171226

HAUSDORFF OPERATÖRÜNÜN
SPEKTRUMU ÜZERİNE

Nuh DURNA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2005

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# HAUSDORFF OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU ÜZERİNE

Nuh DURNA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2005

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Eşref ORUCOV

Üye : Yrd. Doç. Dr. Bünyamin AYDIN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM M. Mustafa

Üye :

Üye :

**ONAY**

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

15.09.2005

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Rauf AMİROV

R. Mumetçeğ

T.C. CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1973

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

## İÇİNDEKİLER

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HAUSDORFF OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU ÜZERİNE

Nuh DURNA
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd.Doç.Dr.Mustafa YILDIRIM

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

1. Bölümde temel tanım ve teoremler verilerek $H^p$ ve $A^p$ uzayları kısa şekilde tanıtılmaktadır.

2. Bölümde lineer operatörlerin yarı grupları tanımlanmıştır ve $\ell^p$, $c_0$, $c$, $H^p$ ve $A^p$ dizi uzayları üzerinde $T_a$ yarı gruplarının araştırılması; $\ell^p$, $H^p$ ve $A^p$ dizi uzayları üzerinde ise $S_a$ yarı gruplarının araştırılması yer almaktadır.

3. Üçüncü bölümde integral operatörü ile üretilen Hausdorff operatörlerinin norm tahmini ve spektrumu incelenmiştir

**Anahtar kelimeler:** Cesàro Operatörü, $p-$Cesàro Operatörü, Gamma Matrisleri, Euler Matrisleri, Hölder Matrisleri, Hausdorff Matrisleri

**SUMMARY**

Msc Thesis

ON THE SPECTRUM OF THE HAUSDORFF OPERATOR



Nuh DURNA

Graduate School of Natural and Applied

Science of Department of Mathematics

Advisor: Yrd.Doç.Dr.Mustafa YILDIRIM



This thesis consists of three sections.

In section 1, it has given elementary definitions and theorems and has identified the space $H^p$ ve $A^p$ shortly.

In section 2, it has defined semigroups of linear operators. Moreover it has investigated semigroup $T_a$ on the spaces $\ell^p$, $c_0$, $c$, $H^p$ and $A^p$ and has investigated semigroup $S_a$ on $\ell^p$, $H^p$ and $A^p$.

In section 3 it has investigated the norm estimade and spectrum of Hausdorff Operators generated with integral operators.



**Keywords:** Cesaro Operator, $p-$Cesaro Operator, Gamma Matrices, Euler Matrices, Hölder Matrices, Hausdorff Matrices

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmam sırasında beni aydınlatan danışman hocam sayın Yrd.Doç.Dr.Mustafa YILDIRIM'a çalışmam sırasında yardımları esirgemeyen Bölüm Başkanımız Prof.Dr.Rauf AMİROV'a ayrıca bölüm hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Nuh DURNA

# GİRİŞ

1920 lerden beri sonsuz matrislerin sınıfları araştırılmaktadır. Bu tezde Hausdorff matrislerin bazı dizi uzayları üzerinde sınırlı bir lineer operatör olup olmadığını inceleyen, operatör normunu belirleyen veya operatör norm tahmini ile ilgillenen makaleler derlenmiştir. Ayrıca Hausdorff matrislerinin spektrumu ile ilgili makaleler derlenmiştir.

İlk olarak [**28, 1921**] de Hausdorff'un kendisi Hausdorff matrislerini tanımlamış; $c_0$ ve $c$ dizi uzayları üzerinde sınırlı olduğunu göstermiş ve operatör normu için bir sınır bulmuştur. Hardy, Brown-Halmos-Shields, Wenger, Reade ve çeşitli yazarlar özel Hausdorff matrislerinin çeşitli özelliklerini incelemişlerdir. Yalnızca Rhoades in bu konuda 1955 li yıllardan sonra 100 ün üzerinde makalesi bulunmaktadır.

Görüldüğü gibi bu konuda bir çok çalışma vardır. Biz bunlardan sadece norm hesabı(tahmini) ve spektrumla ilgili olan makaleleri inceledik.

Bazı özel Hausdorff matrislerinin spektrumları Brown-Halmos-Shields, Wenger, Reade, Rhoades ve diğer yazarlar tarafından incelenmiştir. Bunlardan birini Coşkun Yüksek Lisans Tezinde incelemiştir. Biz bunları yalnızca ifade edeceğiz.

Siskakis $C_1$ Cesàro matrisinin $H^p$ ve $A^p$ uzayları üzerindeki sınırlarını ve spektrumlarını belirlemiştir.

Uygulamada Hausdorff matrislerinin spektrumları iki şekilde belirlenir.

1.si $c_0$, $c$ ve $\ell^p$ BK-uzayları üzerinde Hausdorff matrislerinin spektrumları hesaplanırken önce eşlenik operatörünün eigendeğerleri ve spektrumları belirlenir, buna bağlı olarak operatörün kendisinin spektrumu belirlenir.

2.si ise lineer operatörlerin yarı grupları kullanılarak operatör normunun ve spektrumunun belirlenmesidir. Bu metod daha yenidir. $H^p$ ve $A^p$ uzaylarında norm, fonksiyonun Taylor katsayıları dizisi yardımıyla verilir. Bu uzaylarda operatör normunun hesabı oldukça karışıktır. Bu çalışmalar 1987 de Siskakis ile başlamıştır.

Genel BK-uzaylarında Hausdorff matrislerinin bir teorisi verilmiş ve bu teori $\ell^p$, $c_0$, $c$, $H^p$ ve $A^p$ özel BK-uzaylarında yeni sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır. Bu tezde Hardy, Rhoades ve Siskakis'in tahminleri sistematik olarak verilmiştir.

İlk bölümde temel tanım ve Teoremler yer almaktadır ve $H^p$ ve $A^p$ uzayları kısa şekilde tanıtılmaktadır.

İkinci bölümde lineer operatörlerin yarı grupları tanımlanmıştır ve $\ell^p$, $c_0$, $c$, $H^p$ ve $A^p$ BK uzayları üzerinde $T_a$ yarı gruplarının araştırılması; $\ell^p$, $H^p$ ve $A^p$ BK uzayları üzerinde ise $S_a$ yarı gruplarının araştırılması yer almaktadır. Bölümün kalan kısmında Rudolf'un çalışmalarına yer verilmiştir. Bu kısımdaki bir çok Teorem Rudolf'un eseridir. Burada Gamma matrisleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise integral operatörü ile üretilen Hausdorff operatörlerinin norm tahmini ve spektrumu incelenmiştir.

# BÖLÜM 1

## TEMEL TANIM VE TEOREMLER

### 1.1.Dizi Uzayları :

Bu Bölümde 2. ve 3. Bölümde kullanacağımız temel kavramlar ve işaretlemeleri vererek bazı hazırlıklar yapacağız. BK-uzayları ve sonsuz bir matris yardımıyla lineer matris dönüşümlerinin tanımını vereceğiz. Bunun yanında çalışma boyunca, $\ell^p$, $c_0$, $c$ dizi uzayları üzerinde düşünülen $\alpha$ parametreli Euler matrislerinin ve transpozlarının norm tahminleri verilecektir. Birim çember üzerindeki holomorf fonksiyonların $H^p$ uzayına, fonksiyonun Taylor katsayıları dizisi ile bakıp, bir dizi uzayı olarak düşüneceğiz. $H^p$ üzerindeki $\alpha$ parametreli transpoze Euler matrislerinin incelenmesinde çarpım operatörlerini kullanılacağız. Aynı şekilde $\alpha$ parametreli Euler matrislerini $A^p$ uzayları üzerinde göz önüne alarak benzer ifadeleri tekrar edeceğiz.

**Tanım1.1.1(Lineer Operatör):** $X$ ve $Y$ lineer uzaylar olsun. Her $x, y \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$(veya $\mathbb{R}$) için

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \tag{1.1.1}$$

özelliğini gerçekleyen $T : X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna *Lineer Operatör* (veya *Lineer dönüşüm* ) denir. $X$ uzayından $Y$ uzayı içine tanımlı bütün lineer operatörlerin cümlesi $L(X, Y)$ ile gösterilir.

**Tanım1.1.2 (Sınırlı Lineer Operatör):** $X$ ve $Y$ normlu uzaylar ve $T : X \longrightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için; $\| T(x) \| \leq M \| x \|$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa $T$ operatörüne $X$ uzayından $Y$ uzayı içine tanımlı bir *Sınırlı Lineer Operatör* denir. $X$ uzayından $Y$ uzayı içine bütün sınırlı lineer operatörlerin cümlesi $B(X, Y)$ ile gösterilir. Eğer $X = Y$ ise $B(X, X)$ yerine kısaca $B(X)$ yazılır.

Bir $T \in B(X,Y)$ için $T$ nin normu

$$\| T \| := \sup_{x \neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} \tag{1.1.3}$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 1.1.3:** $X$ ve $Y$ normlu uzaylar ise $B(X,Y)$ noktasal işlemlerle ve (1.1.3) ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır ve ayrıca $Y$ bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır. ( [**7, sh.105**] )

**Teorem 1.1.4:** $X$ bir Banach uzayı olsun. $B(X)$ deki çarpma işlemi her $S,T \in B(X)$ için $(ST)(x) = S(T(x))$ şeklinde tanımlanırsa $B(X)$ birimli bir Banach Cebiridir. Bu birim $I : X \to X \quad (I(x) = x)$ özdeşlik dönüşümüdür. ( [**7, sh.107**] )

Bu çalışma içerisinde ele alınan vektör uzayları yanlız $\mathbb{C}$ yapısı içindeki vektör uzaylarıdır.

**Tanım 1.1.5(Lokal Konveks Uzay):** 0 ın her komşuluğunda 0 ı içeren bir konveks komşuluğa sahip olan lineer topolojiye *lokal konveks uzay* denir.

**Tanım 1.1.6(Freched Uzayı):** Tam metrik vektör uzayına *Freched uzayı* denir.

**Tanım 1.1.7(Dizi Uzayları):** Kompleks sayıların bütün dizilerinin kümesini

$$w := \mathbb{C}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_k) \mid x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, k \longmapsto x_k := x(k)\}$$

ile göstereceğiz. $w$ bileşenlerine göre tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. $w$ nın alt uzayları, dizi uzayları olarak adlandırılır. Eğer $w$ koordinatsal yakınsaklığın topolojisi ile donatılırsa $w$ boş olmayan bir lokal konveks Freched uzayı olur. Bunun yanında koordinat yakınsaklığın topolojisi

$$P := \{q_j \mid j \in \mathbb{N} \text{ ve } q_j : w \longrightarrow \mathbb{R}, (x_k) \longrightarrow |x_j|\} \tag{1.1.4}$$

yarınorm ailesi yardımıyla üretilir. $\mathbb{C}$ nin topolojisi yardımıyla $w = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ üstündeki indirgenmiş çarpım topolojisi

$$d(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \qquad (x, y \in w)$$

metriği ile üretilir.

Sınırlı diziler uzayını $\ell^\infty$, yakınsak diziler uzayını $c$, sıfıra yakınsak diziler uzayını $c_0$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere modülünün p.inci kuvvetleri yakınsak seri oluşturan diziler uzayını $\ell^p$ ile göstereceğiz. Yani;

$$\begin{aligned} \ell^\infty &:= \{x = (x_n) \mid sup_n \mid x_n \mid < \infty\} \\ c &:= \{x = (x_n) \mid lim_n x_n = m \ \ , \text{mevcut}\} \\ c_0 &:= \{x = (x_n) \mid lim_n x_n = 0\} \\ \ell^p &:= \{x = (x_n) \mid \textstyle\sum_n \mid x_n \mid^p < \infty\} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

dir. $c$ , $c_0$ ve $\ell^\infty$ uzayları $\| x \|_\infty = sup_n \mid x_n \mid$ normuyla, $\ell^p$ uzayı $\| x \|_p = (\sum_n \mid x_n \mid^p)^{\frac{1}{p}}$ normuyla birlikte birer Banach uzayıdırlar. Bu uzayların sürekli dualleri ise;

$$c' = c_0' \cong \ell^1 \ , \ell^{1'} \cong \ell^\infty \ \text{ ve } \ \ell^{p'} \cong \ell^q \ , (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

dir.

Ayrıca $\ell^1$ , $c$, $c_0$ yansımalı uzay değildir fakat $p > 1$ için $\ell^p$ bir yansımalı uzaydır.

**1.2.Matris Dönüşümleri:**

Şimdi dizi uzaylarının özel bir sınıfını tanımlayalım.

**Tanım 1.2.1(K-Uzayı, FK-Uzayı):** $(X, P)$ bir lokal konveks dizi uzayı olsun. Eğer $i : X \to w$ , $x \mapsto i(x)$ içerme dönüşümü sürekli ise $(X, P)$ ye *koordinat uzayı*, kısaca *K-uzayı* denir. Eğer $(X, P)$ bir Freched uzayı ve koordinat uzayı ise $(X, P)$ ye *FK-uzayı* ve eğer $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı ve K-uzayı ise $(X, \|.\|)$ ye *BK-uzayı* denir.

**Lemma 1.2.2:** $(X, P)$ bir lokal konveks uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(a) $(X, P)$ bir K-uzayıdır.

(b) Her $j \in \mathbb{N}$ için bir $M_j > 0$ ve

$$|x_j| \leq M_j \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \qquad , \forall x \in X \tag{1.2.1}$$

özelliği ile $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \in P$ vardır.

(c) Her $j \in \mathbb{N}$ için $\pi_j : X \longrightarrow \mathbb{C}$ , $(x_k) \mapsto x_j$ izdüşümleri süreklidir.

**Tanım 1.2.3(AK-Uzayı):** $(X, P)$ bir lokal konveks dizi uzayı olsun. Bu durumda eğer $X$,

$$\Phi := \{x = (x_k) \in w : \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0 \text{ için } x_k = 0\} \tag{1.2.2}$$

sonlu dizilerin kümesini içeriyorsa ve her $x = (x_k) \in X$ için

$$x^{[n]} := \sum_{k=0}^{n} x_k \mathrm{e}^k \tag{1.2.3}$$

$x$ e yakınsaksa $(X, P)$ ye *AK-uzayı* denir. Burada $\mathbf{e}^k := (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ , $k$. yeri 1 ve diğer elemanları 0 olan bir dizidir.

Bu çalışmanın önemli tanımlarından olan lineer dönüşümlerin matris dönüşümlerini vereceğiz.

**Tanım 1.2.4(Matris dönüşümleri):** Bir matris dönüşümünün, $c_0$ , $c$ , $\ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ gibi dizi uzayları üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüm belirlemesi için gerekli ve yeterli koşullar bilinmekte olup, bunlar bu kısımda ispatsız olarak verilecektir. $A = (a_{nk})$ , $(n, k = 0, 1, 2, ...)$ kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Verilen bir $x = (x_n)$ dizisi için

$$y_n := ([Ax]_n) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \quad , \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{1.2.4}$$

mevcut ise $Ax$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer $X$ ve $Y$, $w$ nın iki altcümlesi olmak üzere her $x \in X$ için $(A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcut ve $(A_n(x)) \in Y$ ise $A$ matrisi $X$ den $Y$ ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. Toplamı veya limiti koruyan matrislerin sınıfı ise $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Eğer $A \in (c, c)$ ise $A$ ya *konservatif*, $A \in (c, c; p)$ ise $A$ ya *regüler matris* denir. (1.2.4) serisi her n için yakınsak olacağından matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır.

**Örnek1.2.5:** Bir $x = (x_n)$ dizisini, onun aritmetik ortalaması olan

$$y = y_n = \frac{x_0 + x_1 + ... + x_n}{n + 1}$$

dizisine dönüştüren operatöre Cesàro operatörü denir ve $(C,1)$ veya $C_1$ ile gösterilir. Açıkça bu operatöre karşılık gelen matris

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.2.5}$$

ile verilir. Diğer önemli matris ise

$$C_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2^p} & \frac{1}{2^p} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \frac{1}{3^p} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

p-Cesàro matrisidir $(p \geq 1)$.

Ayrıca $(H,1) = \left(h_{nk}^{(1)}\right) = (C,1)$ aritmetik ortalama ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(H,m) = \left(h_{nk}^{(m)}\right) = \left(h_{nk}^{(1)}\right)\left(h_{nk}^{(m-1)}\right)$ biçiminde tanımlanan matrise *Hölder matrisi* denir. Yani; Hölder matrisi $(H,m) = (C,1)^m$ dir.

**Teorem 1.2.6:** $(X,P)$ bir AK-uzayı, $(Y,Q)$ bir K-uzayı ve $A \in B(X,Y)$ olsun. Bu durumda $A$ bir matris dönüşümüdür ve $(a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ matrisinin katsayıları

$$a_{nk} = \pi_n\left(Ae^k\right) = \left[Ae^k\right]_n \qquad (n,k \in \mathbb{N}) \tag{1.2.6}$$

ile hesaplanır.

**İspat:** $x = (x_k) \in X$ olsun. $(X,P)$ bir AK-uzayı olduğundan $(X,P)$ içindeki $\sum_{k=0}^{\infty} x_k e^k$ serisi $x$ e yakınsaktır ve $A \in B(X,Y)$ olduğundan

$$Ax = \sum_{k=0}^{\infty} x_k A e^k$$

geçerlidir. $(Y,Q)$ bir K-uzayı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için Lemma 1.1.2(c) den $\pi_n : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ izdüşümü süreklidir. Buradan herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$[Ax]_n = \pi_n(Ax) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n\left(Ae^k\right) x_k$$

elde edilir. $a_{nk} := \pi_n\left(Ae^k\right) \qquad n,k \in \mathbb{N}$ alınarak istenilen, tanımdan elde edilir.

**Teorem 1.2.7:** $A \in B(\ell^\infty)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty \tag{1.2.7}$$

olmasıdır. ( [**43, sh.174**] )

**Teorem 1.2.8:** $A \in B(\ell^1)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\| A \|_{\ell^1} := sup_k \sum_n | a_{nk} | < \infty \tag{1.2.8}$$

olmasıdır. ( [**43, sh.167**] )

**Teorem 1.2.9:** $A \in B(c_0)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

**(i)** $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty$

**(ii)** $lim_n a_{nk} = 0$ (her sabit k için )

özelliklerinin gerçeklenmesidir. ( [**43, sh.220**] )

**Teorem 1.2.10(Kojima-Schur):** $A \in B(c)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

**(i)** $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k | a_{nk} | < \infty$

**(ii)** $lim_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p$ ( her sabit p çin )

özelliklerinin gerçeklenmesidir. ( [**43, sh.170**] )

**Tanım 1.2.11(Toplanabilirlik Alanı):** $A = (a_{nk}), n, k = 0, 1, 2, ...$ kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Bu durumda

$$c_A := \{x \in w : Ax \in c\} \tag{1.2.9}$$

cümlesine $A$ matrisinin *yakınsaklık alanı* (veya *toplanabilirlik alanı)* denir.

**Tanım 1.2.12(Tutarlılık):** Eğer her $x \in c_A \cap c_B$ için $\lim Ax = \lim Bx$ ise $A$ ve $B$ matrislerine tutarlıdır denir.

Şimdi normal matrisleri tanımlayacağız ve 1.1.6 nın anlamı içinde (eşlenik) normal matrislerden anlaşılan matris dönüşümüne bakacağız.

**Tanım 1.2.13(Normal Matris):** Eğer $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ve her n için $a_{nn} \neq 0$ ise bu durumda $A$ ya bir *normal matris* (veya *üçgen matris*) denir.

**Tanım 1.2.14(Satır sonlu matris):** Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için bir $k_n \in \mathbb{N}$ sayısı $\forall k \geq k_n$ iken $a_{nk} = 0$ ifadeleri ile mevcut ise $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli sonsuz matrise *satır sonlu matris* denir.

**Matris çarpımı, ters, satır sonlu matrisler:** Normal bir $A$ matrisi ve herhangi bir $b \in w$ için $Ax = b$ eşitliği çözülebilir.

1) $A : w \to w$ matris dönüşümü bijektiftir.

2) Ve dolayısıyla $BA$ ve $AB$ çarpımı mevcut ve

$$AB = BA = I$$

olacak şekilde normal bir $B$ matrisi vardır. Bu çarpımda, eğer elde edilen seriler yakınsaksa çarpımın mevcut olduğu söylenir. Ayrıca $B$ ye $A$ nın tersi denir ve $A^{-1} := B$ biçiminde gösterilir.

Üstelik $A$ ve $B$ satır sonlu matrislerin matris çarpımının her zaman var olduğu ve her $x \in w$ için

$$(AB)\,x = A\,(Bx) \tag{1.2.10}$$

eşitliğinin geçerli olduğu yakınsak seriler yardımıyla kolayca görülür.

(1.2.10) yardımıyla normal bir $A$ matrisinin $A^{-1}$ tersininde matris dönüşümünün mevcut olması ve matris dönüşümünün $A$ nın ters dönüşümü olduğu yorumlanır çünkü normal matrisler satır sonlu matrislerdir.

**Teorem 1.2.15:** $X$ ve $Y$ iki dizi uzayı ve $A\,(X) \subset Y$ olmak üzere $A$ bir normal matris ve $\forall y \in Y$ için $Ax = y$ ile $x \in X$ mevcut olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

(a) $A : X \to Y$ bijektif bir matris dönüşümüdür.

(b) $A^{-1} : Y \to X$ ters dönüşümü $A^{-1}$ normal matrisi ile bir matris dönüşümüdür.

**Tanım 1.2.16(Transpoze, Transpoze normal matrisler):** $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ bir sonsuz matris olsun. Bu durumda $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a^*_{nk} = a_{kn}$ ifadesi ile $A^t = (a^*_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ matrisine $A$ nın *transpozu* denir. Kolayca gösterilebilirki $A^t$

transpoze matrisi için $\forall b \in \Phi$ de bir $x \in \Phi$ ile $A^t x = b$ ifadesi vardır. Buradan aşağıdaki ifadeler elde edilir.

- $A^t = \Phi \rightarrow \Phi$ matris dönüşümü bijektiftir.

- Normal bir $B$ matrisi vardır öyleki $A^t B^t$ ve $B^t A^t$ çarpımları mevcuttur ve $A^t B^t = B^t A^t = I$ geçerlidir. Ayrıca 1.1.9 dan $A$ nın tersi $B$ dir; yani $A^{-1} = B$ dir. Bu durumda $B^t, A^t$ nin ters matrisi olarak nitelendirilir ve $(A^t)^{-1} = B^t$ biçiminde gösterilir. $A^{-1} = B$ ile birlikte son ifadeden

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

elde edilir.

Yakınsak seriler yardımıyla transpoze satır sonlu $A$ ve $B$ matrislerin çarpımının daima mevcut olduğunu ve her $x \in \Phi$ için $(A^t B^t)\, x = A^t\,(B^t x) = x$ eşitliğinin geçerli olduğunu görürüz. $A$ transpoze normal matrisi için yukarıdaki denklemden $(A^t)^{-1}$ tersinin de $\Phi$ den $\Phi$ ye matris dönüşümü olduğu ve $A^t$ matris dönüşümünün ters dönüşümü olduğu yorumlanır. Bundan 1.1.5 ile aşağıdaki ifade elde edilir.

**Teorem 1.2.17:** $(X, P)$ , $\Phi$ yi içeren bir K-uzayı, $(Y, Q)$ bir AK-uzayı ve $A$ bir normal matris olsun. Ayrıca $A^t : X \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü $(A^t)^{-1}$ ile bijektif olsun. Bu durumda $(A^t)^{-1} : Y \longrightarrow X$ ters dönüşümü $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ ile bir matris dönüşümüdür.

**Tanım 1.2.18(Matrisin Karakteristiği ):** $A \in B(c)$ olsun. Bu durumda $a_k := lim_n a_{nk}$ (her sabit k için) olmak üzere $a_k = 0$ ise $A$ ya *çarpımsal matris* denir.

$$\chi(A) := \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k a_k \tag{1.2.11}$$

sayısına ise $A$ nın *karakteristiği* denir.

**Tanım 1.2.19:** $c_A = c$ olan matrise *Mercerian Matris* denir.

**Tanım 1.2.20( $M$ tipide matris):** $A$ bir matris olmak üzere $A \in B\,(c)$ olsun. Bu durumda eğer $tA = 0$ ın yanlızca $t \in \ell$ , $t = 0$ çözümü varsa $A$ ya $M$ tipindedir denir.

**Teorem 1.2.21:** Bir konservatif normal $A$ matrisinin Mercerian olması için gerekli ve yeterli koşul $A^{-1}$ matrisinin konservatif olmasıdır. ([**81, sh.14**])

**Teorem 1.2.22:** $A \in B(\ell^\infty) \cap B(\ell^1)$ ise $1 < p < \infty$ için $A \in B(\ell^p)$ dir. ([**43, sh.170**])

**Teorem 1.2.23:** $A \in B(c)$ olsun. Eğer $A$ , (2.2.5) özelliğini gerçekleyen bir $A^{-1}$ inverse sahip ise $A^{-1} \in B(c)$ dir. ([**81, sh.92**])

**Teorem 1.2.24:** $A \in (c, c; p)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

**(i)** $\|A\|_\infty := sup_n \sum_k \mid a_{nk} \mid < \infty$

**(ii)** $lim_n a_{nk} = 0$ (her sabit $k$ için)

**(iii)** $lim_n \sum_k a_{nk} = 1$

özelliklerinin gerçeklenmesidir. ( [**43, sh.165**] )

**Teorem 1.2.25:** $1 < p < \infty$ , $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun ve her $n, k$ için $b_{nk} > 0$ olmak üzere

$$\sup_n \sum_k \mid a_{nk} \mid (b_{nk})^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ve

$$\sup_k \sum_n \mid a_{nk} \mid (b_{nk})^{-\frac{1}{q}} < \infty$$

özellikleri gerçeklensin. Bu durumda $A \in B(\ell^p)$ dir. Dolayısıyla $B(c)$ , $B(c_0)$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $B(\ell^p)$ yukarıda teoremlerde verilen normlarıyla birlikte birer Banach cebiridir.

**Lemma 1.2.26:** $X(= c_0 , c , \ell^p , \ell^\infty)$ ve $Y(= c_0 , c , \ell^p , \ell^\infty)$ olmak üzere her sınırlı $T : X \to Y$ lineer operatörü kompleks terimli bir sonsuz matris ile verilebilir. ([**81**])

**Lemma 1.2.27:** $T : c_0 \to c_0$ bir lineer dönüşüm ve $T' : \ell^1 \to \ell^1$ , $T'g = g \circ T$ , $g \in c_0' \cong \ell^1$ ise bu durumda $T$ ve $T'$ Lemma 2.2.17 den bir matris gösterimine sahiptir ve ayrıca $T' : \ell^1 \to \ell^1$ , $T$ nin transpozudur. ([**81, sh.266**])

**Lemma 1.2.28:** $T : c \to c$ bir lineer dönüşüm ve $T' : \ell^1 \to \ell^1$ , $T'g = g \circ T$ , $g \in c' \cong \ell^1$ ise $T$ ve $T'$ birer matris gösterimine sahiptirler. Ayrıca $T' : \ell^1 \to \ell^1$

dönüşümü,

$$
T' = A' = \begin{pmatrix} \chi(\lim_A) & (\vartheta_n)_{n=0}^{\infty} \\ (a_k)_{k=0}^{\infty} & T^t \\ & \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \chi(lim_A) & \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \dots \\ a_0 & a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots \\ a_1 & a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots \\ a_2 & a_{02} & a_{12} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
$$

ile verilir. Burada

$$
\chi(lim_A) = lim_A \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{\infty} lim_A \mathrm{e}^k, \tag{1.2.13}
$$

$$
\vartheta_n = \chi(\pi_n \circ T), \tag{1.2.14}
$$

$$
a_{nk} = \pi_n(T(\mathrm{e}^k)) = (T(\mathrm{e}^k))_n \tag{1.2.15}
$$

anlamındadır. ( **[81, sh.267]** )

**Teorem 1.2.29(Gaus Testi):** $\sum a_n$ pozitif serisi verilsin. $\theta_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sınırlı bir büyüklük olmak üzere

$$
\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \tag{1.2.16}
$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda

**(1)** $\lambda > 1$ veya $\lambda = 1$ , $\mu > 1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

**(2)** $\lambda < 1$ veya $\lambda = 1$ , $\mu \leq 1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

**Tanım 1.2.30(Blasche çarpımı):** $0 < |z_n| < 1$ , $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $|z| < 1$ eşitsizliğini sağlayan $z$ noktaları için

$$
B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} . \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} . z_n} \tag{1.2.17}
$$

biçiminde tanımlanan çarpıma *Blasche çarpımı* denir. Blasche çarpımının yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) \tag{1.2.18}$$

serisinin yakınsak olmasıdır.

**Teorem 1.2.31(Banach Steinhous):** $X$ bir Banach uzayı ve $Y$ bir normlu uzay olsun. $(A_n)$ , $X$ den $Y$ içine sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi ve $X$ üzerinde

$$\limsup_n \|A_n(x)\| < \infty$$

ise bu durumda $\sup_n \|A_n\| < \infty$ dur. ([80])

**1.3.Sınırlı Lineer Operatörün Spektrumu**

Bu bölümde sınırlı lineer operatörlerin Banach cebiri içindeki bir elemanın spektrumu ve bazı özellikleri verilmiştir.

$X$ bir Banach uzayı olsun. Bir $T \in B(X)$ operatörünün spektrumu Banach cebiri içindeki bir elemanın spektrumu gibi

$$\sigma(T,X) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ , } B(X) \text{ de tersinir degil}\} \tag{1.3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla

$$\rho(T,X) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ , } B(X) \text{ de tersinir}\} = \mathbb{C} - \sigma(T,X) \tag{1.3.2}$$

dır.

Daha açık olarak eğer $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut, sınırlı ve $X$ içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına, $T$ dönüşümünün bir *Regüler* değeri, $T$ nin bütün regüler değerlerinin oluşturduğu cümleye de $T$ dönüşümünün *resolvent cümlesi* denir ve $\rho(T,X)$ ile gösterilir.

Böylece $\sigma(T,X) = \mathbb{C} - \rho(T,X)$ olduğundan, eğer $\lambda \in \sigma(T,X)$ ise

(1) $(\lambda I - T)^{-1}$ mevcut,

(2) $(\lambda I - T)^{-1}$ sınırlı,

(3) $(\lambda I - T)^{-1}$ $X$ içinde yoğun bir cümle üzerinde tanımlı

özelliklerinden en az biri gerçeklenmez.

Eğer $X$ bir Banach uzayı ise $\rho(T, X)$ , $\mathbb{C}$ nin açık bir altcümlesi ve dolayısıyla $\sigma(T, X)$, $\mathbb{C}$ nin kapalı bir altcümlesidir.

**Tanım 1.3.1( Eigendeğeri , Eigenvektör ):** $T : X \to X$ bir lineer operatör olsun. Eğer $Tx = \lambda x$ olacak biçimde $X$ de bir $x \neq \theta$ elemanı varsa $\lambda$ kompleks sayısına $T$ nin bir *eigendeğeri* ve $x \in X$ elemanına da $\lambda$ ya karşılık gelen bir *eigenvektör* denir. Bir $T$ operatörünün bütün eigendeğerlerinin cümlesini $\sigma_p(T, X)$ ile göstereceğiz.

Açık olarak $\sigma_p(T, X) \subseteq \sigma(T, X)$ dir.

**Teorem 1.3.2:** $X \neq \{\theta\}$ sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T : X \to X$ lineer operatör olsun. Bu durumda $\sigma_p(T, X) = \sigma(T, X)$ dir.

Eğer $X$ sonsuz boyutlu uzay ve $T \in B(X)$ ise $\sigma_p(T, X) \subset \sigma(T, X)$ bağıntısı genellikle kesin bir bağıntıdır.

Açık olarak $\lambda \in \sigma_p(T) \Longleftrightarrow \lambda I - T$ dönüşümü 1-1 değildir. ( [**7, sh.230**] )

**Teorem 1.3.3:** $X \neq \{\theta\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T', X') \subseteq \sigma(T, X)$ dir. Eğer $X$ bir Banach uzayı ise $\sigma(T', X') = \sigma(T, X)$ dir. ( [**7, sh.242**] )

## 1.4 Hausdorff Matrisleri

Bu çalışmanın temel konusu olan Hausdorff matrislerinin kuruluşuna geliyoruz. İleri fark operatörü ve fark matrisi hakkındaki klasik girişi Hardy [**26, sh.247**] den takip edeceğiz.

**1.4.1 (İleri fark operatörü, fark matrisi):** $x = (x_k) \in w$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^n x_k$ ileri fark operatörü $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^0 x_k := x_k \text{ ve } \Delta^n x_k = \Delta^{n-1} x_k - \Delta^{n-1} x_{k+1} \qquad (1.4.1)$$

biçiminde tanımlanır.

İleri fark operatörünün bir kaç terimini yazalım

$$\begin{aligned}
\Delta^0 x_k &= x_k \\
\Delta x_k &= \Delta^0 x_k - \Delta^0 x_{k+1} = x_k - x_{k+1} \\
\Delta^2 x_k &= \Delta x_k - \Delta x_{k+1} = x_k - x_{k+1} - x_{k+1} + x_{k+2} = x_k - 2x_{k+1} - x_{k+2} \\
&\dots
\end{aligned}$$

biçimindedir. Tümevarım yardımıyla buradan $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^n x_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x_{k+j} \tag{1.4.2}$$

eşitsizliği elde edilir ve bununla birlikte her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^n x_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x_j$$

elde edilir.

Sonuncu eşitlik yardımıyla $w$ dan $w$ ya bir matris dönüşümü verilir. Bu normal matrise *fark matrisi denir* ve fark matrisinin girişi;

$$a_{nk} = \Delta_{nk} := \begin{cases} (-1)^k \binom{n}{k} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \tag{1.4.3}$$

biçimindedir. Biz fark matrisini $\Delta = (\Delta_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ ile göstereceğiz.

Şimdi Hausdorff matrislerini tanımlayabiliriz.

**Tanım 1.4.2 (Hausdorff matrisleri):** $p = (p_n) \in w$ dizisi verilsin. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} = p_n$ ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$ , $n \neq k$ için $a_{nk} = 0$ olmak üzere $diag\,(p_n) := (a_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ matrisini tanımlayalım. Bu durumda

$$(H, p) := \Delta diag\,(p_n)\,\Delta \tag{1.4.4}$$

biçiminde tanımlanan matrise $p$ ile üretilen *Hausdorff matrisi* denir.

**Teorem 1.4.3:** Eğer $p, q \in w$ için $pq$ ile $(p_n q_n)$ dizisini ve $p^{-1}$ ile de her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \neq 0$ olmak üzere $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)$ dizisini gösterirsek, $(H, p)$ ve $(H, q)$

Hausdorff matrisleri için yukarıdaki açıklamalar yardımıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir.

**(a)** $(H,p)=(h_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ için

$$h_{nk}:=\begin{cases}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}p_k & , \quad k\leq n\\ 0 & , \quad k>n\end{cases} \tag{1.4.5}$$

geçerlidir. $(H,p)$ , $h_{nn}=p_n$ diagonal kümenin elemanları ile bir alt üçgensel matristir.

Gerçekten de Hausdorff matrislerinin tanımından $n>k$ için,

$$\binom{n}{j}\binom{j}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}$$

olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} h_{nk} &= \sum_{j=k}^{n}(-1)^{j+k}\binom{n}{j}\binom{j}{k}p_j=\binom{n}{k}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j+k}\binom{n-k}{j-k}p_j \quad (1.4.6)\\ &= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^{i}\binom{n-k}{i}p_{i+k}=\binom{n}{k}\left(\Delta^{n-k}p\right)_k \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $i=j-k$ yazılmıştır ve $(-1)^{i+2k}=(-1)^i$ olduğu kullanılmıştır. Yani;

$$h_{nk}:=\begin{cases}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}p_k & , \quad k\leq n\\ 0 & , \quad k>n\end{cases}$$

elde edilir.

**(b)** Eğer her $n\in\mathbb{N}$ için $p_n\neq 0$ ise $(H,p)$ normaldir.

**(c)** $(H,p)+(H,q)=(H,p+q)$

**(d)** $\Delta\Delta=I$ , $\Delta^{-1}=\Delta$

Gerçekten de $p=(1,1,1,\cdots)$ olsun. Bu durumda $\Delta^0 p=1$ ve $r>0$ için $\Delta^r p=0$ dır. Böylece $h_{nn}=1$ ve $k\neq n$ için $h_{nk}=0$ dır, yani; $(H,1)=I$ dır. Böylece

$$\Delta^2=\Delta I\Delta=(H,1)=I$$

elde edilir.

**(e)** $(H,p)(H,q) = (H,pq)$ ve $(H,p)^r = (H,p^r)$ , $r = 0,1,2,\ldots$ geçerlidir. Gerçekten de

$$\begin{aligned}(H,p)(H,q) &= \Delta diag(p_n)\underbrace{\Delta\Delta}_{I} diag(q_n)\Delta \\ &= \Delta diag(p_n)\, diag(qn)\,\Delta \\ &= \Delta diag(p_n q_n)\,\Delta \\ &= (H,pq)\end{aligned}$$

**(f)** $(H,p)$ normal olsun. Bu durumda $(H,p)^{-1} = (H,p^{-1})$ geçerlidir. Gerçekten de

$$(H,p)\left(H,p^{-1}\right) \overset{\text{(e) den}}{=} \left(H,p.p^{-1}\right) = (H,1) = I$$

olur ki $(H,p)^{-1} = (H,p^{-1})$ elde edilir.

**Teorem 1.4.4:** Bütün Hausdorff Matrisleri diğer Hausdorff Matrisleri ile matrislerdeki çarpma islemine göre değişmelidir. Dolayısıyla bütün regüler Hausdorff matrisleri tutarlıdır.

**Örnek 1.4.5:** $t \in K$ sabit ve $\mu_n = t^n$ olsun. Bu durumda $\Delta\mu = (1-t)\mu$ dir. Böylece $\Delta^r\mu = (1-t)^r\mu$ ve $h_{nk} = \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$ matrisi olur.

**Örnek 1.4.6:** $\mu_n = \dfrac{1}{n+1}$ olsun. Bu durumda $\mu_n = \int_0^1 t^n dt$ dir. Böylece $h_{nk} = \int_0^1 h_{nk}(t)dt$ (burada $h_{nk}(t)$ Örnek 1.4.5'de ki gibidir)

$$h_{nk} = \int_0^1 h_{nk}(t)dt = \binom{n}{k}\int_0^1 (1-t)^{n-k}t^k dt = \frac{1}{n+1} \tag{1.4.7}$$

dir. Böylece $\mu_n = \int_0^1 t^n dt$ ile $H_\mu = (C,1)$ elde edilir. Yani; Cesáro Matrisi bir özel Hausdorff matrisidir.

**Örnek 1.4.7:** $Q$ matrisi; $Q_1 x = 0$ ve $n \geq 2$ iken $Q_n x = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$ ile tanımlansın. Bu durumda $Q$ bir Hausdorff matrisi değildir. Çünkü $Q$ , $(C\ ,1)$ ile değişmeli değildir.

**Örnek 1.4.8:** Hölder matrisleri Hausdorff matrisleridirler. Gerçekten de $\mu_n = (n+1)^{-r}$ ile $H^r = H_\mu$ dür. Bu Teorem 1.4.3 (e) ve Örnek 1.4.6 dan elde edilir.

**Teorem 1.4.9:** $\mu$ bir bire bir dizi (yani $\mu_n \neq \mu_m$) ve $A$ bir satır sonlu matris olsun. Bu durumda $A$ bir Hausdorff Matrisidir $\Leftrightarrow$ $A$ , $H_\mu$ ile değişmelidir.

**İspat:** Bunun yarısı Teorem 1.4.4 de verilmiştir. Eğer $A$ , $H$ ile değişmeli ise biz $DAHD = DHAD$ elde ederiz. $H$ için $DMD$ kullanıldığından ve $D^2 = I$ olduğundan $DADM = MDAD$ elde edilir. Buradan sadece köşegen bir matrisle $M$ nin yer değişebileceği açıktır. Böylece $DAD$ bir köşegen matristir. O, $N$ ile adlandırılırsa $D^2 = I$ olduğu kullanılarak $A = DND$ Hausdorff Matrisini elde ederiz.

(1917) W.A. Hurwitz ve L.L. Silverman $(C, 1)$ ile sadece toplanabilirlik metodlarının tutarlı olduğunu düşünmüştü. Wilansky [**81, 1.7.12**] değişme kriteri ve bunların $(C, 1)$ ile bir üstünlüğü işlendi. Bu Teorem 1.4.9 un özel bir durumudur. 1921 de F. Hausdorff; moment problemi içinde, analizin ilgilendiği durum için Hausdorff matrislerine aşağıdaki gibi giriş yaptı.

**Lemma 1.4.10:** $H = H_\mu$ olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için

**(i)** $h_{nn} = \mu_n$

**(ii)** $\sum\limits_{k=0}^{n} h_{nk} = \mu_0$

**(iii)** $h_{n0} = (D\mu)_n$

**(iv)** $\sum\limits_{k=0}^{m} h_{nk} - \sum\limits_{k=0}^{m} h_{n+1,k} = \frac{m+1}{n+1} h_{n+1,m+1}$ , $\forall m \geq 0$

geçerlidir.

**İspat:** (ii) için $H1 = DMD1 = DM\delta^0 = D(\mu_0\delta^0) = \mu_0(D\delta^0) = \mu_0 1$ Burada $D^2 = I$ ve $D$ nin 1. sütununun 1 olduğunu kullandık. $k = 0$ durumunda (1) den (iii) elde edilir. $h_{nk} = 0$ olduğunu hesaba katarsak (iv) e göre burada

$k > n$ dir. (1.4.5) den

$$\frac{h_{n+1,k}}{\binom{n+1}{k}} = (\Delta^{n-k+1}\mu)_k = (\Delta\Delta^{n-k}\mu)_k = (\Delta^{n-k}\mu)_k - (\Delta^{n-k}\mu)_{k+1}$$

$$= \frac{h_{nk}}{\binom{n}{k}} - \frac{h_{n+1,k+1}}{\binom{n+1}{k+1}}$$

elde ederiz. Bu $\binom{n}{k}$ ile çarpılır, $h_{n+1,k}$ çıkarılır ve düzenlenirse

$$h_{nk} - [(k+1)\,h_{n+1,k+1} - kh_{n+1,k}]\,/(n+1)$$

bulunur. Bu (iv) ü elde eder.

**Teorem 1.4.11:** Her negatif olmayan (reel) $H$ Hausdorff matrisi konservatiftir. Onun ilk sütunu hariç bütün sütunlarının limiti 0'dır.

**İspat:** (ii) şartı Lemma 1.4.10 dan elde edilir, (i) ve (iii) şartları ise [**81, Teorem 1.4.6**] da verilir. Yukardaki Lemmada (iv) de $m$ için tümevarımla kalan şartlar elde edilir.(Not edelim ki $\sum\limits_{k=0}^{m} h_{nk}$ , $h_{n+1,m+1} \geq 0$ olduğundan $n$ nin azalan ve negatif olmayan bir fonksiyonudur.) Şimdi Lemma 1.4.10 un (iv) şıkkından her hangi bir $r$ için ($u_n = h_{n+1,m+1}$ , $m$ sabit yazarak)

$$\sum_{n=0}^{r} \frac{u_n}{(n+1)} = \left[\sum_{k=0}^{m}(h_{0k} - h_{r+1,k})\right]/(m+1)$$

elde ederiz. Sağ tarafta $r \to \infty$ için limit alındığında ispat biter. Böylece $\sum u_n/(n+1) < \infty$ dır. $\lim u_n$ mevcut olduğundan o sıfır olmalıdır.

**Örnek 1.4.12:** $\mu = \delta^0 = (1, 0, 0, \ldots)$ olsun. Bu durumda $H$ , birinci sütunu 1 ve diğer sütunları 0 olan bir matristir.

**Tanım 1.4.13:** $H_\mu$ bir negatif olmayan matris ise $\mu$ ye total azalan dizi denir.

(1.4.5) den $\forall n$ için $(\Delta^n)\mu \geq 0$ dır. Buradan $n = 0$ için $\mu \geq 0$ ; $n = 1$ için $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots$ ; $n = 2$ için $\mu_0 - 2\mu_1 + \mu_2 \geq 0$ , $\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 \geq 0$ yani bir konvekslik şartıdır. $(3, 2, 0, 0, \ldots)$ dizisi bir total azalan dizi değildir. $\mu_n = t^n$ , $(0 < t < 1)$ ; $\mu_n = \frac{1}{n+1}$ ; $\mu_n = (n+1)^{-r}$ dizileri birer total azalan dizidir.

**Teorem 1.4.14:** Bir reel $H = H_\mu$ Hausdorff matrisi için aşağıdaki şartlar denktir.

**(i)** $H$ konservatiftir

**(ii)** $\|H\| < \infty$

**(iii)** $H$ , iki negatif olmayan Hausdorff matrisinin farkıdır.

**(iv)** $\mu$ iki total azalan dizinin farkıdır.

**İspat:** (ii) nin (iv) ü içerdiğini göstermek yeterlidir. Şimdi (iv) ü,

$$\Delta^n \nu > |\Delta^n \mu| \tag{1.4.8}$$

dizisinin varlığından elde edeceğiz. Burada $\alpha = \dfrac{1}{2}(\nu + \mu)$ , $\beta = \frac{1}{2}(\nu - \mu)$ dür. Biz $\mu = \alpha - \beta$ elde ederiz. $\nu$ nün inşaasına dönelim. Basit bir iddia ile $d_{nk} = (\Delta^n \mu)_k$ ile verilmiş bir $D$ matrisini düşünelim. Buradan $\mu$ yü $D$ nin bir fonksiyonu gibi elde ederiz ve basit bir tanımlama ile $\nu$ , $|D|$ nin fonksiyonudur.

Lemma 1.4.10 (iv)ün ispatındaki gibi biz $d_{nk} = d_{n+1,k} + d_{n,k+1}$ elde ederiz, yani; $D = UD + TD = (U+T)D$ burada $U$ , $T$ , $(UD)_{nk} = d_{n+1,k}$ , $(TD)_{nk} = D_{n,k+1}$ in (sembolik) operatörleridir. Böylece, her hangi bir $m$ için $D = (U+T)^m D = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} U^{m-r} T^r D$ yani; $d_{nk} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} d_{n+m-r,k+r}$ dır. Bunu takiben

$$\mu_k = (\Delta^0 \mu)_k = d_{ok} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} d_{m-r,k+r} \tag{1.4.9}$$

elde edilir. Şimdi daha önce söylediğimiz gibi, $A = |D|$ yazarız ve o, $\nu$ yü tanımlar.

$$f(m,n,k) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} a_{n+m-r,k+r} = (U+T)^m A$$

olsun. Biz Lemma 1.4.15 in ispatında $f(m,n,k)$ yı her bir $n$ , $k$ için $m$ nin artan sınırlı bir fonksiyonu olduğunu göstereceğiz. $g(n,k) = \lim f(n,n,k)$ olsun ve $\nu_k = g(0,k)$ biçiminde tanımlansın.

(1.4.8) in ispatı :

$$|(\Delta^n\mu)_k| = |d_{nk}| = \left|\sum \binom{m}{r} d_{n+m-r,k+r}\right| \leq f(n,m,k) \leq g(n,k) = (\Delta^n\nu)_k$$

dır. (Son adım Lemma 1.4.16 da hesaplanır.)

**Lemma 1.4.15:** $f(m,n,k)$ her bir $n$ , $k$ için $m$ nin artan sınırlı bir fonksiyonudur.

**İspat:** Not edelim ki $f = [(U+T)^m A]_{nk}$ ;

$$A = |D| = |UD + TD| \leq UA + TA = (U+T)A$$

dır. $U+T$ operatörü monotondur, böylece

$$(U+T)A \leq (U+T)(U+T)A = (U+T)^2 A$$

yani; $f(1,n,k) = f(2,n,k)$ vesaire. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} f(m,n,k) &= \left[(U+T)^m U^n T^k A\right]_{00} \\ &\leq \left[(U+T)^m (U+T)^{n+k} A\right]_{00} = f(m+n+k,0,0) \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. Eşitsizliği düzenlersek

$$\begin{aligned} \left[(U+T)^{n+k} A\right]_{00} &= \sum_{r=0}^{n+k} \binom{n+k}{r} a_{r,n+k-r} \geq \binom{n+k}{n} a_{nk} \\ &\geq a_{nk} = (U^n T^k A)_{00} \end{aligned}$$

dır. Son olarak $f(m,0,0) = \sum\limits_{r=0}^{m} |h_{mr}| \leq \|H\|$ elde edilir.

**Lemma 1.4.16:** $g(n,k) = (\Delta^n\nu)_k$ dır.

**İspat:** $n$ üzerinden tümevarımla ($n=0$ a tanım karşılık gelir) ilkin;

$$\begin{aligned} f(m+1,n,k) &= \left[(U+T)^m (U+T) A\right]_{nk} = [(U+T)^m A]_{n+1,k} + [(U+T)^m A]_{n,k+1} \\ &= f(m,n+1,k) + f(m,n,k+1) \end{aligned}$$

ve böylece $g(n,k) = g(n+1,k) + g(n,k+1)$ dir. Dolayısıyla tüme varım hipotezini kullanarak

$$g(n+1,k) = g(n,k) - g(n,k+1) = (\Delta^n\nu)_k - (\Delta^n\nu)_{k+1} = (\Delta^{n+1}\nu)_k$$

elde edilir.

Aşağıdaki yeni tanım bu bölüm dışında kullanılmayacaktır.

**Tanım 1.4.17:** Eğer $H_\mu$ konservatif ise $\mu$ ye konservatif ve regülerse de regüler denir. Böylece bir reel dizi konservatiftir $\Leftrightarrow$ iki total azalan dizinin farkı biçiminde yazılır.

Biz moment probleminin çözümü ile devam edeceğiz.

**Teorem 1.4.18:** Bir $\mu$ reel dizisi konservatiftir $\Leftrightarrow$ $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı bir $g$ fonksiyonu vardır ki $\mu_k = \int_0^1 t^k dg$ dır.

**İspat:** (Yeterlilik:) $g$ nin artan olduğunu kabul edelim. O halde Örnek 1.4.5 deki gibi

$$(\Delta^n \mu)_k = \int_0^1 t^k (1-t)^n dg > 0 \tag{1.4.10}$$

dır.

(Gereklilik:) $\mu$ nün artan olduğunu kabul edelim.

(1.4.9) dan $\mu_k = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} h_{m+k,k+r} / \binom{m+k}{k+r}$ , $m$ yerine $m-k$ yazarsak $m \geq k$ için

$$\mu_k = \sum_{i=k}^{m} \binom{m-k}{i-k} h_{mi} / \binom{m}{i} = \sum_{i=k}^{m} U(m,i,k) h_{mi}$$

elde ederiz. Burada $U(m,i,0) = 1$ kabulu ile $U(m,i,k) = \prod_{r=o}^{k-1} (i-r)/(m-r)$ , $1 \leq i \leq m$ biçimindedir. $\mu_k = \sum_{i=0}^{m} U(m,i,k) h_{mi}$ yazabiliriz. Çünkü $0 \leq i < k$ ise $U = 0$ dır. O halde $\mu_k = \int_0^1 v(m,t,k) dg_m$ dır. Burada $0 < t \leq 1$ için $g_m(t) = \sum_{j<mt} h_{mj}$ , $g_m(0) = 0$ ve $v(m,t,0) = 1$ ile $v(m,t,k) = \prod_{r=0}^{k-1} \left(t - \frac{r}{m}\right)\left(1 - \frac{r}{m}\right)$ dir. Bunun nedeni $i = 0, 1, \ldots$ için $t = i/m$ de $g_m$ nin $h_{mi}$ sıçramasına sahip olmasıdır. $g_m$ nin artan olduğunu da not edersek her bir sabit $h \geq 1$ için $r < k \leq m$ , $0 \leq t \leq 1$ olduğundan

$$\left|\left(t - \frac{r}{m}\right)\left(1 - \frac{r}{m}\right) - t\right| = \frac{r(1-t)}{m-r} \leq \frac{k-1}{m-k+1}$$

dır. Böylece $v(m,t,k) \overset{\text{düzgün}}{\longrightarrow} t^k$ , $\int dg_m = g_m(1) - g_m(0) = \sum_i h_{mi} \leq \|H\|$ olduğundan da $\mu_k = \int_0^1 t^k dg_m + o(1)$ , $n \to \infty$ olduğunu elde ederiz. Burada $o(1)$ , $m \to \infty$ iken miktarın$\to 0$ olduğunu gösterir.

Bu formülle biz $g_m \to g$ (bazı artan fonksiyonlar) olduğu gibi, $m \to \infty$ bir dizinin değeridir. Bu Wilansky [**81, 2.0.1**] deki gibidir. Sonuç olarak $\mu_k = \int_0^1 t^k dg$ dir.

**Teorem 1.4.19:** $\mu$ konservatif, $\mu_k = \int_0^1 t^k dg$ olsun. $H_\mu$ nun 1. sütununun limiti $g(0+) - g(0)$ dır. Böylece $H$ çarpımsaldır ($m = g(1) - g(0)$ ile) $\Leftrightarrow g$ , 0 da süreklidir.

**İspat:** $g$ nin artan olduğunu ve $g(0) = 0$ olduğunu kabul edelim. (1.4.10) dan

$$h_{n0} = \int_0^1 (1-t)^n dg \geq \int_0^\varepsilon (1-t)^n dg \geq (1-\varepsilon)^n g(\varepsilon) \to g(0^+)\ ,\ \varepsilon \to 0$$

aksine olarak $n \to \infty$ için

$$h_{n0} = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1 (1-t)^n dg \leq g(\varepsilon) + (1-\varepsilon)^n \left[g(1) - g(\varepsilon)\right] \to g(\varepsilon)$$

Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim h_{n0} \leq g(\varepsilon)$ dur. $m$ nin değerlendirilmesi Lemma 1.4.10 (ii) deki gibidir.

**Örnek 1.4.20:(i)** $[0,1)$ üzerinde $g = 0$ , $g(1) = 1$ aldığımızda $H = I$ elde edilir.

**(ii)** $g(t) = t$ ile biz $H = (C,1)$ i elde ederiz.

Biz şimdi Mercerian Teoremlerinin ürettiği Hausdorff un zarif derivasyonunu gösterelim. İlk önce $g(t) = t^a$ , $a > 0$ ile $\mu_k = \int_0^1 t^k dg = a/(k+a)$ dır. O halde Teorem 1.4.18, 1.4.19 dan $\mu$ regülerdir. Bu durumda her bir $\alpha > 0$ , $\nu = \alpha 1 + (1-\alpha)\mu$ , 1.4.3 (d) den $H_\nu = \alpha I + (1-\alpha)H_\mu$ olduğundan regülerdir. Not edelim ki $\nu_k = (\alpha k + a)/(k+a)$ dır.

**Teorem 1.4.21:** $b, c > 0$ olmak üzere $\mu_k = (bk+1)/(ck+1)$ olsun. Bu durumda $H_\mu$ regüler ve merceriandır.

**İspat:** $b = \alpha/a$ , $c = 1/a$ olarak alırsak $\mu_k = (\alpha k + a)/(k + a)$ olur ki $H_\mu$ görüldüğü gibi regülerdir ve istenilen Teorem 1.4.3 (e) ve [**81, 1.7.14**] den elde edilir.

**Sonuç 1.4.22:** $\mu(a)_k = (ak+1)^{-1}$ olsun. Bu durumda $H_{\mu(a)}$ ve $H_{\mu(b)}$ her bir $a, b > 0$ için denktir.

[**81, 1.7.10**] dan istenilen elde edilir.

**1.5. Cesáro ve Hölder**

Mercer'in teoremleri (1907) $(C, 1)$ matrislerine bir çizgi getirmiştir ve Mercerian matrislerini tanımlamıştır. $(C, 1)$ için $C$ yazacağız ve indisleri 0 dan başlatacağız.

**Teorem 1.5.1:** $\alpha > 0$ için $\alpha I + (1 - \alpha)C$ matrisi merceriandır.

Bu matris, $\mu_k = \alpha + (1-\alpha)/(k+1) = (\alpha k + 1)/k + 1$ ile $H_\mu$ Hausdorff matrisidir. İstenilen [**81, Sonuç 2.3.21**] den elde edilir.

$\alpha = 0$ durumunda bu matrisi $A$ ile gösterirsek (Teorem 1.5.1 de $(C, 1)$ dir); $\alpha < 0$ için $A$ mercerian değildir fakat $A$, çok küçük bir yakınsaklık bölgesine sahiptir.

**Teorem 1.5.2(G.H. Hardy, 1913):** $\alpha < 0$ , $A = \alpha I + (1-\alpha)C$ , $X = c_A$ olsun. Bu durumda $X = c \oplus \nu$ dır. Burada $\nu$ bir ıraksak dizidir. Bu işaretlemenin manası; bütün $A$ toplanabilir dizi, yakınsak bir dizi + $\nu$ nün bir çarpımıdır ve tersine ( $CA^{-1}$ in 1. sütunu $q$ olsun. Bu durumda $AC^{-1}q = \delta^0$ dır. Dolayısıyla $A$ , $C$ ile değişmeli olduğundan $Aq = C\delta^0$ dır, böylece $q \in X$ dir. $(AC^{-1})^{-1}$ den kullanımı daha kolay olan $q$ nun hesabı argümentlerde tanımlanan $\nu$ dizisinin orjindeki gösterimidir.)

**İspat:** $x \in X$ olsun. $x = u + L.1$ olduğundan, burada $L = \lim_A x$ ve $u = x - L.1$ , $\lim_A u = 0$ 'ı sağlar. $\lim_A x = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\lambda$ tamsayı değilse $\lambda = 1 - \alpha^{-1} > 1$ ; $y_n = (n+1)(Cx)_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ ; $z_n = y_n \Gamma(n + 2 - \lambda)/\Gamma(n+2)$ , $\forall n$ için olsun. Eğer $\lambda$ tamsayı ise $n \geq \lambda - 1$

için $z_n$ keyfi tanımlanabilir. Yeterince büyük $n$ ler için

$$\begin{aligned} z_n - z_{n-1} &= [y_n(n+1-\lambda)/(n+1) - y_{n-1}] . \Gamma(n+1-\lambda)/\Gamma(n+1) \\ &= \alpha^{-1}(Ax)_n \Gamma(n+1-\lambda)/\Gamma(n+1) \\ &= o(n^{-\lambda}) \end{aligned}$$

Buradan $\sum(z_n - z_{n-1})$ yakınsaktır. O halde $M = \lim z_n$ mevcut ve

$$z_n = M - \sum_{i=n+1}^{\infty}(z_i - z_{i-1}) = M + o(n^{1-\lambda})$$

dır. Dolayısıyla

$$x_n = \alpha^{-1}(Ax)_n + \lambda \frac{y_n}{n+1} = o(1) + \lambda z_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2-\lambda)} = o(1) + \lambda z_n x_n$$

denir. Bu $o(1) + \lambda M v_n + \lambda v_n o(n^{1-\mu}) = \lambda M v_n + o(1)$ dır. Bu $X \subset c \oplus v$ nin ispatıdır ve ters içerme $v \in X$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu göstermek için yeterince büyük $n$ ler için $(C^{-1}v)_n = (n+1)v_n - nv_{n-1} = \lambda v_n$ dir, böylece $(Av)_n = \alpha v_n + (1-\alpha)\lambda^{-1} v_n = 0$ dır.

Bir $A$ matrisi verildiğinde ;

$M(A)$ (Mercerian küme) , $\{\lambda : \lambda I + (1-\lambda)A$ merceriandır$\}$ olsun. $A$ bir regüler üçgen matris olduğunda $M(A)$ nın 1 i içeren açık bir küme olduğu daha önceki yıllarda gösterildi. Fakat burada $M(A)$ nın açık olmadığı bir $A$ kümesi de vardır.

**Tanım 1.5.3:** $C_\alpha$ ile gösterilen $\alpha$ mertebeli Cesáro matrisi, $\alpha > 0$ için $\mu_k = \alpha \int\limits_0^1 t^k(1-t)^{\alpha-1}dt$ ile bir Hausdorff matrisidir. $C_\alpha$ nın tanımı $\alpha$ nın geniş bir sınıfına genişletilebilir. Wilansky [**81, 2.3.18**] den $g(t) = -(1-t)^\alpha$ ile her bir $C_\alpha$ regülerdir. $h_{nk} = \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} / \binom{n+\alpha}{n}$ , $h_{kk} = \binom{k+\alpha}{k}^{-1}$ ile $H = C_\alpha$ durumu açıkça verilir. Onu $H^\alpha$ Hölder matrisine benzetmek doğaldır ki burada $\mu_k = (k+1)^{-\alpha}$ , $H = C_1 = (C,1)$ dir. Bir de eğer $A$ matrisi $(Ax)_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ ve $B = diag\left(\frac{1}{n}\right)$ ise $\alpha$ tamsayısı için $H^\alpha = (BA)^\alpha$ , $C_\alpha = B^\alpha A^\alpha$ dır. İlişki ile ilgili daha ayrıntılı bilgi Schnee ve Knopp'un Teoremidir ki bu durumda bu matrisler denktir. Biz onu sadece $\alpha$ tamsayısı için vereceğiz.

**Teorem 1.5.4:** $\alpha = 1, 2, \ldots$ için $H^{\alpha}$ , $C_{\alpha}$ matrisleri denktir.
$\mu_k = (k+1)^{-\alpha}$ , $\nu_k = \binom{k+\alpha}{k}^{-1}$ ile $H_{\mu}$ ve $H_{\nu}$ alalım. Böylece

$$\frac{\mu_k}{\nu_k} = (\alpha!)^{-1} \prod \{(k+r)/(k+1) : r = 2, 3, \ldots, \alpha\}$$

dır. Dolayısıyla $H^{\alpha}(C_{\alpha}^{-1})$ , $\lambda = (k+r)/(k+1)$ ile $H_{\lambda}$ formunda bir çarpım matrisidir. Wilansky [**81, 2.3.21**] den her bir bu şekildeki matris merceriandır.

**Tanım 1.5.5($\alpha$ parametreli Euler matrisleri):** $\alpha \in \mathbb{C}$ alalım. Bu durumda

$$E(\alpha) := (e_{nk}(\alpha))_{n,k \in \mathbb{N}} := (H, (\alpha^n)) \tag{1.5.1}$$

matrisine $\alpha$ *parametreli Euler matrisi denir.*

**Tanım 1.5.6:** $\alpha$ parametreli Euler matrisinin $(e_{nk}(\alpha))_{n,k\in\mathbb{N}}$ katsayıları için

$$e_{nk}(\alpha) := \begin{cases} \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} & , \ k \leq n \\ 0 & , \ k > n \end{cases} \tag{1.5.2}$$

ifadesi geçerlidir.

Gerçektende (1.4.5) de, $p = (\alpha^n)$ alırsak, $k > n$ için $h_{nk} = 0$ ve $k \leq n$ için $h_{nk} = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \alpha^k$ olduğundan, $\Delta^{n-k}\alpha^k$ ifadesini inceleyecek olursak;

$$\begin{aligned} \Delta \alpha^k &= \alpha^k - \alpha^{k+1} = \alpha^k (1-\alpha) \\ \Delta^2 \alpha^k &= \Delta\left(\alpha^k - \alpha^{k+1}\right) = \Delta\alpha^k - \Delta\alpha^{k+1} = \alpha^k - 2\alpha^{k+1} + \alpha^{k+2} \\ &= \alpha^k \left(1 - 2\alpha + \alpha^2\right) = \alpha^k (1-\alpha)^2 \\ & \ldots \\ \Delta^{n-k} \alpha^k &= \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu, $h_{nk}$ da yerine yazılırsa, istenilen elde edilir.

1972 de Sharma bir Hausdorff metodunun konservatif olması için gerekli ve yeterli bir koşul vermiştir ve bazı Hausdorff matrislerinin spektrumlarının sayılamayan veya sonlu olduğunu ve sonlu olduğu durumda spektrumun bir veya iki nokta içerdiğini göstermiştir. Bu makalede $\Delta$ , $B(c)$ de üçgensel matrislerin Banach cebiri, $G$ ile de $\Delta$ da tersinir operatörlerin yarı grubu gösterilmiştir ve $\partial G$ , $\Delta$ da $G$ nin sınırını göstermiştir. Aşağıdaki teorem zaten [83] de ispatlanan konservatif üçgensel matrislerle ilgilidir.

**Teorem 1.5.7:** $A = (a_{nk})$ bir konservatif üçgensel matris olsun. Bu durumda $\sigma(A) = \{0, a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots\}$ dir.

Teorem 1.5.7 nin mevcut sonucu $\partial G$ üzerindeki her konservatif matris için iyi bilinen bir gerçektir.

İkinci sonuç Rhoades [56] nın Soru 1 inin olumlu bir cevabıdır. Yani; $BA \in \partial G$ ile $B \in \partial G$ ve $A \notin \overline{G}$ olacak şekilde $B$ üçgeni mevcuttur. Bunu göstermek için $B$ keyfi konservatif bir matris alacağız. Bu durumda her $A$ üçgeni için $BA$ konservatifdir. Benzer şekilde $\partial G$ üzerinde bir üçgenin $\overset{\circ}{M}$ tipinde olmadığının gösterilmesiyle Rhoades [56] Soru 4(i) yi cevaplarız. $A$ , $M$ tipinde olmayan bir üçgen matris olsun. $B$ konservatif üçgen matristir. Bu durumda $AB$ örneğe ihtiyaç duyar.

Bir $H = (h_{nk})$ konservatif Hausdorff metodunun spektrumunun yapısını çalışmak için aşağıdakine ihtiyaç vardır.

**Durum 1.5.8:** $H$ bir konservatif Hausdorff metodu olsun. Burada $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ için $h_{nn} = \mu(n)$ olacak şekilde sağ yarı düzlemde analitik bir $\mu$ mevcuttur.

**Durum 1.5.9** [55]**:** Eğer $C$ , 1 mertebeli Cesàro matrisini gösterirse ve $f$ kompleks değerli bir fonksiyon ise bu durumda $f(C)$ , bir $(f_{nk})$ matrisini gösterir. Burada $C$ ile değiştirilen

$$f_{nk} = \sum_{h=k}^{n} (-1)^{h-k} \frac{(n-1)!}{(n-h)!\,(h-k)!\,(k-1)!} f\left(\frac{1}{h}\right)$$

dir.

Eğer $f(z) = \mu\left(\frac{1}{z} - 1\right)$ alırsak bu durumda $f(C) = H$ dır.

$$D = \left\{ z : \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\}$$

dir.

**Teorem 1.5.10:** Konservatif Hausdorff metodlarının spektrumu ya sınırlı yada sayılamayan sınırsızdır. Onun sonlu olduğu durumda o, ya bir nokta yada iki nokta içerir.

**İspat:** $H$ konservatif Hausdorff metodu olsun. $f$ , Durum 1.5.9 de verilen $H$ a karşılık gelen fonksiyon olsun. Bu durumda $f$ , $D$ de analitiktir ve $f(C) = H$ dır. Eğer $\alpha$ , $D$ de ise bu durumda $\dfrac{1}{f(z) - f(\alpha)}$ , $D$ de analitik değildir. Bu nedenle $f(C) - f(\alpha) I$ tersinir değildir ve dolayısıyla $\sigma(H) \supset f(D)$ dir. $D$ de $f$ sabit olmadığından analitik fonksiyonlar için lokal dönüşüm teoremi ile $\sigma(H)$ sayılamayandır. Diğer taraftan eğer $f$ , $D$ de sabitse bu durumda

$$H = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \cdots \\ \beta-\alpha & \alpha & 0 & \cdots \\ \beta-\alpha & 0 & \alpha & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.5.3}$$

dır. Burada $\alpha$ ve $\beta$ iki kompleks sayıdır. $\sigma(H) = \{\alpha, \beta\}$ olduğu bellidir ve teorem ispatlanır.

**Sonuç 1.5.11:** Bir $H$ Hausdorff metodunun konservatif olması için gerekli ve yeterli koşul $H = \beta H_0$ olmasıdır. Burada $\beta$ bir skalerdir ve

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & & 0 \\ 1 & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

dır.

**İspat:** $H$ konservatif olduğundan Teorem 1.5.7 den $\sigma(H)$ sayılabilirdir. Dolayısıyla Teorem 1.5.10 dan $H = \{\beta, \alpha, \alpha, \alpha, \cdots\}$ nın köşegenidir. Bir konservatif matrisin köşegeninin bir sıfır dizisi olduğu iyi bilinir. Böylece $\alpha = 0$ dır. (1.5.3) den $H = \beta H_0$ olduğunu alırız. Karşıtı aşikârdır.

Bir sağ sonlu matrisin konservatif olması için gerekli olduğundan sağ sonlu Hausdorff matrislerinin sonuçları hakkındaki temel [**55, sh.10**] da bellidir.

Mercer 1906 da eğer $C$ , 1 mertebeli Cesàro matrisini gösterirse bu durumda $\alpha > 0$ için $\alpha I + (1-\alpha)\, C$ nin yakınsaklık bölgesi $c$ ye denk olduğunu göstermiştir.

Mercer'in Teoremi Cesàro matrisinin spektrumu hakkında bir ifadedir. Gerçektende **[33]** ün sonuçları bu spektrumun $\left\{z : \left|z - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$ olduğunu ve **[26, sh.106]** Hardy'nin sonucuna denk olduğunu, $\alpha I + (1-\alpha)\, C$ merceriandır ancak ve ancak $\operatorname{Re} \alpha > 0$ olduğunu söyler. Bu aşağıda ispatlanan belirli Hausdorff matrislerinin Mercerian Teoremini sağlamasına denktir, fakat ilk önce bizim aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır. Çünkü; herbir konservatif $A$ matrisi $0 \in \sigma(A)$ , $c_A \supsetneqq c$ olmasına gerekli koşul değildir.

**Lemma 1.5.12:** $A$ , esas köşegeni üzerinde en çok sonlu sayıda sıfır bulunan üçgensel bir matris olsun. Eğer $c_A = c$ ise bu durumda 0 , $\sigma(A)$ nın bir izole noktasıdır.

**İspat:** $A^1$ , $A$ nın esas köşegen üzerindeki herbir sıfırları ile $\varepsilon \neq 0$ sayısının değişmesi ile elde edilen matrisi göstersin. Açıktır ki $c_{A^1} = c_A$ dır. $A^1$ bir üçgen matris olduğundan $0 \notin \sigma(A^1)$ dir. $\sigma(A)$ ile $\sigma(A^1)$ in sadece 0 ve $\varepsilon$ ile farklı olduğuna dikkat edelim. Böylece lemma ispatlanır.

**Teorem 1.5.13:** $0 < q < 1$ olmak üzere $\{1, q, q^2, \cdots\}$ dizisine karşılık gelen Hausdorff metodu $E$ olsun. Bu durumda $\alpha I + (1-\alpha)\, E$ Merceriandır ancak ve ancak $|\alpha| > |1-\alpha|$ dır. Böylece eğer $\alpha > 0$ ise $\alpha I + (1-\alpha)\, E$ Merceriandır ancak ve ancak $\alpha > \frac{1}{2}$ dir.

**Uyarı 1.5.14:** Teorem 1.5.13 ün son ifadesi iyi bilinen bir sonuçtur.

**İspat:** $E$ ye karşılık gelen $f$ analitik fonksiyonu $q^{\frac{1}{z}-1}$ dir. $z \to q^{\frac{1}{z}-1}$ olduğuna dikkat edersek dönüşüm $\left\{z : \left|z - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$ den $\{z : 0 < |z| < 1\}$ e dir. Dolayısıyla Teorem 1.5.10 dan $\sigma(E) \supset \{z : 0 < |z| < 1\}$ dir. Spektrum kapalı olduğundan $\sigma(E) \supseteq \{z : |z| \leq 1\}$ olduğunu elde ederiz. $E$ nin Banach normunun 1 olduğuna dikkat edersek $\sigma(E) = \{z : |z| \leq 1\}$ olduğunu elde ederiz. Teorem şimdi yukarıdaki lemmadan tamamlanır.

1982 de Rhoades ve Sharma **[60]** da daha sonra detaylı bir şekilde inceleyeceğimiz $C$ Cesàro matrislerinin $\sigma(C)$ spektrumunu, bizim ileride kullanacağımız metodlardan farklı bir şekilde vermiştir. Bunu Rhoades ve Sharma aşağıdaki şekilde yapmıştır.

$BV[0,1]$ , $\|f\| = V(f)$ ile $[0,1]$ üzerinde değişen $f$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki sınırlı salınımını göstersin. Ayrıca $f$ nin $0 < t < 1$ için her bir süreksizlik noktasında $f(t) = \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ yi sağladığını kabul edelim ve $f(0+) = f(0) = 0$ olsun. $\mathcal{U}$ mutlak sürekli fonksiyonları içeren $BV[0,1]$ in alt uzayını göstersin. $\mathcal{H}$ konservatif çarpımsal Hausdorff matrislerinin Banach cebrini göstersin. $f \in BV[0,1]$ için $\mu_n = \int_0^1 t^n df$ olmak üzere $\{\mu_n\}$ moment dizisine karşılık gelen Hausdorff matrisi $H_f$ olsun ve $D = \left\{z : \left|z-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}$ olmak üzere her bir $z \in \overline{D} - \{0\}$ için $T_f(z) = \int_0^1 t^{-1+\frac{1}{z}} df$ olsun.

$(E,q)$ ile gösterilen $q$ mertebeli Euler matrisi

$$\varphi_q(t) = \begin{cases} 0 \ , & 0 \leq t < q \\ 1 \ , & q \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad 0 < q < 1$$

e karşılık gelen Hausdorff matrisidir.

$I$ fonksiyonuna karşılık gelen birim matris

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 \ , & 0 \leq t < 1 \\ 1 \ , & t = 1 \end{cases}$$

dir. $M$ ile $0 \leq t \leq 1$ , $f(t) = t$ ye karşılık gelen 1 mertebeli Cesàro matrisini göstereceğiz.

[79] da $BV[0,1]$ ile $\mathcal{H}$ ın ve $[0,1]$ üzerinde $L^1[0,1]$ mutlak integrallenebilir fonksiyonların Banach uzayı ile $\mathcal{U}$ nun bir tutulabileceği gösterilmiştir. [**32**] de $\|H_f\| = V(f)$ olduğu gösterilmiştir. Hausdorff matrislerinin bazı özelliklerini daha önce vermiştik.

$f, g \in BV[0,1]$ için

$$(f*g)(t) = f(t)\,g(1) - \int_t^1 g(u)\,df\left(\frac{t}{u}\right) \qquad 0 \leq t \leq 1 \qquad (1.5.4)$$

tanımlansın.

(1.5.4) tarafından tanımlanan çarpım [**21, sh.196**] da verilen formülün genişlemesi olan çarpımsal Hausdorff matrislerinin bir genişlemesidir.

**Teorem 1.5.15:** $f, g \in BV[0,1]$ olsun. Bu durumda;

**(a)** $H_{f*g} = H_f . H_g$

**(b)** $\|f * g\| \leq \|f\| \, \|g\|$ ve

**(c)** $f * g = g * f \in BV[0,1]$

geçerlidir.

$f, g \in BV[0,1]$ olduğundan $b_n = \int_0^1 t^n dg$ , $c_n = \int_0^1 t^n df$ , $n = 0, 1, 2, ...$ ile tanımlanan $\{b_n\}, \{c_n\}$ moment dizileri mevcuttur. [**26, Teorem 210**] dan $a_n = b_n c_n$ tarafından tanımlanan $\{a_n\}$ dizisi de bir moment dizisidir. Dolayısıyla $a_n = \int_0^1 t^n dh$ olacak şekilde bir $h \in BV[0,1]$ mass fonksiyonu mevcuttur. $h = f * g$ olduğunu göstermek (a) yı ispatlar.

Eğer $b(z) = \int_0^1 t^z dg(t)$ , $c(z) = \int_0^1 t^z df(t)$ tanımlarsak bu durumda $b(z)$ ve $c(z)$ , $\operatorname{Re} z > 0$ için analitik ve $\operatorname{Re} z \geq 0$ için süreklidir. Her negatif olmayan $n$ tamsayısı için $a_n = b_n c_n$ olduğundan $a(z) = b(z) c(z)$ ile tanımlanır, ve $a(z) = \int_0^1 t^z dh(t)$ gösterimine sahiptir.

$A, B$ ve $C$ [**21, sh.200-201**] de ki gibi tanımlanmak üzere $u = e^{-t}$ , $v = e^{-s}$ , $h(u) = h(1) - A(t)$ , $g(u) = g(1) - B(t)$ ve $f(u) = f(1) - C(t)$ tanımlayarak

$$\int_0^1 t^z dh(t) = \int_0^1 t^z dg(t) . \int_0^1 t^z df(t)$$

eşitliği

$$\int_0^\infty e^{-tz} dA(t) = \int_0^\infty e^{-tz} dB(t) . \int_0^\infty e^{-tz} dC(t)$$

ye dönüşür.

[21, sh.201] deki çarpım teoreminin türetilmesini kullanarak

$$A(t) = \int_0^t B(t-s)\,dC(s) \tag{1.5.5}$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty e^{-zt} dA(z) = z \int_{-\infty}^\infty e^{-zt} dA(t)$$

olduğu elde edilir.

(1.5.5) de $A, B, C, u, v$ nin değerleri yerine yazılır ve $B(t-s) = g(1) - g\left(\frac{u}{v}\right)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} h(1) - h(u) &= \int_1^u \left[g(1) - g\left(\frac{u}{v}\right)\right](-df(v)) \\ &= -g(1)\int_1^u df(v) + \int_1^u g\left(\frac{u}{v}\right) df(v) \\ &= g(1)\int_u^1 df(v) - \int_u^1 g\left(\frac{u}{v}\right) df(v) \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} h(u) &= h(1) - g(1)\left[f(1) - f(u)\right] + \int_u^1 g\left(\frac{u}{v}\right) df(v) \\ &= h(1) - g(1)f(1) + f(u)g(1) - \int_u^1 g(t)\, df\left(\frac{u}{t}\right) \end{aligned}$$

dir ve (1.5.4) sağlanır, $h(1) = g(1)f(1)$ olduğu gösterilebilir. Fakat bu kolaydır. Gerçektende her $n$ için $a_n = b_n c_n$ olduğundan $a_0 = b_0 c_0$ dır, yani;

$$\int_0^1 dh(t) = \int_0^1 dg(t) \,.\, \int_0^1 df(t)$$

dir. Böylece $h(1) - h(0) = (g(1) - g(0))(f(1) - f(0))$ dır. Fakat

$$h(0) = g(0) = f(0) = 0$$

böylece $h(1) = g(1) f(1)$ dir.

(b) nin ispatı, $\|f * g\| = \|H_{f*g}\| = \|H_f.H_g\| \leq \|H_f\| . \|H_g\| = \|f\| . \|g\|$ dır. Çünkü Hausdorff matrislerinin çarpımı komutatiftir. (a) ve (b) den (c) hemen elde edilir.

(1.5.4) tanımı kullanışlıdır. Sadece moment dizisinin çarpımı için mass fonksiyonunu hesaplamak değil özel Hausdorff matrislerinin spektrasının hesabı için de gerekli olan bir kullanıştır. Aşağıdaki teorem bunu açıklar.

**Teorem 1.5.16:** $C$ nin spektrumu $\sigma(C) = \left\{ z : \left| z - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\}$ dir.

Kabul edelim ki bazı $\lambda$ kompleks sayıları için $((t - \lambda \varphi_1) * f)(t) = \varphi_1(t)$ olacak şekilde bir $f \in BV[0,1]$ mass fonksiyonu var olsun. Bu durumda $0 < t < 1$ için

$$tf(1) = t \int_t^1 \frac{f(u)}{u^2} du = \lambda f(t)$$

dir. Dolayısıyla

$$f(1) + \int_t^1 \frac{f(u)}{u^2} du = \lambda \frac{f(t)}{t}$$

ifadesi $(0,1)$ de

$$-\frac{f(t)}{t^2} = \lambda \left[ -\frac{f(t)}{t^2} + \frac{f'(t)}{t} \right]$$

yi sağlar. $\lambda \neq 0$ için üstteki denklem $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\lambda - 1}{\lambda t}$ formunu alırki onun bir $A$ sabiti için $f(t) = At^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$ çözümü vardır. Re $\left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) > 0$ için $f \in BV[0,1]$ ve Re $\left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) < 0$ için $f \notin BV[0,1]$ dir. Re $\left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) > 0$ , $\lambda \notin \overline{D}$ na denk olduğundan ve spektrum her zaman kapalı olduğundan teorem ispatlanır.

**Uyarı 1.5.17:** Teorem 1.5.16 yeni bir sonuç değildir, fakat ispat yenidir. Farklı bir ispat **[33]** de görülür. **[58, Teorem 4]** kullanılarak Teorem 1.5.16 nin teknik bir ispatı da yapılabilir. $C$ bir ağırlıklı ortalama metod olduğundan da Teorem 1.5.16, **[10, Teorem 1]** in özel bir durumudur.

**Uyarı 1.5.18:** Teorem 1.5.16 nın benzer tekniği kullanılarak

$$\sigma(E,q) = \{z : |z| \le 1\}$$

olduğunu gösterebiliriz. [**68, Teorem 3**] ün farklı bir metodu yardımıyla sonuç gösterilebilir. Ayrıca eğer $f(t) = t^k$ , $k > 0$ ise bu durumda $\sigma(H_f) = \overline{D}$ dır.

**Teorem 1.5.19:** $\frac{f(t)}{t} \in L^1[0,1]$ olmak üzere $f \in BV[0,1]$ olsun. Bu durumda $f(t) * t \in \mathcal{U}$ dur.

(1.5.4) den $h(t) = t \int_t^1 \frac{f(u)}{u^2} du$ olmak üzere $f(t) * t = tf(1) + h(t)$ dir. Bu durumda $[0,1]$ üzerinde

$$h'(t) = \int_t^1 \frac{f(u)}{u^2} du - \frac{f(t)}{t}$$

ve

$$\int_0^1 \left|h'(t)\right| dt \le \int_0^1 \int_t^1 \frac{f(u)}{u^2} dudt + \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} dt$$

dir.

Birinci integralde integrasyon sırasını değiştirdiğimizde ikinci integral elde edilir, bu yüzden $h' \in L^1[0,1]$ dir. Böylece $h \in L^1[0,1]$ ve teorem anlaşılır.

[**59**] dan da anlaşıldığı gibi konservatif Hausdorff matrislerinin kümesi konservativ matrisler cebirinin bir maksimal komutativ Banach alt cebridir. Bu sebeple, $\mathcal{H}$ ın her bir elemanının spektrumu bu alt uzayda tanımlı çarpımsal lineer fonksiyonellerin kümesi yardımıyla tanımlanır. (Bak [**80, sh.264**]). Bu makalenin geri kalan kısmı bu fonksiyonellerin bir araştırlmasına bağlıdır ve [**69**] un bazı sonuçları kapsanır.

**Teorem 1.5.20:** $\chi$ , $\chi(C) \neq 0$ olacak şekilde $\mathcal{H}$ da tanımlı çarpımsal lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda her bir $f \in BV[0,1]$ için $\chi(T_f C) = T_f(\chi(C))$ geçerlidir.

Genelliği bozmaksızın $f$ nin azalmayan olduğu kabul edilebilir. $0 \le t < \delta$ için $f_\delta(t) = 0$ , $\delta \le t \le 1$ için $f_\delta(t) = f(t)$ tanımlayalım. Bu durumda $f_\delta \in BV[0,1]$ dir ve $\|f - f_\delta\| \le f(\delta)$ dir. Çünkü; $t \to 0$ iken $f(t) \to 0$ ,

$\delta \to 0$ iken $\|f - f_\delta\| \to 0$ dır. Dolayısıyla $\delta \to 0$ iken $\|H_f - H_{f_\delta}\| \to 0$ dır. Çünkü her bir $z \in \overline{D} - \{0\}$ için $|T_f(z) - T_{f_\delta}(z)| \leq \|H_f - H_{f_\delta}\|$ , $\delta \to 0$ iken $T_{f_\delta}(z) \to T_f(z)$ dir.

$\chi(C) = z$ , $z \in \overline{D} - \{0\}$ tanımlayalım. Teorem 1.5.19 den $\dfrac{f(t)}{t} \in L^1[0,1]$ , $f_\delta(t) * t \in \mathcal{U}$ olduğu açıktır. [**69, Sonuç 1**] in ispatında olduğu gibi $\chi(CH_{f_\delta}) = zT_{f_\delta}(z)$ dir. $z \neq 0$ olduğundan $\chi(H_{f_\delta}) = T_{f_\delta}(z)$ dir. $\delta \to 0$ iken limit alırsak $\chi(H_f) = T_f(z)$ elde ederiz ve ispat biter çünkü $H_f = T_f(C)$ dir.

**Uyarı 1.5.21:** [**69, Uyarı 3**] de $z \in D$ için $\chi(C) = z$ nin $\chi(T_f C) = T_f(\chi(C))$ yi sağladığı görülür. Yukarıdaki teorem $\overline{D} - \{0\}$ sonucunu kapsar.

$\mu_n = \int\limits_0^1 t^n df$ olmak üzere $\chi_0(H_f) = \lim \mu_n$ yardımıyla $\chi_0$ tanımlayalım. Bu durumda $\chi_0$ her bir $0 < q < 1$ için $\chi_0(E, q) = 0$ özelliği ile $\mathcal{H}$ da sıfırdan farklı bir çarpımsal lineer fonksiyoneldir.

**Teorem 1.5.22:** $\chi$ , $\mathcal{H}$ üzerinde sıfırdan farklı çarpımsal lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda bazı $0 < q < 1$ için $\chi(E, q) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\chi = \chi_0$ olmasıdır.

Eğer $\chi = \chi_0$ ise bu durumda $\chi(E, q) = 0$ olduğu açıktır. Bazı $0 < q < 1$ için $\chi(E, q) = 0$ olduğunu kabul edelim. $q_1$ , $0 < q_1 < q$ yu sağlasın. Bu durumda $(E, q_1) = (E, q)\left(E, \dfrac{q_1}{q}\right)$ dur. Böylece

$$\chi(E, q_1) = \chi(E, q) . \chi\left(E, \frac{q_1}{q}\right) = 0$$

dır. Kabul edelimki $q < q_2 < 1$ olsun. $\lim q_2^n = 0$ olduğundan her $n$ için $q_2^n < q$ olduğunu seçeriz. Bu durumda $\chi(E, q_2^n) = 0$ , $\chi(E, q_2) = 0$ sağlanır.

Şimdi $f(1 - 0) = f(1)$ olmak üzere $f \in BV[0,1]$ olsun. $0 < q < 1$ için $g(t, q) = f(qt) * \varphi_q(t)$ yardımıyla tanımlanan $g$ fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. (1.5.4) yardımıyla $0 \leq t < q$ için $g(t, q) = f(t)$ ve $q \leq t \leq 1$ için $g(t, q) = f(q)$ olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $q \to 1$ iken $\|g(t, q) - f(t)\| \to 0$ dır. Her bir $0 < q < 1$ için $\chi(E, q) = 0$ olduğundan her bir $0 < q < 1$ için $\chi\left(H_{g(t,q)}\right) = 0$ dır ve dolayısıyla $\chi(H_f) = 0$ dır.

$\lambda = \int\limits_0^1 t^n df$ olmak üzere her bir $h \in BV[0,1]$ , $h(t) = f(t) + \lambda\varphi_1(t)$

formunda yazılabilir ve $f(t) = h(t) - \lambda\varphi_1(t)$ dir. O halde $\chi(H_h) = \lambda$ böylece $\chi = \chi_0$ dır.

**Teorem 1.5.23:** $f \in \mathcal{U}$ , $a$ herhangi bir sabit olsun. Bu durumda

$$\sigma(T_f(C) + a(E,q)) = \overline{\left\{T_f(z) + aq^{-1+\frac{1}{z}} : z \in \overline{D} - \{0\}\right\}}$$

dir.

$\chi$ , $\mathcal{H}$ üzerinde çarpımsal lineer fonksiyonel olsun. $z \in \overline{D} - \{0\}$ için $\chi(C) = z$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4 den $\chi(T_f(C) + a(E,q)) = T_f(z) + aq^{-1+\frac{1}{z}} \in \sigma(T_f(C) + a(E,q))$ dur. Eğer $\chi(C) = 0$ ve $\chi(E,q) = r \neq 0$ ise bu durumda $r = q^{-1+\frac{1}{z}}$ olmak üzere bir $z \in \overline{D} - \{0\}$ mevcuttur. Her $n$ tam sayısı için $\alpha = \alpha(n) = \dfrac{z\log q}{\log q + 2nz\pi i}$ tanımlayalım. Bu durmda $n \to \infty$ iken $\alpha \to 0$ ve $q^{-1+\frac{1}{\alpha}} = r$ dir. $f \in \mathcal{U}$ olduğundan $n \to \infty$ iken $T_f(\alpha) \to 0$ dır. Böylece yeterince büyük her $n$ için $\alpha \in \overline{D} - \{0\}$ ve $T_f(z) + aq^{-1+\frac{1}{\alpha}} \in \sigma(T_f(C) + a(E,q))$ dır. Spektrum kapalı olduğundan sonuç elde edilir.

Aşağıdaki örnek $\chi(C) = z$ , $z = 0$ ın $\chi(T_f(C)) = T_f(\chi(C))$ yi sağlamasına ihtiyaç olmadığını gösterir. $C + (E,q) \in \mathcal{H}$ olduğunu göz önüne alalım. Uyarı 1.5.18 den $-1 \in \sigma(E,q)$ dur. $z_n = \dfrac{\log q}{\log q + (2n-1)\pi i}$ olmak üzere $\{z_n\}$ dizisini tanımlayalım. Bu durumda her bir $n$ için $z_n \in \overline{D} - \{0\}$ , $z_n \to 0$ ve her bir $n$ için $\chi(E,q) = q^{-1+\frac{1}{z_n}} = -1$ eşitliğini de sağlayan $\chi(C) = z_n$ yardımıyla tanımlanan $\mathcal{H}$ üzerinde çarpımsal lineer fonksiyoneldir. Dolayısıyla Teorem 1.5.23 den her bir $n$ için $z_n - 1 \in \sigma(C + (E,q))$ dur. Spektrum kapalı olduğundan $-1 \in \sigma(C + (E,q))$ dır. Dolayısıyla $\chi_1(C + (E,q)) = -1$ olacak şekilde bir $\chi_1$ mevcuttur. Şimdi $\chi_1(C) = 0$ olduğu gösterilecektir. Kabul yanlıştır. Bu durumda $\chi_1(C) = z \neq 0$ dır. Teorem 1.5.23 den bazı $z \in \overline{D} - \{0\}$ için $-1 = \chi_1(C + (E,q)) = z + q^{-1+\frac{1}{z}}$ veya $q^{-1+\frac{1}{z}} = -(1+z)$ dir ki bu $0 < q < 1$ olduğundan imkânsızdır. Dolayısıyla $\chi_1(C) = 0$ ve $\chi_1(E,q) = -1$ dir.

Böylece Teorem 1.5.20 $\overline{D}$ ı kapsamaz. Bu örnekde $\chi_1(C) = 0$ ın $\chi_1(E,q) = 0$ ı sağlamadığı gösterilmesine rağmen Teorem 1.5.22 den karşıtı doğrudur.

Bu bölümün devamında $\alpha \in [0,1]$ ile farklı BK-uzayları üzerinde $E(\alpha)$ Euler matrislerinin araştırılması yer almaktadır.

**1.6 $\ell^p$ Uzayları**

Biz şimdi $\ell^p$ dizi uzaylarını tanımlayacağız, onun önemli özelliklerini ifade edeceğiz ve $\alpha \in (0,1]$ için $E(\alpha)$ Euler matrislerini $\ell^p$ de matris operatörü olarak göstereceğiz.

**Teorem 1.6.1:** $\left(\ell^p, \|.\|_p\right)$ , $1 \leq p \leq \infty$ için bir BK-uzayıdır.

**İspat:** $1 \leq p \leq \infty$ için $\ell^p$ nin koordinat uzayı olduğunu göstereceğiz. $\forall j \in \mathbb{N}$ için ve $x \in \ell^p$ için $|x_j| \leq \|x\|_p$ geçerli olduğundan Lemma 1.2.2'den $\left(\ell^p, \|.\|_p\right)$ bir K-uzayı ve dolayısıyla da BK-uzayıdır.

**Teorem 1.6.2($\ell^p$ nin özelliği):**

**(a) Jensenche eşitsizliği:** $1 \leq p < q \leq \infty$ için $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ geçerlidir ve bu eşitsizlikten $\ell^p \subset \ell^q$ içermesi doğrudur.

(b) $1 \leq p < \infty$ için $\left(\ell^p, \|.\|_p\right)$ bir AK-uzayıdır.

Gerçektende; $x \in \Phi$ alalım. O halde

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ öyleki } x = (x_1, x_2, \ldots, x_{k_0}, \ldots, 0, 0, \ldots)$$

şeklindedir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{k_0} |x_k|^p < \infty$$

olduğundan, $x \in \ell^p$ ve dolayısıyla da $\Phi \subset \ell^p$ dir. Ayrıca $\forall x \in X$ için

$$x^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} x_k \mathrm{e}^k \quad , \quad \left(\mathrm{e}^k = (0, 0, \ldots, \underset{\text{k.yer}}{1}, 0, 0, \ldots)\right)$$

olmak üzere $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x^{[n]} = x$ olduğundan $\ell^p$ bir AK-uzayıdır.

**Tanım 1.6.3(Düzgün konveks uzay):** $X$ bir Banach uzayı olsun. Bu durumda eğer $\forall n$ için $\|x_n\| = 1$ , $\|y_n\| = 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ olacak şekildeki bütün $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri için $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ eşitliği sağlanıyorsa $X$ e *düzgün konveks uzay* denir.

**Teorem 1.6.4:** $1 < p < \infty$ için $\left(\ell^p, \|.\|_p\right)$ düzgün konveks bir AK-BK uzayıdır.

**İspat:** Teorem 1.6.2 (b) de $\ell^p$ nin AK-uzayı olduğu ve Teorem 1.6.1 de ise $\ell^p$ nin BK-uzayı olduğu gösterildi. $1 < p < \infty$ için düzgün konveksliğin ispatı [**31, sh.7**] de bulunur.

$\alpha \in (0,1]$ için $E(\alpha)$ Euler matrisinin $\ell^p$ üzerinde bir matris dönüşümü olduğu ilk olarak Hardy tarafından incelenmiştir. Yapılan ispat Hölder eşitsizliğinin uygun bir uygulamasından oluşur. Aynı zamanda operatör normu için bir tahmin elde edilmiştir. Bu söylediğimiz veriler [**25**] de bulunur. Biz sadece not edeceğiz.

**Teorem 1.6.5 ( $\ell^p$ üzerinde Euler matrisleri ):** $1 < p < \infty$ olsun. $\alpha \in (0,1]$ için

(a) $E(\alpha) \in B(\ell^p)$

(b) $\|E(\alpha)\| \leq \alpha^{-\frac{1}{p}}$

geçerlidir.

$E^t(\alpha)$ transpoze Euler matrislerinin araştırılması, dual uzay yardımıyla Teorem 1.6.5 de tekrar ifade edilir. Biz topluca yöntemi vereceğiz.

**Tanım 1.6.6(Eşlenik (Adjoint) operatörler):** $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $A \in B(X)$ olsun. $X$ in dual uzayını $X' = B(X, \mathbb{C})$ ile gösterelim. Her $x \in X$ ve $f \in X'$ için

$$(f \circ A)(x) = (A'(f))(x)$$

özelliği ile bir $A' \in B(X')$ vardır ve $\|A\|_X = \|A'\|_{X'}$ geçerlidir. Bu $A'$operatörüne *A nın adjoint operatörü* denir. Bununla ilgili ayrıntılı bilgi için [**62, sh.93**] e bak.

$1 < p < \infty$ için $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak özere $(\ell^p)'$ ile $\ell^q$ izomorfik izomorftur. Eğer $x \in \ell^p$ ve $y \in \ell^q$ için

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k$$

elde ediliyorsa $\ell^q$ ve $(\ell^p)'$ arasındaki

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \ell^q & \longrightarrow & (\ell^p)' \\ y & \longrightarrow & < \ , y > \end{array}$$

operatörü bire bir ve örten olduğundan $\ell^p$ ve $(\ell^p)'$ izometrik izomorftur.

$\langle x, y\rangle = \Phi(y)(x)$ e karşılık her $x \in \ell^p$ ve $y \in \ell^q$ için her $A \in B(\ell^p)$ de $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ özelliği ile bir $A^* \in B(\ell^q)$ vardır.

$A^* = \Phi^{-1} \circ A' \circ \Phi$ ifadesi geçerlidir öyleki $\Phi$ nın izometrik izomorfu vasıtasıyla $A^*$ ve $A'$ nın normları uygun düşer, yani;

$$\|A^*\|_{\ell^q} = \|A'\|_{\ell^{p'}}$$

geçerlidir. Teorem 1.6.2 (b) ve Teorem 1.6.5 yardımıyla her $A \in B(\ell^p)$ bir matris dönüşümüdür. $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ matrisine ait bileşenler $a_{nk} = \left[Ae^k\right]_n$ $(n, k \in \mathbb{N})$ biçimindedir. Bu ifadelerle $A^* \in B(\ell^q)$ nun da bir matris operatörü olduğu tespit edilir. Bu durumda $A^* = (a^*_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ matrisinin bileşenleri $a^*_{nk} = \left[A^* e^k\right]_n$ $(n, k \in \mathbb{N})$ ile hesaplanır.

Her $n, k \in \mathbb{N}$ için uygun özdeşlikten dolayı

$$\left[A^*\mathrm{e}^k\right]_n = \left\langle \mathrm{e}^n, A^*\mathrm{e}^k\right\rangle = \left\langle A\mathrm{e}^n, \mathrm{e}^k\right\rangle = [A\mathrm{e}^n]_k \qquad (n, k \in \mathbb{N})$$

$a^*_{nk} = a_{kn}$ $(n, k \in \mathbb{N})$ ve $A^* = A'$ olduğu anlaşılır.

Bu gösterimlerden Teorem 1.6.5 yardımıyla $E^t(\alpha)$ traspoze Euler matrisleri hakkında aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 1.6.7( $\ell^p$ üzerinde transpoze Euler matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda her hangi bir $\alpha \in (0, 1]$ için

**(a)** $E^t(\alpha) \in B(\ell^p)$

**(b)** $\|E^t(\alpha)\|_{\ell^p} \leq \alpha^{-\frac{1}{q}}$

geçerlidir.

Rhoades 1980 de $H \in B(\ell)$ olması için gerekli ve yeterli bir koşul vermiştir. Bu koşulu vermeden önce aşağıdaki lemmayı ispatlayacağız.

**Lemma 1.6.8:** Bir üçgensel $A$ matrisi;

**(1)** $A \in B(\ell)$ ,

**(2)** $t_n^* = \sum_{k=0}^{n} |a_{nk}|$ , $n$ ye göre monoton artan,

**(3)** $t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}$ olmak üzere $\lim_n t_n$ mevcut

koşullarını sağlasın. Bu durumda $A \in B(c)$ dir.

**İspat:** (1) şıkkı her $N > k$ için $\sum_{n=k}^{N} |a_{nk}| \leq M$ yi sağlayan $\sup_k \sum_{n=k}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ a denktir. Burada $M$ , $N$ ve $k$ dan bağımsızdır. $[0, N]$ üzerinde $k$ ya göre toplam, $\sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{N} |a_{nk}| \leq M(N+1)$ eşitsizliğini sağlar. Toplamın sırasını değiştirirsek

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{t_n^*}{N+1} \leq M \tag{1.6.1}$$

elde edilir. (1.6.1) in sol tarafı, $\{t_n^*\}$ dizisinin bir mertebeli $(C, 1)$ Cesàro matrisinin $N$-inci terimidir. $\{t_n^*\}$ monoton artan olduğundan, $B(c)$ üzerinde $A$ nın normu $\|A\|_c = \lim_n t_n^*$ dır. Eğer $\|A\|_c = \infty$ ise bu durumda $(C, 1)$ in total regülerliğinden $N \to \infty$ için (1.6.1) in $\infty$ olduğu elde edilir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\|A\|_c$ sonludur. (1) şıkkı $A$ nın sütun limitinin sıfır olduğunu ve (3) şıkkı satır toplamının limitinin varlığı elde edilir. Dolayısıyla $A \in B(c)$ dir.

**Teorem 1.6.9:** $H$ bir Hausdorff matrisi olsun. Bu durumda $H \in B(\ell)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mu$ nün

$$\int_0^1 \frac{|d\beta(t)|}{t} < \infty \tag{1.6.2}$$

koşulunu sağlayan bir moment dizisi olmasıdır.

**İspat:** [26, sh.279] dan, eğer $\mu$ bir moment dizisi ise bu durumda $H \in B(\ell)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mu$ nün (1.6.2) i sağlamasıdır. Hardy'nin işlediği esas teorem $(H^*, \mu)$ konservatif Quasi Hausdorff metodudur, fakat $(H^*, \mu)$ sadece $(H, \mu)$ matrisinin transpozudur. Bu yüzden $H^*$ regülerliği için norm şartı $H \in B(\ell)$ için norm şartının aynısıdır.

$\mu$ bir moment dizisi olduğundan eğer $H \in B(\ell)$ ise o değişmez.

[**26, sh.254**] veya [**32, Lemma 2, sh.177**] den $\{t_n^*\}$ , $n$ ye göre monoton artandır. $H$ ın her bir satır toplamının toplamı $\mu_0$ dır. Böylece lemmanın (3). şıkkı sağlanır. Lemma uygulanarak [**26, sh.260**] a denk olarak $H \in B(c)$ , $\mu$ bir moment dizisi olur.

### 1.7 $c_0$ ve c Uzayları

Bu bölümde $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ tarafından indirgenen norm ile bir BK-yapısını taşıyan $c_0$ ve $c$ dizi uzaylarını vereceğiz. Bu uzaylarda $E(\alpha)$ Euler matrisi $\alpha \in (0,1]$ için matris operatörü olarak elde edilir.

$c_0$ ve $c$ dizi uzayları $\ell^\infty$ tarafından indirgenmiş $\|.\|_\infty$ normu ile normlu uzaydır. Açık olan soru bunların BK-uzayı olup olmadığıdır. Bu aşağıdaki teoremde verilir.

**Teorem 1.7.1 :** $(c_0, \|.\|_\infty)$ ve $(c, \|.\|_\infty)$ BK-uzayıdır.

**İspat:** Her iki dizi uzayıda boş değildir çünkü $c$ , $(\ell^\infty, \|.\|)$ içinde ve $c_0$ , $(\ell^\infty, \|.\|)$ içinde kapalıdır. BK-uzayı özelliği Lemma 1.2.2 yardımıyla $x \in \ell^\infty$ ve $j \in \mathbb{N}$ için geçerli olan tahminden $|x_j| \leq \|x\|_\infty$ geçerlidir.

Şimdiye kadar tanımlanan özellikleri ile verilen dizi uzayları arasındaki ilişkilerden bahsedelim.

**(a)** $1 \leq p < \infty$ için $\Phi \subset \ell^p \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$ içerme zinciri geçerlidir.

**(b)** $(c_0, \|.\|_\infty)$ bir AK-uzayıdır.

**(c)** $\ell^p$ , $(c_0, \|.\|_\infty)$ da yoğundur.

**(d)** $1 \leq p < \infty$ olsun. Her $x \in \ell^p$ için $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ eşitsizliği geçerlidir Buradan sonuç olarak

$$i : \left(\ell^p, \|.\|_p\right) \to (c_0, \|.\|_\infty)$$

içerme dönüşümünün sürekliliği elde edilir.

$\ell^p$ üzerindeki farklılıklarda $\alpha \in [0,1]$ için $c$ ve $c_0$ üzerindeki $E(\alpha)$ nın kendi üzerine dönüşüm özelliği kolayca elde edilir. Silverman, Kojima-Schur ve Teoplitz sonsuz bir matrisin özelliğini karakterize etmiştir ve $c, c_0$ üzerinde kendi üzerine bir dönüşüm olduğunu yanlız katsayıların yardımıyla bulmuştur. Buradan Euler matrisleri için ispatsız olarak aşağıdaki teoremler ifade edilir.

**Teorem 1.7.2($c_0$ üzerindeki Euler matrisleri):** $\alpha \in (0,1]$ için

(a) $E(\alpha) \in B(c_0)$

(b) $\|E(\alpha)\|_{c_0} \leq 1$

ifadeleri geçerlidir.

$c$ üzerinde Euler matrisi için aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 1.7.3($c$ üzerindeki Euler matrisleri):** $\alpha \in [0,1]$ için

(a) $E(\alpha) \in B(c)$

(b) $\|E(\alpha)\|_{c} \leq 1$

geçerlidir.

**Teorem 1.7.4:** $(H^*, \mu) \in B(c)$ olsun. Bu durumda $(H^*, \mu)$ $M$ tipindedir.

[**57**] de en fazla sonlu sayıda $\mu_n$ esas köşegeni sıfır olan $H^*$ ın $M$ tipinde olduğu gösterilmiştir. Sharma [**68**] de bu şartı kaldırarak ispatı farklı bir şekilde yapmıştır.

$H^*$ , $H$ ın transpoze matrisi olduğundan $H \in B(c)$ şartı $H^* \in B(\ell)$ ye denktir. Teorem 1.6.9 dan $\mu$ bir moment dizisidir. Böylece bir $\beta(t) \in BV[0,1]$ fonksiyonu için $\mu_n = \int_0^1 t^n d\beta(t)$ mevcuttur.

$$F(z) = \int_0^1 t^z d\beta(t)$$

tanımlayalım. Bu durumda $F$ , $\operatorname{Re} z > 0$ için analitiktir ve $\operatorname{Im} z = 0$ da süreklidir. Üstelik, eğer $b_i$ $\operatorname{Re} z > 0$ da $F$ nin reel sıfırlarını gösterirse, [**9**] dan $\sum \frac{1}{b_i} < \infty$ sağlanır. $H^*$ ın $M$ tipinde olduğunu söylemek $H$ ın $\ell$ de $1-1$ olduğunu söylemeye denktir.

$\delta$ binom katsayıları ile işaretlenmiş üçgen matris ve $M$ köşegen girişleri $\mu_n$ ile bir köşegen matris olmak üzere $H = \delta M \delta$ olduğundan çarpmanın birleşme özelliğini kullanabiliriz ve $\delta$ nın kendi kendinin tersi olduğunu gösterebiliriz. $\mu\delta t = 0$ yani $n = 0, 1, 2, \cdots$ için $\mu_n \Delta^t t_0 = 0$ dır. Şimdi [**20, Teorem1**] e baş vurarak $t$ nin sabit bir dizi olduğuyla sonuçlandırabiliriz. Sonuç $\ell$ de sadece o dizi sabit dizi olduğundan elde edilir.

## 1.8 $H^p$ Uzayları

Bu kısımda holomorf fonksiyonların Hardy uzayı yer almaktadır. Geçen kısımda olduğu gibi Euler matrisi ve $\alpha$ parametreli transpoze Euler matrisinin kendi üzerine lineer dönüşüm olup olmadığıyla ilgili soru ile uğraşılacaktır. Bunun yanında sürekli bileşke operatörünü tanımlayacağız. Bileşke operatörlerinin matris dönüşümü olduğunu ve onların matris gösterimlerinin transpoze Sonnenschein matrisi olduğunu göstereceğiz. Ayrıca $\alpha$ parametreli Euler matrislerini transpoze Sonnenschein matrisi ile bir çarpım matrisinin matris çarpımı olarak tanımlamak için sonsuz matrislerin yardımı ile çarpım operatörlerini tanımlayacağız. Bu ilişkiler yardımıyla $H^p$ uzaylarında operatör normu için tahminler yapılabilecektir.

**Tanım 1.8.1:** $f$ bir $z_0$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ limiti varsa, $f$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında diferansiyellenebilir denir. Bu limit değeri $f'(z)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına $f$ nin $z_0$ daki türevi denir, yani;

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 1.8.2(Analitik (Holomorf) fonksiyon):** $f$ kompleks fonksiyonu bir $z_0$ noktasının belli bir $B(z_0,\varepsilon)$ komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ise $f$ , $z_0$ da analitiktir denir.

**Tanım 1.8.3:** Düzlemde bir $\Omega$ açık kümesinde tanımlanan bir $u$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa alt harmonik fonksiyon denir.

(a) $\forall z \in \Omega$ için $-\infty \leq u(z) < \infty$.

(b) $u$ , $\Omega$ da üstten yarı süreklidir.

(c) $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$ olduğunda

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\left(a + r.e^{i\theta}\right) d\theta. \tag{1.8.1}$$

(d) (c) deki integraller $-\infty$ olmaz.

Not edelim ki (c) deki integraller daima mevcuttur ve $+\infty$ olamaz, çünkü; (a) ve (b) $u$ nun her $K \subset \Omega$ kompakt kümesi üzerinde üstten sınırlı olduğunu gösterir. [İspat: $K_n$ , $u(z) \geq n$ olan her $z \in K$ elemanlarının kümesi ise $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ böylece ya bazı $n$ ler için $K_n = \varnothing$ dur yada bazı $z \in K$ lar için $u(z) = \infty$ durumunda $\cap K_n \neq \varnothing$ dur.] Böylece (d) , (c) deki integrallerin $L^1(T)$ ye ait olduğunu söyler.

Her reel harmonik fonksiyon açıkça alt harmoniktir.

**Terimler ve ilişkiler:** $\mathbb{C}$ içinde açık birim daireyi $\mathbb{D}$ ile ve $\mathbb{D}$ nin sınırını $\partial\mathbb{D} := \overline{\mathbb{D}}\backslash\mathbb{D}$ ile göstereceğiz. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfik fonksiyonların vektör uzayını $H(\mathbb{D})$ ile göstereceğiz. **Eğer $f \in H(\mathbb{D})$ fonksiyonu, $f$ nin Taylor katsayıları dizisi ile verilirse $H(\mathbb{D})$ lineer bölüm uzayına bir dizi uzayı olarak bakılır.** Ayrıca sınırlı ve holomorfik fonksiyonların kümesini $H^\infty$ ile göstereceğiz.

**$H(\mathbb{D})$ lokal konveks uzayı:** İlk önce $H(\mathbb{D})$ ye bir bakış atacağız. Her boş olmayan kompakt $K \subset \mathbb{D}$ kümesi için $p_k$ yarı normu

$$p_k(f) := \max_{z \in K} |f(z)| \quad , \quad f \in H(\mathbb{D})$$

ile tanımlanır ve eğer yarı norm ailesi

$$P := \{p_k \mid \Phi \neq K \subset \mathbb{D} \quad , \quad K \text{ kompakt}\}$$

olarak alınırsa $(H(\mathbb{D}), P)$ bir Frechet uzayıdır.

Topolojiyi meydana getiren

$$d(f,g) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_{K_k}(f-g)}{1 + p_{K_k}(f-g)} \qquad (f,g \in H(\mathbb{D}))$$

ile bir yarı metriktir. Burada $K_k := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 - \frac{1}{k+1} \right\}$ dir.

$H(\mathbb{D})$ polinomların kümesini içerdiğinden bir AK-uzayıdır. O halde $\Phi$ sonlu dizilerin kümesi ve kuvvet serisi kompakt kümeleri düzgün yakınsak yapar. Ayrıca $f \in H(\mathbb{D})$ için Cauchy eşitsizliğinden $\pi_n$ koordinat izdüşümünün sürekliliği elde edilir. O halde Lemma 1.2.2 den FK-özelliği elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

**Teorem 1.8.4 :** $H(\mathbb{D})$ bir FK-AK uzayıdır.

**Tanım 1.8.5($H^p$ uzayları):** $0 < p < \infty$ olsun. Bir $f \in H(\mathbb{D})$ fonksiyonu ve $0 \leq r < 1$ için

$$M_p(r, f) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{1.8.2}$$

tanımlayalım. Bu integral ortalaması yardımıyla

$$\|f\|_p := \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) \tag{1.8.3}$$

eşitliği tanımlanır. Bu durumda

$$H^p := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_p < \infty \right\} \tag{1.8.4}$$

cümlesine $H^p$ *Hardy-uzayı* denir.

**Teorem 1.8.6:**

(a) Herhangi bir $f \in H(\mathbb{D})$ için genelleştirilmiş integral ortalaması $p = \infty$ için

$$M_\infty(r, f) := \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right| \tag{1.8.5}$$

olarak tanımlanırsa basit bir hesaplama ile

$$\sup_{0 \leq r < 1} M_\infty(r, f) = \|f\|_\infty \tag{1.8.6}$$

elde edilir.

(b) $H^p$ nin tanımından Hölder eşitsizliği yardımıyla ve (a) ile $\forall f \in H(\mathbb{D})$ ve $0 < p < q \leq \infty$ için $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ elde edilir. Bununla birlikte $H^p \supset H^q$ içermesi geçerlidir.

(c) $f \in H^p$ fonksiyonunun normu için

$$\|f\|_p = \lim_{r \longrightarrow 1^-} M_p(r, f) \tag{1.8.7}$$

geçerlidir çünkü $\forall f \in H(\mathbb{D})$ ve $0 < p \leq \infty$ için $M_p(r, f)$ integral ortalaması $r \in [0, 1]$ için monoton artandır ( **[63, sh.338]** )

**Teorem 1.8.7 :** $1 \leq p \leq \infty$ için $\left(H^p, \|.\|_p\right)$ bir BK-uzayıdır.

**İspat:** Tamlığı ispatlamak için kabul edelim ki $\{f_n\}$ , $H^p$ de bir Cauchy dizisi, $|z| \leq r < R < 1$ olsun. 0 merkezli $R$ yarıçaplı çember etrafında $f_n - f_m$ ye Cauchy formülünü uygularsak

$$(R-r) \mid f_n(z) - f_m(z) \mid \leq \|(f_n - f_m)_R\|_1 \leq \|(f_n - f_m)\|_p$$

geçerlidir. Bu eşitsizlikten $\{f_n\}$ , bir $f \in H(U)$ fonksiyonuna $U$ kompakt alt kümesi üzerinde yakınsar. Verilen $\varepsilon > 0$ ve her $n > m$ için $\|(f_n - f_m)\|_p < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m$ vardır ve buradan $r < 1$ için

$$\|(f - f_m)_r\|_p = \lim_{n\to\infty} \|(f_n - f_m)_r\|_p < \varepsilon$$

geçerlidir. Bu $m \to \infty$ için $\|(f - f_m)\|_p \to 0$ olduğunu verir ki $H^p$ tamdır.

Şimdi $f$ , $H^p$ de $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ Taylor katsayıları ile bir fonksiyon olsun. Bununla birlikte $0 < r < 1$ ve herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için Cauchy integral formülü ve Hölder eşitsizliği yardımıyla başlangıç etrafındaki $r$ yarıçaplı $Dr$ çemberi ile

$$\begin{aligned}
|b_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{Dr} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^n}dt\right| \\
&\leq \frac{1}{r^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right| dt \\
&\leq \frac{1}{r^n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{r^n}M_p(r,f)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $p = \infty$ için Hölder eşitsizliği yerine doğrudan $r \to 1^-$ için limit alınırsa $|b_n| \leq \|f\|_p$ elde edilir. Bununla birlikte 1.1.2 den $H^p$ bir K-uzayı olur. Böylece istenilen elde edilir.

**1.8.8($H^p$ nin özellikleri):** $1 \leq p < \infty$ için $\left(H^p, \|.\|_p\right)$ , $\left(L^p[0,2\pi], \|.\|_p\right)$ nin kapalı bir alt uzayına izometrik izomorftur. Bu

$$L^p_+ := \left\{ f^* \in L^p[0,2\pi] : \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(t)\, e^{-int}dt = 0, n \in \mathbb{Z}, n < 0 \right\}$$

dır.

$f \in H^p$ nin Taylor katsayıları, gösterilen izometrik izomorfun $f^* \in L_+^p$ fonksiyonunun Fouriyer katsayıları ile uygun düşer. Bu sonuçlar hakkında daha geniş açıklamalar Fischer'in [**19, sh.133-174**] kitabında ve Rudin [**63, sh.335**] de yer alır.

Riemann-Lebesgue teoremi yardımıyla $H^p$ hakkındaki bilgiler bir dizi uzayına indirgenebilir.

$1 < p < \infty$ için $f \in L^p[0, 2\pi]$ fonksiyonunun Fouriyer serisi, $L^p$ normu içinde $f$ e yakınsadığından $H^p$ nin bir AK-uzayı olması sonucu çıkar. Zymund [**83, sh.198**].

Ayrıca $L^p[0, 2\pi]$ nin düzgün konveksliği Hirzduruck-Scharlau [**31, sh.75**] de uygun $H^p$ uzaylarına iletilir. Buradan

(a) $1 \leq p \leq \infty$ için $H^p \subset c_0$ dır. Çünkü; $f$ nin Taylor katsayıları dizisine $(b_n) := (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ dersek $f(z) = \sum\limits_k b_k z^k$ ve $\sum\limits_k b_k z^k$ serisi $k \to \infty$ için $f(z)$ ye yakınsadığından ve yakınsak serilerin genel terimi sıfıra gideceğinden $b_k \to 0$ dır. Dolayısıyla yukarıdaki düşüncelerden $H^p \subset c_0$ elde edilir.

(b) $1 < p < \infty$ için $\left(H^p, \|.\|_p\right)$ düzgün konveks bir AK-BK uzayıdır.

Şimdi $\alpha$ parametreli transpoze Euler matrislerinin araştırılması ile işe başlayacağız. Bu maksatla bileşke operatörlerinin tanımı verilmelidir.

**Tanım 1.8.9(Bileşke Operatörü):** $\varphi \in H(\mathbb{D})$ ile $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} C_\varphi : H(\mathbb{D}) &\rightarrow H(\mathbb{D}) \\ f &\mapsto C_\varphi(f) := f \circ \varphi \end{aligned} \tag{1.8.8}$$

biçiminde tanımlanan lineer dönüşüme *bileşke operatörü* denir.

$C_\varphi$ bileşke operatörünün $H(\mathbb{D})$ üzerinde matris dönüşümü olup olmadığı ve $f \in H(\mathbb{D})$ nin Taylor katsayılarının, $f \circ \varphi$ nin Taylor katsayıları arasında hangi ilişkilerin bulunduğu sorularının cevaplanması gerekir.

**Tanım 1.8.10(Sonnenschein Matrisi):** $D$ , $\mathbb{C}$ içinde $0 \in D$ ile bir bölge olsun. $\varphi : D \to \mathbb{C}$ , $z = 0$ da holomorf olsun. Bu durumda $(\varphi(z))^n$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasındaki Taylor katsayıları yardımıyla tanımlanan matrise *Sonnenschein matrisi* denir. Yani; Sonnenschein matrisine $S_\varphi := (s_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ dersek

$$(\varphi(z))^n = \sum_{k=0}^{\infty} s_{nk} z^k \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$$

geçerlidir.

Sonnenschein matrislerinin yardımı ile $f$ ve $f \circ \varphi$ nin Taylor katsayıları arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle verilir.

**Teorem 1.8.11(Bileşke Operatörü):** $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ile $\varphi \in H(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda $C_\varphi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ süreklidir ve bir matris dönüşümüdür. Ayrıca

$$C_\varphi = S_\varphi^t$$

geçerlidir. Her $f \in H(\mathbb{D})$ için $f \circ \varphi$ nin Taylor katsayıları $S_\varphi^t$ transpoze Sonnenschein matrisi ile $f$ nin Taylor katsayılarının çarpımı vasıtasıyla elde edilir.

**İspat:** Her $f \in H(\mathbb{D})$ ve boş kümeden farklı kompakt $K \subset \mathbb{D}$ kümesi için $\varphi(K)$ kompakt olduğundan

$$p_K(C_\varphi f) = p_K(f \circ \varphi) = p_{\varphi(K)}(f)$$

sınırlıdır ve dolayısıyla $C_\varphi$ süreklidir.

$C_\varphi$ nin $H(\mathbb{D})$ üzerinde bir matris dönüşümü olması $H(\mathbb{D})$ nin FK-AK uzayı olmasından Teorem 1.2.6 dan elde edilir.

$C_\varphi := (c_{nk}(\varphi))_{n,k\in\mathbb{N}}$ matrisinin katsayılarına bakalım. Bileşke operatörünün tanımı ve $f = z^k \in H(\mathbb{D})$ fonksiyonunu kullanırsak

$$\begin{aligned} c_{nk}(\varphi) &= \left[C_\varphi\left(z^k\right)\right]_n = \left[z^k \circ \varphi\right]_n = \left[(\varphi(z))^k\right]_n \\ &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} s_{kj} z^j\right]_n = s_{kn} \end{aligned}$$

geçerlidir, burada $(\varphi(z))^k$ nın ifadesinde Tanım 1.8.10 kullanılmıştır. Dolayısıyla $C_\varphi = S_\varphi^t$ elde edilir.

$\varphi$ hangi koşulları sağladığında $C_\varphi$ bileşke operatörünün $H^p$ uzayında kendi üzerine bir dönüşüm olduğu sorusu sorulur. Bu durumda Teorem 1.8.11 den $C_\varphi$ otomatik olarak $C_\varphi = S_\varphi^t$ ile bir matris dönüşümüdür. Bu sorunun cevaplanması yöntemi, $\varphi$ uygun koşullara sahip olmadığından Littlewood'un altordinat prensibidir.

**Teorem 1.8.12(Littlewood'un altordinat prensibi):**

$1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ve $\varphi(0) = 0$ ile $\varphi \in H(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda her $f \in H^p$ ve her $0 \leq r < 1$ için

$$M_p(r, f \circ \varphi) \leq M_p(r, f)$$

geçerlidir.

**İspat:** Duren **[18, sh.10]**

$\varphi(0) = 0$ koşulunu sağlayan bileşke operatörleri için doğrudan doğruya bir ifade elde edilir. Aşağıda bizim için önemli olan $1 \leq p < \infty$ durumu ile ilgileneceğiz.

**Sonuç 1.8.13:** $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ile $\varphi \in H(\mathbb{D})$ ve $\varphi(0) = 0$ olsun. Bu durumda

**(a)** $C_\varphi \in B(H^p)$

**(b)**$\|C_\varphi\|_{H^p} = 1$

geçerlidir.

**İspat:** İlk önce Teorem 1.8.12 yardımıyla $f \in H^p$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere, $\varphi(0) = 0$ ve $0 \leq r < 1$ için

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|_p^p &= \|f \circ \varphi\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(\varphi\left(re^{it}\right)\right)\right|^p dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt = \|f\|_p^p \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|C_\varphi\|_{H^p} \leq 1$ ile $C_\varphi \in B(H^p)$ elde edilir. Eğer $f$ için her hangi bir özel sabit alınırsa operatör normunda eşitlik ortaya çıkar.

Yukarıdaki teoremde $\varphi(0) = 0$ koşulunun kaldırılabileceğini gösterelim. Bunun için birim çemberin her hangi bir $\varphi$ holomorf dönüşümünün, Möbius dönüşümü yardımıyla $\varphi(0) = 0$ a dönüştüğünü gösterelim. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \tau(z) := \frac{\varphi(0) - z}{1 - \varphi(0)\, z} \end{aligned}$$

Möbius dönüşümünü kullanalım. $\tau$, $\mathbb{D}$ nin kendi üzerine bire bir analitik fonksiyonudur. $\tau(z)$ nin türevi

$$\tau'(z) = \frac{|\varphi(0)|^2 - 1}{\left(1 - \overline{\varphi(0)\, z}\right)^2}$$

ile verilir. $R = |\varphi(0)|^{-1}$ olduğunda $\partial D$ nin görüntüsü $R.D$ ye holomorf olarak genişletilebilir. $\tau$ dönüşümü ile $\varphi(0)$ , 0 a ve 0 da $\varphi(0)$ a dönüşür. Aslında $\tau$ kendi tersine eşittir.

Şimdi $\psi : \tau \circ \varphi$ holomorftur ve $\psi(0) = 0$ sağlanır. Böylece bir önceki işlemin uygulaması $\tau^{-1} = \tau$ olduğundan ve $\tau^{-1} \circ \psi = (\tau^{-1} \circ \tau) \circ \varphi$ olacağından $\varphi = \tau \circ \psi$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left|f\left(\varphi\left(e^{it}\right)\right)\right|^p dt &= \int_0^{2\pi} \left|(f \circ \tau)\left(\psi\left(e^{it}\right)\right)\right|^p dt \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left|f\left(\tau\left(e^{it}\right)\right)\right|^p dt = \int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^p \left|\tau'\left(e^{it}\right)\right| dt \\ &= \left(1 - |\varphi(0)|^2\right) . \int_0^{2\pi} \frac{\left|f\left(e^{it}\right)\right|^p}{\left|1 - \overline{\varphi(0)} e^{it}\right|^2} dt \\ &\leq \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|} \int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^p dt \end{aligned}$$

geçerlidir. Bütün bunlar gösteriyor ki $\varphi \in H(\mathbb{D})$ yi ne alırsak alalım

$$\begin{aligned} C_\varphi : H^p &\longrightarrow H^p \\ f &\longrightarrow f \circ \varphi \end{aligned}$$

bileşke operatörü iyi tanımlıdır ve

$$\|C_\varphi : H^p \to H^p\| \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ile sınırlıdır.

Sonuç 1.8.13 un genelleştirilmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir ve bu teorem yukarıda ispatlanmıştır.

**Teorem 1.8.14($H^p$ üzerindeki bileşke operatörleri):** $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ile $\varphi \in H(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda

(a) $C_\varphi \in B(H^p)$

(b) $1 \leq \|C_\varphi\|_{H^p} \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}}$

geçerlidir.

Teoremin (b) şıkkında verilen normun en az 1 olduğunu görmek için Jarchow [**14, sh.232**] ye bakınız..

Teorem 1.8.11 in Teorem 1.8.14 ile kombinasyonu ile transpoze Sonnenschein matrisleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 1.8.15( $H^p$ üzerinde transpoze Sonnenschein matrisleri):** $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ile $\varphi \in H(\mathbb{D})$ olsun ve $S_\varphi$ Sonnenschein matrisini göstersin. Bu durumda

(a) $S_\varphi^t \in B(H^p)$

(b) $1 \leq \left\|S_\varphi^t\right\|_{H^p} \leq \left(\frac{1+|s_{10}|}{1-|s_{10}|}\right)^{\frac{1}{p}}$

geçerlidir.

Şimdi Sonuç 1.8.15 ye iki örnek vereceğiz. İlk örnekte, $\alpha \in (0,1]$ parametreli $E^t(\alpha)$ transpoze Euler matrislerinin $H^p$ nin kendi üzerine lineer bir dönüşümü olup olmadığı sorusunu cevaplandıracağız ve operatör normuna ait ilk tahmini verereceğiz. İkinci örnekte, $\alpha \in (0,1]$ parametreli transpoze Taylor matrisini vereceğiz. Bu $T^t(\alpha)$ nın yardımıyla $E(\alpha)$ Euler matrislerinin araştırılması yapılacaktır.

**Örnek 1.8.16:** $1 \le p < \infty$ olsun. Herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \varphi_\alpha(z) := \alpha z + 1 - \alpha \end{aligned}$$

holomorf fonksiyonunu alalım.

$$|\varphi_\alpha(z)| = |\alpha z + 1 - \alpha| \le |\alpha| . |z| + |1 - \alpha| \le \alpha + 1 - \alpha = 1$$

olduğundan $\varphi_\alpha$ birim çemberi kendi üzerine dönüştürür.

$$(\varphi(z))^n = (\alpha z + 1 - \alpha)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} z^k$$

olur ki $s_{nk} = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$ elde edilir. Teorem 1.8.1 den $C_\varphi = S_\varphi^t$ ve Euler matrisinin tanımından $S_\varphi^t = E^t(\alpha)$ elde edilir. O halde Sonuç 1.8.15 den $\alpha \in (0,1]$ için

**(a)** $E^t(\alpha) \in B(H^p)$

**(b)** $1 \le \|E^t(\alpha)\|_{H^p} \le \left(\frac{1 + |e_{10}|}{1 - |e_{10}|}\right)^{\frac{1}{p}}$

ve $e_{10} = \binom{1}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^1 = 1 - \alpha$ olduğundan

$$1 \le \left\|E^t(\alpha)\right\|_{H^p} \le \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

**Örnek 1.8.17:** $1 \le p < \infty$ olsun. Herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \varphi_\alpha(z) := \frac{\alpha z}{1 - (1-\alpha) z} \end{aligned}$$

holomorf fonksiyonunu alalım.

$\varphi_\alpha(z)$ birim çemberi kendi üzerine dönüştürür. Bu durumda Sonnenschein matrisi açıklanan $T(\alpha)$ Taylor matrisidir. Böylece Sonuç 1.8.15 den transpoze Taylor matrisi hakkında $\alpha \in (0,1]$ için

**(a)** $T^t(\alpha) \in B(H^p)$

(b) $\|T^t(\alpha)\|_{H^p} = 1$

geçerlidir.

Ne yazıkki $\alpha$ parametreli Euler matrisi bileşke operatörü ile değil, birim çemberin uygun holomorf kendi üzerine dönüşümü ile açıklanır. $E(\alpha)$ yı $H^p$ nin lineer kendi üzerine dönüşümü olarak göstermek için başka metodlara başvurulur. Bu maksatla herşeyden önce çarpım operatörlerini tanımlayacağız.

**Tanım 1.8.18(Çarpım Operatörü):** $\psi \in H(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} M_\psi : H(\mathbb{D}) & \to & H(\mathbb{D}) \\ f & \mapsto & \psi f \end{array}$$

biçiminde tanımlanan $M_\psi$ lineer dönüşümüne *çarpım operatörü* denir.

**Tanım 1.8.19(Çarpım Matrisi):** $D$, $\mathbb{C}$ içinde $0 \in D$ ile bir bölge ve $\psi : D \to \mathbb{C}$ , $z = 0$ noktasında holomorf bir fonksiyon olsun. $\psi$ nin $(p_0, p_1, p_2, \dots)$ Taylor katsayıları yardımıyla

$$p_{nk} := \begin{cases} p_{n-k} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olmak üzere $(p_{nk})$ matrisini tanımlayalım. Bu $P_\psi := (p_{nk})$ matrisine *çarpım matrisi* denir.

Çarpım matrisleri yardımıyla $f$ ve $\psi f$ nin Taylor katsayıları arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle verilir.

**Teorem 1.8.20(Çarpım Operatörleri):** $\psi \in H(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda $M_\psi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ çarpım operatörü süreklidir ve bir matris dönüşümüdür. Ayrıca $M_\psi = P_\psi$ eşitliği geçerlidir. Her $f \in H(\mathbb{D})$ için $P_\psi$ çarpım matrisi, $\psi f$ nin Taylor katsayıları ile $f$ nin Taylor katsayılarının çarpımından oluşur.

**İspat:** $f \in H(\mathbb{D})$ ve $\mathbb{D}$ nin boş olmayan kompakt bir $K$ alt kümesi için $p_K(\psi) < \infty$ olur.

$$p_K(M_\psi f) = p_K(\psi f) \leq p_K(\psi)\, p_K(f)$$

olduğundan $M_\psi$ sınırlı, dolayısıyla da süreklidir.

$H(\mathbb{D})$ bir FK-AK uzayı olduğundan Teorem 1.2.6 den $M_\psi$ , $H(\mathbb{D})$ üzerinde bir matris dönüşümüdür.

Şimdi $M_\psi := (m_{nk}(\psi))_{n,k\in\mathbb{N}}$ matrisinin katsayılarına bakalım. Her $f \in H(\mathbb{D})$ için $M_\psi(f) = \psi f$ olduğundan $f = z^k \in H(\mathbb{D})$ olarak alırsak

$$\begin{aligned} m_{nk}(\psi) &= \left[M_\psi\left(z^k\right)\right]_n = \left[\sum_{j=0}^{\infty} p_j z^{j+k}\right]_n \\ &= \left[\sum_{j=k}^{\infty} p_{j-k} z^j\right]_n = \begin{cases} p_{n-k} & , \quad k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir, burada $M_\psi$ nin ifadesinde Tanım 1.8.19 kullanılmıştır. O halde $M_\psi = P_\psi$ olduğu elde edilir.

Şimdi çarpım operatörünün $B(H^p)$ de olması için $\psi$ ye bazı koşullar ekleyeceğiz.

**Teorem 1.8.21($H^p$ üzerinde çarpım operatörleri):** $1 \le p < \infty$ ve $\psi \in H^\infty$ olsun. Bu durumda

(a) $M_\psi \in B(H^p)$

(b) $\|M_\psi\|_{H^p} \le \|\psi\|_\infty$

geçerlidir.

**İspat:**

$$\|M_\psi\|_{H^p} = \|\psi f\|_{H^p} \le \|\psi\|_\infty \cdot \|f\|_{H^p}$$

olur ki her iki tarafı $f \ne \theta$ için $\|f\|_{H^p}$ ye böler ve sup alırsak $\|\psi f\|_{H^p} \le \|\psi\|_\infty$ elde edilir ve dolayısıyla da Teorem 1.8.20 yardımıyla $M_\psi \in B(H^p)$ elde edilir.

Bu ifadelerle birlikte $\alpha$ parametreli Euler matrisinin normunun nasıl verileceğini aşağıdaki örnekle göstereceğiz.

**Örnek 1.8.22:** Herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \mathbb{D} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \varphi_\alpha(z) := \frac{\alpha z}{1-(1-\alpha)z} \end{aligned}$$

holomorf fonksiyondur.

Ayrıca $z \in \mathbb{D}$ için Schwartz Lemmasından $|\varphi_\alpha(z)| \leq |z|$ dir. Çünkü $\varphi_\alpha(0) = 0$ ile kendi üzerine dönüşümü söz konusudur. Buradan her $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \psi_\alpha(z) := \frac{\varphi_\alpha(z)}{\alpha z} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon

$$|\psi_\alpha(z)| = \left|\frac{\varphi_\alpha(z)}{\alpha z}\right| = \frac{|\varphi_\alpha(z)|}{|\alpha| . |z|} \leq \frac{|z|}{\alpha |z|} = \frac{1}{\alpha}$$

ile holomorftur. Böylece $\|\psi_\alpha\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}$ geçerlidir.

$1 \leq p < \infty$ için Teorem 1.8.21 ve Sonuç 1.8.13 dan

$$M_{\psi_\alpha} \circ C_{\varphi_\alpha} \in B(H^p)$$

biçiminde tanımlanan operatörün geniş bir şekilde araştırılması gerekir.

Teorem 1.8.21 ve Örnek 1.8.17 yardımıyla operatör normu için

$$\|M_{\psi_\alpha} \circ C_{\varphi_\alpha}\|_{H^p} \leq \|M_{\psi_\alpha}\|_{H^p} . \|C_{\varphi_\alpha}\|_{H^p} \leq \|\psi_\alpha\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}$$

geçerlidir.

Şimdi $M_{\psi_\alpha} \circ C_{\varphi_\alpha}$ nin matrisini belirleyelim.

$$\psi_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n z^n$$

kuvvet serisine sahiptir. $\psi_\alpha$ ve $P_{\psi_\alpha}$ çarpım matrisine ait $p_{nk}(\alpha)$ bileşenleri için

$$p_{nk}(\alpha) := \begin{cases} (1-\alpha)^{n-k} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

elde edilir. $T^t(\alpha)$ matrisinin $C_{\varphi_\alpha}$ da düzenlenmiş $\tilde{t}_{nk}$ katsayıları için

$$\tilde{t}_{nk}(\alpha) := \begin{cases} 1 & , \quad k = n = 0 \\ \binom{n-1}{n-k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} & , \quad 0 < k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

geçerlidir. $P_{\psi_\alpha}$ çarpım matrisi satır sonlu olduğundan $M_{\psi_\alpha} \circ C_{\varphi_\alpha}$ nın matris dönüşümü

$$P_{\psi_\alpha} T^t(\alpha)$$

matris çarpımı ile verilir. Bu matris çarpımının bileşenlerini $d_{nk}(\alpha)$ ile gösterirsek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d_{n0}(\alpha) = (1-\alpha)^n$$

her $n, k \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq n < k$ için

$$d_{nk}(\alpha) = 0$$

ve diğer $n, k \in \mathbb{N}$ ve $k \leq n$ için

$$\begin{aligned} d_{nk}(\alpha) &= \sum_{j=k}^{n} (1-\alpha)^{n-j} \binom{j-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{j-k} \\ &= \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \sum_{j=k}^{n} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

Tanım 1.5.6 dan $E(\alpha)$ Euler matrisleri ile karşılaştırıldıklarında

$$P_{\psi_\alpha} T^t(\alpha) = E(\alpha) \tag{1.8.9}$$

özdeşliği görülür.

Yukarıda yaptıklarımızı özetleyecek olursak $1 \leq p < \infty$ ve her $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $\alpha$ parametreli Euler matrisleri için aşağıdaki ifadeleri ispatlamış olduk.

**(a)** $E(\alpha) \in B(H^p)$

**(b)** $\|E(\alpha)\|_{H^p} \leq \alpha^{-1}$

**Not 1.8.23:** Teorem 1.8.21 ve Sonuç 1.8.13 un Teorem 1.8.20 ve Teorem 1.8.11 ile değiştirilmesi sonucu $\alpha \in (0,1]$ için $E(\alpha)$ nın $B(H(\mathbb{D}))$de olduğu sonucu çıkar.

Bizim şimdiye kadar ki gözlemlerimizde $E^t(\alpha)$ transpoze Euler matrisi ve $E(\alpha)$ matrisi için ilk norm tahminleri elde edilmiştir. Şimdiki uygulamalarda bu tahminler daraltılacaktır. Bunun için aşağıdaki teoremler Hardy uzayları teorisinden oluşur.

**Teorem 1.8.24(Blasche çarpımı):** $0 < p < \infty$ olsun. $f \in H^p \setminus \{0\}$ için $f$ nin 0 durumunun Blasche çarpımını $B$ ile gösterelim. Bu durumda her $s > 0$ için $h \in H^s$ fonksiyonu için $\|h\|_s^s = \|f\|_p^p$ geçerlidir. Burada

$$f = Bh^{\frac{s}{p}}$$

dir.

**İspat:** Rudin [**63, sh.339**] a bak. Orada yalnızca $s = 2$ özel durumu ispatlanmıştır. İspatın analizi yapıldığında koşulun bağımsızlığı elde edilir.

**Not 1.8.23:** $B$ Blasche çarpımı ile bu bağıntı içindeki detaylar Rudin [**63, sh.310**] da gösterilir. Bununla birlikte $\|B\|_\infty \leq 1$ ifadesini Teorem 1.8.24 de Blasche çarpımın uygulanmasıyla elde ederiz.

Ayrıca Rudin [**63, sh.341**] de $H^2$ hakkında aşağıdaki sonuçlar bulunur ki bu sonuç 1.8.8 den elde edilir.

**Teorem 1.8.26($H^2$ nin karekterizasyonu):** $b := (b_0, b_1, b_2, \dots)$ Taylor katsayıları ile $f \in H(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda

(a) $f \in H^2 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$

(b) $\|f\|_2 = \|b\|_2$

geçerlidir.

Teorem 1.8.24 ve Teorem 1.8.26 ile bir $S_\varphi^t$ transpoze Sonnenschein matrisinin operatör normunun $p$ den bağımsız olduğu görülür.

**Teorem 1.8.27(Transpoze Sonnenschein matrislerinin operatör normu):** $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ile $\varphi \in H(\mathbb{D})$ olsun. $C_\varphi : H^p \to H^p$ çarpım operatörünü ve $S_\varphi$ Sonnenschein matrisini göstersin. Bu durumda

$$\left\|S_\varphi^t\right\|_{H^p} = \|C_\varphi\|_{H^p} = \|C_\varphi\|_{H^2}^{\frac{2}{p}} = \left\|S_\varphi^t\right\|_{\ell^2}^{\frac{2}{p}}$$

geçerlidir.

**İspat:** İlk ve son eşitlik Teorem 1.8.26 ve Teorem 1.8.11 den hemen elde edilir. Geri kalan ifadeleri ispatlamak için her hangi bir $f \in H^p$ alalım ki bu Teorem 1.8.24 e göre $s = 2$ ile faktörize edilsin, yani; $h \in H^2$ ile $f = Bh^{\frac{2}{p}}$ , $\|h\|_2^2 = \|f\|_p^p$ ve $\|B\|_\infty \leq 1$ olsun. Bu durumda $M_p(r, f \circ \varphi)$ için

$$\begin{aligned}
(M_p(r, f \circ \varphi))^p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|(f \circ \varphi)\left(re^{it}\right)\right|^p dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|(B \circ \varphi)\left(re^{it}\right)\left(h^{\frac{2}{p}} \circ \varphi\right)\left(re^{it}\right)\right|^p dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|(h \circ \varphi)\left(re^{it}\right)\right|^2 dt \\
&= (M_2(r, h \circ \varphi))^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $r \to 1^-$ için limite geçilirse

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f\|_p^p &= \|f \circ \varphi\|_p^p \leq \|h \circ \varphi\|_2^2 = \|C_\varphi h\|_2^2 \leq \|C_\varphi\|_{H^2}^2 \cdot \|h\|_2^2 \\
&= \|C_\varphi\|_{H^2}^2 \cdot \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

elde edilir. $H^p$ üzerinde $C_\varphi$ operatörünün normu için her iki taraf $\|f\|_p^p$ na bölünür $p$. kök alınır ve $f \neq \theta$ için sup alınırsa

$$\|C_\varphi\|_{H^p} \leq \|C_\varphi\|_{H^2}^{\frac{2}{p}}$$

elde edilir.

Eğer $p$ ile 2 nin rolleri değiştirilirse eşitsizliğin tersi elde edilir ve böylece istenilen ispatlanmış olur.

Teorem 1.8.27 yardımıyla $\alpha \in (0, 1]$ parametreli transpoze Euler matrislerinin operatör norm tahmini daha da daraltılabilir.

**Teorem 1.8.28($H^p$ üzerinde transpoze Euler matrisleri):** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda her hangi bir $\alpha \in (0, 1]$ için

(a) $E^t(\alpha) \in B(H^p)$

(b) $\|E^t(\alpha)\|_{H^p} \leq \alpha^{-\frac{1}{p}}$

geçerlidir.

**İspat:** Örnek 1.8.16 (a) dan (a) şıkkı elde edilir. Örnek 1.8.16 den

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\alpha : & \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \varphi_\alpha(z) := \alpha z + 1 - \alpha \end{array}$$

biçiminde tanımlanmıştı. O halde $S_{\varphi_\alpha}$ Sonnenschein matrisi için

$$(\varphi_\alpha(z))^n = (\alpha z + 1 - \alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} z^k$$

olduğundan ve $C_{\varphi_\alpha} = S^t_{\varphi_\alpha}$ olduğundan $S_{\varphi_\alpha} = E^t(\alpha)$ elde edilir. O halde Teorem 1.8.27 den ve Teorem 1.6.7 den

$$\left\|E^t(\alpha)\right\| = \left\|S_{\varphi_\alpha}\right\|_{H^p} = \left\|S_{\varphi_\alpha}\right\|_{\ell^2}^{\frac{2}{p}} = \left\|E^t(\alpha)\right\|_{\ell^2}^{\frac{2}{p}} \leq \left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \alpha^{-1}$$

elde edilir.

**Not 1.8.29($E^t(\alpha)$ nin fonksiyonel gösterimi):** Biz şimdi $f$ fonksiyonu yardımıyla $\alpha \in (0,1]$ parametreli transpoze Euler matrislerinin $f \in H^p$ görüntüsünün Taylor katsayılarının nasıl verileceğini göstereceğiz. Örnek 1.8.16 den

$$\left(E^t(\alpha) f\right)(z) = f(\alpha z + 1 - \alpha)$$

geçerlidir.

$\alpha \in (0,1]$ parametreli Euler matrislerinin operatör normu için Örnek 1.8.22 yardımıyla bir tahmin yürütmek Euler matrislerinin karmaşık yapısından dolayı oldukça zordur. Teorem 1.8.27 yardımıyla norm, çarpım operatörlerinin birbiri ardınca açıklanan normu ve bileşke operatörlerinin normu yardımıyla üstten tahmin edilebilir.

**Teorem 1.8.30:** $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ile $\varphi \in H(\mathbb{D})$ olsun. $C_\varphi : H^p \longrightarrow H^p$ ile bileşke operatörünü ve $S_\varphi$ ile de Sonnenschein matrisini gösterelim. Ayrıca $M_\psi$ çarpım operatörü ile $\psi \in H^\infty$ ve çarpım matrisi $P_\psi$ olsun. Bu durumda her $z \in \mathbb{D}$ ve $1 \leq p \leq 2$ iken $|\psi(z)| \geq 1$ ve her $z \in \mathbb{D}$ ve $2 \leq p < \infty$ iken $0 < |\psi(z)| \leq 1$ için

$$\left\|P_\psi S^t_\varphi\right\|_{H^p} = \left\|M_\psi \circ C_\varphi\right\|_{H^p} \leq \left\|M_\psi \circ C_\varphi\right\|_{H^2}^{\frac{2}{p}} = \left\|P_\psi S^t_\varphi\right\|_{\ell^2}^{\frac{2}{p}}$$

geçerlidir.

**İspat:** İlk ve son eşitlik Teorem 1.8.27 ve Teorem 1.8.11 den direkt elde edilir. Geri kalan ifadeleri ispatlamak için her hangi bir $f \in H^p$ fonksiyonu Teorem 1.8.24 e göre $s = 2$ ile faktörize edilir, yani; $h \in H^2$ ile $f = Bh^{\frac{2}{p}}$ , $\|h\|_2^2 = \|f\|_p^p$ ve $\|B\|_\infty \leq 1$ dir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}
(M_p(r, \psi(f \circ \varphi)))^p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\psi(re^{it})(f \circ \varphi)(re^{it})\right|^p dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\psi(re^{it})(B \circ \varphi)(re^{it})\left(h^{\frac{2}{p}} \circ \varphi\right)(re^{it})\right|^p dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\psi(re^{it})\right|^{p-2} \left|\psi^{\frac{2}{p}}(re^{it})\left(h^{\frac{2}{p}} \circ \varphi\right)(re^{it})\right|^p dt
\end{aligned}$$

hipotezden her $z \in \mathbb{D}$ için $1 \leq p \leq 2$ iken $|\psi(z)| \geq 1$ ve $2 \leq p < \infty$ için $0 < |\psi(z)| \leq 1$ olduğundan $1 \leq p < \infty$ için $|\psi(re^{it})|^{p-2} \leq 1$ elde edilir. Bu ifade yukarıdaki eşitsizlikte yazılırsa

$$\begin{aligned}
(M_p(r, \psi(f \circ \varphi)))^p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\psi^{\frac{2}{p}}(re^{it})\left(h^{\frac{2}{p}} \circ \varphi\right)(re^{it})\right|^p dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\psi(re^{it})(h \circ \varphi)(re^{it})\right|^2 dt \\
&= (M_2(r, \psi(f \circ \varphi)))^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $r \to 1^-$ için limite geçersek

$$\begin{aligned}
\|(M_\psi \circ C_\varphi) f\|_p^p &\leq \|(M_\psi \circ C_\varphi) h\|_2^2 \leq \|M_\psi \circ C_\varphi\|_{H^2}^2 . \|h\|_2^2 \\
&= \|M_\psi \circ C_\varphi\|_{H^2}^2 . \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf $\|f\|_p^p$ na bölünür $p$. kök alınır ve $f \neq \theta$ için sup alınırsa

$$\|M_\psi \circ C_\varphi\|_{H^p} \leq \|M_\psi \circ C_\varphi\|_{H^2}^{\frac{2}{p}}$$

elde edilir. O halde operatör normu için aranılan tahmin elde edilmiş olur.

Biz şimdi Teorem 1.8.30 yardımıyla $H^p$ üzerindeki $\alpha \in (0,1]$ parametreli Euler matrislerinin operatör normunu hesaplayabiliriz. Bunu bir teoremle vereceğiz.

**Teorem 1.8.31($H^p$ üzerinde Euler matrisleri):**$1 \leq p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda her hangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

(a) $E(\alpha) \in B(H^p)$

(b) $\|E(\alpha)\|_{H^p} \leq \begin{cases} (2-\alpha)^{\frac{2-p}{p}}.\alpha^{-\frac{1}{p}} & , \quad 1 \leq p \leq 2 \\ \alpha^{-\frac{1}{q}} & , \quad 2 \leq p < \infty \end{cases}$

geçerlidir.

**İspat:** Örnek 1.8.22 da (a) şıkkı verilmiştir. Biz (b) yi ispatlayalım. Bunun için her hangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \quad \mathbb{D} &\rightarrow \quad \mathbb{C} \\ z &\mapsto \quad \varphi_\alpha(z) := \frac{\alpha z}{1-(1-\alpha)z} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \quad \mathbb{D} &\rightarrow \quad \mathbb{C} \\ z &\mapsto \quad \psi_\alpha(z) := \frac{\varphi_\alpha(z)}{\alpha z} \end{aligned}$$

alalım. Sonuncu fonksiyon $\mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{1}{1-\alpha}\right\}$ üzerinde holomorftur. Dolayısıyla bu fonksiyon

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \quad \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{1-\alpha}\right\} &\rightarrow \quad \mathbb{C} \\ z \quad &\mapsto \quad \psi_\alpha(z) := \frac{1}{1-(1-\alpha)z} \end{aligned}$$

biçiminde holomorf olarak devam ettirilir. Buradan her $z \in \mathbb{D}$ için holomorf fonksiyonlar için maksimum ilkenin yardımı ile

$$\min_{|w|=1} |\psi_\alpha(w)| \leq |\psi_\alpha(w)| \leq \max_{|w|=1} |\psi_\alpha(w)|$$

tahmini geçerlidir. $\psi_\alpha$ holomorf olduğundan basit bir hesapla her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\psi_\alpha' = \frac{1-\alpha}{(1-(1-\alpha)z)^2}$$

ve $\alpha \in (0,1]$ olduğundan her $z \in \mathbb{D}$ için $\psi_{\alpha}^{'} \geq 0$ dır. Dolayısıyla $\psi_{\alpha}$ artandır. Buradan $\psi_{\alpha}$ fonksiyonu $|w| = 1$ çemberinde minimum değerini $z = -1$ noktasında ve maksimum değerini ise $z = 1$ noktasında alır. O halde

$$\min_{|w|=1} |\psi_{\alpha}(w)| = \frac{1}{1+1-\alpha} = \frac{1}{2-\alpha}$$

ve

$$\max_{|w|=1} |\psi_{\alpha}(w)| = \frac{1}{1-1+\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

olur ki

$$\frac{1}{2-\alpha} \leq |\psi_{\alpha}(w)| \leq \frac{1}{\alpha}$$

elde edilir.

$1 \leq p \leq 2$ için (1.8.9), Örnek 1.8.17 ve Teorem 1.8.30 yardımıyla ilk olarak her $z \in \mathbb{D}$ için $|(2-\alpha)\psi_{\alpha}| \geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\|(2-\alpha)E(\alpha)\|_{H^p} &= \left\|(2-\alpha)P_{\psi_{\alpha}}S^t_{\varphi_{\alpha}}\right\|_{H^p} \\
&= \left\|P_{(2-\alpha)\psi_{\alpha}}S^t_{\varphi_{\alpha}}\right\|_{H^p} \\
&\leq \left\|P_{(2-\alpha)\psi_{\alpha}}S^t_{\varphi_{\alpha}}\right\|_{\ell^2}^{\frac{2}{p}} \\
&= \|(2-\alpha)E(\alpha)\|_{\ell^2}^{\frac{2}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak Teorem 1.6.5 den

$$\begin{aligned}
\|(2-\alpha)E(\alpha)\|_{H^p} &\leq (2-\alpha)^{\frac{2}{p}}\|E(\alpha)\|_{\ell^2}^{\frac{2}{p}} = (2-\alpha)^{\frac{2}{p}}.\alpha^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p}} \\
\|E(\alpha)\|_{H^p} &\leq (2-\alpha)^{\frac{2}{p}-1}.\alpha^{-\frac{1}{p}} = (2-\alpha)^{\frac{2-p}{p}}.\alpha^{-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$2 \leq p < \infty$ için de aynı işlemler yapılır. $2 \leq p < \infty$ için her $z \in \mathbb{D}$ iken $|\alpha\psi_{\alpha}| \leq 1$ olduğundan Teorem 1.6.5 i uygularsak

$$\begin{aligned}
\|\alpha E(\alpha)\|_{H^p} &\leq \alpha^{\frac{2}{p}}\|E(\alpha)\|_{\ell^2}^{\frac{2}{p}} = \alpha^{\frac{2}{p}}.\alpha^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p}} \\
\|E(\alpha)\|_{H^p} &\leq \alpha^{\frac{2}{p}}.\alpha^{-\frac{1}{p}-1} = \alpha^{\frac{1}{p}-1} = \alpha^{-\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir ki norm için istenilen tahmin elde edilmiş olur.

**Not 1.8.32( $E(\alpha)$ nın fonksiyonel gösterimi):** $\alpha \in (0,1]$ parametreli Euler matrislerinin direkt hesabı, bir $f \in H^p$ fonksiyonunun Taylor katsayılarının köşegen durumunu kullanarak ifade edilir. Örnek 1.8.22 ile

$$(E(\alpha) f)(z) = \frac{1}{1-(1-\alpha) z} f\left(\frac{\alpha z}{1-(1-\alpha) z}\right)$$

elde edilir.

### 1.9 $\mathbf{A^p}$ Uzayları

Bu bölümde Holomorf fonksiyonların Bergman uzayları geniş bir şekilde incelenecektir. Bölüm 1.8 de tanımlanan bileşke operatörleri, transpoze Sonnenschein matrisleri ve çarpım operatörleri bu uzayda da incelenecektir. Böylece Hardy uzaylarındaki benzerliklerle tekrar transpoze Euler matrisleri ve $\alpha$ parametreli Euler matrislerinin araştırılması yapılır.

Biz ilk önce Bergman uzaylarını tanımlayacağız.

**Tanım 1.9.1:** $1 \leq p < \infty$ olsun. $f \in H(\mathbb{D})$ fonksiyonu için $\mathbb{D}$ birim dairesinin normlu yüzey ölçüsü olarak $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$ alınarak

$$\|f\|_p := \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{1.9.1}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

$$A^p := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_p < \infty \right\} \tag{1.9.2}$$

ifadesine $A^p$ *Bergman uzayı* denir.

**Not 1.9.2:** $1 \leq p < \infty$ için $A^p$ , $L^p(\mathbb{D})$ nin lineer bir alt uzayıdır. Bu temelden $A^p$ ye $L^p(\mathbb{D})$ nin aşağıdaki özellikleri iletilir.

**(a)** $1 \leq p \leq q < \infty$ için $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ ve $A^p \supset A^q$ geçerlidir.

**(b)** $1 < p < \infty$ için $A^p$ düzgün konveks normlu bir uzaydır.

**Teorem 1.9.3:** $1 \leq p < \infty$ için $\left(A^p, \|.\|_p\right)$ bir BK-uzayıdır.

**İspat:** Banach uzayı olduğu Zhu [**82, sh.47**] de verilir.

Şimdi $(b_0, b_1, b_2, \cdots)$ Taylor katsayıları dizisi ile $f$ , $A^p$ de bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\,\overline{z}^n dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) r^{n+1} e^{-int} dt dr$$

geçerlidir. Burada $z = re^{it}$ dönüşümü yapılmıştır. Son eşitliğin sağ tarafındaki $f\left(re^{it}\right)$ fonksiyonunun Taylor açılımını yazarsak

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\,\overline{z}^n dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^{n+k+1} e^{ikt} e^{-int} dt dr$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafındaki ifadeye dikkat edecek olursak $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt$ ifadesini integralladığımızda $e^{it} = \cos t + i \sin t$ olduğundan

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = \begin{cases} 2\pi & , \ n = k \\ 0 & , \ n \neq k \end{cases}$$

biçimindedir. O halde bunu yukarıdaki eşitlikte yerine yazacak olursak

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\,\overline{z}^n dA(z) = \frac{1}{\pi} 2\pi \int_0^1 b_n r^{2n+1} dr = \frac{b_n}{n+1}$$

elde edilir. Buradan $L^p(\mathbb{D})$ için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{D}} f(z)\,\overline{z}^n dA(z) \right| &\leq \left( \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_{\mathbb{D}} |\overline{z}^n|^q dA(z) \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left| \frac{b_n}{n+1} \right| &\leq \|f\|_p \cdot \|z^n\|_q \end{aligned}$$

geçerlidir ve buradan

$$|b_n| \leq (n+1) \,.\, \|z^n\|_q \cdot \|f\|_p \tag{1.9.3}$$

elde edilir. O halde Lemma 1.2.2 den istenilen elde edilir.

$A^p$ nin AK-özelliğini göstermek için ilk olarak $1 < p < \infty$ için 1.8.8 den $f \in L^p[0, 2\pi]$ fonksiyonunun Fourier serisinin $L^p$ normu içinde $f$ e yakınsak olduğu gerçeğini hatırlamalıyız.

Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $f \in L^p[0, 2\pi]$ fonksiyonunun $n-$inci Fourier polinomunu düzenleyen sınırlı lineer operatörleri $T_n(f)$ ile gösterirsek Banach-Steinhaus Teoreminden, $p$ den bağımsız $C_p$ sabitleri ile

$$\|T_n(f)\| \leq C_p. \|f\|_p \qquad (n \in \mathbb{N}\ ,\ f \in L^p[0, 2\pi])$$

elde edilir. Buradan her hangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ , $A^p$ dedir ve $0 \leq r < 1$ için ilk olarak

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k r^k e^{ikt} \right|^p dt \leq C_p^p \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right|^p dt$$

elde edilir. Bu son eşitliği $\frac{r}{\pi}$ ile çarpıp $r \in (0, 1)$ için integrallarsak

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k r^k e^{ikt} \right|^p rdtdr \leq \frac{C_p^p}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right|^p rdtdr$$

ve

$$\int_{\mathbb{D}} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k z^k \right|^p dA(z) \leq C_p^p \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z)$$

elde edilir.

Her hangi bir $f \in A^p$ için $f$ nin Taylor polinomları dizisinin $A^p$ içinde sınırlı olduğu başka şekilde ispatlanıyordu. $A^p$ nin AK-özelliği Wilansky [**81,sh.170**] in yardımıyla elde edilir. Çünkü polinomların kümesi $A^p$ de yoğundur.

**Teorem 1.9.4:** $1 < p < \infty$ için $A^p$ bir AK-uzayıdır.

Transpoze Euler matrislerinin araştırılması 1.8 deki gibi bileşke operatörleri kavramı ile yapılır. $\varphi$ nin hangi koşulları altında $C_\varphi$ bileşke operatörünün $A^p$ dizi uzayında kendi üzerine bir dönüşüm olduğu Littewood'un subordinat prensibi yardımıyla $\varphi$ ye ek koşullar getirilmesi ile elde edilir. Bu durumda $A^2$ uzayı için uygun kanıt Bady [**4, sh.128**] de bulunur. Eğer Teorem 1.8.12 deki uygun durum kullanılırsa aşağıdaki genel sonuç ortaya çıkar.

**Teorem 1.9.5 ($A^p$ üzerindeki bileşke operatörleri):** $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ile $\varphi \in H(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(a) $C_\varphi \in B(A^p)$

(b) $1 \leq \|C_\varphi\|_{A^p} \leq \left(\dfrac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{2}{p}}$

Teorem 1.8.11 in Teorem 1.9.5 ile kombinasyonu ile transpoze Sonnenschein matrisleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 1.9.6( $A^p$ üzerinde transpoze Sonnenschein matrisleri ):** $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ile $\varphi \in H(\mathbb{D})$ olsun ve $S_\varphi$ Sonnenschein matrisini göstersin. Bu durumda

(a) $S_\varphi^t \in B(A^p)$

(b) $1 \leq \|S_\varphi^t\|_{A^p} \leq \left(\dfrac{1+|s_{10}|}{1-|s_{10}|}\right)^{\frac{2}{p}}$

geçerlidir.

Bergman uzayları durumunda da bu sonucu iki örnekle uyguluyoruz.

**Örnek 1.9.7:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Örnek 1.8.16 de olduğu gibi $\alpha \in (0,1]$ için Transpoze Euler matrisleri için aşağıdakiler geçerlidir.

(a) $E^t(\alpha) \in B(A^p)$

(b) $1 \leq \|E^t(\alpha)\|_{A^p} \leq \left(\dfrac{2-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{2}{p}}$

Euler matrislerinin araştırılmasına göre transpoze Euler matrislerinin yanında transpoze Taylor matrislerini de inceliyoruz.

**Örnek 1.9.8:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer Örnek 1.8.17 deki yöntem kullanılırsa $\alpha \in (0,1]$ için transpoze Taylor matrisleri için aşağıdakiler geçerlidir.

(a) $T^t(\alpha) \in B(A^p)$

(b) $\|T^t(\alpha)\|_{A^p} = 1$

Euler matrislerini $A^p$ nin kendi üzerine lineer bir dönüşümü olarak benimsemek için çarpım matrislerinin aşağıdaki sonucuna ihtiyaç duyulur.

**Teorem 1.9.9($A^p$ üzerinde çarpım operatörleri):** $1 \leq p < \infty$ ve $\psi \in H^\infty$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

(a) $M_\psi \in B(A^p)$

(b) $\|M_\psi\|_{A^p} \leq \|\psi\|_\infty$

Örnek 1.9.8 ve Teorem 1.9.9 ile Euler matrisleri ile ilgili ilk sonuç Örnek 1.8.22 daki gibi elde edilir.

**Örnek 1.9.10:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in (0,1]$ için

**(a)** $E(\alpha) \in B(A^p)$

**(b)** $\|E(\alpha)\|_{A^p} \leq \alpha^{-1}$

geçerlidir.

Bu durumda da biz Euler matrislerinin ve transpoze Euler matrislerinin operatör normlarının Şimdiye kadarki tahminlerini daraltabiliyoruz. İlk olarak $E(\alpha)$ ve $E^t(\alpha)$ nin Not 1.8.32 ve Not 1.8.29 da verilen fonksiyon gösterimlerinin $A^p$ uzayları için geçerli olduğunu biliyoruz. Gerçekten de bu durum $H(\mathbb{D})$ için geçerlidir.

**Not 1.9.11 ($E(\alpha)$ ve $E^t(\alpha)$ nin fonksiyonel gösterimi):** Her $f \in A^p$ ve herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

**(a)** $(E(\alpha)f)(z) = \dfrac{1}{1-(1-\alpha)z} f\left(\dfrac{\alpha z}{1-(1-\alpha)z}\right)$

**(b)** $(E^t(\alpha)f)(z) = f(\alpha z + 1 - \alpha)$

geçerlidir.

Bununla birlikte aşağıdaki teorem verilir.

**Teorem 1.9.12 ($A^p$ üzerinde transpoze Euler matrisleri):** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda her hangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

**(a)** $E^t(\alpha) \in B(A^p)$

**(b)** $\|E^t(\alpha)\|_{A^p} \leq \alpha^{-\frac{2}{p}}$

geçerlidir.

**İspat:** Teoremin ilk kısmı Örnek 1.9.7 den elde edilir. Eğer $\alpha \in (0,1]$ için $\varphi_\alpha$ holomorf fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \quad \mathbb{D} &\to \quad \mathbb{D} \\ z &\mapsto \quad \varphi_\alpha(z) := \alpha z + 1 - \alpha \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanırsa dönüşüm teoremi ve Not 1.9.11 (b) nin kullanılmasıyla

$$\|E^t(\alpha)f\|_p^p = \int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\alpha(z))|^p \, dA(z)$$

biçimindedir. Son eşitliğin sağ tarafını $\alpha^2$ ile çarpıp bölersek ve $\varphi_\alpha'(z) = \alpha$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned}\left\|E^t(\alpha) f\right\|_p^p &= \frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_\alpha(z))|^p \cdot \left|\varphi_\alpha'(z)\right|^2 dA(z) = \frac{1}{\alpha^2}\int_{\varphi_\alpha(\mathbb{D})} |f(w)|^p \, dA(w) \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \, dA(w) = \frac{1}{\alpha^2}\|f\|_p^p\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafı $\|f\|_p^p$ ye böler $p$-inci kök alır ve $f \neq \theta$ için sup alırsak norm için istenilen tahmini elde ederiz.

**Teorem 1.9.13 ($A^p$ üzerinde Euler matrisleri):** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda her hangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

(a) $E(\alpha) \in B(A^p)$

(b) $\|E(\alpha)\|_{A^p} \leq \begin{cases} (2-\alpha)^{\frac{4-p}{p}} . \alpha^{-\frac{2}{p}} & , \quad 1 \leq p \leq 4 \\ \alpha^{-1+\frac{2}{p}} & , \quad 4 \leq p < \infty \end{cases}$

geçerlidir.

**İspat:** Teoremin ilk kısmı Örnek 1.9.10 dan alınır. İkinci kısım için herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \varphi_\alpha(z) := \frac{\alpha z}{1-(1-\alpha) z} \end{aligned}$$

holomorf fonksiyonunu alalım ve bu fonksiyona bağlı olarak

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \psi_\alpha(z) := \frac{\varphi_\alpha(z)}{\alpha z} \end{aligned}$$

tanımlayalım. Holomorf fonksiyonlar için maksimum ilkenin yardımı ile her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{1}{2-\alpha} \leq |\psi_\alpha(w)| \leq \frac{1}{\alpha}$$

geçerlidir.

$1 \leq p \leq 4$ için Not 1.9.11 (a) gösterim teoreminin kullanılmasıyla her $z \in \mathbb{D}$

için $|(2-\alpha)\psi_\alpha| \geq 1$ eşitsizliğini kullanarak operatör normu için

$$\begin{aligned}
\|E(\alpha) f\|_p^p &= \int_{\mathbb{D}} |\psi_\alpha(z)|^p \cdot |f(\varphi_\alpha(z))|^p \, dA(z) \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \int_{\mathbb{D}} |\psi_\alpha(z)|^{p-4} \cdot |f(\varphi_\alpha(z))|^p \cdot \left|\varphi_\alpha'(z)\right|^2 dA(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliği $(2-\alpha)^{4-p}$ ile çarpıp bölersek

$$\begin{aligned}
\|E(\alpha) f\|_p^p &\leq \frac{(2-\alpha)^{4-p}}{\alpha^2} \int_{\mathbb{D}} |(2-\alpha)\psi_\alpha(z)|^{p-4} \cdot |f(\varphi_\alpha(z))|^p \cdot \left|\varphi_\alpha'(z)\right|^2 dA(z) \\
&\leq \frac{(2-\alpha)^{4-p}}{\alpha^2} \int_{\varphi_\alpha(\mathbb{D})} |f(w)|^p \, dA(w) \\
&\leq \frac{(2-\alpha)^{4-p}}{\alpha^2} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \, dA(w) \\
&= \frac{(2-\alpha)^{4-p}}{\alpha^2} \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

elde edilir.

$2 \leq p < \infty$ durumunda her $z \in \mathbb{D}$ iken $|\alpha\psi_\alpha| \leq 1$ eşitsizliği yardımıyla

$$\|E(\alpha) f\|_p^p \leq \alpha^{2-p} \|f\|_p^p$$

elde edilir. Böylece (b) ispatlanır.

# BÖLÜM 2

## 2. GAMMA MATRİSLERİNİN BK – UZAYLARI

Bu bölümde Hausdorff matrislerinin bir sınıfı olan transpoze veya transpoze olmayan Gamma matrisleri yer almaktadır. $\ell^p$, $c_0$, $c$, $H^p$ ve $A^p$ BK-uzayları üzerinde verilmiş kendi üzerine sınırlı lineer dönüşümlerin Gamma matrislerini karekterize edebilmek için kriterler verilmiştir. Bunun yanında yardımcı olarak lineer operatörlerin yarı grupları kullanılır. Birinci mertebeden sınırlı reel Gamma matrislerinin transpozlarının resolventi, lineer operatörlerin uygun yarı gruplarının sonsuz küçük üreticilerinin sıfır durumudur. Bu sonuçlar uygun olarak geliştirilir. Çünkü, bu yarı gruplar araştırılan BK-uzaylarından bağımsız olarak seçilebilir. Bunların dışında farklı BK-uzayları üzerinde 1. mertebeden Gamma ve transpoze Gamma matrislerinin araştırılmasında kolaylık açısından lineer operatörlerin yarı gruplarının teorisi kullanılır.

### 2.1 Lineer Operatörlerin Yarı Grupları

Gelecek bölümler için önemli olan kavramlar; yarı gruplar, $C_0$ yarı grupları ve daralma yarı gruplarıdır. $C_0$ yarı gruplarının karekterizasyonu için gerekli şartlar verilecektir. Bu kriterler özel yarı grup olan lineer operatörlere ilişkin yolları gösterir.

$f(t) = e^{ta}$ fonksiyonu reel (veya kompleks), negatif olmayan, genel olarak sürekli bir fonksiyondur ve $f(0) = 1$ , $f(t+u) = f(t).f(u)$ geçerlidir. Buna karşılık

$$T(t+u) = T(t).T(u) \quad , \quad T(0) = I \quad , \quad t,u \geq 0 \qquad (2.1.1)$$

denklemini sağlayan $t \geq 0$ değeri üzerinde tanımlı, daha geniş, sürekli, operatör değerli fonksiyonların tanımlanması problemine değineceğiz. Bu denklemi sağlayan fonksiyon değerli $T(t)$ operatörüne, operatörlerin yarı grubu denir. E. Hille, R. S. Philips ve K. Yosida tarafından tanımlanan bu yarı grupların, analitik teoreide göze çarpan özelliklerini vereceğiz. Basit bir şekilde biz bazı anlamlar içinde $T(t)$ yarı grubunun bir skaler farkıyla üstel fonksiyon olduğunu bekleyebiliriz.

**Tanım 2.1.1(Lineer Operatörlerin Yarı Grubu):** $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. Bu durumda $T : \mathbb{R}^{\geq 0} \to B(X)$ dönüşümü

(a) $T(0) = I$

(b) $T(t+u) = T(t).T(u) \quad , \quad \forall t, u \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

koşullarını sağlarsa $T$ ye *lineer operatörlerin* $X$ *deki yarı grubu* denir.

Eğer bu şartlara ilâve olarak

(c) $\forall x \in X$ için $\lim\limits_{t \to 0^+} T(t)\, x = x$

koşulunu sağlıyorsa $T$ lineer operatölerin yarı grubu *kuvvetli süreklidir* veya $C_0$ *yarı grubudur* denir.

Eğer

(d) $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $\|T(t)\|_X \leq 1$

ise $T$ lineer operatörlerin yarı grubuna, *daralma yarı grubu* denir.

İleriki bölümde sadece BK-uzayındaki $C_0$ yarı grupları ile ilgileneceğiz. Bunların sürekliliğini araştırmak çok zor olduğundan bunların karekterlerini belirlememiz gerekir. Bunun için fonksiyonel analizden üç teorem vereceğiz.

**Teorem 2.1.2:** $(X, \|.\|)$ bir düzgün konveks Banach uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(a) $(x_n)$ , $x$ e kuvvetli yakınsaktır.

(b) $(x_n)$ , $x$ e zayıf yakınsaktır ve $\lim\limits_{n \to \infty} \sup \|x_n\| \leq \|x\|$

geçerlidir.

**İspat:** Brezis [6, sh.52]

**Teorem 2.1.3:** $(X, \|.\|)$ bir yansımalı Banach uzayı ve $(x_n)$ norma göre yakınsak olsun. Bu durumda $(x_n)$ nin zayıf yakınsak olan bir $(x_{nk})$ alt dizisi vardır.

**İspat:** Brezis [6, sh.50]

**Teorem 2.1.4:** Düzgün konveks Banach uzayları yansımalıdır.

**İspat:** Hirzebruch, Scharlau [**31, sh.78**]

Düzgün konveks BK-uzayında bir $(x_n)$ dizisinin kuvvetli yakınsaklığı aşağıdaki gibi verilir.

**Teorem 2.1.5:** $(X, \|.\|)$ düzgün konveks bir BK-uzayı, $\left(x^{(n)}\right)$, $X$ de bir dizi uzayı ve $x \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

**(a)** $\left(x^{(n)}\right)$ , $x$ e kuvvetli yakınsaktır.

**(b)** $\left(x^{(n)}\right)$ , $x$ e kuvvetli koordinatsal yakınsaktır, yani; $\forall j \in \mathbb{N}$ için $\left(x_j^{(n)}\right)$ , $x_j$ ye yakınsaktır ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \left\|x^{(n)}\right\| \leq \|x\|$ geçerlidir.

**İspat:** $(a) \Rightarrow (b)$: koordinat uzayı olduğundan açıktır.

$(b) \Rightarrow (a)$: Teorem 2.1.2 den dolayı $\left(x^{(n)}\right)$ nin $x$ e zayıf yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki bu sağlanmasın. Yani; bir $f \in X'$ için $f\left(x^{(n)}\right) \nrightarrow f(x)$ olsun. Yani; verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x^{n_k}) - f(x)| \geq \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.1.4}$$

olacak şekilde $\left(x^{(n)}\right)$ nin bir $\left(x^{(n_k)}\right)$ alt dizisi var olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \left\|x^{(n)}\right\| \leq \|x\|$ olduğundan $\left(x^{(n_k)}\right)$ sınırlı norma sahiptir. $\left(x^{(n_k)}\right)$ nın kendisi $\bar{x} \in X'$ ne yakınsak olsun. BK-uzayında zayıf yakınsaklık koordinatsal yakınsaklığı gerektirdiğinden her $j \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(n_k)} = \overline{x_j}$ geçerlidir. Aksi taktirde her $j \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(n_k)} = x_j$ olur. Yani; $x = \bar{x}$ elde edilir. Buna göre $x^{(n_k)} \to x$ dir. Bu ise (2.1.4) ile çelişir.

Son teorem daralma yarı gruplarının kuvvetli sürekliliğine dair bir kriter olarak gösterilebilir.

**Teorem 2.1.6:** $(X, \|.\|)$ bir düzgün konveks BK-uzayı ve $T : \mathbb{R}^{\geq 0} \to B(X)$ bir daralma yarı grubu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

**(a)** $T$ bir $C_0$ yarı grubudur.

**(b)** Her $x \in X$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{t\to 0^+} [T(t)\,x]_j = x_j$ yani; her $x \in X$ , $t \to 0^+$ iken $T(t)\,x$ , $x$ e koordinatsal yakınsar.

**İspat:** $(a) \Rightarrow (b)$ : Tanımdan ve Teorem 2.1.5 den açıktır.

$(b) \Rightarrow (a)$ : Her $x \in X$ için $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)\,x = x$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $(t_n)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ olsun. Hipotezden $T$ bir daralma yarı grubu olduğundan

$$\|T(t_n)x\| \leq \|T(t_n)\|_X \cdot \|x\| \leq \|x\|$$

geçerlidir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|T(t_n)x\| \leq \|x\|$$

elde edilir. (b) den $\lim\limits_{n\to\infty} [T(t_n)x]_j = x_j$ $(\forall j \in \mathbb{N}$ için) geçerlidir. Teorem 2.1.5 den durum açıktır.

**Teorem 2.1.7:** $(X, \|.\|)$ bir BK-uzayı, $(Y, \|.\|_*)$, $X$ in yoğun lineer alt uzayı, $T : \mathbb{R}^{\geq 0} \to B(X)$ , $\sup\left\{\|T(t)\|_X : t \in \mathbb{R}^{\geq 0}\right\}$ ve $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $T(t)Y \subset Y$ ile bir yarı grup olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \widetilde{T} : \mathbb{R}^{\geq 0} &\to B(Y) \\ t &\mapsto \widetilde{T}(t) := T(t)|_Y \end{aligned}$$

$Y$ de bir $C_0$ yarı grubu ise $T$ , $X$ de bir $C_0$ yarı grubudur.

**İspat:** Verilen şartlarda $\|T(t)\| \leq C$ olacak şekilde bir $C > 0$ ve her $y \in Y$ için $\|y\| \leq M.\|y\|_*$ olacak şekilde $\exists M > 0$ sayısı vardır. Her $x \in X$ , her $y \in Y$ için

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\| &= \|T(t)x - T(t)y + T(t)y - y + y - x\| \\ &\leq \|T(t)x - T(t)y\| + \|T(t)y - y\| + \|x - y\| \\ &\leq \|T(t)\|.\|x - y\| + M.\|T(t)y - y\|_* + \|x - y\| \\ &\leq (C+1)\|x - y\| + M\left\|\widetilde{T}(t)y - y\right\|_* \end{aligned}$$

elde edilir. $t \to 0^+$ için limit alırsak ve $\overline{Y} = X$ olduğunu kullanarak $y \to x$ olacak şekilde seçersek $\widetilde{T}$ bir $C_0$ yarı grubu olduğundan

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| \leq \lim_{t\to 0^+}\left((C+1)\|x - y\| + M\left\|\widetilde{T}(t)y - y\right\|_*\right) = 0$$

olur ki istenilen elde edilir.

**Teorem 2.1.8:** $T : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow B(c)$ bir yarı grup ve her $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $T(t)\, c_0 \subset c_0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \widetilde{T} : \mathbb{R}^{\geq 0} &\longrightarrow B(c_0) \\ t &\longmapsto \widetilde{T}(t) := T(t)\,|_{c_0} \end{aligned}$$

$c_0$ üzerinde bir $C_0$ yarı gruptur ve $\mathbf{e} = (1, 1, 1, \dots)$ olmak üzere $\lim\limits_{t \to 0^+} T(t)\,\mathbf{e} = \mathbf{e}$ ise $T$ , $c$ uzayı üzerinde bir $C_0$ yarı grubudur.

**İspat:** $x \in c$ ve $\alpha_x := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ olsun. Bu durumda $(x - \alpha_x \mathbf{e}) \in c_0$ ile $x = (x - \alpha_x \mathbf{e}) + \alpha_x \mathbf{e}$ dir. Bu durumda her $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\begin{aligned} \|T(t)\,x - x\| &= \|T(t)\,((x - \alpha_x \mathbf{e}) + \alpha_x \mathbf{e}) - (x - \alpha_x \mathbf{e}) - \alpha_x \mathbf{e}\| \\ &\leq \|T(t)\,(x - \alpha_x \mathbf{e}) - (x - \alpha_x \mathbf{e})\| + |\alpha_x| \,.\, \|T(t)\,\mathbf{e} - \mathbf{e}\| \end{aligned}$$

geçerlidir. Bu son eşitlikte $t \rightarrow 0^+$ için limit alırsak bir önceki teoremden istenilen elde edilir.

## 2.2 $\mathbf{T}_a$ ve $\mathbf{S}_a$ Yarı Grupları

Bu bölümde $T_a$ ve $S_a$ yarı grupları tanımlanacak ve birinci kısımdan onların farklı BK-uzaylarındaki $C_0$ yarı grupları gösterilecektir.

### $\mathbf{T}_a$ Yarı Grubu

Biz ilk önce $T_a$ yı tanımlayabilmek için Tanım 1.5.5 ve Tanım 1.5.6 de $\alpha \in \mathbb{R}$ ye göre Euler matrisini hatırlayalım.

$$e_{nk}(\alpha) := \begin{cases} \dbinom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile $E(\alpha) = (e_{nk}(\alpha))_{n,k \in \mathbb{N}}$ biçiminde tanımlanmıştı. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için bu matrisler

$$E(\alpha\beta) = E(\alpha)\, E(\beta)$$

eşitliğini sağlarlar. Bu durumda bunlar yardımıyla biz lineer operatörlerin yarı gruplarını tanımlayabiliriz.

Şimdi $\ell^p$ uzayı ile işe başlayalım.

**Teorem 2.2.1:** $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $a \geq \dfrac{1}{p}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R}^{\geq 0} &\rightarrow B(\ell^p) \\ t &\mapsto T_a(t) := e^{-t}E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

operatörü $\ell^p$ de kuvvetli sürekli daralma yarı grubudur ve $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\|T_a(t)\|_{\ell^p} \leq e^{-\left(1-\frac{1}{pa}\right)t}$$

geçerlidir.

**İspat:** Teorem 1.6.5 den $0 < \alpha \leq 1$ için $\|E(\alpha)\|_{\ell^p} \leq \alpha^{-\frac{1}{p}}$ ile $E(\alpha) \in B(\ell^p)$ dir. Buradan her hangi bir $a > 0$ için

$$\|T_a(t)\|_{\ell^p} \leq e^{-t}e^{\frac{t}{pa}} = e^{-\left(1-\frac{1}{pa}\right)t}$$

ile $T_a$ , $\ell^p$ üzerinde lineer operatörlerin yarı grubudur. $a \geq \dfrac{1}{p}$ olduğundan $-\left(1-\dfrac{1}{pa}\right)t \leq 0$ dır. Ayrıca, $e^{-t}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için azalan olduğundan $e^{-t}$ , $t = 0$ noktasında maksimum değerini alır, yani; $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $\|e^{-t}\| \leq 1$ dir. Dolayısıyla $T_a$ bir daralma yarı grubudur. Devamında her hangi bir $x := (x_k) \in \ell^p$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+}[T_a(t)x]_n &= \lim_{t\to 0^+}\left[e^{-t}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{-\frac{tk}{a}}\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)^{n-k}x_k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\lim_{t\to 0^+}e^{-t}e^{-\frac{tk}{a}}\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)^{n-k}\right]x_k \\ &= x_n \end{aligned}$$

elde edilir. $T_a(t)x$, $t \to 0^+$ koşulunda $x$ e koordinatsal yakınsar. Bu ise Teorem 1.6.4 ve Teorem 2.1.6 dan $T_a$ nın $C_0$ yarı grubu olduğunu gösterir.

Böylece $c_0$ ve $c$ uzayları için aşağıdakiler elde edilir.

**Teorem 2.2.2:** Her $a > 0$ reel sayısı için

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R}^{\geq 0} &\rightarrow B(c_0) \\ t &\mapsto T_a(t) := e^{-t}E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{aligned}$$

$c_0$ da kuvvetli sürekli daralma yarı grubudur ve $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\|T_a(t)\|_{c_0} \leq e^{-t}$$

geçerlidir.

**İspat:** Teorem 1.7.2 den her $0 < \alpha \leq 1$ için $\|E(\alpha)\|_{c_0} \leq 1$ ile $E(\alpha) \in B(c_0)$ geçerlidir. Buradan $T_a$ her hangi bir $a > 0$ için

$$\begin{aligned} \|T_a(t)\|_{c_0} &= \left\|e^{-t}E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right)\right\| = e^{-t}\left\|E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right)\right\| \\ &\leq e^{-t}.1 = e^{-t} \end{aligned}$$

ile $c_0$ üzerinde lineer operatörlerin yarı grubudur. Bir önceki teoremde olduğu gibi $T_a$ bir daralma yarı grubudur. Ayrıca $\sup\left\{\|T_a(t)\| : t \in \mathbb{R}^{\geq 0}\right\} \leq 1$ geçerlidir. Her hangi bir $1 < p < \infty$ için $\ell^p$ , $c_0$ ın yoğun lineer bir alt uzayıdır. Tanım 2.1.1 den $\forall\ t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $T_a(t)\,\ell^p \subset \ell^p$ olduğundan

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_a : \mathbb{R}^{\geq 0} &\rightarrow B(\ell^p) \\ t &\mapsto \widetilde{T}_a(t) := T_a(t)\,|_{\ell^p} \end{aligned}$$

$\ell^p$ üzerinde bir $C_0$ yarı gruptur. $T_a$ nın $C_0$ yarı grubu olduğu Teorem 2.1.7 den elde edilir.

**Teorem 2.2.3:** Her $a > 0$ reel sayısı için

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R}^{\geq 0} &\rightarrow B(c) \\ t &\mapsto T_a(t) := e^{-t}E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $T_a$ operatörü $c$ üzerinde kuvvetli sürekli daralma yarı grubudur ve $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\|T_a(t)\|_c \leq e^{-t}$$

geçerlidir.

**İspat:** Teorem 1.7.3 den her $0 \leq \alpha \leq 1$ için $\|E(\alpha)\|_c \leq 1$ ile $E(\alpha) \in B(c)$ geçerlidir. Dolayısıyla her hangi bir $a > 0$ için $c$ üzerinde

$$\|T_a(t)\|_c \leq e^{-t}$$

ile $T_a$ lineer operatörlerin bir yarı grubu tanımlanır. Teorem 2.2.2 den $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $T_a(t)\, c_0 \subset c_0$ geçerlidir ve

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T}_a : \mathbb{R}^{\geq 0} & \to & B(c_0) \\ t & \mapsto & \widetilde{T}_a(t) := T_a(t)\,|_{c_0} \end{array}$$

bir $C_0$ yarı grubudur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} T_a(t)\,\mathbf{e} &= \lim_{t\to 0^+} e^{-t}\left(\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{-\frac{kt}{a}}\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)^{n-k}\right]_n\right) \\ &= \lim_{t\to 0^+} e^{-t}\mathbf{e} = \mathbf{e} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.1.8 den $T_a$ , $C_0$ yarı grubudur.

$H^p$ fonksiyon uzayı üzerinde aşağıdakiler geçerlidir.

**Teorem 2.2.4:** $1 \leq p < \infty$ , $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. $1 \leq p < 2$ için $a \geq 1$ ve $2 \leq p < \infty$ için $a \geq \dfrac{1}{q}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} T_a : \mathbb{R}^{\geq 0} & \to & B(H^p) \\ t & \mapsto & T_a(t) := e^{-t} E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan $T_a$ operatörü $H^p$ üzerinde kuvvetli sürekli daralma yarı grubudur. Ayrıca $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\|T_a(t)\|_{H^p} = \begin{cases} e^{-\left(1-\frac{1}{a}\right)t} & , \quad p = 1 \\ \left(2 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{\frac{2-p}{p}} e^{-\left(1-\frac{1}{ap}\right)t} & , \quad 1 < p < 2 \\ e^{-\left(1-\frac{1}{qa}\right)t} & , \quad 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

geçerlidir.

**İspat:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda Örnek 1.8.22 ve Teorem 1.8.31 den her $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\|E(\alpha)\|_{H^p} = \begin{cases} \alpha^{-1} & , \quad p = 1 \\ (2-\alpha)^{\frac{2-p}{p}} \alpha^{-\frac{1}{p}} & , \quad 1 < p < 2 \\ \alpha^{-\frac{1}{q}} & , \quad 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

ile $E(\alpha) \in B(H^p)$ geçerlidir. Dolayısıyla $T_a$ her hangi bir $a > 0$ için $H^p$ üzerinde lineer operatörlerin bir yarı grubudur ve

$$\|T_a(t)\|_{H^p} = \begin{cases} e^{-\left(1-\frac{1}{a}\right)t} & , \quad p = 1 \\ \left(2 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{\frac{2-p}{p}} e^{-\left(1-\frac{1}{ap}\right)t} & , \quad 1 < p < 2 \\ e^{-\left(1-\frac{1}{qa}\right)t} & , \quad 2 \le p < \infty \end{cases}$$

geçerlidir.

$2 \le p < \infty$ ve $a \ge \dfrac{1}{q}$ için $T_a$ bir daralma yarı grubudur. Teorem 2.2.1 de gösterildiği gibi $\forall x \in H^p$ ve $t \to 0^+$ için $T_a(t)\,x$ , $x$ e koordinatsal yakınsar. Bununla birlikte 1.8.8 (b) ve Teorem 2.1.6 dan $T_a$ nın bir $C_0$ yarı grubu olduğu elde edilir.

Eğer $1 \le p < 2$ ve $a > 1$ ise her $0 < \alpha \le 1$ için

$$\sup\left\{\|T_a(t)\|_{H^p} : t \in \mathbb{R}^{\ge 0}\right\} \le \begin{cases} 1 & , \quad p = 1 \\ 2^{\frac{2-p}{p}} & , \quad 1 < p < 2 \end{cases}$$

geçerlidir.

Herhangi bir $1 \le p < 2$ için, örneğin $H^2$ , $H^p$ ye yerleşen yoğun lineer alt uzayı önceki düşüncelere göre 1.8.6 (b) ve 1.8.8 (b) den $\forall t \in \mathbb{R}^{\ge 0}$ için $T_a(t)\,H^2 \subset H^2$ geçerlidir ve

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_a : \mathbb{R}^{\ge 0} &\to B(H^2) \\ t &\mapsto \widetilde{T}_a(t) := T_a(t)\,|_{H^2} \end{aligned}$$

$H^2$ üzerinde bir $C_0$ yarı grubudur. Teorem 2.1.7 den ise $T_a$ nın $C_0$ yarı grubu niteliği elde edilir.

$A^p$ uzayı için Örnek 1.9.10 ve Teorem 1.9.13 yardımıyla Teorem 2.2.4 ün ispatını belirli bir yerde değiştirerek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

**Teorem 2.2.5:** $1 \le p < \infty$ olsun. O halde $1 \le p < 4$ için $a \ge 1$ ve $4 \le p < \infty$ için $a \ge \dfrac{p-2}{p}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R}^{\ge 0} &\to B(A^p) \\ t &\mapsto T_a(t) := e^{-t} E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $T_a$ operatörü $A^p$ üzerinde kuvvetli sürekli daralma yarı grubudur. Ayrıca $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\|T_a(t)\|_{A^p} = \begin{cases} e^{-\left(1-\frac{1}{a}\right)t} & , \quad p = 1 \\ \left(2 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{\frac{4-p}{p}} e^{-\left(1-\frac{2}{ap}\right)t} & , \quad 1 < p < 4 \\ e^{-\left(1-\frac{p-2}{pa}\right)t} & , \quad 4 \leq p < \infty \end{cases}$$

geçerlidir.

**$S_a$ Yarı Grubu**

$S_a$ yarı gruplarını tanımlayabilmek için $\alpha \in \mathbb{R}$ parametreli transpoze Euler matrislerini hatırlayalım. Tanım 1.5.5 ve Tanım 1.5.6 dan

$$\tilde{e}_{nk}(\alpha) := \begin{cases} \binom{k}{n} \alpha^n (1-\alpha)^{k-n} & , \quad n \leq k \\ 0 & , \quad n > k \end{cases}$$

ile $E^t(\alpha) = (\tilde{e}_{nk}(\alpha))_{n,k \in \mathbb{N}}$ biçiminde tanımlanmıştı. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için bu matrisler

$$E^t(\alpha\beta) = E^t(\alpha).E^t(\beta)$$

eşitliğini sağlarlar. Bu durumda bunlar yardımıyla biz tekrar lineer operatörlerin yarı grubunu tanımlayabiliriz. İleriki bölümlerde gerekli olan teknik bir lemma verelim.

**Lemma 2.2.6:** $x \in \ell^\infty$ olsun Bu durumda

$$h_{xn}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} x_{n+k}.z^k$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarı çapı $r \geq 1$ dir.

**İspat:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\binom{k+n}{k}}{\binom{k+1+n}{k+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{k+1}{k+1+n} = 1$$

olduğundan istenilen elde edilir.

Şimdi asıl konumuza geçip $S_a$ yarı gruplarını tanımlayalım. Bunun için ilk önce $\ell^p$ uzayları ile işe başlayalım.

**Teorem 2.2.7:** $1 < p < \infty$ , $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $a \geq \dfrac{1}{q}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} S_a : \mathbb{R}^{\geq 0} & \rightarrow & B\left(\ell^p\right) \\ t & \mapsto & S_a\left(t\right) := e^{-t} E^t\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{array} \tag{2.2.2}$$

operatörü $\ell^p$ de kuvvetli sürekli daralma yarı grubudur ve $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\left\|S_a\left(t\right)\right\|_{\ell^p} \leq e^{-\left(1-\frac{1}{aq}\right)t}$$

geçerlidir.

**İspat:** Teorem 1.6.7 den $0 < \alpha \leq 1$ için $\left\|E^t\left(\alpha\right)\right\|_{\ell^p} \leq \alpha^{-\frac{1}{q}}$ ile $E^t\left(\alpha\right) \in B\left(\ell^p\right)$ dir. Buradan her hangi bir $a > 0$ için

$$\left\|S_a\left(t\right)\right\|_{\ell^p} \leq e^{-t} e^{\frac{t}{qa}} = e^{-\left(1-\frac{1}{qa}\right)t}$$

ile $S_a$ , $\ell^p$ üzerinde lineer operatörlerin yarı grubudur. $a \geq \dfrac{1}{q}$ olduğundan $S_a$ bir daralma yarı grubudur. Her hangi bir $x := (x_k) \in \ell^p$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left[S_a\left(t\right)x\right]_n &= e^{-t} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} e^{-\frac{tn}{a}} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{k-n} x_k \\ &= e^{-t} e^{-\frac{tn}{a}} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{k-n} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{k-n} x_k \\ &= e^{-t} e^{-\frac{tn}{a}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{k} x_{n+k} \\ &= e^{-t} e^{-\frac{tn}{a}} h_{xn}\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{aligned}$$

geçerlidir.1.6.2 (a) ve Lemma 2.2.6 dan

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \left[S_a\left(t\right)x\right]_n &= \lim_{t\to 0^+} \left[e^{-t} e^{-\frac{tn}{a}} h_{xn}\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)\right] \\ &= h_{xn}\left(0\right) = \binom{n}{0} x_n + \binom{n}{1} x_{n+1}.0 + \binom{n}{2} x_{n+2}.0^2 + \cdots \\ &= \binom{n}{0} x_n = x_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Teorem 1.6.4 ve Teorem 2.1.6 dan $S_a$ nın $C_0$ yarı grubu niteliğini verir.

$H^p$ fonksiyon uzayı için aşağıdaki geçerlidir.

**Teorem 2.2.8:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda her $a \geq \dfrac{1}{p}$ için

$$\begin{array}{rcl} S_a : \mathbb{R}^{\geq 0} & \rightarrow & B\left(H^p\right) \\ t & \mapsto & T_a\left(t\right) := e^{-t} E^t \left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan $S_a$ operatörü $H^p$ üzerinde kuvvetli sürekli daralma yarı grubudur. Ayrıca $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\left\|S_a\left(t\right)\right\|_{H^p} \leq e^{-\left(1-\frac{1}{pa}\right)t}$$

geçerlidir.

**İspat:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda Teorem 1.4.25 den her $0 < \alpha \leq 1$ için $\left\|E^t\left(\alpha\right)\right\|_{H^p} \leq \alpha^{-\frac{1}{p}}$ ile $E^t\left(\alpha\right) \in B\left(H^p\right)$ geçerlidir. Dolayısıyla $S_a$ her hangi bir $a > 0$ için $H^p$ üzerinde lineer operatörlerin bir yarı grubudur ve

$$\left\|S_a\left(t\right)\right\|_{H^p} \leq e^{-\left(1-\frac{1}{pa}\right)t}$$

geçerlidir. $a \geq \dfrac{1}{p}$ için $S_a$ bir daralma yarı grubudur. Teorem 2.2.7 den $\forall x \in H^p$ ve $t \rightarrow 0^+$ için $S_a\left(t\right)x$ , $x$ e koordinatsal yakınsar. $1 < p < \infty$ için 1.8.8 (b) ve Teorem 2.1.6 dan $S_a$ nın $C_0$ yarı grubu niteliği elde edilir.

$p = 1$ için $H^2$ , $H^1$ in yoğun bir alt uzayı olduğundan 1.8.6 (b) ve 1.8.8 (b) yardımıyla $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $S_a\left(t\right)H^2 \subset H^2$ geçerlidir ve

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{S}_a : \mathbb{R}^{\geq 0} & \rightarrow & B\left(H^2\right) \\ t & \mapsto & \tilde{S}_a\left(t\right) := S_a\left(t\right)|_{H^2} \end{array}$$

$H^2$ üzerinde bir $C_0$ yarı grubudur. Teorem 2.1.7 den ise $p = 1$ için $S_a$ nın $C_0$ yarı grubu niteliği elde edilir.

**Not 2.2.9:** Bu iki ispat direkt $A^p$ uzayına taşınamaz. Çünkü; Lemma 2.2.6 oradaki hali ile kullanılamaz.

$$f\left(z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x_n z^n \in A^p$$

fonksiyonu için Teorem (1.9.3) ı kullanırsak

$$|x_n| \leq (n+1) \|z^n\|_q \cdot \|f\|_p$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki tarafını $\binom{k+n}{k}$ ile çarpıp $n \leftrightarrow n+k$ yazarsak

$$\begin{aligned}
\left|\binom{k+n}{k} x_{n+k}\right| &\leq \binom{k+n}{k} \|f\|_p \cdot \|z^{n+k}\|_q \cdot (n+k+1) \\
&= \binom{k+n}{k} \|f\|_p \cdot (n+k+1) \left( \int_{\mathbb{D}} |z|^{(n+k)q} \, dA(z) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \binom{k+n}{k} \|f\|_p \cdot (n+k+1) \left( \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| r^{(n+k)q} . e^{i(n+k)qt} \right| r dt dr \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \binom{k+n}{k} \|f\|_p \cdot (n+k+1) \left( \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{((n+k)q+1)} dt dr \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \binom{k+n}{k} \|f\|_p \cdot (n+k+1) \frac{2^{\frac{1}{q}}}{((n+k)q+2)^{\frac{1}{q}}} \left( r^{(n+k)q+2} \right)^{\frac{1}{q}} \Big|_{r=0}^{1} \\
&= \binom{k+n}{k} \|f\|_p \cdot (n+k+1) \frac{2^{\frac{1}{q}}}{(nq+kq+2)^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\binom{k+n}{k}}{\binom{k+1+n}{k+1}} \left( \frac{nq+kq+q+2}{nq+kq+2} \right)^{\frac{1}{q}} \frac{n+k+1}{n+k+2} = 1$$

olduğunu kullanırsak yukarıdakiler için de $h_{xn}(z)$ kuvvet serisinin bir $r \geq 1$ yakınsaklık yarı çapı vardır.

Tamamen aynı şekilde Örnek 1.9.7 ve Teorem 1.9.12 yardımıyla $A^p$ uzayı için aşağıdaki teorem geçerlidir.

**Teorem 2.2.10:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda her $a \geq \frac{2}{p}$ reel sayısı için

$$\begin{aligned}
S_a : \mathbb{R}^{\geq 0} &\to B(A^p) \\
t &\mapsto S_a(t) := e^{-t} E^t \left( e^{-\frac{t}{a}} \right)
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $S_a$ operatörü $A^p$ üzerinde kuvvetli sürekli daralma yarı grubudur. Ayrıca $\forall t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\|S_a(t)\|_{A^p} \leq e^{-\left(1-\frac{2}{pa}\right)t}$$

geçerlidir.

**Not 2.2.11($\mathbf{T_a}$ ve $\mathbf{S_a}$ nin fonksiyonel gösterimi):** Şimdi literatürle bağlantı kurmak amacıyla $T_a$ ve $S_a$ nın $H^p$ ve $A^p$ uzaylarında analitik gösterimlerini vereceğiz. Not 1.8.32 ve Teorem 2.2.4 den veya Teorem 2.2.8 den uygun bir $a$ için

$$\begin{aligned} T_a : H^p &\rightarrow H^p \\ f(z) &\mapsto (T_a(t)f)(z) := \frac{e^{-t}}{1-\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)z} f\left(\frac{ze^{-t}}{1-\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)z}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} S_a : H^p &\rightarrow H^p \\ f(z) &\mapsto (S_a(t)f)(z) := e^{-t} f\left(ze^{-\frac{t}{a}} - \left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)\right) \end{aligned}$$

biçimindedir. Özel olarak $a = 1$ özel durumu Siskakis'in [**72**] de incelediği önemli bir daralma yarı grubudur. $a = 1$ özel durumunda Siskakis [**72**] de $E(\alpha)$ ve $E^t(\alpha)$ matrislerini kullanmaksızın direkt

$$\phi_t(z) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}-1)z+1} \tag{2.2.2}$$

alarak

$$T_t(f) = f \circ \phi_t\,, \qquad t \geq 0\,,\ f \in H^p \tag{2.2.3}$$

ve

$$S_t(f)(z) = \frac{\phi_t(z)}{z} f(\phi_t(z))\,, \qquad t \geq 0\,,\ f \in H^p \tag{2.2.4}$$

biçiminde tanımlamıştır ve $\{T_t\}$ ve $\{S_t\}$ ailelerinin kuvvetli sürekli olduğunu ispatlamıştır. Bizim kullandığımız $T_a$ ve $S_a$ aileleri $a = 1$ durumunda sırasıyla bu $T_t$ ve $S_t$ yarı gruplarına dönüşür.

Teorem 1.9.13 ve Teorem 2.2.5 veya Teorem 1.9.12 ve Teorem 2.2.10 kullanılarak $A^p$ de $T_a$ ve $S_a$ yarı grupları için de yukarıdakiler geçerlidir.

**2.3 Sonsuz Küçük Üretici**

$X$ Banach uzayındaki tüm $T$ lineer operatörlerinin yarı grubunu, $X$ in eşleniğindeki $A$ lineer operatörlerine bağlamaya *sonsuz küçük üretici* denir. Sonsuz küçük üreticinin önemli özelliklerinden $T_a$ ve $S_a$ yarıgruplarının ağırlıklı Euler yöntemini 2.2 de tanımlamıştık. Bu BK-uzaylarında soyut bir çerçevede yapılır ve her bir $\ell^p, c_0, c, H^p, A^p$ özel BK-uzayları için geçerlidir.

**Tanım 2.3.1(Sonsuz küçük üretici):** $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı ve $T, X$ üzerinde lineer operatörlerin yarı grubu olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left( T(t)x - x \right) \ , \ X \text{ de mevcut} \right\}$$

olarak alalım ve bununla $X$ de $A$ operatörünü

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}(A) &\rightarrow X \\ x &\mapsto Ax := \lim_{t \longrightarrow 0^t} \frac{1}{t} \left( T(t)x - x \right) \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu $A$ operatörü, $T$ yarı grubunun sonsuz küçük üreticisidir.

Eğer $T$ yarı grubu kuvvetli sürekli ise bu durumda buna ait olan $A$ sonsuz küçük üretici aşağıdaki niteliğe sahiptir.

**Teorem 2.3.2:** $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı ve $T$ bir $C_0$ yarı grubu olsun. Bu durumda buna ait olan $A$ sonsuz küçük üretici, $X$ de yoğun bir kümede tanımlı, kapalı lineer bir operatördür. Ayrıca $\mathcal{D}(A) = X$ ise $A$ sınırlıdır.

**İspat:** Dunford, Schwartz [**16, VIII 1.8, sh.620**] , Dunford, Schwartz [**16, VIII 1.9, sh.621**] ve Rudin [**62, sh.359**]

Bir $T$ , $C_0$ yarı grubunun, $A$ sonsuz küçük üreticisi için resolvent küme ifade edilebilir ve resolvent hesaplanabilir.

**Teorem 2.3.3:** $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı, $T$ , $A$ sonsuz küçük üreticisi ile $C_0$-yarı grubu ve

$$w_0 = \inf \left\{ \frac{1}{t} \log \|T(t)\|_X : t \in \mathbb{R} \geq 0 \right\} \tag{2.3.2}$$

karakteristik ($T$ yarı grubunun tipi) olsun. Bu durumda

(a) $w_0 \in [-\infty, \infty)$

$$w_0 = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|_X \tag{2.3.3}$$

(b) $\operatorname{Re} \lambda > w_0$ ile verilmiş her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda \in \rho(A)$ dır ve resolvent için

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \qquad (x \in X) \tag{2.3.4}$$

gösterimi geçerlidir.

**İspat:** Dunford, Schwartz **[16, VIII 1.4, sh.618 ve VIII 1.11, sh.622]**

$T_a$ ve $S_a$ yarı gruplarına tekrar değineceğiz. Aşağıdaki sonuçları iyi bir şekilde formülize edebilmek için birinci mertebeden Gamma-matrislerini kullanacağız.

**Tanım 2.3.4(Birinci mertebeden Gamma-matrisleri):**

$a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ olsun. Bu durumda

$$\Gamma_a := (\gamma_{nk}(a))_{n,k \in \mathbb{N}} := \left(H, \left(\frac{a}{n+a}\right)\right) \tag{2.3.5}$$

matrisine $a$ parametreli (birinci mertebeden) *Gamma matrisi* denir.

**Not 2.3.5:** Katsayıları $(\gamma_{nk}(a))_{n,k \in \mathbb{N}}$ olan $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ parametresi ile verilmiş birinci mertebeden Gamma matrislerinin bir kaç terimini yazalım.

Bunun için

$$h_{nk}(p_k) := \begin{cases} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} p_k & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olduğunu hatırlayıp, $p_k = \left(\frac{a}{k+a}\right)$ olarak alacağız.

O halde

$$
\begin{aligned}
\gamma_{00}(a) &= h_{00}\left(\frac{a}{k+a}\right)=\binom{0}{0}\Delta^{0-0}\left(\frac{a}{0+a}\right)=1\\
\gamma_{10}(a) &= h_{10}\left(\frac{a}{k+a}\right)=\binom{1}{0}\Delta^{1-0}\left(\frac{a}{0+a}\right)=1-\frac{a}{1+a}=\frac{1}{1+a}\\
\gamma_{11}(a) &= h_{11}\left(\frac{a}{k+a}\right)=\binom{1}{1}\Delta^{1-1}\left(\frac{a}{1+a}\right)=\frac{a}{1+a}\\
\gamma_{20}(a) &= h_{20}\left(\frac{a}{k+a}\right)=\binom{2}{0}\Delta^{2-0}\left(\frac{a}{0+a}\right)=\Delta\Delta\left(\frac{a}{0+a}\right)\\
&= \Delta\left(\frac{a}{0+a}-\frac{a}{1+a}\right)=\Delta\left(\frac{a}{0+a}\right)-\Delta\left(\frac{a}{1+a}\right)\\
&= \frac{a}{0+a}-\frac{2a}{1+a}+\frac{a}{2+a}=\frac{1-a}{1+a}+\frac{a}{2+a}=\frac{2}{(1+a)(2+a)}\\
\gamma_{21}(a) &= h_{21}\left(\frac{a}{k+a}\right)=\binom{2}{1}\Delta^{2-1}\left(\frac{a}{1+a}\right)\\
&= 2\left(\frac{a}{1+a}-\frac{a}{2+a}\right)=\left(\frac{2a}{(1+a)(2+a)}\right)\\
\gamma_{22}(a) &= h_{22}\left(\frac{a}{k+a}\right)=\binom{2}{2}\Delta^{2-2}\left(\frac{a}{2+a}\right)=\frac{a}{2+a}\\
&\cdots\\
\gamma_{nk}(a) &= h_{nk}\left(\frac{a}{k+a}\right)=\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\left(\frac{a}{k+a}\right)\\
&= a\binom{n}{k}\sum_{\nu=0}^{n-k}(-1)^{\nu}\frac{\binom{n-k}{\nu}}{k+\nu+a}\qquad,\qquad (k\le n)
\end{aligned}
$$

ve $k>n$ için $\gamma_{nk}(a)=0$ elde edilir. O halde

$$
\gamma_{nk}(a):=\begin{cases} a\binom{n}{k}\sum\limits_{\nu=0}^{n-k}(-1)^{\nu}\dfrac{\binom{n-k}{\nu}}{k+\nu+a} & , \quad k\le n\\ 0 & , \quad k>n\end{cases}
$$

biçimindedir. $a$ parametreli Gamma matrislerinin ilk üç satırı

$$
\Gamma_a=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{1+a} & \frac{a}{1+a} & & \\ \frac{2}{(1+a)(2+a)} & \frac{2a}{(1+a)(2+a)} & \frac{a^2}{(1+a)(2+a)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
$$

biçimindedir.

Not 2.3.5 de olduğu gibi Ters Gamma matrislerinin bir kaç elemanını yazalım.

$$\begin{aligned}
\gamma_{00}^{*}(a) &= h_{00}\left(\frac{k+a}{a}\right)=\binom{0}{0}\Delta^{0-0}\left(\frac{0+a}{a}\right)=1\\
\gamma_{10}^{*}(a) &= h_{10}\left(\frac{k+a}{a}\right)=\binom{1}{0}\Delta^{1-0}\left(\frac{1+a}{a}\right)=\frac{1+a}{a}-\frac{2+a}{a}=-\frac{1}{a}\\
\gamma_{20}^{*}(a) &= h_{20}\left(\frac{k+a}{a}\right)=\binom{2}{0}\Delta^{2-0}\left(\frac{0+a}{a}\right)=\Delta\Delta(1)=\Delta(1)=0\\
\gamma_{21}^{*}(a) &= h_{21}\left(\frac{k+a}{a}\right)=\binom{2}{1}\Delta^{2-1}\left(\frac{1+a}{a}\right)=2\left(\frac{1+a}{a}-\frac{2+a}{a}\right)=-\frac{2}{a}\\
\gamma_{22}^{*}(a) &= h_{22}\left(\frac{k+a}{a}\right)=\binom{2}{2}\Delta^{2-2}\left(\frac{2+a}{a}\right)=\frac{a+2}{a}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

$k \leq n$ için $\gamma_{nk}^{*}(a) = \frac{1}{a}\binom{n}{k}\sum_{\nu=0}^{n-k}(-1)^{\nu}\binom{n-k}{\nu}(k+\nu+a)$ ve $k > 0$ için $\gamma_{nk}^{*}(a)=0$ elde edilir. O halde

$$\gamma_{nk}^{*}(a) := \begin{cases} \frac{1}{a}\binom{n}{k}\sum\limits_{\nu=0}^{n-k}(-1)^{\nu}\binom{n-k}{\nu}(k+\nu+a) &, \quad k\leq n\\ 0 &, \quad k>n \end{cases}$$

şeklindedir. Dolayısıylada Gamma matrisine ait bidiagonal Hausdorff matrisleri

$$\Gamma_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{a} & \frac{a+1}{a} & & & \\ & -\frac{2}{a} & \frac{a+2}{a} & & \\ & & -\frac{3}{a} & \frac{a+3}{a} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

**Not 2.3.7:** Gamma matrislerinde özel olarak $a = 1$ alırsak

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Cesàro-matrisi elde edilir. Cesàro matrisinin tersi

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & -2 & 3 & & \\ & & -3 & 4 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi $T_a$ yarı gruplarının sonsuz küçük üreticilerini açıklayalım. Bu sonsuz küçük üretici kendini herhangi bir $X$ BK-uzayındaki $a$ parametresiyle verilmiş Gamma matrisi yardımıyla belirliyor.

**Teorem 2.3.8($T_a$ nın sonsuz küçük üreticisi):** $(X, \|.\|)$ bir BK-uzayı, $a$ bir pozitif reel sayı,

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R}^{\geq 0} &\to B(X) \\ t &\mapsto T_a(t) := e^{-t} E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{aligned}$$

$X$ de lineer operatörlerin kuvvetli sürekli yarı grubu olsun ve

$$S := \sup \{\|T_a(t)\|_X : t \in \mathbb{R} \geq 0\} < \infty$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $T_a$ yarı grubunun $\mathcal{T}_a$ sonsuz küçük üreticisi,

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_a) = \left\{x \in X : \Gamma_a^{-1} x \in X\right\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{T}_a = -\Gamma_a^{-1} \mid_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)}$$

biçimimdedir. Ayrıca $\mathcal{T}_a$ nın matris gösterimi $-\Gamma_a^{-1}$ matrisinin transpozudur.

**İspat:** İlk önce sonsuz küçük üreticinin $\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)$ tanım kümesinin

$$\left\{x \in X : \Gamma_a^{-1} x \in X\right\}$$

kümesinde olduğunu gösterelim. Bunun için $x = (x_n) \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_a)$ dizisini alalım yani;

$$\lim_{t \to 0^+} \left(e^{-t} E(e^{-\frac{t}{a}})x - x\right)$$

limitinin $X$ de mevcut olduğunu gösterelim. $X$ bir BK-uzayı olduğundan $\mathcal{T}_a x$ koordinatsal yakınsaktır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$[\mathcal{T}_a x]_n = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left( e^{-t} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{-\frac{tk}{a}} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{n-k} x_k - x_n \right)$$

$n = 0$ için

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}_a x]_0 &= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left(e^{-t} - 1\right) x_0 = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-t}\right) x_0 \\ &= -x_0 = \left[-\Gamma_a^{-1} x\right]_0 \end{aligned}$$

ve her hangi bir $n \geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{T}_a x]_n &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left( e^{-t(1+\frac{k}{a})} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{n-k} x_k \right) \\
&\quad + n \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left( e^{-t(1+\frac{n-1}{a})} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) x_{n-1} \right) \\
&\quad + \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left( e^{-t(1+\frac{n}{a})} - 1 \right) x_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \left( \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-t(1+\frac{k}{a})} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{n-k} \right) x_k \\
&\quad + n \left( \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-t(1+\frac{n-1}{a})} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) \right) x_{n-1} \\
&\quad + \left( \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-t(1+\frac{n}{a})} \right) x_n \\
&= \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \left[ - \left(1 + \frac{k}{a}\right) e^{-t(1+\frac{k}{a})} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{n-k} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{a} (n-k) e^{-t(1+\frac{k}{a})} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{n-k-1} \right] x_k \Big|_{t=0} \right\} \\
&\quad + n \left( - \left(1 + \frac{n-1}{a}\right) e^{-t(1+\frac{n-1}{a})} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a} e^{-t(1+\frac{n-1}{a})} \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) x_{n-1} \Big|_{t=0} \right) \\
&\quad - \left( \left(1 + \frac{n}{a}\right) e^{-t(1+\frac{n}{a})} x_n \Big|_{t=0} \right) \\
&= \frac{n}{a} x_{n-1} - \left(1 + \frac{n}{a}\right) x_n = \left[-\Gamma_a^{-1} x\right]_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $\Omega := \{x \in X : \Gamma_a^{-1} x \in X\}$ olarak tanımlayalım. $-\Gamma_a^{-1}|_\Omega$ , $\mathcal{T}_a$ nın devamıdır yani; $\mathcal{T}_a \subset -\Gamma_a^{-1}|_\Omega$ dir. Görüldüğü gibi $I + \Gamma_a^{-1}$ , $w$ dan $w$ ya bire bir örten lineer bir operatördür. Dolayısıyla $(I + \Gamma_a^{-1})|_\Omega$ , $X$ de bire bir örten bir operatördür. $T_a$ yarı grubunun karekteri $w_0 \leq \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log S = 0$ dir. Teorem 2.3.3 (b) den $1 \in \rho(\mathcal{T}_a)$ dır. Böylece $I - \mathcal{T}_a : \mathcal{D}(\mathcal{T}_a) \to X$ örtendir. $(I + \Gamma_a^{-1})|_\Omega$ , $I - \mathcal{T}_a$ nın devamı olduğundan $\Omega = \mathcal{D}(\mathcal{T}_a)$ ve $\mathcal{T}_a = -\Gamma_a^{-1}|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)}$ geçerlidir.

Teorem 2.2.1-Teorem 2.2.5 e kadar olan yarı gruplar Teorem 2.3.8 da verilen koşulu tamamlıyor. Bu sonuçlar tekrar açık bir şekilde gösterilecek.

**Örnek 2.3.9:**

(a) $1 < p < \infty$ ve $a \geq \dfrac{1}{p}$ olsun. Bu durumda $\ell^p$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun sonsuz küçük üreticisi için

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_a) = \left\{x \in \ell^p : \Gamma_a^{-1}x \in \ell^p\right\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{T}_a = -\Gamma_a^{-1}\,|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)}$$

geçerlidir.

(b) $a > 0$ olsun. Bu durumda $c_0$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun sonsuz küçük üreticisi için

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_a) = \left\{x \in c_0 : \Gamma_a^{-1}x \in c_0\right\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{T}_a = -\Gamma_a^{-1}\,|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)}$$

geçerlidir.

(c) $a > 0$ olsun. Bu durumda $c$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun sonsuz küçük üreticisi için

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_a) = \left\{x \in c : \Gamma_a^{-1}x \in c\right\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{T}_a = -\Gamma_a^{-1}\,|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)}$$

geçerlidir.

(d) $1 \leq p < \infty$ , $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ve $1 \leq p < 2$ iken $a \geq 1$ ve $2 \leq p < \infty$ iken $a \geq \dfrac{1}{q}$ olsun. Bu durumda $H^p$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun sonsuz küçük üreticisi için

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_a) = \left\{x \in H^p : \Gamma_a^{-1}x \in H^p\right\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{T}_a = -\Gamma_a^{-1}\,|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)}$$

geçerlidir.

(e) $1 \leq p < \infty$ olsun. $1 \leq p < 4$ iken $a \geq 1$ ve $4 \leq p < \infty$ iken $a \geq \dfrac{p-2}{p}$ olsun. Bu durumda $A^p$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun sonsuz küçük üreticisi için

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_a) = \left\{x \in A^p : \Gamma_a^{-1}x \in A^p\right\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{T}_a = -\Gamma_a^{-1}\,|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)}$$

geçerlidir.

**Not 2.3.10($\mathcal{T}_a$ nın fonksiyonel gösterimi):** Bu bölümde Not 2.2.11 e göre $H^p$ üzerindeki $T_a$ yarı gruplarının sonsuz küçük üreticisi analitik olarak verilmektedir. Biz ilk önce $a = 1$ özel durumu için Siskakis'in [**72, sh.156**] daki gösterimini vereceğiz ve daha sonra bu gösterimi genelleyeceğiz. Bunu Siskakis [**72, sh.156**] aşağıdaki biçimde ifade etmiştir.

**Lemma 2.3.11:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_1$ nin $\mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$ tanım bölgesi; $\mathcal{D}(\mathcal{T}_1) = \left\{ f \in H^p : -z(1-z) f'(z) \in H^p \right\}$ biçimindedir ve

$$\mathcal{T}_1(f)(z) = -z(1-z) f'(z) \quad , \qquad f \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1) \tag{2.3.6}$$

dir.

**İspat:** $z \in \mathbb{D}$ için

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\partial \phi_t(z)}{\partial t} = -z(1-z)$$

olduğu incelenebilir. Burada $\phi_t(z)$ , (2.2.2) de verilen fonksiyondur. Bu durumda iddiamız [**3, Teorem 1.1 ve 3.7**] den elde edilir.

Ancak bu ispat sadece fonksiyonlar teorisindeki argüman ile gösterilmiştir. Şimdi bunu aşağıdaki biçimde genelleyebiliriz.

Uygun bir $a$ için $f \in H^p$ yi Taylor katsayıları ile özdeşleyerek sonsuz küçük üreticinin tanımından

$$\mathcal{T}_a z = \lim_{t \to 0^+} \left( e^{-t} E(e^{-\frac{t}{a}}) z - z \right)$$

biçimindedir. Türevin tanımından

$$\mathcal{T}_a z = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-t} E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) z$$

elde edilir. Not 2.2.10 den

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}_a f)(z) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{e^{-t}}{1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) z} f\left( \frac{e^{-\frac{t}{a}} z}{1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) z} \right) \\
&= \frac{-e^{-t}\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) z\right) + \frac{z}{a} e^{-\frac{t}{a}} e^{-t}}{\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) z\right)^2} f'\left( \frac{e^{-\frac{t}{a}} z}{1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) z} \right) \Big|_{t=0} \\
&= \left(-1 + \frac{z}{a}\right) + \left(-\frac{z}{a} + \frac{z^2}{a}\right) f'(z) \\
&= \left(\frac{z}{a} - 1\right) f(z) - \frac{z}{a}(1-z) f'(z)
\end{aligned}$$

yani;

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_a) = \left\{ f \in H^p : \left(\frac{z}{a} - 1\right) f(z) - \frac{z}{a}(1-z)f'(z) \in H^p \right\}$$

ve

$$(\mathcal{T}_a f)(z) = \left(\frac{z}{a} - 1\right) f(z) - \frac{z}{a}(1-z)f'(z)$$

elde ederiz. Benzer bir ifade $A^p$ deki $T_a$ yarı grubu için de geçerlidir.

Biz şimdi $S_a$ yarı grubunu inceleyeceğiz ve onun sonsuz küçük üreticisini tanımlayacağız. Bunun için $X$ e bir ilave şart eklemeliyiz.

**Teorem 2.3.12($\mathcal{S}_a$ nın sonsuz küçük üreticisi):** $(X, \|.\|)$ , $X \subset \ell^\infty$ ile bir BK-AK uzayı, $a$ bir pozitif reel sayı ve

$$\begin{array}{rcl} S_a : \mathbb{R}^{\geq 0} & \rightarrow & B(X) \\ t & \mapsto & S_a(t) := e^{-t}E^t\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{array}$$

biçiminde $X$ üzerinde tanımlı, lineer operatörlerin kuvvetli sürekli yarı grubu olsun. Ayrıca

$$S := \sup\left\{ \|S_a(t)\|_X : t \in \mathbb{R}^{\geq 0} \right\} < \infty$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $S_a$ yarı grubunun $\mathcal{S}_a$ sonsuz küçük üreticisi,

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}_a) = \left\{ x \in X : \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t x \in X \right\} \text{ ve } \mathcal{S}_a = -\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t |_{\mathcal{D}(\mathcal{S}_a)}$$

biçimimdedir. Ayrıca $\mathcal{S}_a$ nın matris gösterimi $-\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t$ matrisinin transpozudur.

**İspat:** İlk önce sonsuz küçük üreticinin $\mathcal{D}(\mathcal{S}_a)$ tanım kümesinin

$$\left\{ x \in X : \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t x \in X \right\}$$

kümesinde olduğunu gösterelim. Ayrıca $x = (x_n) \in \mathcal{D}(\mathcal{S}_a)$ dizisini limiti;

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left(e^{-t}E^t(e^{-\frac{t}{a}})x - x\right)$$

$X$ de mevcut olsun. $X$ , BK-uzayı olduğundan bu limit değeri koordinatsal yakınsaktır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için Lemma 2.2.6 dan $h_{xn}(z)$ yi ve $h_{xn}(0) = x_n$ yi kullanarak

$$\begin{aligned}
[S_a x]_n &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(\left[e^{-t}E^t(e^{-\frac{t}{a}})x\right]_n - x_n\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(e^{-t}e^{-\frac{tn}{a}}h_{xn}(1-e^{-\frac{t}{a}}) - x_n\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(e^{-t}e^{-\frac{tn}{a}}h_{xn}(1-e^{-\frac{t}{a}}) - h_{xn}(0)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-\frac{t(n+a)}{a}}h_{xn}(1-e^{-\frac{t}{a}}) \\
&= -\frac{(n+a)}{a}e^{-\frac{t(n+a)}{a}}h_{xn}(1-e^{-\frac{t}{a}})\Big|_{t=0} \\
&\quad + \left(\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}e^{-\frac{t(n+a)}{a}}h'_{xn}(1-e^{-\frac{t}{a}})\Big|_{t=0}\right) \\
&= -\frac{n+a}{a}h_{xn}(0) + \frac{1}{a}h'_{xn}(0) \\
&= -\frac{n+a}{a}x_n + \frac{n+1}{a}x_{n+1} \\
&= \left[-\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t x\right]_n
\end{aligned}$$

geçerlidir.

Burada Lemma 2.2.6 dan

$$\begin{aligned}
h_{xn}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}x_{n+k}.z^k = \binom{n}{0}x_n.z^0 + \binom{n+1}{1}x_{n+1}.z^1 \\
&\quad + \binom{n+2}{2}x_{n+2}.z^2 + \cdots
\end{aligned}$$

olduğundan $h_{xn}(0) = x_n$ ve

$$h'_{xn}(z)\big|_{z=0} = \binom{n+1}{1}x_{n+1}.z^0 + 2\binom{n+2}{2}x_{n+2}.z + \cdots\big|_{z=0} = (n+1)\,x_{n+1}$$

olduğu kullanılmıştır.

Şimdi $\Omega := \left\{x \in X : \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t x \in X\right\}$ olarak tanımlayalım. $-\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t|_\Omega$ , $S_a$ yı içerir, yani; $S_a \subset -\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t|_\Omega$ dir. $\left(\frac{2}{a}I + \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t\right) : w \to w$ lineer operatörünü alalım.

$$\begin{aligned}
x \in \ker\left(\frac{2}{a}I + \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t\right) \quad &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{a} + \frac{n+a}{a}\right)x_n - \frac{n+1}{a}x_{n+1} = 0 \qquad , (n \in \mathbb{N}) \\
&\Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{n+2+a}{n+1}x_n \qquad , (n \in \mathbb{N}) \\
&\Leftrightarrow x_{n+1} = \left(\prod_{j=0}^{n} \frac{j+2+a}{j+1}\right)x_0 \qquad , (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

dır. $a > 0$ olduğundan her $j \in \mathbb{N}$ için $\frac{j+2+a}{j+1} > \frac{j+2}{j+1}$ geçerlidir ve $|x_{n+1}| \geq (n+2)\,|x_0|$ elde edilir, yani; $x_0 \neq 0$ ise $x_n \notin \ell^\infty$ olur. Hipotezde $X \subset \ell^\infty$ olması şartıyla $\Omega \cap \ker\left(\frac{2}{a}I + \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t\right) = \{0\}$ elde edilir ve böylece $\left(\frac{2}{a}I + \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t\right)|_\Omega$ nın injektivliği elde edilir. $S_a$ yarı grubunun karekteristiği $w_0 \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log S = 0$ dır. Teorem 2.3.3 (b) ye göre $\frac{2}{a} \in \rho(S_a)$ dır. Bilhassa $\left(\frac{2}{a}I - S_a\right) : \mathcal{D}(S_a) \to X$ örtendir. $\left(\frac{2}{a}I + \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t\right)|_\Omega$ $\left(\frac{2}{a}I - S_a\right)$ yı içerdiğinden $\Omega = \mathcal{D}(S_a)$ ve $S_a = -\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t|_\Omega$ elde edilir.

**Not 2.3.13:** Teorem 2.3.12 nin ispat adımını takip edersek $X \subset \ell^\infty$ şartının çok kısıtlayıcı olduğunu görürüz. Kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının $r \geq 1$ olduğunu ve $x_n = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{j+2+a}{j+1}\right)$ dizisinin her $a > 0$ için $X$ in içinde olmadığını göstermek yeterlidir. Not 2.2.9 a göre her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq n$ ve (1.9.3) den; mesela $A^p$ uzayının bu şartı yerine getirdiği görülür. Böylece Teorem 2.3.12 nin bu uzaylar için de geçerliliği elde edilir.

**Örnek 2.3.14:** **(a)** $1 < p < \infty$ , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a \geq \frac{1}{q}$ olsun. Bu durumda $\ell^p$ üzerinde verilmiş $S_a$ yarı grubunun sonsuz küçük üreticisi için

$$\mathcal{D}(S_a) = \left\{x \in \ell^p : \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t x \in \ell^p\right\} \text{ ve } S_a = -\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t|_{\mathcal{D}(S_a)}$$

geçerlidir.

**(b)** $1 < p < \infty$ , ve $a \geq \frac{1}{p}$ olsun. Bu durumda $H^p$ üzerinde verilmiş $S_a$ yarı grubunun sonsuz küçük üreticisi için

$$\mathcal{D}(S_a) = \left\{x \in H^p : \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t x \in H^p\right\} \text{ ve } S_a = -\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t|_{\mathcal{D}(S_a)}$$

geçerlidir.

**(c)** $1 < p < \infty$ ve $a \geq \dfrac{2}{p}$ olsun. Bu durumda $A^p$ üzerinde verilmiş $S_a$ yarı grubunun sonsuz küçük üreticisi için

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}_a) = \left\{x \in A^p : \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t x \in A^p\right\} \text{ ve } \mathcal{S}_a = -\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t |_{\mathcal{D}(\mathcal{S}_a)}$$

geçerlidir.

**Not 2.3.15($\mathcal{S}_a$ nın fonksiyonel gösterimi):** Burada Not 2.2.11 e göre $H^p$ üzerinde $S_a$ yarı gruplarının sonsuz küçük üreticilerinin analitik gösterimi verilecektir. Biz ilk önce $a = 1$ özel durumu için Siskakis'in [**72, sh.156**] daki gösterimini vereceğiz ve daha sonra bu gösterimi genelleyeceğiz. Bunu Siskakis [**72, sh.156**] aşağıdaki biçimde ifade etmiştir.

**Lemma 2.3.16:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\mathcal{S}_1$ nin $\mathcal{D}(\mathcal{S}_1)$ tanım bölgesi;

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}_1) = \left\{f \in H^p : -z(1-z) f'(z) - (1-z) f(z) \in H^p\right\}$$

biçimindedir ve

$$\mathcal{S}_1(f)(z) = -z(1-z) f'(z) - (1-z) f(z) \quad , \quad f \in \mathcal{D}(\mathcal{S}_1) \tag{2.3.7}$$

dir.

**İspat:** [**3, Teorem 3.7**] nin ispat yöntemini uygulayalım. Tanımdan

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}_1) = \left\{f \in H^p : \lim_{t \to 0+} \frac{S_t(f) - f}{t} \quad , \quad H^p \text{ de mevcuttur}\right\}$$

Sabir bir $z \in \mathbb{D}$ için

$$\lim_{t \to 0+} \frac{S_t(f) - f}{t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_t(z)}{z} f(\phi_t(z))\right) |_{t=0} = -z(1-z) f'(z) - (1-z) f(z)$$

dir. $\mathcal{D}_1 = \left\{f \in H^p : -z(1-z) f'(z) - (1-z) f(z) \in H^p\right\}$ olsun. $H^p$ de yakınsaklık özel olarak noktasal yakınsaklığı gerektirdiğinden $\mathcal{D}(\mathcal{S}_1) \subseteq \mathcal{D}_1$ dir ve $\mathcal{D}_1$ lineer manifoldu üzerinde tanımlı $\mathcal{E}$ operatörü

$$\mathcal{E}(f)(z) = -z(1-z) f'(z) - (1-z) f(z)$$

ile $\mathcal{S}_1$ e genişler. Eğer $\lambda$ kompleks bir sayı ve $f$ , $\mathbb{D}$ üzerinde $\mathcal{E}(f) = \lambda f$ olacak şekilde sıfır olmayan analitik bir fonksiyon ise bu durumda seçilen bir $r$ $(0 < r < 1)$ için $f(z)$ nin $|z| = r$ üzerinde sıfırı yoktur. Böylece

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = -(\lambda+1)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{1}{z}dz + \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{1}{1-z}dz = -(\lambda+1) \tag{2.3.8}$$

elde ederiz.

Argument prensibine göre, $\mathcal{E}$ nin eigen değerlerinin kümesinin sayılabilir olduğu sonucuna ulaşırız. Eğer $w_0$ , $H^p$ üzerindeki $\{S_t\}$ yarı grubunun

$$w_0 = \lim_{t\to\infty}\frac{\log\|S_t\|}{t}$$

biçimindeki bir tipi ise $w_0 \leq 0$ buluruz ve [**16, Lemma VIII.1.4 ve Teorem VIII.1.11**] den $\operatorname{Re}\lambda > w_0$ ise $\mathcal{S}_1 - \lambda$ , $H^p$ üzerinde tersinirdir. Özel olarak $\lambda$ yı $\mathcal{S}_1 - \lambda$ tersinir ve $\mathcal{E}$ nin eigen değeri olmayacak şekilde seçebiliriz. Bu durumda $\mathcal{E}$ bire-birdir ve $H^p$ üzerinde olan $\mathcal{S}_1 - \lambda$ ya genişler. Buradan $\mathcal{E} = \mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{D}(\mathcal{S}_1) = \mathcal{D}_1$ dir.

Şimdi bunu aşağıdaki biçimde genelleyebiliriz.

$f \in H^p$ olmak üzere $\mathcal{S}_a$ tanımı ve $f$ nin Taylor katsayıları dizisi ile

$$\mathcal{S}_a z = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(e^{-t}E^t(e^{-\frac{t}{a}})z - z\right)$$

biçimindedir. Türevin tanımından

$$\mathcal{S}_a = \lim_{t\to 0^+}\frac{d}{dt}|_{t=0}e^{-t}E^t(e^{-\frac{t}{a}})z$$

elde edilir. Not 2.2.11 den

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_a f)(z) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}e^{-t}f\left(e^{-\frac{t}{a}}z + (1-e^{-\frac{t}{a}})\right) \\
&= -e^{-t}f\left(e^{-\frac{t}{a}}z + (1-e^{-\frac{t}{a}})\right)|_{t=0} + \\
&\quad + \left(-\frac{z}{a}e^{-t} + \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\right)e^{-t}f'\left(e^{-\frac{t}{a}}z + (1-e^{-\frac{t}{a}})\right)|_{t=0} \\
&= \frac{1}{a}(1-z)f'(z) - f(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani;

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}_a) = \left\{ f \in H^p : \frac{1}{a}(1-z) f'(z) - f(z) \in H^p \right\}$$

ve

$$(\mathcal{S}_a f)(z) = \frac{1}{a}(1-z) f'(z) - f(z)$$

elde edilir.

Genel ifadenin ispatı için Not 2.3.10 dan yararlanılır. Bu durumda da $A^p$ uzaylarına bir uygun ifade karşılık gelir.

## 2.4 $\mathcal{T}_a$ ve $\mathcal{S}_a$ Sonsuz Küçük Üreticilerin Normu ve Spektrumu

Bu bölümde ilk olarak $\ell^p$, $c_o$, $c$, $H^p$ ve $A^p$ özel BK-uzaylarında $T_1$ ve $S_1$ yarı gruplarının $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{S}_1$ sonsuz küçük üreticilerinin spektrumu araştırılacaktır. Bu sonuçlar çok önemlidir, çünkü bunlar yardımıyla Housdorff matrislerinin büyük bir bölümünü oluşturabiliriz. Bu girişe örnek olarak genel $\mathcal{T}_a$ ve $\mathcal{S}_a$ operatörlerinin spektrumu bulunur ki bununla bu konunun temeli oluşturulur. 2.5 te BK-uzaylarından Gamma matrislerinin açık bir şekilde araştırılabilmesi için $T_1$ yarı grubuyla işe başlayacağız. $(X, \|.\|)$ bir BK-uzayı ve

$$\begin{array}{rccl} T_1 : & \mathbb{R}^{\geq 0} & \to & B(X) \\ & t & \mapsto & T_1(t) := e^{-t} E^t(e^{-t}) \end{array} \tag{2.4.1}$$

$X$ üzerinde lineer operatörlerin $C_0$ yarı grubu olsun. Ayrıca

$$S := \sup \left\{ \|T_1(t)\|_X : t \in \mathbb{R}^{\geq 0} \right\} < \infty$$

olsun. Bu durumda Teorem 2.3.8 ve Not 2.3.7 den sonsuz küçük üretici için

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_1) = \left\{ x \in X : C_1^{-1} x \in X \right\} \text{ ve } \mathcal{T}_1 = -C_1^{-1}|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_1)}$$

geçerlidir.

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & -2 & 3 & & \\ & & -3 & 4 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlandığından her $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,-3,\cdots\}$ için $\lambda I + C_1^{-1}$ bir normal matristir ve dolayısıyla $w$ dan $w$ ya bijektiv bir dönüşüme sahiptir. Bu $\lambda$ için $y := (1,0,\cdots)$ görüntüsüne sahiptir. O halde

$$\left(\lambda I + C_1^{-1}\right) x = y$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda+1 & & & & \\ -1 & \lambda+2 & & & \\ & -2 & \lambda+3 & & \\ & & -3 & \lambda+4 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = (1,0,0,\cdots)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (\lambda+1)\, x_0 = 1 \\ -x_0 + (\lambda+2)\, x_1 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda+3)\, x_2 = 0 \\ -3x_2 + (\lambda+4)\, x_3 = 0 \\ \cdots \\ -nx_{n-1} + (n+\lambda+1)\, x_n = 0 \quad , n \geq 1 \end{array} \right.$$

elde edilir. Buradan tümevarımla

$$x = \left( \frac{1}{\lambda+1} \prod_{j=1}^{n} \frac{j}{j+\lambda+1} \right)$$

olduğu alınır.

Aşağıda bazı şartlar verilecektir. Bu şartlar dahilinde $x$ dizisi belirtilen dizi uzaylarına ait değildir.

**Lemma 2.4.1:** $1 < p < \infty$ ve $\operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \dfrac{1}{p}$ ile $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,-3,\cdots\}$ olsun. Bu durumda

$$x := \left( \frac{1}{\lambda+1} \prod_{j=1}^{n} \frac{j}{j+\lambda+1} \right) \notin \ell^p$$

geçerlidir.

**İspat:** Lemmanın ispatını Gauss kriteri (bak Knopp [**38, sh.297**]) yardımıyla yapacağız.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n+\lambda+1} = 1 - \frac{\lambda+1}{n} - \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)}{n\left(n+\lambda+2\right)}\right)$$

olduğundan $\theta_n := \left(\dfrac{n^2\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)}{n\left(n+\lambda+2\right)}\right)$ olarak alırsak

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda+1}{n} - \frac{\theta_n}{n^2}$$

elde edilir. $\theta_n$ yakınsak olduğundan $|\theta_n| < K$ olacak şekilde en az bir $K > 0$ sayısı vardır.

$$\left|1 - \frac{\lambda+1}{n}\right| = \left|\frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{\theta_n}{n^2}\right| \le \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| + \left|\frac{\theta_n}{n^2}\right| \le \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| + \frac{K}{n^2}$$

o halde

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \ge \left|1 - \frac{\lambda+1}{n}\right| - \frac{K}{n^2} \ge 1 - \frac{\operatorname{Re}(\lambda+1)}{n} - \frac{K}{n^2}$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}(\lambda+1)}{n} + \frac{K}{n^2} = 0$$

olduğundan $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$-1 < -\frac{\operatorname{Re}(\lambda+1)}{n} - \frac{K}{n^2} \quad , \quad (n \ge 0)$$

geçerlidir. $t \in (-1, \infty)$ için $(1+t)^p$ ifadesi monoton ve konvekstir. Leibowitz lemmasından (Eğer $p > 0$ ise $|1+h|^p = 1 + a\operatorname{Re}(h) + 0\left(|h^2|\right)$ $\mathbb{C}$ de $h \to 0$)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|^p &\ge \left|\underbrace{1 - \frac{\operatorname{Re}(\lambda+1)}{n} - \frac{K}{n^2}}_{h}\right|^p \\
&\ge 1 - \frac{p.\operatorname{Re}(\lambda+1)}{n} - \frac{p.K}{n^2} \qquad (n \ge n_0)
\end{aligned}$$

geçerlidir.

Şimdi $p.\operatorname{Re}(\lambda+1) \le 1$ (eşit olarak $\operatorname{Re}\lambda \le -1 + \frac{1}{p}$) olduğundan Gauss kriterinden seri ıraksaktır dolayısıyla $x \notin \ell^p$ dir.

**Lemma 2.4.2:** $\operatorname{Re}\lambda < -1$ ile $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-1,-2,-3,\cdots\}$ olsun. Bu durumda

$$x := \left(\frac{1}{\lambda+1}\prod_{j=1}^{n}\frac{j}{j+\lambda+1}\right) \notin \ell^p$$

ve bilhassa $x \notin c$ , $x \notin c_0$ geçerlidir.

**İspat:** Biz şimdi

$$\tilde{x} := \left(\prod_{j=1}^{n}\frac{j+\lambda+1}{j}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{(-\lambda-1)}{j}\right)\right)$$

dizisini göz önünde bulunduralım. Knopp [**38, sh.441**] den $\operatorname{Re}(\lambda-1) > 0$ için $\tilde{x}$ sıfıra gider. İstenilen $x = (\lambda+1)^{-1}\dfrac{1}{\tilde{x}}$ alınarak gösterilir.

Şimdiye kadarki çalışmalarımızda $\ell^p$, $c_0$, $c$ , $H^p$ ve $A^p$ uzaylarında $\mathcal{T}_1$ in spektrumlarını hesaplamak için gerekli hazırlıklar yapılmış oldu.

**Teorem 2.4.3($\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üretici):**

**(a)** $1 < p < \infty$ olsun. $\ell^p$ üzerinde $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisi yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_1$ in spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{T}_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{p}\right\}$$

geçerlidir.

**(b)** $c_0$ üzerinde $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisi yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_1$ in spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{T}_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1\}$$

geçerlidir.

**(c)** $c$ üzerinde $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisi yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_1$ in spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{T}_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1\}$$

geçerlidir.

**(d)** $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $H^p$ üzerinde verilmiş $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisi yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_1$ in spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{T}_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{q}\right\}$$

geçerlidir.

**(e)** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $A^p$ üzerinde verilmiş $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisi yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_1$ in spektrumu için; $p = 1$ iken

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -2\} \subset \sigma(\mathcal{T}_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$$

$1 < p < 4$ iken

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -\frac{2}{p}\right\} \subset \sigma(\mathcal{T}_1) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{2}{p}\right\}$$

$4 \leq p < \infty$ iken

$$\sigma(\mathcal{T}_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -\frac{2}{p}\right\}$$

geçerlidir.

**İspat:** Bu ispatı $\ell^p$ dizi uzayları için göstereceğiz ve diğer BK-uzaylarında sadece önemli değişiklikleri bildireceğiz

(a) $\ell^p$ üzerinde $T_1$ yarı grubunun $w_0$ karektsristiği Teorem 2.3.3 (a) dan

$$w_0 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \|T_1(t)\|_{\ell^p}$$

biçimindedir. Teorem 2.2.1 den

$$w_0 \leq \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log e^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)t} = -1 + \frac{1}{p}$$

elde edilir. Bununla birlikte Teorem 2.3.3 (b) den

$$\sigma(\mathcal{T}_1) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{p}\right\}$$

elde edilir.

Ters kapsamı göstermek için Lemma 2.4.1 den yararlanacağız.

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,-3,\cdots\}$ ve $\operatorname{Re}\lambda \leq -1+\frac{1}{p}$ için $\left(\lambda I + C_1^{-1}\right)|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_1)}$ lineer operatörü örten değildir. Gerçekten de $y := (1,0,0,\cdots)$ durumu için bu bölümün başında $\left(\lambda I + C_1^{-1}\right)x = y$ olan $x \in \ell^p$ sayısı bulunmadığı gösterilmişti. Buradan Lemma 2.4.1 den

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} |\operatorname{Re}\lambda \leq -1+\frac{1}{p}, \lambda \notin \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,-3,\cdots\}\right\} \subset \sigma(\mathcal{T}_1)$$

elde edilir. Her iki taraftan kapanış alırsak

$$\overline{\left\{\lambda \in \mathbb{C} |\operatorname{Re}\lambda \leq -1+\frac{1}{p}, \lambda \notin \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,-3,\cdots\}\right\}} \subset \overline{\sigma(\mathcal{T}_1)}$$

spektrum kapalı olduğundan $\left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \leq -1+\frac{1}{p}\right\} \subset \sigma(\mathcal{T}_1)$ elde edilir. Teoremin kalan kısmı Teorem 2.3.2 den elde edilir. $\mathcal{T}_1$ in sınırsızlığı, spektrumun sınırsızlığından elde edilir.

**(b)** Teorem 2.2.2 den $w_0 \leq -1$ elde edilir ve Teorem 2.3.3 yardımıyla ilk içerme elde edilir. Ters içerme ise Lemma 2.4.2 den ortaya çıkar.

**(c)** Teorem 2.2.3 den $w_0 \leq -1$ elde edilir ve Teorem 2.3.3 den ilk içerme elde edilir. Ters içerme ise Lemma 2.4.2 den ortaya çıkar.

**(d)** İlk içerme Siskakis [**72**] de aşağıdaki lemma ile verilmiştir. Ters içerme ise Siskakis [**75**] de verilmiştir.

**Lemma 2.4.4:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_1$ nin $\sigma(\mathcal{T}_1)$ spektrumu $\left\{z : \operatorname{Re} z \leq -\frac{1}{p}\right\} \cup \{0\}$ kümesini kapsar ve $\mathcal{T}_1$ nin tek eigen değeri $\lambda = 0$ dır.

**İspat:** $\lambda \in \mathbb{C}$ , $f$ , $\mathbb{D}$ üzerinde sıfırdan farklı analitik bir fonksiyon ve $-z(1-z)f'(z) = \lambda f(z)$ olsun. Lemma 2.3.11 (ii) deki argument prensibini uygularsak $\lambda \in \{0,-1,-2,\cdots\}$ ve

$$f(z) = c\left(\frac{z}{1-z}\right)^{-\lambda} \quad , \qquad c \neq 0$$

olduğunu elde ederiz. Lemma 2.4.12(a) dan $\lambda = 0$ elde ederiz ki bu sabit eigen fonksiyonlarına karşılık gelen eigen değerdir. Böylece tek eigen değer $\lambda = 0$ dır.

$\mathbb{D}$ üzerinde analitik olan $f$ için $\mathcal{T}_1(f)(z) = -z(1-z)f'(z)$ yazalım. $\lambda \in \mathbb{C} - \{0,-1,-2,\cdots\}$ ve $n \geq 1$ için

$$P_{n,\lambda}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\lambda}\binom{n}{k} z^k$$

ve

$$f_{n,\lambda}(z) = P_{n,\lambda}(z)(1-z)^{\lambda}$$

alalım.

$$f'_{n,\lambda}(z) = P'_{n,\lambda}(z)(1-z)^{\lambda} - \lambda(1-z)^{\lambda-1}P_{n,\lambda}(z)$$

olduğunu elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mathcal{T}_1)(f_{n,\lambda})(z) &= \lambda f_{n,\lambda}(z) - \mathcal{T}_1(f_{n,\lambda})(z) \\
&= \lambda P_{n,\lambda}(z)(1-z)^{\lambda} - \left\{-z(1-z)f'_{n,\lambda}(z)\right\} \\
&= \lambda P_{n,\lambda}(z)(1-z)^{\lambda} + z(1-z)^{\lambda}\left\{P'_{n,\lambda}(z)(1-z) - \lambda P_{n,\lambda}(z)\right\} \\
&= (1-z)^{\lambda}\left\{\lambda P_{n,\lambda}(z)(1-z) + zP'_{n,\lambda}(z)(1-z)\right\} \\
&= (1-z)^{\lambda+1}\left\{\lambda P_{n,\lambda}(z) + zP'_{n,\lambda}(z)\right\} \\
&= (1-z)^{\lambda+n+1}
\end{aligned}$$

dir. $g_{n,\lambda}(z) = (1-z)^{\lambda+n+1}$ diyelim. $f_{n,\lambda}$ nın $\mathbb{D}$ üzerinde $(\lambda - \mathcal{T}_1)(y) = g_{n,\lambda}$ diferansiyel eşitliğinin bir tek analitik çözümü olduğunu görmek kolaydır.

$n \geq 1$ için $Z_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : P_{n,\lambda}(1) = 0\}$ olsun. Her bir $Z_n$ sonlu olduğundan

$$Z = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) \cup \{0,-1,-2,\cdots\}$$

sayılabilirdir.

$\operatorname{Re}\lambda \leq -\frac{1}{p}$ ve $\lambda \notin Z$ olsun. $\operatorname{Re}(\lambda+n+1) > -\frac{1}{p}$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ seçilirse bu durumda $g_{n,\lambda} \in H^p$ dir. $\lambda - \mathcal{T}_1$ nin tersinin sınırlı olduğunu varsayarsak $(\lambda - \mathcal{T}_1)^{-1}(g_{n,\lambda})(z) = P_{n,\lambda}(z)(1-z)^{\lambda} \in H^p$ elde ederiz. Fakat $\lambda \notin Z$ ve böylece $P_{n,\lambda}(1) \neq 0$ olduğundan kolay bir düşünce ile $(1-z)^{\lambda} \in H^p$ olduğunu görürüz. Bu ise Lemma 2.4.10(a) ile çelişir. O halde

$\lambda \in \left\{z : \operatorname{Re} z \leq -\frac{1}{p}\right\} - Z$ için $\lambda - \mathcal{T}_1$ tersinir değildir. $\mathcal{T}_1$ kapalı bir operatör olduğundan kapalı spektruma sahiptir. Dolayısıyla $\left\{z : \operatorname{Re} z \leq -\frac{1}{p}\right\}$ kümesi $\sigma(\mathcal{T}_1)$ de kapsanır.

(e) İllk içerme Siskakis [**74, sh.314**] de verilen aşağıdaki lemmadan elde edilir.

**Lemma 2.4.5:** Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $\left\{z : \operatorname{Re}(\lambda) < -\frac{2}{p}\right\} \subset \sigma(\mathcal{T}_1)$ dir.

**İspat:** İlk önce nokta spektrumunu bulalım. $\mathcal{T}_1(f) = \lambda f$ ise $\lambda = -k-1$ olduğu hesaplanabilir. $(k \in \{0,1,2,\ldots\})$ $\lambda = -k-1$ değerlerine karşılık gelen eigen fonksiyonlar ise $f_k(z) = cz^k(1-z)^{-(k+1)}$ şeklindedir. ( $c \neq 0$ sabit) $p \geq 2$ için bu fonksiyon $A^p$ de değildir. O halde böyle $p$ ler için point spektrum boştur. Eğer $1 \leq p < 2$ ise bu durumda sadece $k = 0$ için $f_k \in A^p$ dir. O halde bu durumda $\sigma_p(\mathcal{T}_1) = \{-1\}$ dir.

$\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Re}(\lambda) \leq -\frac{2}{p}$ olsun. (eğer $1 \leq p < 2$ , $\lambda \neq 1$ ise ) $\operatorname{Re}(\lambda + n + 1) > -\frac{2}{p}$ olacak şekilde bir $n$ tam sayısı seçelim ve

$$P_{n,\lambda}(z) := (\lambda+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k}z^k$$

olsun. Bu durumda $(1-z)^{\lambda+n+1}\exp(P_{n,\lambda}(z))$ fonksiyonu $A^p$ dedir. Eğer $\lambda - \mathcal{T}_1$ tersinir ise

$$(\lambda - \mathcal{T}_1)(y)(z) = (\lambda+1)(1-z)^{\lambda+n+1}\exp(P_{n,\lambda}(z))$$

denklemi $\mathbb{D}$ üzerinde bir $y(z)$ analitik çözümüne sahiptir ve $y(z) \in Dom(\mathcal{T}_1) \subset A^p$ dir. Bu denklem

$$(\lambda+1-z)\,y(z) + z(1-z)\,y'(z) = (\lambda+1)(1-z)^{\lambda+n+1}\exp(P_{n,\lambda}(z))$$

biçimindedir ve basit bir hesaplama ile bu denklemin tek analitik çözümünün

$$y(z) = (1-z)^{\lambda}\exp(P_{n,\lambda}(z))$$

olduğu görülür. Fakat $\operatorname{Re}(\lambda) \leq -\frac{2}{p}$ olduğundan $y(z)$ , $A^p$ ye ait değildir. Böylece $\left\{z : \operatorname{Re}(z) \leq -\frac{2}{p}\right\} \subset \sigma(\mathcal{T}_1)$ olur.

İkinci içerme ise Teorem 2.2.5 den

$$w_0 \leq \begin{cases} 0 & , \quad p=1 \\ -1+\dfrac{2}{p} & , \quad 1<p<4 \\ -\dfrac{2}{p} & , \quad 4 \leq p < \infty \end{cases}$$

olduğundan elde edilir.

**Not 2.4.6:** (d) nin ispatı $2 \leq p < \infty$ için Teorem 2.2.4 ve Siskakis [72] yardımıyla yapılır. $1 \leq p < 2$ için Euler matrislerinin norm tahmini tam doğru değildir. $\mathcal{T}_1$ in spektrumunu, $T_1$ yarı grubunun $w_0$ karakteri ile doğru bir şekilde tahmin edebilmek için $1 \leq p < 2$ için $H^p$ de transpoze Taylor matrislerinin spektrumunu bilmemiz gerekir. (bak Komawits [**35, sh.145**] ve Örnek 1.8.17) ve böylece $\mathcal{T}_1$ in spektrumu için bir sonuç elde edebiliriz. Bununla ilgili detaylı bilgi Siskakis [**75**] de bulunur. Ancak $A^p$ üzerinde bileşke operatörlerinin spektrumu hakkında çok az bilgiye sahip olduğumuzdan bu metodla $A^p$ üzerindeki spektrumu bulamayız.

Biz şimdi $\mathcal{T}_1$ in point spektrumunu tanımlayacağız.

**Tanım 2.4.7(point spektrum, eigen değer, eigen vektör):** $X$ bir Banach uzayı ve $A : \mathcal{D}(A) \to X$, $X$ üzerinde lineer bir operatör olsun. Bu durumda

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A\}$$

1-1 ve örten biçiminde tanımlanan $\sigma_p(A)$ kümesine $A$ operatörünün point spektrumu denir. Ayrıca her $\lambda \in \sigma_p(A)$ için

$$\varepsilon(\lambda) := \{x \in \mathcal{D}(A) : (\lambda I - A)x = 0\}$$

kümesine de $\lambda$ eigen değerinin eigen uzayı denir ve sıfırdan farklı $x$ vektörüne karşılık gelen $\lambda$ elemanlarına ise eigen değer denir.

**Teorem 2.4.8($\mathcal{T}_1$ in point spektrumu):**

(a) $1 < p < \infty$ olsun. $\ell^p$ üzerinde $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisinin point spektrumu için

$$\sigma_p(\mathcal{T}_1) = \emptyset$$

geçerlidir.

**(b)** $c_0$ üzerinde verilmiş $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisinin point spektrumu için

$$\sigma_p(\mathcal{T}_1) = \emptyset$$

geçerlidir.

**(c)** $c$ üzerinde verilmiş $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisinin point spektrumu için

$$\sigma_p(\mathcal{T}_1) = \{-1\}$$

geçerlidir ve $\varepsilon(-1) = span\{\mathrm{e}\}$ dir.

**(d)** $1 < p < \infty$ olsun. $H^p$ üzerinde verilmiş $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisinin point spektrumu için

$$\sigma_p(\mathcal{T}_1) = \emptyset$$

geçerlidir.

**(e)** $A^p$ üzerinde verilmiş $T_1$ yarı grubunun $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisinin point spektrumu; $1 \leq p < 2$ için

$$\sigma_p(\mathcal{T}_1) = \{-1\}$$

geçerlidir ve $\varepsilon(-1) = span\{\mathrm{e}\}$ dir ve $2 \leq p < \infty$ için

$$\sigma_p(\mathcal{T}_1) = \emptyset$$

geçerlidir.

**İspat:** $\lambda I + C_1^{-1}$ ifadesi $w$ dan $w$ ya lineer bir operatördür. Bu bölümün başında gösterdiğimiz gibi $\lambda \in \{-1, -2, -3, \cdots\}$ , herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in w$

için

$$\left(-kI + C_1^{-1}\right)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (-k+1)\,x_0 = 0 \\ -nx_{n-1} + (n+1-k)\,x_n = 0 \quad , \; n \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = 0 & , \quad 0 \leq n \leq k-2 \\ x_{k-1} \quad \text{herhangi} & , \quad n = k-1 \\ x_n = \dfrac{n}{n+1-k}x_{n-1} & , \quad n \geq k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = 0 & , \quad 0 \leq n \leq k-2 \\ x_{k-1} \quad \text{herhangi} & , \quad n = k-1 \\ x_n = \dbinom{n}{k-1}x_{k-1} & , \quad n \geq k \end{cases}$$

geçerlidir. Ayrıca $-k$ eigen değeri için

$$\varepsilon(-k) = span\left\{\left(\binom{n}{k-1}\right)\right\}$$

geçerlidir. $k=1$ için $\varepsilon(-1) = span\,\{\mathrm{e}\}$ elde edilir ve $k \geq 2$ için $\dbinom{n}{k-1} \geq n$ ifadesinden dolayı $n \geq k$ için Not 2.3.13 den $\varepsilon(-k)$ içinde $\ell^p$ , $c_0$ , $c$ , $H^p$ veya $A^p$ den vektör yoktur. $1 \leq p < 2$ için e vektörü veya $(1-z)^{-1}$ fonksiyonu $A^p$ içindedir ve Lemma 2.4.12 (b) den eğer $\operatorname{Re}\lambda > -\dfrac{2}{p}$ ise $(1-z)^{\lambda}$ fonksiyonu $A^p$ dedir.

Bu sonuçlar ile $\mathcal{T}_a$ sonsuz küçük üreticisi için aşağıdaki ifadeler verilebilir.

**Sonuç 2.4.9($\mathcal{T}_a$ sonsuz küçük üreticisi):**

(a) $1 < p < \infty$ ve $a \geq \dfrac{1}{p}$ olsun. $\ell^p$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun $\mathcal{T}_a$ sonsuz küçük üreticisi; yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_a$ nın spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{T}_a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{ap}\right\} \text{ ve } \sigma_p(\mathcal{T}_a) = \emptyset$$

geçerlidir.

(b) $a > 0$ olsun. $c_0$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun $\mathcal{T}_a$ sonsuz küçük üreticisi; yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_a$ nın spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{T}_a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1\} \text{ ve } \sigma_p(\mathcal{T}_a) = \emptyset$$

geçerlidir.

**(c)** $a > 0$ olsun. $c$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun $\mathcal{T}_a$ sonsuz küçük üreticisi; yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_a$ nın spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{T}_a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1\} \text{ ve } \sigma_p(\mathcal{T}_a) = \{-1\}$$

geçerlidir ve $\varepsilon(-1) = span\{\mathrm{e}\}$ dir.

**(d)** $1 < p < \infty$ , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 \leq p < 2$ iken $a \geq 1$ , $2 \leq p \leq \infty$ iken $a \geq \frac{1}{q}$ olsun. $H^p$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun $\mathcal{T}_a$ sonsuz küçük üreticisi; yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_a$ nın spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{T}_a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{ap}\right\} \text{ ve } \sigma_p(\mathcal{T}_a) = \emptyset$$

geçerlidir. Bununla birlikte $p = 1$ durumunda $\frac{1}{aq}$ yi sıfır olarak alacağız.

(e) $4 \leq p < \infty$ ve $a \geq \frac{p-2}{p}$ olsun. $A^p$ üzerinde verilmiş $T_a$ yarı grubunun $\mathcal{T}_a$ sonsuz küçük üreticisi; yoğun tanımlı, sınırlı olmayan, kapalı lineer bir operatördür ve $\mathcal{T}_a$ nın spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{T}_a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{p-2}{ap}\right\} \text{ ve } \sigma_p(\mathcal{T}_a) = \emptyset$$

geçerlidir.

**İspat:** Herhangi bir $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $C_1^{-1}$ ile $\Gamma_a^{-1}$ arasında

$$(a-1)I + C_1^{-1} = a\Gamma_a^{-1} \tag{2.4.2}$$

İlişkisi geçerlidir. Dolayısıyla $\mathcal{D}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{D}(\mathcal{T}_a)$ ve böylece

$$-\frac{1}{a}((a-1)I - \mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_a$$

geçerlidir. Polinomlar için spektral dönüşüm teoremi yardımıyla

$$P(z) = -\frac{1}{a}((a-1) - z) \text{ ile } \sigma(\mathcal{T}_a) = \sigma(P(\mathcal{T}_1))$$

eşitliği sağlanır (Taylor, Lay [**77, sh.326**]). O halde istenilen Teorem 2.4.3, Teorem 2.4.8 ve Teorem 2.3.2 den elde edilir.

**Not 2.4.10:** Bundan sonraki çalışmalarımızda $A^p$ Bergman uzayını $4 \leq p < \infty$ durumuna sınırlayacağız. Böylece ilerdeki bütün sonuçlar homojen olarak gösterilebilecektir.

**Not 2.4.11:** $(X, \|.\|)$ herhangi bir BK-uzayı ve

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_1) := \left\{x \in X : C_1^{-1}x \in X\right\} \text{ ile } \mathcal{T}_1 := -C_1^{-1}|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_1)}$$

$X$ üzerinde yoğun tanımlı , kapalı lineer bir operatör olsun. Herhangi bir $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{T}_a := -\dfrac{1}{a}\left((a-1)I - \mathcal{T}_1\right)$ operatörü de kapalı, yoğun tanımlı, lineer bir operatördür. Sonuç 2.4.9 nin ispatındaki (2.4.2) den dolayı

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{D}(\mathcal{T}_a) := \left\{x \in X : \Gamma_a^{-1}x \in X\right\}$$

geçerlidir. Benzer şekilde $\mathcal{T}_a = -\Gamma_a^{-1}|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)}$ dır. Taylor, Lay [**77, sh.326**] dan polinomlar için spektral dönüşüm yardımıyla

$$P(z) = -\frac{1}{a}\left((a-1) - z\right) \text{ ile } \rho(\mathcal{T}_a) = P(\rho(\mathcal{T}_1))$$

geçerlidir. $(a-1) - z = 0$ ile $p(z) = 0$ aynı anlamda olduğundan Teorem 2.4.3 ün kullanılmasıyla ve geometrik düşünce ile aşağıdakiler ortaya çıkar.

(a) $1 < p < \infty$ olsun. Her $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{T}_a$ , $\ell^p$ de

$$0 \in \rho(\mathcal{T}_a) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > \frac{1}{p}$$

ile verilmiş sınırlı olmayan kapalı yoğun tanımlı lineer bir operatördür.

(b) Her $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{T}_a$ , $c_0$ da

$$0 \in \rho(\mathcal{T}_a) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > 0$$

ile verilmiş sınırlı olmayan kapalı yoğun tanımlı lineer bir operatördür.

(c) Her $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{T}_a$ , $c$ de

$$0 \in \rho(\mathcal{T}_a) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > 0$$

ile verilmiş sınırlı olmayan kapalı yoğun tanımlı lineer bir operatördür.

(d) $1 \le p < \infty$ , $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Her $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{T}_a$ , $H^p$ de

$$0 \in \rho(\mathcal{T}_a) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > \frac{1}{q}$$

ile verilmiş sınırlı olmayan kapalı yoğun tanımlı lineer bir operatördür.

(e) $4 \le p < \infty$ olsun. Her $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{T}_a$ , $A^p$ de

$$0 \in \rho(\mathcal{T}_a) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > \frac{p-2}{p}$$

ile verilmiş sınırlı olmayan kapalı yoğun tanımlı lineer bir operatördür.

Biz şimdi $S_a$ yarı grubunun $\mathcal{S}_a$ sonsuz küçük üreticisini vereceğiz. Biraz önce yaptığımız gibi ilk önce $S_1$ özel durumuyla işe başlayacağız. Diğer taraftan Teorem 2.4.3 (d) ve (e) nin ispatına dönecek olursak bunlar Siskakis **[74]** , **[75]** de verilmiştir. Bu verilerle birlikte ispatın integral bölümü $(1-z)^{\lambda}$ fonksiyonunun $\lambda$ ya bağlı olarak $H^p$ veya $A^p$ ye ait olması durumudur. Bu ifade yardımıyla $\mathcal{S}_1$ in spektrumunu $A^p$ veya $H^p$ de lineer bir operatör olarak görmemiz için $\lambda$ nın durumu gerekir. Yani hangi koşul altında $(1-z)^{\lambda}$ fonksiyonunun Taylor katsayıları $\ell^p$ nin içinde olduğu sorusunun cevabı gereklidir. Bu sorunun cevabı Leibowitz **[41, sh.169]** da verilmiştir. Brawn, Halmos, Shields **[8, sh.130]** da $p = 2$ durumunda ufak bir değişimle bu ifadeyi incelemiştir. Aşağıdaki Lemmada üç durum söz konusudur.

**Lemma 2.4.12:** $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

(a) Eğer $\operatorname{Re} \lambda > -\dfrac{1}{p}$ ise $(1-z)^{\lambda} \in H^p$ dir.

(b) Eğer $\operatorname{Re} \lambda > -\dfrac{2}{p}$ ise $(1-z)^{\lambda} \in A^p$ dir.

(c) Eğer $\operatorname{Re} \lambda > -\dfrac{1}{p}$ ise $(1-z)^{\lambda} \in \ell^p$ dir.

Şimdi Lemma 2.4.10 yardımıyla $\ell^p, H^p$ ve $A^p$ üzerinde $\mathcal{S}_1$ in spektrumunu hesaplayabiliriz.

**Teorem 2.4.13($\mathcal{S}_1$ sonsuz küçük üreticisi):**

(a) $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. $\ell^p$ de verilmiş $S_1$ yarı grubunun $\mathcal{S}_1$ sonsuz küçük üreticisi; sınırlı olmayan, kapalı, yoğun tanımlı, lineer bir operatördür. $\mathcal{S}_1$ in spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{S}_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{q}\right\}$$

geçerlidir ve spektrumun içi eigen değerlerden oluşur. Yani;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < -1 + \frac{1}{q}\right\} \subset \sigma_p(\mathcal{S}_1)$$

geçerlidir.

**(b)** $1 \leq p < \infty$ olsun. $H^p$ üzerindeki $S_1$ yarı grubunun $\mathcal{S}_1$ sonsuz küçük üreticisi; sınırlı olmayan, kapalı, yoğun tanımlı, lineer bir operatördür. $\mathcal{S}_1$ in spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{S}_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{p}\right\}$$

geçerlidir ve spektrumun içi eigen değerlerden oluşur. Yani;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < -1 + \frac{1}{p}\right\} \subset \sigma_p(\mathcal{S}_1)$$

geçerlidir.

**(c)** $4 \leq p < \infty$ olsun. $A^p$ üzerinde verilmiş $S_1$ yarı grubunun $\mathcal{S}_1$ sonsuz küçük üreticisi; sınırlı olmayan, kapalı, yoğun tanımlı, lineer bir operatördür. $\mathcal{S}_1$ in spektrumu için

$$\sigma(\mathcal{S}_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{2}{p}\right\}$$

geçerlidir ve spektrumun içi eigen değerlerden oluşur. Yani;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < -1 + \frac{2}{p}\right\} \subset \sigma_p(\mathcal{S}_1)$$

geçerlidir.

**İspat:** Biz ispatı $\ell^p$ için göstereceğiz ve $H^p$ ve $A^p$ uzayları için önemli olan değişiklikleri vereceğiz.

**(a)** Öncelikle $\ell^p$ üzerindeki $S_1$ yarı grubunun $w_0$ karakterini tahmin edelim.

$$w_0 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \|S_1(t)\|_{\ell^p}$$

olduğundan Teorem 2.2.7 den

$$w_0 \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log e^{-\left(1-\frac{1}{q}\right)t} = -1 + \frac{1}{p}$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.3.3 den

$$\sigma(\mathcal{S}_1) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{q} \right\}$$

olduğu elde edilir. Ters içermeyi ispatlamak için $(1-z)^{\mu}$ Taylor katsayılarının dizisini $x$ ile gösterelim, yani; $x_n = (-1)^n \binom{\mu}{n}$ biçimindedir. Bu dizi yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left[-\left(C_1^{-1}\right)^t x\right]_n &= -(n+1)(-1)^n \binom{\mu}{n} + (n+1)(-1)^{n+1} \binom{\mu}{n+1} \\
&= \left(-(n+1) - (n+1)\frac{\mu - n}{n+1}\right)(-1)^n \binom{\mu}{n} \\
&= -(1+\mu)(-1)^n \binom{\mu}{n} \\
&= -(1+\mu)\, x_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $-\left(C_1^{-1}\right)^t x = -(1+\mu)\, x$ geçerlidir. Burada $-\left(C_1^{-1}\right)^t$ , $w$ dan $w$ ya lineer bir dönüşüm olarak ele alınmıştır. Lemma 2.4.12 (c) den ve $\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{q}$ ile $-\operatorname{Re}(1+\mu) < -1 + \frac{1}{q}$ denk olduğundan $\mathcal{S}_1 = -\left(C_1^{-1}\right)^t |_{\mathcal{D}(\mathcal{S}_1)}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{q} \right\} \subset \sigma_p(\mathcal{S}_1)$ dir ve $\sigma_p(\mathcal{S}_1) \subset \sigma(\mathcal{S}_1)$ olduğundan her iki taraftan kapanış alarak ters kapsam elde edilir. $\mathcal{S}_1$ in geriye kalan niteliği Teorem 2.3.2 den sağlanır. Ayrıca $\mathcal{S}_1$ in sınırsızlığı spektrum kümesinin sınırsızlığından elde edilir.

**(b)** Siskakis [**72**] de aşağıdaki lemma ile $\sigma(\mathcal{T}_1) - \{0\} \subseteq \sigma(\mathcal{S}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{T}_1)$ olduğunu ispatlamıştır. Tam ispat yapılırken ilk içerme $w_0 \leq -1 + \frac{1}{p}$ olduğundan Teorem 2.2.8 yardımıyla elde edilir. Ters içerme ise Lemma 2.4.12 (a) yardımıyla elde edilir.

**Lemma 2.4.14:** $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

**(i)** $\mathcal{S}_1$ nin eigen değeri yoktur.

**(ii)** $\sigma(\mathcal{T}_1) - \{0\} \subseteq \sigma(\mathcal{S}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{T}_1)$

**İspat:** **(i)** Lemma 2.3.11 (ii) nin ispatından görürüz ki eğer $\lambda$ , $\mathcal{S}_1$ nin bir eigen değeri ise bu durumda $k$ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$\lambda = -k-1$ dir. $-z(1-z)f'(z)-(1-z)f(z) = -(k+1)f(z)$ nin sıfırdan farklı analitik çözümleri $f(z) = \dfrac{cz^k}{(1-z)^{k+1}}$ şeklindedir. Burada $c$ sıfırdan farklı bir sabittir. Eğer $k$ negatif olmayan bir tamsayı ise $f(z)$ , $H^p$ de değildir. O halde $\mathcal{S}_1$ nin point spektrumu boştur.

**(ii)** Denk olarak rezolvent kümelerinin $\rho(\mathcal{T}_1) \subseteq \rho(\mathcal{S}_1) \subseteq \rho(\mathcal{T}_1) \cup \{0\}$ bağıntısını gerçeklediğini göstereceğiz. $f \in \mathcal{D}(\mathcal{S}_1)$ ise $zf(z) \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$ dir ve $z\mathcal{S}_1(f)(z) = \mathcal{T}_1(zf(z))$ olduğunu görmek kolaydır. Gerçektende

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(zf(z)) &= -z(1-z)(zf(z))' \\ &= -z(1-z)f(z) - z^2(1-z)f'(z) \\ &= \mathcal{S}_1 f(z) \end{aligned}$$

dir. $\lambda \in \rho(\mathcal{T}_1)$ olduğunu kabul edelim. $\lambda - \mathcal{S}_1$ nin tersinir olduğunu göstermek için her $g \in H^p$ için $(\lambda - \mathcal{S}_1)(y) = g$ eşitliğinin $H^p$ içinde bir $y$ çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir. $y_1(z) := (\lambda - \mathcal{T}_1)^{-1}(zg(z))$ olsun ; bu şekilde tanımlanan $y_1(z)$ , $H^p$ dedir, ayrıca, $y_1(0) = 0$ dir. $y(z) := \dfrac{y_1(z)}{z}$ dersek $y \in H^p$ dir. Buradan

$$z(\lambda - \mathcal{S}_1)(y)(z) = (\lambda - \mathcal{T}_1)(zy(z)) = (\lambda - \mathcal{T}_1)(y_1(z)) = zg(z)$$

elde ederiz. Böylece $(\lambda - \mathcal{S}_1)(y)(z) = g(z)$ yani; $\lambda \in \rho(\mathcal{S}_1)$ dir. Şimdi ise $\lambda \in \rho(\mathcal{S}_1)$ , $\lambda \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $g \in H^p$ ise $y_1(z)$ , $H^p$ içinde $(\lambda - \mathcal{S}_1)(y_1)(z) = \dfrac{g(z)-g(0)}{z}$ ın çözümü olsun ve $y(z) := zy_1(z) + \dfrac{g(0)}{\lambda}$ olsun. Bu durumda $y \in H^p$ ve

$$(\lambda - \mathcal{T}_1)(y)(z) = (\lambda - \mathcal{T}_1)(zy_1(z)) + g(0) = z(\lambda - \mathcal{S}_1)(y_1(z)) + g(0) = g(z)$$

dir bu $\lambda - \mathcal{T}_1$ nin örten olduğunu gösterir. Teorem 2.4.3 (d) den $\lambda - \mathcal{S}_1$ birebirdir. O halde $\lambda \in \rho(\mathcal{S}_1)$ dir.

**(c)** İlk içerme $w_0 \leq -1 + \dfrac{2}{p}$ olduğundan Teorem 2.2.8 yardımıyla elde edilir. Ters içerme ise Lemma 2.4.12 (b) yardımıyla elde edilir.

Her hangi bir $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\left(C_1^{-1}\right)^t$ ve $\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t$ arasında

$$(a-1)\, I + \left(C_1^{-1}\right)^t = a\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t$$

bağıntısı geçerli olduğundan Teorem 2.4.9 deki mantıkla $\mathcal{S}_a$ nın spektrumu için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 2.4.15($\mathcal{S}_a$ sonsuz küçük üreticisi):**

**(a)** $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a \geq \frac{1}{q}$ olsun. $\ell^p$ de verilmiş $S_a$ yarı grubunun $\mathcal{S}_a$ sonsuz küçük üreticisi; sınırlı olmayan, kapalı, yoğun tanımlı, lineer bir operatördür. $\mathcal{S}_a$ in spektrumu için

$$\sigma\left(\mathcal{S}_a\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{aq}\right\}$$

geçerlidir ve spektrumun içi eigen değerlerden oluşur. Yani;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < -1 + \frac{1}{aq}\right\} \subset \sigma_p\left(\mathcal{S}_a\right)$$

geçerlidir.

**(b)** $1 \leq p < \infty$ ve $a \geq \frac{1}{p}$ olsun. $H^p$ üzerinde verilmiş $S_a$ yarı grubunun $\mathcal{S}_a$ sonsuz küçük üreticisi; sınırlı olmayan, kapalı, yoğun tanımlı, lineer bir operatördür. $\mathcal{S}_a$ in spektrumu için

$$\sigma\left(\mathcal{S}_a\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{ap}\right\}$$

geçerlidir ve spektrumun içi eigen değerlerden oluşur. Yani;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < -1 + \frac{1}{ap}\right\} \subset \sigma_p\left(\mathcal{S}a\right)$$

geçerlidir.

**(c)** $4 \leq p < \infty$ ve $a \geq \frac{2}{p}$ olsun. $A^p$ üzerinde verilmiş $S_a$ yarı grubunun $\mathcal{S}_a$ sonsuz küçük üreticisi; sınırlı olmayan, kapalı, yoğun tanımlı, lineer bir operatördür. $\mathcal{S}_a$ in spektrumu için

$$\sigma\left(\mathcal{S}_a\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{2}{ap}\right\}$$

geçerlidir ve spektrumun içi eigen değerlerden oluşur. Yani;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < -1 + \frac{2}{ap}\right\} \subset \sigma_p\left(\mathcal{S}_a\right)$$

geçerlidir.

Şimdi ise Not 2.4.11 benzeri düşünceyle Sonuç 2.4.15 nin aşağıdaki genellemesini verelim.

**Not 2.4.16:** $(X, \|.\|)$ bir BK-uzayı ve

$$\mathcal{D}\left(\mathcal{S}_1\right) := \left\{x \in X : \left(C_1^{-1}\right)^t x \in X\right\} \text{ ile } \mathcal{S}_1 := -\left(C_1^{-1}\right)^t |_{\mathcal{D}(\mathcal{S}_1)}$$

$X$ üzerinde yoğun tanımlı , kapalı lineer bir operatör olsun. Herhangi bir $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ alalım. Bu durumda $\mathcal{S}_a := -\dfrac{1}{a}\left((a-1)I - \mathcal{S}_1\right)$ operatörü de kapalı, yoğun tanımlı, lineer bir operatördür. Ayrıca

$$\mathcal{D}\left(\mathcal{S}_1\right) = \mathcal{D}\left(\mathcal{S}_a\right) := \left\{x \in X : \left(\Gamma_a^{-1}\right)^t x \in X\right\} \text{ ve } \mathcal{S}_a = -\left(\Gamma_a^{-1}\right)^t |_{\mathcal{D}(\mathcal{S}_a)}$$

geçerlidir. Buradan Teorem 2.4.13 yardımıyla aşağıdakiler elde edilir.

(a) $1 < p < \infty$ , $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Her $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{S}_a$ , $\ell^p$ de

$$0 \in \rho\left(\mathcal{S}_a\right) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > \frac{1}{q}$$

ile verilmiş sınırlı olmayan kapalı yoğun tanımlı lineer bir operatördür.

(b) $1 \leq p < \infty$ olsun. Her $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{S}_a$ , $H^p$ de

$$0 \in \rho\left(\mathcal{S}_a\right) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > \frac{1}{p}$$

ile verilmiş sınırlı olmayan kapalı yoğun tanımlı lineer bir operatördür.

(c) $4 \leq p < \infty$ olsun. Her $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\mathcal{S}_a$ , $A^p$ de

$$0 \in \rho\left(\mathcal{T}_a\right) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > \frac{2}{p}$$

ile verilmiş sınırlı olmayan kapalı yoğun tanımlı lineer bir operatördür.

### 2.5 Gamma Matrislerinin Normu ve Spektrumu

Bu bölümde daha önce söylediğimiz gibi Gamma matrislerinin BK-uzaylarındaki özelliklerini inceleyeceğiz. Bu çalışmada $\mathcal{T}_1 = -C_1^{-1}|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_1)}$ özelliği yardımıyla Cesàro matrisinden Hausdorff matrisleri için ne tür sonuçlar elde edebileceğimiz gösterilecektir. Bu bölümde ilk önce her hangi bir BK-uzayında verilmiş reel Gamma matrisleri için genel bir sonuç ispatlayacağız ve daha sonra bu sonucu $\ell^p$, $c_0$, $c$, $H^p$ ve $A^p$ özel BK-uzaylarındaki Gamma matrislerine genişleteceğiz. Daha çok BK-uzaylarında sınırlı Gamma matrisleri karekterize edilecektir. Sonraki aşamada Gamma matrislerinin transpozları incelenecektir. Bu bölümün sonunda normal Hausdorff matrisleri ve bidiagonal tersleri incelenecektir. İlk önce $T_a$ yarı grubunun $\Gamma_a$ Gamma matrisi ile işe başlayalım.

**Teorem 2.5.1(Gamma matrisleri):** $(X, \|.\|)$ bir BK-uzayı, $a$ bir pozitif reel sayı ve

$$\begin{array}{rcl} T_a : \mathbb{R}^{\geq 0} & \longrightarrow & B(X) \\ t & \mapsto & T_a(t) := e^{-t} E\left(e^{-\frac{t}{a}}\right) \end{array}$$

$X$ üzerinde lineer operatörlerin kuvvetli sürekli yarı grubu olsun. Ayrıca her $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ , $M > 0$ ve $w > 0$ ile $\|T_a(t)\|_X \leq M.e^{-wt}$ geçerli olsun. Bu durumda $a$ parametreli Gamma matrisleri için;

(a) $\Gamma_a \in B(X)$ dir ve $\Gamma_a(X)$ , $X$ de yoğundur.

(b) $\|\Gamma_a\|_X \leq \dfrac{M}{w}$

geçerlidir.

**İspat:** Teorem 2.3.8 in bütün şartları hipotezde verildiğinden $-\Gamma_a^{-1}\mid_{\mathcal{D}(\mathcal{T}_a)}$ $X$ de yoğun tanımlı kapalı lineer bir operatördür. $T_a$ yarı grubunun $w_0$ karakteri; her $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için $\|T_a(t)\|_X \leq M.e^{-wt}$ geçerli olduğundan

$$w_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T_a(t)\|_X \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log M.e^{-wt} \leq -w < 0$$

biçimindedir. Böylece Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.3 (b) den özel olarak $0 \in \rho(-\Gamma_a^{-1} \mid \mathcal{D}(\mathcal{T}_a))$ elde edilir. Resolventin tanımı gereği $(\Gamma_a^{-1})^{-1}$, $B(X)$ dedir. Teorem 1.2.15 den $\Gamma_a$ eşlenik matrisine bir matris dönüşümü biçiminde bakabiliriz. Bu durumda $\Gamma_a^{-1}$ tanım kümesi $X$ de yoğun olacak biçimde $X$ den $X$ e bijektif biçimde oluşturulduğundan $\Gamma_a(X)$ , $X$ de yoğundur. Teorem

(b) den her $x \in X$ için

$$\|\Gamma_a x\| = \left\| \int_0^\infty T_a(t)\, x dt \right\| \leq M. \int_0^\infty e^{-wt} dt. \|x\| = \frac{M}{w}. \|x\|$$

olduğunu elde ederiz. Böylece istenilen norm tahmini elde edilmiş olur.

Biz $\ell^p$ , $c_0$ , $c$ , $H^p$ ve $A^p$ özel BK-uzaylarında Gamma matrislerini araştırıyoruz. Bu uzaylarda (uygun $a$ parametresi için) Gamma matrislerinin tersleri de Sonuç 2.4.9 dan sınırlı olmayan kapalı lineer bir operatördür ve onların tanım kümesi de BK-uzaylarında yoğundur. Ayrıca Sonuç 2.4.9 dan bunların spektrumu bilindiği için spektral dönüşüm teoremi (Kato [**36, sh.177**]) yardımıyla spektrum için bir fikir elde edilir. Kato'nun ispatı bu spektral gösterim teoreminin point spektrum için de geçerlilik sağladığını göstermiştir. Teorem 2.5.1 i, Teorem 2.2.1, Teorem 2.2.2, Teorem 2.2.3, Teorem 2.2.4 ve Teorem 2.2.5 ile kullanırsak sınırlı lineer operatörlerin normlarının, kendi spektral yarıçapları ile üstten sınırlı olduğu tahmin edilebilir. Böylece şu sonuçlar elde edilir.

**Teorem 2.5.2($\ell^p$ üzerinde Gamma matrisleri):** $1 < p < \infty$ olsun. $a > \frac{1}{p}$ parametresi ile verilmiş Gamma-matrisleri için

**(i)** $\Gamma_a \in B(\ell^p)$ dir ve $\Gamma_a(\ell^p), \ell^p$ de yoğundur.

**(ii)** $\sigma(\Gamma_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{ap}{2(ap-1)} \right| \leq \frac{ap}{2(ap-1)} \right\}$

**(iii)** $\sigma_p(\Gamma_a) = \emptyset$

**(iv)** $\|\Gamma_a\|_{\ell^p} = \frac{ap}{ap-1}$

geçerlidir.

Bu teoremin ispatı yoğunluk dışında Rhoades [58] tarafından yapılmıştır. Bu ispat başka dizi uzaylarında kullanılamaz. Yoğunluğun ispatı ise Teorem 2.2.1 de verilen $T_a$ yarı grubu için $\|T_a\|_{\ell^p} \leq e^{-\left(1-\frac{1}{ap}\right)t}$ olduğundan Teorem 2.5.1 (a) dan elde edilir. Rhoades [58] de Teorem 2.5.2 nin ispatını yapabileceğimiz şu önemli teoremi ispatlamıştır.

**Teorem 2.5.3:** $H(p) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{p}} dq(x)$ olsun. Bu durumda $\|H\|_p = H(p)$ dir.

Teorem 2.5.3 ü ispatlamak için ilk önce 1943 de Hardy'nin aşağıdaki teoremini verelim

**Teorem 2.5.4:** Eğer $a_n \geq 0$ ve $p > 1$ ise bu durumda her $n$ için $a_n = 0$ olmadıkça veya dönüşüm özdeşliğe indirgenmedikçe

$$\sum b_n^p < \left( \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} dX \right)^p \sum a_n^p = H(p) \sum a_n^p \tag{2.5.11}$$

geçerlidir. $H(p)$ nin değeri mümkün olan en iyisidir.

Kabul gereği açıktır ki $H(p)$ ve $\sum a_n^p$ sonludur.

İlk önce bilinen bir sonucu ispatlayalım, yani eğer $0 < t < 1$ ve

$$e_n = e_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m a_m \tag{2.5.2}$$

ise bu durumda

$$\sum e_n^p \leq t^{-1} \sum a_n^p \tag{2.5.3}$$

geçerlidir. Gerçekten de Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} e_n^p &\leq \sum \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m a_m^p \left\{ \sum \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m \right\}^{p-1} \\ &= \sum \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m a_m^p \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

$$\sum_n e_n^p \leq \sum_n \sum_{m \leq n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m a_m^p = \sum_m t^m a_m^p \sum_{n \geq m} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} \tag{2.5.5}$$

içteki toplam $\{1-(1-t)\}^{-m-1} = t^{-m-1}$ dir ve (2.5.3) gösterilir.

Şimdi

$$b_n = \int_0^1 \left\{ \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m a_n \right\} dX = \int_0^1 e_n(t)\, dX$$

biçimindedir. Dolayısıyla Minkowsky eşitsizliğinin bir formundan (Hardy, Littlewood, and Polya, Inequalities, 148 Teorem 201)

$$\left( \sum b_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left( \sum e_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ H(p) \sum e_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{2.5.6}$$

elde edilir ki bu " $\leq$ " yerine " $<$ " için (1) dir.

$e_n(t) \equiv E_n\phi(t)$ olmadıkça (2.5.6) nın ilk temsil ettiği eşitsizliktir. Burada " $\equiv$ " $X$ in değişiminin 0 olduğu bir $S$ kümesinde hariç tutulan eşitsizlikleri sağlar. Biz $S'$ tamlama kümesinin

(a) bir sonsuz

(b) sadece sonlu noktaların kümesini içerdiğini

ayrı tutuyoruz. (a) durumunda $t$ için $e_n(t) \to E_n\phi(t)$ , (b) durumunda $X$ basit bir basamak fonksiyonudur.

(a) $e_n(t)$ yi biz

$$e_n(t) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{m} t^s \Delta^s a_0$$

formunda yazabiliriz. Eğer $a_k$ , $a_n$ nin sıfırdan farklı ilk terimi ise bu durumda $n < k$ için $e_n(t) = 0$ ve

$$\begin{aligned} e_k(t) &= (-1)^k t^k \Delta^k a_0 = a_k t^k , \\ e_{k+1}(t) &= (-1)^t (k+1) t^k \Delta^k a_0 + (-1)^{k+1} t^{k+1} \Delta^{k+1} a_0 , \cdots \end{aligned}$$

dır. Bu $\phi(t)$ nin $t^k$ nın bir katı olduğunu ve $n > k$ için $\Delta^n a_0 = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $a_n$ , $n$ nin bir polinomudur, ki o,0 olmalıdır. Çünkü $\sum a_n^p$ yakınsaktır.

(b) Kabul edelim ki $X$ , $t = t_s$ de $a$ sıçrayışı ile bir basamak fonksiyonu olsun. Burada $1 \leq s < r$ dir ve her $a_n$ , 0 dan farklıdır. Bu durumda $b_n = \sum a_s e_n(t_s)$ ve (2.5.5) den

$$\left(\sum_n b_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_s a_s \left\{\sum_n e_n^p(t_s)\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \sum_s \frac{a_s}{t_s^{\frac{1}{p}}} \left(\sum a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} dX$$

elde edilir. Şimdi buradaki eşitsizlik $t$ , 0 veya 1 olmadıkça (veya her $a_n = 0$) (2.5.5) de dir ve dolayısıyla her $t_r$ , 0 veya 1 olmadıkça eşitsizilik (2.5.7) dedir. Fakat bu durumda $X(0) = X(+0)$ ve $X(1) = 1$ olduğundan $t < 1$ , $X = 0$ ve $t = 1$ için $X = 1$ dir ve dönüşüm özdeşliğe indirgenir.

$H\left(p\right)$ nin değerinin mümkün olan en iyisi olduğunu ispatlamak kaldı ve ispat benzer çizgide izlenir.

$$w=\frac{1}{p}+\varepsilon\ ,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{p}\ ,\ a_n=\left(n+1\right)^{-w} \tag{2.5.7}$$

alalım ve her bir pozitif $\eta$ ; ve seçilen $c$ , $N$ ve $\varepsilon$ için

$$\left(1+\frac{1}{c}\right)^{-\frac{2}{p}}\ >\ 1-\eta\ ,\ \int\limits_{\frac{c}{n}}^{1}t^{-\frac{1}{p}}dX>\left(1-\eta\right)\int\limits_{0}^{1}t^{-\frac{1}{p}}dX \qquad (n\geq N)$$

$$\sum_{N}^{\infty}a_n^p\ =\ \sum_{N}^{\infty}\left(n+1\right)^{-1-p}>\left(1-\eta\right)\sum_{0}^{\infty}a_n^p$$

dir. Bu durumda

$$a_n=\frac{1}{\Gamma\left(\overline{w}\right)}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(n+1)x}x^{w-1}dx\ ,\ e_n\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\overline{w}\right)}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}x^{w-1}\left(1-t+te^{-x}\right)^n dx$$

ve $x>0$ , $0<t<1$ için $1-t+te^{-x}>e^{-tx}$ dir. Dolayısıyla

$$e_n\left(t\right)\geq\frac{1}{\Gamma\left(\overline{w}\right)}\int\limits_{0}^{\infty}x^{w-1}e^{-(1+nt)x}dx=\left(1+nt\right)^{-w}$$

dır. Eğer $\frac{c}{n}<t<1$ ise bu

$$\left(1+nt\right)^{-w}t^{-w}\left(1+\frac{1}{c}\right)^{-w}>t^{-\frac{1}{p}}\left(1+\frac{1}{c}\right)^{-\frac{2}{p}}a_n>\left(1-\eta\right)t^{-\frac{1}{p}}a_n$$

den büyüktür. Dolayısıyla $n\geq N$ için

$$b_n\geq\int\limits_{\frac{c}{n}}^{1}e_n\left(t\right)dX\geq\left(1-\eta\right)a_n\int\limits_{\frac{c}{n}}^{1}t^{-\frac{1}{p}}dX\geq\left(1-\eta\right)^2a_n\int\limits_{0}^{1}t^{-\frac{1}{p}}dX$$

dır ve

$$\sum_{0}^{\infty}b_n^p\geq\sum_{N}^{\infty}b_n^p\geq\left(1-\eta\right)^{2p}K\left(p\right)\sum_{N}^{\infty}a_n^p\geq\left(1-\eta\right)^{2p+1}H\left(p\right)\sum_{0}^{\infty}a_n^p$$

dır ve böylece $\eta$ keyfi olduğundan ispat tamamlanır.

Şimdi Teorem 2.5.3 ü ispatlayabiliriz. Teorem 2.5.4 de herhangi bir pozitif $s = \{s_n\} \in \ell^p$ için $\|Hs\|^p \leq [H(p)]^p \|s\|^p$ olduğunu gösterdi.

Onun sonucu sabit bir $s \in \ell^p$ dizisi için

$$\|Hs\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} h_{nk} s_k \right|^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{n} h_{nk} |s_k| \right]^p$$

olduğunu verir. Dolayısıyla $\|H\|_p \leq H(p)$ dir.

İspatı tamamlamak için (2.5.7) deki argümentlerle $s_n = (n+1)^{-w}$ , $w = \frac{1}{p} + \varepsilon$ , $0 < \varepsilon < \frac{1}{p}$ , $\eta > 0$ için $H_n(s) > (1-\eta)^2 H(p) s_n$ dir. Bu sonuç $\|H\|_p \geq H(p)$ ye götürür ve böylece $\|H\|_p = H(p)$ elde edilir.

Şimdi Teorem 2.5.3 ü kullanarak $\Gamma_a$ nın normunu

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_a\|_p &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{p}} d\left( \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{a-1} \left( \log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\alpha-1} dt \right) \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{-\frac{1}{p}+a-1} \left( \log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u\left(-\frac{1}{p}+a-1+1\right)} u^{\alpha-1} du \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \left(a - \frac{1}{p}\right)^{1-\alpha-1} dt \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} . \left(a - \frac{1}{p}\right)^{-\alpha} .\Gamma(\alpha) \\
&= \left( \frac{a}{a - \frac{1}{p}} \right)^\alpha
\end{aligned}$$

buluruz ki bu Teorem 2.5.2 (iv) ün ispatıdır. Benzer şekilde Rhoades [**58**] de aşağıdaki teoremle Teorem 2.5.2 (iii) yi ispatlamıştır.

**Teorem 2.5.5:** Eğer $H \neq I$ ise $H$ ın point spektrumu boştur.

**İspat:** Kabul edalim ki bazı $\lambda$ lar için $Hf = \lambda f$ olsun. $H$ total regüler olduğundan her $n$ için $\mu_n \neq 0$ dır. Böylece $H$ , $\ell^p$ de sol sıfır bölen değildir ve $\lambda = 0$ olamaz. $f \in \ell^p$ için $g(n) := \sum_{k=o}^{n} h_{nk} f(k)$ tanımlansın. $g(0) = \lambda f(0)$ olduğundan $f(o) \neq 0$ ile verilmiş her $f$ için $\lambda = 1$ olmasını elde ederiz.

1. DURUM: Kabul edelim ki $f(0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\lambda = 1$ ve $(H - I) f \equiv 0$ olduğunu elde ederiz. Özellikle $h_{10}f(0) + (h_{11} - 1)f(1) = 0$ yani; $f(1) = \dfrac{h_{10}f(0)}{1 - h_{11}}$ dır. Fakat $h_{10} = \binom{1}{0}\Delta\mu_0 = \mu_0 - \mu_1 = 1 - h_{11} > 0$ dır. Dolayısıyla $f(1) = f(0)$ ve tümevarımla $n = 1, 2, \ldots$ için $f(n) = f(0)$ olduğunu elde ederiz. $f(0) \neq 0$ olduğundan $f = \{f(0)\} \notin \ell^p$ dır.

2.DURUM: $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $\mu_N = \lambda$ veya her hangi bir $n$ için $\mu_n \neq \lambda$ olacak şekilde bir $N$ tamsayısı mevcuttur.

2A. DURUM: $f(0) = 0$ ve herhangi bir $n$ için $\mu_n \neq \lambda$ olsun.

$$h_{10}f(0) + h_{11}f(1) = \lambda f(1)$$

eşitliğinden $(\lambda - \mu_1)f(1) = 0$ elde edriz ki bu $f(1) = 0$ olduğunu gösterir. Tümevarımla $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $f(n) = 0$ olduğunu elde ederiz.

2B.DURUM: $f(0) = 0$ ve bazı $N$ ler için $\mu_N = \lambda$ olsun. Eğer $N = 0$ ise bu durumda $\lambda = 1$ ve $h_{10}f(0) = h_{11} = f(1) = f(1)$ ; yani $(1 - \mu_1)f(1) = 0$ olduğunu elde ederiz. $H \neq I$ , $\mu_1 \neq 1$ olduğundan $f(1) = 0$ ve tümevarımla $n = 2, 3, 4, \ldots$ için $f(n) = 0$ olduğunu elde ederiz. Her bir $r$ için $\mu_n > \mu_{n+1}$ olduğundan ($H \neq I$ total regüler Hausdorff matrislerinin iyi bilinen bir özelliği) eğer $N > 0$ ise bu durumda açıkça $f(0) = 0$ olması

$$f(1) = f(2) = \cdots = f(N-1) = 0$$

olmasını belirler ve $f(N)$ olduğu gibi belirlenemez. Eğer $f(N) = 0$ ise bu durumda önce olduğu gibi $f \equiv 0$ dır.Eğer $f(N) \neq 0$ ise tümevarımla

$$f(N+r) = \binom{N+r}{N} f(N) \; ; \; r = 0, 1, 2, \ldots$$

olduğunu göstereceğiz. Bu $r = 0$ için önemsiz olarak doğrudur. Kabul edelim ki tümevarım hipotezi doğru olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{N+r+1} h_{N+r+1,k} f(k) = \mu_N f(N+r+1)$$

veya

$$
\begin{aligned}
(\mu_N - \mu_{N+r+1}) f(N+r+1) &= \sum_{k=N}^{N+r} h_{N+r+1,k} f(k) = \sum_{j=0}^{k} h_{N+r+1,N+j} f(N+j) \\
&= \sum_{j=0}^{r} \binom{N+r+1}{N} \left(\Delta^{r+1-j}\mu_{N+j}\right) \binom{N+j}{N} f(N) \\
&= f(N) \binom{N+r+1}{N} \sum_{j=0}^{r} \binom{n+1}{j} \Delta^{r+1-j}\mu_{N+j}
\end{aligned}
$$

dir. Not edelim ki $\{\mu_{N+r}\}_{r=0}^{\infty}$ ile verilmiş Hausdorff matrisinin satırı

$$
\sum_{j=0}^{r+1} \binom{r+1}{j} \Delta^{r+1-j}\mu_{N+j}
$$

dır. Dolayısıyla $\sum_{j=0}^{r} \binom{r+1}{j} \Delta^{r+1-j}\mu_{N+j} = \mu_N - \mu_{N+r+1} \neq 0$ ve

$$
f(N+r+1) = \binom{N+r+1}{N} f(N)
$$

dır. Üstelik; $|f(N+r+1)| > |f(N+r)|$ dır. Böylece $f \notin \ell^p$ dir.

Son olarak Teorem 2.5.2 (ii) nin ispatını yapacağız. Bunun için tekrar Rhoades [58] de verilen aşağıdaki iki teoreme ihtiyaç duyuyoruz.

**Teorem 2.5.6:** $H \neq I$ için $H^* - N$ , $N$ den kesin daha küçük mutlak değere sahip özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin bir total kümesine sahiptir. ( Burada $N = \frac{1}{2} \|H\|_p$ dur.)

**İspat:** $\beta_n = \Delta^n e_0$ ile verilmiş dizilerin bir ailesi $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ ile gösterilsin. Burada $\Delta e_0 = e_0 - e_1$ , $\Delta^n e_0 = \Delta(\Delta^{n-1} e_0)$ dır. $\{\beta_0, \beta_1, \ldots\}$ kümesi, $\ell^q$ üzerinde totaldir. $q$ , $p$ nin konjugesidir. $m > n$ için $H^* \beta_n(m) = 0$ dır. $m \leq n$

için

$$
\begin{aligned}
H^*\beta_n(m) &= \sum_{k=m}^{\infty} h^*_{mk}\beta_n(k) = \sum_{k=m}^{n} h^*_{mk}(-1)^k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=m}^{r}\binom{k}{m}\left(\Delta^{k-m}\mu_m\right)(-1)^k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}(-1)^k\sum_{j=0}^{k-m}(-1)^j\binom{k-m}{j}\mu_{m+j} \\
&= \sum_{r=0}^{n-m}\binom{r+m}{m}\binom{n}{r+m}(-1)^{r+m}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\mu_{m+j} \\
&= \binom{n}{m}\sum_{j=0}^{n-m}(-1)^{m+j}\mu_{m+j}\sum_{r=j}^{n-m}(-1)^r\frac{(n-m)!}{(n-m-r)!.j!.(r-j)!} \\
&= (-1)^m\binom{n}{m}\sum_{j=0}^{n-m}\binom{n-m}{j}\mu_{m+j}\sum_{s=0}^{n-m-j}(-1)^s\binom{n-m-j}{s} \\
&= (-1)^m\binom{n}{m}\mu_n = \mu_n\beta_n(m)
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla $(H^*-N)\beta_n = (\mu_n - N)\beta_n$ dir.

**Teorem 2.5.7:** $\sigma(\Gamma_a) = \{\lambda : |\lambda - N| \leq N\}$ dır. Burada $N = \frac{1}{2}\|H\|_p$ dur.

**İspat:** $N - \Gamma_a - \lambda$ operatörü $\mu_n = c - \dfrac{a}{n+a}$ dizisi tarafından üretilen momente sahiptir. Burada $c = N - \lambda$ dır. $\varepsilon = \dfrac{1}{\mu_n}$ olsun. Eğer $|\lambda| > N$ için $H_\varepsilon$ operatörünün $\ell^p$ üzerinde sınırlı lineer bir operatör olduğunu gösterilebilirse bu durumda $\sigma(N - \Gamma_a) \subseteq \{\lambda : |\lambda| \leq N\}$ dır. Dolayısıyla $\sigma(\Gamma_a) \subseteq \{\lambda : |\lambda - N| \leq N\}$ dir. [**4, Teorem 2**] deki (4) ün ispatındaki metodu kullanarak eğer $\lambda$ , $|\lambda - N| < N$ koşulunu sağlıyorsa istenileni elde ederiz. Bu durumda $\lambda$ , $\Gamma^*_a$ ın bir basit özdeğeridir. Gerçekten de spektrum kapalı olduğundan teorem tamamlanır.

Biz şimdi $H_\varepsilon$ un gerekliliğini gösterelim. Gerçekten de $\varepsilon_n = \dfrac{1}{c}\left[1 + \dfrac{\frac{a}{c}}{n+a-\frac{a}{c}}\right]$ böylece $\|H_\varepsilon\|_p \leq \dfrac{1}{|c|} + \dfrac{a}{|c|^2}\|H_\delta\|_p$ dır. Burada $\delta_n = \dfrac{1}{n+a-\frac{a}{\alpha}}$ dır ve teorem $\|H_\delta\|_p$ nin sonlu olmasına indirgenir.

$x \in \ell^p$ olsun. Bu durumda

$$\|H_\delta x\|_p = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} h_{nk} x_k \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{n} |h_{nk}| \, |x_k| \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

dir. Şimdi

$$\begin{aligned} |h_{nk}| &= \binom{n}{k} \left|\Delta^{n-k} \mu_k\right| = \binom{n}{k} \left| \int_0^1 t^{k+a-\frac{a}{c}-1} (1-t)^{n-k} dt \right| \leq \\ &\leq \binom{n}{k} \int_0^1 t^{k+a-\mathrm{Re}(\frac{a}{c})-1} (1-t)^{n-k} dt \end{aligned}$$

Böylece $\|H_\delta x\|_p \leq H_{|\delta|}(p) \, \|x\|_p$ , burada $H_{|\delta|}(p) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}+a-\mathrm{Re}(\frac{a}{c})-1} dt$ dir. Bu integralin varlığı önceden mevcuttur. $a - \mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\right) - \frac{1}{p} > 0$ olduğunu göstermek kaldı. Not edelim ki $c = N - \lambda$ dır. Böylece

$$a - \mathrm{Re}\left(\frac{a}{c}\right) = a + a \left[ \frac{\alpha - N}{(\alpha - N)^2 + \beta^2} \right]$$

dir. Hipotezden $|\lambda| > N$ dır. Eğer biz $\lambda = \alpha + i\beta$ alırsak bu durumda $|\lambda| > N$ , $\alpha^2 + \beta^2 > N$ ye eşittir. Buradan $(\alpha - N)^2 + \beta^2 > 2N(N - \alpha)$ formunda yazabiliriz. Dolayısıyla $\frac{\alpha - N}{(\alpha - N)^2 + \beta^2} > -\frac{1}{2N}$ dir. $1 - \frac{1}{2N} = \frac{1}{ap}$ olduğundan ispat tamamlanır.

Şimdi Teorem 2.5.2 (ii) nin ispatını yapmak için Teorem 2.5.7nin ifadesinde geçen $N$ sayısını bulmak gerekiyor. $N = \frac{1}{2} \|\Gamma_a\| = \frac{1}{2} . \frac{ap}{ap - 1}$ biçiminde olacağından Teorem 2.5.2 (ii) ispatlanmış olur.

**Teorem 2.5.8($c_0$ üzerinde Gamma matrisleri):** $a > 0$ parametresi ile verilmiş Gamma-matrisleri için

**(i)** $\Gamma_a \in B(c_0)$ dır ve $\Gamma_a(c_o)$ , $c_0$ da yoğundur.

**(ii)** $\sigma(\Gamma_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\}$

**(iii)** $\sigma_p(\Gamma_a) = \emptyset$

**(iv)** $\|\Gamma_a\|_{c_0} = 1$

geçerlidir.

Bunlar Reade [49] un araştırmasının ilk bölümüdür. Bu çalışma sadece Cesàro matrisleri ile ilgilidir. Cesàro matrisleri ile Gamma matrislerinin karşılaştırılması çok karmaşık olduğundan , onun eleme şekli Gamma matrislerine aktarılamaz.

**Teorem 2.5.9($c$ üzerinde Gamma matrisleri):** $a > 0$ parametresi ile verilmiş Gamma-matrisleri için

**(i)** $\Gamma_a \in B(c)$ dır ve $\Gamma_a(c)$ , $c$ de yoğundur.

**(ii)** $\sigma(\Gamma_a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$

**(iii)** $\sigma_p(\Gamma_a) = \{1\}$

**(iv)** $\|\Gamma_a\|_c = 1$

geçerlidir.

Burada da yukarda söylediklerimiz geçerlidir. Spektrum $a = 1$ özel durumu için ilk olarak Wenger [78] tarafından gösterilmiştir. Buradaki ispat metodu yine Cesàro operatörü ile sınırlıdır.

**Teorem 2.5.10($H^p$ üzerinde Gamma matrisleri I):** $2 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $a > \frac{1}{q}$ parametresi ile verilmiş Gamma-matrisleri için

**(i)** $\Gamma_a \in B(H^p)$ dir ve $\Gamma_a(H^p)$ , $H^p$ de yoğundur.

**(ii)** $\sigma(\Gamma_a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{aq}{2(aq-1)}\right| \leq \frac{aq}{2(aq-1)}\right\}$

**(iii)** $\sigma_p(\Gamma_a) = \emptyset$

**(iv)** $\|\Gamma_a\|_{H^p} = \frac{aq}{aq-1}$

geçerlidir.

Bu Siskakis [72] nin ilk genelleşmesidir. Not 2.2.11 den $T_1$ yarı grubu yardımıyla Cesàro operatörleri üzerinde bu ilk olarak ifade kazanmıştır. Bu metotla $1 \leq p < 2$ durumunda sonuca varılmaz. Bu durum için başka düşünceler gereklidir. Bu düşünce Cesàro operatörlerinin kapalı lineer iki operatörün bileşkesi olarak gösterilmesidir. Bunun sebebi Euler matrisinin operatör normunun tahmini için üst sınır bulunamamasıdır. Siskakis'in ispatının iyi yanı $a = 1$ özel durumunda Cesàro matrisinin operatör normu için üst sınır bulunması, kötü yanı ise bu metodun genelleştirilememesidir. Burada kullanılan sonuçlarla $H^p$ uzayları için eksik olan teorem ortaya çıkar.

**Teorem 2.5.11($H^p$ üzerinde Gamma matrisleri II):** $1 < p < 2$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $a \geq 1$ parametresi ile verilmiş Gamma-matrisleri için

**(i)** $\Gamma_a \in B(H^p)$ dir ve $\Gamma_a(H^p)$ , $H^p$ de yoğundur.

**(ii)** $\sigma(\Gamma_a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{aq}{2(aq-1)}\right| \leq \frac{aq}{2(aq-1)}\right\}$

**(iii)** $\sigma_p(\Gamma_a) = \emptyset$

**(iv)** $\frac{aq}{aq-1} \leq \|\Gamma_a\|_{H^p} \leq 2^{\frac{2-p}{p}} \frac{ap}{ap-1}$

geçerlidir.

**Not 2.5.12:** $H^1$ uzayları için (i) ve (iii) ifadeleri geçerlidir.

$$\sigma(\Gamma_a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$$

ve buna göre $1 \leq \|\Gamma_a\|_{H^p}$ elde edilir. Ancak normu üstten sınırlayan tahmin geçerliliğini kaybeder.

**Teorem 2.5.13($A^p$ üzerinde Gamma matrisleri ):** $4 \leq p < \infty$ olsun. $a > \frac{p-2}{2}$ parametresi ile verilmiş Gamma-matrisleri için

(i) $\Gamma_a \in B(A^p)$ dir ve $\Gamma_a(A^p)$ , $A^p$ de yoğundur.

**(ii)** $\sigma(\Gamma_a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{ap}{2(ap-p+2)}\right| \leq \frac{ap}{2(ap-p+2)}\right\}$

**(iii)** $\sigma_p(\Gamma_a) = \emptyset$

**(iv)** $\|\Gamma_a\|_{A^p} = \frac{ap}{ap-p+2}$

geçerlidir.

Burada da Siskakis [74] ün bir sonucunun genelleşmesinden bahsedilmiştir. Ancak ne yazık ki $1 \leq p < 4$ durumunda bir küme dahilinde norm tahmini yapılabiliyor fakat bunlar tamamen gösterilemiyor. Bu nedenle bize uygun bir gösterime geçiyoruz. Başka düşünceler yardımıyla $1 \leq p < \infty$ durumunda $H^p$ uzaylarındaki duruma benzeyen Cesàro matrisi üzerinde Siskakis'ten kısmi sonuçlar elde edilebilir.

Son olarak belirtelim ki Teorem 2.5.2-Teorem 2.5.13 sonuçları ispatların genel ilerlemesi şeklindedir. Orada dört değişik metod kullanılmıştır. $a \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, -2, \cdots\}$ parametresi için Gamma matrisleri yukarıda bahsedilen BK-uzaylarında sınırlı lineer operatörleri gösterir mi? Sorusu aklımıza gelebilir. Bu nitelik $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$ için gösterilir. $a$ reel parametresi en uygun durumu gösterir.

**Teorem 2.5.14(özel BK-uzaylarında Gamma matrisleri):**

$a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$ olsun. Bu durumda

(a) $\Gamma_a \in B(\ell^p) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, a > \frac{1}{p}$ $\qquad (1 < p < \infty)$

(b) $\Gamma_a \in B(c_0) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, a > 0$

(c) $\Gamma_a \in B(c) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, a > 0$

(d) $\Gamma_a \in B(H^p) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, a > \frac{1}{q}$ $\qquad (1 < p < \infty\ , \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

(e) $\Gamma_a \in B(A^p) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, a > \frac{p-2}{p}$ $\qquad (4 \le p < \infty\ )$

ifadeleri geçerlidir.

**İspat:** Not 2.4.11, resolventin tanımı ve Teorem 1.2.15 den elde edilir.

**Not 2.5.15:** Rhoades **[58]** tarafından $\ell^p$ üzerinde pozitif reel Gamma matrislerini karekterize eden değişik bir sonuç verilmiştir. Bu genellemede yukarıdaki sonuçlar yenidir.

**Not 2.5.16:** Teorem 2.5.2 de ele aldığımız kapalı lineer operatörlerin spektral dönüşüm teoremi ( bak Kato **[36 ,sh.177]** ) yardımıyla Not 2.4.11 ve Teorem 2.4.3 ün birleşimi ile sınırlı Gamma matrislerinin spektrumunu bulabiliriz. Uygun $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$ parametresi için

$$f(z) = \frac{a}{a-1-z} \text{ ile } \sigma(\Gamma_a) = f(\sigma(T_1)) \cup \{0\}$$

geçerlidir. Bunun yardımıyla operatör normu için bir alt sınır tahmin edilebilir. Şimdiye kadar incelenmiş metodlarla kompleks $a$ parametresi ile verilmiş operatörün normu için bir üst sınır tahmin edebilmek mümkün değildir, çünkü bu durumda Teorem 2.5.1 geçerliliğini kaybeder. Şimdiye kadar $T_1$ yarı grubu yardımıyla bazı sonuçlar elde ettik. Bundan sonraki bölümlerde bu sonuçları direkt olarak elde edeceğiz.

Biz önceden transpoze Gamma matrislerinin özelliklerini vermiştik. Transpoze Gamma matrisleriyle ilgili sonuçlar benzer bir kâr sağlar. Şimdilik Teorem 2.3.12 ve Teorem 1.2.15 yardımıyla genellikle transpoze Gamma matrisleri ile ilgili ifadeler kullanılacaktır.

**Teorem 2.5.17(Transpoze Gamma matrisleri) :** $X \subset \ell^\infty$ olacak şekilde $(X, \|.\|)$ bir BK-AK uzayı, $a$ bir pozitif reel sayı ve

$$\begin{array}{rcl} S_a : \mathbb{R}^{\geq 0} & \to & B(X) \\ t & \mapsto & S_a(t) := e^{-t} E^t \left( e^{-\frac{t}{a}} \right) \end{array}$$

olmak üzere $S_a$ , $X$ üzerinde lineer operatörlerin kuvvetli sürekli yarı grubu olsun. Ayrıca her $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ , $M > 0$ ve $w > 0$ ile $\|S_a(t)\|_X \leq M.e^{-wt}$ geçerli olsun. Bu durumda $a$ parametreli transpoze Gamma matrisleri için;

(a) $\Gamma_a^t \in B(X)$ ve $\Gamma_a^t(X)$ , $X$ de yoğundur.

(b) $\|\Gamma_a^t\|_X \leq \dfrac{M}{w}$

geçerlidir.

Teorem 2.5.2-Teorem 2.5.11 ve Teorem 2.5.13 yardımıyla Teorem 2.5.17 ve Sonuç 2.4.15 den Teorem 2.2.7-Teorem 2.2.10 ile ve 1.6.2, 1.8.8, Teorem 1.9.4 altında transpoze Gamma matrisleri üzerinda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 2.5.18($\ell^p$ üzerinde transpoze Gamma matrisleri):**
$1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. $a > \dfrac{1}{q}$ parametresi ile verilmiş transpoze Gamma-matrisleri için

(i) $\Gamma_a^t \in B(\ell^p)$ dir ve $\Gamma_a^t(\ell^p)$ , $\ell^p$ de yoğundur.

(ii) $\sigma(\Gamma_a^t) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \dfrac{aq}{2(aq-1)} \right| \leq \dfrac{aq}{2(aq-1)} \right\}$

(iii) $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \dfrac{aq}{2(aq-1)} \right| < \dfrac{aq}{2(aq-1)} \right\} \subset \sigma_p(\Gamma_a^t)$

(iv) $\|\Gamma_a^t\|_{\ell^p} = \dfrac{aq}{aq-1}$

geçerlidir.

Bu teoremin ispatı yoğunluk ve point spektrum dışında Tanım 1.6.3 ve Teorem 2.5.2 den eşlenik operatörler için spektral dönüşüm teoremi (bak Taylor, Lay [**77, s.275**] ) ile elde edilir. Point spektrumu özel durum olarak Leibowitz [**42**] de bulabiliriz. Her BK-AK uzayı bir BK-uzayına izometrik izomorf olduğundan transpoze Gamma matrislerinin incelenmesine izin veren metoda ihtiyacımız vardır. Bu durum $H^p$ ve $A^p$ uzaylarında takip eden teoremle verilecektir. Bu sonuca Siskakis [**72**], [**73**] ifadelerini genişleterek ulaşabiliriz.

**Teorem 2.5.19($H^p$ üzerinde transpoze Gamma matrisleri):** $1 < p < \infty$ olsun. $a > \dfrac{1}{p}$ parametresi ile verilmiş transpoze Gamma-matrisleri için

**(i)** $\Gamma_a^t \in B(H^p)$ dir ve $\Gamma_a^t(H^p)$ , $H^p$ de yoğundur.

**(ii)** $\sigma(\Gamma_a^t) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \dfrac{ap}{2(ap-1)}\right| \leq \dfrac{ap}{2(ap-1)}\right\}$

**(iii)** $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \dfrac{ap}{2(ap-1)}\right| < \dfrac{ap}{2(ap-1)}\right\} \subset \sigma_p(\Gamma_a^t)$

**(iv)** $\|\Gamma_a^t\|_{H^p} = \dfrac{ap}{ap-1}$

geçerlidir.

**Teorem 2.5.20($A^p$ üzerinde transpoze Gamma matrisleri):** $1 < p < \infty$ olsun. $a > \dfrac{2}{p}$ parametresi ile verilmiş transpoze Gamma-matrisleri için

**(i)** $\Gamma_a^t \in B(A^p)$ dir ve $\Gamma_a^t(A^p)$ , $A^p$ de yoğundur.

**(ii)** $\sigma(\Gamma_a^t) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \dfrac{ap}{2(ap-2)}\right| \leq \dfrac{ap}{2(ap-2)}\right\}$

**(iii)** $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \dfrac{ap}{2(ap-2)}\right| < \dfrac{ap}{2(ap-2)}\right\} \subset \sigma_p(\Gamma_a^t)$

**(iv)** $\|\Gamma_a^t\|_{A^p} = \dfrac{ap}{ap-2}$

geçerlidir.

Sınırlı transpoze Gamma matrisleri Not 2.4.16, resolventin tanımı ve Teorem 1.2.17 ile karekterize edilebilir. Bu matrislerin spektrumunu Not 2.5.16 da olduğu gibi elde edebiliriz. Biz bu sonuçlardan bir sınıflandırma elde edeceğiz.

**Teorem 2.5.21(özel BK-uzaylarında transpoze Gamma matrisleri):** $a \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, \cdots\}$ olsun. Bu durumda

**(a)** $\Gamma_a^t \in B(\ell^p) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > \dfrac{1}{q}$ $\quad (1 < p < \infty\ , \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1)$

**(b)** $\Gamma_a^t \in B(H^p) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > \dfrac{1}{p}$ $\quad (1 < p < \infty)$

**(c)** $\Gamma_a^t \in B(A^p) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a > \dfrac{2}{p}$ $\quad (1 < p < \infty\ )$

ifadeleri geçerlidir ve $\Gamma_a^t$ nın resmi bahsedilen dizi uzaylarında yoğundur.

**Not 2.5.22:** Şimdiye kadar elde ettiğimiz sonuçları Hausdorff operatörlerinin daha geniş bir sınıfına genişletebiliriz. Yani bidiagonal tersi ile normal veya transpoze normal Hausdorff matrislerine genişletebiliriz. $(H, p)$ bidiagonal tersi ile $p$ den üretilmiş Hausdorff matrisi olmak üzere 1.4.3 (a) ve (f) den

$$\Delta^2 \frac{1}{p_n} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

dir. Buradan

$$0 = \Delta^2 \frac{1}{p_n} = \Delta \frac{1}{p_n} - \Delta \frac{1}{p_{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ , $b \in \mathbb{C}$ ile $\Delta \frac{1}{p_n} = -b$ olsun. Son gösterdiğimiz

$$\frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{p_n} + b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ile aynı anlamda olduğundan tümevarımla

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} &= \frac{1}{p_0} + b \\ \frac{1}{p_2} &= \frac{1}{p_1} + b = \frac{1}{p_0} + 2b \\ \frac{1}{p_3} &= \frac{1}{p_2} + b = \frac{1}{p_0} + 3b \\ & \cdots \\ \frac{1}{p_n} &= \frac{1}{p_0} + nb \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla $b \in \mathbb{C} \backslash \left\{ 0, -\frac{1}{p_0}, -\frac{1}{2p_0}, \cdots \right\}$ için

$$p_n = \frac{1}{\frac{1}{p_0} + nb} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{p_0 b} + n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

elde ederiz. Devamında $a := \frac{1}{p_0 b}$ olarak alırsak buradan $a \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, \cdots\}$ ile

$$p_n = p_0 \left( \frac{a}{n+a} \right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Bu bölümde ( transpoze ) Gamma matrisleri üzerinde elde ettiğimiz sonuçlar bidiagonal terse sahip normal veya transpoze normal Hausdorff matrisleri üzerine aynen aktarılır.

# 3. BÖLÜM

# BK – UZAYLARI ÜZERİNDE HAUSDORFF MATRİSLERİ

Bu bölümde moment dizilerinden elde edilen Hausdorff matrisleri incelenmektedir. Moment dizileri kompleks Borel ölçüleri ile tanımlandığı için Hausdorff operatörleri değerini bir BK-uzayından alır ve integral yardımıyla tanımlanır. İntegrasyon teorisi Hausdorff matrislerinin tanımlanmasında kolaylık sağlar. Hille ve Philips'in geliştirdiği operatörler yardımıyla $T_1$ yarı grubu ve moment dizisi ile verilen Hausdorff matrisleri arasındaki ilişki kurulmuştur. Spektral dönüşüm teoremi yardımıyla $T_1$ sonsuz küçük üreticisinin spektrumu ile Hausdorff matrislerinin spektrumu ifade edilebilir. Bu bölümde transpoze Hausdorff matrisleri, şimdiye kadar incelediğimiz $\ell^p$, $c_0$, $c$, $H^p$ ve $A^p$ özel BK-uzaylarında verilmiştir.

## 3.1 İntegral Operatörleri İle Verilmiş Hausdorff Matrisleri

Bu bölümde BK-uzaylarında lineer olarak tanımlanabilen operatörlerin Hausdorff matrisleri için yeterli bir kriter verilmiştir. Bu şart bize Hausdorff matrislerinin integral operatörleri ile verilmesine ve operatörün normunun tahmin edilmesine olanak sağlar. Daha sonra genel sonuç BK-uzaylarında kullanılabilip kullanılamayacağıdır.

İlk olarak araştırmayı bıraktığımız Hausdorff matrislerinin kümesi ile sınırlıyoruz. Biz aşağıda sadece moment dizilerinden elde edilen Hausdorff matrislerini inceleyeceğiz.

**Tanım 3.1.1(Moment dizisi):** $p = (p_n) \in w$ bir dizi olsun. Bu durumda eğer $\mu$ , $[0,1]$ üzerinde kompleks bir Borel ölçüsü olmak üzere

$$p_n = \int_0^1 s^n d\mu(s) \qquad (n \in \mathbb{N}) \qquad (3.1.1)$$

integrali mevcut ise $p$ ye bir *moment dizisi* denir.

Biz $\mu$ veya $p$ ile üretilen Hausdorff matrislerini $H_\mu$ ile göstereceğiz.

**Örnek 3.1.2:** Moment dizilerinden elde edilen önemli Hausdorff matrislerini sırasıyla; Borel ölçüsü ve moment dizisi ile gösterelim. Hesaplamanın en önemli bölümü Radon-Nikodym'in Teoremi (bak Schwartz [**16, III 10.6, sh.180**] ) ve Gamma, Beta fonksiyonudur. $\alpha, a \in \mathbb{C}$ elemanlarını öyle seçelimki aşağıdaki ifadeler anlamlı olarak tanımlanabilsin.

**(a) (Hölder Matrisleri):**

$$H^\alpha : \mu(M) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_M \left( \log\left(\frac{1}{s}\right)\right)^{\alpha-1} d\lambda(s) \quad ;(M \in \mathcal{B}[0,1]) \quad ;p_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \tag{3.1.2}$$

Burada $\lambda$ , $[0,1]$ üzerinde Lebesgue ölçümünü gösteriyor. $\mathcal{B}[0,1]$ ise $[0,1]$ üzerinde Borel kümesinin $\sigma$-cebrini gösteriyor.

**(b) (Cesàro Matrisleri):**

$$C_\alpha : \mu(M) = \alpha \int_M (1-s)^{\alpha-1} d\lambda(s) \quad ;(M \in \mathcal{B}[0,1]) \quad ;p_n = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \tag{3.1.3}$$

**(c) (Gamma Matrisleri):**

$$\Gamma_a^\alpha : \mu(M) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_M s^{a-1} \left( \log\left(\frac{1}{s}\right)\right)^{\alpha-1} d\lambda(s) \quad ;(M \in \mathcal{B}[0,1]) \quad ;p_n = \left(\frac{a}{n+a}\right)^\alpha \tag{3.1.4}$$

**(d) (Euler Matrisleri):**

$$E(\alpha) : \mu(M) = \begin{cases} 1 & ,\alpha \in M \\ 0 & ,\alpha \notin M \end{cases} \quad ;(M \in \mathcal{B}[0,1]) \quad ;p_n = \alpha^n \tag{3.1.5}$$

Gerçektende bu ifadeleri $\ell^p$ üzerinde kolayca gösterebiliriz. Diğer uzaylarda işlemler benzerdir. Bunun için ilk önce $h_{nk}$ girişleri için aşağıdaki gösterimi verelim.

**Not 3.1.3:** $H_\mu$ Hausdorff matrisleri için Tanım 3.1.1, Teorem 1.4.3 ve binom formülünden dolayı $H_\mu$ nün $h_{nk}$ katsayıları için

$$\begin{aligned}
p_k &= \int_0^1 s^k d\mu(s) \\
\Delta p_k &= p_k - p_{k+1} = \int_0^1 \left(s^k - s^{k+1}\right) d\mu(s) = \int_0^1 s^k (1-s)\, d\mu(s) \\
\Delta^2 p_k &= \Delta p_k - \Delta p_{k+1} = \int_0^1 \left(s^k - 2s^{k+1} + s^{k+2}\right) d\mu(s) \\
&= \int_0^1 s^k \left(1 - 2s + s^2\right) d\mu(s) = \int_0^1 s^k (1-s)^2\, d\mu(s) \\
\Delta^3 p_k &= \Delta p_k - 2\Delta p_{k+1} + \Delta p_{k+2} = \int_0^1 \left(s^k - 3s^{k+1} + 3s^{k+2} - s^{k+3}\right) d\mu(s) \\
&= \int_0^1 s^k \left(1 - 3s + 3s^2 - s^3\right) d\mu(s) = \int_0^1 s^k (1-s)^3\, d\mu(s) \\
&\cdots \\
\Delta^{n-k} p_k &= \int_0^1 s^k (1-s)^{n-k}\, d\mu(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. $k \leq n$ için

$$h_{nk} = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} p_k \tag{3.1.6}$$

olduğundan

$$h_{nk} = \binom{n}{k} \int_0^1 s^k (1-s)^{n-k}\, d\mu(s) \tag{3.1.7}$$

geçerlidir.

Şimdi Örnek 3.1.2 de verilen özel Hausdorff matrislerine dönebiliriz.

$H_\alpha$ için $\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left( \log \left( \frac{1}{t} \right) \right)^{\alpha-1} dt$ ifadesini (3.1.7) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
h_{nk} &= \binom{n}{k} \int\limits_0^1 x^k (1-x)^{n-k} d \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left( \log \left( \frac{1}{t} \right) \right)^{\alpha-1} dt \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \binom{n}{k} \int\limits_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \left( \log \left( \frac{1}{x} \right) \right)^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \binom{n}{k} \int\limits_0^\infty e^{-uk-u} \left(1-e^{-u}\right)^{n-k} u^{\alpha-1} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \binom{n}{k} \int\limits_0^\infty e^{-u(k+1)} \left( \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n-k}{\nu} (-1)^\nu e^{-u(n-k-\nu)} \right) u^{\alpha-1} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \binom{n}{k} \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n-k}{\nu} (-1)^\nu \int\limits_0^\infty e^{-u(k+1+n-k-\nu)} u^{\alpha-1} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \binom{n}{k} \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n-k}{\nu} (-1)^\nu \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} (n-\nu+1)^{1-\alpha-1} dt \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \binom{n}{k} \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n-k}{\nu} (-1)^\nu (n-\nu+1)^{-\alpha} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n-k}{\nu} (-1)^\nu (n-\nu+1)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mu_n = h_{nn}$ olduğu kullanılırsa $\mu_n = (n+1)^{-\alpha}$ dir.

$C_\alpha$ için $\mu(x) = \alpha \int\limits_0^x (1-s)^{\alpha-1} d\lambda(s)$ olmak üzere (3.1.7) den

$$\begin{aligned}
h_{nk} &= \binom{n}{k} \int\limits_0^1 x^k (1-x)^{n-k} d \left( \alpha \int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \right) \\
&= \alpha \binom{n}{k} \int\limits_0^1 x^{k+1-1} (1-x)^{n-k+\alpha-1} dx \\
&= \alpha \binom{n}{k} \beta(k+1, n-k+\alpha) \\
&= \alpha \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n-k+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mu_n = h_{nn}$ olduğu kullanılırsa

$$\mu_n = \frac{\alpha\Gamma(n+1)\Gamma(n-n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}$$

biçimindedir. Burada $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$ olduğu kullanılmıştır.

$\Gamma_a^\alpha$ için $\mu(x) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{a-1}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\alpha-1} dt$ ifadesini (3.1.7) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
h_{nk} &= \binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\, d\left(\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{a-1}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\alpha-1} dt\right) \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\binom{n}{k}\int_0^1 x^{k+a-1}(1-x)^{n-k}\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\binom{n}{k}\int_0^\infty e^{-u(k+a)}\left(1-e^{-u}\right)^{n-k} u^{\alpha-1}du \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\binom{n}{k}\int_0^\infty e^{-u(k+a)}\left(\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{n-k}{\nu}(-1)^\nu e^{-u(n-k-\nu)}\right) u^{\alpha-1}du \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\binom{n}{k}\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{n-k}{\nu}(-1)^\nu\int_0^\infty e^{-u(k+a+n-k-\nu)}u^{\alpha-1}du \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\binom{n}{k}\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{n-k}{\nu}(-1)^\nu\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}(n-\nu+a)^{1-\alpha-1} dt \\
&= \frac{a^\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\binom{n}{k}\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{n-k}{\nu}(-1)^\nu(n-\nu+a)^{-\alpha} \\
&= a^\alpha\binom{n}{k}\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{n-k}{\nu}(-1)^\nu(n-\nu+a)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mu_n = h_{nn}$ olduğu kullanılırsa $\mu_n = a^\alpha(n+1)^{-\alpha} = \left(\frac{a}{a+n}\right)^\alpha$ dir.

Ayrıca $C_a^\alpha$ için de $\mu(x) = \frac{\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{\alpha-1}dt$ alınarak aşağıdaki elde edilir. $\mu(x)$ in ifadesini (3.1.7) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
h_{nk} &= \binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,d\left(\frac{\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{\alpha-1}dt\right)\\
&= \frac{\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)}\binom{n}{k}\int_0^1 x^{k+a-1}(1-x)^{n-k+\alpha-1}\,dx\\
&= \frac{\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)}\binom{n}{k}\beta(k+a,n-k+\alpha)\\
&= \binom{n}{k}\frac{\Gamma(a+\alpha)\Gamma(k+a)\Gamma(n-k+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)\Gamma(n+a+\alpha)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mu_n = h_{nn}$ olduğu kullanılırsa

$$\mu_n = \frac{\Gamma(a+\alpha)\Gamma(n+a)\Gamma(n-n+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)\Gamma(n+a+\alpha)} = \frac{\Gamma(a+\alpha)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(n+a+\alpha)}$$

dır.

Şimdiye kadar bu bölümün istenilen büyük sonucunu formülüze edebilmek için gerekli tüm hazırlıklar yapılmış oldu.

**Teorem 3.1.4:** $(X,\|.\|)$ bir BK-uzayı, $\mu$ , $[0,1]$ üzerinde $p$ moment dizisinin Borel ölçüsü ve $E(s)$, $s\in[0,1]$ parametreli Euler matrisi olsun. $\mu$-hemen hemen her yerde $E(s)\in B(X)$ geçerlidir.

$$\begin{array}{rccc}
Ex: & [0,1] & \longrightarrow & X\\
& s & \longmapsto & Ex(s) := E(s)\,x
\end{array}$$

fonksiyonu her $x\in X$ için $\mu$-ölçülebilir ve

$$\begin{array}{rccc}
\|E\|_X: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
& s & \longmapsto & \|E\|_X(s) := \|E(s)\|_X
\end{array}$$

fonksiyonu $\mu$-integrallenebilir olsun. Bu durumda $p$ nin ürettiği Hausdorff matrisi için $H_\mu\in B(X)$ geçerlidir ve

$$H_\mu x = \int_0^1 E(s)\,x\,d\mu(s) \qquad (x\in X)$$

geçerlidir ve operatör normu için

$$\|H_\mu\|_X \leq \int_0^1 \|E(s)\|_X \, d|\mu|(s)$$

geçerlidir. Burada $|\mu|$ ile $\mu$ nün total salınımı gösterilmektedir.

**İspat:** $x = (x_n) \in X$ olsun. Bu durumda $Ex$ fonksiyonu $\mu$ ölçülebilirdir ve $\|E(s)\,x\| \leq \|E(s)\|_X \,.\, \|x\|$ geçerlidir. $\|Ex\|$ fonksiyonu bir $\mu$ integrallenebilir fonksiyonu ile üstten sınırlıdır. Dunford, Schwartz [**16, III 2.22 (b), sh.117**] dan $Ex$ in $\mu$-integrallenebilirliği görülür. [**16, III, 2.19 (c), sh.113**] dan ve Tanım 3.1.1 den dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\pi_n\left(\int_0^1 E(s)\,x d\mu(s)\right) &= \int_0^1 \pi_n(E(s)\,x)\,d\mu(s) \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k} x_k d\mu(s) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\int_0^1 s^k (1-s)^{n-k} d\mu(s)\right) x_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} h_{nk} x_k \\
&= \pi_n(H_\mu x)
\end{aligned}$$

geçerlidir. Dolayısıyla $H_\mu$ integral operatörü olarak

$$H_\mu x = \int_0^1 E(s)\,x d\mu(s) \qquad (x \in X)$$

biçiminde gösterilir. Bunun yardımıyla [**16, III 2.15, 2.18**] dan

$$\|H_\mu x\| = \left\|\int_0^1 E(s)\,x d\mu(s)\right\| \leq \int_0^1 \|E(s)\|\,d|\mu|(s)\,.\,\|x\|$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece operatör normunun istenilen tahmini elde edilmiş olur.

Transpoze Housdorff matrisleri için buna benzer bir ifade formüle edilebilir ancak bunun için $X$ dizi uzayına ilave bir şart eklemek gerekir.

**Teorem 3.1.5:** $(X, \|.\|)$ bir BK-AK uzayı, $\mu$ , $[0,1]$ üzerinde $p$ moment dizisinin kompleks Borel ölçüsü olsun. $E^t(s)$, $s \in [0,1]$ parametreli transpoze Euler matrisi olsun. Bu durumda $E^t(s) \in B(X)$ , $\mu$-h.h.h.y geçerlidir.

$$\begin{array}{rccc} E^t x: & [0,1] & \to & X \\ & s & \mapsto & E^t x(s) := E^t(s)\, x \end{array}$$

fonksiyonu her $x \in X$ için $\mu$-ölçülebilir ve

$$\begin{array}{rccc} \|E^t\|_X: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & \|E^t\|_X(s) := \|E^t(s)\|_X \end{array}$$

fonksiyonu $\mu$-integrallenebilir olsun. Bu durumda $p$ tarafından ürettilen transpoze Hausdorff matrisi için $H_\mu^t \in B(X)$ geçerlidir. Tam olarak

$$H_\mu^t x = \int_0^1 E^t(s)\, x d\mu(s) \qquad (x \in X)$$

ve operatör normu yeterli tahminle

$$\|H_\mu^t\|_X \leq \int_0^1 \|E^t(s)\|_X \, d|\mu|(s)$$

geçerlidir.

**İspat:** $\mu$-integrasyonuna ve operatör normunun tahminine ilişkin argümenler Teorem 3.1.4 ten kelimesi kelimesine alınır. $H_\mu^t$ nin integral operatörü olarak gösterilebilmesi için integrasyon ve toplamın değişmesini sağlayan ek bir düşünce gereklidir. Bunun için $n \in \mathbb{N}$ ve $x = (x_n) \in X$ her hangi bir dizi olmak üzere $m \geq n$ için

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} s^n (1-s)^{k-n} x_k - \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} s^n (1-s)^{k-n} x_k \right| = \\ = \; & \left| \pi_n \left( E^t(s)\, x \right) - \pi_n \left( E^t(s)\, x^{[m]} \right) \right| \\ = \; & \left| \left( \pi_n \circ E^t(s) \right) \left( x - x^{[m]} \right) \right| \\ \leq \; & \|\pi_n\| \,.\, \left\| E^t(s) \right\|_X \left\| x - x^{[m]} \right\| \end{aligned}$$

sol tarafta bulunan fonksiyonların $\mu$-integrallenebilirliğinden

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} s^n (1-s)^{k-n} x_k d\mu(s) - \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} \int_0^1 s^n (1-s)^{k-n} d\mu(s)\, x_k\right|$$

$$\leq \quad \|\pi_n\| \int_0^1 \left\|E^t(s)\right\|_X d|\mu|(s) \, . \left\|x - x^{[m]}\right\|$$

geçerlidir. $\|E^t\|_X$ in $\mu$-integrallenebilirliği ve $X$ in BK-AK niteliğinden eşitsizliğin sağ tarafında $m \to +\infty$ koşulunda limite geçerek

$$\int_0^1 \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} s^n (1-s)^{k-n} x_k d\mu(s) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \int_0^1 s^n (1-s)^{k-n} d\mu(s)\, x_k$$

elde edilir. Böylece son olarak tekrar Dunford, Schwartz [**16, III 2.19 (c), sh.113**] kullanılarak

$$\begin{aligned}
\pi_n\left(\int_0^1 E^t(s)\, x d\mu(s)\right) &= \int_0^1 \pi_n\left(E^t(s)\, x\right) d\mu(s) \\
&= \int_0^1 \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} s^n (1-s)^{k-n} x_k d\mu(s) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \left(\int_0^1 s^n (1-s)^{k-n} d\mu(s)\right) x_k \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} h_{kn} x_k \\
&= \pi_n\left(H_\mu^t x\right)
\end{aligned}$$

geçerlidir. Dolayısıyla $H_\mu^t$ nin integral operatörü olarak gösterimi elde edilir.

Yukarıda bahsedilen her iki teorem uygulamalar için kesin sınıflar oluşturacak şekilde formüle edilmiştir. Bunun sebebi bu cümlelerin $\|E\|_X$ ve $\|E^t\|_X$ fonksiyonlarının bilgisi için ön şart olmasındandır. İspatların analizi $\|E\|_X$ , $\|E^t\|_X$ in $\mu$-integralinin varlığını belirtmektedir. Bu husus daha zayıf bir şart olan $\|E\|_X$ ve $\|E^t\|_X$ in $\mu$-integral fonksiyonunun majorluğundan (baskı) kaynaklanmaktadır. Operatör normlarının tahmini değerleri buna uygun olarak değişmektedir. İkinci zorluk konkrekt bir durum olarak her $x \in X$ için $E^t x$ ve $Ex$ fonksiyonlarının ölçülebilirliğinin ispat edilmesi hususudur. Sonuncu için yeterli bir şart tekrar lineer operatörlerinin yarı grupları teorisinin verilmesidir. Bunun için aşağıdaki husus geçerlidir. (Rudin [**62, sh.356**])

**Teorem 3.1.6:** $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı ve $T : \mathbb{R}^{\geq 0} \to B(X)$ lineer operatörlerinin $C_0$ yarı grubu olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ *için*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{\geq 0} & \to & B(X) \\ & t & \mapsto & Tx(t) : T(t)x \end{array}$$

dönüşümü süreklidir.

Özel olarak $T_1$ veya $S_1$ yarı grupları düzgün sürekliyse bu durumda Teorem 3.1.6 aynı zamanda basit bir dönüşüm süreklilik gösterir ve bununla birlikte Borel-ölçülebilirliği $Ex\,|_{(0,1]}$ veya $E^t x\,|_{(0,1]}$ şeklinde olur. $Ex$ veya $E^t x$ , $s = 0$ noktasında tanımlıysa bu durumda $(0, 1]$ aralığındaki Borel ölçüsüne kısıtlanır. Yani bu kısıtlama $\mu(\{0\}) = 0$ özelliğinin ölçüsü üzerindedir. Bu haliyle $Ex$ veya $E^t x$ in $\forall x \in X$ için $\mu$-ölçülebilirliğini elde ederiz. Şimdiye kadar incelediğimiz BK-uzayları için bu durum aşağıdaki sonuçlara götürür.

**Teorem 3.1.7($\ell^p$ üzerindeki Hausdorff matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\mu$ , $[0, 1]$ üzerinde verilmiş $(0, 1]$ aralığına kısıtlanmış kompleks bir Borel ölçüsü ve

$$\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

geçerli olsun. Bu durumda $H_\mu \in B(\ell^p)$ dir ve norm tahmini için

$$\|H_\mu\|_{\ell^p} \leq \int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s)$$

geçerlidir.

**İspat:** Teorem 3.1.4 , Teorem 1.6.5 ve Teorem 2.2.1 den elde edilir.

**Not 3.1.8:** Bu teorem daha önce ispatladığımız Teorem 2.5.3 dür. Genel olarak Jakimovsky, Rhoades, Tzimbalario [**32, sh.181**] de verilen örnekteki gibi norm tahmini açık değildir.

**Örnek 3.1.9:** $1 < p < \infty$ , $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Rudin integrasyonu [**63, 6.13 sh.125 ve 1.29 sh.23**] göz önünde bulundurulduğunda özel Hausdorff Operatörü için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(a) **(Hölder Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ile $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$H^{\alpha} \in B\left(\ell^{p}\right) \text{ ve } \left\|H^{\alpha}\right\|_{\ell^{p}} \leq \frac{\Gamma\left(\operatorname{Re}\alpha\right)}{\left|\Gamma\left(\alpha\right)\right|} q^{\operatorname{Re}\alpha}$$

geçerlidir.

(b) **(Cesàro Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ile $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$C_{\alpha} \in B\left(\ell^{p}\right) \text{ ve } \left\|C_{\alpha}\right\|_{\ell^{p}} = |\alpha| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\operatorname{Re}\alpha\right)}{\Gamma\left(\operatorname{Re}\alpha+\frac{1}{q}\right)}$$

geçerlidir.

(c) **(Gamma Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ve $\operatorname{Re}a > \frac{1}{p}$ ile $\alpha, a \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma_{a}^{\alpha} \in B\left(\ell^{p}\right) \quad \text{ve } \left\|\Gamma_{a}^{\alpha}\right\|_{\ell^{p}} \leq \frac{\left|a^{\alpha}\right|.\Gamma\left(\operatorname{Re}\alpha\right)}{\left|\Gamma\left(\alpha\right)\right|.\left(\operatorname{Re}\alpha-\frac{1}{p}\right)^{\operatorname{Re}\alpha}}$$

geçerlidir.

(d) **(Euler Matrisleri):** $\alpha \in (0,1]$ için

$$E\left(\alpha\right) \in B\left(\ell^{p}\right) \text{ ve } \left\|E\left(\alpha\right)\right\|_{\ell^{p}} \leq \alpha^{-\frac{1}{p}}$$

geçerlidir.

Biz bunları sadece $\alpha$ nın reel olduğu durumlarda gösterelim. Gerçektende

$H_\alpha$ nın normu;

$$\begin{aligned}
\|H_\alpha\|_p &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{p}} d\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\alpha-1} dt\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{-\frac{1}{p}}\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{\frac{1}{p}u-u}u^{\alpha-1}du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}q^{\alpha-1+1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}q^{\alpha}.\Gamma(\alpha) \\
&= q^\alpha
\end{aligned}$$

biçimindedir.

$C_\alpha$ nın normu;

$$\begin{aligned}
\|C_\alpha\|_p &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{p}} d\left(1-(1-x)^\alpha\right) \\
&= \alpha\int_0^1 x^{-\frac{1}{p}}(1-x)^{\alpha-1}dx \\
&= \alpha\beta\left(1-\frac{1}{p},\alpha\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{q}\right)}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

$\Gamma_a^\alpha$ nın normu;

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_a^\alpha\|_p &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{p}} d\left(\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{a-1}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\alpha-1} dt\right) \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{-\frac{1}{p}+a-1}\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-u\left(-\frac{1}{p}+a-1+1\right)} u^{\alpha-1} du \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\left(a-\frac{1}{p}\right)^{1-\alpha-1} dt \\
&= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.\left(a-\frac{1}{p}\right)^{-\alpha}.\Gamma(\alpha) \\
&= \left(\frac{a}{a-\frac{1}{p}}\right)^\alpha
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Ayrıca $C_a^\alpha$ nın normu;

$$\begin{aligned}
\|C_a^\alpha\|_p &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{p}} d\left(\frac{\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{\alpha-1} dt\right) \\
&= \frac{\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{-\frac{1}{p}+a-1}(1-x)^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)}.\beta\left(-\frac{1}{p}+a,\alpha\right) \\
&= \frac{\Gamma(a+\alpha)\Gamma(a-\frac{1}{p})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)\Gamma(a+\alpha-\frac{1}{p})} \\
&= \frac{\Gamma(a+\alpha)\Gamma(a-\frac{1}{p})}{\Gamma(a)\Gamma(a+\alpha-\frac{1}{p})}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

$\alpha \in [0,1]$ için $E(\alpha)$ Euler matrisinin spektrumunun araştırılmasında Teorem 3.1.7 nin ispatı geçerlidir. Hausdorf matrislerine özgü sonuçlar ilk defa Hardy [**25**] in klasik $H_\mu$ çözüm tekniğinde gösterilmiştir. Bu ispat adımları $\ell^p$ üzerinde Hausdorff matrislerinin sonuçlarına problemsiz olarak genişletilebilir. Temelde bu çalışmada alınan ispat farklıdır. Bu ispat Hardy de $\ell^p$ özel BK-uzayıyla özgünleşmiştir. $H_\mu$ nün BK-uzaylarında integral operatörü olarak gösterilmesi klasik çözüm için belirgin kazanımlar sağlar. $\ell^p$ özel durumunda Hardy nin sonuçlarının ispatı yenidir.

**Not 3.1.10 ($\ell^p$ üzerinde transpoze Hausdorff matrisleri):** $\ell^p$ üzerinde transpoze Hausdorff matrisleri için Teorem 2.2.7, Teorem 2.1.8 ve Teorem 3.1.5 in kullanımı ile Teorem 3.1.7, Örnek 3.1.9 formüle edilir. 1.6.6 dan konjugasyon yolu ile bu ifadelerin detaylı tarifini yapamıyoruz.

Burada geliştirilmiş olan teori $c$ ve $c_0$ uzayları için Hausdorff [**28**] de verilen önermelere alternatif ispatlar oluşturur. Teorem 1.7.3, Teorem 2.2.3, Teorem 1.7.2 ve Teorem 2.2.2 ile aynı zamanda Teorem 3.1.4 ile beraber aşağıdaki hususla elde edilir.

**Teorem 3.1.11:** Her $\mu$ kompleks Borel ölçüsü için $H_\mu \in B(c)$ dir.

**Teorem 3.1.12:** $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış $\mu$ kompleks Borel ölçüsü için $H_\mu \in B(c_0)$ dir.

**Not 3.1.13:** Doğal olarak $H_\mu \in B(c)$ ve $B(c_0)$ Hausdorff matrisleri için yukarıda verilen ispatların yardımıyla operatör normu için tahminler elde edilir. Her iki durumda da bu husus $|\mu|([0,1])$ tam salınımından ibaret üstten sınırlanmıştır. Her iki durumda da operatör normu en azından tamamen formal olarak bilindiği için Not 3.1.3 ile

$$\|H_\mu\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| \int_0^1 s^k (1-s)^{n-k}\, d\mu(s) \right|$$

(bak Taylor, Lay [**77, sh.221**]) eşitliği geçerlidir. Buradan $|\mu|([0,1])$ tam salınımı basit bir tahminle üst sınır olarak elde edildiği için yeni ve enteresan bir ifade elde edilmez.

$A^p$ ve $H^p$ fonksiyon uzayları üzerinde Hausdorff matrisleri ve transpoze Hausdorff matrislerinin muhafazası elde edilen en büyük kazançtır. Bu durumda yaklaşık olarak herhangi bir sonuç bilinmediği için bu ilişkileri detaylı bir şekilde göstereceğiz. Transpoze Hausdorff matrislerinin en büyük ilgisi $H^p$ nin $H^q$ ya izometrik izomorf olacak şekilde verilememesinde yatar ve bu yüzden transpoze Hausdorff matrisleri basit olarak konjugasyon yoluyla elde edilemez. Benzer husus $A^p$ uzayları için de geçerlidir. Burada $H^p$ Hardy uzayları ile işe başlayacağız.

**Teorem 3.1.14($H^p$ üzerinde Hausdorff matrisleri):** $2 \leq p < \infty$ , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\mu$ , $(0,1]$ üzerine kısıtlanmış $[0,1]$ de kompleks Borel ölçüsü olsun.

$$\int_0^1 s^{-\frac{1}{q}} d|\mu|(s) < \infty$$

olsun. Bu durumda $H_\mu \in B(H^p)$ geçerlidir ve operatör normunun tahmini

$$\|H_\mu\|_{H^p} \leq \int_0^1 s^{-\frac{1}{q}} d|\mu|(s)$$

biçimindedir.

**İspat:** Teorem 3.1.4, Teorem 1.8.31 ve Teorem 2.2.4 den elde edilir.

**Not 3.1.15:** $H^p$ için norm tahmini genel olarak açık değildir. Tekrar Jakimovsky, Rhoades, Tzimbalario [**32, sh.181**] in ifadeleri kullanılabilir.

**Örnek 3.1.16:** $2 \leq p < \infty$ , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Örnek 3.1.2 de verilen özel Hausdorff operatörleri için aşağıdakiler geçerlidir.

**(a) (Hölder Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ile $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$H^\alpha \in B(H^p) \text{ ve } \|H^\alpha\|_{H^p} \leq \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{|\Gamma(\alpha)|} p^{\operatorname{Re}\alpha}$$

geçerlidir.

**(b) (Cesàro Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ile $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$C_\alpha \in B(H^p) \text{ ve } \|C_\alpha\|_{H^p} \leq |\alpha| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{\Gamma\left(\operatorname{Re}\alpha + \frac{1}{p}\right)}$$

geçerlidir.

**(c) (Gamma Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ve $\operatorname{Re}a > \frac{1}{q}$ ile $\alpha, a \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma_a^\alpha \in B(H^p) \text{ ve } \|\Gamma_a^\alpha\|_{H^p} \leq \frac{|a^\alpha| \, .\Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{|\Gamma(\alpha)| \, . \left(\operatorname{Re}\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\operatorname{Re}\alpha}}$$

geçerlidir.

**(d) (Euler Matrisleri):** $\alpha \in (0,1]$ için

$$E(\alpha) \in B(H^p) \text{ ve } \|E(\alpha)\|_{H^p} \leq \alpha^{-\frac{1}{p}}$$

geçerlidir.

Noksan olan $H^p$ uzayları için Teorem 1.48.21 ve Teorem 2.2.4 den aşağıdaki ifadeler elde edilir.

**Teorem 3.1.17($H^p$ üzerindeki Hausdorff matrisleri,II):** $1 \leq p < 2$ ve $\mu$ , $(0,1]$ üzerine kısıtlanmış $[0,1]$ de verilmiş kompleks bir Borel ölçüsü ve

$$\int_0^1 (2-s)^{\frac{2-p}{p}} s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

olsun. Bu durumda $H_\mu \in B(H^p)$ dir ve operatör normunun tahmini

$$\|H_\mu\|_{H^p} \leq \int_0^1 (2-s)^{\frac{2-p}{p}} s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s)$$

biçimindedir.

**Örnek 3.1.18:** $1 \leq p < 2$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Örnek 3.1.2 de verilen özel Hausdorff matrisleri için

$$(2-s)^{\frac{2-p}{p}} s^{-\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{2-p}{p}} s^{-\frac{1}{p}}$$

olduğu dikkate alınarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**(a) (Hölder Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ile $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$H^\alpha \in B(H^p)$$

geçerlidir.

**(b) (Cesâro Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ile $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$C_\alpha \in B(H^p)$$

geçerlidir.

**(c) (Gamma Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ve $\operatorname{Re}a > \frac{1}{p}$ olmak üzere $\alpha, a \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma_a^\alpha \in B(H^p)$$

geçerlidir.

**(d) (Euler Matrisleri):** $\alpha \in (0,1]$ için

$$E(\alpha) \in B(H^p)$$

geçerlidir.

Bu durumda operatör normlarının tahmini açık olarak hesaplanabilir durumda değildir. Örnek 3.1.9 dan üst sınır için $2^{\frac{(2-p)}{p}}$ ile çarpılan tahminler üst sınır olarak kullanılır.

Burada $H^p$ üzerinde transpoze Hausdorff matrisleri, transpoze Euler ve Gamma matrislerinde olduğu gibi incelenebilir.

**Teorem 3.1.19($H^p$ üzerindeki transpoze Hausdorff matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\mu$ , $(0,1]$ üzerine kısıtlanmış $[0,1]$ de verilmiş kompleks bir Borel ölçüsü olsun ve

$$\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

geçerli olsun. Bu durumda $H_\mu^t \in B(H^p)$ dir ve norm tahmini

$$\left\|H_\mu^t\right\|_{H^p} \leq \int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s)$$

biçimindedir.

**İspat:** Örnek 1.8.16, Teorem 2.2.8 ve Teorem 3.1.5 den elde edilir.

**Örnek 3.1.20:** $1 < p < \infty$ , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Örnek 3.1.2 den Literatürde Quasi- Hausdorff matrisleri denilen özel transpoze Hausdorff matrisleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**(a) (Quasi Hölder Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$(H^{\alpha})^t \in B(H^p) \text{ ve } \left\|(H^{\alpha})^t\right\|_{H^p} \leq \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{|\Gamma(\alpha)|} q^{\operatorname{Re}\alpha}$$

geçerlidir.

**(b) (Quasi Cesàro Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$C_{\alpha}^t \in B(H^p) \text{ ve } \left\|C_{\alpha}^t\right\|_{H^p} \leq |\alpha| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{\Gamma\left(\operatorname{Re}\alpha + \frac{1}{q}\right)}$$

geçerlidir.

**(c) (Quasi Gamma Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ve $\operatorname{Re} a > \frac{1}{p}$ olmak üzere $\alpha, a \in \mathbb{C}$ için

$$(\Gamma_a^{\alpha})^t \in B(H^p) \text{ ve } \left\|(\Gamma_a^{\alpha})^t\right\|_{H^p} \leq \frac{|a^{\alpha}| . \Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{|\Gamma(\alpha)| . \left(\operatorname{Re}\alpha - \frac{1}{p}\right)^{\operatorname{Re}\alpha}}$$

geçerlidir.

**(d) (Quasi Euler Matrisleri):** $\alpha \in (0, 1]$ için

$$E^t(\alpha) \in B(H^p) \text{ ve } \left\|E^t(\alpha)\right\|_{H^p} \leq \alpha^{-\frac{1}{p}}$$

geçerlidir.

**Not 3.1.21 ($H_{\mu}$ nün fonksiyonel gösterimi):** Literatürle bağlantıyı kurabilmek ve $H^p$ üzerinde Hausdorff operatörlerinin az bilinen sonuçlarını düzenlemek için $H_{\mu}$ nün Taylor katsayılarını kullanmaksızın gösterimini veriyoruz. Jarchow [**34, sh.234**] den

$$\begin{aligned} \delta_z : \; H^p &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto \delta_z(f) : f(z) \end{aligned}$$

nokta değerlendirmesi $H^p$ üzerinde sürekli lineer bir form olduğundan Dunford, Schwartz [**16, III 6.20, sh.153**], Teorem 3.1.4, Teorem 3.1.5, Not 1.8.32 ve Not 1.8.29 yardımıyla

$$\begin{aligned}(H_\mu f)(z) &= \left(\int_0^1 E(s)\, f d\mu(s)\right)(z) = \int_0^1 (E(s) f)(z)\, d\mu(s) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-(1-s)z} f\left(\frac{sz}{1-(1-s)z}\right)\right) d\mu(s)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(H_\mu^t f\right)(z) &= \left(\int_0^1 E^t(s)\, f d\mu(s)\right)(z) = \int_0^1 \left(E^t(s) f\right)(z)\, d\mu(s) \\ &= \int_0^1 f(sz+1-s)\, d\mu(s)\end{aligned}$$

ede edilir. Özel olarak $\mu$ için Örnek 3.1.2 de verilen ölçüyü seçer ve aynı zamanda $H_\mu$ durumunda ilaveten uygun bir dönüşüm seçilerek, Dunford Schwartz [**16, III 10.6, sh.180**] den Radon Nikodym teoremini kullanırsak Stempak [**76**] ve Anderson [**1**] tarafından incelenen Cesàro operatörlerini elde ederiz. Stempak ilk adımda $\operatorname{Re}\alpha \geq 1$ olmak üzere $1 < p \leq 2$ için $C_\alpha$ nın ve $2 \leq p < \infty$ için $C_\alpha^t$ nın $H^p$ üzerinde sınırlı lineer operatörlerinin var olduğunu ispatlayabilmiştir. Anderson ise bu sonuçları $1 < p < \infty$ ve $\operatorname{Re}\alpha > 0$ üzerine genişletmeyi başarmıştır. Her iki çalışma aynı zamanda $0 < p \leq 1$ için $C_\alpha$ yı da kapsamaktadır. Bu iki çalışmada da ilgili operatörün norm tahmini yer almamıştır. Her iki çalışmada da yer alan ispat metodu burada kullanılanlardan farklı olup, ilk bakışta Miao [**45**] e ait fikirlerin genişlemesinden ibarettir.

Biz şimdi Bergman uzayları üzerinde Hausdorff matrislerinin araştırılmasına dönelim.

**Teorem 3.1.22** (**$A^p$ üzerinde Hausdorff matrisleri, I**): $4 \leq p < \infty$ ve $\mu$ , $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış, $[0,1]$ aralığında verilmiş kompleks bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-1+\frac{2}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

geçerli olsun. Bu durumda $H_\mu \in B(A^p)$ dir ve operatör normu için

$$\|H_\mu\|_{A^p} \leq \int_0^1 s^{-1+\frac{2}{p}} d|\mu|(s)$$

geçerlidir.

**İspat:** Teorem 3.1.4, Teorem 1.9.13 ve Teorem 2.2.5 den elde edilir.

**Örnek 3.1.23:** $4 \leq p < \infty$ olsun. Örnek 3.1.2 de verilen özel Hausdorff matrisleri için aşağıdakiler geçerlidir.

**(a) (Hölder Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$H^\alpha \in B(A^p) \text{ ve } \|H^\alpha\|_{A^p} \leq \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{|\Gamma(\alpha)|}\left(\frac{p}{2}\right)^{\operatorname{Re}\alpha}$$

geçerlidir.

**(b) (Cesàro Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$C_\alpha \in B(A^p) \text{ ve } \|C_\alpha\|_{A^p} \leq |\alpha| \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{\Gamma\left(\operatorname{Re}\alpha + \frac{2}{p}\right)}$$

geçerlidir.

**(c) (Gamma Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ve $\operatorname{Re}a > \frac{(p-2)}{p}$ olmak üzere $\alpha, a \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma_a^\alpha \in B(A^p) \text{ ve } \|\Gamma_a^\alpha\|_{A^p} \leq \frac{|a^\alpha| . \Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{|\Gamma(\alpha)| . \left(\operatorname{Re}\alpha - 1 + \frac{2}{p}\right)^{\operatorname{Re}\alpha}}$$

geçerlidir.

**(d) (Euler Matrisleri):** $\alpha \in (0,1]$ için

$$E(\alpha) \in B(A^p) \text{ ve } \|E(\alpha)\|_{A^p} \leq \alpha^{-1+\frac{2}{p}}$$

geçerlidir.

**Not 3.1.24($A^p$ üzerinde Hausdorff matrisleri, II):** $1 \leq p < 4$ ile noksan olan $A^p$ uzayları için Teorem 1.9.13 ile birlikte tekrar $B(A^p)$ de bulunan $H_\mu$ için yeterli bir şart elde edilir. Bu şart genel olarak oldukça ağırdır. Buna örnek olarak Teorem 2.4.3 (e) den $1 < p < 4$ için Cesàro matrisinin $B(A^p)$ de bulunduğu türetilebilir

$$\int_0^1 (2-s)^{\frac{4-p}{p}} s^{-\frac{2}{p}} ds < \infty$$

kriteri genellikle sadece $2 < p < 4$ koşulunda sağlanır. $1 < p \leq 2$ olduğunda maalesef yukarıdaki kriter Cesàro matrisleri için yeterli değildir.

**Teorem 3.1.25( $A^p$ üzerinde transpoze Hausdorff matrisleri ) :** $1 < p < \infty$ ve $\mu$ , $(0,1]$ üzerine kısıtlanmış $[0,1]$ de verilmiş kompleks bir Borel ölçüsü olsun ve

$$\int_0^1 s^{-\frac{2}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

geçerli olsun. Bu durumda $H_\mu^t \in B(A^p)$ geçerlidir ve norm tahmini için

$$\left\|H_\mu^t\right\|_{A^p} \leq \int_0^1 s^{-\frac{2}{p}} d|\mu|(s)$$

geçerlidir.

**İspat:** Bu ifadeler Örnek 1.9.7 ve Teorem 2.2.10 ile Teorem 3.1.5 i ilişkilendirerek elde edilir.

**Örnek 3.1.26:** $1 < p < \infty$ olsun. Literatürde Quasi Hausdorff matrisi denilen Hausdorff matrisleri için Örnek 3.1.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**(a) (Quasi Hölder Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $p > 2$ olsun. Bu durumda

$$(H^\alpha)^t \in B(A^p) \text{ ve } \left\|(H^\alpha)^t\right\|_{A^p} \leq \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{|\Gamma(\alpha)|} \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\operatorname{Re}\alpha}$$

geçerlidir.

**(b) (Quasi Cesàro Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $p > 2$ olsun. Bu durumda

$$C_\alpha^t \in B(A^p) \text{ ve } \left\|C_\alpha^t\right\|_{A^p} \leq |\alpha| \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{p}\right)\Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{\Gamma\left(\operatorname{Re}\alpha + \frac{p-2}{p}\right)}$$

geçerlidir.

**(c) (Quasi Gamma Matrisleri):** $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ve $\operatorname{Re}a > \frac{2}{p}$ olmak üzere $\alpha, a \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$(\Gamma_a^\alpha)^t \in B(A^p) \text{ ve } \left\|(\Gamma_a^\alpha)^t\right\|_{A^p} \leq \frac{|a^\alpha| . \Gamma(\operatorname{Re}\alpha)}{|\Gamma(\alpha)| . \left(\operatorname{Re}\alpha - \frac{2}{p}\right)^{\operatorname{Re}\alpha}}$$

geçerlidir.

**(d) (Quasi Euler Matrisleri):** $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda

$$E^t(\alpha) \in B(A^p) \text{ ve } \left\|E^t(\alpha)\right\|_{A^p} \leq \alpha^{-\frac{2}{p}}$$

geçerlidir.

**Not 3.1.27:** Örnek 3.1.26 (a) ve (b) de $p > 2$ ilave şartı gerçekten zaruridir zira Teorem 2.5.21 (c) den $a = 1$ ile $\alpha = 1$ için $(H^1)^t = C_1^t$, $B(A^p)$ de olacak şekilde bulunmadığı sonucu çıkar. Bu sonuç $1 < p \leq 2$ ise geçerlidir.

**Not 3.1.28 ($H_\mu$ nin fonksiyonel gösterimi):** $A^p$ uzaylarında (transpoze) Hausdorff matrisleri için Not 3.1.21 deki gösterimler geçerlidir. Zira $A^p$ için de $\delta_z$ nokta değerlendirmesi süreklidir. Sonuncu husus Zhu [**82, sh.48**] den

$$|f(z)| \leq \|f\|_p (1-|z|)^{-2} \qquad (f \in A^p,\ z \in \mathbb{D})$$

eşitsizliğinden elde edilir. Literatürde bugüne kadar sadece $C_1^t$ ve $C_1$ (transpoze) Hausdorff matrisleri incelenmiştir.

### 3.2 Hausdorff Matrislerinin Normu ve Spektrumu

Bu kısımda $H_\mu$ Hausdorff matrislerinin spektrumu hakkındaki ifadeler yer alır. Bununla ilgili olarak Hille ve Philips'in geliştirdiği operatör hesabı dikkate alınabilir. Spektrumun bilgisinden hareketle normların tahminleri elde edilebilir. Şimdiye kadar dikkate alınmış olan BK-uzayları üzerindeki özel (transpoze) Hausdorff matrislerine yönelik araştırmalar Örnek 3.1.2 den takip edilebilir.

$0 \in \sigma(\mathcal{T}_1)$ için Teorem 2.3.3 (b) den

$$C_1 x = R(0, \mathcal{T}_1)\, x = \int_0^{\infty} e^{-t} E\left(e^{-t}\right) x dt = \int_0^{1} E(s)\, x ds$$

özdeşliği geçerlidir. Hille ve Philips [**30**]

$$\psi(A)\, x = \int_0^{\infty} T(t)\, x dv(t) \qquad (x \in X)$$

ile birlikte lineer operatörlerin spektrumu hakkında gerekli araştırmaları yapmıştır. Burada $T$ , $A$ sonsuz küçük üretici ile $X$ de lineer operatörlerin yarı grubu ve $v$ , $[0, \infty)$ ile sınırlı Borel kümesi üzerinde kompleks bir ölçüdür. Özel olarak $H_\mu$ Hausdorff matrislerinin nazarı dikkate alınmasında Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.4 ile birlikte [**30, sh.459**] dan aşağıdaki spektral dönüşüm kümesi ortaya çıkar.

**Teorem 3.2.1:** $(X, \|.\|)$ bir BK-uzayı ve $\mu$, bir $p$ moment dizisinin $[0.1]$ aralığında verilmiş $(0, 1]$ aralığına kısıtlanmış kompleks bir Borel ölçüsü olsun. $E(s)$ , $s \in [0, 1]$ parametreli Euler matrisi olsun. $E(s) \in B(X)$ $\mu$-hemen hemen her yerde geçerlidir.

$$\begin{aligned} \|E\|_X : \quad [0,1] &\longrightarrow \qquad \mathbb{R} \\ s \quad &\longmapsto \quad \|E\|_X(s) := \|E(s)\|_X \end{aligned}$$

fonksiyonu pozitif ve $\mu$-integrallenebilir bir $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tarafından majarantlanır. Bu $\varphi$ fonksiyonu $\forall t, s \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için

$$\varphi(0) = 1 \text{ ve } \varphi\left(e^{-(t+s)}\right) \leq \varphi\left(e^{-t}\right) \varphi\left(e^{-s}\right)$$

koşulunu sağlar.

$$\overline{w} := \lim_{t \to \infty} \log\left(e^{-t} \varphi\left(e^{-t}\right)\right)$$

$\varphi$ nin bir karekteristiği olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} T_1 : \mathbb{R}^{\geq 0} &\to B(X) \\ t &\mapsto T_1(t) := e^{-t}E(e^{-t}) \end{aligned}$$

ifadesi $\mathcal{T}_1$ sonsuz küçük üreticisi ile lineer operatörlerin kuvvetli sürekli yarı grubu olsun. Bu durumda eğer $\psi_\mu$ dönüşümünü

$$\begin{aligned} \psi_\mu : \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq \overline{w}\} &\to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto \psi_\mu(\lambda) := \int_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu(s) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlarsak $\mu$ yani $p$ nin ürettiği Hausdorff matrisleri için aşağıdakiler geçerlidir.

**(a)** $H_\mu \in B(X)$ ve $\|H_\mu\|_X \leq \int_0^1 \varphi(s)\, d|\mu|(s)$

**(b)** $\overline{\psi_\mu(\sigma(\mathcal{T}_1))} \subset \sigma(H_\mu)$

**(c)** Mutlak sürekli $\mu$ ler için $\sigma(H_\mu) = \psi_\mu(\sigma(\mathcal{T}_1)) \cup \{0\}$ dır.

**Not 3.2.2:** $(X, \|.\|)$ bir BK-AK uzayı olduğunda $H_\mu^t$ transpoze Hausdorff matrisleri için tamamen benzer bir teorem geçerlidir. Bu husus Euler matrislerinin yerine transpoze Euler matrislerinin alınması ve Teorem 3.1.4 ün yerine Teorem 3.1.5 in kullanılmasıyla da geçerlidir.

Şimdi bu zamana kadar incelediğimiz özel BK-uzayları üzerinde Hausdorff matrislerinin araştırılmasına geçiyoruz.

**Teorem 3.2.3($\ell^p$ üzerinde Hausdorff matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\mu$, $(0,1]$ üzerine kısıtlanmış , $[0.1]$ de verilmiş kompleks bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

koşulu geçerli olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \psi_\mu : \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{p}\right\} &\to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto \psi_\mu(\lambda) := \int_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu(s) \end{aligned}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $H_\mu$ Hausdorff matrisleri için aşağıdakiler geçerlidir.

(a) $H_\mu \in B(\ell^p)$

(b) $\overline{\left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{p}\right\}} \subset \sigma(H_\mu)$

(c) $\sup\limits_{\operatorname{Re}\lambda \leq -1+\frac{1}{p}} = |\psi_\mu(\lambda)| \leq \|H_\mu\|_{\ell^p} \leq \int\limits_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu(s)$

**İlave:** $\mu$ mutlak sürekli ise bu durumda (b)

(b') $\sigma(H_\mu) = \overline{\left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{p}\right\}} \cup \{0\}$

a dönüşür.

**İspat:** Teorem 3.2.1, Teorem 1.2.6, Teorem 2.2.1, Teorem 3.1.7, Teorem 2.4.3(a) ve sınırlı lineer bir operatörün operatör normunun kendi spektral yarıçapı ile üstten sınırlı olmasından elde edilir.

**Sonuç 3.2.4:** $1 < p < \infty$ ve $\mu$, $(0,1]$ üzerine kısıtlanmış , $[0.1]$ de verilmiş reel pozitif Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int\limits_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

geçerli olsun. Bu durumda $H_\mu \in B(\ell^p)$ dir ve operatör normu

$$\|H_\mu\|_{\ell^p} = \int\limits_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s)$$

biçiminde verilir.

**İspat:** Teorem 3.2.3 ün $\lambda = -1 + \frac{1}{p}$ ile birlikte uygulanmasıyla direkt olarak elde edilir.

Doğal olarak bu noktada pek çok örnek verilebilir. Biz bu örnekleri sadece Örnek 3.1.2 de verilen özel Hausdorff matrisleri ve reel pozitif $\mu$ Borel ölçüsü ile sınırlıyoruz. Zira bunlar için tam sonuçlar elde edilebilir. Toplanan sonuçları dört teoremle özetleyelim.

**Teorem 3.2.5($\ell^p$ üzerinde Hölder matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{R}$ için

(i) $H^\alpha \in B(\ell^p)$

(ii) $\sigma(H^{\alpha}) = \left\{ \frac{1}{\lambda^{\alpha}} : \operatorname{Re}\lambda \geq \frac{1}{q} \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\|H^{\alpha}\|_{\ell^p} = q^{\alpha}$

Cesàro matrisleri için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

**Teorem 3.2.6($\ell^p$ üzerinde Cesàro matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{R}$ için

(i) $C_{\alpha} \in B(\ell^p)$

(ii) $\sigma(C_{\alpha}) = \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} : \operatorname{Re}\lambda \geq \frac{1}{q} \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\|C_{\alpha}\|_{\ell^p} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{q}\right)}$

Teorem 2.5.2 nin genelleşmesi ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 3.2.7($\ell^p$ üzerinde Gamma matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ ve $\alpha, a \in \mathbb{R}$ için

(i) $\Gamma_a^{\alpha} \in B(\ell^p)$

(ii) $\sigma(\Gamma_a^{\alpha}) = \left\{ \left( \frac{a}{\lambda + a - 1} \right)^{\alpha} : \operatorname{Re}\lambda \leq \frac{1}{q} \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\|\Gamma_a^{\alpha}\|_{\ell^p} = \left( \frac{ap}{ap-1} \right)^{\alpha}$

geçerlidir.

**İspat:** İspat Sonuç 3.2.4 ve Teorem 3.2.3 (b$'$) den elde edilir. Gerçek hesaplar Örnek 3.1.2 de ki gibi geçerlidir.

**Teorem 3.2.8($\ell^p$ üzerinde Euler matrisleri):** $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha \in (0,1)$ için

(i) $E(\alpha) \in B(\ell^p)$

(ii) $\sigma(E(\alpha)) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \alpha^{-\frac{1}{p}} \right\}$

(iii) $\|E(\alpha)\|_{\ell^p} = \alpha^{-\frac{1}{p}}$

geçerlidir.

**İspat:** İlk önce Teorem 3.2.3 (b) den $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \alpha^{-\frac{1}{p}} \right\} \subset \sigma(E(\alpha))$ elde edilir. Örnek 3.1.2 (d) den bunun tersi olan $\|E(\alpha)\|_{\ell^p} \leq \alpha^{-\frac{1}{p}}$ içermesi elde edilir. Spektrum ile ilgili bilgi operatör normu hakkındaki bilgiyi verir.

**Not 3.2.9:** Sonuç 3.2.4 Hardy tarafından **[25]** de ispatlanmış duruma uygun düşer. Orada sadece pozitif terimli diziler araştırılmış ve operatör normunun alt sınırı için bir tahmin özel bir dizinin seçimiyle elde edilmiştir. Literatürde $\ell^p$ üzerinde Euler matrislerinin spektrumu ile ilgili tahminler bulunmaz. Tek istisna Deddens [**14**] tarafından araştırılan $p = 2$ durumudur. $\ell^p$ üzerinde $H_\mu$ Hausdorff matrisleri için geri kalan ifade biliniyor. Zira, $H_\mu^t$ nin spektrumu hakkındaki sonuçlar mevcuttur. Bu sonuçlar $H_\mu$ üzerine eşlenik yardımıyla iletilebilir. Burada yeni bir ispat metodu geliştirilmiştir. Bu ispat metodu eşlenik dönüşüm metoduna dönmeksizin ortaya konur ve dolayısıyla kompleks yapılı dizi uzayları çok çeşitli sonuçlar verir. Gerçekten $H_\mu^t$ spektrumu daha doğru tasfir edilebilir. Buna uygun ispat Leibowits [**42**] tarafından yapılmıştır. Daha doğru bir analiz yapıldığında bu ispat boşluklu olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla hem ifade hemde tam ispat burada yeniden verilmiştir. $H_\mu^t$ için 3.2.4 e uygun düşen sonuç aşağıdaki gibidir.

**Teorem 3.2.10( $\ell^p$ üzerinde transpoze Hausdorff matrisleri ):** $1 < p < \infty$ , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\mu$, $(0,1]$ üzerine kısıtlanmış , $[0.1]$ de verilmiş kompleks bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d\,|\mu|\,(s) < \infty$$

geçerli olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} \psi_\mu : & \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{q}\right\} & \to & \mathbb{C} \\ & \lambda & \mapsto & \psi_\mu(\lambda) := \displaystyle\int_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu(s) \end{array}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $H_\mu^t$ Hausdorff matrisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(a) $H_\mu^t \in B(\ell^p)$

(b) $\left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{q}\right\} \subset \sigma\left(H_\mu^t\right)$

(c) $\left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{q}\right\} \subset \sigma_p\left(H_\mu^t\right)$

(d) $\sup\limits_{\operatorname{Re}\lambda\leq -1+\frac{1}{q}} |\psi_\mu(\lambda)| \leq \left\|H_\mu^t\right\|_{\ell^p} \leq \int\limits_0^1 s^{-\frac{1}{q}} d\mu(s)$

**İlave:** Eğer $\mu$ mutlak sürekli ise bu durumda (b) yerine

(b$'$) $\sigma\left(H_\mu^t\right) = \left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{q}\right\} \cup \{0\}$

alınır.

**İspat:** (a), (b), (d) ve (b$'$) ifadeleri Teorem 3.2.1, Teorem 1.6.7, Teorem 2.2.7, Not 3.1.10 ve Teorem 2.4.13 (a) da ispatlandı. Biz şimdi sadece (c) yi ispatlayacağız. Lemma 2.4.12 (c) ye uygun olarak $\mathbb{D}$ de analitik fonksiyonun Taylor katsayılarının serisi $\ell^p$ de olacak şekilde $\operatorname{Re}\lambda < -1 + \dfrac{1}{q}$ olan $\lambda$ lar için

$$(1-z)^{-(\lambda+1)} =: \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

biçimindedir. Buradan ilk önce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\psi_\mu(\lambda)\, b_n\right) z^n = \psi_\mu(\lambda)\,(1-z)^{-(\lambda+1)} =$$

$$= (1-z)^{-(\lambda+1)} \int\limits_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu(s) = \int\limits_0^1 \left[s\,(t-z)^{-\lambda+1}\right] d\mu(s)$$

$$= \int\limits_0^1 \left(1-(1-s+zs)\right)^{-\lambda+1} d\mu(s) = \int\limits_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (1-s+zs)^n\, d\mu(s)$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğinden $(a_n) \in \ell^p$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \|(a_n)\|_p \cdot \|(z^n)\|_q \leq \frac{\|(a_n)\|_p}{\left(1-|z|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\|(a_n)\|_p}{\left(1-|z|\right)^{\frac{1}{q}}}$$

geçerlidir. $b := (b_n)$ olarak alırsak $\forall m \in \mathbb{N}$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n (1-s+zs)^n - \sum_{n=0}^{m} b_n (1-s+zs)^n\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \left[b - b^{[m]}\right]_n (1-s+zs)^n\right| \\
&\leq \frac{\left\|b - b_p^{[m]}\right\|_p}{\left(1-|1-s+zs|\right)^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq \frac{\left\|b - b_p^{[m]}\right\|_p}{s^{\frac{1}{q}}\left|1-|z|\right|^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği integrallersek

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n (1-s+zs)^n - \sum_{n=0}^{m} b_n (1-s+zs)^n \right| d|\mu|(s)$$

$$\leq \frac{1}{(1-|z|)^{\frac{1}{q}}} \int_0^1 s^{-\frac{1}{q}} d|\mu|(s) \, . \left[b - b^{[m]}\right]_p$$

elde edilir. Hipotezden sağ taraftaki integral sınırlı olduğundan ve 1.6.2 (b) den $\ell^p$ bir AK-uzayı olduğundan

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} b_n (1-s+zs)^n d|\mu|(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 b_n (1-s+zs)^n d\mu(s)$$

ifadesi elde edilir. Buradan binom formülü ve Not 3.1.3 den

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\psi_\mu(\lambda) b_n\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 b_n (1-s+zs)^n d\mu(s) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 b_n \sum_{k=0}^{n} s^k (1-s)^{n-k} z^k d\mu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\int_0^1 s^k (1-s)^{n-k} d\mu(s)}_{h_{nk}} z^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{k=0}^{n} h_{nk} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} h_{nk} b_n z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=k}^{\infty} h_{nk} b_n \right) z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=n}^{\infty} h_{kn} b_k \right) z^n$$

elde edilir. O halde

$$H_\mu^t b = \psi_\mu(\lambda) b$$

geçerlidir. Burada toplama sırasının değişimi Weierstrass çift dizi teoremine uygun olarak yapılır.

Mevcut sonuçların ilk kapsamlı genişlemeleri $c_0$ uzayı için elde edilir. Her halukârda Hausdorff matrislerinin normu bilinmekle beraber (bak Not 3.1.13) $H_\mu$ nün spektrumu hakkındaki ifadeler sadece $C_1$ ve $C_2$ Cesàro matrisleri için bulunabilir (bak [49] ve Maddox [44] ). Buradan geliştirilen sonuçlarla aşağıdaki hususlar geçerlidir.

**Teorem 3.2.11($c_0$ üzerinde Hausdorff matrisleri):** $\mu$ , $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış , [0.1] aralığında verilmiş kompleks bir Borel ölçüsü olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} \psi_\mu : & \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \mapsto & \psi_\mu(\lambda) := \int\limits_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu(s) \end{array}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $H_\mu$ Hausdorff matrisleri için aşağıdakiler geçerlidir:

**(a)** $H_\mu \in B(c_0)$

**(b)** $\overline{\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -1\}} \subset \sigma(H_\mu)$

**(c)** $\sup\limits_{\operatorname{Re}\lambda \leq -1} = |\psi_\mu(\lambda)| \leq \|H_\mu\|_{c_0} \leq |\mu|([0,1])$

**İlave:** Eğer $\mu$ mutlak sürekli ise bu durumda (b) yerine

**(b')** $\sigma(H_\mu) = \{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -1\} \cup \{0\}$

alınır.

**İspat:** Teorem 3.2.1, Teorem 1.7.2, Teorem 2.2.2, Teorem 3.1.12 ve Teorem 2.4.3 (b) den elde edilir.

Teorem 3.2.5-Teorem 3.2.8 de olduğu gibi aşağıdaki özel sonuçlar elde edilir.

**Teorem 3.2.12 ($c_0$ üzerinde Hölder matrisleri):** $\alpha > 0$ olmak üzere $a \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki geçerlidir.

**(i)** $H^\alpha \in B(c_0)$

**(ii)** $\sigma(H^\alpha) = \left\{ \dfrac{1}{\lambda^\alpha} : \operatorname{Re}\lambda \geq 1 \right\} \cup \{0\}$

**(iii)** $\|H^\alpha\|_{c_0} = 1$

Cesàro-matrisleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 3.2.13($c_0$ üzerinde Cesàro matrisleri):** $\alpha > 0$ olmak üzere $a \in \mathbb{R}$ için;

**(i)** $C_\alpha \in B(c_0)$

**(ii)** $\sigma(C_\alpha) = \left\{ \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} : \operatorname{Re}\lambda \geq 1 \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\|C_\alpha\|_{c_0} = 1$

geçerlidir.

Teorem 2.5.8 in genelleşmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 3.2.14($c_0$ üzerinde Gamma matrisleri):** $\alpha, a > 0$ olmak üzere $\alpha, a \in \mathbb{R}$ için;

(i) $\Gamma_a^\alpha \in B(c_0)$

(ii) $\sigma(\Gamma_a^\alpha) = \left\{ \left( \frac{a}{\lambda + a - 1} \right) : \operatorname{Re}\lambda \geq 1 \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\|\Gamma_a^\alpha\|_{c_0} = 1$

geçerlidir.

Sonuç olarak Euler matrisleri için aşağıdakiler geçerlidir.

**Teorem 3.2.15($c_0$ üzerinde Euler matrisleri):** $\alpha \in (0,1)$ için;

(i) $E(\alpha) \in B(c_0)$

(ii) $\sigma(E(\alpha)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$

(iii) $\|E(\alpha)\|_{c_0} = 1$

geçerlidir.

**Not 3.2.16 ($c$ üzerinde Hausdorff matrisleri):** Teorem 3.2.1, Teorem 1.7.3, Teorem 2.2.3, Teorem 3.1.11, ve Teorem 2.4.3 (c) den dolayı $c_0$ dizi uzayı için elde edilen sonuçların aynısı $c$ için de geçerlidir. Burada $c_0$ yerine $c$ nin Teorem 3.2.11-Teorem 3.2.15 deki gibi kullanılması söz konusudur. Rhoades ve Sharma **[60]** de $c$ için Teorem 3.1.11 (b$'$) ne uygun düşen bir sonuç ispatlamıştır. Bu ispatta mutlak sürekli $\mu$ ölçüsüne $[0,1]$ üzerinde skaler katlı nokta ölçüsü ilâve edilmiştir. Teorem 3.1.11 (b) ifadesi kapsamında Literatürde $c$ üzerinde Hausdorff matrislerinin spektrumu hakkında genel bir sonuç bilinmemektedir. Cesàro matrislerinin araştırlması Wenger **[78]** e dayanır. Euler matrislerinin spektrumunu ise ilk defa Sharma **[68]** tarafından belirlenmiştir.

$H^p$ ve $A^p$ fonksiyon uzayları için tekrar büyük bir kazanç sağlanmıştır. Bu yüzden Haudorff matrisleri ve transpoze Hausdorff matrisleri için bu uzaylarda uygun düşen sonuçları detaylı bir şekilde ifade etmek durumundayız. Tekrar $H^p$ uzayları ile işe başlayalım.

**Teorem 3.2.17($H^p$ üzerinde Hausdorff matrisleri, I):** $2 \leq p < \infty$ , $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $\mu$ , $[0,1]$ aralığında verilmiş, $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış kompleks bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-\frac{1}{q}} d\,|\mu|\,(s) < \infty$$

koşulu geçerli olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} \psi_\mu : & \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1+\frac{1}{q}\right\} & \to & \mathbb{C} \\ & \lambda & \mapsto & \psi_\mu(\lambda) := \int_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu\,(s) \end{array}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $H_\mu$ Hausdorff matrisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(a) $H_\mu \in B\,(H^p)$

(b) $\overline{\left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -1+\frac{1}{q}\right\}} \subset \sigma\,(H_\mu)$

(c) $\sup\limits_{\operatorname{Re}\lambda \leq -1+\frac{1}{q}} |\psi_\mu(\lambda)| \leq \|H_\mu\|_{H^p} \leq \int_0^1 s^{-\frac{1}{q}} d\,|\mu|\,(s)$

**İlave:** Eğer $\mu$ mutlak sürekli ise bu durumda (b) yerine

**(b$'$)** $\sigma(H_\mu) = \left\{ \psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 + \frac{1}{q} \right\} \cup \{0\}$

alınır.

**İspat:** Teorem 3.2.1, Örnek 1.8.22, Teorem 2.2.4, Teorem 3.1.14 ve Teorem 2.4.3 (d) den elde edilir.

Bu aşağıdaki özel duruma götürür.

**Sonuç 3.2.18:** $2 \leq p < \infty$ , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\mu$ , $[0,1]$ aralığında verilmiş, $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış pozitif reel bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-\frac{1}{q}} d\mu(s) < \infty$$

koşulu geçerli olsun. Bu durumda $H_\mu \in B(H^p)$ geçerlidir ve operatör normu için

$$\|H_\mu\|_{H^p} = \int_0^1 s^{-\frac{1}{q}} d\mu(s)$$

geçerlidir.

Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 3.2.19($H^p$ üzerinde Hölder matrisleri):** $2 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere her hangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki geçerlidir.

**(i)** $H^\alpha \in B(H^p)$

**(ii)** $\sigma(H^\alpha) = \left\{ \frac{1}{\lambda^\alpha} : \operatorname{Re}\lambda \geq \frac{1}{p} \right\} \cup \{0\}$

**(iii)** $\|H^\alpha\|_{H^p} = p^\alpha$

Cesàro-matrisleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 3.2.20($H^p$ üzerinde Cesàro matrisleri):** $2 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere her hangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için;

**(i)** $C_\alpha \in B(H^p)$

**(ii)** $\sigma(C_\alpha) = \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} : \operatorname{Re}\lambda \geq \frac{1}{p} \right\} \cup \{0\}$

**(iii)** $\|C_\alpha\|_{H^p} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{p}\right)}$

geçerlidir.

Teorem 2.5.10 un genelleşmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 3.2.21($H^p$ üzerinde Gamma matrisleri):** $2 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ ve $a > \frac{1}{q}$ olmak üzere $\alpha, a \in \mathbb{R}$ için;

(i) $\Gamma_a^\alpha \in B(H^p)$

(ii) $\sigma(\Gamma_a^\alpha) = \left\{ \left( \frac{a}{\lambda + a - 1} \right)^\alpha : \operatorname{Re} \lambda \geq \frac{1}{p} \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\|\Gamma_a^\alpha\|_{H^p} = \left( \frac{aq}{aq-1} \right)^\alpha$

geçerlidir.

Son olarak Euler matrisleri için aşağıdaki husus geçerlidir.

**Teorem 3.2.22($H^p$ üzerinde Euler matrisleri):** $2 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha \in (0,1)$ için;

(i) $E(\alpha) \in B(H^p)$

(ii) $\sigma(E(\alpha)) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \alpha^{-\frac{1}{q}} \right\}$

(iii) $\|E(\alpha)\|_{H^p} = \alpha^{-\frac{1}{q}}$

geçerlidir.

**Not 3.2.23($H^p$ üzerinde Hausdorff matrisleri, II):** $1 < p < 2$ durumunda noksan olan $H^p$ uzaylarındaki Hausdorff matrisleri için Teorem 3.2.17 ye benzer bir sonuç formüle edilebilir. Bu durumda $\mu$ nün

$$\int_0^1 (2-s)^{\frac{2-p}{p}} s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

koşulunu sağlaması yeterlidir. Bu haliyle spektrum hakkındaki ifadeler değişmezken norm tahmini için Örnek 3.1.18 den belirgin farklar ortaya çıkar. Teorem 3.2.19-Teorem 3.2.22 de verilenler dikkate alındığında bu ifade Euler matrisinin spektrumu hakkında geçerliliğini kaybeder. Bunun yerine

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \alpha^{-\frac{1}{q}} \right\} \subset \sigma(E(\alpha)) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2^{\frac{2-p}{p}} \alpha^{-\frac{1}{p}} \right\}$$

geçerlidir.

$H^p$ üzerinde transpoze Hausdorff matrisleri tekrar özgün bir şekilde ele alınabilir. Sonuçların kendilerine özgü bir ilişkisi olduğu hususu dikkate alınmalıdır. Bunun sebebi $\ell^p$ de olduğu gibi eşlenikleri yardımıyla elde edilememeleridir. Bu yüzden sonuçların detaylı bir şekilde gösterimi söz konusudur.

**Teorem 3.2.24($H^p$ üzerinde transpoze Hausdorff matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\mu$ , $[0,1]$ aralığında verilmiş, $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış kompleks bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

koşulu geçerli olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} \psi_\mu : & \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \le -1 + \dfrac{1}{p}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \longmapsto & \psi_\mu(\lambda) := \displaystyle\int_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu(s) \end{array}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $H_\mu^t$ Hausdorff matrisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(a) $H_\mu^t \in B(H^p)$

(b) $\overline{\left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \le -1 + \frac{1}{p}\right\}} \subset \sigma\left(H_\mu^t\right)$

(c) $\left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda < -1 + \frac{1}{p}\right\} \subset \sigma_p\left(H_\mu^t\right)$

(d) $\sup\limits_{\operatorname{Re}\lambda \le -1+\frac{1}{p}} |\psi_\mu(\lambda)| \le \left\|H_\mu^t\right\|_{H^p} \le \displaystyle\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d|\mu|(s)$

**İlave:** Eğer $\mu$ mutlak sürekli ise bu durumda (b) yerine

(b$'$) $\sigma\left(H_\mu^t\right) = \left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \le -1 + \frac{1}{p}\right\} \cup \{0\}$

alınır.

**İspat:** (a), (b), (d) ve (b$'$) ifadeleri Teorem 3.2.1, Örnek 1.8.16, Teorem 2.2.8, Teorem 3.1.19 ve Teorem 2.4.13 (b) den elde edilir. (c) nin ispatı Not 3.1.10 daki gibi yapılır. Şayet burada Lemma 2.4.12 (a) dan faydalanılırsa ve Hölder eşitsizliği yerine

$$|f(z)| \le 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p (1 - |z|)^{-\frac{1}{p}} \qquad (z \in \mathbb{D}\ ,\ f \in H^p)$$

kullanılırsa Duren [**18, sh.36**] dan son tahmini elde ederiz.

Özel bir durum için bu husus aşağıdaki sonuca götürür.

**Sonuç 3.2.25:** $1 < p < \infty$ ve $\mu$ , $[0,1]$ aralığında verilmiş, $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış pozitif reel bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d\mu(s) < \infty$$

koşulu geçerli olsun. Bu durumda $H_\mu^t \in B(H^p)$ geçerlidir ve operatör normu için

$$\left\|H_\mu^t\right\|_{H^p} = \int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} d\mu(s)$$

geçerlidir.

Bunun üzerine aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 3.2.26 ($H^p$ üzerinde Quasi Hölder matrisleri):** $1 < p < \infty$ , $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere her hangi bir $a \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki geçerlidir.

(i) $(H^\alpha)^t \in B(H^p)$

(ii) $\sigma\left((H^\alpha)^t\right) = \left\{\dfrac{1}{\lambda^\alpha} : \operatorname{Re}\lambda \geq \dfrac{1}{q}\right\} \cup \{0\}$

(iii) $\left\{\dfrac{1}{\lambda^\alpha} : \operatorname{Re}\lambda > \dfrac{1}{q}\right\} \subset \sigma\left((H^\alpha)^t\right)$

(iv) $\left\|(H^\alpha)^t\right\|_{H^p} = q^\alpha$

Transpoze Cesàro-matrisleri için aşağıdaki sonuç geçerlidir.

**Teorem 3.2.27 ($H^p$ üzerinde Quasi Cesàro matrisleri):** $1 < p < \infty$ , $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere her hangi bir $a \in \mathbb{R}$ için;

(i) $C_\alpha^t \in B(H^p)$

(ii) $\sigma(C_\alpha^t) = \left\{\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} : \operatorname{Re}\lambda \geq \dfrac{1}{q}\right\} \cup \{0\}$

(iii) $\left\{\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} : \operatorname{Re}\lambda > \dfrac{1}{q}\right\} \subset \sigma_p(C_\alpha^t)$

(iv) $\|C_\alpha^t\|_{H^p} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\dfrac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{1}{q}\right)}$

geçerlidir.

Teorem 2.5.19 un genelleşmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 3.2.28 ($H^p$ üzerinde Quasi Gamma matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ ve $a > \frac{1}{p}$ olmak üzere $\alpha, a \in \mathbb{R}$ için;

(i) $(\Gamma_a^\alpha)^t \in B(H^p)$

(ii) $\sigma\left((\Gamma_a^\alpha)^t\right) = \left\{\left(\frac{a}{\lambda + a - 1}\right)^\alpha : \operatorname{Re}\lambda \geq \frac{1}{q}\right\} \cup \{0\}$

(iii) $\left\{\left(\frac{a}{\lambda + a - 1}\right)^\alpha : \operatorname{Re}\lambda > \frac{1}{q}\right\} \subset \sigma_p\left((\Gamma_a^\alpha)^t\right)$

(iv) $\left\|(\Gamma_a^\alpha)^t\right\|_{H^p} = \left(\frac{ap}{ap-1}\right)^\alpha$

geçerlidir.

Son olarak transpoze Euler matrisleri için aşağıdaki husus geçerlidir.

**Teorem 3.2.29 ($H^p$ üzerinde Quasi Euler matrisleri):** $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha \in (0,1)$ için;

(i) $E^t(\alpha) \in B(H^p)$

(ii) $\sigma(E^t(\alpha)) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \alpha^{-\frac{1}{p}}\right\}$

(iii) $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \alpha^{-\frac{1}{p}}\right\} \setminus \{0\} \subset \sigma_p(E^t(\alpha))$

(iv) $\|E^t(\alpha)\|_{H^p} = \alpha^{-\frac{1}{p}}$

geçerlidir.

**Not 3.2.30:** Literatürde $H^p$ üzerindeki transpoze Euler matrislerinin spektrumu mevcut haliyle bilinmektedir. Zirâ bu husus Not 1.8.15 den bileşke operatörleri yardımıyla $E^t(\alpha)$ olarak görülmektedir ve aynı zamanda spektrumun belirlenmesi için Kamowitz [**35, sh.139**] sonucundan yararlanılır. Diğer tüm transpoze Hausdorff matrisleri için söz konusu sonuçlar yenidir. Zirâ, aynı zamanda Ramanujan [48] den Sonnenschein matrisi olan tek Hausdorff matrisi Euler matrisidir.

Şimdi $A^p$ fonksiyon uzaylarını ele alalım. Öncelikle aşağıdaki husus geçerlidir.

**Teorem 3.2.31 ($A^p$ üzerinde Hausdorff matrisleri, I):** $4 \leq p < \infty$ ve $\mu$ , $[0,1]$ aralığında verilmiş, $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış kompleks bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-1+\frac{2}{p}} d|\mu|(s) < \infty$$

koşulu geçerli olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rccc} \psi_\mu : & \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -\frac{2}{p}\right\} & \to & \mathbb{C} \\ & \lambda & \mapsto & \psi_\mu(\lambda) := \int_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu(s) \end{array}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $H_\mu$ Hausdorff matrisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(a) $H_\mu \in B(A^p)$

(b) $\overline{\left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -\frac{2}{p}\right\}} \subset \sigma(H_\mu)$

(c) $\sup\limits_{\operatorname{Re}\lambda \leq -\frac{2}{p}} |\psi_\mu(\lambda)| \leq \|H_\mu\|_{A^p} \leq \int_0^1 s^{-1+\frac{2}{p}} d|\mu|(s)$

**İlave:** Eğer $\mu$ mutlak sürekli ise bu durumda (b) yerine

(b$'$) $\sigma(H_\mu) = \left\{\psi_\mu(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda \leq -\frac{2}{p}\right\} \cup \{0\}$

alınır.

**İspat:** Teorem 3.2.1, Örnek 1.9.10, Teorem 2.2.5, Teorem 3.1.22 ve Teorem 2.4.3 (d) den elde edilir.

Bu husus aşağıdaki özel duruma götürür.

**Not 3.2.32:** $4 \leq p < \infty$ ve $\mu$ , $[0,1]$ aralığında verilmiş, $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış pozitif reel bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-1+\frac{2}{p}} d\mu(s) < \infty$$

geçerli olsun. Bu durumda $H_\mu \in B(A^p)$ geçerlidir ve operatör normu için

$$\|H_\mu\|_{A^p} = \int_0^1 s^{-1+\frac{2}{p}} d\mu(s)$$

geçerlidir.

Buradan aşağıdaki sonuçlar türetilebilir.

**Teorem 3.2.33**($A^p$ **üzerinde Hölder matrisleri):** $4 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere her hangi bir $a \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki geçerlidir

(i) $H^\alpha \in B(A^p)$

(ii) $\sigma(H^\alpha) = \left\{ \frac{1}{\lambda^\alpha} : \operatorname{Re} \lambda \geq \frac{p-2}{p} \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\|H^\alpha\|_{A^p} = \left( \frac{p}{p-2} \right)^\alpha$

Cesàro matrisleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 3.2.34**($A^p$ **üzerinde Cesàro matrisleri):** $4 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere her hangi bir $a \in \mathbb{R}$ için;

(i) $C_\alpha \in B(A^p)$

(ii) $\sigma(C_\alpha) = \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} : \operatorname{Re} \lambda \geq \frac{p-2}{p} \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\|C_\alpha\|_{A^p} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{2}{p}\right)}$

geçerlidir.

Teorem 2.5.13 in genelleşmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 3.2.35**($H^p$ **üzerinde Gamma matrisleri):** $4 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ ve $a > \frac{p-2}{p}$ olmak üzere $\alpha, a \in \mathbb{R}$ için;

(i) $\Gamma_a^\alpha \in B(A^p)$

(ii) $\sigma(\Gamma_a^\alpha) = \left\{ \left( \frac{a}{\lambda + a - 1} \right)^\alpha : \operatorname{Re} \lambda \geq \frac{p-2}{p} \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\|\Gamma_a^\alpha\|_{A^p} = \left( \frac{ap}{ap-p+2} \right)^\alpha$

geçerlidir.

Son olarak Euler matrisleri için aşağıdaki husus geçerlidir.

**Teorem 3.2.36**($A^p$ **üzerinde Euler matrisleri):** $4 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha \in (0,1)$ için;

(i) $E(\alpha) \in B(A^p)$

(ii) $\sigma(E(\alpha)) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \alpha^{-1+\frac{2}{p}} \right\}$

(iii) $\|E(\alpha)\|_{A^p} = \alpha^{-1+\frac{2}{p}}$

geçerlidir.

**Not 3.2.37($A^p$ üzerinde Hausdorff matrisleri, II):** $1 < p < 4$ durumunda noksan olan $A^p$ uzaylarındaki Hausdorff matrisleri için Teorem 3.2.31 e uygun bir sonuç formüle edilebilir. Bu durumda $\mu$ nün

$$\int_0^1 (2-s)^{\frac{4-p}{p}} s^{-\frac{2}{p}} d\,|\mu|\,(s) < \infty$$

koşulunu yerine getirmelidir. Teorem 2.3.8 (e) den (a), (b) ve (c) ifadeleri gerekli değişikliklerle beraber geçerliliklerini korur. $1 < p \leq 2$ için Not 3.1.24 de verilen husus geçerlidir.

$A^p$ üzerinde transpoze Hausdorff matrisleri kendilerine özgü bir şekilde işlenebilir. Bu durumda da sonuçlar özel bir ilgi alanı oluşturur. Zirâ bu ilgi alanı eşleniklerle türetilemez.

**Teorem 3.2.38($A^p$ üzerinde transpoze Hausdorff matrisleri):** $1 < p < \infty$ ve $\mu$ , $[0,1]$ aralığında verilmiş, $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış kompleks bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-\frac{2}{p}} d\,|\mu|\,(s) < \infty$$

koşulu geçerli olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} \psi_\mu : & \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \leq -1 + \dfrac{2}{p}\right\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \mapsto & \psi_\mu(\lambda) := \displaystyle\int_0^1 s^{-(\lambda+1)} d\mu\,(s) \end{array}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $H_\mu^t$ Hausdorff matrisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(a) $H_\mu^t \in B\,(A^p)$

(b) $\overline{\left\{\psi_\mu(\lambda) : \mathrm{Re}\,\lambda \leq -1 + \dfrac{2}{p}\right\}} \subset \sigma\left(H_\mu^t\right)$

(c) $\left\{\psi_\mu(\lambda) : \mathrm{Re}\,\lambda < -1 + \dfrac{2}{p}\right\} \subset \sigma_p\left(H_\mu^t\right)$

(d) $\displaystyle\sup_{\mathrm{Re}\,\lambda \leq -1+\frac{2}{p}} |\psi_\mu(\lambda)| \leq \left\|H_\mu^t\right\|_{A^p} \leq \int_0^1 s^{-\frac{2}{p}} d\,|\mu|\,(s)$

**İlave:** Eğer $\mu$ mutlak sürekli ise bu durumda (b) yerine

(b$'$) $\sigma\left(H_\mu^t\right)=\left\{\psi_\mu(\lambda):\operatorname{Re}\lambda\leq -1+\frac{2}{p}\right\}\cup\{0\}$

alınır.

**İspat:** (a), (b), (d) ve (b$'$) ifadeleri Teorem 3.2.1, Örnek 1.9.7, Teorem 2.2.10, Teorem 3.1.25 ve Teorem 2.4.13 (b) den elde edilir. Eğer Lemma 2.4.12 (b) kullanılırsa (c) nin ispatı aynen Not 3.1.10 daki gibi yapılır ve Hölder eşitsizliği yerine

$$|f(z)|\leq\|f\|_p(1-|z|)^{-2}\qquad\qquad (z\in\mathbb{D}\ ,\ \ f\in H^p)$$

kullanılırsa Zhu [**82, sh.48**] den son tahmini elde ederiz.

Bu husus aşağıdaki özel duruma götürür.

**Sonuç 3.2.39:** $1<p<\infty$ ve $\mu$ , $[0,1]$ aralığında verilmiş, $(0,1]$ aralığına kısıtlanmış pozitif reel bir Borel ölçüsü olsun. Ayrıca

$$\int_0^1 s^{-\frac{2}{p}}d\mu(s)<\infty$$

geçerli olsun. Bu durumda $H_\mu^t\in B(A^p)$ geçerlidir ve operatör normu için

$$\left\|H_\mu^t\right\|_{A^p}=\int_0^1 s^{-\frac{2}{p}}d\mu(s)$$

geçerlidir.

Buradan aşağıdaki sonuçlar türetilir.

**Teorem 3.2.40($A^p$ üzerinde Quasi Hölder matrisleri):** $2<p<\infty$ olsun. Bu durumda $\alpha>0$ olmak üzere her hangi bir $a\in\mathbb{R}$ için aşağıdaki geçerlidir.

**(i)** $(H^\alpha)^t\in B(A^p)$

**(ii)** $\sigma\left((H^\alpha)^t\right)=\left\{\frac{1}{\lambda^\alpha}:\operatorname{Re}\lambda\geq 1-\frac{2}{p}\right\}\cup\{0\}$

**(iii)** $\left\{\frac{1}{\lambda^\alpha}:\operatorname{Re}\lambda>1-\frac{2}{p}\right\}\subset\sigma\left((H^\alpha)^t\right)$

**(iv)** $\left\|(H^\alpha)^t\right\|_{A^p}=\left(\frac{p}{p-2}\right)^\alpha$

Transpoze Cesàro-matrisleri için aşağıdaki sonuç geçerlidir.

**Teorem 3.2.41($A^p$ üzerinde Quasi Cesàro matrisleri):** $2 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere her hangi bir $a \in \mathbb{R}$ için;

(i) $C_\alpha^t \in B(A^p)$

(ii) $\sigma(C_\alpha^t) = \left\{ \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} : \operatorname{Re}\lambda \geq 1 - \dfrac{2}{p} \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\left\{ \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} : \operatorname{Re}\lambda > 1 - \dfrac{2}{p} \right\} \subset \sigma_p(C_\alpha^t)$

(iv) $\|C_\alpha^t\|_{A^p} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(1-\dfrac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\lambda+1-\dfrac{2}{p}\right)}$

geçerlidir.

Not 2.5.16 nın genelleşmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 3.2.42($A^p$ üzerinde Quasi Gamma matrisleri):** $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ ve $a > \dfrac{2}{p}$ olmak üzere $\alpha, a \in \mathbb{R}$ için;

(i) $(\Gamma_a^\alpha)^t \in B(A^p)$

(ii) $\sigma\left((\Gamma_a^\alpha)^t\right) = \left\{ \left(\dfrac{a}{\lambda+a-1}\right)^\alpha : \operatorname{Re}\lambda \geq 1 - \dfrac{2}{p} \right\} \cup \{0\}$

(iii) $\left\{ \left(\dfrac{a}{\lambda+a-1}\right)^\alpha : \operatorname{Re}\lambda > 1 - \dfrac{2}{p} \right\} \subset \sigma_p\left((\Gamma_a^\alpha)^t\right)$

(iv) $\left\|(\Gamma_a^\alpha)^t\right\|_{A^p} = \left(\dfrac{ap}{ap-2}\right)^\alpha$

geçerlidir.

Son olarak transpoze Euler matrisleri için aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 3.2.43($A^p$ üzerinde Quasi Euler matrisleri):** $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\alpha \in (0,1)$ için;

(i) $E^t(\alpha) \in B(A^p)$

(ii) $\sigma(E^t(\alpha)) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \alpha^{-\frac{2}{p}} \right\}$

(iii) $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \alpha^{-\frac{2}{p}} \right\} \setminus \{0\} \subset \sigma_p(E^t(\alpha))$

(iv) $\|E^t(\alpha)\|_{A^p} = \alpha^{-\frac{2}{p}}$

geçerlidir.

## KAYNAKLAR

# References


[1] K.F. Andersen. *Cesàro averaging operators on Hardy spaces.* Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A. **126**,(1996), 617-624.

[2] R. Bellman, *A note on a theorem of Hardy on Fourier constants*, Bull. Amer. Soc. **50** (1944), 741-744.

[3] E. Berkson and H. Porta, *Semigroups af analytic functions and composition operators*, Michigan Math. J. **25** (1978), 101-115.

[4] D. W. Body, *The spectrum of the Cesàro operator*, Acta Sci. Math., **29** (1968), 31-34

[5] D. M. Boyd. *Composition operators on the Bergman space.* Colloq. Math. **34** (1975), 127-136.

[6] H. Brezis. *Analyse Fonctionelle Masson*, Paris, 1987.

[7] A. L. Brown and A. Page, *Elements of functional analysis*, New York Cincinnati Toronto Melbourne, 1970.

[8] P.R. Brown, A. Halmos and A. L. Shields. *Cesàro operators.* Acta Sci. Math. **26**(1965), 125-137.

[9] T. Carleman, *Über die Approximation analytischer Functionen durch Aggregate vorgegebener Potenzen*, Ark. Mat. (1922), no. 9.

[10] Frank P. Cass and B. E. Rhoades, *Mercerian theorems via spectral theory*, Pacific J. Math., **73** (1977), 63-71

[11] E. T. Copson, *Note on series of positive terms*, J. London Math. Soc .**2** (1927), 9-12.

[12] C. C. Cowen, *Iteration and the solution of fonctionel equations for functions analytic in the unit disc*, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1981),69-95.

[13] C. C. Cowen, *Subnormality of the Cesàro operator an a semigroup of composition operators*, Indiana Univ. Math. J. **33**, (1984), 305-318.

[14] J. A. Deddens. *Analytic Teoplitz and composition operators.* Canad. J. Math. **24** (1972), 859-865.

[15] J. A. Deddens and R. C. Roan, *Composition operators for a class of weighted Hilbert spaces*, Preprint.

[16] N. Dunford and J. Schwartz. *Linear Operators*, volume I. Interscience Publishers, New York-London, 1958.

[17] P. L. Duren,.B. W. Romberg and A. L. Shields, *Linear functionals on $H^p$ spaces with* $0 < p < 1$ ,J. Reine Angew. Math. **238** (1969), 32-60.

[18] P. L. Duren. *Theory of $H^p$ spaces.* Academic Press, New York, 1970.

[19] I. Fischer, W. Lieb. *Ausgewählte Kapitel aus der Functionentheorie.* Vieweg, Braunschweig, 1988.

[20] W. H. J. Fuchs, *A theorem on finite differences with an application to the theory of Hausdorff summability*, Proc. Cambiridge Philos. Soc. **40** (1944), 188-196.

[21] H. L. Garabedian, E. Hille and H. S. Wall, *Formulation of the Hausdorff inclusion problem*, Duke Math. J., **8** (1941), 193-213.

[22] *M. Gonzales, The finite spektrum of The Cesàro operator in $l^p$ ($1 < p < \infty$)* , Arch. Math. **44** (1985), 355-358.

[23] G. H. Hardy, *Note on a theorem of Hilbert*, Math. Z. **6** (1920), 843-847.

[24] G. H. Hardy, *Notes on some points in the integral calculus LXVI*, Messenger of Math. Z. **58** (1929), 50-52.

[25] G. H. Hardy. *An inequality for Hausdorff means.* J. London Math. Soc. **18** (1943), 46-50.

[26] G. H. Hardy. *Divergent Series.* Clarendon Press, Oxford, 1949.

[27] G. H. Hardy, J. E. Littewood and G. Polya, *Inequalities*, (University Press, Cambridge, 1952).

[28] F. Hausdorff. *Summationsmethoden und Momentfolgen* I. Math. Z. **9** (1921), 74-109.

[29] K. Hoffman, *Banach spaces of analiytic functions,* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962).

[30] E. Hille and R. S. Philips. *Functional Analysis and Semigroups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publications, New-York, 1957.

[31] W. Hirzebruch, F. Scharlau. *Einführung in die Functionalanalysis.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971.

[32] A. Jakimovsky, B. E. Rhoades and J. Tzimbalario. *Hausdorff matrices as bounded operators aver $\ell^p$.* Math. Z. **138** (1974), 173-181.

[33] W.A. Hurwitz and L. L. Silverman, *On the consistency and equivalence of certain definitions of summability*, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), 1-20.

[34] H. Jarchow. *Some functional analytic properties of composition operators.* Quaestiones Mathematicae **18** (1995), 229-256.

[35] H. Kamowitz. *The spectra of composition operators on $H^p$.* J. Func. Anal. **18** (1975), 132-150.

[36] T. Kato. *Pertubation Theory for Linear Operators.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2.th edition, 1976.

[37] T. Kawata, *Notes on Fourier series XII, On Fourier constants*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 218-222.

[38] K. Knopp. *Theorie und Anwendung der unundlichen Reihen.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1964.

[39] T. L. Kriete and D. Trutt, *The Cesàro operator in $l^2$ is Subnormal,* Amer. J. Math. **93** (1971), 215-225.

[40] E. Landau, *A note on a theorem concerning series of positive terms*, J. London Math. Soc. **1** (1926), 38-39.

[41] G. M. Leibowitz. *Spectra of discrete Cesàro operators.* Tamkang J. Math. **3** (1972), 123-132.

[42] G. M. Leibowitz. *Discrete Hausdorff transformations.* Proc. Amer. Math. Soc. **38**, (1973), 541-544.

[43] I. J. Maddox, *Elemens of Fonctional Analysis*, Cambridge University Press, 1970,1988.

[44] I. J. Maddox and A. W. Wickstead, *Spectra of Cesàro and Hölder operators.* Indag. Mathem. N. S. **1**,(1990), 77-84.

[45] J. Miao. *The Cesàro operator is bounded on $H^p$ for* $0 < p < 1$. Proc. Amer Math. Soc. **116** (1992), 1017-1019.

[46] D. J. Newman, *Pseudo-uniform convexity in $H^1$* , Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963) , 676-679.

[47] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differantial equations*, Berlin-Heidelberg-New York 1983.

[48] M. S. Ramanujan. *On the Sonnenschein methods of summability.* Proc. Japan Acad. **18** (1963), 432-434.

[49] J. B. Reade. *On the spektrum of the Cesàro operator.* Bull. London Mth. Soc. **17** (1985), 263-267.

[50] R. Remment. *Functionentheorie I.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York,1984.

[51] H. C. Rhaly, *Analytic averaging operators*, Dissertation, University of Virginia 1981.

[52] H. C. Rhaly, *Discrete generalized Cesàro operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 405-409.

[53] H. C. Rhaly, *An averaging operator on the Diriclet space*, J. Math. Anal. Appl. **98** (1984), 555-561.

[54] B. E. Rhoades, *Generalized Hausdorff matrices bounded on $l^p$ and c*, Acta. Sci. Math. **43** (1981), 333-345.

[55] B. E. Rhoades, *Some structural properties of Hausdorff matrices*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 9-12. MR 20 #7171.

[56] B. E. Rhoades, *Triangular summability methods and the boundary of the maximal group*, Math. Z. 105 (1968) 284-290. MR 37 #4461.

[57] B. E. Rhoades, *Type M for quasi-Hausdorff matrices*, Proc. Cambiridge Philos. Soc. **68** (1970), 601-604.

[58] B. E. Rhoades, *Spectra of some Hausdorff operators.* Acta Sci. Math. **32** (1971), 91-100.

[59] B. E. Rhoades,*Commutants of some Hausdorff matrices*, Pacific J. Math., **42** (1972), 715-719; **49** (1973) 617-619.

[60] B. E. Rhoades and N. K. Sharma. *Spectral results for Hausdorff matrices.* Acta Sci. Math. **44** (1982), 359-364.

[61] W. W. Rogosinski, *On Hausdorff's method of summability*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **38** (1942), 162-192.

[62] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1973.

[63] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, New York, 3.th edition 1987.

[64] Oliver Rudolf, *Hausdorff Operatoren auf BK-räumen und halpgruppen linearer operatoren*, (Thesis, Univ. of Hagen, 1998)

[65] J. V. Ryff, *Subordinate $H^p$ functions*, Duke Math. J. **33** (1966), 347-354.

[66] H. J. Schwartz, *Composition operators on $H^p$* , (Thesis, Univ. of Toledo, 1969)

[67] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Berlin–Heidelberg-New York 1993.

[68] N. K. Sharma, *Spectra of conservative matrices.* Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 515-518.

[69] N. K. Sharma, *Isolated points of the spectra of conservative matrices*, Proc. Amer. Math. Sos., **51** (1975), 1-5.

[70] N. K. Sharma, *Banach alcebras of conservative Hausdorff matrices*, Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 1035-1038.

[71] A. G. Siskakis. *Semigroups of composition operators and the Cesàro operator on $H^p$.*, Dissertation, Universitiy of Illinois 1985.

[72] A. G. Siskakis. *Composition semigroups and the Cesàro operator on $H^p$.* J. London Math. Soc. (2) **36**(1987), 153-164.

[73] A. G. Siskakis. *Semigroups of composition operators in Bergman spaces.* Bull. Austral. Math. **35** (1987), 397-406.

[74] A. G. Siskakis. *On the Bergman spaces norm of the Cesàro operators.* Arch. Math. **67** (1996), 312-318.

[75] A. G. Siskakis. *Semigroups of composition operators on spaces of analytic Functions*, a review. Studies on composition Operators, (Laramie WY, 1996), Contenporary Mathematics, Amer. Math. Soc. **213** (1998), 229-252.

[76] K. Stempak. *Cesàro averaging operators.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. **124**, 121-126 (1994).

[77] A. Taylor and D. Lay. *Introduction to fonctional Analysis.* Wiley, New York, 1980.

[78] Robert B. Wenger. *The fine spectra of The Hölder summability operators.* Indian J. Pure Appl. Math. **6** (1975), 695-712.

[79] A. Wilansky and K. Zeller, *Banach algebra and summability*, Illinois J. Math. **2** (1958), 378-385; erratum, ibid. **3** (1959), 468.

[80] A. Wilansky, *Functional Analysis*, Blaisdell (New York-Toronto-London, 1964).

[81] A. Wilansky. *Summability through Functional Analysis*, volume 85 of Notas de Matemática. North Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1984.

[82] K. Zhu. *Operator Theory on Function Spaces.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[83] A. Zygmund. *Trigonometric Series.* I, II. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968.

# ÖZGEÇMİŞ

Nuh DURNA 1980 yılında Sivas'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sivas'da tamamladı. 1998 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandı ve 2002 yılında mezun oldu. 2002 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Yüksek Lisans sınavını kazanarak, Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl Sivas Atatürk Anadolu Teknik Lise ve Endüstri Meslek Lisesine Matemetik Öğretmeni olarak atandı ve halen bu görevine devam etmektedir.