(x)) = (d(x)a - ad(x))d(x),\ \forall a,x \in R$ bulunur. d(x) ile belirlenen

$D_{d(x)} : R \rightarrow R$ iç türevi düşünülürse yukarıdaki eşitlikten $D^2_{d(x)}(a) = 0$, $\forall a,x \in R$ elde edilir.

$charR \neq 2$ olsun. Teorem 3.1.3 den $D_{d(x)}(a) = 0$, $\forall a,x \in R$ olacağından $d(x)a - ad(x) = 0$, $\forall a,x \in R$, yani $d(x)a = ad(x)$, $\forall a,x \in R$ dir. O halde $d(x) \in Z$, $\forall x \in R$ dir.

A, a ile belirlenen iç türev olmak üzere $ad(x) - d(x)a = 0$, $\forall x \in R$ olduğundan $Ad(x) = 0$, $\forall x \in R$ dir. Teorem 3.1.3 den $A = 0$ veya $d = 0$ bulunur. Öyleyse $ax - xa = 0$, $\forall x \in R$ veya $d = 0$, yani $ax = xa$, $\forall a,x \in R$ veya $d = 0$ dır. Yani $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

$charR = 2$ ise (3.6) nın sağ tarafı sıfır olacağından $a^2 d(x) = d(x)a^2$, $\forall a,x \in R$ dir. Yani d(x), R halkasındaki her elemanın karesiyle değişmelidir.

R, $charR = 2$ olan bir asal halka ve $e \in R$, R halkasındaki her elemanın karesiyle değişmeli olsun.

$$a^2 e = e a^2, \ \forall a \in R \tag{3.8}$$

(3.8) de a üzerinde lineerleştirme yapılıp yine (3.8) kullanılırsa,

$$(ab + ba)e = e(ab + ba), \ \forall a,b \in R \tag{3.9}$$

bulunur. Bu eşitlikte b yerine ae alınıp yine (3.8) kullanılırsa,

$$aeae = eaea, \ \forall a \in R \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.9) da b yerine e alınırsa,

$$ae^2 = e^2 a, \ \forall a \in R \tag{3.11}$$

olur. $\forall a \in R$ için $(ae + ea)^2 = aeae + ae^2a + ea^2e + eaea$ dir. Sırasıyla (3.10) eşitliği, $charR = 2$ olduğu, (3.11) ve (3.8) eşitlikleri kullanılırsa, $(ae + ea)^2 = 2e^2a^2$, $\forall a \in R$ bulunur. $charR = 2$ olduğundan,

$$(ae + ea)^2 = 0, \ \forall a \in R \tag{3.12}$$

elde edilir.

Şimdi $x,y\in R$ için $xy = 0$ olsun. (3.9) dan $(xy + yx)e = e(xy + yx)$ dir. Kabulümüzden,

$$yxe = eyx \tag{3.13}$$

bulunur. $xy = 0$ ise $x^2y = 0$ olduğundan (3.13) den $yx^2e = eyx^2$ olur. (3.8) kullanılırsa, $yex^2 = eyx^2$ elde edilir. $\mathrm{char}R = 2$ ise $yex^2 + eyx^2 = 0$, yani

$$(ye + ey)x^2 = 0 \tag{3.14}$$

dır. $xy = 0$ ise $(ax)y = 0$, $\forall a\in R$ olduğundan (3.14) de x yerine ax alınabilir. $0 = (ye + ey)(ax)^2 = (ye + ey)(axax)$ olduğundan Lemma 3.1.2 kullanılırsa $ye + ey = 0$ veya $x = 0$ bulunur.

Benzer şekilde, $\forall v\in R$ için $x(yv) = 0$ olduğundan (3.14) de y yerine yv alınırsa, $yve + eyv = 0$ veya $x = 0$ elde edilir. Yani $x = 0$ veya $y(ve - ev) = 0$ dır. Lemma 3.1.1 den $x = 0$ veya $y = 0$ veya $ev = ve$, $\forall v\in R$ bulunur. Öyleyse $xy = 0$ ise $x = 0$ veya $y = 0$ veya $e\in Z$ dir. (3.12) düşünülürse, $ae + ea = 0$, $\forall a\in R$ veya $e\in Z$ olacağından $e\in Z$ elde edilir. Buna göre $a^2d(x) = d(x)a^2, \forall a,x\in R$ ifadesinden $d(x)\in Z$, $\forall x\in R$ bulunur.

$d(b) = 0$ olsun. $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ ve $d(ab)\in Z$ olduğundan $d(a)b\in Z$ dir.

$d\neq 0$ olsun. $d(a)\neq 0$ olacak biçimde $\exists a\in R$ vardır. $d(a)bx = xd(a)b = d(a)xb$, $\forall x\in R$ dir. Öyleyse $d(a)(bx - xb) = 0$, $\forall x\in R$ dir. b ile belirlenen iç türev d_b olmak üzere $d(a)d_b(R) = (0)$ olur. Lemma 3.1.1 den $d(a) = 0$ veya $d_b = 0$ dır. $d(a)\neq 0$ olduğundan $d_b = 0$, yani $bx - xb = 0$, $\forall x\in R$ bulunur. O halde $b\in Z$ dir. Yani $d(b) = 0$ ise $b\in Z$ dir.

Fakat $d(c^2) = d(c)c + cd(c)$, $\forall c\in R$ dir. $d(c)\in Z$ olduğundan $d(c^2) = 2d(c)c$, $\forall c\in R$ olur. $\mathrm{char}R = 2$ ise $2d(c)c = 0$, $\forall c\in R$ dır. Öyleyse $d(c^2) = 0$, $\forall c\in R$ bulunur. Bir üst paragrafta elde edilen sonuçtan $c^2\in Z$, $\forall c\in R$ dir. Yani, $c^2x = x\,c^2$, $\forall c,x\in R$ dir. O halde $x\in Z$, $\forall x\in R$ dir. R halkası komütatif olur.

Sonuç olarak $ad(a) - d(a)a = 0$, $\forall a \in R$ ise $d = 0$ veya R halkası komütatif bulunur.

BÖLÜM 4
YARI TÜREV

4.1. Asal Halkalarda Yarı Türev ve Komütatiflik

Tanım 4.1.1 : R bir halka ve $f:R\rightarrow R$, toplamsal bir dönüşüm olmak üzere, $\forall\, x,y\in R$ için,

(i) $f(xy) = f(x)g(y) + xf(y) = f(x)y + g(x)f(y)$

(ii) $f(g(x)) = g(f(x))$

olacak biçimde bir $g:R\rightarrow R$ dönüşümü varsa, f dönüşümüne bir *yarı türev* denir.

$g\neq 1$ bir homomorfizma olmak üzere $f = g - 1$ ise f bir yarı türevdir

Bu bölümde Teorem 4.1.15 e kadar f dönüşümü, aksi söylenmedikçe, bir g örten fonksiyonuyla yapılan yarı türev olarak alınacaktır.

Lemma 4.1.2 : $a\in R$ ve f, sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Buna göre, $\forall\, x\in R$ için $af(x) = 0$ ($f(x)a = 0$) ise $a = 0$ dır.

İspat : $x,y\in R$ için, $axf(y) = a(f(xy) - f(x)g(y)) = af(xy) - af(x)g(y) = 0$ olduğundan $aRf(y) = 0, \forall\, y\in R$ dir. R nin asallığından $a = 0$ veya $f(y) = 0$, $\forall\, y\in R$ bulunur. $f\neq 0$ olduğundan $a = 0$ olur.

$f(x)a = 0$ ise $a = 0$ olduğu da benzer biçimde gösterilir.

Teorem 4.1.3 : f, sıfırdan farklı, örten olması gerekmeyen bir g dönüşümüyle yapılan bir yarı türev ise g bir homomorfizmdir.

İspat : $x,y,z\in R$ için, $f(z(x + y)) = f(z)g(x + y) + zf(x + y) = f(z)g(x + y) + zf(x) + zf(y)$ dir.

Öte yandan $f(z(x + y)) = f(zx + zy) = f(zx) + f(zy) = f(z)g(x) + zf(x) + f(z)g(y) + zf(y)$, $\forall\, x,y,z\in R$ dir. Son eşitlik ile bir üst paragraftaki son eşitlik karşılaştırılırsa, $f(z)g(x + y) = f(z)g(x) + f(z)g(y), \forall\, x,y,z\in R$, yani $f(z)(g(x + y) - g(x) - g(y)) = 0$, $\forall\, x,y,z\in R$ bulunur. Lemma 4.1.2 den $g(x + y) - g(x) - g(y) = 0$, $\forall\, x,y,z\in R$ elde edilir. Buradan $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall\, x,y\in R$ olduğundan g dönüşümü toplamayı korur.

Yine $x,y,z \in R$ için, $f((xy)z) = f(xy)z + g(xy)f(z) = g(xy)f(z) + (f(x)y + g(x)f(y))z$ olur. Aynı zamanda $x,y,z \in R$ için $f(x(yz)) = g(x)f(yz) + f(x)yz = g(x)(f(y)z + g(y)f(z)) + f(x)yz = g(x)g(y)f(z) + (g(x)f(y) + f(x)y)z$ dir. Son iki eşitlik karşılaştırılırsa, $g(xy)f(z) = g(x)g(y)f(z)$, $\forall x,y,z \in R$ bulunur. Bu da $(g(xy) - g(x) - g(y))f(z) = 0$, $\forall x,y,z \in R$ demektir. Lemma 4.1.2 den $g(xy) = g(x)g(y)$, $\forall x,y \in R$ olacağından g dönüşümü çarpmayı da korur, yani bir homomorfizmdir.

Lemma 4.1.4 : f, sıfırdan farklı bir yarı türev ve $f(R) \subset Z$ ise R bir sıfır bölensiz, komütatif halkadır.

İspat : f bir yarı türev olduğundan $f(xy) = xf(y) + f(x)g(y)$, $\forall x,y \in R$ dir. Hipotezden $xf(y) + f(x)g(y) \in Z$, $\forall x,y \in R$ olur. $\forall x,y \in R$ için, $x(xf(y) + f(x)g(y)) = (xf(y) + f(x)g(y))x$ yani, $xxf(y) + xf(x)g(y) = xf(y)x + f(x)g(y)x$, $\forall x,y \in R$ yazılabilir. Yine hipotez kullanılırsa $f(x)[x,g(y)] = 0$, $\forall x,y \in R$ elde edilir. g dönüşümü örten olduğundan $f(x)[x,y] = 0$, $\forall x,y \in R$ bulunur. Aynı zamanda $f(x) \in Z$ olduğundan $\forall x,y \in R$ için $f(x) = 0$ veya $[x,y] = 0$ elde edilir. $A = \{x \in R \mid f(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in R \mid [x,y] = 0, \forall y \in R\}$ kümelerini düşünelim. Brauer's Trick den A = R veya B = R olmalıdır.

A = R olsa $\forall x \in R$ için, $f(x) = 0$ olacağından f = 0 bulunur. Çelişkidir. O halde B = R dir. Yani $\forall x,y \in R$ için, $[x,y] = 0$ dır. Dolayısıyla R halkası komütatif olur.

Şimdi $cd = 0$ olacak biçimde $c,d \in R$ alalım. $rcd = 0$, $\forall r \in R$ dir. R komütatif olduğundan $crd = 0$, $\forall r \in R$, yani $cRd = (0)$ yazılabilir. R nin asallığından c = 0 veya d = 0 bulunur. cd = 0 olduğunda c = 0 veya d = 0 bulunduğundan R sıfır bölensizdir. Dolayısıyla R bir sıfır bölensiz, komütatif halkadır.

Teorem 4.1.5 : f, sıfırdan farklı bir yarı türev ve $a \in R$ için $af(R) \subset Z$ olsun. Buna göre, a = 0 veya R komütatiftir.

İspat : $a \notin Z$ olsun. O halde $a \neq 0$ dır. $x \in R$ için, $a[a,f(x)] = a(af(x) - f(x)a) = aaf(x) - af(x)a = [a,af(x)] = 0$ dır.

Öte yandan, $x\in R$ için, $af[a,x] = af(ax - xa) = a(f(a)g(x) + af(x) - f(x)a - g(x)f(a)) = a([a,f(x)] + [f(a),g(x)]) = a[f(a),g(x)]$ olur. $af[a,x]\in Z$ olduğundan $a[f(a),g(x)]\in Z$ dir. g dönüşümü örten olduğundan $a[f(a),x]\in Z$, $\forall x\in R$ olur. Bu ifadede x yerine xf(a) alınırsa, $a[f(a),xf(a)] = a[f(a),x]f(a) + ax[f(a),f(a)] = a[f(a),x]f(a)\in Z$ elde edilir. $a[f(a),x]\in Z$ olduğundan $a[f(a),x] = 0$, $\forall x\in R$ veya $f(a)\in Z$ bulunur. $f(a)\in Z$ ise yine ilk durum söz konusudur. O halde ilk durumu incelemek yeterlidir**.** (Herstein, 1976) Lemma 1.1.7 nin sonucundan $a\neq 0$ olduğundan $f(a)\in Z$ dir. Hipotez kullanılırsa $f(a) = 0$ veya $a\in Z$ olur. $a\notin Z$ olsun demiştik. Dolayısıyla $f(a) = 0$ dır. Buna göre $f(ax) = f(a)g(x) + af(x) = af(x)$, $\forall x\in R$ ifadesinden ve hipotezden $f(ax)\in Z$ olur. Yine $af(ax)\in Z$ olduğundan $f(ax) = 0$ veya $a\in Z$ dir. $a\notin Z$ varsayımımızdan $f(ax) = 0$, $\forall x\in R$ bulunur. Dolayısıyla, $af(x) = 0$, $\forall x\in R$ dır. Bu ise Lemma 4.1.2 den $f = 0$ demektir. Çelişki elde edilir. O halde varsayımımız yanlıştır. Yani $a\in Z$ dir.

$af(x)\in Z$ ve $a\in Z$ olduğundan $a = 0$ veya $f(x)\in Z$, $\forall x\in R$, yani $a = 0$ veya $f(R)\subset Z$ bulunur. Lemma 4.1.4 kullanılırsa $a = 0$ veya R komütatif olur.

Sonuç 4.1.6 : R bir asal halka, d, sıfırdan farklı bir türev ve $a\in R$ olsun. Buna göre, $ad(R)\subset Z$ ise $a = 0$ veya R komütatiftir.

Sonuç 4.1.7 : R bir asal halka, $g\neq 1$ bir epimorfizm ve $a\in R$ olsun. Buna göre, $a(g(x) - x))\in Z$, $\forall x\in R$ ise $a = 0$ veya R komütatiftir.

Bu kısımdan itibaren R bir asal halka, charR $\neq$ 2, Z $\neq$ (0) ise F, Z nin kesirler cismi, C genişletilmiş merkez olarak alınacaktır.

Teorem 4.1.8 : f, sıfırdan farklı bir yarı türev ve $a\in R$ olsun. Buna göre, $[a,f(R)] = (0)$ ise $a\in Z$ dir.

İspat : $a\notin Z$ olsun. Hipotezden $0 = [a,f(xf(y))] = [a,f(x)f(y) + g(x)f^2(y)] = f(x)[a,f(y)] + [a,f(x)]f(y) + [a,g(x)f^2(y)] = [a,g(x)f^2(y)]$, $\forall x,y\in R$ elde edilir. g dönüşümü örten olduğundan, $0 = [a,xf^2(y)] = x[a,f^2(y)] + [a,x]f^2(y) = [a,x]f^2(y)$, $\forall x,y\in R$ olur. Lemma 4.1.2 den $f^2(y) = 0$, $\forall y\in R$ bulunur. x yerine xy, $y\in R$ alınırsa, $0 = f^2(xy) = f(f(xy)) = f(f(x)g(y)) + f(xf(y)) = f^2(x)g^2(y) + f(x)f(g(y)) + f(x)g(f(y)) + xf^2(y) = 2f(x)f(g(y))$ elde edilir. charR $\neq$ 2 ve g örten olduğundan,

$f(x)f(y) = 0$, $\forall x,y \in R$ dır. Lemma 4.1.2 kullanılırsa $f(y) = 0$, $\forall y \in R$, yani $f = 0$ bulunur. Çelişkidir. O halde varsayımımız yanlıştır. $a \in Z$ olmalıdır.

Teorem 4.1.9 : f, sıfırdan farklı bir yarı türev ve $a \in R$ olsun. Buna göre, $[a,f(R)] \subset Z$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : $a \notin Z$ olsun. Hipotezden $[a,f[a,x]] \in Z$, $\forall x \in R$ dir. $[a,f[a,x]] = [a,f(ax)] - [a,f(xa)] = af(ax) - f(ax)a - af(xa) + f(xa)a = af(a)g(x) + a^2 f(x) - f(a)g(x)a - af(x)a - af(x)a - ag(x)f(a) + f(x)a^2 + g(x)f(a)a = [a,[a,f(x)]] + [a,[f(a),g(x)]] = [a,[f(a),g(x)]]$, $\forall x \in R$ olduğundan $[a,[f(a),g(x)]] \in Z$, $\forall x \in R$, yani $[a,[f(a),x]] \in Z$ bulunur. a ve f(a) ile belirli iç türevleri düşünürsek $I_a I_{f(a)}(x) \in Z$, $\forall x \in R$ yazılabilir. (Lee ve Lee, 1981) Teorem 4 den $I_a = 0$ veya $I_{f(a)} = 0$ elde edilir. Buradan $a \in Z$ veya $f(a) \in Z$ olur. Varsayımımızdan $f(a) \in Z$ dir.

$x \in R$ için $[a,f(ax)] = [a,f(a)g(x)] + [a,af(x)] = f(a)[a,g(x)] + [a,f(a)]g(x) + a[a,f(x)]$ dir.$[a,f(ax)]$, $f(a) \in Z$ olduğundan,

$$f(a)[a,g(x)] + a[a,f(x)] \in Z, \ \forall x \in R \tag{4.1}$$

olur. Bu ifadeyi a ile komütlersek, $af(a)[a,g(x)] + a^2[a,f(x)] = f(a)[a,g(x)]a + a[a,f(x)]a$, $\forall x \in R$ bulunur. $[a,f(x)] \in Z$ olduğundan $af(a)[a,g(x)] - f(a)[a,g(x)]a = 0$, $\forall x \in R$ dır. Yine f(a) elemanının merkezde ve g dönüşümünün örten olduğu kullanılırsa $f(a)[a,[a,x]] = 0$, $\forall x \in R$ elde edilir. $f(a) \in Z$ olduğundan $f(a) = 0$ veya $[a,[a,x]] = 0$, $\forall x \in R$ dir.

$f(a) \neq 0$ ise (Herstein, 1976) Lemma 1.1.9 dan $a \in Z$ bulunur. Çelişkidir. O halde $f(a) = 0$ dır. (4.1) ifadesinden $a[a,f(x)] \in Z$, $\forall x \in R$ olur. Hipotezden $[a,f(x)] = 0$, $\forall x \in R$ veya $a \in Z$ elde edilir. $a \notin Z$ olduğundan $[a,f(x)] = 0$, $\forall x \in R$ dir. Teorem 4.1.8 den $a \in Z$ olur. Yine çelişki elde edilir. O halde varsayımımız yanlıştır. $a \in Z$ olmalıdır.

Teorem 4.1.10 : f, sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Buna göre, $[f(R),f(R)] \subset Z$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : Teorem 4.1.9 dan $f(R) \subset Z$ dir. Dolayısıyla Lemma 4.1.4 den R halkası komütatif olur.

Teorem 4.1.11 : f, sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Buna göre, $f^2(R) \subset Z$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : Hipotezden $x,y \in R$ için, $f^2([x,y]) \in Z$ dir. $f^2([x,y]) = f(f(xy) - f(yx)) = f(f(x)y + g(x)f(y) - f(y)g(x) - yf(x)) = f^2(x)y + g(f(x))f(y) - f(y)g(f(x)) - yf^2(x) + f(g(x))f(y) + g^2(x)f^2(y) - f^2(y)g^2(x) - f(y)f(g(x)) = [f^2(x),y] + [g(f(x)),f(y)] + [f(g(x)),f(y)] + [g^2(x),f^2(y)] = 2[f(g(x)),f(y)]$, $\forall x,y \in R$ ifadesinden $2[f(g(x)),f(y)] \in Z$, $\forall x,y \in R$ olur. $\text{char}R \neq 2$ ve g dönüşümü örten olduğundan, $[f(x),f(y)] \in Z$, $\forall x,y \in R$ elde edilir. Yani $[f(R),f(R)] \subset Z$ dir. Teorem 4.1.10 dan R halkası komütatif bulunur.

Teorem 4.1.12 : f_1 ve f_2 sırasıyla g_1 ve g_2 epimorfizmleriyle yapılan sıfırdan farklı yarı türevler olsunlar. Buna göre, $f_1 f_2(R) \subset Z$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: Hipotezden $x,y \in R$ için, $f_1 f_2[x,y] \in Z$ dir. $\forall x,y \in R$ için, $f_1 f_2[x,y] = f_1 f_2(xy - yx) = f_1(f_2(x)y) - f_1(yf_2(x)) + f_1(g_2(x)f_2(y)) - f_1(f_2(y)g_2(x)) = f_1(f_2(x))y + g_1(f_2(x))f_1(y) - f_1(y)g_1(f_2(x)) - yf_1(f_2(x)) + f_1(g_2(x))f_2(y) + g_1(g_2(x))f_1(f_2(y)) - f_1(f_2(y))g_1(g_2(x)) - f_2(y)f_1(g_2(x)) = [g_1(f_2(x)),f_1(y)] + [f_1(g_2(x)),f_2(y)]$ olduğundan, $[g_1(f_2(x)),f_1(y)] + [f_1(g_2(x)),f_2(y)] \in Z$, $\forall x,y \in R$ bulunur. y yerine $f_2(y)$ alınırsa, $[f_1(g_2(x)),f_2^2(y)] \in Z$, $\forall x,y \in R$ elde edilir. g_2 bir epimorfizm olduğundan, $[f_1(x),f_2^2(y)] \in Z$, $\forall x,y \in R$ yazılabilir. Yani $[f_1(R),f_2^2(R)] \subset Z$ dir. Teorem 4.1.9 dan $f_2^2(R) \subset Z$ olur. Dolayısıyla Teorem 4.1.11 den R halkası komütatif bulunur.

Teorem 4.1.13 : R, 2 torsion free bir asal halka, f, g epimorfizmiyle yapılan sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Buna göre, $[a,f(a)] \in Z$, $\forall a \in R$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $[a,f(a)] \in Z$ ifadesinde a üzerinde linnerleştirme yapılırsa, $[a + x,f(a + x)] = [a,f(a)] + [a,f(x)] + [x,f(a)] + [x,f(x)]$, $\forall a,x \in R$ olur. Eşitliğin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ilk ve son terim merkezde olacağından, $[a,f(x)] + [x,f(a)] \in Z, \forall a,x \in R$ dir. Son ifadede x yerine $[a,x]$ alınırsa, $[a,[f(a),x]] + [a,[g(a),f(x)]] + [f(a),[x,a]] \in Z$, $\forall a,x \in R$ bulunur. Jacobi özdeşliği kullanılırsa, $[a,[g(a),f(x)]] \in Z$, $\forall a,x \in R$ olur.

$\forall a \in R$ için, $0 = f([a,a]) = f(aa) - f(aa) = f(a)a + g(a)f(a) - f(a)g(a) - af(a) = [f(a),a] + [g(a),f(a)]$ ve $[f(a),a] \in Z$ olduğundan, $[g(a),f(a)] \in Z$, $\forall a \in R$ dir. Şimdi a üzerinde linnerleştirme yapılırsa, $[g(a + x),f(a + x)] = [g(a),f(a)] + [g(a),f(x)] + [g(x),f(a)] + [g(x),f(x)]$, $\forall a,x \in R$ olur. $[g(a),f(a)]$, $[g(x),f(x)] \in Z$, $\forall a,x \in R$ olduğundan, $[g(a),f(x)] + [g(x),f(a)] \in Z$, $\forall a,x \in R$ elde edilir. Bu ifade a ile komütlenirse, $[a,[g(a),f(x)]] + [a,[g(x),f(a)]] = 0$, $\forall a,x \in R$ bulunur. İlk terim merkezde olduğundan ve g dönüşümü örten olduğundan, $[a,[f(a),x]] \in Z$, $\forall a,x \in R$ yazılabilir. Bu durumda $a \in Z$ veya $f(a) \in Z$ olduğu daha önce gösterilmişti. $A = \{a \in R \mid a \in Z\}$ ve $B = \{a \in R \mid f(a) \in Z\}$ kümeleri düşünülürse Brauer's Trick den $R = A$ veya $R = B$ olmalıdır.

$R = B$ ise $f(R) \subset Z$ dir. Lemma 4.1.4 den R halkası komütatif bulunur. $R = A$ ise $R = Z$ olacağından R halkası yine komütatif bulunur.

Teorem 4.1.14 : R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a,b \in R$ olsun. Buna göre $[a,[b,U]] \subset Z$ ise $a \in Z$ veya $b \in Z$ dir.

Sonuç 4.1.15 : $[a,U] \subset Z$ ise $a \in Z$ dir.

Teorem 4.1.16 : R bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, g dönüşümü, U ideali üzerinde 1-1 olan bir endomorfizm ve $[g(x),x] \in U$, $\forall x \in U$ olsun. Buna göre R halkası komütatiftir.

Lemma 4.1.17 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve f, sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Bu taktirde, f, U üzerinde sıfırdan farklıdır.

İspat: $f(U) = (0)$ olsun. $\forall x \in R$, $u \in U$ için $0 = f(ux) = f(u)g(x) + uf(x) = uf(x)$, $\forall x \in R$, $u \in U$, yani $Uf(R) = (0)$ elde edilir. R nin asallığından $U = (0)$ veya $f(R) = (0)$ bulunur. Dolayısıyla $U = (0)$ veya $f = 0$ dır. Hipotezden $U = (0)$ elde edilir. Çelişkidir. Yani f, U üzerinde sıfırdan farklıdır.

Lemma 4.1.18 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, f, sıfırdan farklı bir yarı türev ve $a \in R$ olsun. Buna göre, $af(U) = (0)$ ise $a = 0$ dır.

İspat : Lemma 4.1.17 den $f(U) \neq (0)$ olacağından $f(u) \neq 0$ olacak biçimde $\exists u \in U$ vardır. $v \in U$ için $0 = af(vu) = a(f(v)g(u) + vf(u)) = af(v)g(u) + avf(u)$ dır. Hipotezden $avf(u) = 0, \forall v \in U$, yani $aUf(u) = (0)$ elde edilir. R asal olduğundan $a = 0$ veya $f(u) = 0$ dır. $f(u) \neq 0$ olduğundan $a = 0$ bulunur.

Lemma 4.1.19 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve f, sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Bu taktirde, $f^2(U) \neq (0)$ dır.

İspat : $f^2(U) = (0)$ olsun. $\forall\, u,v \in U$ için $0 = f^2(uv) = f(f(u)v + g(u)f(v)) = f^2(u)v + g(f(u))f(v) + f(g(u)f(v))$ dır. Varsayımımızdan ilk terim sıfır olacağından,

$$g(f(u))f(v) + f(g(u)f(v)) = 0,\ \forall\, u,v \in U \tag{4.2}$$

bulunur.

Öte yandan, $0 = f^2(uv) = f(f(u)v + g(u)f(v)) = f^2(u)g(v) + f(u)f(v) + f(g(u)f(v))$ dir. Yine varsayımımızdan ilk terim sıfırdır. Dolayısıyla,

$$f(u)f(v) + f(g(u)f(v)) = 0,\ \forall\, u,v \in U \tag{4.3}$$

dır. (4.2) den (4.3) çıkarılırsa,

$$(g(f(u)) - f(u))f(v) = 0,\ \forall\, u,v \in U \tag{4.4}$$

Yani, $(g(f(u)) - f(u))f(U) = (0),\ \forall\, u \in U$ elde edilir. Lemma 4.1.18 den $g(f(u)) = f(u)$, $\forall\, u \in U$ olur.

Öte yandan, $\forall\, u,v \in U$ için $0 = f^2(uv) = f^2(u)g(v) + f(u)f(v) + f(g(u))g(f(v)) + g(u)f^2(v)$ dır. Yine $f^2(U) = (0)$ ifadesi kullanılırsa,

$$f(u)f(v) + f(g(u))g(f(v)) = 0,\ \forall\, u,v \in U \tag{4.5}$$

elde edilir. $f(g(u)) = g(f(u)) = f(u)$ ve $g(f(v)) = f(v)$ olacağından bu eşitlikler (4.5) de kullanılırsa, $2f(u)f(v) = 0,\ \forall\, u,v \in U$ bulunur. $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan $f(u)f(v) = 0$, $\forall\, u,v \in U$, yani $f(u)f(U) = (0),\ \forall\, u \in U$ dır. Lemma 4.1.18 den $f(u) = 0,\ \forall\, u \in U$ olur. Yani $f(U) = (0)$ dır. Bu ise Lemma 4.1.17 ile çelişir. O halde $f^2(U) \neq (0)$ olmalıdır.

Lemma 4.1.20 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre, $U \cap g(R) = (0)$ ise $\forall\, x \in R$ için $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat : $W = \sum_{x \in R} U(x - g(x))U$, R nin bir idealidir. Ayrıca $W \neq (0)$ dır. Çünkü $W = (0)$ olsaydı $U(x_1 - g(x_1))U + U(x_2 - g(x_2))U + \ldots + U(x_n - g(x_n))U = (0)$ olacağından her bir terim sıfır olmalıdır. Öyleyse $\forall\, i$ için $U(x_i - g(x_i))U = (0)$ dır. R nin asallığından $x_i - g(x_i) = 0$, $\forall\, i$ yani $g(x_i) = x_i$, $\forall\, x_i \in R$ bulunur. Yani $g = 1$ dir. O halde $U \cap g(R) = U \cap R = U = (0)$ bulunur ki çelişkidir.

Şimdi ϕ:W$\rightarrow$R, $\phi(\sum_{x\in R} u_i(x_i - g(x_i))v_i) = \sum_{x\in R} u_i f(x_i)v_i$, $u_i,v_i \in U, x_i \in R$ dönüşümünü tanımlayalım. ϕ, bir (R,R)-bimodül dönüşümüdür. Teorem 2.40 dan $\phi(w) = \lambda w$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır. Yani $\forall u,v\in U$ için $\phi(u(x - g(x))v) = \lambda(u(x - g(x))v) = u\lambda(x - g(x))v$ elde edilir. ϕ dönüşümünün tanımı kullanılırsa, $uf(x)v = u\lambda(x - g(x))v$, $\forall u,v\in U$ olduğundan $U(f(x) - \lambda(x - g(x)))U = (0)$, $\forall x\in R$ bulunur. R asal olduğundan $f(x) = \lambda(x - g(x))$, $\forall x\in R$ bulunur.

Lemma 4.1.21 : V, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. g dönüşümü 1-1 değil ve $V\subseteq$Kerg ise bu taktirde,

(i) f(V), R nin sıfırdan farklı idealidir.

(ii) $\forall x\in R$ için $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat : (i) Lemma 4.1.17 den $f(V)\neq(0)$ dır. g, 1-1 olmadığından Kerg$\neq(0)$ dır. $\forall v\in V$ için $V\subset$Kerg olduğundan $v\in$ Kerg, yani $g(v) = 0$ dır. $\forall v_1,v_2 \in V$ için, $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)\in f(V)$ dir. $\forall v\in V, r\in R$ için $f(vr) = f(v)r + g(v)f(r) = f(v)r$ ve $f(rv) = rf(v) + f(r)g(v) = rf(v)$ olduğundan $f(v)r$, $rf(v)\in f(V)$ bulunur. f(V), R halkasının sıfırdan farklı ideali olur.

(ii) (i) den f dönüşümünün bimodül dönüşümü olduğu görülmektedir. Öyleyse, $f(v) = \lambda v$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır. $\forall v\in V, r\in R$ için $\lambda vr = f(vr) = vf(r) + \lambda vg(r)$, yani $vf(r) + \lambda vg(r) - \lambda vr = 0$, $\forall v\in V, r\in R$ dir. $\lambda \in C$ olduğundan $v(f(r) + \lambda g(r) - \lambda r) = 0$, $\forall v\in V, r\in R$ yazılabilir. Buradan $f(r) + \lambda g(r) - \lambda r = 0$, $\forall r\in R$ bulunur. O halde $f(r) = \lambda(r - g(r))$, $\forall r\in R$ dir.

Lemma 4.1.22 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, f, sıfırdan farklı bir yarı türev ve g, 1-1 olsun. Buna göre, $f(U)\subset Z$ ise R komütatiftir.

İspat : $r\in R$, $u\in U$ için $f[u,r] = f(u)r + g(u)f(r) - rf(u) - f(r)g(u) = [f(u),r] + [g(u),f(r)] = [g(u),f(r)]$ dir. Hipotezden $[g(u),f(r)]\in Z$ olur. r yerine g(r) alınırsa, $[g(u),f(g(r))] = [g(u),g(f(r))] = g[u,f(r)]$ olduğundan $g[u,f(r)]\in Z$, $\forall r\in R$, $u\in U$ dir.

Şimdi $g[u,f(r)] = g(x)$ diyelim. $g(x)\in Z$ olduğundan $[g(x),r] = 0$, $\forall r\in R$ dir. r yerine g(r) alınırsa, $[g(x),g(r)] = 0$, $\forall r\in R$ olacağından, $[g(x),g(R)] = (0)$, yani g(x), g(R) nin merkezindedir. O zaman $g([u,f(r)])$, g(R) nin merkezinde olur. $[g[u,f(r)],g(y)] = 0$, $\forall r,y\in R$, $u\in U$ yazılabilir. Komütatörler açılıp g dönüşümünün homomorfizm olduğu kullanılırsa, $g([u,f(r)]y) = g(y[u,f(r)])$, $\forall y,r\in R$, $u\in U$ elde edilir. g, 1-1 olduğundan $[u,f(r)]y = y[u,f(r)]$, $\forall y,r\in R$, $u\in U$, yani $[[u,f(r)],y] = 0$, $\forall y,r\in R$, $u\in U$ dır. $[u,f(r)]\in Z$ olur. O halde $[U,f(R)]\subset Z$ dir. Sonuç 4.1.15 den $f(R)\subset Z$ olduğu görülür.

$f(Z) = (0)$ ise $f^2(U)\subset f(Z) = (0)$ olduğundan $f^2(U) = (0)$ dır. Bu da Lemma 4.1.19 ile çelişir. O halde $f(Z)\neq(0)$ dır. Yani $f(z)\neq 0$ olacak biçimde $z\in Z$ vardır. $\forall r\in R$ için $f(zr) = f(z)g(r) + zf(r)$ dir. $f(R)\subset Z$ olduğundan eşitliğin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim merkezin elemanıdır. Z, R halkasının alt halkası olduğundan $f(z)g(r)\in Z$, $\forall r\in R$ olur. $f(z)\in Z$ olduğundan $f(z) = 0$ veya $g(r)\in Z$, $\forall r\in R$ dir. $f(z)\neq 0$ olduğunu söylemiştik. Öyleyse $g(r)\in Z$, $\forall r\in R$, yani $g(R)\subset Z$ bulunur. Buradan $[g(x),r] = 0$, $\forall x,r\in R$ yazılabilir. r yerine g(r) alınırsa, $[g(x),g(r)] = 0$, $\forall x,r\in R$ den $g(xr) = g(rx)$, $\forall x,r\in R$ elde edilir. g dönüşümü 1-1 olduğundan, $xr = rx$, $\forall x,r\in R$ bulunur. Yani R halkası komütatiftir.

Teorem 4.1.23 : R bir asal halka, $\mathrm{char}R\neq 2$, f, g endomorfizmiyle yapılan bir yarı türev olsun. U, R nin sıfırdan farklı ideali olmak üzere $[u,f(u)]\in Z$, $\forall u\in U$ ise,

(i) R komütatif ise f bir türevdir ya da $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olacak biçimde bir $\lambda\in F$ vardır.

(ii) R komütatif değilse $\mathrm{Ker}g\neq(0)$, $g(U)\subset Z$ ve $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olacak biçimde bir $\lambda\in C$ vardır. Ayrıca $f(g(U))\neq(0)$ ise $g(R)\subset Z$ ve $\lambda\in F$ dir.

İspat : (i) $g = 1$ olduğunda f türev olacağından $g\neq 1$ ve $a - g(a)\neq 0$ olacak biçimde $a\in R$ seçelim. $\lambda = f(a)(a - g(a))^{-1}\in F$ olsun. $x\in R$ için, $f(xa) = f(x)a + g(x)f(a) = f(x)g(a) + xf(a)$ olduğundan, $f(x)(a - g(a)) = (x - g(x))f(a)$ yazılabilir. Buradan $f(x) = (x - g(x))f(a)(a - g(a))^{-1}$, yani $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olur.

(ii) Hipotezden $\forall u\in U$ için,

$$[u,f(u)]\in Z \qquad (4.6)$$

dir. u üzerinde lineerleştirme yapılırsa, $[u + a,f(u + a)] = [u,f(u)] + [u,f(a)] + [a,f(u)] + [a,f(a)]$, $\forall u,a\in U$ olur. Yine hipotez kullanılırsa,

$$[a,f(u)] + [u,f(a)]\in Z,\ \forall u,a\in U \qquad (4.7)$$

bulunur. u yerine [a,u] alınırsa,

$$[a,f[a,u]] + [[a,u],f(a)]\in Z,\ \forall u,a\in U \qquad (4.8)$$

elde edilir. $[a,f[a,u]] + [[a,u],f(a)] = [a,f(a)u + g(a)f(u)] - [a,f(u)g(a) + uf(a)] + [[a,u],f(a)] = [a,f(a)u - uf(a)] + [a,g(a)f(u) - f(u)g(a)] + [[a,u],f(a)] = [a,[f(a),u]] + [a,[g(a),f(u)]] + [[a,u],f(a)]$, $\forall u,a \in U$ olduğundan,

$$[a,[f(a),u]] + [a,[g(a),f(u)]] + [[a,u],f(a)] \in Z, \ \forall u,a \in U \tag{4.9}$$

olur. Jacobi özdeşliği kullanılırsa,

$$[[a,f(a)],u] + [f(a),[a,u]] + [a,[g(a),f(u)]] + [[a,u],f(a)] \in Z, \ \forall u,a \in U \tag{4.10}$$

elde edilir. Hipotezden,

$$[a,[g(a),f(u)]] \in Z, \ \forall u,a \in U \tag{4.11}$$

bulunur. Ayrıca $\forall a \in U$ için $0 = f([a,a]) = f(aa) - f(aa) = f(a)a + g(a)f(a) - f(a)g(a) - af(a) = [f(a),a] + [g(a),f(a)]$ ve $[f(a),a] \in Z$ olduğundan,

$$[g(a),f(a)] \in Z, \ \forall a \in U \tag{4.12}$$

olur. a yerine a + u yazılırsa, (4.12) den,

$$[g(a),f(u)] + [g(u),f(a)] \in Z, \ \forall u,a \in U \tag{4.13}$$

bulunur. O halde $0 = [a,[g(a),f(u)] + [g(u),f(a)]] = [a,[g(a),f(u)]] + [a,[g(u),f(a)]]$ $\forall u,a \in U$ dir. (4.11) ifadesinden,

$$[a,[g(u),f(a)]] \in Z, \ \forall u,a \in U \tag{4.14}$$

elde edilir.

Şimdi g dönüşümünün 1-1 olma durumunu inceleyelim

.

$V = g^{-1}(U) = \{v \in R \mid g(v) \in U\}$ kümesini alalım. V kümesi R halkasının bir idealidir.

$V = (0)$ ise $g(R) \cap U = (0)$ dır. Lemma 4.1.20 den $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır. Hipotezden $[f(u),u] \in Z$ dir. Öyleyse, $[\lambda(u - g(u)),u] = [\lambda u,u] - [\lambda g(u),u] = [\lambda,u]u - \lambda[g(u),u] - [\lambda,u]g(u) = -\lambda[g(u),u]$ olduğundan $-\lambda[g(u),u] \in Z$, $\forall u \in U$ elde edilir. Buradan $\lambda = 0$ veya $[g(u),u] \in Z$, $\forall u \in U$ dir. $\lambda \neq 0$ olduğundan $[g(u),u] \in Z$ olur. Teorem 4.1.16 dan R halkası komütatif bulunur. Çelişkidir. $V \neq (0)$ olmalıdır.

$V \neq (0)$ olsun. (4.14) ifadesinde $a = g(v), v \in V$ alınırsa, $[g(v),[g(u),f(g(v))]] = [g(v),[g(u),g(f(v))]] = g[v,[u,f(v)]]$ olduğundan, $g[v,[u,f(v)]] \in Z$, $\forall u \in U, v \in V$ dir. Bu ifade g(R) nin merkezindedir. Üstelik g dönüşümü 1-1 olduğundan

$[v,[u,f(v)]]\in Z$, $\forall u\in U, v\in V$ olur. Z alt halka olduğundan $[v,[f(v),U]]\subset Z$ bulunur. Teorem 4.1.14 den $\forall v\in V$ için $v\in Z$ veya $f(v)\in Z$ elde edilir. $A = \{v\in V \mid v\in Z\}$ ve $B = \{v\in V \mid f(v)\in Z\}$ kümeleri düşünülürse Brauer's Trick den V = A veya V = B dir.

V = A ise $V\subset Z$, yani R komütatif olur. V = B ise $f(V)\subset Z$ dir. Lemma 4.1.22 den R komütatif bulunur. Böylece R halkasının komütatif olmaması durumunda $Kerg \neq (0)$ olduğu gösterilmiş olur.

$W = U\cap Kerg$ olsun. Lemma 4.1.21 den f(W), R nin sıfırdan farklı bir idealidir ve $\forall x\in R$ için, $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olacak biçimde bir $\lambda\in C$ vardır. $u\in U$, $w\in W\subset U$ olduğundan (4.13) den $[g(u),f(w)] + [g(w),f(u)]\in Z$, $\forall u\in U, w\in W$ olur. $w\in Kerg$ olduğundan g(w) = 0 dır. Dolayısıyla $[g(u),f(w)]\in Z$, $\forall u\in U, w\in W$, yani $[g(U),f(W)]\subset Z$ olur. Sonuç 4.1.15 den $g(U)\subset Z$ bulunur.

$f(g(U))\neq(0)$ ise $f(g(a))\neq 0$ olacak biçimde $a\in U$ vardır. $0\neq g(a)\in Z$ için $g(U)\subset Z$ olduğundan $g(ra) = g(r)g(a)\in Z$, $\forall r\in R$ dir. $g(a)\in Z$ demiştik O halde $g(a) = 0$, $\forall a\in U$ veya $g(r)\in Z$, $\forall r\in R$ dir. $g(a)\neq 0$ olduğu için $g(r)\in Z$, $\forall r\in R$, yani $g(R)\subset Z$ olur.

Sonuç olarak $f(g(a)) = \lambda(g(a) - g^2(a))$, $\lambda\in C$ dir. $x\in R$ için, $[\lambda(g(a) - g^2(a)),x] = \lambda[g(a) - g^2(a)),x] + [\lambda,x](g(a) - g^2(a)) = 0$ olduğundan $\lambda(g(a) - g^2(a))\in Z$, yani $f(g(a))\in Z$ elde edilir. Öyleyse $\lambda = f(g(a))(g(a) - g^2(a))^{-1}$ olduğu için $\lambda\in F$ olur.

Teorem 4.1.24 : R bir asal halka, $charR\neq 2$, U, R nin bir ideali ve f, g endomorfizmi ile yapılan sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Buna göre, $[f(U),f(U)]\subset Z$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $Kerg\neq(0)$ ve $W = U\cap Kerg$ ise Lemma 4.1.21 (a) dan $(0)\neq f(W)$, R halkasının bir idealidir. $W\subset U$ olduğundan $[f(W),f(W)]\subset Z$ dir. Sonuç 4.1.15 den $f(W)\subset Z$ bulunur. O halde R halkası komütatiftir.

Şimdi g nin 1-1 olduğunu varsayalım. $g(R)\cap U = (0)$ olsun. Lemma 4.1.20 den $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır. Hipotezden $[[\lambda(u - g(u)), \lambda(v - g(v))], g(r)] = 0$, $\forall r\in R$, $u,v\in U$ dır. $\lambda \neq 0$ olduğundan $[[u - g(u), v - g(v)], g(r)] = 0$, $\forall r\in R, u,v\in U$ elde edilir. $0 = [[u - g(u), v - g(v)], g(r)] = [[u,v],g(r)] - [[u,g(v)],g(r)] - [[g(u),v],g(r)] + [[g(u),g(v)],g(r)]$, $\forall r\in R, u,v\in U$ dır. Yani $[[g(u),g(v)],g(r)] = [[u,g(v)],g(r)] + [[g(u),v],g(r)] - [[u,v],g(r)]$, $\forall r\in R$, $u,v\in U$ eşitliğinden $g[[u,v],r] = [[u,g(v)]+ [g(u),v] - [u,v],g(r)]$, $\forall r\in R, u,v\in U$ elde edilir. Eşitliğin sol tarafı g(R) kümesinin, sağ tarafı ise U idealinin elemanıdır. Öyleyse $g[[u,v],r]\in g(R)\cap U = (0)$ olur. g dönüşümü 1-1 olduğundan $[[u,v],r] = 0$, $\forall r\in R$, $u,v\in U$, yani $[u,v]\in Z$, $\forall u,v\in U$ dir. Bu da $[U,U]\subset Z$ demektir. Sonuç 4.1.15 den $U\subset Z$ bulunur. Öyleyse R halkası komütatiftir.

$g^{-1}(U)\neq(0)$ durumunu inceleyelim. $W = U\cap g^{-1}(U)$ olsun. $u,v\in U$ için, $[f(u),f[f(u),v]] = [f(u),f(f(u)v)] - [f(u),f(vf(u))] = [f(u),f^2(u)g(v)] + [f(u),f(u)f(v)] - [f(u),f(v)f(u)] - [f(u),g(v)f^2(u)] = [f(u),[f^2(u),g(v)]] + [f(u),[f(u),f(v)]]$ dir. Hipotezden $[f(u),[f^2(u),g(v)]]\in Z, \forall u,v\in U$ bulunur. u yerine g(w) alınırsa, $g[f(w),[f^2(w),v]]\in Z, \forall w,v\in U$ elde edilir. g 1-1 olduğundan, $[f(w),[f^2(w),v]]\in Z, \forall w,v\in U$ dir. Teorem 4.1.23 deki çözüm yoluyla $f(W)\subset Z$ veya $f^2(W)\subset Z$ bulunur.

$f(W)\subset Z$ ise Lemma 4.1.22 den R komütatiftir.

$f^2(W)\subset Z$ ise Lemma 4.1.19 dan $f^2(W)\neq(0)$ ise $\alpha = f^2(w)\neq 0$ olacak biçimde $w\in W$ vardır. $u,v\in U, w\in W$ için $[f(f(w)u),f(v)] = f^2(w)[g(u),f(v)] + [f^2(w),f(v)]g(u) + f(w)[f(u),f(v)] + [f(w),f(v)]f(u), \forall\ u,v\in U, w\in W$ dir. $f^2(W)\subset Z$ olduğundan ikinci terim sıfırdır. O halde, $f^2(w)[g(u),f(v)] + f(w)[f(u),f(v)] + [f(w),f(v)]f(u)\in Z, \forall\ u,v\in U, w\in W$ elde edilir. Bu ifade f(y), $y\in U$ ile komütlenirse ve $f^2(W)\subset Z$ ifadesi kullanılırsa, $f^2(w)[[g(u),f(v)],f(y)] + [f(w),f(y)][f(u),f(v)] + [f(w),f(v)][f(u),f(y)] = 0$, $\forall u,v,y\in U, w\in W$ bulunur. Hipotezden,

$$f^2(w)[[g(u),f(v)],f(y)]\in Z,\ \forall u,v,y\in U, w\in W \tag{4.15}$$

elde edilir. $f^2(W) \subset Z$ olduğundan $f^2(w) = 0$, $\forall w \in W$ veya $[[g(u),f(v)],f(y)] \in Z$, $\forall u,v,y \in U$ dır. $f^2(W) \neq (0)$ olduğundan,

$$[[g(u),f(v)],f(y)] \in Z, \ \forall u,v,y \in U \tag{4.16}$$

olur. (4.16) da v ve y yerine g(r), $r \in W$ alınırsa,

$$g([[u,f(r)],f(r)]) \in Z, \ \forall u \in U, r \in W \tag{4.17}$$

elde edilir. g, 1-1 olduğundan $[[u,f(r)],f(r)] \in Z$, $\forall u \in U, r \in W$, yani, $[f(r),[f(r),U]] \subset Z$ dir. Teorem 4.1.14 den $f(r) \in Z$, $\forall r \in W$ den $f(W) \subset Z$ bulunur. Lemma 4.1.23 den R halkası komütatif olur.

BÖLÜM 5
GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

5.1. Genelleştirilmiş Türev ve Komütatiflik

Teorem 5.1.1 : R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. R de, sıfırdan farklı d türeviyle yapılan ve $\forall$ x,y$\in$ I için F([x,y]) = [x,y] koşulunu sağlayan bir F genelleştirilmiş türevi varsa R halkası komütatiftir.

İspat : F = 0 ise I komütatif olacağından Lemma 2.13 den R komütatiftir.

F$\neq$ 0 olsun. x,y$\in$ I için, F([x,y]) = F(xy – yx) = F(xy) – F(yx) = F(x)y + xd(y) – F(y)x – yd(x) = [x,y], yani,

$$F(x)y + xd(y) - F(y)x - yd(x) - [x,y] = 0 , \forall x,y\in I \qquad (5.1)$$

dır. (5.1) de y yerine yz, z$\in$ I alınırsa, 0 = F(x)yz + xd(yz) – F(yz)x – yzd(x) – [x,yz] = F(x)yz + xd(y)z + xyd(z) – F(y)zx – yd(z)x – yzd(x) – y[x,z] – [x,y]z, $\forall$ x,y,z$\in$ I bulunur. (5.1) denklemi sağdan z ile çarpılıp, F(x)yz yalnız bırakılarak yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa, 0 = F(y)xz + yd(x)z + xyd(z) – F(y)zx – yd(z)x – yzd(x) – y[x,z] = F(y)xz + yd(x)z + xyd(z) – F(y)zx – yd(z)x – yzd(x) – y[x,z] – yxd(z) + yxd(z), yani,

$$F(y)[x,z] + y[d(x),z] + [x,y]d(z) + y[x,d(z)] - y[x,z] = 0 , \forall x,y,z\in I \qquad (5.2)$$

elde edilir. (5.2) de z yerine zx alınırsa, 0 = F(y)[x,zx] + y[d(x),zx] + [x,y]d(zx) + y[x,d(zx)] – y[x,zx] = F(y)[x,z]x + yz[d(x),x] + y[d(x),z]x + [x,y]d(z)x + [x,y]zd(x) + y[x,d(z)]x + yz[x,d(x)] + y[x,z]d(x) – y[x,z]x, $\forall$ x,y,z$\in$ I bulunur. (5.2) sağdan x ile çarpılıp yukarıdaki denklem düzenlenirse, 0 = yz[d(x),x] + [x,y]zd(x) + yz[x,d(x)] + y[x,z]d(x), yani,

$$[x,y]zd(x) + y[x,z]d(x) = 0 , \forall x,y\in I \qquad (5.3)$$

olur. (5.3) de y yerine y_1y, $y_1 \in$ I alınıp yine bu eşitlik kullanılırsa, 0 = [x,y_1y]zd(x) + y_1y[x,z]d(x) = [x,y_1]yzd(x), $\forall$ x,y,y_1,z$\in$ I elde edilir. Buradan [x,y_1]y = 0 veya Id(x) = 0, $\forall$ x,y,$y_1 \in$ I olur. A = {x$\in$ I | Id(x) = 0} ve B = {x$\in$ I | [x,y_1]y = 0,$\forall$ y,$y_1 \in$ I} kümeleri düşünülürse bu kümeler I nın altgruplarıdır ve I = A$\cup$B dir. Brauer's Trick'ten I = A veya I = B olmalıdır.

$I = A$ ise $d(I) = (0)$ dır. Lemma 2.14 den çelişki elde edilir. O halde $I = B$ dir. R asal olduğundan $[x,y_1] = 0$, $\forall x,y_1 \in I$ bulunur. Bu da I nın komütatif olması demektir. Lemma 2.13 den R komütatif olur.

Teorem 5.1.2 : R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. R üzerinde, sıfırdan farklı bir d türeviyle belirlenen ve $\forall x,y \in I$ için $F([x,y]) + [x,y] = 0$ koşulunu sağlayan bir F genelleştirilmiş türevi varsa R halkası komütatiftir.

İspat : $F = 0$ ise $[x,y] = 0$, $\forall x,y \in I$ olacağından I ideali komütatiftir. Lemma 2.13 den R halkası komütatif olur.

$F \neq 0$ olsun. Hipotezden $0 = F([x,y]) + [x,y] = F(xy) - F(yx) + [x,y]$, $\forall x,y \in I$, yani,

$$F(x)y + xd(y) - F(y)x - yd(x) + [x,y] = 0, \ \forall x,y \in I \tag{5.4}$$

dır. (5.4) de y yerine yz, $z \in I$ alınırsa, $0 = F(x)yz + xd(yz) - F(yz)x - yzd(x) + [x,yz]$ eşitliğinden,

$$F(x)yz + xd(y)z + xyd(z) - F(y)zx - yd(z)x - yzd(x) + y[x,z] + [x,y]z = 0, \ \forall x,y,z \in I \tag{5.5}$$

bulunur. (5.4) eşitliği sağdan z ile çarpılıp $F(x)yz$ terimi (5.5) de yerine yazılırsa,

$$F(y)[x,z] + y[d(x),z] + [x,yd(z)] + y[x,z] = 0, \ \forall x,y,z \in I \tag{5.6}$$

elde edilir. Şimdi z yerine zx alınırsa, $0 = F(y)[x,zx] + y[d(x),zx] + [x,yd(zx)] + y[x,zx] = F(y)[x,z]x + yz[d(x),x] + y[d(x),z]x + [x,yd(z)]x + y[x,zd(x)] + [x,y]zd(x) + y[x,z]x$, $\forall x,y,z \in I$ olur. (5.6) eşitliğinden,

$$y[x,z]d(x) + [x,y]zd(x) = 0, \ \forall x,y,z \in I \tag{5.7}$$

elde edilir. Şimdi y yerine y_1y, $y_1 \in I$ yazılırsa, (5.7) den $[x,y_1]yzd(x) = 0$, $\forall x,y,y_1,z \in I$ olur. R asal halka olduğundan $[x,y_1] = 0$, $\forall y_1 \in I$ veya $d(x) = 0$ bulunur. $K = \{x \in I \mid [x,y_1] = 0, \ \forall y_1 \in I\}$ ve $L = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ kümeleri düşünülürse Brauer's Trick den $K = I$ veya $L = I$ dır.

$L = I$ ise $d(I) = (0)$ dır. Lemma 2.14 den çelişki elde edilir. O halde $K = I$, yani $[x,y_1] = 0$, $\forall x,y_1 \in I$ dır. Yani I ideali komütatiftir. Lemma 2.13 den R halkası komütatif olur.

Teorem 5.1.3 : R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. R üzerinde sıfırdan farklı bir d türeviyle belirlenen ve $\forall x,y \in I$ için $F(x,y) = (x,y)$ koşulunu sağlayan bir F genelleştirilmiş türevi varsa R halkası komütatiftir.

İspat : $F = 0$ ise, $\forall x,y \in I$ için $(x,y) = 0$ dır. y yerine yz, $z \in I$ alınırsa, $0 = (x,yz) = (x,y)z - y[x,z]$, yani $y[x,z] = 0$ dır. Buradan $[x,z] = 0$, $\forall x,z \in I$ olacağından I komütatiftir. Lemma 2.13 den R halkası komütatif olur.

$F \neq 0$ olsun. Hipotezden, $F(x,y) = (x,y)$ olduğundan, $F(xy + yx) = F(x)y + xd(y) + F(y)x + yd(x) = (x,y)$, $\forall x,y \in I$ dir. O halde,

$$F(x)y + xd(y) + F(y)x + yd(x) - (x,y) = 0 \, , \forall x,y \in I \tag{5.8}$$

olur. (5.8) de y yerine yx alınırsa, $0 = F(x)yx + xd(yx) + F(yx)x + yxd(x) - (x,yx) = F(x)yx + xd(y)x + xyd(x) + F(y)x^2 + yd(x)x + yxd(x) - (x,y)x$ elde edilir. (5.8) denklemi sağdan x ile çarpılıp yukarıdaki denklemde kullanılırsa, $0 = xyd(x) + yxd(x) = (x,y)d(x)$, $\forall x,y \in I$ bulunur. y yerine zy, $z \in I$ alınırsa, $0 = (x,zy)d(x) = z(x,y)d(x) + [x,z]yd(x)$, yani $[x,z]yd(x) = 0$, $\forall x,y,z \in I$ elde edilir. R asal olduğundan $[x,z]I = 0$ veya $d(x) = 0$, $\forall x,z \in I$ dır. $A = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in I \mid [x,z]I = 0 \, , \forall z \in I\}$ kümeleri I nın altgrupları ve $I = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten $I = A$ veya $I = B$ olmalıdır.

$I = A$ ise Lemma 2.14 den $d = 0$ olacağından çelişki elde edilir. O halde $I = B$ olmalıdır. $\forall x,z \in I$ için $[x,z]I = 0$ ise $[x,z] = 0$, yani I ideali komütatiftir. Lemma 2.13 den R halkası komütatif olur.

Teorem 5.1.4 : R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre R halkası üzerinde sıfırdan farklı bir d türeviyle belirlenen ve $\forall x,y \in I$ için $F(x,y) + (x,y) = 0$ koşulunu sağlayan bir F genelleştirilmiş türevi varsa R komütatiftir.

İspat : $F = 0$ ise $(x,y) = 0$, $\forall x,y \in I$ dır. y yerine yz, $z \in I$ alınırsa, $0 = (x,yz) = (x,y)z - y[x,z] = -y[x,z]$, $\forall x,y,z \in I$ olacağından $y[x,z] = 0$, $\forall x,y,z \in I$, yani $I[x,z] = 0$, $\forall x,z \in I$ elde edilir. R asal olduğundan $[x,z] = 0$, $\forall x,z \in I$ dır. Bu durumda I ideali komütatif olur. Lemma 2.13 den R halkası komütatif bulunur.

$F \neq 0$ olsun. Hipotezden $0 = F(x,y) + (x,y) = F(xy) + F(yx) + (x,y)$, $\forall x,y \in I$, yani,

$$F(x)y + xd(y) + F(y)x + yd(x) + (x,y) = 0, \ \forall x,y \in I \qquad (5.9)$$

dır. Bu eşitlikte y yerine yx alınırsa, $0 = F(x)yx + xd(yx) + F(yx)x + yxd(x) + (x,yx) = F(x)yx + xd(y)x + xyd(x) + F(y)x^2 + yd(x)x + yxd(x) + (x,y)x - y[x,x]$, $\forall x,y \in I$ eşitliğinden, $F(x)yx + xd(y)x + xyd(x) + F(y)x^2 + yd(x)x + yxd(x) + (x,y)x = 0$, $\forall x,y \in I$ elde edilir.

(5.9) eşitliği sağdan x ile çarpılıp elde edilen son denklemde yerine konursa, $xyd(x) + yxd(x) = 0$, $\forall x,y \in I$, yani $(x,y)d(x) = 0$, $\forall x,y \in I$ bulunur. y yerine zy alınırsa, $0 = (x,zy)d(x) = z(x,y)d(x) + [x,z]yd(x)$, $\forall x,y,z \in I$ olur. İlk terim sıfıra eşit olduğundan, $[x,z]yd(x) = 0$, $\forall x,y,z \in I$, yani $[x,z]Id(x) = (0)$ dır. R nin asallığından $[x,z] = 0$, $\forall z \in I$ veya $d(x) = 0$ bulunur. $A = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in I \mid [x,z]I = 0, \forall z \in I\}$ kümeleri I idealinin altgruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten I = A veya I = B olmalıdır.

I = A ise Lemma 2.14 den d = 0 dır, çelişkidir. O halde I = B olmalıdır. $\forall x,z \in I$ için $[x,z]I = 0$ ise $[x,z] = 0$, yani I ideali komütatiftir. Lemma 2.13 den R halkası komütatif olur.

5.2. Asal Halkalarda (σ,τ)-Türevler

Bu bölüm boyunca R, karakteristiği 2 den farklı bir asal halka ve σ,τ,α,β dönüşümleri R üzerinde otomorfizmler olarak alınacaktır.

Lemma 5.2.1 : d, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve U, R halkasının sağ ideali olsun. Buna göre, $d(U) \subset Z$ ise R komütatiftir.

Lemma 5.2.2 : d, bir (σ,τ)-türev ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre, $ad(U) = (0)$ $(d(U)a = (0))$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 5.2.3 : $d_1 : R \to R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, $d_2 : R \to R$, sıfırdan farklı bir (α,β)-türev olsun. $d_1 d_2(R) = (0)$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $d_2 \beta^{-1}\alpha + \alpha\beta^{-1} d_2 = 0 = d_2 \alpha^{-1}\beta + \beta\alpha^{-1} d_2$

(ii) $d_2 \alpha^{-1} d_2 = 0 = d_2 \beta^{-1} d_2$

İspat : $x,y\in R$ için, $0 = d_1d_2(xy) = d_1(d_2(x)\alpha(y) + \beta(x)d_2(y)) = d_1d_2(x)\sigma\,\alpha(y) + \tau\, d_2(x)d_1\,\alpha(y) + d_1\,\beta(x)\sigma\, d_2(y) + \tau\,\beta(x)\, d_1d_2(y)$, yani,

$$\tau\, d_2(x)d_1\,\alpha(y) + d_1\,\beta(x)\sigma\, d_2(y) = 0,\ \forall\, x,y\in R \qquad (5.10)$$

dır. (5.10) eşitliğinde x yerine $\beta^{-1}d_2(x)$ alınırsa, $(\tau\, d_2\,\beta^{-1}d_2(x))(d_1\,\alpha(y)) = 0$, $\forall\, x,y\in R$ olur. Bu da $(\tau\, d_2\,\beta^{-1}d_2(x))(d_1\,\alpha(R)) = (0)$ demektir. O halde $\tau\, d_2\,\beta^{-1}d_2(x) = 0,\ \forall\, x\in R$ veya $d_1 = 0$ dır. Buradan, $\tau\, d_2\,\beta^{-1}d_2(x) = 0,\ \forall\, x\in R$, yani,

$$d_2\,\beta^{-1}d_2(x) = 0,\ \forall\, x\in R \qquad (5.11)$$

eşitliği elde edilir. (5.11) de x yerine xy, $y\in R$ alınırsa, $0 = d_2\,\beta^{-1}d_2(xy) = d_2\,\beta^{-1}(d_2(x)\alpha(y) + \beta(x)d_2(y)) = (d_2\,\beta^{-1}d_2(x))(\alpha\beta^{-1}\alpha(y)) + d_2(x)(\,d_2\,\beta^{-1}\,\alpha(y)) + d_2(x)(\alpha\,\beta^{-1}d_2(y)) + \beta(x)(d_2\,\beta^{-1}d_2(y))$, $\forall\, x,y\in R$ ise $d_2(x)((d_2\,\beta^{-1}\,\alpha + \alpha\,\beta^{-1}d_2)(y)) = 0$, $\forall\, x,y\in R$ bulunur. Yani,

$$d_2(R)(d_2\,\beta^{-1}\,\alpha + \alpha\,\beta^{-1}d_2)(y) = (0)\,,\ \forall\, y\in R \qquad (5.12)$$

dır. Lemma 5.2.2 den $(d_2\,\beta^{-1}\,\alpha + \alpha\,\beta^{-1}d_2)(y) = 0$, $\forall\, y\in R$ olur. Son eşitlikte y yerine $\alpha^{-1}d_2(y)$ alınırsa,

$$d_2\,\alpha^{-1}d_2(y) = 0,\ \forall\, y\in R \qquad (5.13)$$

elde edilir. (5.13) eşitliğinde x yerine xy alınırsa, $0 = d_2\,\alpha^{-1}d_2(xy) = d_2(\alpha^{-1}d_2(x)y + \alpha^{-1}\beta(x)\alpha^{-1}d_2(y)) = d_2\,\alpha^{-1}d_2(x)\alpha(y) + \beta\alpha^{-1}d_2(x)d_2(y) + d_2\,\alpha^{-1}\,\beta(x)\alpha\,\alpha^{-1}d_2(y) + \beta\alpha^{-1}\,\beta(x)d_2\,\alpha^{-1}d_2(y)$, $\forall\, x,y\in R$ eşitliğinden $(\beta\alpha^{-1}d_2 + d_2\,\alpha^{-1}\,\beta)(x)d_2(y) = 0$, $\forall\, x,y\in R$ bulunur. Öyleyse $\beta\alpha^{-1}d_2 + d_2\,\alpha^{-1}\,\beta = 0$ dır.

Lemma 5.2.4 : d_1, bir $(\sigma,1)$-türev ve d_2 bir (α,β)-türev olsun. Buna göre $d_2\,\alpha = \alpha\, d_2$, $d_2\,\beta = \beta\, d_2$ ve $d_1d_2(R) = (0)$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : $d_1 \neq 0$ olsun. $x,y\in R$ için, $0 = d_1d_2(xy) = d_1(d_2(x)\alpha(y) + \beta(x)d_2(y)) = d_1d_2(x)\sigma\,\alpha(y) + d_2(x)d_1\,\alpha(y) + d_1\,\beta(x)\sigma\, d_2(y) + \beta(x)\, d_1d_2(y)$, yani,

$$d_2(x)d_1\,\alpha(y) + d_1\,\beta(x)\sigma\, d_2(y) = 0,\ \forall\, x,y\in R \qquad (5.14)$$

dır. (5.14) de y yerine $d_2(y)$ alınıp hipotez kullanılırsa, $d_1(R)\sigma(d_2^2(y)) = (0)$, $\forall y\in R$ bulunur. O halde $d_1 = 0$ veya $\sigma(d_2^2(y)) = 0$, $\forall y\in R$ olur. $\sigma(d_2^2(y)) = 0$, $\forall y\in R$ ise $d_2^2(y) = 0$, $\forall y\in R$ dır. Son eşitlikte y yerine xy alınırsa, $charR\neq 2$ olduğundan $d_2\beta(x)\alpha d_2(y) = 0$, $\forall x,y\in R$ olur. Bu ise $d_2(R)\alpha d_2(y) = (0)$, $\forall y\in R$ demektir. Lemma 5.2.2 den $d_2 = 0$ veya $\alpha d_2(y) = 0$, $\forall y\in R$, yani $d_2 = 0$ elde edilir.

Lemma 5.2.5 : d_1, bir $(1,\tau)$-türev ve d_2, bir (α,β)-türev olsun. Buna göre $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_2\beta = \beta d_2$ ve $d_1 d_2(R) = (0)$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : $d_1\neq 0$ olsun. $x,y\in R$ için, $0 = d_1d_2(xy) = d_1d_2(x)\alpha(y) + \tau d_2(x)d_1\alpha(y) + d_1\beta(x)d_2(y) + \tau\beta(x)d_1d_2(y)$ dir. $d_1d_2(R) = (0)$ olduğundan $\tau d_2(x)d_1\alpha(y) + d_1\beta(x)d_2(y) = 0$, $\forall x,y\in R$ bulunur. Son eşitlikte y yerine $d_2(y)$ alınırsa, hipotezden $d_1\beta(x)d_2^2(y) = 0$, $\forall x,y\in R$, yani $d_1(R)d_2^2(y) = (0)$, $\forall y\in R$ elde edilir. $d_2^2(R) = (0)$ olduğundan $d_2 = 0$ bulunur.

Teorem 5.2.6 : d_1, bir (σ,τ)-türev ve d_2 bir (α,β)-türev olsun. Buna göre, $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_2\beta = \beta d_2$ ve $d_1d_2(R) = (0)$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : Lemma 5.2.3 den $d_1 = 0$ veya $d_2\beta^{-1}d_2 = 0$ dır.

$d_1\neq 0$ olsun. $d_2\beta^{-1}$: $R\rightarrow R$ bir $(\alpha\beta^{-1},1)$-türevdir. O halde $d_2\beta^{-1}d_2 = 0$ ise $d_2\beta^{-1} = 0$ veya $d_2 = 0$ dır. Buradan $\beta\, d_2\beta^{-1} = 0$ veya $d_2 = 0$ bulunur. $d_2\beta = \beta d_2$ olduğundan $d_2 = 0$ bulunur.

Lemma 5.2.7 : d_1, bir (σ,τ)-türev ve d_2 bir (α,β)-türev olsun. Buna göre, $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_2\beta = \beta d_2$ ve $d_1\sigma^{-1}d_2(R) = (0)$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : $d_1\sigma^{-1}$:$R\rightarrow R$ bir $(1,\tau\sigma^{-1})$-türevdir. $d_1\sigma^{-1}d_2 = 0$ olduğundan $d_1\sigma^{-1} = 0$ veya $d_2 = 0$ dır. O halde $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Teorem 5.2.8 : d_1:$R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve d_2:$R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (α,β)-türev olsun. Buna göre $[d_1(R),d_2(R)] = (0)$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $x,y,z\in R$ için, $0 = [d_1(xz),d_2(y)] = d_1(x)[\sigma(z),d_2(y)] + [d_1(x),d_2(y)]\sigma(z) + \tau(x)[d_1(z),d_2(y)] + [\tau(x),d_2(y)]d_1(z)$ dir. $[d_1(R),d_2(R)] = (0)$ olduğundan,

$$d_1(x)[\sigma(z),d_2(y)] + [\tau(x),d_2(y)]d_1(z) = 0,\ \forall x,y,z\in R \tag{5.15}$$

elde edilir. (5.15) de x yerine $\tau^{-1}d_2(y)$ alınırsa,

$$d_1\tau^{-1}d_2(y)[\sigma(z),d_2(y)] = 0,\ \forall y,z\in R \tag{5.16}$$

bulunur. (5.16) da z yerine zt, $t\in R$ alınıp (5.16) kullanılırsa, $d_1\tau^{-1}d_2(y)\sigma(z)[\sigma(t),d_2(y)] = 0$, $\forall y,z,t\in R$ elde edilir. Yani $d_1\tau^{-1}d_2(y)\sigma(R)[\sigma(t),d_2(y)] = (0)$, $\forall y,t\in R$ dır. σ otomorfizm olduğundan $d_1\tau^{-1}d_2(y)R[\sigma(t),d_2(y)] = (0)$ olur. R asal olduğundan $d_1\tau^{-1}d_2(y) = 0$ veya $[\sigma(t),d_2(y)] = 0$, $\forall t\in R$ elde edilir. Dolayısıyla, $d_1\tau^{-1}d_2(y) = 0$ veya $[\sigma(R),d_2(y)] = (0)$ olur. Buradan,

$$d_1\tau^{-1}d_2(y) = 0 \text{ veya } d_2(y)\in Z \tag{5.17}$$

elde edilir. $K = \{y\in R \mid d_2(y)\in Z\}$ ve $L = \{y\in R \mid d_1\tau^{-1}d_2(y) = 0\}$ kümeleri düşünülürse Brauer's Trick den K = R veya L = R dir.

L = R olsaydı $d_1\tau^{-1}d_2(R) = (0)$ olurdu. Lemma 5.2.4 den $d_1\tau^{-1} = 0$ veya $d_2 = 0$ bulunurdu ki bu da $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ demektir. Yani çelişkidir. O halde K = R dir. Dolayısıyla $d_2(R)\subset Z$ dir. Lemma 5.2.1 den R halkası komütatif olur.

Teorem 5.2.9 : $d_1:R\to R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve d_2, sıfırdan farklı bir (α,β)-türev olsun. Buna göre, $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_2\beta = \beta d_2$ ve $(d_1(R),d_2(R)) = (0)$ ise R komütatiftir.

İspat : $x,y,z\in R$ için, $0 = (d_1(xy), d_2(z)) = (d_1(x)\sigma(y) + \tau(x)d_1(y), d_2(z)) = d_1(x)[\sigma(y),d_2(z)] + (d_1(x),d_2(z))\sigma(y) + \tau(x)(d_1(y),d_2(z)) - [\tau(x),d_2(z)]d_1(y)$ dır. $(d_1(R),d_2(R)) = 0$ olduğundan,

$$d_1(x)[\sigma(y),d_2(z)] - [\tau(x),d_2(z)]d_1(y) = 0, \forall x,y,z\in R \tag{5.18}$$

elde edilir. Bu eşitlikte y yerine $\sigma^{-1}d_2(z)$ alınırsa,

$[\tau(x),d_2(z)]d_1(\sigma^{-1}d_2(z)) = 0, \ \forall x,z\in R$ (5.19)

bulunur. (5.19) da x yerine xy, $y\in R$ alınırsa, (5.19) dan $[\tau(x),d_2(z)]\tau(y)d_1(\sigma^{-1}d_2(z)) = 0, \ \forall x,y,z\in R$ bulunur. Yani $[\tau(x),d_2(z)]Rd_1(\sigma^{-1}d_2(z)) = (0)$ dır. R nin asallığından $[\tau(x),d_2(z)] = 0, \ \forall x\in R$ veya $d_1(\sigma^{-1}d_2(z)) = 0$ elde edilir. Bu da $d_2(z)\in Z$ veya $d_1(\sigma^{-1}d_2(z)) = 0$ demektir.

$A = \{z\in R \mid d_2(z)\in Z\}$ ve $B = \{z\in R \mid d_1(\sigma^{-1}d_2(z)) = 0\}$ kümeleri düşünülürse Brauer's Trick den A = R veya B = R olmalıdır.

B = R ise $d_1(\sigma^{-1}d_2(R)) = (0)$ olur. Lemma 5.2.7 den $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir. Çelişkidir. O halde R = A, yani $d_2(R) = (0)$ dır. Lemma 5.2.1 den R komütatif bulunur.

Teorem 5.2.10 : $d_1:R\to R$, sıfırdan farklı (σ,τ)-türev, $d_2:R\to R$, sıfırdan farklı bir (α,β)-türev ve $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_2\beta = \beta d_2$ olsun. Buna göre, $[d_1(R),d_2(R)]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise R komütatiftir.

İspat : $x,y,z\in R$ için, $0 = [d_1(xy),d_2(z)]_{\sigma,\tau} = [d_1(x)\sigma(y) + \tau(x)d_1(y),d_2(z)]_{\sigma,\tau} = d_1(x)[\sigma(y),\sigma d_2(z)] + [d_1(x),d_2(z)]_{\sigma,\tau}\sigma(y) + \tau(x)[d_1(y),d_2(z)]_{\sigma,\tau} + [\tau(x),\tau d_2(z)]d_1(y)$ dır. $[d_1(R),d_2(R)]_{\sigma,\tau} = (0)$ olduğundan $\forall x,y,z\in R$ için, $d_1(x)[\sigma(y),\sigma d_2(z)] + [\tau(x),\tau d_2(z)]d_1(y) = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte y yerine $d_2(z)$ alınırsa,

$[\tau(x),\tau d_2(z)]d_1(d_2(z)) = 0, \ \forall x,z\in R$ (5.20)

bulunur. (5.20) de x yerine xy, $y\in R$ alınırsa, (5.20) den $[\tau(x),\tau d_2(z)]\tau(y)d_1(d_2(z)) = 0, \ \forall x,y,z\in R$ elde edilir. Bu ise $[\tau(x),\tau d_2(z)]Rd_1(d_2(z)) = (0)$ demektir. R nin asallığından $[\tau(x),\tau d_2(z)] = 0$, $\forall x\in R$ veya $d_1(d_2(z)) = 0$ bulunur. Yani $d_2(z)\in Z$ veya $d_1(d_2(z)) = 0$ dır.

$A = \{z\in R \mid d_2(z)\in Z\}$ ve $B = \{z\in R \mid d_1(d_2(z)) = 0\}$ kümeleri düşünülürse Brauer's Trick den R = A veya R = B dir.

R = B ise $d_1 d_2(R) = (0)$ dır. Teorem 5.2.6 dan $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir ki bu da çelişkidir. O halde R = A, yani $d_2(R) \subset Z$ dir. Lemma 5.2.1 den R komütatif olur.

Bundan sonraki kısımda yukarıda ispatlanan sonuçlar U ideali üzerinde genelleştirilmiştir.

Lemma 5.2.11 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, $d:R \rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ olsun. Buna göre, $d^2(U) = (0)$ ise d = 0 dır.

İspat : $\forall u,v \in U$ için $0 = d^2(uv) = d^2(u)\sigma^2(v) + \tau d(u)d\sigma(v) + d\tau(u)\sigma d(v) + \tau^2(u)d^2(v)$ dır. $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$, $d^2(U) = (0)$ ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan $\tau d(u)d\sigma(v) = 0$, $\forall u,v \in U$, yani $\tau d(U)d\sigma(U) = (0)$ dır. $\sigma(U)$, R nin bir idealidir. $\sigma(U) = V$ diyelim. O halde bir üst satırdaki eşitliği $\tau d(U)d(V) = (0)$ şeklinde yazabiliriz. (Aydın ve Kaya, 1992) Lemma 3 kullanılırsa, $\tau d(U) = (0)$ veya d = 0, yani d(U) = (0) veya d = 0 bulunur. d(U) = (0) ise (Aydın ve Kaya, 1992) Lemma 1 den d = 0 bulunur.

Lemma 5.2.12 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve d, R üzerinde sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun. Buna göre, $d(U) \subset C_{\lambda,\mu}$ ise R komütatiftir.

İspat : $\forall x,y \in U$, $r \in R$ için $d(xy) \in C_{\lambda,\mu}$ olduğundan $0 = [d(xy),r]_{\lambda,\mu} = [d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y),r]_{\lambda,\mu} = d(x)[\sigma(y),\lambda(r)] + [d(x),r]_{\lambda,\mu}\sigma(y) + \tau(x)[d(y),r]_{\lambda,\mu} + [\tau(x),\mu(r)]d(y)$ dır. Burada $d(x),d(y) \in C_{\lambda,\mu}$ olduğu kullanılırsa,

$$d(x)[\sigma(y),\lambda(r)] + [\tau(x),\mu(r)]d(y) = 0,\ \forall x,y \in U, r \in R \qquad (5.21)$$

elde edilir. Bu eşitlikte r yerine $\lambda^{-1}\sigma(y)$ alınırsa,

$$[\tau(x),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]d(y) = 0, \forall x,y \in U \qquad (5.22)$$

bulunur. (5.22) de x yerine xt, $t \in U$ alınırsa, $0 = [\tau(xt),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]d(y) = \tau(x)[\tau(t),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]d(y) + [\tau(x),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]\tau(t)d(y)$, $\forall x,y,t \in U$ olur. Son ifadenin ilk terimi (5.22) den sıfıra eşit olacağından

$$[\tau(x),\mu\lambda^{-1}\sigma(y)]\tau(t)d(y) = 0,\ \forall x,y,t \in U \qquad (5.23)$$

elde edilir. Yani $[\tau(x),\mu\,\lambda^{-1}\sigma(y)]\tau(U)d(y) = 0$, $\forall x,y,t\in U$ dır. $\tau(U)$, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve R asal olduğundan

$$[\tau(x),\mu\,\lambda^{-1}\sigma(y)] = 0,\ \forall x\in U \text{ veya } d(y) = 0 \tag{5.24}$$

bulunur.

$[\tau(x),\mu\,\lambda^{-1}\sigma(y)] = 0$, $\forall x\in U$ ise $\tau(U)$ ideal olduğu için $\tau(x)$ yerine $\tau(x)r$, $r\in R$ yazılabilir. O halde $0 = [\tau(x)r,\mu\,\lambda^{-1}\sigma(y)] = \tau(x)[r,\mu\,\lambda^{-1}\sigma(y)] + [\tau(x),\mu\,\lambda^{-1}\sigma(y)]r$ dır. (5.24) önermesi $\tau(x)[r,\mu\,\lambda^{-1}\sigma(y)] = 0, \forall x\in U, r\in R$ veya $d(y) = 0$ şeklinde yazılabilir. $\tau(U)$, sıfırdan farklı bir ideal ve R asal olduğundan $\forall r\in R, y\in U$ için $[r,\mu\,\lambda^{-1}\sigma(y)] = 0$, veya $d(y) = 0$ bulunur. μ,λ ve σ otomorfizm olduğundan, $[r,y] = 0$, $\forall r\in R$ veya $d(y) = 0$, yani $\forall y\in U$ için,

$$y\in Z \text{ veya } d(y) = 0 \tag{5.25}$$

olur.

Şimdi $A = \{y\in U \mid y\in Z\}$ ve $B = \{y\in U \mid d(y) = 0\}$ kümelerini alırsak Brauer's Trick den U = A veya U = B elde edilir.

U = B ise $d(U) = (0)$ dır.O halde $\forall x\in U, r\in R$ için $0 = d(xr) = d(x)\sigma(r) + \tau(x)d(r) = \tau(x)d(r)$ bulunur. Yani $\tau(U)d(R) = (0)$ dır. $\tau(U)$ sıfırdan farklı ideal ve R asal halka olduğundan $d(R) = (0)$, yani $d = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. U = B olamaz. Dolayısıyla U = A olmalıdır. U = A olması demek, $U\subset Z$ demektir. Buna göre, $[U,R] = (0)$ olur. $\forall r,s\in R$, $u\in U$ için $0 = [ur,s] = u[r,s] + [u,s]r = u[r,s] = 0$, $\forall r,s\in R$, $u\in U$, yani $U[R,R] = (0)$ olur. R asal halka ve U sıfırdan farklı ideal olduğundan $[R,R] = (0)$ bulunur. Bu ise R halkasının komütatif olması demektir.

Teorem 5.2.13 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, $d:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ olsun. $a\in R$ olmak üzere $[a,d(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise $a\in C_{\lambda,\mu}$ olur.

İspat : Hipotezden, $\forall x\in U$ için $[a,d(x)]_{\lambda,\mu} = 0$ dır. Bu eşitlikte x yerine xy, $y\in U$ alınıp yine hipotez kullanılırsa,

$$\mu\, d(x)\,[a,\sigma(y)]_{\lambda,\mu} + [a,\tau(x)]_{\lambda,\mu}\,\lambda\, d(y) = 0, \forall x,y\in U \tag{5.26}$$

bulunur. (5.26) eşitliğinde y yerine yr, $r \in R$ alınırsa, $0 = \mu d(x)[a,\sigma(yr)]_{\lambda,\mu} + [a,\tau(x)]_{\lambda,\mu} \lambda d(yr) = \mu d(x)\mu\sigma(y)[a,\sigma(r)]_{\lambda,\mu} + \mu d(x)[a,\sigma(y)]_{\lambda,\mu} \lambda\sigma(r) + [a,\tau(x)]_{\lambda,\mu} \lambda d(y)\lambda\sigma(r) + [a,\tau(x)]_{\lambda,\mu} \lambda\tau(y)\lambda d(r)$, $\forall r \in R, x,y \in U$ yani $\mu d(x)\mu\sigma(y)[a,\sigma(r)]_{\lambda,\mu} + (\mu d(x)[a,\sigma(y)]_{\lambda,\mu} + [a,\tau(x)]_{\lambda,\mu} \lambda d(y))\lambda\sigma(r) + [a,\tau(x)]_{\lambda,\mu} \lambda\tau(y)\lambda d(r) = 0$, $\forall r \in R$, $x,y \in U$ elde edilir. (5.26) dan $\mu d(x)\mu\sigma(y)[a,\sigma(r)]_{\lambda,\mu} + [a,\tau(x)]_{\lambda,\mu} \lambda\tau(y)\lambda d(r) = 0$, $\forall r \in R, x,y \in U$ olur. Şimdi bu eşitlikte r yerine $\sigma^{-1}d(v)$, $v \in U$ alınıp hipotez kullanılırsa,

$$[a,\tau(x)]_{\lambda,\mu} \lambda\tau(y)\lambda d\sigma^{-1}d(v) = 0, \ \forall x,y,v \in U \tag{5.27}$$

olur. Buradan $[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu} \lambda\tau(U)\lambda d\sigma^{-1}d(U) = (0)$ yazılabilir. $\lambda\tau(U)$, R nin sıfırdan farklı bir idealidir. R asal ve $\lambda\tau(U)$ sıfırdan farklı bir ideal olduğundan

$$[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu} = (0) \text{ veya } \lambda d\sigma^{-1}d(U) = (0) \tag{5.28}$$

dır. λ nın otomorfizm olduğu düşünülürse, $[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ veya $d\sigma^{-1}d(U) = (0)$ yazılabilir. $d\sigma = \sigma d$ olduğundan $\sigma^{-1}d\sigma = d$ dir. Bir üst satırdaki önerme $[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ veya $\sigma^{-1}d\sigma\sigma^{-1}d(U) = (0)$, yani $[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ veya $\sigma^{-1}d^2(U) = (0)$ şeklini alır. σ nın otomorfizm olduğu kullanılırsa, $[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ veya $d^2(U) = (0)$ elde edilir. Lemma 5.2.11 den $[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ veya $d = 0$ bulunur. $d \neq 0$ olduğundan $[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ dır.

$\forall r \in R$, $x \in U$ için $0 = [a,\tau(xr)]_{\lambda,\mu} = [a,\tau(x)\tau(r)]_{\lambda,\mu} = \mu\tau(x)[a,\tau(r)]_{\lambda,\mu} + [a,\tau(x)]_{\lambda,\mu} \lambda\tau(r)$ dır. $[a,\tau(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ olduğundan

$$\mu\tau(U)[a,\tau(R)]_{\lambda,\mu} = (0) \tag{5.29}$$

bulunur. $\mu\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, R asal ve τ otomorfizm olduğundan $[a,R]_{\lambda,\mu} = (0)$ dır. Öyleyse $a \in C_{\lambda,\mu}$ dür.

Sonuç 5.2.14 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, $d:R \to R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ olsun. Buna göre, $[U,d(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $[U,d(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise Teorem 5.2.13 den $U\subset C_{\lambda,\mu}$ dır. O halde $[U,R]_{\lambda,\mu} = (0)$, yani $\forall r,x\in R, v\in U$ için $0 = [vr,x]_{\lambda,\mu} = v[r,\lambda(x)] + [v,x]_{\lambda,\mu}r = v[r,\lambda(x)]$ olur. Buradan $U[R,\lambda(R)] = (0)$ yazılabilir. U nun sıfırdan farklı bir ideal ve λ nın bir otomorfizm olduğu düşünülürse, R halkası komütatif bulunur.

Sonuç 5.2.15 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, $0\neq d_1$**:**$R\to R$, bir (σ,τ)-türev, $0\neq d_2:R\to R$, bir (α,β)-türev ve $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_2\beta = \beta d_2$ olsun. Buna göre, $[d_1(U),d_2(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $[d_1(U),d_2(U)]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise Teorem 5.2.13 den $d_1(U)\subset C_{\lambda,\mu}$ olur. Burada Lemma 5.2.12 kullanılırsa, R halkası komütatif bulunur.

Teorem 5.2.16 : U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, d_1**:**$R\to R$ bir (σ,τ)-türev, $d_2:R\to R$ bir (α,β)-türev ve $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_2\beta = \beta d_2$ olsun. Buna göre, $d_1d_2(U) = (0)$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : Hipotezden $\forall x,y\in U$ için $0 = d_1d_2(xy) = d_1(d_2(x)\alpha(y) + \beta(x)d_2(y)) = d_1d_2(x)\sigma\alpha(y) + \tau d_2(x)d_1\alpha(y) + d_1\beta(x)\sigma d_2(y) + \tau\beta(x)d_1d_2(y)$ dır. Burada yine hipotez kullanılırsa ilk ve sonuncu terim sıfıra eşit olacağından

$$\tau d_2(x)d_1\alpha(y) + d_1\beta(x)\sigma d_2(y) = 0,\ \forall x,y\in U \tag{5.30}$$

elde edilir. (5.30) da x yerine rx, $r\in R$ alınıp yine (5.30) kullanılırsa,

$$\tau d_2(r)\tau\alpha(x)d_1\alpha(y) + d_1\beta(r)\sigma\beta(x)\sigma d_2(y) = 0,\ \forall r\in R, x,y\in U \tag{5.31}$$

elde edilir. Bu eşitlikte r yerine $\beta^{-1}d_2(v)$, $v\in U$ alınırsa, $0 = \tau d_2\beta^{-1}d_2(v)\tau\alpha(x)d_1\alpha(y) + d_1\beta(\beta^{-1}d_2(v))\sigma\beta(x)\sigma d_2(y) = \tau d_2\beta^{-1}d_2(v)\tau\alpha(x)d_1\alpha(y) + d_1d_2(v)\sigma\beta(x)\sigma d_2(y)$, $\forall r\in R, x,y\in U$ bulunur. Hipotezden ikinci terim sıfıra eşittir. O halde $\tau d_2\beta^{-1}d_2(v)\tau\alpha(x)d_1\alpha(y) = 0$, $\forall x,y,v\in U$, yani $\tau d_2\beta^{-1}d_2(U)\tau\alpha(U)d_1\alpha(U) = (0)$ olur. $\tau\alpha(U)$, R halkasının sıfırdan farklı ideali ve aynı zamanda R asal halkadır. Dolayısıyla $\tau d_2\beta^{-1}d_2(U) = (0)$ veya $d_1\alpha(U) = (0)$ elde edilir.

$d_1\alpha(U) = (0)$ ise $\alpha(U)$, sıfırdan farklı ideal olduğundan (Aydın ve Kaya, 1992) Lemma 1 den $d_1 = 0$ bulunur.

$\tau d_2\beta^{-1}d_2(U) = (0)$ ise τ otomorfizm olduğu için $d_2\beta^{-1}d_2(U) = (0)$ dır. $d_2\beta = \beta d_2$ idi. Buradan $\beta^{-1}d_2 = d_2\beta^{-1}$ yazılabilir. O zaman bir üst satırdaki son eşitlik $\beta^{-1}d_2^2(U) = (0)$ şekline dönüşür. Yine β otomorfizm olduğundan $d_2^2(U) = (0)$ bulunur. Bu ise Lemma 5.2.11 den $d_2 = 0$ demektir. Sonuç olarak $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir.

Teorem 5.2.17 : $d:R\to R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $a\in R$ olsun. $[d(R),a]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $a\in Z$ veya $\{d\tau^{-1}\beta(a) = 0$ ve $d\sigma^{-1}\alpha(a) = 0\}$ dır.

İspat : $\forall x\in R$ için $h(x) = [x,a]_{\alpha,\beta}$ ile tanımlı $h:R\to R$ dönüşümünü alalım. Yine $\forall x\in R$ için $d_1(x) = [x,\alpha(a)]$ ve $d_2(x) = [x,\beta(a)]$ olmak üzere $\forall x,y\in R$ için, $h(xy) = [xy,a]_{\alpha,\beta} = x[y,a]_{\alpha,\beta} + [x,\beta(a)]y = xh(y) + d_2(x)y$ ve aynı zamanda $h(xy) = [xy,a]_{\alpha,\beta} = x[y,\alpha(a)] + [x,a]_{\alpha,\beta}y = xd_1(y) + h(x)y$ olduğundan,

$$h(xy) = h(x)y + xd_1(y) = d_2(x)y + xh(y),\ \forall x,y\in R \qquad (5.32)$$

elde edilir.

Hipotezden $hd(R) = (0)$ dır. O halde $\forall x,y\in R$ için, $0 = hd(xy) = h(d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)) = h(d(x)\sigma(y)) + h(\tau(x)d(y)) = hd(x)\sigma(y) + d(x)d_1\sigma(y) + d_2\tau(x)d(y) + \tau(x)hd(y)$ olur. Burada $hd(R) = (0)$ eşitliği kullanılırsa, $d(x)d_1\sigma(y) + d_2\tau(x)d(y) = 0,\ \forall x,y\in R$ bulunur. Şimdi d_1 ve d_2 tanımları kullanılırsa,

$$d(x)[\sigma(y),\alpha(a)] + [\tau(x),\beta(a)]d(y) = 0,\ \forall x,y\in R \qquad (5.33)$$

elde edilir. (5.33) de x yerine $\tau^{-1}\beta(a)$ alınırsa, $d\tau^{-1}\beta(a)[\sigma(y),\alpha(a)] = 0,\ \forall y\in R$ bulunur. Son eşitlikte y yerine yz, $z\in R$ alınırsa ve σ nın otomorfizm düşünülür ve bir önceki eşitlik kullanılırsa $d\tau^{-1}\beta(a)R[R,\alpha(a)] = (0)$ elde edilir. R nin asallığından $d\tau^{-1}\beta(a) = 0$ veya $[R,\alpha(a)] = (0)$ bulunur. Bu ise $d\tau^{-1}\beta(a) = 0$ veya $a\in Z$ demektir.

Öte yandan, (5.33) de y yerine $\sigma^{-1}\alpha$(a) alınırsa, [τ(x),β(a)]d$\sigma^{-1}\alpha$(a) = 0, $\forall$x,y$\in$R olur. Bu eşitlikte x yerine rx, r$\in$R alınırsa, 0 = [τ(rx),β(a)]d$\sigma^{-1}\alpha$(a) = τ(r)[τ(x),β(a)]d$\sigma^{-1}\alpha$(a) + [τ(r),β(a)]τ(x)d$\sigma^{-1}\alpha$(a) bulunur. Burada ilk terim sıfırdır. O halde [τ(r),β(a)]τ(x)d$\sigma^{-1}\alpha$(a) = 0, $\forall$x,r$\in$R den [τ(R),β(a)]τ(R)d$\sigma^{-1}\alpha$(a) = (0), yani [R,β(a)]Rd$\sigma^{-1}\alpha$(a) = (0) olur. R asal olduğundan [R,β(a)] = (0) veya d$\sigma^{-1}\alpha$(a) = 0 elde edilir. Öyleyse β(a)$\in$Z veya d$\sigma^{-1}\alpha$(a) = 0 dır. Buradan a$\in$Z veya d$\sigma^{-1}\alpha$(a) = 0 bulunur.

Sonuç olarak a$\in$Z veya {d$\tau^{-1}\beta$(a) = 0 ve dσ^{-1} α(a) = 0} dır.

Sonuç 5.2.18 : U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve d:R$\rightarrow$R sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun . Buna göre, dσ = σd , dτ = τd ve $[d(R),U]_{\alpha,\beta}$ = (0) ise R halkası komütatiftir.

İspat : $[d(R),U]_{\alpha,\beta}$ = (0) ise Teorem 5.2.17 den $\forall$u$\in$U için u$\in$Z veya {dσ^{-1} α(v) = 0 ve dτ^{-1} β(t) = 0, $\forall$v,t$\in$U } bulunur. σ^{-1} α(U) ve τ^{-1} β(U) sıfırdan farklı ideal oldukları için dσ^{-1} α(U) ve dτ^{-1} β(U) sıfırdan farklıdır. O halde $\forall$u$\in$U için u$\in$Z, yani U$\subset$Z dir. R komütatif halka olur.

5.3. Modül Değerli (σ,τ)-Türevler

Bu bölüm boyunca R bir halka, X, bir R-bimodül ve U, R halkasının sıfırdan farklı ideali olarak alınacaktır. Aşağıdaki özellikleri düşünelim.

x$\in$X, a$\in$R için xRa = (0) $\Rightarrow$ x = 0 veya a = 0 (G1)

a$\in$R, x$\in$X için aRx = (0) $\Rightarrow$ a = 0 veya x = 0 (G2)

Lemma 5.3.1 : R bir halka, X, sıfırdan farklı bir R-bimodül olsun. Buna göre,

(i) (G1) (veya (G2)) varsa R asal halkadır.

(ii) (G1) (veya (G2)) varsa ve X, 2 torsion free R-bimodül ise R de 2 torsion free halkadır.

Lemma 5.3.2 : R bir halka, a$\in$R, X, sıfırdan farklı bir R-bimodül ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. (G1) (veya (G2)) sağlanıyorsa ve xUa = (0) (aUx = (0)), $\forall$x$\in$X ise x = 0 veya a = 0 dır.

İspat : $\forall x \in X$ için $xUa = (0)$ olsun. Öyleyse $xRUa = (0)$ dır. (G1) sağlandığı için $x = 0$ veya $Ua = (0)$ olur. Buradan $x = 0$, $\forall x \in X$ veya $URa = (0)$ yazılabilir. Lemma 5.3.1 den R asal halka olacağından $x = 0$, $\forall x \in X$ veya $U = (0)$ veya $a = 0$ bulunur. $X \neq (0)$ ve $U \neq (0)$ olduğundan $a = 0$ dır.

Lemma 5.3.3 : R bir halka, U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, X, sıfırdan farklı, bir 2 torsion free R-bimodül olsun ve (G1) sağlansın. Buna göre,

(i) $[X,U] \subset C(X)$ ise R halkası komütatiftir.

(ii) $[X,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : (i) Hipotezden $\forall x \in X$, $u,v \in U$ için $0 = [[x,u],v] = [x,[u,v]] + [u,[v,x]] = [x,[u,v]] + [[x,v],u]$ dır. Yine hipotez kullanılırsa,

$$[x,[u,v]] = 0, \ \forall x \in X, \ u,v \in U \tag{5.34}$$

olur. x yerine xr, $r \in R$ alınıp (5.34) kullanılırsa, $x[r,[u,v]] = 0$, $\forall x \in X$, $u,v \in U$, $r \in R$ bulunur. Bu kez x yerine xr', $r' \in R$ alınırsa, $xr'[r,[u,v]] = 0$, $\forall x \in X$, $u,v \in U$, $r,r' \in R$, yani

$$XR[R,[U,U]] = (0) \tag{5.35}$$

elde edilir. (G1) sağlandığı için $X = (0)$ veya $[R,[U,U]] = (0)$ dır. $X \neq (0)$ olduğundan $[U,U] \subset Z$ bulunur. Sırasıyla (Kandamar ve Kaya, 1992) Lemma 1.4 ve (Herstein, 1976) Lemma 1.1.6 dan R halkası komütatif olur.

(ii) Hipotezden $\forall x \in X$, $u,v \in U$ için $0 = [[x,u]_{\sigma,\tau},v]_{\sigma,\tau} = [x,[u,v]]_{\sigma,\tau} + [[x,v]_{\sigma,\tau},u]_{\sigma,\tau}$ dır. Yine hipotezden ikinci terim sıfırdır. Dolayısıyla,

$$[x,[u,v]]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall x \in X, \ u,v \in U \tag{5.36}$$

olur. x yerine xr, $r \in R$ alınırsa, (5.36) dan $x[r,\sigma[u,v]] = 0$, $\forall x \in X$, $u,v \in U$, $r \in R$ bulunur. r yerine rs, $s \in R$ alınırsa, $0 = x[rs,\sigma[u,v]] = xr[s,\sigma[u,v]] + x[r,\sigma[u,v]]s = xr[s,\sigma[u,v]]$, $\forall x \in X$, $u,v \in U$, $r \in R$, yani

$$XR[R,\sigma[U,U]] = (0) \tag{5.37}$$

elde edilir. (G1) den $X = (0)$ veya $[R,\sigma[U,U]] = (0)$ dır. $X \neq (0)$ olduğundan $[R,\sigma[U,U]] = (0)$ olur. Yani $\sigma[U,U] \subset Z$ dir. σ nın otomorfizm olduğu düşünülürse, $[U,U] \subset Z$ bulunur. Sırasıyla (Kandamar ve Kaya, 1992) Lemma 1.4 ve (Herstein, 1976) Lemma 1.1.6 dan R halkası komütatif olur.

Lemma 5.3.4 : R bir halka, U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, X, sıfırdan farklı bir R-bimodül ve $d:R \to X$, bir (σ,τ)-türev olsun. (G1) sağlansın. Buna göre,

(i) $d(U) = (0)$ ise $d = 0$ dır.

(ii) $a \in R$ için $d(U)a = (0)$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat : (i) $\forall u \in U, r \in R$ için $0 = d(ru) = d(r)\sigma(u) + \tau(r)d(u)$ dır. Hipotezden

$$d(r)\sigma(u) = 0, \ \forall u \in U, r \in R \tag{5.38}$$

olur. r yerine $r\sigma^{-1}(s)$, $s \in R$ alınırsa,

$$d(R)R\sigma(U) = (0) \tag{5.39}$$

bulunur. (G1) den $d(R) = (0)$ veya $\sigma(U) = (0)$, yani $d(R) = (0)$ veya $U = (0)$ dır. O halde $d = 0$ olur.

(ii) $\forall u \in U, r \in R$ için $0 = d(ru)a = d(r)\sigma(u)a + \tau(r)d(u)a$ dır. Hipotezden,

$$d(r)\sigma(u)a = 0, \ \forall u \in U, r \in R \tag{5.40}$$

olur. Yani $d(R)\sigma(U)a = (0)$ dır. $\sigma(U)$, R nin sıfırdan farklı bir idealidir. Lemma 5.3.2 den $d(R) = (0)$ veya $a = 0$ bulunur. O halde $d = 0$ veya $a = 0$ dır.

Lemma 5.3.5 : R komütatif olmayan bir halka, X, sıfırdan farklı bir 2 torsion free R-bimodül ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. $d_1: R \to X$, bir (σ,τ)-türev, $d_2: R \to R$, bir türev ve $d_2(U) \subset U$, $d_1 d_2(U) = (0)$ ise ve (G1) varsa $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat: $\forall u,v \in U$ için $0 = d_1 d_2(uv) = d_1(d_2(u)v + ud_2(v)) = d_1 d_2(u)\sigma(v) + \tau d_2(u)d_1(v) + d_1(u)\sigma d_2(v) + \tau(u)d_1 d_2(v)$ dır. Hipotezden,

$$\tau d_2(u)d_1(v) + d_1(u)\sigma d_2(v) = 0, \ \forall u,v \in U \tag{5.41}$$

elde edilir. v yerine $d_2(v)$ alınıp hipotez kullanılırsa,

$$d_1(U)\sigma d_2^2(U) = (0) \tag{5.42}$$

bulunur. Lemma 5.3.4 (ii) den $d_1 = 0$ veya $\sigma d_2^2(U) = (0)$ elde edilir.

$\sigma d_2^2(U) = (0)$ ise σ otomorfizm olduğundan $d_2^2(U) = (0)$ dır. (Bergen ve diğ., 1981) Teorem 1 den $U \subset Z$ elde edilir.

$d_2^2(U) = (0)$ ise $0 = d_2^2(uv) = d_2(d_2(u)v + ud_2(v)) = d_2^2(u)v + d_2(u)d_2(v) + d_2(u)d_2(v) + ud_2^2(v) = 2d_2(u)d_2(v)$, $\forall u,v \in U$ dır. X, 2-torsion free olduğundan $d_2(u)d_2(v) = 0$, $\forall u,v \in U$ elde edilir. Buradan, $d_2(U) \subset U \subset Z$ olduğundan

$d_2(u)Rd_2(v) = (0)$, $\forall u,v\in U$ yazılabilir. R nin asallığından $d_2(U) = (0)$ bulunur. Öyleyse $\forall r\in R, u\in U$ için $0 = d_2(ur) = d_2(u)r + ud_2(r) = ud_2(r)$, $\forall r\in R, u\in U$ dır. R asal olduğundan $d_2 = 0$ elde edilir. O halde $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Lemma 5.3.6 : R komütatif olmayan bir halka, X, sıfırdan farklı, 2 torsion free R-bimodül ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. (G1) sağlanıyorsa ve $d:R\to X$, bir (σ,τ)-türev olmak üzere $a\in R$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise $a\in Z$ veya $d = 0$ olur.

İspat : $\forall u,v\in U$ için $0 = [d(uv),a]_{\sigma,\tau} = [d(u)\sigma(v) + \tau(u)d(v),a]_{\sigma,\tau} = d(u)[\sigma(v),\sigma(a)] + [d(u),a]_{\sigma,\tau}\sigma(v) + \tau(u)[d(v),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(u),\tau(a)]d(v)$ dır. Hipotezden ikinci ve üçüncü terim sıfır olduğundan,

$$d(u)\sigma[v,a] + \tau[u,a]d(v) = 0,\ \forall u,v\in U \qquad (5.43)$$

olur. u yerine au alınırsa, (5.43) den,

$$d(a)\sigma(U)\sigma[U,a] = (0) \qquad (5.44)$$

elde edilir. Lemma 5.3.2 den $d(a) = 0$ veya $\sigma[U,a] = (0)$, yani $d(a) = 0$ veya $[U,a] = (0)$ bulunur.

$[U,a] = (0)$ ise (Herstein , 1976) Lemma 1.1.6 dan $a\in Z$ olur.

$d(a) = 0$ ise $\forall u\in U$ için, $d([u,a]) = d(ua) - d(au) = d(u)\sigma(a) + \tau(u)d(a) - d(a)\sigma(u) - \tau(a)d(u) = [d(u),a]_{\sigma,\tau} - [d(a),u]_{\sigma,\tau}$ dır. $d(a) = 0$ olduğundan ikinci terim, hipotezden ise birinci terim sıfırdır. Dolayısıyla,

$$d([u,a]) = 0,\ \forall u\in U \qquad (5.45)$$

elde edilir. (5.43) eşitliğinde v yerine vw, $w\in U$ alınıp yine (5.43) kullanılırsa,

$$d(u)\sigma(v)\sigma[w,a] + \tau[u,a]\tau(v)d(w) = 0,\ \forall u,v,w\in U \qquad (5.46)$$

olur. Bu son eşitlikte w yerine $[w,a]$ alınırsa, $0 = d(u)\sigma(v)\sigma[[w,a],a] + \tau[u,a]\tau(v)d([w,a]) = d(u)\sigma(v)\sigma[[w,a],a]$, $\forall u,v,w\in U$, yani,

$$d(U)\sigma(U)\sigma[[U,a],a] = (0) \qquad (5.47)$$

elde edilir. Lemma 5.3.2 den $d(U) = (0)$ veya $[[U,a],a] = (0)$ bulunur.

$d(U) = (0)$ ise Lemma 5.3.4 den $d = 0$ dır.

$[[U,a],a] = (0)$ ise a ile belirlenen iç türev I_a olmak üzere $I_a^2(U) = (0)$ dır. (Bergen ve diğ., 1981) Teorem 4 den $U \subset Z$ olur. Lemma 5.3.5 deki ispat yöntemiyle $I_a = 0$ bulunur. Bu ise $a \in Z$ demektir. Öyleyse $d = 0$ veya $a \in Z$ dir.

Not 5.3.7 : R bir halka ve X, sıfırdan farklı bir R-bimodül olsun. Buna göre,

(i) $a \in R$, $b \in C_{\sigma,\tau}(X)$, $ab \in C_{\sigma,\tau}(X)$ ve (G2) sağlanıyorsa $a \in Z$ veya $b = 0$ dır.

(ii) $a \in C_{\sigma,\tau}(X)$, $ab \in C_{\sigma,\tau}(X)$ ve (G1) sağlanıyorsa $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

İspat : (i) $b, ab \in C_{\sigma,\tau}(X)$ ise $\forall r \in R$ için $0 = ab\sigma(r) - \tau(r)ab = a\tau(r)b - \tau(r)ab$, yani

$$[a,\tau(r)]b = 0,\ \forall r \in R \tag{5.48}$$

dır. r yerine rs, $s \in R$ alınırsa, $0 = [a,\tau(rs)]b = \tau(r)[a,\tau(s)]b + [a,\tau(r)]\tau(s)b$, $\forall r,s \in R$ olur. (5.48) kullanılırsa, $[a,\tau(R)]\tau(R)b = (0)$ bulunur. τ otomorfizm olduğundan $[a,R]Rb = (0)$ dır. (G2) sağlandığı için $[a,R] = (0)$ veya $b = 0$ elde edilir. O halde $a \in Z$ veya $b = 0$ dır.

(ii) Benzer şekilde (ii) durumu da gösterilir.

Teorem 5.3.8 : R komütatif olmayan bir halka, X, sıfırdan farklı, bir 2 torsion free R-bimodül ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. (G1) ve (G2) koşulları sağlansın. $[d(U),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ olacak biçimde $a \in U$ ve $d:R \to X$ bir (σ,τ)-türev ise $a \in Z$ veya $d = 0$ dır.

İspat : $[d(a^2),a]_{\sigma,\tau} = d(a)[\sigma(a),\sigma(a)] + [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) + \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)]d(a) = [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) + \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}$ dır. Hipotezden $[d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) + \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X)$ olur.

Öte yandan, $[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X)$ olduğundan $[d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) = \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}$ dır. Bir üst paragraftaki son ifadeden $2\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X)$ elde edilir. Öyleyse $\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X)$ dir. Not 5.3.7 (i) den $\tau(a) \in Z$ veya $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur.

$\tau(a) \in Z$ ise τ otomorfizm olduğundan $a \in Z$ dir.

$[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise hipotezden $[d[a,u],a]_{\sigma,\tau} = [d(au),a]_{\sigma,\tau} - [d(ua),a]_{\sigma,\tau} = [d(a)\sigma(u) - \tau(u)d(a),a]_{\sigma,\tau} - [d(u)\sigma(a) - \tau(a)d(u),a]_{\sigma,\tau} = [[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} - [[d(u),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}$, $\forall u \in U$ elde edilir. Yine hipotez düşünülürse,

$$[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X), \forall u \in U \tag{5.49}$$

olur. u yerine au alınırsa, $[[d(a),au]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = [d(a),au]_{\sigma,\tau}\sigma(a) - \tau(a)[d(a),au]_{\sigma,\tau} = \tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau}\sigma(a) - [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(u)\sigma(a) - \tau(a)\tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau} - \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(u) = \tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau}\sigma(a) - \tau(a)\tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau} = \tau(a)[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}$, $\forall u \in U$ olduğundan,

$$\tau(a)[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X), \ \forall u \in U \tag{5.50}$$

bulunur. Not 5.3.7 (i) den $\tau(a) \in Z$ veya $[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall u \in U$ elde edilir.

$[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall u \in U$ ise $[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = [d(a),[u,a]]_{\sigma,\tau} + [[d(a),a]_{\sigma,\tau},u]_{\sigma,\tau}$, $\forall u \in U$ eşitliğinden ikinci terim sıfır olacağından,

$$[d(a),[a,U]]_{\sigma,\tau} = (0) \tag{5.51}$$

dır. $I_a : R \to R$ ve $I_a(x) = [a,x], \forall x \in U$ olmak üzere I_a, $I_a(U) \subset U$ olacak biçimde a ile belirli iç türevdir. $I_{d(a)} : R \to X$, $I_{d(a)}(r) = [d(a),r]_{\sigma,\tau}$, $\forall r \in R$ ise d(a) ile belirli bir modül değerli (σ,τ)-türevdir. Öyleyse (5.51) den $I_{d(a)}I_a(U) = 0$ olduğu açıktır. Lemma 5.3.5 den $I_{d(a)} = 0$ veya $I_a = 0$ bulunur. Yani $[d(a),r]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall r \in R$ veya $[a,x] = 0, \forall x \in U$ olur. Bu ise $d(a) \in C_{\sigma,\tau}(X)$ veya $a \in Z$ demektir.

$d(a) \in C_{\sigma,\tau}(X)$ ise $[d(au),a]_{\sigma,\tau} = [d(a)\sigma(u),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a)d(u),a]_{\sigma,\tau} = d(a)[\sigma(u),\sigma(a)] + [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(u) + \tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)]d(u) = d(a)\sigma[u,a] + \tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau}$, $\forall u \in U$ dır. O halde

$$d(a)\sigma[u,a] + \tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X), \ \forall u \in U \tag{5.52}$$

olur. $C_{\sigma,\tau}(X)$ kümesinin tanımından, $0 = [d(a)\sigma[u,a],a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = d(a)[\sigma[u,a],\sigma(a)] + [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma[u,a] + \tau(a)[[d(u),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)][d(u),a]_{\sigma,\tau}$, $\forall u \in U$ elde edilir. Son üç terim sıfırdır. Öyleyse,

$d(a)\sigma[[u,a],a] = 0, \ \forall u \in U$ bulunur. $d(a) \in C_{\sigma,\tau}(X)$ olması nedeniyle $d(a)\sigma(R)\sigma[[u,a],a] = (0), \ \forall u \in U$ yazılabilir. σ otomorfizm olduğundan,

$$d(a)R\sigma[[u,a],a] = (0), \ \forall u \in U \tag{5.53}$$

dır. (G1) sağlandığından $d(a) = 0$ veya $\sigma[[u,a],a] = 0, \ \forall u \in U$ elde edilir. Yani $d(a) = 0$ veya $[[u,a],a] = 0, \ \forall u \in U$ dır. Jacobi özdeşliği kullanılırsa $d(a) = 0$ veya $[a,[a,u] = 0, \ \forall u \in U$ bulunur.

$[a,[a,u] = 0, \ \forall u \in U$ ise I_a, a ile belirlenen iç türev olmak üzere, $I_a^2(U) = (0)$ olur. (Bergen ve diğ., 1981) Teorem 4 den $a \in Z$ bulunur.

$d(a) = 0$ ise (5.52) eşitliğinden,

$$\tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X), \ \forall u \in U \tag{5.54}$$

olur. Not 5.3.7 (i) kullanılırsa $\tau(a) \in Z$ veya $[d(u),a]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall u \in U$ elde edilir. Yani $a \in Z$ veya $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = (0)$ dır.

$[d(U),a]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise Lemma 5.3.6 dan $a \in Z$ veya $d = 0$ olur.

Sonuç olarak $a \in Z$ veya $d = 0$ bulunur.

Sonuç 5.3.9 : $d:R \rightarrow X$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve X, sıfırdan farklı bir 2 torsion free R-bimodül olsun. (G1) sağlansın. Buna göre, $[d(U),U]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $[d(U),U]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise Lemma 5.3.6 dan $U \subset Z$ veya $d = 0$ olur. $d \neq 0$ olduğundan $U \subset Z$, yani R halkası komütatiftir.

Sonuç 5.3.10 : $d:R \rightarrow X$, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, X, sıfırdan farklı bir 2 torsion free R-bimodül olsun. (G1) ve (G2) sağlansın. Buna göre, $[d(U),U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $[d(U),U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ ise Teorem 5.3.8 den $U \subset Z$ veya $d = 0$ dır. (Herstein, 1976) Lemma 1.1.6 dan R komütatif bulunur.

5.4. Asal Halkalarda Genelleştirilmiş (α,β)-Türevler

Bu bölümde, R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve α,ν,τ :R$\rightarrow$R endomorfizm, β,μ :R$\rightarrow$R otomorfizm olarak alınacaktır.

Teorem 5.4.1 : R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. R halkasında her x,y$\in$I için g([μ(x),y]) = [ν(x),y]$_{\alpha,\tau}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir δ, (α,β)-türeviyle yapılan bir g genelleştirilmiş (α,β)-türevi varsa R halkası komütatiftir.

İspat : g([μ(x),y]) = [ν(x),y]$_{\alpha,\tau}$, $\forall$ x,y$\in$I (5.55)

olsun. (5.55) de y yerine zy, z$\in$I alınıp g nin genelleştirilmiş (α,β)-türev olduğu kullanılırsa,

g(z)α([μ(x),y]) + β(z)δ([μ(x),y]) + β([μ(x),z])δ(y) = τ(z)[ν(x),y]$_{\alpha,\tau}$, $\forall$ x,y,z$\in$I (5.56)

elde edilir. (5.56) da y yerine yμ(x) alınırsa,

g(z)α([μ(x),y])α(μ(x)) + β(z)δ([μ(x),y])α(μ(x)) + β(z)β([μ(x),y])δ(μ(x)) + β([μ(x),z])δ(y)α(μ(x)) + β([μ(x),z])β(y)δ(μ(x)) = τ(z)[ν(x),y]$_{\alpha,\tau}$ α(μ(x)), $\forall$ x,y,z$\in$I (5.57)

bulunur. (5.56) yı sağdan $\alpha(\mu(x))$ ile çarpıp (5.57) ile karşılaştırırsak, β(z)β([μ(x),y])δ(μ(x)) + β([μ(x),z])β(y)δ(μ(x)) = 0, $\forall$ x,y,z$\in$I eşitliğinden, {β(z)β([μ(x),y]) + β([μ(x),z])β(y)}δ(μ(x)) = 0, $\forall$ x,y,z$\in$I elde edilir. β nın otomorfizm olduğu düşünülürse, (z[μ(x),y] + [μ(x),z]y)β^{-1} δ(μ(x)) = 0, $\forall$ x,y,z$\in$I olur. Son eşitlikte z yerine wz, w$\in$R alınırsa, w(z[μ(x),y] + [μ(x),z]y)β^{-1} δ(μ(x)) + [μ(x),w]zyβ^{-1} δ(μ(x)) = 0, $\forall$ x,y,z$\in$I,w$\in$R bulunur. Öyleyse,

[μ(x),w]zyβ^{-1} δ(μ(x)) = 0, $\forall$ x,y,z$\in$I,w$\in$R (5.58)

dır. Bu eşitlikte z yerine zβ^{-1} δ(μ(x)) ve y yerine y[μ(x),w]z alınırsa, [μ(x),w]zβ^{-1} δ(μ(x))y[μ(x),w]zβ^{-1} δ(μ(x)) = 0, $\forall$ x,y,z$\in$I,w$\in$R olur. R halkası asal olduğundan [μ(x),w]zβ^{-1} δ(μ(x)) = 0, $\forall$ x,z$\in$I,w$\in$R dır. Buradan yine R nin asallığından $[\mu(x),w] = 0$, $\forall w \in R$ veya $\beta^{-1}\delta(\mu(x)) = 0$ dan $[\mu(x),w] = 0$, $\forall w \in R$ veya $\delta(\mu(x)) = 0$ bulunur.

$A = \{x \in I \mid [\mu(x),w] = 0, \forall w \in R\}$ ve $B = \{x \in I \mid \delta(\mu(x)) = 0\}$kümelerini alalım. Brauer's Trick den, I = A veya I = B olmalıdır.

I = B ise $\forall x \in I$ için $\delta(\mu(x)) = 0$ dır. $\forall x \in I$, $y \in R$ için $0 = \delta(\mu(xy)) = \delta(\mu(x)\mu(y)) = \delta(\mu(x))\alpha(\mu(y)) + \beta(\mu(x))\delta(\mu(y)) = \beta(\mu(x))\delta(\mu(y))$, $\forall x \in I$, $y \in R$, yani $(\beta o \mu)(x)\delta(\mu(y)) = 0$, $\forall x \in I$, $y \in R$ bulunur. Buradan $x(\beta o \mu)^{-1}\delta(\mu(y)) = 0$, $\forall x \in I$, $y \in R$ dir. Son eşitlikte x yerine xr, $r \in R$ alınıp R nin asal olduğu kullanılırsa, $x = 0$, $\forall x \in I$ veya $(\beta o \mu)^{-1}\delta(\mu(y)) = 0$, $\forall y \in R$ elde edilir. $I \neq (0)$ olduğundan $\forall y \in R$ için $(\beta o \mu)^{-1}\delta(\mu(y)) = 0$ dır. O halde $\forall y \in R$ için $\delta(\mu(y)) = 0$ olur. Yani $\delta = 0$, çelişkidir. I = B olamaz. O halde I = A dır.

I = A ise $\forall x \in I$, $w \in R$ için $[\mu(x),w] = 0$ dır. Yani $\mu(I) \subset Z$ dir. $\mu(I)$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealidir. Lemma 2.13 den R halkası komütatif bulunur.

Sonuç 5.4.2 : R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre, R halkasında, $\forall x,y \in I$ için $g([x,y]) = [x,y]$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir δ türeviyle yapılan bir g genelleştirilmiş türevi varsa R halkası komütatiftir.

İspat : Bir önceki teoremde 1 birim dönüşüm olmak üzere $\alpha = \beta = \mu = \nu = \tau = 1$ alınırsa, $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ olacağından δ bir türev ve $g(xy) = g(x)y + x\delta(y)$ olacağından g de bir genelleştirilmiş türev olur.

Sonuç 5.4.3 : R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre, $\forall x,y \in I$ için $g(xy) = g(yx)$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir δ, (α,β)-türeviyle yapılan bir g genelleştirilmiş (α,β)-türevi varsa R halkası komütatiftir.

İspat : Teorem de 1 birim dönüşüm ve 0 da 0 dönüşümü olmak üzere $\mu = 1$ ve $\nu = 0$ alınırsa R halkası komütatif bulunur.

Aşağıdaki örnek asal halka yerine yarı asal halka alındığında R halkasının komütatif olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.4.4 : R_1 komütatif olmayan bir asal halka ve R_2 bir komütatif asal halka olsun. $\forall r_1,r_2 \in R$ için $a(r_1,r_2)a = (0,0)$ ise $(ar_1a,ar_2a) = (0,0)$, $\forall r_1,r_2 \in R$ dır. O halde $ar_1a = 0$, $\forall r_1 \in R_1$ ve $ar_2a = 0$, $\forall r_2 \in R_2$ olur. R_1 ve R_2 asal halka olduğu için $a = 0$ dır. $R = R_1 \oplus R_2$ halkası bir yarı asal halkadır.

α_2 ve β_2, $\alpha_2 \neq \beta_2$ olmak üzere R_2 halkasının endomorfizmleri olsunlar. $\forall x,y \in R_2$ için, $(\alpha_2 - \beta_2)(x + y) = \alpha_2(x + y) - \beta_2(x + y) = \alpha_2(x) + \alpha_2(y) - \beta_2(x) - \beta_2(y) = (\alpha_2 - \beta_2)(x) + (\alpha_2 - \beta_2)(y)$ ve $(\alpha_2 - \beta_2)(xy) = \alpha_2(xy) - \beta_2(xy) = \alpha_2(x)\alpha_2(y) - \beta_2(x)\beta_2(y) - \beta_2(x)\alpha_2(y) + \beta_2(x)\alpha_2(y) = (\alpha_2 - \beta_2)(x)\alpha_2(y) + \beta_2(x)(\alpha_2 - \beta_2)(y)$ olduğundan $\alpha_2 - \beta_2 \neq 0$, R_2 halkası üzerinde bir (α_2, β_2)-türevdir.

$\forall (x_1,x_2) \in R$ için $\alpha(x_1,x_2) = (0,\alpha_2(x_2))$ ve $\beta(x_1,x_2) = (0,\beta_2(x_2))$ ile tanımlanan α ve β, R halkasının endomorfizmleri olmak üzere, $\forall (x_1,x_2) \in R$ için $\delta(x_1,x_2) = (0,(\alpha_2 - \beta_2)(x_2))$ ile tanımlanan $\delta : R \to R$ dönüşümü R halkası üzerinde bir (α, β)-türevdir.

$\alpha(x_1,x_2) = (0,\alpha_2(x_2))$ ile tanımlanan α dönüşümünün endomorfizm olduğunu gösterelim: $\forall (x_1,x_2) \in R$ için,
$\alpha((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) = \alpha(x_1 + y_1,x_2 + y_2) = (0,\alpha_2(x_2 + y_2)) = (0,\alpha_2(x_2)) + (0,\alpha_2(y_2)) = \alpha(x_1,x_2) + \alpha(y_1,y_2)$ ve $\alpha((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = \alpha(x_1y_1,x_2y_2) = (0,\alpha_2(x_2y_2)) = (0,\alpha_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) = \alpha(x_1,x_2)\alpha(y_1,y_2)$ olduğundan α dönüşümü bir endomorfizmdir. Benzer şekilde β dönüşümünün de endomorfizm olduğu görülür.

Şimdi δ:R$\to$R dönüşümünün sıfırdan farklı bir (α,β)-türev olduğunu gösterelim: $\forall$ x,y$\in$ R için x = (x_1,x_2) ve y = (y_1,y_2) olsun.

$\delta((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) = \delta(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (0,(\alpha_2-\beta_2)(x_2 + y_2) = (0,\alpha_2(x_2 + y_2) - \beta_2(x_2 + y_2)) = (0,(\alpha_2-\beta_2)(x_2)) + (0,(\alpha_2-\beta_2)(y_2)) = \delta(x_1,x_2) + \delta(y_1,y_2)$ ve $\delta((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = \delta(x_1y_1,x_2y_2) = (0,(\alpha_2-\beta_2)(x_2y_2)) = (0,\alpha_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) - (0,\beta_2(x_2))(0,\beta_2(y_2)) - (0,\beta_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) + (0,\beta_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) = (0,(\alpha_2-\beta_2)(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) + (0,\beta_2(x_2))(0,(\alpha_2-\beta_2)(y_2)) = \delta(x_1,x_2)\alpha(y_1,y_2) + \beta(x_1,x_2)\delta(y_1,y_2)$ olduğundan δ:R$\to$R dönüşümü bir (α,β)-türevdir. Bu dönüşümün sıfırdan farklı olduğunu gösterelim:

$\delta = 0$ olsaydı $\forall (x_1,x_2)\in$ R için, $\delta(x_1,x_2) = (0,(\alpha_2 - \beta_2)(x_2)$ olduğu için $(\alpha_2 - \beta_2)(x_2) = 0$ olur ki bu da $\alpha_2(x_2) = \beta_2(x_2)$ demektir. Bu ifade ise $\alpha_2 \neq \beta_2$ olmasıyla çelişir. O halde $\delta \neq 0$ dır.

Şimdi a$\in R_2$ olmak üzere $\gamma(x_1,x_2) = (0,a\alpha_2(x_2))$ ile γ:R$\to$R dönüşümünü tanımlayalım. g = $\alpha - \beta + \gamma$ ise $\forall$ x,y$\in$ R için g(xy) = g(yx) olacak biçimde, sıfırdan farklı δ, (α,β)-türeviyle yapılan genelleştirilmiş bir (α,β)-türevdir.

g = $\alpha - \beta + \gamma$ nin δ, (α,β)-türeviyle yapılan genelleştirilmiş (α,β) türev olduğunu gösterelim: $\forall$ x,y$\in$ R için x = (x_1,x_2) ve y = (y_1,y_2) olsun. Buna göre, g(x + y) = $g((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) = (\alpha - \beta + \gamma)(x_1 + y_1,x_2 + y_2) = (0,\alpha_2(x_2 + y_2)) - (0,\beta_2(x_2 + y_2)) + (0,a\alpha_2(x_2 + y_2)) = \alpha(x_1,x_2) - \beta(x_1,x_2) + \gamma(x_1,x_2) + \alpha(y_1,y_2) - \beta(y_1,y_2) + \gamma(y_1,y_2) = (\alpha - \beta + \gamma)(x_1,x_2) + (\alpha - \beta + \gamma)(y_1,y_2) = g(x_1,x_2) + g(y_1,y_2)$ elde edilir.

Öte yandan, g(xy) = $g((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = (\alpha - \beta + \gamma)(x_1y_1,x_2y_2) = (0,\alpha_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) - (0,\beta_2(x_2))(0,\beta_2(y_2)) + (0,a\alpha_2(x_2)\alpha_2(y_2)) - (0,\beta_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) + (0,\beta_2(x_2))(0,\alpha_2(y_2)) = \{(0,\alpha_2(x_2)) - (0,\beta_2(x_2)) +$

$(0,a\alpha_2(x_2))\}(0,\alpha_2(y_2)) + (0,\beta_2(x_2))\{(0,\alpha_2(y_2)) - (0,\beta_2(y_2))\} = (\alpha - \beta + \gamma)(x_1,x_2)\alpha(y_1,y_2) + \beta(x_1,x_2)\delta(y_1,y_2) = g(x)\alpha(y) + \beta(x)\delta(y)$ bulunur.

Yine $\forall$ x,y$\in$ R için $x = (x_1,x_2)$ ve $y = (y_1,y_2)$ olsun.

$g(xy) = g((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = (\alpha - \beta + \gamma)(x_1y_1,x_2y_2) = (0,\alpha_2(x_2y_2)) - (0,\beta_2(x_2y_2)) + (0,a\alpha_2(x_2y_2)) = (0,\alpha_2(y_2x_2)) - (0,\beta_2(y_2x_2)) + (0,a\alpha_2(y_2x_2)) = (\alpha - \beta + \gamma)(y_1x_1, y_2x_2) = g((y_1,y_2)(x_1,x_2)) = g(yx)$ dir.

Teoremdeki bütün koşullar sağlanır. Fakat $(a,b),(c,d)\in R$ için $(a,b)(c,d) = (ac,bd) = (ac,db) \neq (c,d)(a,b)$ olduğundan R halkası komütatif değildir.

BÖLÜM 6
LIE VE JORDAN İDEALLER ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

6.1. Lie İdealler Üzerinde Genelleştirilmiş Türevler

Bu bölümde, R, karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, $f:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir d türeviyle yapılan bir genelleştirilmiş türev, U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali olarak alınacaktır.

Uyarı 6.1.1 : $\forall x,y\in R$ için $f[x,y] = f(xy - yx) = f(x)y + xd(y) - d(y)x - yf(x) = [f(x),y] + [x,d(y)]$

Lemma 6.1.2 : $f(U) = 0$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat : $u\in U$, $x\in R$ için, $[u,x]\in U$ olduğundan hipotezden, $0 = f[u,x] = [f(u),x] + [u,d(x)] = [u,d(x)]$, $\forall u\in U$, $x\in R$, yani $[U,d(R)] = (0)$ dır. (Herstein, 1979) dan $U\subset Z$ bulunur.

Lemma 6.1.3 : $f(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat : $u,w\in U$ için, $f[u,w]\in Z$ dir. $f[u,w] = [f(u),w] + [u,d(w)] = [u,d(w)]$ olduğundan $[u,d(w)]\in Z$, $\forall u,w\in U$, yani $[U,d(U)]\subset Z$ bulunur. (Lee ve Lee, 1983) Teorem 2 den $U\subset Z$ olur.

Lemma 6.1.4 : $a\in R$ için,

(i) $af(U) = (0)$ ise $a = 0$ veya $U\subset Z$

(ii) $f(U)a = (0)$ ise $a = 0$ veya $U\subset Z$ dir.

İspat : (i) U, merkezsel olmayan bir Lie ideal olsun. (Bergen ve diğ., 1981) Lemma 1 den R halkasının $[R,M]\subset U$, fakat $[R,M]\not\subset Z$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır. $\forall x\in R$, $m\in M$ için $[R,M]\subset U$ olduğundan, $[xm,m] = [x,m]m\in U$ dur. Hipotezden $0 = af([x,m]m) = af([x,m])m + a[x,m]d(m)$, yani $a[x,m]d(m) = 0$, $\forall x\in R$, $\forall m\in M$ bulunur.

$u\in U$ olmak üzere x yerine $f(u)x$ alınırsa, $0 = a[f(u)x,m]d(m) = af(u)[x,m]d(m) + a[f(u),m]xd(m)$ eşitliğinden $a[f(u),m]xd(m) = 0$, $\forall x\in R$, $m\in M$, $u\in U$ elde edilir. R halkasının asallığından $a[f(u),m] = 0$ veya $d(m) = 0$, $\forall m\in M$, $\forall u\in U$ bulunur.

$L = \{m\in M \mid a[f(u),m] = 0 \,, \forall u\in U\}$ ve $K = \{m\in M \mid d(m) = 0\}$ kümelerini düşünelim. $M = K\cup L$ dir. Brauer Trick'ten $M = K$ veya $M = L$ olmak zorundadır. $M\neq 0$ ve $d\neq 0$ olduğundan $M = L$ dir. $\forall m\in M$, $\forall u\in U$, $a[f(u),m] = 0$ eşitliğinden $aMf(U) = 0$ yazılabilir. R asal olduğundan $a= 0$ veya $f(U) = (0)$ dır. Lemma 6.1.2 den $a = 0$ veya $U\subset Z$ bulunur.

(ii) $\forall x\in R$, $\forall m\in M$ için $m[x,m]\in U$ ve f'in sağ genelleştirilmiş türev olduğu kullanılarak, benzer yolla sonuca ulaşılır.

Lemma 6.1.5 : $d(Z)\neq (0)$ ve $a\in R$ olsun. Buna göre, $[a,f(U)] = (0)$ ise $a\in Z$ veya $U\subset Z$ dir.

İspat : $d(Z)\neq (0)$ olduğundan $d(\alpha)\neq 0$ olacak biçimde bir $\alpha\in Z$ vardır ve $d(\alpha)\in Z$ dir. $u\in U$, $x\in R$ için $[u,\alpha x] = \alpha[u,x] + [u,\alpha]x = \alpha[u,x]\in U$ olduğundan hipotezden, $0 = [a,f(\alpha[u, x])] = [a,d(\alpha)[u,x]] + [a,\alpha f([u,x])] = d(\alpha)[a,[u,x]]$ ise $d(\alpha) = 0$ veya $[a,[u,x]] = 0$, $\forall x\in R, \forall u\in U$ bulunur. $d(\alpha)\neq 0$ olduğundan $[a,[u,x]] = 0$, $\forall x\in R$, $\forall u\in U$ olur.

$I_a:R\to R$, $I_a(x) = [a,x]$ ve $I_a:R\to R$, $I_u(x) = [u,x]$ iç türevlerini tanımlayalım. $I_aI_u(R) = (0)$ dır. Teorem 3.1.3 den $I_a = 0$ veya $I_u = 0$ bulunur. Öyleyse $[a,x] = 0$, $\forall x\in R$ veya $[u,x]=0$ $\forall x\in R$, $\forall u\in U$, yani $a\in Z$ veya $U\subset Z$ elde edilir.

Lemma 6.1.6: $a\in R$ ve $[a,f(U)] = (0)$ ise $a\in Z$ veya $d(a) = 0$ veya $U\subset Z$ dir.

İspat : Hipotezden $u\in U$ için, $0 = [a,f[u,a]] = [a,[f(u),a]] + [a,[u,d(a)]] = [a,[u,d(a)]]$, yani, $[[d(a),U],a] = (0)$ dır. $I_{d(a)}:R\to R$, $I_{d(a)}(x) = [d(a),x]$ ve $I_a:R\to R$, $I_a(x) = [x,a]$ iç türevleri tanımlanırsa $I_aI_{d(a)}(U) = 0$ olur. (Asma ve diğ., 2003) Teorem 4 den , $a\in Z$ veya $d(a)\in Z$ veya $U\subset Z$ bulunur.

Varsayalım ki $d(a)\in Z$ olsun. $0 = [a,f[u,a^2]] = [a,[f(u),a^2]] + [a,[u,d(a^2)]] = [[a,f(u)],a^2] + [[a,a^2]f(u)] + [a,[u,d(a)a]] + [a,[u,ad(a)]]$ dır. $d(a)\in Z$ olduğundan $2[a,[u,ad(a)]] = 0$ olur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan $[a,[u,ad(a)]] = 0$, yani $[a,[u,a]]d(a) = 0$ dır. R halkasının asallığından $[a,[u,a]] = 0$ veya $d(a) = 0$ bulunur. Buradan $[a,[a,u]] = 0$ veya $d(a) = 0$ yazılabilir. $I_a:R\to R$, $I_a(x) = [a,x]$ iç türevi tanımlanırsa,

$[a,I_a(u)] = 0$ veya $d(a) = 0$ elde edilir. Bu ise $I_a I_a(u) = 0$ veya $d(a) = 0$, $\forall u\in U$, yani $I_a^2(U) = 0$ veya $d(a) = 0$ demektir.

$I_a^2(U) = 0$ ise (Bergen ve diğ., 1981) Teorem 1 den $a\in Z$ veya $U\subset Z$ olur. O halde $a\in Z$ veya $d(a) = 0$ veya $U\subset Z$ dir.

Teorem 6.1.7 : $f^2(U) = (0)$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat : Varsayalım ki $U\not\subset Z$ olsun. $u,w\in U$ için, $0 = f^2([f(u),w]) = f([f^2(u),w] + [f(u),d(w)]) = f([f(u),d(w)]) = [f^2(u),d(w)] + [f(u),d^2(w)]$ olduğundan,

$$[f(u),d^2(w)] = 0 \ , \ \forall u,w\in U \qquad (6.1)$$

yani $[d^2(w),f(U)] = 0$ dır. Lemma 6.1.6 dan, $d^2(w)\in Z$ veya $d^3(w) = 0$ veya $U\subset Z$ bulunur. $U\not\subset Z$ olduğundan $d^2(w)\in Z$ veya $d^3(w) = 0$, $\forall w\in U$ dır.

$A = \{w\in U \mid d^2(w)\in Z\}$ ve $B = \{w\in U \mid d^3(w) = 0\}$ kümeleri düşünülürse, $U = A\cup B$ dir. Brauer's Trick'ten $U = A$ veya $U = B$ olmak zorundadır.

$U = A$ ise (Lee ve Lee, 1983) Teorem 1 den $U\subset Z$ elde edilir ki bu varsayımla çelişir. O halde $U = B$ dir. Buradan $d^3(U) = (0)$ olduğundan (Bergen ve diğ., 1981) Lemma 7 den, $d^3(R) = (0)$ bulunur. $\forall u\in U$, $\forall r\in R$ için, $0 = f^2[u,r] = f(f[u,r]) = f([f(u),r]) + f([u,d(r)]) = [f^2(u),r] + [f(u),d(r)] + [f(u),d(r)] + [u,d^2(r)]$ olduğu için,

$$2[f(u),d(r)] + [u,d^2(r)] = 0 \ , \ \forall u\in U \ , \forall r\in R \qquad (6.2)$$

dır. r yerine $rd^2(v)$, $v\in U$ alınırsa ve $d^3(R) = (0)$ olduğu, (6.1) ve (6.2) kullanılırsa,

$$d^2(r)[u, d^2(v)] = 0 \ , \ \forall u,v\in U \ , \forall r\in R \qquad (6.3)$$

olur. $I_{d^2(v)}:R\to R$, $I_{d^2(v)}(x) = [x,d^2(v)]$ iç türevi tanımlansın. (6.3) den $d^2(r)\, I_{d^2(v)}(U) = (0)$, $\forall v\in U$, $\forall r\in R$ elde edilir. (Bergen ve diğ., 1981) Lemma 7 den, $d^2(R) = 0$ veya $d^2(U)\subseteq Z$ bulunur.

$d^2(R) = (0)$ ise (Lee ve Lee, 1981) Teorem 3 den, R komütatiftir. $U\subset Z$ elde edilir ki bu da varsayımla çelişir. $d^2(U)\subseteq Z$ olmalıdır. (Lee ve Lee, 1983) Teorem1 den, $U\subset Z$ şeklindeki aynı çelişki elde edilir. O halde varsayım yanlıştır, $U\subset Z$ dir.

Uyarı 6.1.8 : $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ ise $(u + v)^2 - u^2 - v^2 = uv + vu$ olduğundan $uv + vu \in U$ dur. Ayrıca U, Lie ideal olduğundan $vu - uv \in U$ dir, yani $2vu \in U$ dur.

Teorem 6.1.9 : $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Buna göre, $\forall u,v \in U$ için $f(uv) = f(u)f(v)$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat : Varsayalım ki $U \not\subset Z$ olsun. f, U üzerinde homomorfizm olarak hareket ettiğinden,

$$f(uv) = f(u)v + ud(v) = f(u)f(v) \ , \ \forall u,v \in U \qquad (6.4)$$

dır. u yerine 2uw, $w \in U$ alınırsa, $f(2uw)v + 2uwd(v) = f(2uw)f(v)$ olduğundan, $2f(uw)v + 2uwd(v) = 2f(u)f(wv) = 2f(u)(f(w)v + wd(v)) = 2f(u)f(w)v + 2f(u)wd(v)$, $\forall u,v,w \in U$ elde edilir. Buradan, $2uwd(v) = 2f(u)wd(v)$, $\forall u,v,w \in U$ olur. $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan $(u - f(u))wd(v) = 0$, $\forall u,v,w \in U$ dır. Lemma 2.20 den $d(U) = (0)$ veya $u = f(u)$, $\forall u \in U$ bulunur.

$\forall u \in U$ için $u = f(u)$ ise $2uv \in U$ olduğundan $2uv = f(2uv)$, yani $2uv = 2f(uv)$ dır. f, genelleştirilmiş türev ise $2uf(v) = 2d(u)v + 2uf(v)$, yani $d(u)v = 0$, $\forall u \in U$ olur. Öyleyse $d(U)U = (0)$ dır. (Bergen ve diğ., 1981) Lemma 7 den, $U = (0)$ elde edilir ki bu çelişkidir. O halde $d(U) = (0)$ dır. (Bergen ve diğ., 1981) Lemma 5 den $U \subset Z$ bulunur. Bu da bir çelişkidir. Varsayımımız yanlıştır. $U \subset Z$ olmalıdır.

Teorem 6.1.10: $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Buna göre, $\forall u,v \in U$ için $f(uv) = f(v)f(u)$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat : Varsayalım ki $U \not\subset Z$ olsun. f, U üzerinde anti-homomorfizm olarak hareket ettiğinden,

$$f(uv) = d(u)v + uf(v) = f(v)f(u) \ , \ \forall u,v \in U \qquad (6.5)$$

dır. (6.5) de v yerine 2uv alınırsa, hipotezden $2(d(u)uv - d(u)vf(u)) = 0$ ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan $d(u)uv - d(u)vf(u) = 0$, $\forall u,v \in U$, yani,

$$d(u)uv = d(u)vf(u) \ , \ \forall u,v \in U \qquad (6.6)$$

bulunur. (6.6) da v yerine 2vw, $w \in U$ alınırsa, $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğu ve (6.6) kullanılırsa, $d(u)v[f(u),w] = 0$, $\forall u,v,w \in U$ elde edilir. Lemma 2.20 den $d(u) = 0$ veya $[f(u),w] = 0$, $\forall u,w \in U$ bulunur.

$A = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$ ve $B = \{u \in U \mid [f(u),w] = 0 \ , \ \forall w \in U\}$ kümelerini düşünelim. $U = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten $U = A$ veya $U = B$ olmak zorundadır.

$U = A$ ise $d(U) = (0)$ dır, (Bergen ve diğ., 1981) Lemma 5 den $U \subset Z$ elde edilir ki bu varsayımla çelişir. $U = B$ olmalıdır. $\forall u,w \in U$ için $[f(u),w] = 0$ ise $[f(U),U] = 0$ dır. Lemma 6.1.6'dan $d(U) = 0$ veya $U \subset Z$ bulunur. Her iki durum da olamayacağı için, varsayım yanlıştır, $U \subset Z$ dir.

Teorem 6.1.11 : $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Buna göre, $\forall u,v \in U$ için $f(uv) = f(vu)$ ise $U \subset Z$dir.

İspat : $U \not\subset Z$ olsun. $f(uv) = f(vu)$, $\forall u,v \in U$ ise $f(uv) - f(vu) = 0$, $\forall u,v \in U$ yani $f[u,v] = 0$, $\forall u,v \in U$ dır. $[u,v] = c \in U$ denilirse $f(c) = 0$ dır. Hipotezden $\forall w \in U$ için, $f(cw) = f(wc)$ ise $f(c)w + cd(w) = d(w)c + wf(c)$, yani $cd(w) = d(w)c$ dır. O halde,

$$[c,d(w)] = 0\ ,\ \forall w \in U \qquad (6.7)$$

olur. (6.7) de w yerine 2uc alınırsa, $0 = [c,d(2uc)] = 2[c,d(uc)]$ eşitliğinden $0 = [c,d(uc)] = [c,d(u)c + ud(c)] = d(u)[c,c] + [c,d(u)]c + u[c,d(c)] + [c,u]d(c)$ bulunur. (6.7) den $[c,u]d(c) = 0$, $\forall u \in U$ elde edilir. Bu eşitlikte u yerine 2uv alınırsa, $0 = [c,2uv]d(c) = 2[c,uv]d(c)$ dir. $\mathrm{char}R \neq 2$ ise $[c,u]vd(c) = 0$, $\forall u,v \in U$ olur. Lemma 2.20 den $[c,u] = 0$ veya $d(c) = 0$, $\forall u \in U$,yani $c \in Z$ veya $d(c) = 0$ bulunur. O halde $[u,v] \in Z$ veya $d[u,v] = 0$, $\forall u,v \in U$ olur.

$A = \{u \in U \mid [u,v] \in Z,\ \forall v \in U\}$ ve $B = \{u \in U \mid d[u,v] = 0,\ \forall v \in U\}$ kümeleri düşünülürse, $U = A \cup B$ dir. Brauer's Trick'ten $U = A$ veya $U = B$ olmalıdır.

$U = A$ ise $[U,U] \subset Z$ dir. (Herstein, 1970) Lemma 1 den $U \subset Z$ bulunur. $U = B$ ise $d[U,U] = (0)$ dır. $[U,U]$ Lie ideal olduğundan, (Bergen ve diğ., 1981) Lemma 5 ten $[U,U] \subset Z$ elde edilir. (Herstein, 1970) Lemma 1 den $U \subset Z$ olur.

6.2. Lie İdealler Üzerinde Jordan Genelleştirilmiş Türevler

Bu bölümde $\mathrm{char}R \neq 2$, U, $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ olacak biçimde Lie ideal alınacaktır.

F bir toplamsal dönüşüm ve $\delta : R^2 \to R$ olmak üzere $\delta(x,y) = F(xy) - F(x)y - xd(y)$ ile δ dönüşümünü tanımlayalım. $\forall x,y,z \in R$ için,

$\delta(x,y + z) = F(x(y + z)) - F(x)(y + z) - xd(y + z) = F(xy) + F(xz) - F(x)y - F(x)z - xd(y) - xd(z) = \delta(x,y) + \delta(x,z)$ ve $\delta(x + y,z) = F((x + y)z) - F(x + y)z - (x + y)d(z) = F(xz) + F(yz) - F(x)z - F(y)z - xd(z) - yd(z) = \delta(x,z) + \delta(y,z)$ olduğundan $\delta(x,y + z) = \delta(x,y) + \delta(x,z)$ ve $\delta(x + y,z) = \delta(x,z) + \delta(y,z)$ dir.

Ayrıca $\delta = 0$ ise F, R halkası üzerinde bir genelleştirilmiş türev olur.

Lemma 6.2.1 : R bir halka, char$R \neq 2$, U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali ve $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. $F:R \to R$ toplamsal dönüşümü için $F(u^2) = F(u)u + ud(u)$, $\forall u \in U$ koşulu sağlansın. Buna göre,

(i) $F(uv + vu) = F(u)v + F(v)u + ud(v) + vd(u)$, $\forall u,v \in U$ dur.

(ii) $F(uvu) = F(u)vu + ud(v)u + uvd(u)$, $\forall u,v \in U$ dur.

(iii) $F(uvw + wvu) = F(u)vw + F(w)vu + ud(v)w + uvd(w) + wd(v)u + wvd(u)$, $\forall u,v,w \in U$ dur.

İspat: (i) $\forall u,v \in U$ için $uv + vu = (u + v)^2 - u^2 - v^2$ dir. O halde $F(uv + vu) = F((u + v)^2) - F(u^2) - F(v^2) = F(u + v)(u + v) + (u + v)d(u + v) - F(u)u - ud(u) - F(v)v - vd(v) = F(u)u + F(u)v + F(v)u + F(v)v + ud(u) + ud(v) + vd(u) + vd(v) - F(u)u - ud(u) - F(v)v - vd(v) = F(u)v + F(v)u + ud(v) + vd(u)$, $\forall u,v \in U$ bulunur.

(ii) $\forall u,v \in U$ için $uv + vu \in U$ olduğu (i) de gösterildi. (i) de v yerine $uv + vu$ alınırsa, $F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u)(uv + vu) + ud(uv + vu) + F(uv + vu)u + (uv + vu)d(u) = F(u)(uv + vu) + ud(u)v + u^2 d(v) + ud(v)u + uvd(u) + F(uv)u + F(vu)u + uvd(u) + vud(u)$,yani,

$$F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u)uv + F(u)vu + 2uvd(u) + ud(u)v + u^2 d(v) + F(u)vu + ud(v)u + F(v)u^2 + vd(u)u + ud(v)u + vud(u), \ \forall u,v \in U \tag{6.8}$$

elde edilir.

Öte yandan, $\forall u,v \in U$ için, $F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u^2 v + uvu + uvu + vu^2) = F(u^2 v) + 2F(uvu) + F(vu^2) = F(u^2)v + u^2 d(v) + 2F(uvu) + F(v)u^2 + vd(u^2)$ dir. Buradan,

$$F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u)uv + ud(u)v + u^2 d(v) + 2F(uvu) + F(v)u^2 + vd(u)u + vud(u), \ \forall u,v \in U \tag{6.9}$$

elde edilir. (6.8) ve (6.9) karşılaştırılırsa $\forall$ u,v$\in$ U için 2F(uvu) = 2F(u)vu + 2uvd(u) + 2ud(v)u bulunur. charR$\neq$2 olduğundan F(uvu) = F(u)vu + uvd(u) + ud(v)u olur.

(iii) w$\in$ U olmak üzere (ii) de u üzerinde lineerleştirme yapılırsa, F((u + w)v(u + w)) = F(u + w)v(u + w) + (u + w)d(v(u + w)) = F(u)v(u + w) + F(w)v(u + w) + (u + w)d(v)(u + w) + (u + w)vd(u + w), yani,

F((u + w)v(u + w)) = F(u)vu + F(u)vw + F(w)vu + F(w)vw + ud(v)u + ud(v)w + wd(v)u + wd(v)w + uvd(u) + uvd(w) + wvd(u) + wvd(w), $\forall$ u,v,w$\in$ U (6.10)

elde edilir. Yine her u,v,w$\in$ U için F((u + w)v(u + w)) = F(uvu) + F(uvw) + F(wvu) + F(wvw), yani,

F((u + w)v(u + w)) = F(u)vu + ud(v)u + uvd(u) + F(uvw + wvu) + F(w)vw + wd(v)w + wvd(w), $\forall$ u,v,w$\in$ U (6.11)

dir. (6.10) ve (6.11) karşılaştırılırsa, F(uvw + wvu) = F(u)vw + F(w)vu + ud(v)w + wd(v)u + uvd(w) + wvd(u) bulunur.

Lemma 6.2.2 : R bir asal halka, charR$\neq$2, U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali ve $\forall$u$\in$ U için $u^2 \in U$ olsun. F:R$\to$R toplamsal dönüşümü için F(u^2) = F(u)u + ud(u), $\forall$u$\in$ U koşulu sağlansın. Buna göre, $\forall$u,v,w$\in$ U için δ(u,v)w[u,v] = 0 dır.

İspat : Lemma 6.2.1 (iii) den F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(uv)wvu + F(vu)wuv + uvd(w)vu + uvwd(vu) + vud(w)uv + vuwd(uv), $\forall$ u,v,w$\in$ U, yani,

F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(uv)wvu + F(vu)wuv + uvd(w)vu + uvwd(v)u + uvwvd(u) + vud(w)uv + vuwd(u)v + vuwud(v), $\forall$ u,v,w$\in$ U (6.12)

bulunur.

Öte yandan, F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(u(vwv)u) + F(v(uwu)v) = F(u)vwvu + ud(vwv)u + uvwvd(u) + F(v)uwuv + vd(uwu)v + vuwud(v), $\forall$ u,v,w$\in$ U, yani,

F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(u)vwvu + ud(v)wvu + uvd(w)vu + uvwd(v)u + uvwvd(u) + F(v)uwuv + vd(u)wuv + vud(w)uv + vuwd(u)v + vuwud(v), $\forall$ u,v,w$\in$ U (6.13)

elde edilir. (6.12) ve (6.13) karşılaştırılırsa,

(F(uv) – F(u)v – ud(v))wvu + (F(vu) – F(v)u – vd(u))wuv = 0, $\forall$ u,v,w$\in$ U (6.14) olur. Aynı zamanda Lemma 6.2.1 (i) den F(vu) – F(v)u – vd(u) = F(u)v – F(uv) + ud(v), $\forall$ u,v$\in$ U dir. Bu eşitlik (6.14) de kullanılırsa, (F(uv) – F(u)v – ud(v))w[u,v] = 0, $\forall$ u,v,w$\in$ U bulunur. Bu ise δ(u,v)w[u,w] = 0, $\forall$ u,v,w$\in$ U demektir.

Teorem 6.2.3 : R bir asal halka, charR$\neq$2, U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali ve $\forall$ u$\in$ U için $u^2 \in U$ olsun. F:R$\rightarrow$R toplamsal dönüşümü için $F(u^2)$ = F(u)u + ud(u), $\forall$ u$\in$ U koşulu sağlansın. Buna göre, $\forall$ u,v$\in$ U için F(uv) = F(u)v + ud(v) dir.

İspat : U, komütatif Lie ideal olsun. $\forall$ a$\in$ U, x$\in$ R için [a,x]$\in$ U dur. O halde [a,[a,x]] = 0 dır. x yerine xy, y$\in$ R alınırsa, 0 = [a,[a,xy]] = [a,x[a,y]] + [a,[a,x]y] = x[a,[a,y]] + [a,x][a,y] + [a,x][a,y] + [a,[a,x]]y $\forall$ x,y$\in$ R,a$\in$ U olduğundan 2[a,x][a,y] = 0, $\forall$ x,y$\in$ R,a$\in$ U elde edilir. Öyleyse [a,x][a,y] = 0, $\forall$ x,y$\in$ R,a$\in$ U dır. Son eşitlikte x yerine xr, r$\in$ R alınırsa, 0 = [a,xr][a,y] = [a,x]r[a,y], $\forall$ x,y,r$\in$ R,a$\in$ U olur. R halkasının asallığından a$\in$ Z bulunur. Bu da U$\subset$Z demektir.

Lemma 6.2.1 (iii) eşitliğini alalım. $\forall$ u,v$\in$ U için,

F(uvw + wvu) = F(u)vw + F(w)vu + ud(v)w + uvd(w) + wd(v)u + wvd(u) (6.15)

olsun.

$\forall$ u,v$\in$ U için, $(u + v)^2 = u^2 + uv + vu + v^2 \in U$ olduğundan uv + vu$\in$ U olur. Ayrıca U komütatif Lie ideal olduğundan $\forall$ u,v$\in$ U için [u,v] = 0 dır.Dolayısıyla 2uv$\in$ U olur.

$\forall$ u,v,w$\in$ U için, 2F(uvw + wvu) = F(uvw) + F(wvu) + F(uvw) + F(wvu) = F((uv + uv)w) + F(w(vu + vu)) = F((2uv)w) + F(w(2uv)) dir. Burada Lemma 6.2.1 (i) kullanılırsa, 2F(uvw + wvu) = F((2uv)w) + F(w(2uv)) = F(2uv)w + F(w)2uv + 2uvd(w) + wd(2uv) = 2{F(uv)w + F(w)uv + uvd(w) + wd(u)v + wud(v)}, $\forall$ u,v,w$\in$ U elde edilir.charR$\neq$2 olduğundan $\forall$ u,v,w$\in$ U için

F(uvw + wvu) = F(uv)w + F(w)uv + uvd(w) + wd(u)v + wud(v) (6.16) olur. (6.15) ve (6.16) karşılaştırılırsa ve U Lie idealinin komütatif olduğu kullanılırsa, $((F(uv) - F(u)v - ud(v))w = 0$, $\forall$ u,v,w$\in$ U elde edilir. $\delta(x,y) = F(xy) - F(x)y - xd(y)$ ile tanımlı $\delta : R^2 \to R$ dönüşümü düşünülürse son eşitlikten,

$$\delta(u,v)w = 0, \ \forall u,v,w \in U \qquad (6.17)$$

olur. (6.17) de w yerine [w,r], r$\in$ R alınırsa, $\forall$ u,v,w$\in$ U, r$\in$ R için $\delta(u,v)[w,r] = 0$, yani $\delta(u,v)rw = 0$, $\forall$ u,v,w$\in$ U, r$\in$ R bulunur. Öyleyse $\delta(u,v) = 0$, $\forall$ u,v$\in$ U veya w = 0, $\forall$ w$\in$ U dır. U, sıfırdan farklı Lie ideal olduğundan $\forall$ u,v$\in$ U için $\delta(u,v) = 0$ olur. Bu da F(uv) = F(u)v + ud(v) demektir.

Şimdi U komütatif olmayan Lie ideal olsun. O halde $U \not\subset Z$ dir. Lemma 6.2.2 den $\forall$ u,v,w$\in$ U için $\delta(u,v)w[u,v] = 0$ olur. Lemma 2.20 den $\delta(u,v) = 0$ veya $[u,v] = 0$ bulunur. $U_1 = \{v \in U \mid \delta(u,v) = 0, \ \forall u \in U\}$ ve $U_2 = \{v \in U \mid [u,v] = 0, \ \forall u \in U\}$ kümelerini alalım. $U = U_1 \cup U_2$ dir. Brauer's Trick den $U = U_1$ veya $U = U_2$ olmalıdır.

$U = U_2$ olması U Lie idealinin komütatif olması demektir. Çelişki elde edilir. O halde $U = U_1$ dir. Yani $\forall$ u,v$\in$ U için $\delta(u,v) = 0$ dır. F(uv) = F(u)v + ud(v) olur.

Sonuç 6.2.4 : R bir asal halka, char$R \neq 2$ ve $F:R \to R$, bir Jordan genelleştirilmiş türev olsun. Buna göre, F dönüşümü R üzerinde bir genelleştirilmiş türevdir.

6.3. Homomorfizm veya Antihomomorfizm Gibi Hareket Eden Türevler

Lemma 6.3.1 : R bir asal halka, char$R \neq 2$, U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali, θ ve ϕ birer otomorfizm ve d bir (θ,ϕ)-türev olsun. Buna göre, d(U) = (0) ise d = 0 veya $U \subseteq Z$ dir.

İspat : u$\in$ U, r$\in$ R için $0 = d[u,r] = d(u)\theta(r) + \phi(u)d(r) - d(r)\theta(u) - \phi(r)d(u)$ dir. Hipotez kullanılırsa,

$$\phi(u)d(r) - d(r)\theta(u) = 0, \ \forall u \in U, r \in R \qquad (6.18)$$

olur. (6.18) de r yerine rs, s$\in$ R alınırsa,

$$d(r)[\theta(s),\theta(u)] + [\phi(r),\phi(u)]d(s) = 0, \ \forall u \in U, r,s \in R \qquad (6.19)$$

bulunur. (6.19) da s yerine sv, $v\in U$ alınırsa, (6.19) dan $d(r)\theta(s)[\theta(v),\theta(u)] = 0$, $\forall u,v\in U$, $r,s\in R$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına θ^{-1} uygulanırsa, $\theta^{-1}d(r)s[v,u] = 0$, $\forall u,v\in U$, $r,s\in R$ olur. O halde $\theta^{-1}d(r)R[v,u] = (0)$, $\forall u,v\in U$, $r\in R$ dır. R asal halka olduğundan $\theta^{-1}d(r) = 0$, $\forall r\in R$ veya $[v,u] = 0$, $\forall u,v\in U$ bulunur. Buradan, $d = 0$ veya $[v,u] = 0$, $\forall u,v\in U$ elde edilir.

Her $u,v\in U$ için $[v,u] = 0$ ise, U, bir Lie ideal olduğundan, $\forall r\in R$, $u\in U$ için $[u,[u,ru]] = 0$ dır. r yerine rs, $s\in R$ alınırsa, $0 = [u,[u,rsu]] = r[u,[u,su]] + 2[u,r][u,su] + [u,[u,r]]su$ eşitliğinden $[u,r][u,su] = 0$, $\forall r,s\in R$, $u\in U$ bulunur. Yani $[u,r][u,s]u = 0$, $\forall r,s\in R$, $u\in U$ dır. Son eşitlikte r yerine rt, $t\in R$ alınırsa, $0 = [u,rt][u,s]u = [u,r]t[u,s]u$, $\forall r,s,t\in R$, $u\in U$, yani $[u,r]R[u,s]u = (0)$, $\forall r,s\in R$, $u\in U$ elde edilir. R nin asallığından $[u,r] = 0$, $\forall r\in R$ veya $[u,s]u = 0, \forall s\in R$ bulunur. Bu da $u\in Z$ veya $[u,s]u = 0$, $\forall s\in R$ demektir.

Benzer şekilde $m\in R$ olmak üzere s yerine sm yazılırsa, $[u,m] = 0$, $\forall m\in R$ elde edilir. Bu da $U\subseteq Z$ demektir. Sonuç olarak $d = 0$ veya $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 6.3.2 : R bir asal halka, $\mathrm{char}R\neq 2$, U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali, $u\in U$ için $u^2\in U$, θ bir otomorfizm ve $F:R\to R$, bir d, (θ,θ)-türeviyle yapılan bir genelleştirilmiş (θ,θ)-türev olsun. Buna göre,

(i) F genelleştirilmiş (θ,θ)-türevi, U Lie ideali üzerinde bir homomorfizm ise d türevi R halkası üzerinde sıfırdır veya $U\subseteq Z$ dir.

(ii) F genelleştirilmiş (θ,θ)-türevi, U Lie ideali üzerinde bir antihomomorfizm ise d türevi R halkası üzerinde sıfırdır veya $U\subseteq Z$ dir.

İspat: (i) $U\not\subset Z$ olsun. F, genelleştirilmiş (θ,θ)-türev olduğundan

$$F(uv) = F(u)\theta(v) + \theta(u)d(v) = F(u)F(v),\ \forall u,v\in U \tag{6.20}$$

dir. v yerine 2vw, $w\in U$ alınırsa, $(F(u) - \theta(u))\theta(v)d(w) = 0$, $\forall u,v,w\in U$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına θ^{-1} uygulanırsa, $\theta^{-1}(F(u) - \theta(u))U\theta^{-1}d(w) = (0)$, $\forall u,w\in U$ olur. Lemma 2.20 den $\forall u\in U$ için $\theta^{-1}(F(u) - \theta(u)) = 0$ veya $\forall w\in U$ için $\theta^{-1}d(w) = 0$ bulunur. O halde $\forall u\in U$ için $F(u) - \theta(u) = 0$ veya $\forall w\in U$ için $d(w) = 0$ dır.

$\forall u \in U$ için $F(u) - \theta(u) = 0$ ise (6.20) den $\forall u,v \in U$ için $\theta(u)d(v) = 0$ bulunur. Bu eşitlikte u yerine 2uw alınırsa, $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan $\theta(uw)d(v) = 0$, $\forall u,v,w \in U$ dır. Eşitliğin her iki tarafına θ^{-1} uygulanırsa, $uw\theta^{-1}d(v) = 0$, $\forall u,v,w \in U$ elde edilir. Bu da $uU\theta^{-1}d(v) = (0)$, $\forall u,v \in U$ demektir. O halde Lemma 2.20 den $u = 0$, $\forall u \in U$ veya $d(v) = 0$, $\forall v \in U$ bulunur. Hipotezden $d(v) = 0$, $\forall v \in U$, yani $d(U) = (0)$ dır. Bir önceki lemmadan $d = 0$ veya $U \subseteq Z$ olur.

(ii) $U \not\subset Z$ olsun. F genelleştirilmiş (θ,θ)-türev olduğundan ve antihomomorfizm olduğundan,

$$F(uv) = F(u)\theta(v) + \theta(u)d(v) = F(v)F(u),\ \forall u,v,w \in U \tag{6.21}$$

dır. (6.21) de u yerine 2uv alınırsa, $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan

$$\theta(u)\theta(v)d(v) = F(v)\theta(u)d(v),\ \forall u,v \in U \tag{6.22}$$

elde edilir. u yerine 2wu, $w \in U$ alınırsa, θ otomorfizm ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan,

$$\theta(w)\theta(u)\theta(v)d(v) = F(v)\theta(w)\theta(u)d(v),\ \forall u,v,w \in U \tag{6.23}$$

bulunur. (6.22) ve (6.23) kullanılırsa, $\theta(w)F(v)\theta(u)d(v) = F(v)\theta(w)\theta(u)d(v)$, $\forall u,v,w \in U$, yani, $[F(v),\theta(w)]\theta(u)d(v) = 0$, $\forall u,v,w \in U$ olur. Buradan $\theta^{-1}[F(v),\theta(w)]U\theta^{-1}d(v) = (0)$, $\forall v,w \in U$ dır. Lemma 2.20 den $[F(v),\theta(w)] = 0$, $\forall w \in U$ veya $d(v) = 0$ bulunur.

$\forall w \in U$ için $[F(v),\theta(w)] = 0$ ifadesinde v yerine 2vw alınırsa, $\forall v,w \in U$ için $[F(2vw),\theta(w)] = 0$ olur. Yani,

$$\theta(v)[d(w),\theta(w)] + [\theta(v),\theta(w)]d(w) = 0,\ \forall v,w \in U \tag{6.24}$$

elde edilir. (6.24) de v yerine $2v_1v$, $v_1 \in U$ alınırsa ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğu kullanılırsa, $\theta(v_1)\theta(v)[d(w),\theta(w)] + \theta(v_1)[\theta(v),\theta(w)]d(w) + [\theta(v_1),\theta(w)]\theta(v)d(w) = 0$, $\forall v,v_1,w \in U$ bulunur. (6.24) den $[\theta(v_1),\theta(w)]\theta(v)d(w) = 0$, $\forall v,v_1,w \in U$ olur. Bu da $[v_1,w]U\theta^{-1}d(w) = (0)$, $\forall v_1,w \in U$ demektir. Yine Lemma 2.20 den $[v_1,w] = 0$, $\forall v_1 \in U$ veya $d(w) = 0$ bulunur.

Şimdi $A = \{w \mid [v_1,w] = 0,\ \forall v_1 \in U\}$ ve $B = \{w \mid d(w) = 0\}$ kümelerini alalım. $U = A \cup B$ dir. Brauer's Trick den $U = A$ veya $U = B$ olmalıdır.

U = A ise [U,U] = (0) olacağından U Lie ideali komütatiftir. Bu durumda $U \subseteq Z$ olduğu daha önce gösterilmişti. Çelişki elde edilir. O halde U = B dir.Yani d(U) = 0 dır. Lemma 6.3.1 den d = 0 bulunur.

Sonuç 6.3.3 : R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali, θ bir otomorfizm ve F: $R \to R$, d türeviyle yapılan bir genelleştirilmiş (θ,θ)-türev olsun. Buna göre,

(i) F genelleştirilmiş (θ,θ)-türevi, I ideali üzerinde bir homomorfizm ise d türevi R halkası üzerinde sıfırdır veya $I \subseteq Z$ dir.

(ii) F genelleştirilmiş (θ,θ)-türevi, I Lie ideali üzerinde bir antihomomorfizm ise d türevi R halkası üzerinde sıfırdır ya da $I \subseteq Z$ dir.

Not 6.3.4 : Bir R halkasında her ideal Lie ideal olduğundan yukarıdaki teoremde U ideal gibi düşünülebilir. Fakat $u \in U$ için $u^2 \in U$ özelliğine sahip ideal olmayan Lie idealler de vardır.

$R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in Z \right\}$ ve $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in Z \right\}$ olsun. Burada U Lie ideal ve $u^2 \in U$ olmasına rağmen U ideal değildir.

6.4. Lie İdealler Üzerinde Genelleştirilmiş (θ,ϕ)-Türevler

Bu bölümde yine R, karakteristiği 2 den farklı bir asal halka alınacaktır. Ayrıca, $x^y = F(xy) - F(x)\theta(y) - \phi(x)d(y)$ eşitliği kullanılacaktır.

Yukarıdaki eşitliğe göre $x,y,z \in R$ için $x^{y+z} = x^y + x^z$ ve $(x+y)^z = x^z + y^z$ dir.

Lemma 6.4.1 : R bir 2-torsion free asal halka, U, R nin bir Lie ideali, $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$, θ ve ϕ R üzerinde endomorfizmler ve d bir (θ,ϕ)-türev olsun. F: $R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere, $\forall u \in U$ için $F(u^2) = F(u)\theta(u) + \phi(u)d(u)$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $F(uv + vu) = F(u)\theta(v) + \phi(u)d(v) + F(v)\theta(u) + \phi(v)d(u), \forall u,v \in U$

(ii) $F(uvu) = F(u)\theta(vu) + \phi(uv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(u), \ \forall u,v \in U$

(iii) $F(uvw + wvu) = F(u)\theta(vw) + F(w)\theta(vu) + \phi(uv)d(w) + \phi(wv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(w) + \phi(w)d(v)\theta(u),\ \forall u,v,w\in U$

(iv) $u^{v}\,[\theta(u),\theta(v)] = 0,\ \forall u,v\in U$

(v) $u^{v}\,\theta(w)[\theta(u),\theta(v)] = 0,\ \forall u,v,w\in U$

İspat : (i) $u,v\in U$ için $F(uv + vu) = F((u + v)^2) - F(u^2) - F(v^2) = F(u + v)\theta(u+v) + \phi(u + v)d(u + v) - F(u)\theta(u) - \phi(u)d(u) - F(v)\theta(v) - \phi(v)d(v) = F(u)\theta(v) + \phi(u)d(v) + F(v)\theta(u) + \phi(v)d(u)$ dir.

(ii) $u,v\in U$ için, $uv + vu = (u + v)^2 - u^2 - v^2 \in U$ olduğundan (i) şıkkında v yerine $uv + vu$ alınırsa, $F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u)\theta(uv + vu) + \phi(u)d(uv + vu) + F(uv+vu)\theta(u) + \phi(uv + vu)d(u)$ olur. $d:R\rightarrow R$, (θ,ϕ)-türev olduğundan $d(uv + vu) = d(u)\theta(v) + \phi(u)d(v) + d(v)\theta(u) + \phi(v)d(u)$, $\forall u,v\in U$ yazılabilir. Öyleyse, $F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u)\theta(uv) + F(u)\theta(vu) + \phi(u)d(u)\theta(v) + \phi(u)\phi(u)d(v) + \phi(u)d(v)\theta(u) + \phi(u)\phi(v)d(u) + F(u)\theta(v)\theta(u) + F(v)\theta(u)\theta(u) + \phi(u)d(v)\theta(u) + \phi(v)d(u)\theta(u) + \phi(uv)d(u) + \phi(vu)d(u),\ \forall u,v\in U$, yani $F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u)\theta(uv) + 2F(u)\theta(vu) + F(v)\theta(u^2) + 2\phi(u)d(v)\theta(u) + \phi(v)d(u)\theta(u) + \phi(u)d(u)\theta(v) + \phi(u^2)d(v) + 2\phi(uv)d(u) + \phi(vu)d(u),\ \forall u,v\in U$ elde edilir.

Öte yandan, $F(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = F(u^2v + vu^2) + 2F(uvu) = F(u^2)\theta(v) + \phi(u^2)d(v) + F(v)\theta(u^2) + \phi(v)d(u^2) + 2F(uvu) = F(u)\theta(uv) + \phi(u)d(u)\theta(v) + F(v)\theta(u^2) + \phi(v)d(u)\theta(u) + \phi(v)\phi(u)d(u) + \phi(u^2)d(v) + 2F(uvu),\ \forall u,v\in U$ dır.

İlk ve ikinci paragrafta elde edilen son eşitlikler karşılaştırılır ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğu kullanılırsa, $F(uvu) = F(u)\theta(vu) + \phi(uv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(u)$, $\forall u,v\in U$ bulunur.

(iii) (ii) de u yerine $u + w$, $w\in U$ alınırsa, $F((u + w)v(u + w)) = F(u + w)\theta(v(u + w)) + \phi((u + w)v)d(u + w) + \phi(u + w)d(v)\theta(u + w) = F(u)\theta(vu) + F(u)\theta(vw) + F(w)\theta(vu) + F(w)\theta(vw) + \phi(uv)d(u) + \phi(uv)d(w) + \phi(wv)d(u) + \phi(wv)d(w) + \phi(u)d(v)\theta(u) + \phi(u)d(v)\theta(w) + \phi(w)d(v)\theta(u) + \phi(w)d(v)\theta(w) =$

$F(uvu) + F(wvw) + F(w)\theta(vu) + \phi(uv)d(w) + \phi(wv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(w) + \phi(w)d(v)\theta(u) + F(u)\theta(vw)$, $\forall\, u,v,w \in U$ elde edilir.

Öte yandan, $F((u + w)v(u + w)) = F(uvu) + F(wvw) + F(uvw + wvu)$, $\forall\, u,v,w \in U$ dir.

İlk ve ikinci paragrafta elde edilen son eşitlikler karşılaştırılırsa, $F(uvw + wvu) = F(u)\theta(vw) + F(w)\theta(vu) + \phi(uv)d(w) + \phi(wv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(w) + \phi(w)d(v)\theta(u)$, $\forall\, u,v,w \in U$ bulunur.

(iv) $uv + vu$, $uv - vu \in U$ olduğundan $2uv \in U$ dur. Hipotezden, $F((uv)^2) = F(uv)\theta(uv) + \phi(uv)d(uv)$, $\forall\, u,v \in U$ yazılabilir. O zaman $F(uv(uv) + (uv)vu) = F((uv)^2) + F(uv^2u) = F(uv)\theta(uv) + \phi(uv)d(uv) + F(u)\theta(v^2u) + \phi(uv^2)d(u) + \phi(u)d(v^2)\theta(u) = F(uv)\theta(uv) + \phi(uv)d(uv) + F(u)\theta(v^2u) + \phi(uv^2)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(vu) + \phi(uv)d(v)\theta(u)$, $\forall\, u,v \in U$ olur.

(iii) de w yerine 2uv alınırsa, $F(uv(uv) + (uv)vu) = F(u)\theta(vuv) + F(uv)\theta(vu) + \phi(uv)d(uv) + \phi(uv^2)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(uv) + \phi(uv)d(v)\theta(u)$, $\forall\, u,v \in U$ bulunur.

İlk ve ikinci paragrafta elde edilen son eşitlikler karşılaştırılırsa, $0 = F(uv)(\theta(uv) - \theta(vu)) - F(u)\theta(v)(\theta(uv) - \theta(vu)) - \phi(u)d(v)(\theta(uv) - \theta(vu)) = F(uv) - F(u)\theta(v) - \phi(u)d(v)(\theta(uv) - \theta(vu)) = u^v[\theta(u), \theta(v)]$, $\forall\, u,v \in U$ elde edilir.

(v) (iii) den, $F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(uv)\theta(wvu) + F(vu)\theta(w(uv)) + \phi(uvw)d(vu) + \phi(vuw)d(uv) + \phi(uv)d(w)\theta(vu) + \phi(vu)d(w)\theta(uv)$, $\forall\, u,v,w \in U$, yani,

$$F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(uv)\theta(wvu) + F(vu)\theta(wuv) + \phi(uvw)d(v)\theta(u) + \phi(uvwv)d(u) + \phi(vuw)d(u)\theta(v) + \phi(vuwu)d(v) + \phi(uv)d(w)\theta(vu) + \phi(vu)d(w)\theta(uv), \quad \forall\, u,v,w \in U \tag{6.25}$$

dir. Aynı zamanda, $F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(u(vwv)u) + F(v(uwu)v) = F(u)\theta(vwvu) + \phi(uvwv)d(u) + \phi(u)d(vwv)\theta(u) + F(v)\theta(uwuv) + \phi(vuwu)d(v) + \phi(v)d(uwu)\theta(v)$, $\forall u,v,w \in U$ olur.

$2uw \in U$ olduğundan $4uw \in U$ dur. $d(4uwu) = 4d(u(wu)) = 4(d(u)\theta(wu) + \phi(u)d(w)\theta(u) + \phi(uw)d(u))$, $\forall u,v,w \in U$, yani $d(u(wu)) = d(u)\theta(wu) + \phi(u)d(w)\theta(u) + \phi(uw)d(u)$ olduğu bir üstteki paragrafın son eşitliğinde kullanılırsa, $F((uv)w(vu) + (vu)w(uv)) = F(u)\theta(vwvu) + \phi(uvwv)d(u) + \phi(u)d(v)\theta(wvu) + \phi(uvw)d(v)\theta(u) + \phi(uv)d(w)\theta(vu) + F(v)\theta(uwuv) + \phi(vuwu)d(v) + \phi(v)d(u)\theta(wuv) + \phi(vuw)d(u)\theta(v) + \phi(vu)d(w)\theta(uv)$, $\forall u,v,w \in U$ elde edilir.

Bu eşitlik (6.25) e eşitlenirse ve $u^v = - v^u$ olduğu kullanılırsa, $F(uv)\theta(wvu) + F(vu)\theta(wuv) = F(u)\theta(vwvu) + \phi(u)d(v)\theta(wvu) + F(v)\theta(uwuv) + \phi(v)d(u)\theta(wuv)$, $\forall u,v,w \in U$ eşitliğinden $u^v\,\theta(w)[\theta(u),\theta(v)] = 0$, $\forall u,v,w \in U$ bulunur.

Teorem 6.4.2 : R bir 2-torsion free asal halka, U, R nin komütatif olmayan bir Lie ideali, $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$, θ ve ϕ, R üzerinde endomorfizmler, θ birebir ve örten ve $d:R \to R$, bir (θ,ϕ)-türev olsun. Buna göre, $F:R \to R$, U üzerinde bir genelleştirilmiş Jordan (θ,ϕ)-türev ise, F, U üzerinde genelleştirilmiş (θ,ϕ)-türevdir.

İspat : Lemma 6.4.1 (v) den $\forall u,v,w \in U$ için $u^v\,\theta(w)[\theta(u),\theta(v)] = 0$ olduğu kullanılırsa, $0 = \theta^{-1}(u^v\,\theta(w)[\theta(u),\theta(v)]) = \theta^{-1}(u^v)w[u,v]$, $\forall u,v,w \in U$ elde edilir. Lemma 2.20 den $\theta^{-1}(u^v) = 0$ veya $[u,v] = 0$, yani $u^v = 0$ veya $[u,v] = 0$, $\forall u,v \in U$ bulunur.

$U_1 = \{v \in U \mid u^v = 0 , \forall u \in U\}$ve $U_2 = \{v \in U \mid [u,v] = 0, \forall u \in U\}$ kümeleri alınırsa, $U = U_1 \cup U_2$ dir. Brauer's Trick den $U = U_1$ veya $U = U_2$ olmalıdır. U komütatif olmadığından $U = U_1$ dir. Buradan $0 = u^v = F(uv) - F(u)\theta(v) -$

ϕ(u)d(v) den $\forall$ u,v$\in$ U için F(uv) = F(u)θ(v) +ϕ(u)d(v) bulunur. Yani F, U üzerinde genelleştirilmiş (θ,ϕ)-türev olur.

Sonuç 6.4.3 : R bir 2-torsion free, komütatif olmayan asal halka olsun. Buna göre, F : R$\rightarrow$R genelleştirilmiş Jordan türev ise F, genelleştirilmiş türevdir.

İspat : 1 birim dönüşüm olmak üzere bir genelleştirilmiş Jordan türev, genelleştirilmiş (1,1) Jordan türevdir. O zaman Teorem 6.4.2 den genelleştirilmiş (1,1) türev, yani genelleştirilmiş türev olduğu görülür.

Teorem 6.4.4 : R bir 2-torsion free asal halka, U, R nin sıfırdan farklı komütatif Lie ideali, $\forall$ u$\in$ U için $u^2 \in$ U, θ, R üzerinde bir otomorfizm ve d:R$\rightarrow$R, bir (θ,θ)-türev olsun. Buna göre, F: R$\rightarrow$R, U üzerinde bir genelleştirilmiş Jordan (θ,θ)-türev ise, F, U üzerinde bir genelleştirilmiş (θ,θ)-türevdir.

İspat : U komütatif Lie ideal ise [a,[a,xy]] = 0, $\forall$ x,y$\in$ R, a$\in$ U dır. Yine $\forall$ x,y$\in$ R, a$\in$ U için, [a,xy] = [a,x]y + x[a,y] eşitliği sağlandığından ve U komütatif olduğundan bu son ifadeyi a ile komütleyebiliriz. Gerekli düzenlemeler yapılırsa, charR$\neq$2 olduğundan [a,x][a,y] = 0, $\forall$ x,y$\in$ R, a$\in$ U dır. Son eşitlikte y yerine ry, r$\in$ R alınırsa, 0 = [a,x][a,ry] = [a,x]r[a,y] + [a,x][a,r]y = [a,x]r[a,y], $\forall$ x,y$\in$ R, a$\in$ U, yani [a,x]R[a,y] = (0), $\forall$ x,y$\in$ R elde edilir. R nin asallığından [a,x] = 0, $\forall$ x$\in$ R, a$\in$ U bulunur. Yani U$\subset$Z dir.

Lemma 6.4.1 den ,

F(uvw + wvu) = F(u)θ(vw) + F(w)θ(vu) + θ(uv)d(w) + θ(wv)d(u) + θ(u)d(v)θ(w) +θ(w)d(v)θ(u) , $\forall$ u,v,w$\in$ U (6.26)

dır. $\forall$ u$\in$ U için $u^2 \in$ U olduğundan, $\forall$ u,v$\in$ U 2uv$\in$ U dur. U komütatif olduğu için Lemma 6.4.1 (i) den, 2F(uvw + wvu) = F((2uv)w + w(2uv)) = F(2uv)θ(w) + θ(2uv)d(w) + F(w)θ(2uv) + θ(w)d(2uv) = 2F(uv)θ(w) + 2θ(uv)d(w) + 2F(w)θ(uv) + 2θ(w)d(uv), $\forall$ u,v,w$\in$ U elde edilir. charR$\neq$2 olduğundan

F(uvw + wvu) = F(uv)θ(w) + θ(uv)d(w) + F(w)θ(uv) + θ(w)d(uv) (6.27)

bulunur. (6.26) ve (6.27) eşitlenirse, [u,v] = 0, U$\subset$Z ve θ(u)$\in$ Z olduğu kullanılırsa, 0 = F(uv)θ(w) – F(u)θ(v)θ(w) – θ(u)d(v)θ(w) = (F(uv) – F(u)θ(v) – θ(u)d(v))θ(w), $\forall$ u,v,w$\in$ U yani u^v θ(w) = 0 elde edilir. Öyleyse u^v = 0 veya θ(w) = 0 dır. u^v = 0 ise F(uv) – F(u)θ(v) – θ(u)d(v) = 0,

$\forall$ u,v$\in$ U dan F(uv) = F(u)θ(v) + θ(u)d(v), $\forall$ u,v$\in$ U olur. O halde, F, U üzerinde bir genelleştirilmiş (θ,θ)-türevdir.

Sonuç 6.4.5 : R bir 2-torsion free asal halka olsun. Buna göre, F:R$\rightarrow$R, bir genelleştirilmiş Jordan türev ise F bir genelleştirilmiş türevdir.

Aşağıdaki örnekte, yukarıdaki sonuçta R halkasının asal olması gerektiği gösterilmiştir.

Örnek 6.4.6 : S, her elemanının karesi sıfır, bazı elemanlarının çarpımı sıfırdan farklı olan bir halka olsun. R = $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in S\right\}$ ve F:R$\rightarrow$R,

$F\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dönüşümünü tanımlayalım.d = 0 ve U = R için, F(r^2) = F(r)r + rd(r) = F(r)r = F(r)s = 0 $\forall$ r,s$\in$ R olur. Fakat, bazı r,s$\in$ R elemanları için F(rs)$\neq$0 dır.

Teorem 6.4.7 : R bir 2-torsion free asal halka, U, R nin bir Lie ideali, $\forall$ u$\in$ U için u$^2\in$ U, θ ve ϕ, R üzerinde endomorfizmler, θ birebir ve örten, d:R$\rightarrow$R, bir (θ,ϕ)-türev olsun. U da sıfır bölen olmayan komütatör bulunsun. Buna göre, F:R$\rightarrow$R, U üzerinde bir genelleştirilmiş Jordan (θ,ϕ)-türev ise, F, U üzerinde bir genelleştirilmiş (θ,ϕ)-türevdir.

İspat : F : R$\rightarrow$R bir genelleştirilmiş Jordan (θ,ϕ)-türev olduğundan $\forall$ u$\in$ U için, F(u^2) = F(u)θ(u) +ϕ(u)d(u) olacak biçimde bir d:R$\rightarrow$R, (θ,ϕ)-türevi vardır. u,v$\in$ U için u^v = F(uv) – F(u)θ(v) – ϕ(u)d(v) ise, θ otomorfizma olduğundan Lemma 6.4.1 (iv) den, 0 = u^v [θ(u),θ(v)] = u^v θ[u,v] bulunur.

$$\theta^{-1}(u^v)[u,v] = 0, \forall u,v \in U \tag{6.28}$$

diyelim. a,b$\in$ U, c[a,b] = 0 veya [a,b]c = 0 olacak biçimde sabit elemanlar olsun. [a,b] sıfır bölen olmadığından c = 0 dır. (6.28) de a, b elemanları kullanılırsa θ^{-1}(a^b) = 0, yani

$$a^b = 0 \tag{6.29}$$

olur. (6.28) de u yerine u + a alınırsa, 0 = θ^{-1}((u + a)^v)[u + a,v] = θ^{-1}(u^v + a^v)[u + a,v] = θ^{-1}(u^v)[u + a,v] +θ^{-1}(a^v)[u + a,v], yani

$$\theta^{-1}(u^v)[a,v] + \theta^{-1}(a^v)[u,v] = 0, \forall u,v \in U \tag{6.30}$$

bulunur. (6.30) de v yerine b alınırsa, $\theta^{-1}(u^b)[a,b]=0$ dır. [a,b] nin sıfır bölen olmadığı kullanılırsa,

$$\theta^{-1}(u^b) = 0 , \forall u \in U \tag{6.31}$$

elde edilir. (6.30) da v yerine v + b alınırsa, $\theta^{-1}(u^{v+b})[a,v + b] + \theta^{-1}(a^{v+b})[u,v + b] = \theta^{-1}(u^v + u^b)[a,v + b] + \theta^{-1}(a^v + a^b)[u,v + b] = (\theta^{-1}(u^v) + \theta^{-1}(u^b))([a,v] + [a,b]) + (\theta^{-1}(a^v) + \theta^{-1}(a^b))([u,v] + [u,b])$, yani

$$\theta^{-1}(u^v)[a,b] + \theta^{-1}(a^v)[u,b] = 0 , \ \forall u,v \in U \tag{6.32}$$

olur. (6.32) de özel olarak u = a alınırsa, $2\theta^{-1}(a^v)[a,b] = 0$ dır. charR $\neq 2$ olduğundan $\theta^{-1}(a^v)[a,b] = 0$, yani $\theta^{-1}(a^v) = 0$ bulunur. Öyleyse

$$a^v = 0 \tag{6.33}$$

dır. (6.32) ve (6.33) den, $\theta^{-1}(u^v)[a,b] = 0$ dır. $\theta^{-1}(u^v) = 0$ ise $u^v = 0$, $\forall u,v \in U$ elde edilir. Öyleyse $F(uv) - F(u)\theta(v) - \phi(u)d(v) = 0$ dır. Buradan, $F(uv) = F(u)\theta(v) + \phi(u)d(v)$, $\forall u,v \in U$ olacağından F, U üzerinde genelleştirilmiş (θ,ϕ) türevdir.

Sonuç 6.4.8 : R bir 2-torsion free halka ve $F:R \to R$ bir genelleştirilmiş Jordan türev olsun. Buna göre, R de sıfır bölen olmayan komütatör varsa F, R üzerinde bir genelleştirilmiş türevdir.

Uyarı 6.4.9 : R halkasında her ideal aynı zamanda Lie ideal olduğundan, yukarıdaki teoremin sonucunda U, ideal olarak alınabilir. $\forall u \in U$, $u^2 \in U$ kabulü, U nun ideal olması kabulüne yakın olmasına rağmen, bu özelliğe sahip olup da ideal olmayan Lie idealler de vardır. Örneğin; R halka, U, R halkasının idempotent elemanlarından oluşan toplamsal altgrubu olsun. $U = \{e \in R \mid e^2 = e\}$. Eğer e elemanı idempotent eleman ise $x \in R$ olmak üzere, $u = e + ex - exe$, $v = e + xe - exe$ elemanları da idempotenttir, yani U kümesinin elemanlarıdır. $\forall e \in U$, $\forall x \in R$ için, $ex - xe = u - v \in U$ yani $[U,R] \subset U$ olduğundan U, Lie idealdir. Ayrıca $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ şartı sağlanır, ancak U, ideal değildir.

6.5. Jordan İdealler Üzerinde Genelleştirilmiş Türevler

6.5.1. Jordan İdeallerde Sol (θ,θ)-Türevler

Lemma 6.5.1.1 : G ve H toplamsal iki grup, R, 2 torsion free bir halka ve $f:GxG \to H$ ve $g:GxG \to R$ bitoplamsal dönüşüm olsunlar. $\forall a,b \in G$ için $f(a,b) = 0$ veya $g(a,b)^2 = 0$ ise $f = 0$ veya $g(a,b)^2 = 0$, $\forall a,b \in G$ dir.

Lemma 6.5.1.2 : R, 2 torsion free bir halka, J, R nin bir Jordan ideali ve alt halkası ve θ bir endomorfizm olsun. Buna göre, δ:R$\rightarrow$R, toplamsal bir dönüşüm olmak üzere $\forall$ u$\in$ J için $\delta(u^2) = 2\theta(u)\delta(u)$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $\delta(uv + vu) = 2\theta(u)\delta(v) + 2\theta(v)\delta(u)$, $\forall$ u,v$\in$ J

(ii) $\delta(uvu) = \theta(u^2)\delta(v) + 3\theta(u)\theta(v)\delta(u) - \theta(v)\theta(u)\delta(u)$, $\forall$ u,v$\in$ J

(iii) $\delta(uvw + wvu) = (\theta(u)\theta(w) + \theta(w)\theta(u))\delta(v) + 3\theta(u)\theta(v)\delta(w) + 3\theta(w)\theta(v)\delta(u) - \theta(v)\theta(u)\delta(w) - \theta(v)\theta(w)\delta(u)$, $\forall$ u,v,w$\in$ J

(iv) $[\theta(u),\theta(v)]\theta(u)\delta(u) = \theta(u)[\theta(u),\theta(v)]\delta(u)$, $\forall$ u,v$\in$ J

(v) $[\theta(u),\theta(v)](\delta(uv) - \theta(u)\delta(v) - \theta(v)\delta(u)) = 0$, $\forall$ u,v$\in$ J dir.

İspat : (i) J, Jordan ideal olduğundan $\forall$ u,v$\in$ J için, uv + vu = (u,v)$\in$ J dir. $uv + vu = (u + v)^2 - u^2 - v^2$ olduğundan $\delta(uv + vu) = \delta((u + v)^2 - u^2 - v^2) = \delta((u + v)^2) - \delta(u^2) - \delta(v^2) = 2\theta(u + v)\delta(u + v) - 2\theta(u)\delta(u) - 2\theta(v)\delta(v) = 2\theta(u)\delta(u) + 2\theta(u)\delta(v) + 2\theta(v)\delta(u) + 2\theta(v)\delta(v) - 2\theta(u)\delta(u) - 2\theta(v)\delta(v)$ elde edilir. Öyleyse $\delta(uv + vu) = 2\theta(u)\delta(v) + 2\theta(v)\delta(u)$, $\forall$ u,v$\in$ J dir.

(ii) $\forall$ u,v$\in$ J için uv + vu$\in$ J idi. (i) de v yerine uv + vu alınırsa, $\delta(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = 2\theta(u)\delta(uv + vu) + 2\theta(uv + vu)\delta(u) = 2\theta(u)(2\theta(u)\delta(v) + 2\theta(v)\delta(u)) + 2\theta(uv)\delta(u) + 2\theta(vu)\delta(u)$, yani

$$\delta(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = 4\theta(u^2)\delta(v) + 6\theta(uv)\delta(u) + 2\theta(vu)\delta(u), \quad \forall u,v\in J \tag{6.34}$$

bulunur.

Öte yandan, $\delta(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = \delta(u^2v + uvu + uvu + vu^2) = \delta(u^2v + vu^2) + 2\delta(uvu)$ dır. Burada (i) kullanılırsa, $\delta(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 2\theta(v)\delta(u^2) + 2\delta(uvu) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 2\theta(v)2\theta(u)\delta(u) + 2\delta(uvu)$, $\forall$ u,v$\in$ J, yani

$$\delta(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 4\theta(vu)\delta(u) + 2\delta(uvu), \quad \forall u,v\in J \tag{6.35}$$

olur. (6.34) ve (6.35) karşılaştırılırsa, $4\theta(u^2)\delta(v) + 6\theta(uv)\delta(u) + 2\theta(vu)\delta(u) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 4\theta(vu)\delta(u) + 2\delta(uvu)$, $\forall$ u,v$\in$ J den $2\delta(uvu) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 6\theta(uv)\delta(u) - 2\theta(vu)\delta(u)$, $\forall$ u,v$\in$ J elde edilir. charR$\neq$2 olduğundan $\delta(uvu) = \theta(u^2)\delta(v) + 3\theta(uv)\delta(u) - \theta(vu)\delta(u)$, $\forall$ u,v$\in$ J dır.

(iii) (ii) de u yerine u + w, $w \in J$ alınırsa, $\delta((u + w)v(u + w)) = \theta((u + w)^2)\delta(v) + 3\theta(u + w)\theta(v)\delta(u + w) - \theta(v)\theta(u + w)\delta(u + w) = \theta(u + w)\theta(u + w)\delta(v) + 3(\theta(u) + \theta(w))\theta(v)(\delta(u) + \delta(w)) - \theta(v)(\theta(u) + \theta(w))(\delta(u) + \delta(w))$, $\forall u,v,w \in J$, yani

$$\delta((u + w)v(u + w)) = \theta(u)\theta(u)\delta(v) + \theta(u)\theta(w)\delta(v) + \theta(w)\theta(u)\delta(v) + \theta(w)\theta(w)\delta(v) + 3\theta(u)\theta(v)\delta(u) + 3\theta(u)\theta(v)\delta(w) + 3\theta(w)\theta(v)\delta(u) + 3\theta(w)\theta(v)\delta(w) - \theta(v)\theta(u)\delta(u) - \theta(v)\theta(u)\delta(w) - \theta(v)\theta(w)\delta(u) - \theta(v)\theta(w)\delta(w),\ \forall u,v,w \in J \tag{6.36}$$

elde edilir.

Öte yandan, $\delta((u + w)v(u + w)) = \delta(uvu) + \delta(wvw) + \delta(uvw + wvu) = \theta(u^2)\delta(v) + 3\theta(u)\theta(v)\delta(u) - \theta(v)\theta(u)\delta(u) + \theta(w^2)\delta(v) + 3\theta(w)\theta(v)\delta(w) - \theta(v)\theta(w)\delta(w) + \delta(uvw + wvu)$, $\forall u,v,w \in J$, yani

$$\delta((u + w)v(u + w)) = \theta(u)\theta(u)\delta(v) + 3\theta(u)\theta(v)\delta(u) - \theta(v)\theta(u)\delta(u) + \theta(w)\theta(w)\delta(v) + 3\theta(w)\theta(v)\delta(w) - \theta(v)\theta(w)\delta(w) + \delta(uvw + wvu),\ \forall u,v,w \in J \tag{6.37}$$

bulunur. (6.36) ve (6.37) den $\delta(uvw + wvu) = (\theta(u)\theta(w) + \theta(w)\theta(u))\delta(v) + 3\theta(u)\theta(v)\delta(w) + 3\theta(w)\theta(v)\delta(u) - \theta(v)\theta(u)\delta(w) - \theta(v)\theta(w)\delta(u)$, $\forall u,v,w \in J$ olur.

(iv) J alt halka olduğundan $2uv \in J$, $\forall u,v \in J$ dir. Hipotezden $\delta((2uv)^2) = 2\theta(2uv)\delta(2uv)$, $\forall u,v \in J$ yazılabilir. $charR \neq 2$ olduğu kullanılırsa,

$$\delta((uv)^2) = 2\theta(uv)\delta(uv),\ \forall u,v \in J \tag{6.38}$$

olur. (iii) de w yerine 2uv alınırsa, $\delta(uv(2uv) + (2uv)vu) = (\theta(u)\theta(2uv) + \theta(2uv)\theta(u))\delta(v) + 3\theta(u)\theta(v)\delta(2uv) + 3\theta(2uv)\theta(v)\delta(u) - \theta(v)\theta(u)\delta(2uv) - \theta(v)\theta(2uv)\delta(u) = 2\theta(u^2v)\delta(v) + 2\theta(uvu)\delta(v) + 6\theta(uv)\delta(uv) + 6\theta(uv^2)\delta(u) - 2\theta(vu)\delta(uv) - 2\theta(vuv)\delta(u)$, $\forall u,v \in J$ elde edilir. $charR \neq 2$ olduğundan,

$$\delta(uv(uv) + (uv)vu) = \theta(u^2v)\delta(v) + \theta(uvu)\delta(v) + 3\theta(uv)\delta(uv) + 3\theta(uv^2)\delta(u) - \theta(vu)\delta(uv) - \theta(vuv)\delta(u),\ \forall u,v \in J \tag{6.39}$$

dir.

Öte yandan, $\delta(uv(2uv) + (2uv)vu) = 2(\delta((uv)^2) + \delta(uv^2u)) = 2(2\theta(uv)\ \delta(uv)) + 2(\theta(u^2)\delta(v^2) + 3\theta(u)\theta(v^2)\delta(u) - \theta(v^2)\theta(u)\delta(u)) = 4\theta(uv)\delta(uv) + 4\theta(u^2v)\delta(v) + 6\theta(uv^2)\delta(u) - 2\theta(v^2u)\delta(u)$, $\forall u,v \in J$ dir. $charR \neq 2$ olduğundan,

$$\delta(uv(uv) + (uv)vu) = 2\theta(uv)\delta(uv) + 2\theta(u^2v)\delta(v) + 3\theta(uv^2)\delta(u) - \theta(v^2u)\delta(u), \ \forall u,v \in J \tag{6.40}$$

bulunur. (6.39) ve (6.40) dan, $0 = \theta(uv)\delta(uv) - \theta(u^2v)\delta(v) + \theta(v^2u)\delta(u) + \theta(uvu)\delta(v) - \theta(vu)\delta(uv) - \theta(vuv)\delta(u) = \theta[u,v]\delta(uv) + \theta[uv,u]\delta(v) + \theta[v,vu]\delta(u) = 0$, $\forall u,v \in J$ elde edilir. Komütatör özelliklerinden,

$$\theta[u,v]\delta(uv) + \theta(u[v,u])\delta(v) + \theta(v[v,u])\delta(u) = 0, \ \forall u,v \in J \tag{6.41}$$

olur. (6.41) de v yerine u + v alınırsa, $0 = \theta[u,u + v]\delta(u(u + v)) + \theta(u[u + v,u])\delta(u + v) + \theta((u + v)[u + v,u])\delta(u) = \theta[u,v]\delta(u^2) + \theta[u,v]\delta(uv) + \theta(u[v,u])\delta(u) + \theta(u[v,u])\delta(v) + \theta((u + v)[v,u])\delta(u) = 2\theta([u,v]u)\delta(u) - \theta(u[v,u])\delta(v) - \theta(v[v,u])\delta(u) + \theta(u[v,u])\delta(u) + \theta(u[v,u])\delta(v) + \theta((u + v)[v,u])\delta(u) = 2\theta([u,v]u)\delta(u) - \theta(v[v,u])\delta(u) + \theta(u[v,u])\delta(u) + \theta(v[v,u])\delta(u) = 2\theta([u,v]u)\delta(u) + 2\theta(u[v,u])\delta(u)$, $\forall u,v \in J$ bulunur. $charR \neq 2$ olduğundan $\theta([u,v]u)\delta(u) + \theta(u[v,u])\delta(u) = 0$, $\forall u,v \in J$, yani $[\theta(u),\theta(v)]\theta(u)\delta(u) = \theta(u)[\theta(u),\theta(v)]\delta(u)$, $\forall u,v \in J$ dir.

(v) (iv) den

$$\theta([u,v]u)\delta(u) = \theta(u[u,v])\delta(u), \ \forall u,v \in J \tag{6.42}$$

yazılabilir. u yerine u + v alınırsa, $\theta([u + v,v](u + v))\delta(u + v) = \theta((u + v)[u + v,v])\delta(u + v)$, $\forall u,v \in J$ eşitliğinden $\theta([u,v]u + [u,v]v)(\delta(u) + \delta(v)) = \theta(u[u,v] + v[u,v])(\delta(u) + \delta(v))$, $\forall u,v \in J$ olur. Öyleyse $\theta([u,v]u)\delta(u) + \theta([u,v]v)\delta(u) + \theta([u,v]u)\delta(v) + \theta([u,v]v)\delta(v) = \theta(u[u,v])\delta(u) + \theta(v[u,v])\delta(u) + \theta(u[u,v])\delta(v) + \theta(v[u,v])\delta(v)$, $\forall u,v \in J$ dir. (6.41) ve (6.42) den $\theta([u,v])\delta(uv) - \theta([u,v]v)\delta(u) - \theta([u,v]u)\delta(v) = 0$, $\forall u,v \in J$ elde edilir. θ endomorfizm olduğundan $[\theta(u),\theta(v)](\delta(uv) - \theta(u)\delta(v) - \theta(v)\delta(u)) = 0$, $\forall u,v \in J$ olur.

Lemma 6.5.1.3 : R, 2 torsion free bir halka, J, R nin bir Jordan ideali ve alt halkası, θ bir endomorfizm olsun. Buna göre, $\delta: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere $\forall u \in J$ için $\delta(u^2) = 2\theta(u)\delta(u)$ ise aşağıdakiler doğrudur.

(i) $[\theta(u),\theta(v)]\delta([u,v]) = 0,\ \forall u,v\in J$

(ii) $(\theta(u^2)\theta(v) - 2\theta(u)\theta(v)\theta(u) + \theta(v)\theta(u^2))\delta(v) = 0,\ \forall u,v\in J$ dir.

İspat : (i) Lemma 6.5.1.2 (v) den $2[\theta(u),\theta(v)](\delta(uv) - \theta(u)\delta(v) - \theta(v)\delta(u)) = 0,\ \forall u,v\in J$, yani $[\theta(u),\theta(v)](2\delta(uv) - 2\theta(u)\delta(v) - 2\theta(v)\delta(u)) = 0$, $\forall u,v\in J$ dır. Lemma 6.5.1.2 (i) kullanılırsa, $[\theta(u),\theta(v)](2\delta(uv) - \delta(uv + vu)) = 0$, $\forall u,v\in J$ olur. Öyleyse $[\theta(u),\theta(v)](\delta(uv) - \delta(vu)) = 0,\ \forall u,v\in J$ dır. Buradan $[\theta(u),\theta(v)]\delta([u,v]) = 0,\ \forall u,v\in J$ bulunur.

(ii) Hipotezden $\delta([u,v]^2) = 2\theta([u,v])\delta([u,v]),\ \forall u,v\in J$ dir. (i) den sağ taraftaki terim sıfıra eşit olacağından,

$$\delta([u,v]^2) = 0,\ \forall u,v\in J \tag{6.43}$$

olur. J alt halka olduğundan $4vuv\in J$, $\forall u,v\in J$ dir. Lemma 6.5.1.2 (i) de v yerine 4vuv alınırsa, $\delta(u(4vuv) + (4vuv)u) = 2\theta(u)\delta(4vuv) + 2\theta(4vuv)\delta(u) = 8\theta(u)\delta(vuv) + 8\theta(vuv)\delta(u),\ \forall u,v\in J$ bulunur. δ**,** toplamsal ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan,

$$\delta(u(vuv) + (vuv)u) = 2(\theta(u)\delta(vuv) + \theta(vuv)\delta(u)),\ \forall u,v\in J \tag{6.44}$$

elde edilir.

Öte yandan, $0 = \delta([u,v]^2) = \delta(u(vuv) + (vuv)u) - \delta(uv^2u) - \delta(vu^2v) = 2\theta(u)\delta(vuv) + 2\theta(vuv)\delta(u) - \theta(u^2)\delta(v^2) - 3\theta(u)\theta(v^2)\delta(u) + \theta(v^2)\theta(u)\delta(u) - \theta(v^2)\delta(u^2) - 3\theta(v)\theta(u^2)\delta(v^2) + \theta(u^2)\theta(v)\delta(v),\ \forall u,v\in J$ dır. Lemma 6.5.1.2 (ii), hipotez ve θ nın endomorfizm olduğu düşünülürse,

$$\theta(uv^2 - 2vuv + v^2u)\delta(u) + 3\theta(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) = 0,\ \forall u,v\in J \tag{6.45}$$

elde edilir.

Lemma 6.5.1.2 (iii) den $\theta([u,v]u)\delta(u) = \theta(u[u,v])\delta(u),\ \forall u,v\in J$ yazılabilir. Komütatör özelliklerinden ve yine θ nın bir endomorfizm olmasından,

$$\theta(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(u) = 0,\ \forall u,v\in J \tag{6.46}$$

bulunur. Bu eşitlikte u yerine u + v alınırsa, $0 = \theta((u+v)^2v - 2(u+v)v(u+v) + v(u+v)^2)\delta(u+v) = \theta(u^2v + 2vuv - 2uvu - uv^2 - v^2u + vu^2)\delta(u) + \theta(u^2v + 2vuv - 2uvu - uv^2 - v^2u + vu^2)\delta(v),\ \forall u,v\in J$ olur. (6.46) eşitliğinden,

$\theta(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) - \theta(uv^2 - 2vuv + v^2u)\delta(u) = 0,\ \forall u,v \in J$ (6.47)

elde edilir. (6.45) ve (6.47) düşünülürse, $4\theta(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) = 0,\ \forall u,v \in J$ olur. $charR \neq 2$ olduğundan $\theta(u^2v - 2uvu + vu^2)\delta(v) = 0,\ \forall u,v \in J$ bulunur. O halde $(\theta(u^2)\theta(v) - 2\theta(u)\theta(v)\theta(u) + \theta(v)\theta(u^2))\delta(v) = 0,\ \forall u,v \in J$ dir.

Lemma 6.5.1.4 : R bir halka ve J, R nin sıfırdan farklı bir Jordan ideali olsun. Bu taktirde, $2[R,R]J \subseteq J$ ve $2J[R,R] \subseteq J$ dir.

İspat : $\forall x,y \in R,\ u \in J$ için $(u,[x,y]) - ((u,x),y) + ((u,y),x) \in J$ dir. Buradan $\forall x,y \in R,\ u \in J$ için $(u,[x,y]) - ((u,x),y) + ((u,y),x) = (u,xy) - (u,yx) - (ux + xu,y) + (uy + yu,x) = u(xy) + (xy)u - (u(yx) + (yx)u) - ((ux)y + y(ux) + (xu)y + y(xu)) + (uy)x + x(uy) + (yu)x + x(yu) = uxy - uyx + xyu - yxu - uxy - xuy - yux - yxu + uyx + yux + xuy + xyu = 2xyu - 2yxu \in J$, yani $2[x,y]u \in J\ \forall x,y \in R, u \in J$ olur. O halde $2[R,R]J \subseteq J$ dir.

Benzer şekilde yine $\forall x,y \in R, u \in J$ için, $((u,y),x) - (u,[x,y]) - ((u,x),y) \in J$ dir. Yani $\forall x,y \in R, u \in J$ için, $((u,y),x) - (u,[x,y]) - ((u,x),y) = (uy + yu)x + x(uy + yu) - u(xy - yx) - (xy - yx)u - (ux + xu)y - y(ux + xu) = uyx + yux + xuy + xyu - uxy + uyx - xyu + yxu - uxy - xuy - yux - yxu = 2uyx - 2uxy \in J$ bulunur. J, Jordan ideal olduğundan $2uxy - 2uyx = 2u[x,y] \in J,\ \forall x,y \in R, u \in J$ olur. Öyleyse $2J[R,R] \subseteq J$ dir.

Lemma 6.5.1.5 : R bir asal halka, J, R nin sıfırdan farklı bir Jordan ideali ve $aJ = (0)$ $(Ja = (0))$ olsun. Bu taktirde, $a = 0$ dır.

İspat : J, Jordan ideal olduğundan $\forall x \in R, u \in J$ için $(u,x) \in J$ dir. O zaman $aJ = (0)$ olduğundan $a(u,x) = a(ux + xu) = aux + axu = 0$ olur. Yine $aJ = (0)$ olduğundan $aux = 0$ dır. O halde $axu = 0\ \forall x \in R, u \in J$ bulunur. Yani $aRJ = (0)$ dır. R halkasının asallığından $a = 0$ veya $J = (0)$ elde edilir. J, sıfırdan farklı bir Jordan ideal olduğundan $a = 0$ bulunur.

Benzer şekilde $Ja = (0)$ ise $(u,x)a = (ux + xu)a = uxa + xua = uxa = 0$, $\forall x \in R, u \in J$ olur. Yani $JRa = (0)$ dır. Yine R halkasının asallığı kullanılırsa $J = (0)$ veya $a = 0$ bulunur. J, sıfırdan farklı olduğu için $a = 0$ dır.

Lemma 6.5.1.6 : R, bir 2 torsion free asal halka, J, R nin sıfırdan farklı bir Jordan ideali olsun. Buna göre, $aJb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : Lemma 6.5.1.4 den $2[R,R]J \subseteq J$ dır. O halde $a2[R,R]Jb \subset aJb = (0)$ yazılabilir. Bu durumda $\forall x,y \in R, u \in J$ için $2a[x,y]ub = 0$ olur. $charR \neq 2$ olduğundan $\forall x,y \in R, u \in J$ için $a[x,y]ub = 0$ dır. Son eşitlikte y yerine ya alınırsa, $ay[x,a]ub = 0$, $\forall x,y \in R, u \in J$, yani $aR[x,a]ub = (0)$ olur. R asal halka olduğundan $a = 0$ veya $[x,a]ub = 0$, $\forall x \in R, u \in J$ bulunur.

$[x,a]ub = 0$, $\forall x \in R, u \in J$ ise $0 = (xa - ax)ub = xaub - axub$ dır. $aJb = (0)$ olduğundan ilk terim sıfır olur. $axub = 0$, $\forall x \in R, u \in J$, yani $aRJb = (0)$ bulunur. Yine R nin asallığından $a = 0$ veya $Jb = (0)$ elde edilir.

$Jb = (0)$ ise Lemma 6.5.1.5 den $b = 0$ olur.

Sonuç olarak $a = 0$ veya $b = 0$ bulunur.

Lemma 6.5.1.7 : R, bir 2 torsion free asal halka, J, R nin sıfırdan farklı bir Jordan ideali olsun. Buna göre, J komütatif ise $J \subseteq Z$ dir.

İspat : Lemma 6.5.1.4 den $2[R,R]J \subseteq J$ yazılabilir. J komütatif olduğundan $[J,J] = (0)$ dır. Buradan $[2[R,R]J,J] = (0)$ olur. $\forall x,y \in R, u,v \in J$ için $0 = [2[x,y]u,v] = 2[x,y][u,v] + 2[[x,y],v]u = 2[[x,y],v]u$ dır. $charR \neq 2$ olduğundan $[[x,y],v]u = 0$, $\forall x,y \in R, u,v \in J$, yani $[[x,y],v]J = (0)$ elde edilir. Lemma 6.5.1.5 den $[[x,y],v] = 0$, $\forall x,y \in R, v \in J$ olur. Bu eşitlikte y yerine xy alınırsa, $0 = [[x,xy],v] = [x[x,y],v] = x[[x,y],v] + [x,v][x,y]$, yani $[x,v][x,y] = 0$, $\forall x,y \in R, v \in J$ bulunur. y yerine yv yazılırsa, $0 = [x,v][x,yv] = [x,v]y[x,v] + [x,v][x,y]v$, $\forall x,y \in R, v \in J$ den $[x,v]y[x,v] = 0$, $\forall x,y \in R, v \in J$ olur. Yani, $[x,v]R[x,v] = (0)$ dır. R halkasının asallığından $\forall x \in R, v \in J$ için $[x,v] = 0$ bulunur. Öyleyse $\forall v \in J$ için $v \in Z$ dir. $J \subseteq Z$ olur.

Lemma 6.5.1.8 : R, bir 2 torsion free asal halka, J, R nin bir alt halkası ve Jordan ideali olsun. Buna göre, $\forall u,v \in J$ için $[u,v]^2 = 0$ ise J komütatiftir, dolayısıyla merkezdedir.

İspat : $\forall u,v \in J$ için $[u,v]^2 = 0$ eşitliğinde v üzerinde lineerleştirilme yapılırsa, $0 = [u,v + w]^2 = [u,v + w][u,v + w] = ([u,v] + [u,w])([u,v] + [u,w]) = [u,v]^2 + [u,v][u,w] + [u,w][u,v] + [u,w]^2 = [u,v][u,w] + [u,w][u,v]$, $\forall u,v,w \in J$ dir. v yerine vu alınırsa, $\forall u,v,w \in J$ için $0 = [u,vu][u,w] + [u,w][u,vu] = [u,v]u[u,w] + [u,w][u,v]u = [u,v]u[u,w] - [u,v][u,w]u$ dan $[u,v][u,[u,w]] = 0$, $\forall u,v,w \in J$ bulunur. Son eşitlikte v yerine vv_1, $v_1 \in J$ alınırsa, $[u,v]v_1[u,[u,w]] = 0$, $\forall u,v,v_1,w \in J$, yani $[u,v]J[u,[u,w]]$

$= (0)$, $\forall u,v,w \in J$ elde edilir. Lemma 6.5.1.6 dan $[u,v] = 0$, $\forall v \in J$ veya $[u,[u,w]] = 0$, $\forall w \in J$ bulunur.

$[u,v] = 0$, $\forall v \in J$ ise zaten ikinci durum söz konusudur. O halde önermenin ikinci kısmını incelemek yeterlidir. $[u,[u,w]] = 0$, $\forall w \in J$ ise w yerine wv, $v \in J$ alınırsa, $[u,w][u,v] = 0$, $\forall v,w \in J$ olur. Yine v yerine vw alınırsa, $[u,w]J[u,w] = (0)$ bulunur. Lemma 6.5.1.6 dan $[u,w] = 0$ elde edilir. $\forall u,w \in J$ için $[u,w] = 0$ olduğundan J komütatiftir. Lemma 6.5.1.7 den $J \subseteq Z$ olur.

Lemma 6.5.1.9 : R, 2 torsion free bir halka, J , R nin bir Jordan ideali ve alt halkası olsun. $\delta : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere $\forall u \in J$ için $\delta(u^2) = 2\theta(u)\delta(u)$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $\delta(u^2 v) = \theta(u^2)\delta(v) + (\theta(u)\theta(v) + \theta(v)\theta(u))\delta(u) + \theta(u)\delta[u,v]$, $\forall u,v \in J$

(ii) $\delta(vu^2) = \theta(u^2)\delta(v) + (3\theta(v)\theta(u) - \theta(u)\theta(v))\delta(u) - \theta(u)\delta[u,v]$, $\forall u,v \in J$

İspat : (i) Lemma 6.5.1.2 (i) den $\delta(uv + vu) = 2\theta(u)\delta(v) + 2\theta(v)\delta(u)$, $\forall u,v \in J$ idi. Bu eşitlikte v yerine vu alınırsa,

$$\delta(uvu + vu^2) = 2(\theta(u)\delta(vu) + \theta(v)\theta(u)\delta(u)), \ \forall u,v \in J \tag{6.48}$$

bulunur. Yine aynı eşitlikte v yerine uv alınırsa,

$$\delta(u^2 v + uvu) = 2(\theta(u)\delta(uv) + \theta(u)\theta(v)\delta(u)), \ \forall u,v \in J \tag{6.49}$$

elde edilir. (6.49) dan (6.48) çıkarılır ve δ nın toplamsal olduğu kullanılırsa ,

$$\delta(u^2 v - vu^2) = 2(\theta(u)\delta([u,v]) + [\theta(u),\theta(v)]\delta(u)), \ \forall u,v \in J \tag{6.50}$$

olur. Şimdi Lemma 6.5.1.2 (i) de u yerine u^2 alınırsa, $\delta(u^2 v + vu^2) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 2\theta(v)\delta(u^2)$, $\forall u,v \in J$ den,

$$\delta(u^2 v + vu^2) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 4\theta(v)\theta(u)\delta(u), \ \forall u,v \in J \tag{6.51}$$

bulunur. (6.50) ve (6.51) toplanırsa, $2\delta(u^2 v) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 2(\theta(u)\theta(v) + \theta(v)\theta(u))\delta(u) + 2\theta(u)\delta([u,v])$, $\forall u,v \in J$ elde edilir. $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan,

$$\delta(u^2 v) = \theta(u^2)\delta(v) + (\theta(u)\theta(v) + \theta(v)\theta(u))\delta(u) + \theta(u)\delta([u,v]), \ \forall u,v \in J \tag{6.52}$$

olur.

(ii) (6.51) den (6.50) çıkarılırsa, $\delta(2vu^2) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 4\theta(v)\theta(u)\delta(u) - 2(\theta(u)\delta([u,v]) + [\theta(u),\theta(v)]\delta(u))$, $\forall u,v \in J$ olur. O halde $2\delta(vu^2) = 2\theta(u^2)\delta(v) + 6\theta(v)\theta(u)\delta(u) - 2\theta(u)\theta(v)\delta(u) - 2\theta(u)\delta([u,v])$, $\forall u,v \in J$ dir. char$R \neq 2$ olduğundan,

$$\delta(vu^2) = \theta(u^2)\delta(v) + 3\theta(v)\theta(u)\delta(u) - \theta(u)\theta(v)\delta(u) - \theta(u)\delta([u,v]), \quad \forall u,v \in J \tag{6.53}$$

bulunur.

Teorem 6.5.1.10 : R, bir 2 torsion free asal halka, J, R nin bir Jordan ideali ve alt halkası, θ bir otomorfizm ve $\delta: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşüm olmak üzere $\forall u \in J$ için $\delta(u^2) = 2\theta(u)\delta(u)$ olsun. Bu taktirde, $J \subseteq Z$ veya $\delta(J) = (0)$ dır.

İspat : $J \not\subset Z$ olsun. Lemma 6.5.1.2 (iv) ye

$$[\theta(u),\theta(v)]\theta(u)\delta(u) = \theta(u)[\theta(u),\theta(v)]\delta(u), \quad \forall u,v \in J \tag{6.54}$$

diyelim. Komütatörler açılıp bulunan eşitlik düzenlenirse,

$$(\theta(u^2)\theta(v) - 2\theta(u)\theta(v)\theta(u) + \theta(v)\theta(u^2))\delta(u) = 0, \quad \forall u,v \in J \tag{6.55}$$

elde edilir. (6.55) de u yerine $[u,w]$, $w \in J$ alınırsa,

$$\theta([u,w]^2)\theta(v)\delta([u,w]) - 2\theta([u,w])\theta(v)\theta([u,w])\delta([u,w]) + \theta(v)\theta([u,w]^2)\delta([u,w]) = 0, \quad \forall u,v,w \in J \tag{6.56}$$

bulunur. Lemma 6.5.1.3 (i) den son iki terim sıfırdır. Öyleyse $[u,w]^2 v\theta^{-1}\delta([u,w]) = 0$, $\forall u,v,w \in J$, yani $[u,w]^2 J\theta^{-1}\delta([u,w]) = (0)$, $\forall u,w \in J$ dir. Lemma 6.5.1.6 dan $\forall u,w \in J$ için $[u,w]^2 = 0$ veya $\theta^{-1}\delta([u,w]) = 0$ bulunur. Şimdi $(u,w) \xrightarrow{g} [u,w]$ ve $(u,w) \xrightarrow{f} \theta^{-1}\delta([u,w])$ dönüşümlerini düşünelim. Lemma 6.5.1.1 den $f = 0$ veya $g(u,w)^2 = 0$, $\forall u,v \in J$ dır.

$g(u,w)^2 = 0$ ise $[u,w]^2 = 0$, $\forall u,w \in J$ dir. Lemma 6.5.1.8 den $J \subseteq Z$ bulunur ki çelişkidir. O halde $f = 0$ dır. Yani $\theta^{-1}\delta([u,w]) = 0$, $\forall u,w \in J$ olur. θ otomorfizm olduğundan $\delta([u,w]) = 0$, $\forall u,w \in J$, yani $\delta(uw) = \delta(wu)$, $\forall u,w \in J$ bulunur.

$2\delta((wu)u) = \delta((wu)u + (wu)u) = \delta((wu)u + u(wu))$, $\forall u,w \in J$ dir. Lemma 6.5.1.2 (i) kullanılırsa $2\delta((wu)u) = \delta((wu)u + u(wu)) = 2\theta(wu)\delta(u) +$

$2\theta(u)\delta(wu) = 2\theta(wu)\delta(u) + \theta(u)\delta(wu + wu) = 2\theta(wu)\delta(u) + \theta(u)\delta(wu + uw) = 2\theta(w)\theta(u)\delta(u) + \theta(u)(2\theta(w)\delta(u) + 2\theta(u)\delta(w)) = 2\theta(u^2)\delta(w) + 2\theta(u)\theta(w)\delta(u) + 2\theta(w)\theta(u)\delta(u)$, $\forall u,w \in J$ elde edilir. $charR \neq 2$ olduğundan $\delta((wu)u) = \theta(u^2)\delta(w) + \theta(u)\theta(w)\delta(u) + \theta(w)\theta(u)\delta(u)$, $\forall u,w \in J$ olur. Lemma 6.5.1.9 (ii) den $\delta((wu)u) = \theta(u^2)\delta(w) + (3\theta(w)\theta(u) - \theta(u)\theta(w))\delta(u) - \theta(u)\delta([u,w])$, $\forall u,w \in J$ dir. Son iki eşitlik karşılaştırılırsa, $(2\theta(w)\theta(u) - 2\theta(u)\theta(w))\delta(u) - \theta(u)\delta([u,w]) = 0$, $\forall u,w \in J$ bulunur. $\delta([u,w]) = 0$ ve $charR \neq 2$ olduğu kullanılırsa, $[\theta(u),\theta(w)]\delta(u) = 0$, $\forall u,w \in J$ olur. Bu eşitlikte w yerine wv alınırsa, $\theta([u,w])\theta(v)\delta(u) = 0$, yani $[u,w]v\theta^{-1}\delta(u) = 0$, $\forall u,w \in J$ bulunur. Bu ise $[u,w]J\theta^{-1}\delta(u) = (0)$, $\forall u,w \in J$ demektir. Lemma 6.5.1.6 dan $\forall u,w \in J$ için $[u,w] = 0$ veya $\theta^{-1}\delta(u) = 0$, yani $\forall u,w \in J$ için $[u,w] = 0$ veya $\delta(u) = 0$ elde edilir.

$A = \{u \in J \mid [u,w] = 0, \forall w \in J\}$ ve $B = \{u \in J \mid \delta(u) = 0\}$ kümelerini alalım. $J = A \cup B$ dir. Brauer's Trick den J = A veya J = B olmalıdır.

J = A ise $[J,J] = (0)$ olacağından J komütatiftir. Lemma 6.5.1.7 den $J \subseteq Z$ olur. Çelişki elde edilir. O halde J = B dir. $\delta(u) = 0$, $\forall u \in J$ den $\delta(J) = (0)$ olur.

Not 6.5.1.11 : Yukarıdaki teoremde J nin yalnız alt halka olduğu düşünülürse ne $J \subseteq Z$ dir ne de $\delta(J) = (0)$ dır.

Sonuç 6.5.1.12 : R bir 2 torsion free asal halka olsun. $\delta: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere $\delta(x^2) = 2x\delta(x)$, $\forall x \in R$ ise R komütatiftir.

6.5.2. Homomorfizm veya Antihomomorfizm Gibi Hareket Eden Sol Türevler

Teorem 6.5.2.1 : R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali, θ,ϕ otomorfizm ve $\delta: R \to R$, bir (θ,ϕ)-türev olsun. Buna göre,

(i) δ, I üzerinde homomorfizm gibi hareket ediyorsa $\delta = 0$ dır.

(ii) δ, I üzerinde antihomomorfizm gibi hareket ediyorsa $\delta = 0$ dır.

Teorem 6.5.2.2 : R, bir 2 torsion free asal halka, J, R nin sıfırdan farklı bir Jordan ideali ve alt halkası, θ bir otomorfizm ve δ:R$\to$R, bir sol (θ,θ)-türev olsun. Buna göre,

(i) δ, J üzerinde homomorfizm gibi hareket ediyorsa $\delta = 0$ dır.

(ii) δ, J üzerinde antihomomorfizm gibi hareket ediyorsa $\delta = 0$ dır.

İspat : (i) Hipotezden,

$$\delta(u)\delta(v) = \delta(uv) = \theta(u)\delta(v) + \theta(v)\delta(u),\ \forall u,v\in J \tag{6.57}$$

dir. u yerine uv alınırsa,

$$\delta(uv)\delta(v) = \theta(uv)\delta(v) + \theta(v)\delta(uv),\ \forall u,v\in J \tag{6.58}$$

olur. Hipotez ve (6.57) kullanılırsa, $\theta(u)\delta(v)\delta(v) + \theta(v)\delta(u)\delta(v) = \theta(uv)\delta(v) + \theta(v)\delta(u)\delta(v)$, $\forall u,v\in J$ den $\theta(u)\delta(v)\delta(v) = \theta(uv)\delta(v)$, $\forall u,v\in J$ bulunur. Öyleyse,

$$\theta(u)(\delta(v) - \theta(v))\delta(v) = 0,\ \forall u,v\in J \tag{6.59}$$

yani $\theta(J)(\delta(v) - \theta(v))\delta(v) = (0)$, $\forall v\in J$ dir. J, Jordan ideal olduğundan $\theta(J)$ de Jordan idealdir. Lemma 6.5.1.6 dan $(\delta(v) - \theta(v))\delta(v) = 0$, $\forall v\in J$ elde edilir. Öyleyse $\delta(v)\delta(v) = \theta(v)\delta(v)$, $\forall v\in J$ dir. Hipotezden $\delta(v^2) = \theta(v)\delta(v)$, $\forall v\in J$ bulunur. Şimdi δ nın sol (θ,θ)-türev olduğu kullanılırsa, $\theta(v)\delta(v) + \theta(v)\delta(v) = \theta(v)\delta(v)$, $\forall v\in J$ den $\theta(v)\delta(v) = 0$, $\forall v\in J$ olur. v üzerinde linnerleştirme yapılırsa, $0 = \theta(v + u)\delta(v + u) = \theta(v)\delta(v) + \theta(v)\delta(u) + \theta(u)\delta(v) + \theta(u)\delta(u)$, $\forall u,v\in J$, yani

$$\theta(v)\delta(u) + \theta(u)\delta(v) = 0,\ \forall u,v\in J \tag{6.60}$$

elde edilir. u yerine vu yazılır, hipotez ve $\theta(v)\delta(v) = 0$, $\forall v\in J$ olduğu kullanılırsa, $\theta(v)\theta(u)\delta(v) = 0$, $\forall u,v\in J$, yani $vu\theta^{-1}\delta(v) = 0$, $\forall u,v\in J$ den $vJ\theta^{-1}\delta(v) = (0)$ bulunur. Lemma 6.5.1.6 dan $\forall v\in J$ için $v = 0$ veya $\theta^{-1}\delta(v) = 0$ olur. O halde $\forall v\in J$ için $v = 0$ veya $\delta(v) = 0$ dır.

$v = 0$ ise $\delta(v) = 0$ olacağından ikinci durumu incelemek yeterlidir. Bu eşitlikte v yerine (v,r), $r\in R$ alınırsa, char$R \neq 2$ olduğundan $\theta(v)\delta(r) = 0$, $\forall r\in R, v\in J$ elde edilir. Buradan $\theta(J)\delta(r) = (0)$, $\forall r\in R$ ve $\theta(J)$, Jordan ideal olduğundan $\delta(r) = 0$, $\forall r\in R$, yani $\delta = 0$ bulunur.

(ii) Hipotezden $\forall$ u,v$\in$ J için $\delta(u)\delta(v) = \delta(vu) = \theta(v)\delta(u) + \theta(u)\delta(v) = \theta(u)\delta(v) + \theta(v)\delta(u) = \delta(uv) = \delta(v)\delta(u)$ olduğundan δ aynı zamanda homomorfizm olur. O halde (i) den $\delta = 0$ bulunur.

BÖLÜM 7
(σ,τ)-LİE İDEALLER

7.1. Asal Halkalarda (σ,τ)-Lie İdealler

Bu bölümde R bir asal halka, $\sigma,\tau,\alpha,\beta,\lambda,\mu$ otomorfizm, Lemma 7.1.1 ve Lemma 7.1.3 dışında char$R\neq 2$ alınacaktır.

Lemma 7.1.1 : R bir asal halka olsun. Buna göre, b,ab$\in C_{\sigma,\tau}$ ise a$\in$Z veya $b = 0$ dır.

Lemma 7.1.2 : U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideali ve d:R$\to$R, sıfırdan farklı bir türev olsun. Buna göre, d(U) = (0) ise $[U,\sigma(U)] = (0)$ ve $[\sigma(U),\tau(U)] = (0)$ dır.

Lemma 7.1.3 : U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, d, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ olsun. Buna göre, $d^2(U) = (0)$ ise d = 0 dır.

Lemma 7.1.4 : U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. Buna göre, $U\subset C_{\alpha,\beta}$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat : r$\in$R, v$\in$U için $[r\sigma(v),v]_{\sigma,\tau}\in C_{\alpha,\beta}$ dır. r,x$\in$R, v$\in$U için, $0 = [[r\sigma(v),v]_{\sigma,\tau},x]_{\alpha,\beta} = [[r,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v),x]_{\alpha,\beta} = [r,v]_{\sigma,\tau}[\sigma(v),\alpha(x)] + [[r,v]_{\sigma,\tau},x]_{\alpha,\beta}\sigma(v)$, yani,

$$[r,v]_{\sigma,\tau}[\sigma(v),\alpha(x)] = 0, \forall r,x\in R, v\in U \tag{7.1}$$

olur. (7.1) de x yerine xz, z$\in$R alınırsa, $0 = [r,v]_{\sigma,\tau}[\sigma(v),\alpha(xz)] = [r,v]_{\sigma,\tau}\alpha(x)[\sigma(v),\alpha(z)]$, $\forall r,x,z\in R$, $v\in U$ elde edilir. Yani, $[r,v]_{\sigma,\tau}R[\sigma(v),\alpha(z)] = (0)$, $\forall r,z\in R$, $v\in U$ elde edilir. R asal olduğundan $[r,v]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall r\in R$ veya $[\sigma(v),\alpha(z)] = 0$, $\forall z\in R$ bulunur. O halde $[r,v]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall r\in R$ veya $[\sigma(v),R] = 0$ dır.

$\forall r\in R$ için $[r,v]_{\sigma,\tau} = 0$ eşitliğinde r yerine rt, t$\in$R alınırsa, $0 = [rt,v]_{\sigma,\tau} = r[t,v]_{\sigma,\tau} + [r,\tau(v)]t$, $\forall r,t\in R$, yani, $[r,\tau(v)] = 0$, $\forall r\in R$ elde edilir. Buda $\tau(v)\in Z$, yani, v$\in$Z demektir. Buradan $U\subset Z$ bulunur.

$[\sigma(v),R] = (0)$ ise yine aynı durum söz konusu olacağından ispat tamamlanır.

Lemma 7.1.5 : d, R halkası üzerinde sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun. Buna göre, $d(R)\subset C_{\lambda,\mu}$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: $x,y,r\in R$ için, $0 = [d(xy),r]_{\lambda,\mu} = [d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y),r]_{\lambda,\mu} = d(x)[\sigma(y),\lambda(r)] + [d(x),r]_{\lambda,\mu}\sigma(y) + \tau(x)[d(y),r]_{\lambda,\mu} + [\tau(x),\mu(r)]d(y)$, yani $d(x)[\sigma(y),\lambda(r)] + [\tau(x),\mu(r)]d(y) = 0$, $\forall x,y,r\in R$ dır. Son eşitlikte r yerine $\mu^{-1}\tau(x)$ alınırsa,

$$d(x)[\sigma(y),\lambda(\mu^{-1}\tau(x))] = 0,\ \forall\ x,y,r\in R \qquad (7.2)$$

elde edilir. (7.2) de y yerine yz, $z\in R$ alınırsa, $0 = d(x)[\sigma(yz),\lambda(\mu^{-1}\tau(x))] = d(x)\sigma(y)[\sigma(z),\lambda(\mu^{-1}\tau(x))]$, $\forall x,y,z\in R$ bulunur. σ otomorfizm olduğundan $d(x)R[\sigma(z),\lambda(\mu^{-1}\tau(x))] = (0)$, $\forall x,y,z\in R$ olur. R nin asallığından $d(x) = 0$ veya $[\sigma(z),\lambda(\mu^{-1}\tau(x))] = 0$, $\forall z\in R$,yani $d(x) = 0$ veya $[R,\lambda(\mu^{-1}\tau(x))] = (0)$ elde edilir. Buradan $d(x) = 0$ veya $[R,x] = (0)$ bulunacağından $d(x) = 0$ veya $x\in Z$ olur.

Şimdi $K = \{x\in R \mid x\in Z\}$ ve $L = \{x\in R \mid d(x) = 0\}$ kümeleri alınırsa, $R = K\cup L$ dir. Brauer's Trick den R = K veya R = L olmalıdır.

R = L ise d = 0 olacağından çelişki elde edilir. O halde R = K dır. Yani R halkası komütatiftir.

Teorem 7.1.6 : d, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ olsun. Buna göre, $[a,d(R)]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $a\in C_{\alpha,\beta}$ dır.

İspat : $x,y\in R$ için, $0 = [a,d(xy)]_{\alpha,\beta} = [a,d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)]_{\alpha,\beta} = \beta d(x)[a,\sigma(y)]_{\alpha,\beta} + [a,d(x)]_{\alpha,\beta}\,\alpha\,\sigma(z) + \beta\,\tau(x)[a,d(y)]_{\alpha,\beta} + [a,\tau(x)]_{\alpha,\beta}\,\alpha\, d(y)$ dır. Hipotezden, $\beta d(x)[a,\sigma(y)]_{\alpha,\beta} + [a,\tau(x)]_{\alpha,\beta}\,\alpha\, d(y) = 0$, $\forall x,y\in R$ bulunur. Son eşitlikte x yerine $\tau^{-1}d(x)$ alınırsa, $0 = \beta d(\tau^{-1}d(x))[a,\sigma(y)]_{\alpha,\beta} + [a,\tau(\tau^{-1}d(x))]_{\alpha,\beta}\,\alpha\, d(y)$, $\forall x,y\in R$, yani,

$$\beta d(\tau^{-1}d(x))[a,\sigma(y)]_{\alpha,\beta} = 0,\ \forall x,y\in R \qquad (7.3)$$

elde edilir. (7.3) de y yerine yz, $z \in R$ alınırsa, (7.3) den $\beta d(\tau^{-1}d(x))R[a,\sigma(z)]_{\alpha,\beta} = (0)$, $\forall x,z \in R$ bulunur. R asal halka olduğu için $\beta d(\tau^{-1}d(x)) = 0$, $\forall x \in R$ veya $[a,\sigma(z)]_{\alpha,\beta} = 0$, $\forall z \in R$ olur. O halde $d(\tau^{-1}d(R)) = (0)$ veya $[a,R]_{\alpha,\beta} = (0)$ dır.

$d(\tau^{-1}d(R)) = (0)$ ise $d\tau = \tau d$ olduğundan $d^2(R) = (0)$ elde edilir. Lemma 7.1.3 den $d = 0$ bulunur ki çelişkidir. O halde $[a,R]_{\alpha,\beta} = (0)$ dır. $\forall x \in R$ için $0 = [a,x]_{\alpha,\beta} = a\alpha(x) - \beta(x)a$ eşitliğinden $a \in C_{\alpha,\beta}$ olur.

Sonuç 7.1.7 : U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sağ Lie ideali, d, sıfırdan farklı bir türev ve $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ olsun. Buna göre, $d(U) = (0)$ ise $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

İspat : $r \in R$, $v \in U$ için, $0 = d([v,r]_{\sigma,\tau}) = d(v\sigma(r) - \tau(r)v) = d(v)\sigma(r) + vd\sigma(r) - d\tau(r)v - \tau(r)d(v)$ dır. $d(U) = (0)$ olduğundan $vd\sigma(r) - d\tau(r)v = 0$, $\forall r \in R$, $v \in U$ olur. Hipotezden $v\sigma d(r) - \tau d(r)v = 0$, $\forall r \in R$, $v \in U$,yani $[v,d(r)]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall r \in R$, $v \in U$ elde edilir. $\forall r \in R$ için bu eşitlik sağlandığından $[v,d(R)]_{\sigma,\tau} = (0)$ dır. Teorem 7.1.6 dan $v \in C_{\sigma,\tau}$, $\forall v \in U$ yani $U \subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Teorem 7.1.8 : (i) U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-Lie ideali, d, sıfırdan farklı bir (α,β)-türev ve $d\alpha = \alpha d$, $d\beta = \beta d$ olsun. Buna göre, $[U,d(R)]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise $U \subset Z$ dir.

(ii) d_1, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev, d_2, sıfırdan farklı bir (α,β)-türev ve $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_2\beta = \beta d_2$ olsun. Buna göre, $[d_1(R),d_2(R)]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise R halkası komütatiftir.

İspat: (i) $[U,d(R)]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise Teorem 7.1.6 dan $U \subset C_{\lambda,\mu}$ olur. Lemma 7.1.4 den $U \subset Z$ bulunur.

(ii) $[d_1(R),d_2(R)]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise Teorem 7.1.6 dan $d_1(R) \subset C_{\lambda,\mu}$ elde edilir. O halde Lemma 7.1.5 den R halkası komütatif bulunur.

Teorem 7.1.9 : d, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $a \in R$ olsun. Buna göre, $d(R,a) = (0)$ ise $(d(R),a)_{\sigma,\tau} = (0)$ dır.

İspat : d(R,a) = (0) olduğundan $r \in R$ için, 0 = d(ar,a) = d(a(r,a) − [a,a]r) = d(a(r,a)) = d(a)σ(r,a) + τ(a)d(r,a) dır. Yine hipotezden,

d(a)σ(r,a) = 0, $\forall r \in R$ (7.4)

elde edilir. (7.4) de r yerine rx, $x \in R$ alınırsa, 0 = d(a)σ(rx,a) = d(a)σ(r[x,a] + (r,a)x) = d(a)σ(r)σ[x,a] + d(a)σ(r,a)σ(x) olur. (7.4) den

d(a)σ(r)σ[x,a] = 0, $\forall r,x \in R$ (7.5)

bulunur. (7.5) eşitliği d(a)Rσ[x,a] = (0) demektir. R nin asallığından d(a) = 0 veya [x,a] = 0, $\forall x \in R$ elde edilir. Yani d(a) = 0 veya $a \in Z$ dir.

$a \in Z$ durumunu inceleyelim: Hipotezden $\forall r \in R$ için 0 = d(r,a) = d(ra + ar) = d(2ra) = 2d(ra) = 2(d(r)σ(a) + τ(r)d(a)) dır. charR$\neq$2 olduğundan $\forall r \in R$ için d(r)σ(a) + τ(r)d(a) = 0 bulunur. Son eşitlikte r yerine (r,a) alınıp hipotez kullanılırsa,

τ(r,a)d(a) = 0, $\forall r \in R$ (7.6)

elde edilir. Burada τ nun otomorfizm ve $a \in Z$ olduğu düşünülürse, 2τ(ar)d(a) = 0, $\forall r \in R$ bulunur. charR$\neq$2 olduğundan τ(ar)d(a) = 0 dır. Eşitliğin her iki tarafına τ^{-1} uygulanırsa, arτ^{-1}d(a) = 0, $\forall r \in R$ olur. O halde aRτ^{-1}d(a) = (0) dır. R halkasının asallığından a = 0 veya τ^{-1}d(a) = 0, yani a = 0 veya d(a) = 0 elde edilir. O halde her iki durumda da d(a) = 0 dır. Sonuç olarak $a \in Z$ ise d(a) = 0 bulunur.

(7.5) eşitliğinden hemen sonra d(a) = 0 veya $a \in Z$ bulmuştuk. Yukarıda elde ettiğimiz sonucu da kullanırsak d(a) = 0 olur.

Hipotezden, $\forall r \in R$ için 0 = d(r,a) = d(ra + ar) = d(r)σ(a) + τ(r)d(a) + d(a)σ(r) + τ(a)d(r) = d(r)σ(a) + τ(a)d(r) = $(d(r),a)_{\sigma,\tau}$ bulunur. Yani $(d(R),a)_{\sigma,\tau}$ = (0) dır.

Lemma 7.1.10 : U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideali, d sıfırdan farklı bir türev ve dσ = σd, dτ = τd olsun. Buna göre, d(U) = (0) ise U komütatiftir.

İspat : U, bir (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $r\in R$, $v\in U$ için $[r,v]_{\sigma,\tau}\in U$ dur. Hipotezden $0 = d([r,v]_{\sigma,\tau}) = d(r\sigma(v) - \tau(v)r) = d(r)\sigma(v) + rd\sigma(v) - d\tau(v)r - \tau(v)d(r) = d(r)\sigma(v) + r\sigma d(v) - \tau d(v)r - \tau(v)d(r)$ olur. $d(U) = (0)$ olduğundan

$$d(r)\sigma(v) - \tau(v)d(r) = 0, \ \forall r\in R, v\in U \tag{7.7}$$

bulunur. (7.7) de r yerine rx, $x\in R$ alınır yine (7.7) kullanılırsa,

$$d(r)[x,\sigma(v)] + [r,\tau(v)]d(x) = 0, \ \forall x,r\in R, v\in U \tag{7.8}$$

bulunur. (7.8) de x yerine $\sigma(w)$, $w\in U$ alınıp $d(U) = (0)$ olduğu kullanılırsa, $d(r)[\sigma(w),\sigma(v)] = 0$, $\forall r\in R$, $v,w\in U$ elde edilir. r yerine xy, $x,y\in R$ alınırsa, $d(x)y[\sigma(w),\sigma(v)] = 0$, $\forall x,y\in R$, $v,w\in U$ bulunur ki bu da $d(x)R[\sigma(w),\sigma(v)] = (0)$ demektir. R nin asallığından $d(x) = 0$, $\forall x\in R$ veya $[\sigma(w),\sigma(v)] = 0$, $\forall v,w\in U$ elde edilir. Bu ise $d = 0$ veya $\sigma[w,v] = 0$ olduğunu gösterir. d, sıfırdan farklı türev olduğundan $\sigma[w,v] = 0$,dolayısıyla $[w,v] = 0$, $\forall v,w\in U$ olur. Yani U komütatiftir.

Lemma 7.1.11 : U, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideal, d sıfırdan farklı bir türev ve $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ olsun. Buna göre, $d^2(U) = (0)$ ve $d(U)\subset Z$ ise U komütatiftir.

İspat : $x\in R$, $u\in U$ için $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ dur. $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau} = \tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} + [\tau(u),\tau(u)]x = \tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}$ olduğundan $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. $d^2(U) = (0)$ olduğu için $0 = d^2(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}) = d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau} + d\tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau}) + d\tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau}) + \tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau}) = 2d\tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau}), \forall x\in R$, $u\in U$ elde edilir. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan

$$d\tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau}) = 0, \ \forall x\in R, u\in U \tag{7.9}$$

bulunur. (7.9) da u yerine $u + v$, $v\in U$ alınırsa (7.9) dan,

$$d\tau(u)d([x,v]_{\sigma,\tau}) + d\tau(v)d([x,u]_{\sigma,\tau}) = 0, \ \forall x\in R, u,v\in U \tag{7.10}$$

elde edilir. (7.10) eşitliği soldan $d\tau(u)$ ile çarpılıp $d\tau = \tau d$, $d(U)\subset Z$ olduğu ve (7.9) eşitliği kullanılırsa, $(d\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau}) = 0$, $\forall x\in R$, $u,v\in U$, yani

$$(d\tau(u))^2 d([R,U]_{\sigma,\tau}) = (0), \ \forall u\in U \tag{7.11}$$

bulunur.

Öte yandan, $x \in R$, $v \in U$ için $[x\sigma(v),v]_{\sigma,\tau} = x[\sigma(v),\sigma(v)] + [x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v)$ olduğundan $[x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v) \in [R,U]_{\sigma,\tau}$ dır. Dolayısıyla $d([x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v)) \in d[R,U]_{\sigma,\tau}$ olur. (7.11) den $0 = (d\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v)) = (d\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau})\sigma(v) + (d\tau(u))^2 [x,v]_{\sigma,\tau} d\sigma(v)$ elde edilir. (7.11) eşitliğinden,

$$(d\tau(u))^2 [x,v]_{\sigma,\tau} d\sigma(v) = 0, \ \forall x \in R, u,v \in U \tag{7.12}$$

bulunur. Bu eşitlikte v yerine v + w, $w \in U$ alınırsa, (7.12) den

$$(d\tau(u))^2 [x,v]_{\sigma,\tau} d\sigma(w) + (d\tau(u))^2 [x,w]_{\sigma,\tau} d\sigma(v) = 0, \ \forall x \in R, u,v,w \in U \tag{7.13}$$

elde edilir. Bu eşitlik sağdan $d\sigma(v)$ ile çarpılıp $d(U) \subset Z$ ve (7.12) eşitliği kullanılırsa,

$$(d\tau(u))^2 [x,w]_{\sigma,\tau} (d\sigma(v))^2 = 0, \ \forall x \in R, u,v,w \in U \tag{7.14}$$

bulunur. $d(U) \subset Z$ olduğundan $\sigma d(U) \subset Z$, yani $d\sigma(U) \subset Z$ dir. Dolayısıyla $(d\tau(u))^2 [x,w]_{\sigma,\tau} R (d\sigma(v))^2 = (0)$ dır. R asal olduğundan $(d\tau(u))^2 [x,w]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall x \in R$, $u,w \in U$ veya $(d\sigma(v))^2 = 0$, $\forall v \in U$, yani $(d\tau(u))^2 = 0$, $\forall u \in U$ veya $[x,w]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall x \in R$, $w \in U$ veya $(d\sigma(v))^2 = 0$, $\forall v \in U$ bulunur. Bu da $(d\tau(U))^2 = (0)$ veya $[R,U]_{\sigma,\tau} = (0)$ veya $(d\sigma(U))^2 = (0)$ demektir. Burada $d\sigma = \sigma d$ ve $d\tau = \tau d$ eşitlikleri kullanılırsa, $(d(U))^2 = (0)$ veya $[R,U]_{\sigma,\tau} = (0)$ elde edilir. $d(U) \subset Z$ olduğundan $d(U) = (0)$ veya $[R,U]_{\sigma,\tau} = (0)$ olur.

$d(U) = (0)$ ise Lemma 7.1.10 dan U komütatiftir.

$[R,U]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise $\forall x,y \in R$, $v \in U$ için $0 = [xy,v]_{\sigma,\tau} = x[y,\sigma(v)] + [x,v]_{\sigma,\tau} y = x[y,\sigma(v)]$ elde edilir. Dolayısıyla $R[R,\sigma(U)] = (0)$ dır. R asal halka olduğundan $[R,\sigma(U)] = (0)$ olur. O halde $\sigma(U) \subset Z$ dir. Buradan $U \subset Z$, yani U komütatif bulunur.

Teorem 7.1.12 : U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideali, d sıfırdan farklı bir türev ve $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ olsun. Buna göre, $d(U) \subset Z$ ise U komütatiftir.

İspat : $\forall$ x,y$\in$ R, u,v$\in$ U için d(U)$\subset$Z olduğundan d([d(v)x,u]$_{\sigma,\tau}$)$\in$ Z dir. Bu ifadeden d([d(v)x,u]$_{\sigma,\tau}$) = d(d(v)[x,u]$_{\sigma,\tau}$ + [d(v),τ(u)]x) = d^2(v)[x,u]$_{\sigma,\tau}$ + d(v)d([x,u]$_{\sigma,\tau}$) olduğundan d^2(v)[x,u]$_{\sigma,\tau}$ + d(v)d([x,u]$_{\sigma,\tau}$)$\in$ Z elde edilir. d(v)d([x,u]$_{\sigma,\tau}$)$\in$ Z olduğundan,

$$d^2(v)[x,u]_{\sigma,\tau},\ \forall x\in R,\ u,v\in U\in Z \tag{7.15}$$

bulunur. Burada d(U)$\subset$Z ise d^2(v)$\in$ Z olur. (7.15) ifadesi de göz önüne alınırsa, d^2(v) = 0, $\forall$ v$\in$ U veya [x,u]$_{\sigma,\tau}$ $\in$ Z, $\forall$ x$\in$ R, u$\in$ U elde edilir. Yani d^2(U) = (0) veya [x,u]$_{\sigma,\tau}$ $\in$ Z, $\forall$ x$\in$ R, u$\in$ U olur.

d^2(U) = (0) ise Lemma 7.1.11 den U komütatiftir.

[x,u]$_{\sigma,\tau}$ $\in$ Z, $\forall$ x$\in$ R, u$\in$ U ise [xσ(u),u]$_{\sigma,\tau}$ $\in$ Z dir. [xσ(u),u]$_{\sigma,\tau}$ = x[σ(u),σ(u)] + [x,u]$_{\sigma,\tau}$ σ(u) = [x,u]$_{\sigma,\tau}$ σ(u) olduğundan [x,u]$_{\sigma,\tau}$ σ(u)$\in$ Z bulunur. Aynı zamanda [x,u]$_{\sigma,\tau}$ $\in$ Z olduğundan [x,u]$_{\sigma,\tau}$ = 0, $\forall$ x$\in$ R veya σ(u)$\in$ Z olur.

[x,u]$_{\sigma,\tau}$ = 0, $\forall$ x$\in$ R ise r$\in$ R için, 0 = [xr,u]$_{\sigma,\tau}$ = x[r,σ(u)] + [x,u]$_{\sigma,\tau}$ r = x[r,σ(u)], yani R[R,σ(u)] = (0) elde edilir. R asal olduğundan σ(u)$\in$ Z dir. Her iki durumda da σ(u)$\in$ Z,$\forall$ u$\in$ U bulunur. Buradan u$\in$ Z,$\forall$ u$\in$ U olur. Yani U$\subset$Z dir. U komütatiftir.

Teorem 7.1.13 : U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideali, d, sıfırdan farklı bir türev ve dσ = σd, dτ = τd olsun. Buna göre, d(U) = (0) ve $\forall$ u$\in$ U için u^2 $\in$ Z ise U$\subset$Z dir.

İspat : d(U) = (0) ise Lemma 7.1.2 den [U,σ(U)] = (0) ve Lemma 7.1.10 dan U komütatiftir. $\forall$ u,v$\in$ U için $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$ olduğundan 2uv$\in$ Z olur. charR$\neq$2 olduğundan uv$\in$ Z, $\forall$ u,v$\in$ U bulunur. O halde $\forall$ r,s$\in$ R, u,v$\in$ U için,

$$[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}\in Z \tag{7.16}$$

elde edilir. Bu ifadede s yerine sx, x$\in$ R alınırsa, [r,u]$_{\sigma,\tau}$[sx,v]$_{\sigma,\tau}$ = [r,u]$_{\sigma,\tau}$ s[x,σ(v)] + [r,u]$_{\sigma,\tau}$[s,v]$_{\sigma,\tau}$ x eşitliğinden [r,u]$_{\sigma,\tau}$ s[x,σ(v)] + [r,u]$_{\sigma,\tau}$[s,v]$_{\sigma,\tau}$ x $\in$ Z bulunur. Son ifadede x yerine w, $w\in U$ alınırsa, $[r,u]_{\sigma,\tau}s[w,\sigma(v)]$ + $[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}w\in Z$ olur. $[U,\sigma(U)] = (0)$ olduğundan,

$$[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau}w\in Z,\ \forall r,s\in R,\ u,v,w\in U \tag{7.17}$$

bulunur. (7.16) ve (7.17) birlikte düşünülürse,

$$[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall r,s\in R, u,v\in U \text{ veya } w\in Z,\ \forall w\in U \tag{7.18}$$

elde edilir.

$w\in Z$, $\forall w\in U$ ise $U\subset Z$ dir.

$[r,u]_{\sigma,\tau}[s,v]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall r,s\in R, u,v\in U$ ise bu eşitlikte r yerine rt, $t\in R$ alınırsa, $[r,\tau(u)]t[s,v]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall r,s,t\in R, u,v\in U$ bulunur. R asal olduğundan $[R,\tau(U)] = (0)$ veya $[R,U]_{\sigma,\tau} = (0)$ elde edilir.

$[R,\tau(U)] = (0)$ ise $\tau(U)\subset Z$ yani $U\subset Z$ dir. $[R,U]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise $U\subset Z$ olduğu Lemma 7.1.11 de ispatlanmıştı. İspat tamamlanır.

Lemma 7.1.14 : I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a,b\in R$ olsun. Buna göre, $[[I,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $[\tau(a),\beta(b)] = 0$ dır.

İspat : $[[I,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta} = 0$ ise $\forall y\in I$ için, $0 = [[\tau(a)y,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta} = [\tau(a)[y,a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)]y,b]_{\alpha,\beta} = [\tau(a)[y,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta} = \tau(a)[[y,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta} + [\tau(a),\beta(b)][y,a]_{\sigma,\tau}$ dır. $[[I,a]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta} = 0$ olduğundan,

$$[\tau(a),\beta(b)][y,a]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall y\in I \tag{7.19}$$

elde edilir. (7.19) da y yerine yr, $r\in R$ alınırsa, (7.19) dan $[\tau(a),\beta(b)]y[r,\sigma(a)] = 0$, $\forall y\in I$ olur. Yani $[\tau(a),\beta(b)]I[r,\sigma(a)] = (0)$ dır. Şimdi R nin asal olduğu göz önüne alınırsa, $[\tau(a),\beta(b)] = 0$ veya $[r,\sigma(a)] = 0$, $\forall r\in R$ elde edilir.

$\forall r\in R$ için $[r,\sigma(a)] = 0$ ise $\sigma(a)\in Z$, yani $a\in Z$ dir. Buradan $\tau(a)\in Z$ bulunur ki bu da $[\tau(a),\beta(b)] = 0$ olduğunu gösterir. Her iki durumda da $[\tau(a),\beta(b)] = 0$ bulunduğundan ispat tamamlanır.

Sonuç 7.1.15 : (i) U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $a\in R$ olsun. Buna göre, $[I,a]_{\alpha,\beta}\subset C_{\lambda,\mu}$ ise $a\in Z$ dir.

(ii) U, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre, $[[I,I]_{\sigma,\tau},U]_{\alpha,\beta}=(0)$ ise $U\subset Z$ dir.

(iii) $a\in R$ olsun. Buna göre, $[[I,I]_{\sigma,\tau},a]_{\alpha,\beta}=(0)$ ise $a\in Z$ dir.

İspat : (i) $[I,a]_{\alpha,\beta}\subset C_{\lambda,\mu}$ ise $\forall y\in I$ için $[y,a]_{\alpha,\beta}\in C_{\lambda,\mu}$ dir. Buradan $\forall r\in R$, $y\in I$ için $[y,a]_{\alpha,\beta}\lambda(r)-\mu(r)[y,a]_{\alpha,\beta}=0$, yani $[[y,a]_{\alpha,\beta},r]_{\lambda,\mu}=0$, $\forall r\in R$, $y\in I$ bulunur ki bu da $[[I,a]_{\alpha,\beta},R]_{\lambda,\mu}=(0)$ demektir. Lemma 7.1.14 den $[\beta(a),\mu(R)]=(0)$ olur. Buradan $\beta(a)\in Z$, yani $a\in Z$ elde edilir.

(ii) $[[I,I]_{\sigma,\tau},U]_{\alpha,\beta}=(0)$ ise Lemma 7.1.14 den $[\tau(I),\beta(U)]=(0)$ olur. O halde $\forall a\in I$, $r\in R$, $u\in U$ için $0=[\tau(ar),\beta(u)]=\tau(a)[\tau(r),\beta(u)]+[\tau(a),\beta(u)]\tau(r)=\tau(a)[\tau(r),\beta(u)]$ elde edilir. Yani $\tau(I)[R,\beta(U)]=(0)$ olur. $\tau(I)$ nın bir ideal ve R nin asal olduğu düşünülürse, $\tau(I)=(0)$ veya $[R,\beta(U)]=(0)$ bulunur.

$\tau(I)=(0)$ ise τ otomorfizm olduğundan $I=(0)$ dır. Çelişki elde edilir. O halde $[R,\beta(U)]=(0)$ olmalıdır. Buradan $\beta(U)\subset Z$, yani $U\subset Z$ dir.

(iii) $[[I,I]_{\sigma,\tau},a]_{\alpha,\beta}=(0)$ ise Lemma 7.1.14 den $[\tau(I),\beta(a)]=(0)$ elde edilir. Yukarıdaki ispata benzer olarak $a\in Z$ olduğu gösterilir.

Lemma 7.1.16 : I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu taktirde, $a,b\in R$ için $[[a,I]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta}=(0)$ ise $b\in Z$ veya $[a,\tau^{-1}\beta(b)]_{\sigma,\tau}=0$ dır.

İspat : $\forall x,y\in I$ için, $0=[[a,xy]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta}=[\tau(x)[a,y]_{\sigma,\tau}+[a,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y),b]_{\alpha,\beta}=\tau(x)[[a,y]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta}+[\tau(x),\beta(b)][a,y]_{\sigma,\tau}+[a,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y),\alpha(b)]+[[a,x]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta}\sigma(y)$ dır. $[[a,I]_{\sigma,\tau},b]_{\alpha,\beta}=0$ olduğu kullanılırsa,

$$[\tau(x),\beta(b)][a,y]_{\sigma,\tau}+[a,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y),\alpha(b)]=0,\ \forall x,y\in I \qquad (7.20)$$

elde edilir. Bu eşitlikte x yerine rx, $r\in R$ alınırsa, (7.20) den,

$$[\tau(r),\beta(b)]\tau(x)[a,y]_{\sigma,\tau}+[a,r]_{\sigma,\tau}\sigma(x)[\sigma(y),\alpha(b)]=0,\ \forall r\in R,x,y\in I \ (7.21)$$

olur. Burada r yerine $\tau^{-1}\beta(b)$ alınırsa,

$$[a,\tau^{-1}\beta(b)]_{\sigma,\tau}\,\sigma(I)[\sigma(y),\alpha(b)] = (0),\ \forall\, y\in I \qquad (7.22)$$

elde edilir. $\sigma(I)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve R asal olduğundan $[a,\tau^{-1}\beta(b)]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $[\sigma(I),\alpha(b)] = (0)$ bulunur. Bu önermenin sağ tarafında $\sigma(I)$ nın ideal olduğu kullanılırsa, $[a,\tau^{-1}\beta(b)]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $[R,\alpha(b)] = (0)$ elde edilir. Yani $[a,\tau^{-1}\beta(b)]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $\alpha(b)\in Z$ dir. $\alpha(b)\in Z$ ise $b\in Z$ olacağından ispat biter.

Lemma 7.1.17 : U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Buna göre, $[U,a]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

İspat : U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğundan $[U,R]_{\sigma,\tau}\subset U$ dur. O halde $[U,a]_{\alpha,\beta} = 0$ olduğundan, $[[U,R]_{\sigma,\tau},a]_{\alpha,\beta} = (0)$ yazılabilir. Lemma 7.1.16 dan $a\in Z$ veya $[U,\tau^{-1}\beta(a)] = 0$ bulunur.

$[U,\tau^{-1}\beta(a)] = (0)$ ise (Aydın ve Kandamar, 1994) Lemma 2 den $\tau^{-1}\beta(a)\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. τ ve β otomorfizm olduğundan $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

Teorem 7.1.18 : U, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu taktirde,

(i) $a\in R$ ve $[[U,I]_{\alpha,\beta},a]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

(ii) $[U,I]_{\alpha,\beta}\subset C_{\lambda,\mu}$ ise $U\subset C_{\sigma,\tau}$ veya R komütatiftir.

İspat : (i) $[[U,I]_{\alpha,\beta},a]_{\lambda,\mu} = 0$ ise Lemma 7.1.16 dan $a\in Z$ veya $[U,\beta^{-1}\mu(a)]_{\alpha,\beta} = (0)$ bulunur. Lemma 7.1.17 den $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir.

(ii) Hipotezden, $\forall\, u\in U$, $a\in I$ için $[u,a]_{\alpha,\beta}\in C_{\lambda,\mu}$ dür. O halde $\forall\, r\in R$, $u\in U, a\in I$ için $[u,a]_{\alpha,\beta}\lambda(r) - \mu(r)[u,a]_{\alpha,\beta} = 0$, yani $[[u,a]_{\alpha,\beta},r]_{\lambda,\mu} = 0$, $\forall\, r\in R$, $u\in U, a\in I$ olur. Bu ise $[[u,a]_{\alpha,\beta},R]_{\lambda,\mu} = (0)$ demektir. (i) den $R\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Buradan R komütatif veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu görülür.

Teorem 7.1.19 : d, R halkası üzerinde sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $a\in R$ olsun. Buna göre, $d[a,R]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $a\in C_{\alpha,\beta}$ veya $a + \beta\alpha^{-1}(a)\in C_{\alpha,\beta}$ dır.

İspat : x,y$\in$R için, 0 = d$[a,xy]_{\alpha,\beta}$ = d(β(x)$[a,y]_{\alpha,\beta}$ + $[a,x]_{\alpha,\beta}\alpha$(y)) = d$\beta$(x)$\sigma$($[a,y]_{\alpha,\beta}$) + τ β(x)d$[a,y]_{\alpha,\beta}$ + d$[a,x]_{\alpha,\beta}\sigma\alpha$(y) + τ($[a,x]_{\alpha,\beta}$)dα(y) dir. Hipotezden, dβ(x)σ($[a,y]_{\alpha,\beta}$) + τ($[a,x]_{\alpha,\beta}$)dα(y) = 0,$\forall$ x,y$\in$R bulunur. Bu eşitlikte x yerine $\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}$, z$\in$R alınırsa, $\tau([a,\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta})d\alpha$(R) = (0) elde edilir. Buradan $\tau([a,\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta})$d(R) = (0) olur. (Aydın ve Kaya, 1992) Lemma 3 den $\tau([a,\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta}) = 0$, $\forall$ z$\in$R, yani

$$[a,\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta} = 0,\ \forall z\in R \tag{7.23}$$

bulunur. (7.23) de z yerine zy alınırsa, 0 = $[a,\beta^{-1}[a,zy]_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta}$ = $[a,\beta^{-1}(\beta(z)[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,z]_{\alpha,\beta}\alpha(y))]_{\alpha,\beta}$ = $[a,z\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta}$ + $[a,\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}\beta^{-1}\alpha(y)]_{\alpha,\beta}$ = $\beta(z)[a,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta}$ + $[a,z]_{\alpha,\beta}\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta}$ + $\beta(\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta})[a,\beta^{-1}\alpha(y)]_{\alpha,\beta}$ + $[a,\beta^{-1}[a,z]_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta}\alpha\beta^{-1}\alpha(y)$, $\forall$ y,z$\in$R elde edilir. (7.23) den,

$$[a,z]_{\alpha,\beta}(\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,\beta^{-1}\alpha(y)]_{\alpha,\beta}) = 0,\ \forall y,z\in R \tag{7.24}$$

olur. Bu eşitlikte z yerine zt, t$\in$R alınırsa, 0 = $[a,zt]_{\alpha,\beta}(\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,\beta^{-1}\alpha(y)]_{\alpha,\beta})$ = $(\beta(z)[a,t]_{\alpha,\beta} + [a,z]_{\alpha,\beta}\alpha(t))(\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,\beta^{-1}\alpha(y)]_{\alpha,\beta})$ = $\beta(z)[a,t]_{\alpha,\beta}(\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,\beta^{-1}\alpha(y)]_{\alpha,\beta})$ + $[a,z]_{\alpha,\beta}\alpha(t)(\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,\beta^{-1}\alpha(y)]_{\alpha,\beta})$, $\forall$ y,z,t$\in$R bulunur. Burada (7.24) kullanılırsa, $[a,z]_{\alpha,\beta}\alpha(t)(\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,\beta^{-1}\alpha(y)]_{\alpha,\beta})$ = 0, $\forall$ y,z,t$\in$R elde edilir. α nın otomorfizm ve R nin asal olduğu düşünülürse, $[a,z]_{\alpha,\beta}$ = 0, $\forall$ z$\in$R veya $\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta} + [a,\beta^{-1}\alpha(y)]_{\alpha,\beta}$ = 0, $\forall$ y$\in$R elde edilir. Bu ise a$\in C_{\alpha,\beta}$ veya $\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta}$ + a$\alpha\beta^{-1}\alpha$(y) – $\beta\,\beta^{-1}\alpha$(y)a = 0, $\forall$ y$\in$R, yani a$\in C_{\alpha,\beta}$ veya $\alpha\,\beta^{-1}[a,y]_{\alpha,\beta}$ + a$\alpha\beta^{-1}\alpha$(y) – α(y)a = 0, $\forall$ y$\in$R demektir. Önermenin sağ tarafına sırasıyla α^{-1} ve β uygulanırsa, a$\in C_{\alpha,\beta}$ veya (a + $\beta\alpha^{-1}$(a))α(y) = β(y)(a + $\beta\alpha^{-1}$(a)) bulunur. Bu ise a$\in C_{\alpha,\beta}$ veya a + $\beta\alpha^{-1}$(a)$\in C_{\alpha,\beta}$ demektir.

Sonuç 7.1.20 : $[b,[a,R]_{\sigma,\tau}]_{\alpha,\beta}$ = (0) ise a$\in C_{\sigma,\tau}$ veya b$\in C_{\alpha,\beta}$ veya a + $\tau\sigma^{-1}$(a)$\in C_{\sigma,\tau}$ dır.

İspat : d(x) = $[b,x]_{\alpha,\beta}$, R halkası üzerinde bir (α,β)-türevdir. d = 0 ise b$\in C_{\alpha,\beta}$ dır. d$\neq$0 ise hipotezden d$[a,R]_{\sigma,\tau}$ = (0) olur. Teorem 7.1.19 dan a$\in C_{\sigma,\tau}$ veya a + $\tau\sigma^{-1}$(a)$\in C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Öyleyse a$\in C_{\sigma,\tau}$ veya b$\in C_{\alpha,\beta}$ veya a + $\tau\sigma^{-1}$(a)$\in C_{\sigma,\tau}$ dır.

Teorem 7.1.21 : U, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve d:R$\rightarrow$R, sıfırdan farklı bir (λ,μ) türev olsun. Buna göre,

(i) d(U) = (0) ise U$\subset C_{\sigma,\tau}$ veya v + $\tau\sigma^{-1}$(v)$\in C_{\sigma,\tau}$, $\forall$ v$\in$U dır.

(ii) d[U,R] = (0) ise U$\subset$Z dir.

İspat : (i) d(U) = (0) ise U, bir (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğundan d$[U,R]_{\sigma,\tau}$ = (0) dır. Teorem 7.1.19 dan U$\subset C_{\sigma,\tau}$ veya v + $\tau\sigma^{-1}$(v)$\in C_{\sigma,\tau}$, $\forall$ v$\in$U bulunur.

(ii) Teorem 7.1.19 da, 1 birim dönüşüm olmak üzere α = β = 1 alınırsa, $\forall$ a$\in$U için a$\in$Z veya 2a$\in$Z olur. 2a$\in$Z ise charR$\neq$2 olduğundan a$\in$Z, $\forall$ a$\in$U olacağından U$\subset$Z bulunur.

Teorem 7.1.22 : U, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideali ve d:R$\rightarrow$R, sıfırdan farklı bir (α,β) türev olsun. Buna göre,

(i) d(U) = (0) ise σ(v) + τ(v)$\in$Z, $\forall$ v$\in$U

(ii) a$\in$R ve [U,a] = (0) ise a$\in$Z veya σ(v) + τ(v)$\in$Z, $\forall$ v$\in$U

(iii) a$\in$R ve $[U,a]_{\alpha,\beta}$ = (0) ise a$\in$Z veya σ(v) + τ(v)$\in$Z, $\forall$ v$\in$U

(iv) $[[R,U]_{\alpha,\beta},a]_{\lambda,\mu}$ = (0) ise a$\in$Z veya σ(v) + τ(v)$\in$Z, $\forall$ v$\in$U dur.

İspat : (i) d(U) = (0) olsun. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $\forall$ v$\in$U için d$[R,v]_{\sigma,\tau}$ = (0) dır. (Park ve Jung, 2003) Sonuç 5 ten σ(v) + τ(v)$\in$Z, $\forall$ v$\in$U elde edilir.

(ii) $\forall$ x$\in$R için d(x) = [x,a] olsun. Bu durumda d bir türevdir. Üstelik d(U) = (0) dır. O halde (i) den σ(v) + τ(v)$\in$Z olur.

(iii) U bir (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ dur. Öyleyse hipotezden $[[R,U]_{\sigma,\tau}, a]_{\alpha,\beta} = (0)$ olur. Lemma 7.1.14 kullanılırsa, $[\tau(U), \beta(a)] = (0)$, yani $0 = \tau^{-1}[\tau(u), \beta(a)] = \tau^{-1}(\tau(u)\beta(a) - \beta(a)\tau(u)) = [u, \tau^{-1}\beta(a)]$, $\forall u \in U$ bulunur. O halde (ii) den $\tau^{-1}\beta(a) \in Z$ veya $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$, $\forall v \in U$, yani $a \in Z$ veya $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$ olur.

(iv) $[[R,U]_{\alpha,\beta}, a]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise Lemma 7.1.14 den $[\beta(U), \mu(a)] = 0$ olur. Buradan $\forall u \in U$ için, $0 = \beta^{-1}[\beta(u), \mu(a)] = u\beta^{-1}\mu(a) - \beta^{-1}\mu(a)u = [u, \beta^{-1}\mu(a)]$ dır. (ii) kullanılırsa $\beta^{-1}\mu(a) \in Z$ veya $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$, $\forall v \in U$, yani $a \in Z$ veya $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$ elde edilir.

Not 7.1.23 : U, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. Buna göre, $[U,U]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $\forall v \in U$ için $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$ dir.

İspat : Teorem 7.1.22 (iii) den $U \subset Z$ veya $\forall v \in U$ için $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$ elde edilir.

$U \subset Z$ ise $\forall v \in U$ için σ ve τ otomorfizm olduğundan $\sigma(v), \tau(v) \in Z$ dir. Z, R nin alt halkası olduğundan $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$ olur. Her iki durumda da $\forall v \in U$ için $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 7.1.24 : U, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideali ve $a \in R$ ise aşağıdakiler doğrudur.

(i) $[a,U]_{\alpha,\beta} = (0)$ ise $a \in C_{\alpha,\beta}$ veya $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$, $\forall v \in U$

(ii) $[a,[R,U]_{\alpha,\beta}]_{\lambda,\mu} = (0)$ ise $a \in C_{\lambda,\mu}$ veya $\alpha(v) + \beta(v) \in Z$, $\forall v \in U$

(iii) $[R,U]_{\alpha,\beta} \subset C_{\lambda,\mu}$ ise R halkası komütatiftir veya $\sigma(v) = \tau(v)$, $\forall v \in U$

(iv) $U \subset C_{\lambda,\mu}$ ise $\sigma(v) = \tau(v)$, $\forall v \in U$ veya R halkası komütatiftir.

İspat : (i) $\forall x \in R$ için $d(x) = [a,x]_{\alpha,\beta}$ olsun. d bir (α,β)-türevdir. U, bir (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan hipotez kullanılarak $[a,[R,U]_{\sigma,\tau}]_{\alpha,\beta} = (0)$ yazılabilir. O halde $d[R,U]_{\sigma,\tau} = (0)$ olur. (Park ve Jung, 2003) Sonuç 5 den $a \in C_{\alpha,\beta}$ veya $\sigma(v) + \tau(v) \in Z$ elde edilir.

(ii) (i) ye benzer olarak bu kez $\forall x\in R$ için $d(x) = [a,x]_{\lambda,\mu}$ olsun. d bir (λ,μ)-türevdir. Hipotezden $d[R,U]_{\alpha,\beta} = (0)$ olur. (Park ve Jung, 2003) Sonuç 5 den $a\in C_{\lambda,\mu}$ veya $\alpha(v) + \beta(v) \in Z$, $\forall v\in U$ elde edilir.

(iii) $[R,U]_{\alpha,\beta} \subset C_{\lambda,\mu}$ olsun. O halde $\forall r\in R, u\in U$ için $[r,u]_{\alpha,\beta} \in C_{\lambda,\mu}$, yani $[r,u]_{\alpha,\beta}\lambda(x) - \mu(x)[r,u]_{\alpha,\beta} = 0$, $\forall r,x\in R, u\in U$ dır. Buradan $[[r,u]_{\alpha,\beta},x]_{\lambda,\mu} = 0$, $\forall r,x\in R, u\in U$ elde edilir. Öyleyse $[[R,U]_{\alpha,\beta},R]_{\lambda,\mu} = (0)$ olur. Lemma 7.1.14 den $[\beta(U),\mu(R)] = (0)$ bulunur. β ve μ otomorfizm olduğundan $\beta(U)\subset Z$, yani $U\subset Z$ dir. Yine U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset Z$ olur. Yani $\forall r,s\in R, v\in U$ için, $0 = [[r,v]_{\sigma,\tau},s] = [r\sigma(v) - \tau(v)r,s]$ elde edilir. $U\subset Z$ olduğundan $\tau(U)\subset Z$ dir. O zaman son eşitlik $0 = [r\sigma(v) - r\tau(v),s] = [r(\sigma(v) - \tau(v)),s] = r[\sigma(v) - \tau(v),s] + [r,s](\sigma(v) - \tau(v))$, $\forall r,s\in R, v\in U$ şeklinde yazılabilir. $\tau(U)\subset Z$ olduğundan en son elde edilen eşitlikte ilk komütatör sıfıra eşittir. Öyleyse,

$$[r,s](\sigma(v) - \tau(v)) = 0,\ \forall r,s\in R, v\in U \tag{7.25}$$

elde edilir. $\sigma(v) - \tau(v)\in Z$ olduğundan $[r,s]x(\sigma(v) - \tau(v)) = 0$, $\forall r,s,x\in R, v\in U$ olur. Bu ise $[r,s]R(\sigma(v) - \tau(v)) = (0)$ demektir. R nin asallığından $[r,s] = 0$, $\forall r,s\in R$ veya $\sigma(v) - \tau(v) = 0$, $\forall\ v\in U$ bulunur. O halde R komütatiftir veya $\sigma(v) = \tau(v)$, $\forall\ v\in U$ dur.

(iv) $U\subset C_{\lambda,\mu}$ ise U, (σ,τ) sol Lie ideal olduğundan $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\lambda,\mu}$ olur. (iii) den R komütatif veya $\sigma(v) = \tau(v)$, $\forall\ v\in U$ bulunur.

KAYNAKLAR

Ali A. ve Kumar D., 2007. Derivation which Acts as a Homomorphism or as an Anti-homomorphism in a Prime Ring. *International Mathematical Forum,* 2 (23): 1105-1110

Ashraf M., Ali A. ve Ali S., 2004. On Lie Ideals and Generalized (θ,ϕ)-Derivations in Prime Rings. *Communications in Algebra,* 32 (8): 2977-2985.

Ashraf M., Rehman N. ve Ali S., 2003. On Lie Ideals and Jordan Generalized Derivations of Prime Rings. *Indian J. Pure Appl. Math.,* 34 (2): 291-294.

Asma A., Rehman N. ve Shakir A., 2003. On Lie Ideals with Derivations as Homomorphisms and Anti-homomorphisms. *Acta Math. Hungar.,* 101 (1-2): 79-82.

Aydın N. ve Kandamar H., 1994. (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings. *Tr. J. Math.,* (18): 143-148

Aydın N. ve Kaya K., 1992. Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ)-Derivations. *Tr. J. of Math.*, (16): 169-176.

Awtar R., 1972. On a Theorem of Posner. *Proc. Cumb. Phil. Soc.*, 73 (25): 25-27.

Bell H. E. ve Martindale W. S., 1988. Semiderivations and Commutativity in Prime Rings. *Canad. Math. Bull.*, 4 (31): 500-508.

Bergen J., Herstein I. N. ve Kerr J. W., 1981. Lie Ideals and Derivations of Prime Rings. *Journal of Algebra,* 71 : 259-267.

Chang J., 1984. On Semi-Derivations of Prime Rings. *Chinese J. Math.*, 4 : 255-262.

Gölbaşı Ö. ve Kaya K., 2006. On Lie Ideals with Generalized Derivations. *Siberian Mathematical Journal*, 47 (5): 862-866.

Güven E., 2007. On (σ,τ)-Derivations in Prime Rings. *XXI. Ulusal Matematik Sempozyumu,* Sakarya.

Güven E., Kaya K. ve Soytürk M., 2007. Some Results on (σ,τ)-Lie Ideals. *Math. J. Okoyama Univ.*, 49 : 59-64.

Güven E. ve Soytürk M., 2007. Some Results on Prime Rings and (σ,τ)-Lie Ideals. *Hacettepe Bulletein of Natural Sciences and Engineering-Series B.,* 36 (1):

Herstein I. N., 1969. *Topics in Ring Theory.* The University of Chicago Pres Ltd., Chicago. 7-8.

Herstein I. N., 1970. On the Lie Structure of an Associative Ring. *J. Algebra,* 14 : 561-770.

Herstein I. N., 1976. *Rings with Involution*. Univ. of Chicago Press, Chicago. 7-57.

Herstein I. N., 1979. A Note on Derivations, II. *Canad. Math. Bull.,* 22 (4): 509-511.

Jung Y. ve Park K., 2006. On Generalized (α,β)-Derivations and Commutativity in Prime Rings. *Bull. Korean Math. Soc.*, 43 (1): 101-106.

Kandamar H. ve Kaya K., 1992. Lie Ideals and (σ,τ)-Derivation in Prime Rings.*Hacettepe Bull. Of Natural Sciences and Engineering,* 21 : 29-33.

Kaya K., Güven E. ve Soytürk M., 2006. On (σ,τ)-Derivations of Prime Rings. *J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math.*, 13 (3): 189-195.

Lee P. H. ve Lee T. K., 1981. On Derivations of Prime Rings. *Chinese J. of Math.,* 9 (2): 107-110.

Lee P. H. ve Lee T. K., 1983. Lie Ideals of Prime Rings with Derivations. *Bull. Ins. Math. Acad. Sin.,* 11 : 75-80.

Park K. ve Jung Y., 2003. Some Results Concerning (θ,φ)-Derivations on Prime Rings. *J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math.,* 10 (4): 207-215

Posner E., 1957. Derivations In Prime Rings. *Proc. Amer. Soc.*, 8 (3-4): 1093-1100.

Quadri M. A., Khan M. S. ve Rehman N., 2003. Generalized Derivations and Commutativity of Prime Rings. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34 (9): 1393-1396.

Soytürk M., 1996. On (σ,τ)-Derivations with Module Values. *Tr. J. of Mathematics*, 20 (4): 563-569.

Zaidi S. M. A., Ashraf M. ve Ali S., 2003. On Jordan Ideals and Left (θ,θ)-Derivations in Prime Rings. *Hindawi Publishing Corp.*, 37: 1957-1964

ÖZGEÇMİŞ

<u>KİŞİSEL BİLGİLER:</u>

ADI ve SOYADI : Özge SARIEFE

DOĞUM YERİ VE TARİHİ : Denizli-22.09.1981

NÜFUSA KAYITLI OLDUĞU İL – İLÇE : Denizli-Çal

<u>İLETİŞİM BİLGİLERİ:</u>

Adres : Mehmetçik Mah. 2565 Sok. No:6/3 DENİZLİ

Cep Tel : 0 533 3301920

E-posta : ozzzgesariefe@hotmail.com

<u>EĞİTİM BİLGİLERİ:</u>

Yüksek Lisans	**Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi – Çanakkale**
	Matematik – 02/2005 – 01/2008
Üniversite	**Pamukkale Üniversitesi – Denizli**
	Matematik – 09/1999 – 09/2004
Lise	**Anafartalar Lisesi – Denizli**
	Fen – Matematik – 09/1995 – 06/1999

<u>İŞ DENEYİMİ:</u>

01.2006/09.2007 Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Araştırma Görevliliği

08.2004/02.2005 Birler Dershanesi – Denizli, Matematik Öğretmenliği

<u>YABANCI DİL :</u>

İngilizce