ASAL VE YARI-ASAL GAMMA HALKALARDA PERMUTİNG TRİ-TÜREV

DURAN ÖZDEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2004

T. C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ASAL VE YARI-ASAL GAMMA HALKALARDA PERMUTİNG TRİ-TÜREV

DURAN ÖZDEN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2004

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan.....Prof. Dr. Yüksel Ergün.....

Üye.....Prof. Dr. Rauf Amirov.....

Üye.....Yrd. Doç. Dr. Mahmut Ali Öztürk.....

Üye...

Üye...

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

11 / 03 / 2004

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Rauf AMİROV

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 01.01.1994 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan “Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu” adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ASAL VE YARI-ASAL GAMMA HALKALARDA
PERMUTİNG TRİ-TÜREV

Duran ÖZDEN
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

Tezimizin birinci bölümünde, gamma halkası ile ilgili genel bilgiler verilmiş ve temel olarak ele aldığımız problemler ifade edilmiştir.

İkinci bölümde ise, bu konuda önceden yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde, gamma halkalar teorisinde permuting tri-türev tanımlanarak; asal ve yarı-asal gamma halkaların ideallerinde permuting tri-türev çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gamma Halka, Asal Gamma Halka, Yarı-Asal Gamma Halka, Permuting Tri- Türev

SUMMARY

MsC Thesis

PERMUTING TRI-DERIVATION
IN PRIME AND SEMI-PRIME GAMMA RINGS

Duran ÖZDEN
Cumhuriyet University
Graduate School of Natural
and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

In the first chapter of our thesis we gave some basic concepts those are used about gamma rings and stated the problems.

In chapter two, we gave the summaries of the works those had been done.

In chapter three, by defining the permuting tri-derivation in the theory of gamma rings, the permuting tri-derivation has been studied in ideal of prime and semi-prime gamma rings.

Key words: Gamma Ring, Prime Gamma Ring, Semi-Prime Gamma Ring,
Permuting Tri - Derivation

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve değerli yardımlarını esirgemeyen hocam Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Duran ÖZDEN

1. BÖLÜM

ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan kavramlar verilecek ve tezde elde edilen sonuçlar yüzeysel olarak bir sıra içerisinde belirtilecektir.

Tanım 1.1: M ve Γ toplamsal komütatif gruplar olsun. $(.,.,.) : M\times\Gamma\times M \to M$, $(a, \alpha, b) \to a\alpha b$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa o zaman (M, Γ) ikilisine bir M Γ-halkası (Barnes anlamında) denir: $\forall a,b,c\in M$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$

i) $a\alpha b\in M$

ii) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$

$a(\alpha + \beta)b = a\alpha b + a\beta b$

$a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c$

iii) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$

Tanım 1.2: M bir Γ-halkası ve U, M'nin bir alt kümesi olsun. U, M'nin bir toplamsal alt grubu ve $U\Gamma M\subset U$ ($M\Gamma U\subset U$) oluyorsa U'ya M'nin bir sağ (sol) ideali denir. U hem sağ hem de sol ideal ise U'ya M'nin ideali denir.

M Γ-halkasının merkezi, $Z = \left\{ a \in M \;\middle|\; \forall m \in M, \quad \forall \alpha \in \Gamma \quad a\,\alpha\,m = m\,\alpha\,a \right\}$ biçiminde tanımlanır.

Bir $a\in M$ için a ile üretilen esas ideal, a'yı kapsayan bütün ideallerin arakesitidir. Bu ideal (a) ile gösterilir ve

$$(a) = \left\{ na + x\alpha\, a + a\beta\, y + \sum u\,\gamma\, a\,\sigma\, v \;\middle|\; n \in I; x, y, u, v \in M; \alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \Gamma \right\}$$

dır.

Eğer U; M'nin bir sağ ideali, V; M'nin bir sol ideali ve $\varnothing\neq S\subset M$ ise o zaman

$$S\Gamma U = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \alpha_i u_i \;\middle|\; s_i \in S, u_i \in U, \alpha_i \in \Gamma, n \in I \right\}$$

M'nin sağ ideali ($V\Gamma S$, M'nin sol ideali) ve $U\Gamma V$, M'nin bir idealidir.

Tanım 1.3: M bir Γ-halkası, U, V ve P; M'nin idealleri olsun. Eğer $U\Gamma V \subseteq P$ olduğunda $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ oluyorsa P'ye M'nin bir asal ideali denir.

Teorem 1.4 (Barnes, 1966): Bir M Γ-halkasının bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul $a,b \in M$ olmak üzere; $(a)\Gamma(b) \subseteq P$ olduğunda $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

Tanım 1.5: (0) ideali asal olan bir Γ-halkasına, asal Γ-halka denir.

Teorem 1.6 (Kyuno, 1978): M bir Γ-halkası ise aşağıdaki koşullar denktir:

i) M bir asal Γ-halkasıdır,

ii) Eğer $a, b \in M$ ve $a\Gamma M\Gamma b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ 'dır,

iii) Eğer M'nin (a) ve (b) esas idealleri $(a)\Gamma(b) = 0$ olacak biçimde ise $a = 0$ veya $b = 0$ 'dır,

iv) Eğer M'nin U ve V sağ (sol) idealleri $U\Gamma V = 0$ olacak biçimde ise $U = 0$ veya $V = 0$ 'dır.

Tanım 1.7: M bir Γ-halka ve Q, M'nin bir ideali olsun. Eğer M'nin herhangi bir U ideali için $U\Gamma U \subseteq Q$ olduğunda $U \subseteq Q$ oluyorsa Q'ya M'nin bir yarı-asal ideali denir.

Teorem 1.8 (Kyuno, 1978) : Eğer Q, M Γ-halkasının bir ideali ise aşağıdaki koşullar denktir:

i) Q yarı-asal idealdir,

ii) Eğer $a \in M$ için $a\Gamma M\Gamma a \subseteq Q$ olacak biçimde ise $a \in Q$ 'dur,

iii) Eğer M'nin (a) esas ideali $(a)\Gamma(a) \subseteq Q$ olacak biçimde ise $a \in Q$ 'dur,

iv) Eğer M'nin U sağ (sol) ideali $U\Gamma U \subseteq Q$ olacak biçimde ise $U \subseteq Q$ 'dur.

Tanım 1.9: (0) ideali yarı-asal olan M Γ-halkasına, yarı-asal Γ-halka denir.

Tanım 1.10: M bir Γ-halka olsun. Eğer, $\forall x \in M$ $nx = 0$ olan bir en küçük pozitif tam sayı varsa o zaman M'nin karakteristiği n denir ve Char M = n biçiminde gösterilir.

Tanım 1.11: M bir Γ-halka olsun. Bir n pozitif tamsayısı ve her $x \in M$ için $nx = 0$ oluğunda $x = 0$ oluyor ise o zaman M'ye n-torsion free denir.

Sonuç 1.12 (Kyuno, 1978): Bir M Γ-halkasının yarı-asal olması için gerek ve yeter koşul $a\Gamma M\Gamma a = 0$ olduğunda $a = 0$ olmasıdır.

Tanım 1.13: M bir Γ-halka ve I, M'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre; $Ann_r I = \{a \in M \mid a\,\Gamma\, I = 0\}$ ve $Ann_l I = \{a \in M \mid a\,\Gamma\, I = 0\}$ kümelerine sırasıyla I kümesinin sağ ve sol sıfırlayanları denir.

Lemma 1.14 (Soytürk, 1994): M bir yarı-asal Γ-halka ve I, M'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. O zaman $Ann_l\, I = Ann_r\, I = Ann\, I$ ' dır.

Lemma 1.15 (Soytürk, 1994): M bir yarı-asal Γ-halka ve I, M'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. O zaman;

i) Ann I, M'nin bir idealidir.

ii) $(Ann I) \cap I = (0)$.

Lemma 1.16 (Öztürk ve ark., 2000): M 2-torsion free yarı-asal Γ- halka ve I, M'nin sıfırdan farklı ideali olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler birbirine denktir: $a,b \in M$ $\forall x \in I$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$

i) $a\alpha x\beta b = 0$ dır.

ii) $b\alpha x\beta a = 0$ dır.

iii) $a\alpha x\beta b + b\alpha x\beta a = 0$ dır.

Eğer $AnnI=0$ ve yukarıdaki koşullardan biri sağlanırsa o zaman $\forall \alpha \in \Gamma$ $a\alpha b = 0 = b\alpha a$ 'dır. Üstelik M asal Γ- halka ise o zaman $a = 0$ veya $b = 0$'dır.

Tanım 1.17: R bir halka ve $D(.,.,.) : R \times R \times R \rightarrow R$ dönüşümü olsun. $\forall x,y,z,w \in R$

$$D(x + w, y, z) = D(x, y, z) + D(w, y, z)$$
$$D(x, y + w, z) = D(x, y, z) + D(x, w, z)$$
$$D(x, y, z + w) = D(x, y, z) + D(x, y, w)$$

koşulları sağlanırsa $D(.,.,.)$'ye tri-toplamsal denir. Bir $D(.,.,.) : R \times R \times R \rightarrow R$ tri-toplamsal dönüşümü $\forall x,y,z \in R$ $D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, x, z) = D(y, z, x) = D(z, x, y) = D(z, y, x)$ koşulunu sağlarsa $D(.,.,.)$'ye permuting tri-toplamsal dönüşüm denir.

$D(.,.,.)$ permuting tri- toplamsal dönüşümü $\forall x,y,z,w \in R$

$$D(xw, y, z) = D(x, y, z)w + xD(w, y, z)$$

koşulunu sağlarsa $D(.,.,.)$'ye permuting tri-türev denir. Bu durumda; $\forall x,y,z,w \in R$

$$D(x, yw, z) = D(x, y, z)w + yD(x, w, z)$$
$$D(x, y, zw) = D(x, y, z)w + zD(x, y, w)$$

koşulları da sağlanır. $d : R \rightarrow R$, $d(x) = D(x, x, x)$ ile tanımlanan dönüşüme, $D(.,.,.)$ permuting tri- toplamsal dönüşümünün izi denir.

Tezde elde edilen sonuçları vermeden önce, temel aldığımız çalışmayı özetleyelim:

R karakteristiği 2'den farklı ve 3-torsion free bir asal halka, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$ permuting tri-türev ve izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre;

$$\forall x \in R \;\; D_1(d_2(x), x, x) = 0 \text{ ise o zaman } D_1 = 0 \text{ veya } D_2 = 0$$

olduğu; R karakteristiği 2'den farklı 3,5-torsion free bir asal halka ise

$$\forall x \in R \;\; D_1(d_2(x), d_2(x), x) = 0 \text{ ise o zaman } D_1 = 0 \text{ veya } D_2 = 0$$

olduğu; R karakteristiği 2,3,5'ten farklı asal halka ise

$$\forall x \in R \;\; d_1(d_2(x)) = f(x)$$

olacak biçimde izi f olan R'nin bir F(.,.,.) permuting tri-toplamsal dönüşümü varsa o zaman $D_1=0$ veya $D_2=0$ olduğu; R karakteristiği 2'den farklı ve 3-torsion free yarı-asal halka ise

$$\forall x \in R \;\; D(d(x), x, x) = 0 \text{ ise o zaman } D = 0$$

olduğu ve R karakteristiği 2'den farklı ve 3,5-torsion free bir yarı-asal halka ise

$$\forall x \in R \;\; D(d(x), d(x), x) = 0 \text{ ise o zaman } D = 0$$

olduğu Öztürk (1999) tarafından gösterilmiştir.

Şimdi; tezde elde edilen sonuçları, bir sıra içinde verelim:

(A) M 2, 3-torsion free asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; M'nin permuting tri-türevleri ve izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre;

$$\forall x \in I \;\; D_1(d_2(x), x, x) = 0$$

ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$'dır.

(B) M karakteristiği 2'den farklı 3, 5-torsion free asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; M'nin permuting tri-türevleri ve izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre; $d_2(I) \subset I$ olmak üzere; $\forall x \in I \;\; D_1(d_2(x), d_2(x), x) = 0$

ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$'dır.

(C) M karakteristiği 2'den farklı 3, 5-torsion free yarı-asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, D(.,.,.); M'nin permuting tri-türevi ve izi d olsun. Buna göre; $d(I) \subset I$ ve $\mathrm{Ann}_l I = (0)$ olmak üzere;

(1) $\forall x \in I \;\; D(d(x), x, x) = 0$ ise o zaman $D = 0$'dır.

(2) $\forall x \in I \;\; D(d(x), d(x), x) = 0$ ise o zaman $D = 0$'dır.

(D) M karakteristiği 2 ve 3'ten farklı 5, 7-torsion free asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; M'nin permuting tri-türevleri ve izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. $d_2(I)\subset I$, $F(.,.,.)$; M'de permuting tri-toplamsal dönüşüm ve izi, f olmak üzere;

$$\forall x\in I \quad d_1(d_2(x))=f(x)$$

ise o zaman $D_1=0$ veya $D_2=0$'dır.

2. BÖLÜM

HALKA VE GAMMA HALKALARDA TÜREVLER

Bu bölümde çalışılan konularla ilgili daha önceden yapılan çalışmaların özetleri, kaynak belirtilerek bir sıra içerisinde verilecektir.

2.1. Türevli Gamma Halkaları

Tanım 2.1.1: M bir Γ-halka $0 \neq d : M \to M$ dönüşüm olsun. Buna göre; $\forall x,y \in M$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ $d(x+y) = d(x) + d(y)$ ve $d(x\gamma y) = d(x)\gamma y + x\gamma d(y)$ özelliklerini sağlarsa o zaman d'ye türev denir.

Soytürk, M. [14]

Bu çalışmada; M bir asal Γ-halka, Z; M'nin merkezi ve d, M'de bir türev olarak alınmış ve ayrıca; $\forall x,y \in M$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ $[x,y]_\gamma = x\gamma y - y\gamma x$ biçiminde tanımlanmıştır.

Lemma 2.1.2:

i) Eğer, $a,b,c \in M$ ve $\gamma,\beta \in \Gamma$ ise o zaman $[a\gamma b,c]_\beta = a\gamma[b,c]_\beta + [a,c]_\beta\gamma b + a\gamma(c\beta b) - a\beta(c\gamma b)$ dir.

ii) Eğer, $a \in Z$ ise o zaman $[a\gamma b,c]_\beta = a\gamma[b,c]_\beta$ dir.

iii) Eğer, $a \in Z$ ise o zaman $a\gamma[b,c]_\beta = a\beta[b,c]_\gamma$ dır.

iv) Eğer, $a \in Z$ ve $a\Gamma b = 0$ ise o zaman $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

v) Eğer, $a \in Z$ ve $a\Gamma b \subseteq Z$ ise o zaman $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

vi) Eğer, $a \in Z$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ $a\gamma[b,c]_\gamma = 0$ ise o zaman $a = 0$ veya $[b,c]_\gamma = 0$ dır.

Lemma 2.1.3:

i) U, M'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer $U \subset Z$ ise o zaman M komütatiftir.

ii) U, M'nin sıfırdan farklı bir sağ (sol) ideali ve $a \in M$ olsun. Eğer $U\Gamma a = 0$ ($a\Gamma U = 0$) ise o zaman a=0'dır.

iii) U, M'nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a,b \in M$ olsun. Eğer $a\Gamma U\Gamma b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$'dır.

Lemma 2.1.4:

i) U, M'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer $d(U) = 0$ ise o zaman d=0'dır.

ii) U, M'nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a \in M$ olsun. Eğer $d(U)\Gamma a = 0$ ($a\Gamma d(U) = 0$) ise o zaman $a = 0$ veya $d = 0$'dır.

iii) U, M'nin sıfırdan farklı bir ideali ve Char $M \neq 2$ olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise o zaman $d = 0$'dır.

iv) U, M'nin sıfırdan farklı bir ideali, Char $M \neq 2$ ve d_1, d_2; M'de iki türev olsun. Eğer $d_2(U) \subset U$ ve $d_1 d_2(U) = 0$ ise o zaman $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$'dır.

Bu çalışmanın sonraki kısımlarında; U, M'nin sıfırdan farklı bir ideali olarak alınmıştır.

Lemma 2.1.5: d, M'de sıfırdan farklı bir türev ve Char $M \neq 2$ olsun. Eğer $d(U) = 0$ ise o zaman M komütatiftir.

Teorem 2.1.6: d, M'de sıfırdan farklı bir türev ve Char $M \neq 2,3$ olsun. Eğer $d^2(U) \subset Z$ ve $d(U) = 0$ ise o zaman M komütatiftir.

Lemma 2.1.7: $a \in M$ ve $Z \neq 0$ olsun. Eğer $\forall \gamma \in \Gamma$ $[U,a]_\gamma = 0$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

Lemma 2.1.8: d_1, d_2 M'de $d_2(U)\subset U$ ve $d_1d_2(U)\subset Z$ özelliklerini sağlayan sıfırdan farklı iki türev ve Char M $\neq$ 2,3 olsun. Eğer $d_1d_2^2(U) = 0$ ise o zaman M komütatiftir.

Lemma 2.1.9: d_1, d_2 M'de $d_2(U)\subset U$ ve $d_1d_2(U)\subset Z$ özelliklerini sağlayan sıfırdan farklı iki türev, $a\in M$ ve Char M $\neq$ 2 olsun. Eğer $\forall\gamma\in\Gamma$ $[d_1(U),a]_\gamma = 0$ ise o zaman $\forall\gamma\in\Gamma$ $[d_2(U),a]_\gamma = 0$ dır.

Lemma 2.1.10: d_1, d_2; M'de $d_2(U)\subset U$ ve $d_1d_2(U)\subset Z$ özelliklerini sağlayan sıfırdan farklı iki türev ve $a\in M$ olsun. Eğer $\forall\gamma\in\Gamma$ $[d_1(U),a]_\gamma = 0$ ise o zaman $a\in Z$ dir.

Lemma 2.1.11: d_1, d_2; M'de $d_2(U)\subset U$ ve $d_1d_2(U)\subset Z$ özelliklerini sağlayan sıfırdan farklı iki türev, $a\in M$ ve Char M $\neq$ 2,3 olsun. Eğer $\forall\gamma\in\Gamma$ $[d_1(U),a]_\gamma \subset Z$ ise o zaman $a\in Z$ dir.

Teorem 2.1.12: d_1, d_2; M'de $d_2(U)\subset U$ özelliğini sağlayan sıfırdan farklı iki türev ve Char M $\neq$ 2,3 olsun. Eğer $d_1d_2(U)\subset Z$ ise o zaman M komütatiftir.

2.2. Simetrik Bi-Türevli Gamma Halkaları

Tanım 2.2.1: M bir Γ-halka olsun. $D(.,.) : M \times M \to M$ simetrik bi-toplamsal dönüşümü; $\forall x,y,z \in M$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$

$$D(x\gamma y,z) = D(x,z)\gamma y + x\gamma D(y,z)$$

özelliğini sağlarsa o zaman $D(.,.)$'ye simetrik bi-türev denir. Ayrıca $\forall x \in M$ $d(x) = D(x,x)$ biçiminde tanımlanan d : M . M dönüşümüne $D(.,.)$'nin izi denir. d'nin bir çift fonksiyon ve $\forall x,y \in M$ $d(x + y) = d(x) + d(y) + 2D(x,y)$ olduğu açıktır.

<u>**Öztürk, M. Ali ve Sapancı, M. [8]**</u>

Tanım 2.2.2: M bir yarı-asal Γ-halka, $D_1(.,.) : M \times M \to M$ ve $D_2(.,.) : M \times M \to M$; simetrik bi-türevler ve izleri, sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre; $\forall x,y \in M$

$$d_1(x)\Gamma M\Gamma d_2(y) = 0 = d_2(y)\Gamma M\Gamma d_1(x)$$

ise o zaman d_1 ve d_2'ye, M üzerindeki simetrik bi-türevlerin ortogonal izleri denir.

Örnek 2.2.3: R bir komütatif halka olmak üzere;

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a,b \in R \right\} \quad , \quad \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x \in R \right\}$$

matrislerdeki toplama işlemi altında iki abelian grup olsun. Kolayca; M'nin matrislerdeki çarpma işlemi altında bir Γ-halka olduğu gösterilebilir.

$$D(.,.) : M \times M \to M, \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \alpha \begin{pmatrix} 0 & a_1 a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm, bir simetrik bi-türevdir.

Lemma 2.2.4: M 2-torsion free yarı-asal Γ- halka ve $a,b \in M$ olsun. O zaman aşağıdaki durumlar denktir:

i) $\forall x \in M \quad a\Gamma x\Gamma b = 0$

ii) $\forall x \in M \quad b\Gamma x\Gamma a = 0$

iii) $\forall x \in M \quad a\Gamma x\Gamma b + b\Gamma x\Gamma a = 0$

Üstelik; eğer, yukarıdaki koşullardan biri sağlanırsa o zaman $a\Gamma b = 0 = b\Gamma a$ dır.

Lemma 2.2.5: M 2, 3-torsion free yarı-asal Γ-halka, F(.,.) ve G(.,.); M'de simetrik bi-toplamsal dönüşümler ve izleri, sırasıyla f ve g olsun. Eğer $\forall x \in M$ $f(x)\Gamma M\Gamma g(x) = 0$ ise o zaman $\forall x,y \in M$ $f(x)\Gamma M\Gamma g(y) = 0$ dır.

Lemma 2.2.6: M 2,3-torsion free yarı-asal Γ-halka, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$ M'de simetrik bi-türevler ve izleri, sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre; d_1 ve d_2'nin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\forall x,y \in M$ $d_1(x)\Gamma d_2(y) + d_2(x)\Gamma d_1(y) = 0$ olmasıdır.

Uyarı 2.2.7: M 2-torsion free asal Γ-halka, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$; M'de simetrik bi-türevler ve izleri, sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre; d_1 ve d_2 ortogonal ise o zaman $\forall x,y \in M$ $d_1(x)\Gamma d_2(y) = 0 = d_2(y)\Gamma d_1(x)$'dır.

Teorem 2.2.8: M 2-torsion free yarı-asal Γ-halka, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$; M'de simetrik bi-türevler ve izleri, sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre; d_1 ve d_2'nin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

i) $d_1 d_2 = 0$'dır.

ii) $\forall x \in M$ ve $\forall \alpha,\beta \in \Gamma$ $(d_1 d_2)(x) = a\beta x + x\alpha b$ olacak biçimde $a,b \in M$ vardır.

iii) $d_1 d_2 = f$ olacak biçimde izi f olan M'nin bir F(.,.) simetrik bi-toplamsal dönüşümü vardır.

Uyarı 2.2.9: Eğer d_1 ve d_2 ortogonal ise o zaman Teorem 2.2.8'deki (i) koşulu $d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$ olarak alınabilir.

Sonuç 2.2.10: M 2, 3-torsion free asal Γ-halka, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$; M'de simetrik bi-türevler ve izleri, sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Eğer, Teorem 2.2.8'deki denk koşullardan biri sağlanırsa o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

Sonuç 2.2.11: M 2, 3-torsion free asal Γ-halka olsun. Teorem 2.2.8'de $d_1 = d_2$ ise o zaman $D = 0$ dır.

Uyarı 2.2.12: Sonuç 2.2.10 ve Sonuç 2.2.11'in ispatları [13, Teorem 3.3.4] ve [13, Teorem 3.3.5] ispatlarından farklıdır.

<u>Öztürk, M. Ali, Sapancı, M. , Soytürk, M. ve Kyung Ho Kim [10]</u>

Lemma 2.2.13: M 2-torsion free bir yarı-asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a,b\in M$ olsun. Buna göre, aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $\forall x\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ $a\alpha x\beta b = 0$,

ii) $\forall x\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ $b\alpha x\beta a = 0$,

iii) $\forall x\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ $a\alpha x\beta b + b\alpha x\beta a = 0$.

Eğer $Ann_l\, I = 0$ ve yukarıdaki koşullardan biri sağlanırsa o zaman $\forall\alpha\in\Gamma$ $a\alpha b = 0 = b\alpha a$ 'dır. Ayrıca, M bir asal Γ-halka ise $a = 0$ veya $b = 0$ 'dır.

Lemma 2.2.14: M 2,3-torsion free bir yarı-asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.) : M \times M \to M$ ve $D_2(.,.) : M \times M \to M$; simetrik bi-türevler ve izleri, sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre,

i) Eğer $d_1(I)\Gamma I\Gamma d_2(I) = 0$ ise $d_1(M)\Gamma I\Gamma d_2(M) = 0$ 'dır.

ii) Eğer $Ann_l\, I = 0$ ve $d_1(M)\Gamma I\Gamma d_2(M) = 0$ ise $d_1(M)\Gamma M\Gamma d_2(M) = 0$ 'dır.

Lemma 2.2.15: M 2-torsion free bir Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı tek yanlı bir ideali olsun. $D(.,.) : M \times M \to M$ simetrik bi-türev ve izi, d olsun. Buna göre; aşağıdaki koşullar sağlansın:

i) $\forall x \in I$ $d(x) = 0$

ii) $\forall x, y \in I$ $D(x, y) = 0$

iii) $\forall m \in M$ ve $\forall y \in I$ $D(m, y) = 0$

iv) $\forall m, n \in M$ $D(m, n) = 0$

Bu durumda; (i) ve (ii) birbirine denktir. Ayrıca; M bir asal Γ-halka veya $Ann_r I = 0$ ($Ann_l I = 0$) ise o zaman yukarıdaki koşullar birbirine denktir.

Lemma 2.2.16: M 2-torsion free Γ-halka, I; M'nin bir Γ-alt-halkası, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$; M'nin simetrik bi-türevleri ve izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre; $\forall x \in I$ $D_1(d_2(x), x) = 0$ ise o zaman $d_1(x)\alpha y\beta d_2(x) + d_2(x)\alpha y\beta d_1(x) = 0$ dır.

Lemma 2.2.17: M 2, 3-torsion free Γ-halka, I; M'nin sıfırda farklı bir Γ-alt-halkası, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$; M'nin simetrik bi-türevleri ve izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. $F(.,.)$, izi f olan M'nin bir simetrik bi-toplamsal dönüşüm olmak üzere; $\forall x \in I$ $d_1(d_2(x)) = f(x)$ ise o zaman $\forall x, y \in I$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$

$$D_1(y, d_2(y))\alpha x\beta d_2(y) + d_2(y)\alpha x\beta D_1(y, d_2(y)) = 0$$

dır.

Teorem 2.2.18: M 2-torsion free asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$; M'nin simetrik bi-türevleri ve izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre; $\forall x \in I$ $D_1(d_2(x), x) = 0$ ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$'dır.

Teorem 2.2.19: M 2,3-torsion free bir asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$; M'nin simetrik bi-türevleri, izleri sırasıyla d_1 ve d_2 ve $d_2(I) \subset I$ olsun. Buna göre;

$$\forall x \in I \quad d_1(d_2(x)) = f(x)$$

olacak biçimde izi f olan M'nin bir $F(.,.)$ simetrik bi-toplamsal dönüşümü varsa o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$'dır.

Teorem 2.2.20: M 2-torsion free bir yarı-asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, D(.,.); M'nin simetrik bi-türevi ve izi d olsun. Buna göre;

$\forall x \in I$ $D(d(x), x) = 0$ ise o zaman $D = 0$'dır.

Teorem 2.2.21: M 2,3-torsion free bir yarı-asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, D(.,.); M'nin simetrik bi-türev F(.,.); M'nin simetrik bi-toplamsal dönüşüm ve izleri, sırasıyla d ve f olsun. Buna göre; $d(I) \subset I$ olmak üzere; $\forall x \in I$ $d(d(x)) = f(x)$ ise o zaman $D = 0$'dır.

Teorem 2.2.22: M 2,3-torsion free bir asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, D(.,.); M'nin simetrik bi-türev ve izi, d olsun. Buna göre; Z, M'nin merkezi olmak üzere; $d(I) \subset I \cap Z$ ise o zaman M komütatiftir.

Öztürk, M. , Ali, Young Bae Jun ve Kyung Ho Kim [11]

Bu çalışmada; M bir Γ-halka, olmak üzere; M'nin bir S alt kümesi için l(S) (r(S)) kümesi, S'nin sol (sağ) sıfırlayanı olarak tanımlanmıştır.

Teorem 2.2.23: M 2, 3-torsion free yarı-asal Γ-halka, U; l(U)=0 olan M'nin sıfırdan farklı bir ideali, D_1(.,.) ve D_2(.,.); M'de simetrik bi-türevler ve izleri, sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre, d_1 ve d_2'nin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\forall u,v \in U$ $d_1(u)\Gamma d_2(v) + d_2(u)\Gamma d_1(v) = 0$ olmasıdır.

Teorem 2.2.24: M 2, 3-torsion free yarı-asal Γ-halka, U; l(U)=0 olan M'nin sıfırdan farklı bir ideali, D_1(.,.) ve D_2(.,.); M'de simetrik bi-türevler ve izleri, sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre, $d_2(U) \subset U$ olmak üzere; aşağıdaki koşullar denktir:

i) d_1 ve d_2 ortogonaldır.

ii) $d_1 d_2 = 0$'dır.

iii) $\forall u \in U$ $(d_1 d_2)(u) = a\beta u + u\gamma b$ olacak biçimde $a,b \in M$ ve $\gamma,\beta \in \Gamma$ vardır.

iv) $d_1d_2 = f$ olacak biçimde izi f olan M'nin bir F(.,.) simetrik bi-toplamsal dönüşümü vardır.

Sonuç 2.2.25: M 2, 3-torsion free asal Γ-halka, U, M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$; M'de simetrik bi-türevler ve izleri, sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. $d_2(U) \subset U$ olmak üzere; Teorem 2.2.24'deki denk koşullardan biri sağlanırsa o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

Sonuç 2.2.26: M 2, 3-torsion free yarı-asal Γ-halka, U, M'nin sıfırdan farklı bir ideali, D(.,.); M'de simetrik bi-türev ve izi d olsun. $d(U) \subset U$ olmak üzere; Teorem 2.2.24'deki denk koşullardan biri sağlanırsa ise o zaman $D = 0$ dır.

2.3. Permuting Tri-Türevli Halkalar

Öztürk, M. Ali [9]

Bu çalışmada; R birleşmeli bir halka, Z; R'nin merkezi ve $\forall x,y\in R$ $xy - yx$, $[x,y]$ olarak alınmıştır.

Tanım 2.3.1: R bir halka ve $D(.,.,.) : R \times R \times R \to R$ dönüşümü olsun. Buna göre; $\forall x,y,z,w\in R$

$$D(x + w, y, z) = D(x, y, z) + D(w, y, z)$$
$$D(x, y + w, z) = D(x, y, z) + D(x, w, z)$$
$$D(x, y, z + w) = D(x, y, z) + D(x, y, w)$$

koşulları sağlanırsa $D(.,.,.)$'ye tri-toplamsal dönüşüm denir. Bir $D(.,.,.) : R \times R \times R \to R$ tri-toplamsal dönüşümü $\forall x,y,z\in R$ $D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, x, z) = D(y, z, x) = D(z, x, y) = D(z, y, x)$ koşulunu sağlarsa $D(.,.,.)$'ye permuting tri-toplamsal dönüşüm denir.

$D(.,.,.)$ permuting tri- toplamsal dönüşümü

$$\forall x,y,z,w\in R \quad D(xw, y, z) = D(x, y, z)w + xD(w, y, z)$$

koşulunu sağlarsa $D(.,.,.)$'ye permuting tri-türev denir. Bu durumda ; $\forall x,y,z,w\in R$

$$D(x, yw, z) = D(x, y, z)w + yD(x, w, z)$$
$$D(x, y, zw) = D(x, y, z)w + zD(x, y, w)$$

koşulları da sağlanır. $d : R \to R$, $d(x) = D(x, x, x)$ ile tanımlanan dönüşüme $D(.,.,.)$ permuting tri- toplamsal dönüşümünün izi denir. $D(.,.,.)$ permuting tri- toplamsal dönüşümünün izi;

$$\forall x,y\in R \quad d(x + y) = d(x) + d(y) + 3D(x, x, y) + 3D(x, y, y)$$

bağıntısını sağlayan bir tek fonksiyondur.

Örnek 2.3.2: R bir komütatif halka olmak üzere;

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in R \right\}$$

kümesinin, matrislerdeki toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka olduğu açıktır. $D(.,.,.) : M \times M \times M \to M$,

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1a_2a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan dönüşüm bir permuting tri-türevdir.

Lemma 2.3.3: R 2, 3-torsion free halka ve $D(.,.,.)$; R'nin permuting tri-türevi ve izi d olsun. Buna göre; eğer $\forall x \in R$ $d(x) = 0$ ise o zaman $D = 0$'dır.

Uyarı 2.3.4: R bir halka ve $D(.,.,.)$; R'nin bir permuting tri-türevi olsun. Bu durumda; keyfi bir sabit $a \in R$ ve $\forall x,y \in R$

$$D_1(.,.) : R \to R, \;\; D_1(x, y) = D(a, x, y)$$

ile tanımlanan dönüşüm, bir simetrik bi-türev (yani; permuting 2-türev, simetrik bi-türevdir) ve

$$d_2 : R \to R, \; d_2(x) = D(a, a, x)$$

ile tanımlanan dönüşüm, bir türevdir. Bu nedenle; permuting tri-türev çalışırken dikkatli olunmalıdır. Çünkü; simetrik bi-türev ve türevde yapılan çalışmaları, bir takım işlemlerden sonra elde edilen permuting tri-türevli çalışmalar, gereksizdir.

Teorem 2.3.5: R 2, 3-torsion free olan bir komütatif olmayan asal halka, $D(.,.,.)$; R'nin bir permuting tri-türevi ve izi d olsun. Eğer, $\forall x \in R$ $[d(x), x] = 0$ ise o zaman $D = 0$ dır.

Teorem 2.3.6: R karakteristiği 2'den farklı ve 3-torsion free bir komütatif olmayan asal halka, $D(.,.,.)$; R'nin bir permuting tri-türevi ve izi d olsun. Buna göre; $\forall x \in R$ $[d(x), x] \in Z$ ise o zaman $D = 0$ dır.

Teorem 2.3.7: R karakteristiği 2'den farklı ve 3-torsion free bir asal halka, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; R'nin permuting tri-türev ve izlerini sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre;

$\forall x \in R$ $D_1(d_2(x), x, x) = 0$ ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$'dır.

Sonuç 2.3.8: R karakteristiği 2'den farklı ve 3-torsion free yarı-asal halka, $D(.,.,.)$; R'nin permuting tri-türev ve izi d olsun. Buna göre;

$\forall x \in R$ $D(d(x), x, x) = 0$ ise o zaman $D = 0$'dır.

Teorem 2.3.9: R karakteristiği 2'den farklı 3, 5-torsion free bir asal halka, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; R'nin permuting tri-türev ve izlerini sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre;

$\forall x \in R$ $D_1(d_2(x), d_2(x), x) = 0$ ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$'dır.

Sonuç 2.3.10: R karakteristiği 2'den farklı ve 3, 5-torsion free bir yarı-asal halka, $D(.,.,.)$; R'nin permuting tri-türev ve izi d olsun. Buna göre;

$\forall x \in R$ $D(d(x), d(x), x) = 0$ ise o zaman $D=0$'dır.

Teorem 2.3.11: R karakteristiği 2, 3, 5'ten farklı asal halka, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; R'nin permuting tri-türev ve izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre;

$$\forall x \in R \quad d_1(d_2(x)) = f(x)$$

olacak biçimde izi f olan R'nin bir $F(.,.,.)$ permuting tri-toplamsal dönüşümü varsa o zaman $D_1=0$ veya $D_2=0$'dır.

3. BÖLÜM

ASAL VE YARI-ASAL GAMMA HALKALARDA PERMUTİNG TRİ-TÜREV

Halkalar teorisinde; ilk olarak Maksa (1980), simetrik bi-toplamsal dönüşümleri tanımladı ve sonra Maksa (1987), simetrik bi-türevi tanımlayarak, çalıştı. Öte yandan Barnes (1966), yeni bir gamma halka tanımı verdi ve gamma halkaların idealleri üzerine çalıştı. Soytürk (1994), gamma halkalarda (Barnes anlamında) simetrik bi-türev tanımlayarak, çalıştı. Öztürk (1999) ise, halkalar teorisinde permuting tri-türevi tanımladı ve çalıştı. Bu bölümde, yukarıdaki çalışmalar ışığında gamma halkalarda permuting tri-türev tanımlanarak, asal ve yarı-asal gamma halkalarının idealleri üzerinde permuting tri-türev çalışıldı.

Tanım 3.1: M bir Γ-halka ve $D(.,.,.) : M \times M \times M \to M$ dönüşümü olsun. Buna göre; $\forall x,y,z,w \in M$

$$D(x+w,y,z) = D(x,y,z) + D(w,y,z)$$

$$D(x,y+w,z) = D(x,y,z) + D(x,w,z)$$

$$D(x,y,z+w) = D(x,y,z) + D(x,y,w)$$

koşulları sağlanırsa D(.,.,.)'ye tri-toplamsal dönüşüm denir. Bir $D(.,.,.) : M \times M \times M \to M$ tri-toplamsal dönüşümü $\forall x,y,z \in M$ $D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, x, z) = D(y, z, x) = D(z, x, y) = D(z, y, x)$ koşulunu sağlarsa D(.,.,.)'ye permuting tri-toplamsal dönüşüm denir.

Bir D(.,.,.) permuting tri- toplamsal dönüşümü $\forall x,y,z,w \in M$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$

$$D(x\alpha w, y, z) = D(x, y, z)\alpha w + x\alpha D(w, y, z)$$

özelliğini sağlarsa D(.,.,.)'ye permuting tri-türev denir. Bu durumda; $\forall x,y,z,w \in M$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$

$$D(x, y\alpha w, z) = D(x, y, z)\alpha w + y\alpha D(x, w, z)$$

$$D(x, y, z\alpha w) = D(x, y, z)\alpha w + z\alpha D(x, y, w)$$

özelliklerinin var olduğu açıktır. $d : M \to M$ $d(x) = D(x, x, x)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme $D(.,.,.)$'nin izi denir.

Lemma 3.2 ([13]): M bir Γ-halka ve $D(.,.,.)$ permuting tri- toplamsal dönüşüm olsun. Buna göre; $D(.,.,.)$'nin izi, $\forall x,y \in M$

$$d(x + y) = d(x) + d(y) + 3D(x, x, y) + 3D(x, y, y)$$

bağıntısını sağlayan bir tek fonksiyondur.

Örnek 3.3: M komütatif bir halka olsun. Bu durumda;

$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in M \right\}$ ve $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; \gamma \in M \right\}$ olarak tanımlanan N ve Γ matrislerdeki toplama işlemine göre birer komütatif gruplardır. Bundan dolayı; matrislerdeki çarpma işlemine göre N, bir Γ- halkadır.

$D(.,.,.) : N \times N \times N \to N,$

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan dönüşüm bir permuting tri- türevdir.

Çözüm :

i) $D(.,.,.)$ tri-toplamsaldır: $\forall \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in N \;\; (i = 1, 2, 3, 4)$

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_1 + a_4 & b_1 + b_4 & c_1 + c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & (a_1+a_4)\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)+$$

$$D\left(\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_4\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & (a_1+a_4)\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=$$

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$+D\left(\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

dir. Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilir. Böylece D(.,.,.) tri-toplamsaldır.

ii) D(.,.,.) permuting tri-toplamsaldır: $\forall\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in N\ (i=1,2,3)$

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$D\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2\alpha a_3\beta a_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$D\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

'dir. Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilir. Böylece D(.,.,.) permuting tri-toplamsaldır.

iii) D(.,.,.) permuting tri-türevdir: $\forall \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ve

$$\forall \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= D\left(\begin{pmatrix} a_1\gamma a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1\gamma a_4\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D\left(\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_4\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1\gamma a_4\alpha a_2\beta a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$D\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D\left(\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

dir. Diğer durumlar da benzer biçimde gösterilir. Böylece D(.,.,.) permuting tri-türevdir.

Uyarı 3.4: M bir Γ-halka ve $D(.,.,.)$, M'nin bir permuting tri-türevi olsun. Bu durumda; keyfi bir sabit $a\in M$ ve $\forall x,y\in M$

$$D_1(.,.) : M\times M \to M,\ \ D_1(x, y) = D(a, x, y)$$

ile tanımlanan dönüşüm, bir simetrik bi-türev (yani; permuting 2-türev, simetrik bi-türevdir) ve

$$d_2 : R \to R,\ d_2(x) = D(a, a, x)$$

ile tanımlanan dönüşüm, bir türevdir. Bu nedenle; permuting tri-türev çalışırken dikkatli olunmalıdır. Çünkü; simetrik bi-türev ve türevde yapılan çalışmaları, bir takım işlemlerden sonra elde edilen permuting tri-türevli çalışmalar gereksizdir.

Lemma 3.5: M karakteristiği 2'den farklı ve 3, 5-torsion free yarı-asal Γ-halka ve I, M'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; M'nin permuting tri-türevleri ve $D_1(.,.,.)$, $D_2(.,.,.)$'nin izlerini sırasıyla d_1 ve d_2 olmak üzere;

i) Eğer $d_1(I)\Gamma I\Gamma d_2(I) = 0$ ise $d_1(M)\Gamma I\Gamma d_2(M) = 0$ dır.

ii) Eğer $Ann_l\, I = 0$ ve $d_1(M)\Gamma I\Gamma d_2(M) = 0$ ise $d_1(M)\Gamma M\Gamma d_2(M) = 0$'dır.

İspat. (i) Hipotezden;

$$\forall x,y,z\in I \text{ ve } \forall \alpha,\beta\in\Gamma \quad d_1(x)\alpha z\beta d_2(y) = 0 \tag{1}$$

dır. O halde, (1) denklemi lineerleştirilirse;

$$\begin{aligned}
0 &= d_1(x+y)\alpha z\beta d_2(x+y)\\
&= [\, d_1(x) + d_1(y) + 3D_1(x,x,y) + 3D_1(x,y,y)\,]\alpha z\beta\\
&\quad\ [d_2(x) + d_2(y) + 3D_2(x,x,y) + 3D_2(x,y,y)\,]\\
&= d_1(x)\alpha z\beta d_2(x) + d_1(x)\alpha z\beta d_2(y) + 3d_1(x)\alpha z\beta D_2(x,x,y)\\
&\quad + 3d_1(x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + d_1(y)\alpha z\beta d_2(x) + d_1(y)\alpha z\beta d_2(y)\\
&\quad + 3d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 3D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(x)\\
&\quad + 3D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(y) + 9D_1(x,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y)\\
&\quad + 9D_1(x,x,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 3D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(x)
\end{aligned}$$

$$+ 3D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(y) + 9D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 9D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y)$$

olur ve dolayısıyla (1)'i kullanılır ve M 3-torsion free olduğundan; $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_1(x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + d_1(x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(x) + D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(x,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(x,x,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(x) + D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \quad (2)$$

elde edilir. (2)'de x yerine $-x$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$

$$- d_1(x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + d_1(x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) - d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) - D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(x) + D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(x,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) - 3D_1(x,x,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(x) - D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(y) - 3D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \quad (3)$$

elde edilir. (2) ile (3) taraf tarafa toplanırsa, Char M $\neq$ 2 olduğundan; $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_1(x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,x,y)+D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(x,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(x) + 3D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \quad (4)$$

elde edilir. (4) de y yerine $2y$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$

$$4d_1(x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 16d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 16D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(y) + 12D_1(x,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 4D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(x) + 48D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0$$

olur. Char M $\neq$ 2 olduğundan; $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_1(x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 4d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 4D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(x,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(x) + 12D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \quad (5)$$

elde edilir. (4) eşitliğinden (5) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa,

$$4d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,x,y)+4D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(y)+12D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y)=0$$

olur ve dolayısıyla Char M $\neq 2$ olduğundan; $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(y) = 0 \quad (6)$$

elde edilir. (6)'da x yerine $x+y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= d_1(y)\alpha z\beta D_2(x+y,x+y,y) + 3D_1(x+y,y,y)\alpha z\beta D_2(x+y,y,y) \\ &\quad + D_1(x+y,x+y,y)\alpha z\beta d_2(y) \\ &= d_1(y)\alpha z\beta[d_2(y)+2D_2(x,y,y)+D_2(x,x,y)] \\ &\quad +3[D_1(x,y,y)+d_1(y)]\alpha z\beta[D_2(x,y,y)+d_2(y)] \\ &\quad + [d_1(y)+2D_1(x,y,y)+D_1(x,x,y)]\alpha z\beta d_2(y) \\ &= 5d_1(y)\alpha z\beta d_2(y) + 5d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) \\ &\quad + 5D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(y) + D_1(x,x,y)\alpha z\beta d_2(y) \\ &\quad + 3D_1(x,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla (1) ve (6) kullanılırsa o zaman

$$5d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 5D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(y) = 0$$

olur ve M 5-torsion free olduğundan; $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_1(y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(y) = 0 \quad (7)$$

elde edilir. $\alpha',\beta'\in\Gamma$ ve $m\in M$ olmak üzere; (7)'de z yerine $z\beta\, d_2(y)\alpha' m\beta' D_1(x,y,y)\alpha z$ yazılırsa,

$$d_1(y)\alpha\, z\beta\, d_2(y)\alpha' m\beta' D_1(x,y,y)\alpha z\, \beta D_2(x,y,y)$$
$$+ D_1(x,y,y)\alpha\, z\beta\, d_2(y)\alpha' m\beta' D_1(x,y,y)\alpha z\, \beta d_2(y) = 0$$

olur ve (1) kullanılırsa, $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$D_1(x,y,y)\,\alpha z\beta\, d_2(y)\alpha' m\beta' D_1(x,y,y)\alpha z\beta\, d_2(y) = 0 \quad (8)$$

elde edilir. M yarı-asal olduğundan (8)'den; $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$

$$D_1(x,y,y)\alpha z\beta d_2(y) = 0 \quad (9)$$

elde edilir. Şimdi $m\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ olmak üzere; (9)'da z yerine $m\gamma z$ yazılırsa o zaman; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$D_1(x,y,y)\alpha m\gamma z\beta d_2(y) = 0 \quad (10)$$

olur. Tekrar (9)'da x yerine $x\gamma m$ yazılırsa;

$$D_1(x,y,y)\gamma m\alpha z\beta d_2(y) + x\gamma D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(y) = 0$$

olur ve dolayısıyla (10)'dan; $\forall x,y,z\in I$, $\forall\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$x\gamma D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(y) = 0 \tag{11}$$

elde edilir. O halde; (11)'den $D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(y)\in Ann_r I$ ve böylece Lemma 1.14'den $D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(y)\in AnnI$. Üstelik; $D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(y)\in I$ ve dolayısıyla $D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(y)\in AnnI\cap I$ dır. Böylece; Lemma 1.15'ten $D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(y)\in AnnI\cap I = (0)$ olur. O halde; $\forall y,z\in I$, $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(y) = 0 \tag{12}$$

elde edilir. (12)'de y yerine $x + y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= D_1(m,x+y,x+y)\alpha z\beta d_2(x+y)\\
&=[D_1(m,x,x)+2D_1(m,x,y)+D_1(m,y,y)]\alpha z\beta\\
&\quad [d_2(x)+d_2(y)+3D_2(x,x,y)+3D_2(x,y,y)]\\
&= D_1(m,x,x)\alpha z\beta d_2(x) + D_1(m,x,x)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y)\\
&\quad + 3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(y) + D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(x)\\
&\quad + 3D_1(m,y,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(m,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y)\\
&\quad + 2D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(x) + 2D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(y)\\
&\quad + 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y)
\end{aligned}$$

olur ve (12)'den; $\forall x,y,z\in I$, $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$\begin{aligned}
&D_1(m,x,x)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y)\\
&\quad + D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(x) + 3D_1(m,y,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y)\\
&\quad + 3D_1(m,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 2D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(x)\\
&\quad + 2D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(y) + 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y)\\
&\quad + 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

elde edilir. (13)'de x yerine $-x$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&D_1(m,x,x)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) - 3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y)\\
&\quad - D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(x) + 3D_1(m,y,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y)\\
&\quad - 3D_1(m,y,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 2D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(x)\\
&\quad - 2D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(y) - 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y)\\
&\quad + 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

elde edilir. Bu durumda; (13) ile (14) taraf tarafa toplanırsa, Char $M \neq 2$ olduğundan; $\forall x,y,z\in I$, $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$D_1(m,x,x)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(m,y,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 2D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(x) + 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \quad (15)$$

elde edilir. (15)'de y yerine $x + y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= D_1(m,x,x)\alpha z\beta d_2(x+y) + 3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,x,x+y) \\
&\quad + 3D_1(m,x+y,x+y)\alpha z\beta D_2(x,x,x+y) + 2D_1(m,x,x+y)\alpha z\beta d_2(x) \\
&\quad + 6D_1(m,x,x+y)\alpha z\beta D_2(x,x+y,x+y) \\
&= D_1(m,x,x)\alpha z\beta[d_2(x)+d_2(y)+3D_2(x,x,y)+3D_2(x,y,y)] \\
&\quad +3D_1(m,x,x)\alpha z\beta[d_2(x)+D_2(x,x,y)] \\
&\quad +3[D_1(m,x,x)+2D_1(m,x,y)+D_1(m,y,y)]\alpha z\beta[d_2(x)+D_2(x,x,y)] \\
&\quad +2[D_1(m,x,x)+D_1(m,x,y)]\alpha z\beta d_2(x) \\
&\quad + 6[D_1(m,x,x)+D_1(m,x,y)]\alpha z\beta[d_2(x)+2D_2(x,x,y)+D_2(x,y,y)] \\
&= 15D_1(m,x,x)\alpha z\beta d_2(x) + D_1(m,x,x)\alpha z\beta d_2(y) \\
&\quad + 21D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 9D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) \\
&\quad + 18D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 14D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(x) \\
&\quad + 3D_1(m,y,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(x) \\
&\quad + 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y)
\end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla (12) ile (15) kullanılırsa M 3-torsion free olduğundan; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 6D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(x) + 4D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(x) + 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) = 0 \quad (16)$$

elde edilir. (16)'da x yerine $-x$ yazılırsa,

$$- 3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 6D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) - D_1(m,y,y)\alpha z\beta d_2(x) + 4D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(x) - 6D_1(m,x,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) = 0 \quad (17)$$

elde edilir. (16) ile (17) taraf tarafa toplanırsa, Char M $\neq 2$ olduğundan, $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$3D_1(m,x,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 2D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(x) = 0 \quad (18)$$

elde edilir. $m' \in M$ ve $\alpha', \beta' \in \Gamma$ olmak üzere; (18)'de z yerine $z\beta\, d_2(x)\alpha' m' \beta' D_1(m,x,y)\alpha z$ yazılırsa $\forall x,y,z \in I$, $\forall \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Gamma$ ve $\forall m, m' \in M$

$$3D_1(m,x,x)\alpha\, z\beta\, d_2(x)\alpha' m' \beta' D_1(m,x,y)\alpha z\, \beta D_2(x,x,y)$$
$$+\, 2D_1(m,x,y)\alpha\, z\beta\, d_2(x)\alpha' m' \beta' D_1(m,x,y)\alpha z\, \beta d_2(x) = 0$$

ve (12) kullanılırsa Char $M \neq 2$ olduğundan,

$$D_1(m,x,y)\, \alpha z\beta\, d_2(x)\alpha' m\beta' D_1(m,x,y)\alpha z\beta\, d_2(x) = 0$$

olur ve böylece; M yarı-asal Γ-halka olduğundan; $\forall x,y,z \in I$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ ve $\forall m \in M$

$$D_1(m,x,y)\alpha z\beta d_2(x) = 0 \tag{19}$$

elde edilir. $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere; (19)'da z yerine $m\gamma z$ yazılırsa, $\forall x,y,z \in I$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ ve $\forall m \in M$

$$D_1(m,x,y)\alpha m\gamma z\beta d_2(x) = 0 \tag{20}$$

olur. Tekrar (19)'da y yerine $y\gamma m$ yazılırsa, $\forall x,y,z \in I$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ ve $\forall m \in M$

$$D_1(m,x,y)\gamma m\alpha z\beta d_2(x) + y\gamma D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(x) = 0$$

ve (20)'den; $\forall x,z \in I$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ ve $\forall m \in M$

$$y\gamma D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(x) = 0 \tag{21}$$

elde edilir. Bu durumda; (21)'den $D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(x) \in Ann_r I$ ve Lemma 1.14'den $D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(x) \in AnnI$ dır. Üstelik $D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(x) \in I$ ve dolayısıyla $D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(x) \in AnnI \cap I$ olur ve böylece Lemma 1.15'ten $D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(x) \in AnnI \cap I = (0)$ dır. O halde; $\forall x,z \in I$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ ve $\forall m \in M$

$$D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(x) = 0 \tag{22}$$

elde edilir. (22)'de x yerine $x + y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= D_1(m,m,x+y)\alpha z\beta d_2(x+y) \\
&= [D_1(m,m,x)+D_1(m,m,y)]\alpha z\beta\, [d_2(x)+d_2(y)+3D_2(x,x,y)+3D_2(x,y,y)] \\
&= D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(x) + D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(y) \\
&\quad + 3D_1(m,m,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(m,m,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) \\
&\quad + D_1(m,m,y)\alpha z\beta d_2(x) + D_1(m,m,y)\alpha z\beta d_2(y) \\
&\quad + 3D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y)
\end{aligned}$$

ve (22) kullanılırsa Char $M \neq 2$ olduğundan,

$$D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(m,m,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(m,m,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + D_1(m,m,y)\alpha z\beta d_2(x) + 3D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \qquad (23)$$

elde edilir. (23)'de x yerine $-x$ yazılırsa; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$- D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(y) - 3D_1(m,m,x)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + 3D_1(m,m,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) - D_1(m,m,y)\alpha z\beta d_2(x) + 3D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) - 3D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \qquad (24)$$

elde edilir. (23) ile (24) taraf tarafa toplanırsa, Char M $\neq 2$ olduğundan; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$D_1(m,m,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) = 0 \qquad (25)$$

elde edilir. (25)'de x yerine $x + y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= D_1(m,m,x+y)\alpha z\beta D_2(x+y,y,y) + D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x+y,x+y,y) \\ &= [D_1(m,m,x)+D_1(m,m,y)]\alpha z\beta\, [d_2(y)+D_2(x,y,y)] \\ &\quad + D_1(m,m,y)\alpha z\beta[D_2(x,x,y)+2D_2(x,y,y)+d_2(y)] \\ &= D_1(m,m,x)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(y) \\ &\quad + 3D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) + 2D_1(m,m,y)\alpha z\beta d_2(y) \\ &\quad + D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,x,y) \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla (22) ve (25) kullanılırsa, o zaman; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(y) + 3D_1(m,m,y)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \qquad (26)$$

elde edilir. $m'\in M$ ve $\alpha',\beta'\in\Gamma$ olmak üzere; (26)'da z yerine $z\beta\, d_2(y)\alpha' m'\beta' D_1(m,m,x)\alpha z$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\Gamma$ ve $\forall m,m'\in M$

$$\begin{aligned} &D_1(m,m,x)\alpha\, z\beta\, d_2(y)\alpha' m'\beta' D_1(m,m,x)\alpha z\, \beta d_2(y) \\ &\quad + 3D_1(m,m,y)\alpha\, z\beta\, d_2(y)\alpha' m'\beta' D_1(m,m,x)\alpha z\, \beta D_2(x,y,y) = 0 \end{aligned}$$

olur ve (22) kullanılırsa,

$$D_1(m,m,x)\alpha\, z\beta\, d_2(y)\alpha' m'\beta' D_1(m,m,x)\alpha z\, \beta d_2(y) = 0 \qquad (27)$$

elde edilir. M yarı-asal Γ-halka olduğundan, (27)'den; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$D_1(m,m,x)\alpha z\beta d_2(y) = 0 \qquad (28)$$

elde edilir. (28)'de z yerine $m\gamma z$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$D_1(m,m,x)\alpha m\gamma z\beta d_2(y) = 0 \tag{29}$$

olur. Tekrar (28)'de x yerine $x\gamma m$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$D_1(m,m,x)\alpha m\gamma z\beta d_2(y) + x\gamma d_1(m)\alpha z\beta d_2(y) = 0$$

ve (29)'dan; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$x\gamma d_1(m)\alpha z\beta d_2(y) = 0 \tag{30}$$

elde edilir. Bu durumda; (30)'dan $d_1(m)\alpha z\beta d_2(y)\in Ann_r I$ ve Lemma 1.14'den $d_1(m)\alpha z\beta d_2(y)\in Ann I$ dır. Üstelik; $d_1(m)\alpha z\beta d_2(y)\in I$ ve dolayısıyla $d_1(m)\alpha z\beta d_2(y)\in Ann I\cap I$ olur ve böylece Lemma 1.15'ten $d_1(m)\alpha z\beta d_2(y)\in Ann I\cap I = 0$ dır. O halde; $\forall y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta d_2(y) = 0 \tag{31}$$

elde edilir. (31)'de y yerine $x + y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= d_1(m)\alpha z\beta d_2(x+y) \\ &= d_1(m)\alpha z\beta d_2(x) + d_1(m)\alpha z\beta d_2(y) + 3d_1(m)\alpha z\beta D_2(x,x,y) \\ &\quad + 3d_1(m)\alpha z\beta D_2(x,y,y) \end{aligned}$$

olur ve (31) kullanılırsa M 3-torsion free olduğundan; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta D_2(x,x,y) + d_1(m)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \tag{32}$$

elde edilir. (32)'de x yerine $-x$ yazılırsa,

$$d_1(m)\alpha z\beta D_2(x,x,y) - d_1(m)\alpha z\beta D_2(x,y,y) = 0 \tag{33}$$

olur ve dolayısıyla (32) ile (33) toplanırsa Char M $\neq 2$ olduğundan; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta D_2(x,x,y) = 0 \tag{34}$$

elde edilir. $n\in M$ olmak üzere; (34)'de z yerine $z\gamma n$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\gamma n\beta D_2(x,x,y) = 0 \tag{35}$$

olur. Tekrar (34)'de y yerine $n\gamma y$ yazılırsa,

$$d_1(m)\alpha z\beta n\gamma D_2(x,x,y) + d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,x)\gamma y = 0$$

ve (35)'den; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,x)\gamma y = 0 \tag{36}$$

elde edilir. Bu durumda; (36)'dan $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,x)\in Ann_l I$ ve Lemma 1.14'den $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,x)\in AnnI$ dır. Üstelik; $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,x)\in I$ ve dolayısıyla $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,x)\in AnnI\cap I$ olur ve böylece Lemma 1.15'ten $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,x)\in AnnI\cap I=(0)$ dır. O halde; $\forall x,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,x) = 0 \tag{37}$$

elde edilir. (37)'de x yerine $x + y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x+y,x+y) \\ &= d_1(m)\alpha z\beta\, [D_2(n,x,x)+2D_2(n,x,y)+D_2(n,y,y)] \\ &= d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,x) + 2d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,y) + d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,y,y) \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla (37) kullanılırsa; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,x,y) = 0 \tag{38}$$

elde edilir. (38)'de z yerine $z\gamma n$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\gamma n\beta D_2(n,x,y) = 0 \tag{39}$$

olur. Tekrar (38)'de x yerine $n\gamma x$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha x\beta n\gamma D_2(n,x,y) + d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,n,y)\gamma x = 0$$

ve (39)'dan; $\forall x,y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,n,y)\gamma x = 0 \tag{40}$$

elde edilir. Bu durumda; (40)'dan $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,n,y)\in Ann_l I$ ve Lemma 1.14'den $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,n,y)\in AnnI\cap I$ dır. Üstelik; $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,n,y)\in I$ ve dolayısıyla $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,n,y)\in AnnI\cap I$ olur ve böylece Lemma 1.15'ten $d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,n,y)\in AnnI\cap I=(0)$ dır. O halde; $\forall y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta D_2(n,n,y) = 0 \tag{41}$$

elde edilir. (41)'de z yerine $z\gamma n$ yazılırsa, $\forall y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\gamma n\beta D_2(n,n,y) = 0 \tag{42}$$

olur. Tekrar (41)'de y yerine $n\gamma y$ yazılırsa, $\forall y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta n\gamma D_2(n,n,y) + d_1(m)\alpha z\beta d_2(n)\gamma y = 0$$

ve (42)'den; $\forall y,z\in I$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$

$$d_1(m)\alpha z\beta d_2(n)\gamma y = 0 \tag{43}$$

elde edilir. Bu durumda; (43)'den $d_1(m)\alpha z\beta d_2(n)\in Ann_l I$ ve Lemma 1.14'den $d_1(m)\alpha z\beta d_2(n)\in AnnI$ dır. Üstelik; $d_1(m)\alpha z\beta d_2(n)\in I$ ve dolayısıyla $d_1(m)\alpha z\beta d_2(n)\in AnnI\cap I$ olur ve böylece Lemma 1.15'ten $d_1(m)\alpha z\beta d_2(n)\in AnnI\cap I = 0$ dır. O halde; $\forall z\in I$, $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m,n\in M$ $d_1(m)\alpha z\beta d_2(n) = 0$ elde edilir. Yani; $d_1(M)\Gamma I\Gamma d_2(M) = 0$'dır.

(ii) Hipotezden;

$$\forall z\in I,\ \forall\alpha,\beta\in\Gamma \text{ ve } \forall m,n\in M\ \ d_1(m)\alpha z\beta d_2(n) = 0 \tag{44}$$

dır. $\gamma,\beta',\gamma'\in\Gamma$ ve $m',n'\in M$ olmak üzere; (44)'de z yerine $m'\beta d_2(n)\gamma z\beta' n'\gamma' d_1(m)\alpha m'$ yazılırsa, o zaman $\forall z\in I$, $\forall\alpha,\beta,\gamma,\beta',\gamma'\in\Gamma$ ve $\forall m,n,m',n'\in M$

$$d_1(m)\alpha\, m'\beta d_2(n)\gamma z\beta' n'\gamma' d_1(m)\alpha m'\,\beta d_2(n) = 0$$

olur ve M yarı-asal olduğundan; $\forall z\in I, \forall\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n,m'\in M$

$$d_1(m)\,\alpha m'\beta\, d_2(n)\gamma z = 0$$

dır. Buradan $d_1(m)\ \alpha m'\beta\ d_2(n)\in Ann_l I = 0$ olduğundan; $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$ ve $\forall m,n,m'\in M$ $d_1(m)\ \alpha m'\beta\ d_2(n) = 0$ olur. Yani; $d_1(M)\Gamma M\Gamma d_2(M) = 0$ 'dır.

Lemma 3.6: M 2, 3-torsion free Γ-halka ve I, M'nin sıfırdan farklı bir sağ (sol) ideali olsun. D(.,.,.), M'nin permuting tri-türevi ve izini d olmak üzere; M bir asal Γ-halka (veya $Ann_r I = 0$ ($Ann_l I = 0$)) ve $\forall x\in I$ $d(x) = 0$ ise o zaman D = 0 dır.

İspat. Hipotezden;

$$\forall x\in I\ \ d(x) = 0 \tag{45}$$

dır. (65) lineerleştirilirse;

$$d(x) + d(y) + 3D(x,x,y) + 3D(x,y,y) = 0$$

olur ve dolayısıyla (45)'den ve M'nin 3-torsion free olduğundan; $\forall x,y\in I$

$$D(x,x,y) + D(x,y,y) = 0 \tag{46}$$

elde edilir. $y \in I$ olmak üzere; (46)'da y yerine $y + z$ yazılırsa,

$$0 = D(x,x,y+z) + D(x,y+z,y+z)$$
$$= D(x,x,y) + D(x,x,z) + D(x,y,y) + D(x,z,z) + 2D(x,y,z)$$

olur ve dolaysıyla (45)'den ve M'nin 2-torsion free olduğundan; $\forall x,y,z \in I$

$$D(x,y,z) = 0 \qquad (47)$$

elde edilir. $\alpha \in \Gamma$ ve $m \in M$ olmak üzere; (47)'de z yerine $z\alpha m$ yazılırsa; $\forall x,y,z \in I$, $\forall \alpha \in \Gamma$ ve $\forall m \in M$

$$D(x,y,z)\alpha m + z\alpha D(m,x,y) = 0$$

olur ve dolaysıyla (47) kullanılırsa o zaman; $\forall x,y,z \in I$, $\forall \alpha \in \Gamma$ ve $\forall m \in M$

$$z\alpha D(m,x,y) = 0 \qquad (48)$$

Eğer, M asal Γ-halka ise o zaman Lemma 2.1.3'den ve yukarıdaki eşitlikten; $\forall x,y \in I$ ve $\forall m \in M$ $D(m,x,y) = 0$ dır. Eğer, $\mathrm{Ann}_r I = 0$ ise (48)'den; $\forall x,y \in I$ ve $\forall m \in M$

$$D(m,x,y) = 0 \qquad (49)$$

elde edilir. $\beta \in \Gamma$ ve $n \in M$ olmak üzere; (49)'da y yerine $y\beta n$ yazılırsa, $\forall x,y \in I$, $\forall \beta \in \Gamma$ ve $\forall m,n \in M$

$$D(m,x,y)\beta n + y\beta D(m,n,x) = 0$$

olur ve dolayısıyla (49) kullanılırsa o zaman; $\forall x,y \in I$, $\forall \beta \in \Gamma$ ve $\forall m,n \in M$

$$y\beta D(m,n,x) = 0 \qquad (50)$$

Eğer, M asal Γ-halka ise o zaman Lemma 2.1.3'den ve yukarıdaki eşitlikten; $\forall x \in I$, $\forall m,n \in M$ $D(m,n,x)=0$ dır. Eğer, $\mathrm{Ann}_r I = 0$ ise (50)'den; $\forall x \in I$ ve $\forall m,n \in M$

$$D(m,n,x)=0 \qquad (51)$$

elde edilir. $\gamma \in \Gamma$ ve $r \in M$ olmak üzere; (51)'de x yerine $x\gamma r$ yazılırsa, $\forall x \in I$, $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall m,n,r \in M$

$$D(m,n,x)\gamma r + x\gamma D(m,n,r) = 0$$

olur ve dolaysıyla (51) kullanılırsa; $\forall x \in I$, $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall m,n,r \in M$

$$x\gamma D(m,n,r) = 0 \qquad (52)$$

Eğer, M asal Γ-halka ise o zaman Lemma 2.1.3'den ve yukarıdaki eşitlikten; $\forall x\in I$, $\forall \gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n,r\in M$ $D(m,n,r) = 0$ dır. Eğer, $Ann_r\, I = 0$ ise (52)'den; $\forall\gamma\in\Gamma$ ve $\forall m,n,r\in M$ $D(m,n,r) = 0$'dır.

Eğer; I, M'nin sol ideali olarak alınırsa sonuçlar benzer biçimde gösterilebilir.

Teorem 3.7: M 2, 3-torsion free asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; M'nin permuting tri-türevleri ve $D_1(.,.,.)$, $D_2(.,.,.)$'nin izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre; $\forall x\in I$ $D_1(d_2(x), x, x) = 0$ ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$'dır.

İspat. Hipotezden;

$$\forall x\in I \quad D_1(d_2(x), x, x) = 0 \tag{53}$$

dır. O halde (53) lineerleştirilirse;

$$\begin{aligned} 0 = {} & D_1(d_2(x),x,x) + D_1(d_2(x),y,y) + 2D_1(d_2(x),x,y) + D_1(d_2(y),x,x) \\ & + D_1(d_2(y),y,y) + 2D_1(d_2(y),x,y) + 3D_1(D_2(x,x,y),x,x) \\ & + 3D_1(D_2(x,x,y),y,y) + 6D_1(D_2(x,x,y),x,y) + 3D_1(D_2(x,y,y),x,x) \\ & + 3D_1(D_2(x,y,y),y,y) + 6D_1(D_2(x,y,y),x,y) \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla (78)'den; $\forall x,y\in I$

$$\begin{aligned} & D_1(d_2(x),y,y) + 2D_1(d_2(x),x,y) + D_1(d_2(y),x,x) + 2D_1(d_2(y),x,y) \\ & + 3D_1(D_2(x,x,y),x,x) + 3D_1(D_2(x,x,y),y,y) + 6D_1(D_2(x,x,y),x,y) \\ & + 3D_1(D_2(x,y,y),x,x) + 3D_1(D_2(x,y,y),y,y) + 6D_1(D_2(x,y,y),x,y) = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

elde edilir. (54)'de x yerine $-x$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} & - D_1(d_2(x),y,y) + 2D_1(d_2(x),x,y) + D_1(d_2(y),x,x) - 2D_1(d_2(y),x,y) \\ & + 3D_1(D_2(x,x,y),x,x) + 3D_1(D_2(x,x,y),y,y) - 6D_1(D_2(x,x,y),x,y) \\ & - 3D_1(D_2(x,y,y),x,x) - 3D_1(D_2(x,y,y),y,y) + 6D_1(D_2(x,y,y),x,y) = 0 \end{aligned} \tag{55}$$

elde edilir. (54) ile (55) taraf tarafa toplanırsa, M 2-torsion free olduğundan; $\forall x,y\in I$

$$\begin{aligned} & 2D_1(d_2(x),x,y) + D_1(d_2(y),x,x) + 3D_1(D_2(x,x,y),x,x) \\ & + 3D_1(D_2(x,x,y),y,y) + 6D_1(D_2(x,y,y),x,y) = 0 \end{aligned} \tag{56}$$

elde edilir. (56)'da y yerine $x + y$ yazılırsa,

$$0 = 2D_1(d_2(x),x,x+y) + D_1(d_2(x+y),x,x) + 3D_1(D_2(x,x,x+y),x,x) + 3D_1(D_2(x,x,x+y),x+y,x+y) + 6D_1(D_2(x,x+y,x+y),x,y)$$
$$= 15D_1(d_2(x),x,x) + 14D_1(d_2(x),x,y) + D_1(d_2(y),x,x) + 21D_1(D_2(x,x,y),x,x) + 9D_1(D_2(x,y,y),x,x) + 3D_1(d_2(x),y,y) + 3D_1(D_2(x,x,y),y,y)+18D_1(D_2(x,x,y),x,y)+6D_1(D_2(x,y,y),y,y)$$

olur ve dolayısıyla (53) ile (56) kullanılırsa, M 2,3-torsion free olduğundan; $\forall x,y\in I$

$$D_1(d_2(x),y,y) + 4D_1(d_2(x),x,y) + 3D_1(D_2(x,y,y),x,x) + 6D_1(D_2(x,x,y),x,x) + 6D_1(D_2(x,x,y),x,y) = 0 \tag{57}$$

elde edilir. (57)'de x yerine $-x$ yazılırsa,

$$- D_1(d_2(x),y,y) + 4D_1(d_2(x),x,y) - 3D_1(D_2(x,y,y),x,x) + 6D_1(D_2(x,x,y),x,x) - 6D_1(D_2(x,x,y),x,y) = 0 \tag{58}$$

elde edilir. (57) ile (58) taraf tarafa toplanırsa, M 2-torsion free olduğundan; $\forall x,y\in I$

$$4D_1(d_2(x),x,y) + 6D_1(D_2(x,x,y),x,x) = 0 \tag{59}$$

elde edilir. $\alpha\in\Gamma$ olmak üzere; (86)'da y yerine $x\alpha y$ yazılırsa, $\forall x,y\in I$ ve $\forall\alpha\in\Gamma$

$$0 = 4D_1(d_2(x),x,x)\alpha y + 4x\alpha D_1(d_2(x),x,y) + 6d_2(x)\alpha D_1(x,x,y) + 6D_1(d_2(x),x,x)\alpha y + 6x\alpha D_1(D_2(x,x,y),x,x) + 6d_1(x)\alpha D_2(x,x,y)$$

olur ve dolayısıyla (53) ile (59) kullanılırsa, M 2,3-torsion free olduğundan; $\forall x,y\in I$ ve $\forall\alpha\in\Gamma$

$$d_2(x)\alpha D_1(x,x,y) + d_1(x)\alpha D_2(x,x,y) = 0 \tag{60}$$

elde edilir. $\beta\in\Gamma$ olmak üzere; (60)'da y yerine $y\beta z$ yazılırsa, (60)'dan; $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_2(x)\alpha y\beta D_1(x,x,z) + d_1(x)\alpha y\beta D_2(x,x,z) = 0 \tag{61}$$

elde edilir. (61)'de z yerine x yazılırsa Lemma 3.5'ten; $\forall x,y\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_1(x)\alpha y\beta d_2(x) = 0 \tag{62}$$

elde edilir. Bu durumda, varsayalım ki $x_1,x_2\in I$ için $d_1(x_1)\neq 0$ ve $d_2(x_2)\neq 0$ olsun. Böylece; (62)'de x yerine x_1 yazılırsa; $\forall y\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_1(x_1)\alpha y\beta d_2(x_1) = 0$$

olur ve dolayısıyla M asal Γ-halka olduğundan $d_2(x_1) = 0$'dır. (61)'de x yerine x_2 yazılırsa; $\forall y,z\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_1(x_2)\alpha y\beta D_2(x_2,x_2,z) = 0$$

olur ve dolayısıyla M asal Γ-halka olduğundan $\forall z\in I$ $D_2(x_2,x_2,z) = 0$ dır. Böylece; $x_1,x_2\in I$ için $D_2(x_2,x_2,x_1) = 0$'dır. Şimdi (62)'de x yerine x_2 yazılırsa; $\forall y\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_1(x_2)\alpha y\beta d_2(x_2) = 0$$

olur ve dolayısıyla M asal Γ-halka olduğundan $d_1(x_2) = 0$'dır. (61)'de x yerine x_1 yazılırsa; $\forall y,z\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_2(x_1)\alpha y\beta D_1(x_1, x_1,z) = 0$$

olur ve dolayısıyla M asal Γ-halka olduğundan $\forall z\in I$ $D_2(x_1,x_1,z) = 0$ dır. Böylece; $x_1,x_2\in I$ için $D_2(x_1,x_1,x_2) = 0$'dır. Bu durumda, $z = x_1 + x_2$ olarak alınırsa;

$$d_1(z) = d_1(x_1 + x_2) = d_1(x_1) + d_1(x_2) + 3D_1(x_1,x_1,x_2) + 3D_1(x_1,x_2,x_2)$$

$$d_1(z) = d_1(x_1) \neq 0$$

$$d_2(z) = d_2(x_1 + x_2) = d_2(x_1) + d_2(x_2) + 3D_2(x_1,x_1,x_2) + 3D_2(x_1,x_2,x_2)$$

$$d_2(z) = d_2(x_2) \neq 0$$

olur. Böylece; (62)'den ve M asal Γ-halka olduğundan $d_1(z)$ ve $d_2(z)$ aynı anda sıfırdan farklı olamazlar. O halde, $\forall x\in I$ $d_1(x) = 0$ veya $d_2(x) = 0$'dır. Sonuçta; Lemma 3.6'dan $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$'dır.

Sonuç 3.8: M karakteristiği 2'den farklı ve 3, 5-torsion free yarı-asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, D(.,.,.); M'nin permuting tri-türevi ve izi d olsun. $d(I)\subset I$ ve $\mathrm{Ann}_l I = 0$ olmak üzere; $\forall x\in I$ $D(d(x),x,x) = 0$ ise o zaman $D = 0$'dır.

İspat. Teorem 3.7'de $D_1 = D_2 = D$ olarak alalım. (62)'den $\forall x,y\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$ $d(x)\alpha y\beta d(x) = 0$ elde edilir. M yarı-asal Γ-halka ve $\mathrm{Ann}_l I = 0$ olduğundan Lemma 3.5'ten, $\forall x\in I$ $d(x) = 0$'dır. Ayrıca, Lemma 3.6'dan $D = 0$'dır.

Teorem 3.9: M karakteristiği 2'den farklı ve 3, 5-torsion free asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; M'nin permuting tri-türevleri ve $D_1(.,.,.)$, $D_2(.,.,.)$'nin izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. Buna göre; $d_2(I)\subset I$ olmak üzere $\forall x \in I$ $D_1(d_2(x), d_2(x), x) = 0$ ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$'dır.

İspat. Hipotezden;

$$\forall x \in I \quad D_1(d_2(x), d_2(x), x) = 0 \tag{63}$$

dır. O halde (63) lineerleştirilirse;

$$\begin{aligned}
0 &= D_1(d_2(x+y),d_2(x+y),x+y)\\
&= D_1(d_2(x),d_2(x),x) + D_1(d_2(x),d_2(x),y) + 2D_1(d_2(y),d_2(x),x)\\
&+ 2D_1(d_2(y),d_2(x),y) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),x)\\
&+ 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),y) + 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),x)\\
&+ 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),y) + D_1(d_2(y),d_2(y),x) + D_1(d_2(y),d_2(y),y)\\
&+ 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(y),x) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(y),y)\\
&+ 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(y),x) + 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(y),y)\\
&+ 18D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),x) + 18D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),y)\\
&+ 9D_1(D_2(x,y,y),D_2(x,y,y),x) + 9D_1(D_2(x,y,y),D_2(x,y,y),y)\\
&+ 9D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),y) + 9D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),x)
\end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla (63)'den; $\forall x,y\in I$

$$\begin{aligned}
&D_1(d_2(x),d_2(x),y) + 2D_1(d_2(y),d_2(x),x) + 2D_1(d_2(y),d_2(x),y)\\
&+ 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),x) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),y)\\
&+ 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),x) + 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),y)\\
&+ D_1(d_2(y),d_2(y),x) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(y),x) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(y),y)\\
&+ 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(y),x) + 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(y),y)\\
&+ 18D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),x) + 18D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),y)\\
&+ 9D_1(D_2(x,y,y),D_2(x,y,y),x) + 9D_1(D_2(x,y,y),D_2(x,y,y),y)\\
&+ 9D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),y) + 9D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),x) = 0
\end{aligned} \tag{64}$$

elde edilir. (64)'de x yerine $-x$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&D_1(d_2(x),d_2(x),y) + 2D_1(d_2(y),d_2(x),x) - 2D_1(d_2(y),d_2(x),y)\\
&+ 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),x) - 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),x) + 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),y) \\
&- D_1(d_2(y),d_2(y),x) - 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(y),x) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(y),y) \\
&+ 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(y),x) - 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(y),y) \\
&+ 18D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),x) - 18D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),y) \\
&- 9D_1(D_2(x,y,y),D_2(x,y,y),x) + 9D_1(D_2(x,y,y),D_2(x,y,y),y) \\
&+ 9D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),y) - 9D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),x) = 0 \qquad (65)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (64) ile (65) taraf tarafa toplanırsa, Char M $\neq 2$ olduğundan; $\forall x,y \in I$

$$
\begin{aligned}
&2D_1(d_2(y),d_2(x),x) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),x) + 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(y),x) \\
&+ 18D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),x) + D_1(d_2(x),d_2(x),y) \\
&+ 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),y) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(y),y) \\
&+ 9D_1(D_2(x,y,y),D_2(x,y,y),y) + 9D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),y) = 0 \qquad (66)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (66)'da x yerine $2x$ yazılırsa, Char M $\neq 2$ olduğundan;

$$
\begin{aligned}
&8D_1(d_2(y),d_2(x),x) + 96D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),x) + 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(y),x) \\
&+ 72D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),x) + 16D_1(d_2(x),d_2(x),y) \\
&+ 24D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),y) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(y),y) \\
&+ 9D_1(D_2(x,y,y),D_2(x,y,y),y) + 36D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),y) = 0 \qquad (67)
\end{aligned}
$$

olur ve dolayısıyla (67) ile (66) taraf tarafa çıkarılırsa, M 3-torsion free olduğundan; $\forall x,y \in I$

$$
\begin{aligned}
&2D_1(d_2(y),d_2(x),x) + 30D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),x) \\
&+ 18D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),x) + 5D_1(d_2(x),d_2(x),y) \\
&+ 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),y) + 9D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),y)=0 \qquad (68)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (68)'de x yerine $2x$ yazılırsa Char M $\neq 2$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&2D_1(d_2(y),d_2(x),x) + 120D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),x) \\
&+ 18D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),x) + 20D_1(d_2(x),d_2(x),y) \\
&+ 6D_1(D_2(x,y,y),d_2(x),y) + 9D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),y) = 0 \qquad (69)
\end{aligned}
$$

olur ve dolayısıyla (69) ile (68) taraf tarafa çıkarılırsa, M 3,5-torsion free olduğundan; $\forall x,y \in I$

$$D_1(d_2(x),d_2(x),y) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),x) = 0 \qquad (70)$$

elde edilir. $\beta \in \Gamma$ olmak üzere; (70)'de y yerine $y\beta x$ yazılırsa, $\forall x,y \in I$ ve $\forall \beta \in \Gamma$

$$0 = D_1(d_2(x),d_2(x), y\beta x) + 6D_1(D_2(x,x, y\beta x),d_2(x),x)$$

$$= D_1(d_2(x),d_2(x),y)\beta x + y\beta D_1(d_2(x),d_2(x),x) + 6y\beta D_1(d_2(x),d_2(x),x) + 6D_1(d_2(x),x,y)\beta d_2(x) + 6D_2(x,x,y)\beta D_1(d_2(x),x,x) + 6D_1(D_2(x,x,y),d_2(x),x)\beta x$$

olur. (63) ile (70) kullanılırsa, Char M $\neq$ 2 ve M 3-torsion free olduğundan; $\forall x,y\in I$ ve $\forall\beta\in\Gamma$

$$D_2(x,x,y)\beta D_1(d_2(x),x,x) + D_1(d_2(x),x,y)\beta d_2(x) = 0 \tag{71}$$

elde edilir. $\alpha\in\Gamma$ olmak üzere; (71)'de y yerine $x\alpha y$ yazılırsa, $\forall x,y\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$0 = D_2(x,x, x\alpha y)\beta D_1(d_2(x),x,x) + D_1(d_2(x),x, x\alpha y)\beta d_2(x)$$
$$= d_2(x)\alpha y\beta D_1(d_2(x),x,x) + x\alpha D_2(x,x,y)\beta D_1(d_2(x),x,x) + D_1(d_2(x),x,x)\alpha y\beta d_2(x) + x\alpha D_1(d_2(x),x,y)\beta d_2(x)$$

olur ve dolaysıyla (71) kullanılırsa; $\forall x,y\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_2(x)\alpha\, y\,\beta\, D_1(d_2(x),x,x)+D_1(d_2(x),x,x)\alpha\, y\,\beta\, d_2(x)=0 \tag{72}$$

elde edilir. Bu durumda varsayalım ki bir $x_1\in I$ için $D_1(d_2(x_1),x_1,x_1) \neq 0$ olsun. Böylece, (72)'de x yerine x_1 yazılırsa;

$$d_2(x_1)\alpha\, y\,\beta\, D_1(d_2(x_1),x_1,x_1)+D_1(d_2(x_1),x_1,x_1)\alpha\, y\,\beta\, d_2(x_1)=0$$

olur ve dolayısıyla M asal Γ-halka olduğundan $d_2(x_1) = 0$'dır. Bundan dolayı; $D_1(d_2(x_1),x_1,x_1) = D_1(0,x_1,x_1) = 0$ olur. Bu ise varsayımla çelişir. O halde, $\forall x,y\in I$ $D_1(d_2(x),x,x) = 0$'dır. Böylece; Teorem 3.7'den $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ 'dır.

Sonuç 3.10: M karakteristiği 2'den farklı ve 3, 5-torsion free yarı-asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, D(.,.,.); M'nin permuting tri-türevi ve izi d olsun. Buna göre; $d(I)\subset I$ ve $\mathrm{Ann}_l I = 0$ olmak üzere; $\forall x\in I$ $D(d(x), d(x), x) = 0$ ise o zaman $D = 0$'dır.

İspat. Teorem 3.9'da $D_1= D_2= D$ olarak alalım. O halde (71)'den; $\forall x,y\in I$ ve $\forall\beta\in\Gamma$

$$D(x,x,y)\beta D(d(x),x,x) + D(d(x),x,y)\beta d(x) = 0 \tag{73}$$

elde edilir. $\alpha\in\Gamma$ ve $z\in I$ olmak üzere; (73)'de y yerine $y\alpha z$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$0 = D(x,x, y\alpha z)\beta D(d(x),x,x) + D(d(x),x, y\alpha z)\beta d(x)$$

$$= \quad D(x,x,y)\alpha z\beta D(d(x),x,x) \quad + \quad y\alpha D(x,x,z)\beta D(d(x),x,x)$$
$$+ D(d(x),x,y)\alpha z\beta d(x) + y\alpha D(d(x),x,z)\beta d(x)$$

olur ve dolaysıyla (73) kullanılırsa; $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$D(x,x,y)\alpha z\beta D(d(x),x,x) + D(d(x),x,y)\alpha z\beta d(x) = 0 \tag{74}$$

elde edilir. (74)'de y yerine $d(x)$ yazılırsa; $\forall x,z\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$0 = D(d(x),x,x)\alpha z\beta D(d(x),x,x) + D(d(x),d(x),x)\alpha z\beta d(x)$$

olur. Böylece; hipotezden, $\forall x,z\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$D(d(x),x,x)\alpha z\beta D(d(x),x,x) = 0$$

elde edilir. M yarı-asal Γ-halka olduğundan; $\forall x,z\in I$ $D(d(x),x,x) = 0$'dır. M yarı-asal Γ-halka, $d(I)\subset I$ ve $Ann_l I = 0$ olduğundan Sonuç 3.8'den $D = 0$'dır.

Teorem 3.11: M karakteristiği 2, 3'ten farklı ve 5, 7-torsion free asal Γ-halka, I; M'nin sıfırdan farklı bir ideali, $D_1(.,.,.)$ ve $D_2(.,.,.)$; M'nin permuting tri-türevleri ve izleri sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. $d_2(I)\subset I$, $F(.,.,.)$; M'de permuting tri-toplamsal dönüşüm ve izi, f olmak üzere; $\forall x\in I$ $d_1(d_2(x))=f(x)$ ise o zaman $D_1=0$ veya $D_2=0$'dır.

İspat. Hipotezden;

$$\forall x\in I \quad d_1(d_2(x)) = f(x) \tag{75}$$

dır. O halde, (75) lineerleştirilirse;

$$d_1(d_2(x+y)) = f(x+y)$$
$$d_1(d_2(x)) + d_1(d_2(y)) + 3D_1(d_2(x),d_2(x),d_2(y)) + 3D_1(d_2(x),d_2(y),d_2(y))$$
$$+27d_1(D_2(x,x,y))+27d_1(D_2(x,y,y))+81D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y))$$
$$+ 81D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y))$$
$$+ 9D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,y,y)) + 18D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,x,y))$$
$$+ 18D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(y),d_2(y),D_2(x,x,y))$$
$$+ 9D_1(d_2(y),d_2(y),D_2(x,y,y)) + 27D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y))$$
$$+ 54D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 27D_1(d_2(x),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y))$$
$$+ 27D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y)) + 54D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y))$$
$$+ 27D_1(d_2(y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) = f(x) + f(y) + 3F(x,x,y) + 3F(x,y,y)$$

olur ve dolayısıyla (75) kullanılırsa, Char M $\neq$ 3 olduğundan; $\forall x,y\in I$

$$D_1(d_2(x),d_2(x),d_2(y)) + D_1(d_2(x),d_2(y),d_2(y)) + 9d_1(D_2(x,x,y)) + 9d_1(D_2(x,y,y)) + 27D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 27D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) + 3D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y)) + 3D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,y,y)) + 6D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,x,y)) + 6D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,y,y)) + 3D_1(d_2(y),d_2(y),D_2(x,x,y)) + 3D_1(d_2(y),d_2(y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y)) + 18D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(x),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y)) + 18D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) = F(x,x,y) + F(x,y,y) \quad (76)$$

elde edilir. (76)'da x yerine $-x$ yazılırsa,

$$D_1(d_2(x),d_2(x),d_2(y)) - D_1(d_2(x),d_2(y),d_2(y)) + 9d_1(D_2(x,x,y)) - 9d_1(D_2(x,y,y)) - 27D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 27D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) + 3D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y)) - 3D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,y,y)) - 6D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,x,y)) + 6D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,y,y)) + 3D_1(d_2(y),d_2(y),D_2(x,x,y)) - 3D_1(d_2(y),d_2(y),D_2(x,y,y)) - 9D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y)) + 18D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) - 9D_1(d_2(x),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y)) - 18D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) = F(x,x,y) - F(x,y,y) \quad (77)$$

elde edilir. (76) ile (77) taraf tarafa toplanırsa, Char M $\neq$ 2 olduğundan; $\forall x,y \in I$

$$D_1(d_2(x),d_2(x),d_2(y)) + 9d_1(D_2(x,x,y)) + 27D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) + 3D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y)) + 6D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,y,y)) + 3D_1(d_2(y),d_2(y),D_2(x,x,y)) + 18D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y)) + 9D_1(d_2(y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) = F(x,x,y) \quad (78)$$

elde edilir. (78)'de x yerine $2x$ yazılırsa, Char M $\neq$ 2 olduğundan,

$$16D_1(d_2(x),d_2(x),d_2(y)) + 144d_1(D_2(x,x,y)) + 108D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) + 192D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y)) + 24D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,y,y)) + 3D_1(d_2(y),d_2(y),D_2(x,x,y)) + 72D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 36D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y)) + 9D_1(d_2(y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) = F(x,x,y) \quad (79)$$

olur ve dolayısıyla (79) ile (78) taraf tarafa çıkarılırsa, Char M $\neq$ 3 olduğundan; $\forall x,y\in I$

$$5D_1(d_2(x),d_2(x),d_2(y)) + 45d_1(D_2(x,x,y)) + 27D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) + 63D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y)) + 6D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,y,y)) + 18D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y)) = 0 \quad (80)$$

elde edilir. (80)'de x yerine $2x$ yazılırsa, Char M $\neq$ 2 olduğundan,

$$20D_1(d_2(x),d_2(x),d_2(y)) + 180d_1(D_2(x,x,y)) + 27D_1(D_2(x,x,y),D_2(x,y,y),D_2(x,y,y)) + 1008D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y)) + 6D_1(d_2(x),d_2(y),D_2(x,y,y)) + 36D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) + 9D_1(d_2(y),D_2(x,x,y),D_2(x,x,y)) = 0 \quad (81)$$

olur ve dolayısıyla (81) ile (80) taraf tarafa çıkarılırsa, Char M $\neq$ 3 olduğundan; $\forall x,y\in I$

$$5D_1(d_2(x),d_2(x),d_2(y)) + 45d_1(D_2(x,x,y)) + 315D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y)) + 6D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) = 0 \quad (82)$$

elde edilir. (82)'de x yerine $2x$ yazılırsa, Char M $\neq$ 2 olduğundan,

$$5D_1(d_2(x),d_2(x),d_2(y)) + 45d_1(D_2(x,x,y)) + 1260D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y)) + 6D_1(d_2(x),D_2(x,x,y),D_2(x,y,y)) = 0 \quad (83)$$

olur ve dolayısıyla (83) ile (82) taraf tarafa çıkarılırsa, Char M $\neq$ 2,3 ve M 5,7-torsion free olduğundan; $\forall x,y\in I$

$$D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y)) = 0 \quad (84)$$

elde edilir. $\beta\in\Gamma$ ve $z\in I$ olmak üzere; (84)'de y yerine $y\beta z$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall\beta\in\Gamma$

$$0 = D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x, y\beta z)) = D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,y))\beta z + D_2(x,x,y)\beta D_1(d_2(x),d_2(x),z) + D_1(d_2(x),d_2(x),y)\beta D_2(x,x,z) + y\beta D_1(d_2(x),d_2(x),D_2(x,x,z))$$

olur ve dolayısıyla (84) kullanılırsa; $\forall x,y,z\in I$, $\forall\beta\in\Gamma$

$$D_2(x,x,y)\beta\, D_1(d_2(x),d_2(x), z) + D_1(d_2(x),d_2(x), y)\beta\, D_2(x,x,z) = 0 \quad (85)$$

elde edilir. $\alpha\in\Gamma$ olmak üzere; (85)'de y yerine $x\alpha y$ yazılırsa, $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$0 = D_2(x,x,x\alpha y)\beta\, D_1(d_2(x),d_2(x), z) + D_1(d_2(x),d_2(x), x\alpha y)\beta\, D_2(x,x,z)$$

$$= d_2(x)\alpha y\beta D_1(d_2(x),d_2(x),z) + D_1(d_2(x),d_2(x),x)\alpha y\beta D_2(x,x,z)$$
$$+ x\alpha D_2(x,x,y)\beta D_1(d_2(x),d_2(x), z) + x\alpha D_1(d_2(x),d_2(x), y)\beta D_2(x,x,z)$$

olur ve dolayısıyla (85) kullanılırsa; $\forall x,y,z\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_2(x)\alpha y\beta D_1(d_2(x),d_2(x), z) + D_1(d_2(x),d_2(x),x)\alpha y\beta D_2(x,x,z) = 0 \qquad (86)$$

elde edilir. (86)'da z yerine x yazılırsa; $\forall x,y\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_2(x)\alpha\, y\,\beta\, D_1(d_2(x),d_2(x),x)+D_1(d_2(x),d_2(x),x)\alpha\, y\,\beta\, d_2(x)=0 \qquad (87)$$

elde edilir. Bu durumda; varsayalım ki bir $x_1\in I$ için $D_1(d_2(x_1),d_2(x_1),x_1) \neq 0$ olsun. Böylece, (87)'de x yerine x_1 yazılırsa; $\forall y\in I$ ve $\forall\alpha,\beta\in\Gamma$

$$d_2(x_1)\alpha\, y\,\beta\, D_1(d_2(x_1),d_2(x_1),x_1)+D_1(d_2(x_1),d_2(x_1),x_1)\alpha\, y\,\beta\, d_2(x_1)=0$$

olur. Varsayımdan ve M asal Γ-halka olduğundan $d_2(x_1) = 0$'dır. Bundan dolayı; $D_1(d_2(x_1),d_2(x_1),x_1) = D_1(0,0,x_1) = 0$ olur. Bu ise varsayımla çelişir. O halde, $\forall x\in I$ $D_1(d_2(x),d_2(x),x) = 0$'dır. Böylece, Teorem 3.9'dan $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ 'dır.

KAYNAKLAR

[1] Barnes, W. E. , 1966, *On the Γ-Rings of Nobusowa*: Pacific J. of Math., Vol. 18, No: 3, 411-422

[2] Kyuno, S. , 1977, *On the Semi-Simple Gamma Rings*: Tohoku Math. J., Vol. 29, 217-225

[3] Kyuno, S. , 1978, *On Prime Gamma Rings*: Pacific J. of Math., Vol. 25 (1), 185-190

[4] Luh, J. , 1968, *On Primitive Gamma Rings with Minimal One-Sided İdeals*: Osaka J. Math., Vol. 5, 165-173

[5] Luh, J. , 1970, *The Structure of Primitive Gamma Rings*: Osaka J. Math., Vol. 7, 267-274

[6] Maksa, Gy, 1980, *A Remark on Symmetric Bi-Additive Functions Having Nonnegative Diagonalization*: Glasnik Math., Vol. 15 (35), 279-282

[7] Maksa, Gy, 1987, *On the Trace of Symmetric Bi-Derivations*: C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. 9, 303-307

[8] Öztürk, M. Ali ve Sapancı, M. , 1997, *Ortogonal Symmetric Bi-Derivation on Semi-Prime Gamma Rings*: Hacettepe Bul. of Sci. and Engineering, Series B, Vol. 26, 31-46

[9] Öztürk, M. Ali, 1999, *Permuting Tri-Derivations in Prime and Semi-Prime Rings*: East Asian Math. J., Vol. 15 (2), 177-190

[10] Öztürk, M. Ali, Sapancı, M. , Soytürk, M. and Kyung Ho Kim, 2000, *Symmetrik Bi-Derivations on Prime Gamma Rings*: Scientiae Mathematicae, Vol. 3 (2), 273-281

[11] Öztürk, M. Ali, Young Bae Jun and Kyung Ho Kim, 2001, *Orthogonal Traces on Semi-Prime Gamma Rings*: Scientiae Mathematicae Japonicae, Vol. 53 (3), 495-501, : e4, 423-429

[12] Sapancı, M. , Öztürk, M. Ali and Young Bae Jun, 1999, *Symmetric Bi-Derivations on Prime Rings*: East Asian Math. J., Vol. 15 (1), 105-109

[13] Soytürk, M. , 1994, *Türevli Halkalarda Bazı Genelleşmeler*: Cum. Üniv. Fen-Bil. Enst. Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi

[14] Soytürk, M. , 1994, *The Commutative in Prime Gamma Rings with Derivation*: Tr. J. of Math., Vol. 18, 149-155

[15] Vukman, J. , 1989, *Symmetric Bi-Derivations on Prime and Semi-Prime Rings*: Aeqationes Math., Vol. 38, 245-254

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Sivas'ın Gemerek ilçesine bağlı Çepni Belediyesi'nde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini doğduğu yerde bulunan okullarda 1996 yılında tamamladı. Liseyi bitirdiği yıl C. Ü. Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümünü kazandı ve 2001 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl, C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nün açtığı Matematik Yüksek Lisans programını kazandı. Ayrıca, Sivas Divriği Cürek Lisesi'ne de Matematik Öğretmeni olarak ataması yapıldı. 2003-2004 eğitim ve öğretim yılının başında tayin olduğu Sivas Merkez Alparslan İlköğretim Okulu'nda öğretmenliğine devam etmektedir.