ASAL GAMMA HALKASININ CENTROİDİ ÜZERİNE

HASRET YAZARLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2005

T.C.

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ASAL GAMMA HALKASININ CENTROİDİ ÜZERİNE

HASRET YAZARLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2005

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Mustafa Korkmaz

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Öztürk

Üye: Yrd. Doç. Dr. Metin Akbaş

Üye: ....

Üye: ....

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

30/06/2005

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Rauf AMIROV

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 01.01.1994 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan " Yüksek Lisans ve Doktora Tez Yazım Klavuzu " adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

DIŞ KAPAK

İÇ KAPAK

İÇİNDEKİLER..1

ÖZET..2

SUMMARY..3

TEŞEKKÜR..4

1. BÖLÜM

ÖNBİLGİLER..5-12

2. BÖLÜM

ASAL VE YARI-ASAL Γ-HALKALARININ CENTROİDİ ÜZERİNE

2.1. Asal Γ-Halkalarının Centroidi Üzerine..................13-19

2.2. Yarı-Asal Γ-Halkalarının Genelleştirilmiş Centroidinin Regülerliği......................................20-24

3. BÖLÜM

YARI-ASAL Γ-HALKALARININ GENELLEŞTİRİLMİŞ CENTROİDİ ÜZERİNDE MODÜLLER.........................25-35

4. KAYNAKLAR..36-37

5. ÖZGEÇMİŞ..38

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ASAL GAMMA HALKASININ CENTROİDİ ÜZERİNE

Hasret YAZARLI
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

Tezimizin birinci bölümünde, gamma halkası ile ilgili genel bilgiler verilmiş ve temel olarak ele aldığımız problemler ifade edilmiştir.

İkinci bölümde ise, bu konuda önceden yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde, yarı-asal gamma halkalarının genelleştirilmiş centroidi üzerinde modüller çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Modül, Gamma Halkası, Yarı-Asal Gamma Halkası, Genelleştirilmiş Centroid, (Regüler, Asal, Quotient) Gamma Halkası

SUMMARY

MsC Thesis

ON THE CENTROID OF THE PRIME GAMMA RING

Hasret YAZARLI

Cumhuriyet University

Graduate school of Natural

and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

In the first chapter of our thesis we gave some basic concepts those are used about gamma rings and stated the problems.

In chapter two, we gave the summaries of the works those had been done.

In chapter three, module has been studied on generalized centroid of semi-prime gamma rings.

Key Words: Module, Gamma Ring, Semi-Prime Gamma Ring, Generalized Centroid, (Regular, Prime, Quotient) Gamma-Ring.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve değerli yardımlarını esirgemeyen hocam Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hasret YAZARLI

1. BÖLÜM

ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan kavramlar ve tezde elde edilen sonuçlar bir sıra içerisinde verilecektir:

Tanım 1.1 : M ve Γ toplamsal komütatif gruplar olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlıyan $(.,.,.) : Mx\Gamma xM \rightarrow M$, $(a, \alpha, b) \rightarrow a\alpha b$ dönüşümü varsa o zaman (M, Γ) ikilisine bir M Γ-halkası (Barnes anlamında) denir: $\forall a, b, c \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$,

(i) $a\alpha b \in M$

(ii) $(a+b)\,\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$

$a\,(\alpha+\beta)\,b = a\alpha b + a\beta b$

$a\alpha\,(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

(iii) $(a\alpha b)\,\beta c = a\alpha\,(b\beta c)$

Tanım 1.2 : M bir Γ-halkası ve U, M nin bir alt kümesi olsun. U, M nin bir toplamsal alt grubu ve $U\Gamma M \subset U$ $(M\Gamma U \subset U)$ oluyorsa U ya M nin bir sağ (sol) ideali denir. U hem sağ hemde sol ideal ise U ya M nin ideali denir.

M $\Gamma-$halkasının merkezi, $Z = \{a \in M|\ a\alpha m = m\alpha a,\ \forall m \in M, \forall \alpha \in \Gamma\}$ biçiminde tanımlanır.

Bir $a \in M$ için a ile üretilen esas ideal a yı kapsayan M nin bütün ideallerinin arakesitidir. Bu ideal $\langle a \rangle$ ile gösterilir ve

$$\langle a \rangle = \left\{ na + x\beta a + a\gamma y + \sum u\sigma a\delta v \middle| n \in N^{+}; x, y, u, v \in M, \beta, \gamma, \delta, \sigma \in \Gamma \right\}$$

dır.

Eğer U; M nin bir sağ ideali, V; M nin bir sol ideali ve $\emptyset \neq S \subset M$ ise o zaman $S\Gamma U = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \alpha_i u_i \middle| \; s_i \in S, \; u_i \in U, \; \alpha_i \in \Gamma, \; n \in I \right\}$, M nin sağ ideali ($V\Gamma S$, M nin sol ideali) ve $U\Gamma V$, M nin bir idealidir.

Tanım 1.3: M bir Γ-halkası, U, V ve P; M nin idealleri olsun. Eğer $U\Gamma V \subseteq P$ olduğunda $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ oluyorsa P ye M nin asal ideali denir.

Teorem 1.4 : (Barnes, 1966) Bir M Γ-halkasının bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in M$ olmak üzere; $\langle a \rangle \Gamma \langle b \rangle \subseteq P$ olduğunda $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

Tanım 1.5 : $\langle 0 \rangle$ ideali asal olan bir Γ-halkasına, asal Γ-halkası denir.

Teorem 1.6 : (Kyuno, 1968) M bir Γ-halkası ise aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M bir asal Γ-halkasıdır.

(ii) Eğer a,$b \in M$ ve $a\Gamma M\Gamma b = \langle 0 \rangle$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

(iii) Eğer M nin $\langle a \rangle$ ve $\langle b \rangle$ esas idealleri $\langle a \rangle \Gamma \langle b \rangle = \langle 0 \rangle$ olacak biçimde ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

(iv) Eğer M nin U ve V sağ (sol) idealleri $U\Gamma V = \langle 0 \rangle$ olacak biçimde ise $U = \langle 0 \rangle$ veya $V = \langle 0 \rangle$ dır.

Tanım 1.7 : M bir Γ-halkası olsun. Eğer $M\Gamma M \neq \langle 0 \rangle$ ve M nin $\langle 0 \rangle$ ve M den başka ideali yoksa M ye basittir, denir.

M Γ-halkası sağ idealleri için azalan (artan) sahip olduğunda M, $\min -r$ koşulu ($\max -r$ koşulu) na sahiptir, şeklinde kısaltılır. M Γ-halkası üzerinde $\min -l$ koşulu yada $\max -l$ koşulu terimleri benzer şekilde tanımlanır.

M bir Γ-halkası ve F, $\Gamma \times M$ ile üretilen serbest grup olsun. O zaman

$$A = \left\{ \sum_i n_i (\gamma_i, x_i) \in F \middle| a \in M \Rightarrow \sum_i n_i a \gamma_i x_i = 0 \right\}$$

F nin bir altgrubudur. $R = F/A$ çarpım grubu olsun ve $(\gamma, x) + A$ elemanları $[\gamma, x]$ ile gösterilsin. R nin her elemanı $\sum_i [\gamma_i, x_i]$ sonlu toplamı şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca $\forall x, y \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $[\alpha, x] + [\alpha, y] = [\alpha, x + y]$ ve $[\alpha, x] + [\beta, x] = [\alpha + \beta, x]$ dir.R üzerinde çarpma işlemi;

$$\sum_i [\alpha_i, x_i] \sum_j [\beta_j, y_j] = \sum_{i,j} [\alpha_i, x_i \beta_j y_j]$$

biçiminde tanımlıyoruz. Bu işlemlerle R bir halkadır. Eğer $M \times R$ den M ye

$$a \sum_i [\gamma_i, x_i] = \sum_i a \gamma_i x_i, \forall a \in M, \forall \sum_i [\gamma_i, x_i] \in R$$

biçiminde işlem tanımlanırsa o zaman M bir sağ R-modüldür ve R ye M nin sağ operatör halkası denir. Benzer şekilde M nin L sol operatör halkasıda tanımlanabilir.

Tanım 1.8 : M Γ-halkası aşağıdaki koşulları sağlarsa M sağ (sol) ilkel (primitive) denir:

(i) M nin her sağ (sol) operatör halkası aynı zamanda bir sağ (sol) ilkel (primitive) halkadır.

(ii) $M\Gamma x = 0$ ($x\Gamma M = 0$) iken $x = 0$ dır.

M Γ-halkası hem sağ hemde sol ilke (primitive) ise M ye iki-yanlı ilkel (primitive) (yada basitçe ilkel (primitive)) denir.

Teorem 1.9 : (Kyuno, 1982) Eğer M Γ-halkası minimal sol (sağ) ideale sahipse o zaman M ilkel (primitive) dir ancak ve ancak M asaldır.

Teorem 1.10. : (Kyuno, 1982) min $-l$ koşuluna sahip bir M Γ-halkası için aşağıdakiler denktir:

(i) M asaldır,

(ii) M ilkel (primitive) dir,

(iii) M basittir.

Teorem 1.11 : (Kyuno, 1982) Eğer M basit Γ-halkası minimal sol (sağ) ideallere sahipse o zaman M minimal sol (sağ) ideallerin bir direkt toplamıdır.

Tanım 1.12 : M bir Γ-halkası ve Q M nin bir ideali olsun. Eğer M nin herhangi U ideali için $U\Gamma U \subseteq Q$ olduğunda $U \subseteq Q$ oluyorsa Q ya M nin bir yarı-asal ideali denir.

Teorem 1.13 : **(Kyuno, 1978)** Eğer Q, M Γ-halkasının bir ideali ise aşağıdaki koşullar denktir:

(i) Q yarı-asal idealdir.

(ii) Eğer $a \in M$ için $a\Gamma M\Gamma a \subseteq Q$ olacak biçimde ise $a \in Q$ dır.

(iii) Eğer M nin $\langle a \rangle$esas ideali $\langle a \rangle \Gamma \langle a \rangle \subseteq Q$ olacak biçimde ise $a \in Q$ dır.

(iv) Eğer M nin U sağ (sol) ideali $U\Gamma U \subseteq Q$ olacak biçimde ise $U \subseteq Q$ dır.

Tanım 1.14 : M bir Γ-halkası olsun. Eğer, $\forall x \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için $n\beta x = 0$ olan bir en küçük pozitif tamsayı varsa o zaman M nin karakteristiği n dir, denir ve $charM = n$ ile gösterilir.

Tanım 1.15 : M bir Γ-halkası olsun. Bir n pozitif tamsayısı ve her $x \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için $n\beta x = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa o zaman M ye $n-torsion$ $free$ denir.

Tanım 1.16 : $\langle 0 \rangle$ ideali yarı-asal olan M Γ-halkasına yarı-asaldır, denir.

Sonuç 1.17 : **(Kyuno, 1978)** Bir M Γ-halkasının yarı-asal olması için gerek ve yeter koşul $a\Gamma M\Gamma a = \langle 0 \rangle$ olduğunda $a = 0$ olmasıdır.

Teorem 1.18 : (Kyuno, 1981) M, $\min -r$ koşuluna sahip yarı-asal Γ-halkası ve $I_1, I_2, ..., I_m, J_1, J_2, ..., J_n$ ler minimal sağ idealler olmak üzere $M = I_1 \oplus I_2 \oplus ... \oplus I_m = J_1 \oplus J_2 \oplus ... \oplus J_n$ olsun. O zaman $m = n$ dir.

Teorem 1.18 deki $m = n$ tamsayılarına $\min -r$ koşuluna sahip M yarı-asal Γ-halkasının sağ boyutu denir ve $\dim(M_R)$ ile gösterilir. Benzer biçimde bir Γ-halkasının sol boyutu da tanımlanabilir. Eğer M basitse yarı-asaldır.

Herhangi bir G toplamsal grubu için G üzerindeki bütün matrislerin toplamsal grubu $G_{m,n}$ ile gösterilsin. M bir Γ-halkası olsun. M üzerindeki $m \times n$ tipinde matrislerin kümesi $M_{m,n}$ ile ve Γ üzerindeki $n \times m$ tipinde matrislerin kümesi $\Gamma_{n,m}$ ile gösterilsin. $(a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{m,n}$ ve $(\gamma_{ij}) \in \Gamma_{n,m}$ için, $c_{ij} = \sum_p \sum_q a_{ip}\gamma_{pq}b_{qj}$ olmak üzere, $(a_{ij})(\gamma_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij})$ biçiminde tanımlanır. Böylece $M_{m,n}$ bir $\Gamma_{n,m}$-halkasıdır.

Teorem 1.19 : (Kyuno,1982) M, $\min -r$ ve $\min -l$ koşullarına sahip basit Γ-halkası ve $\kappa := \{\gamma \in \Gamma | M\gamma M = 0\}$ olmak üzere, $\Gamma_0 = \Gamma_{/\kappa}$ olsun. $D_{n,m}$; D bölüm halkası üzerindeki bütün $n \times m$ tipindeki matrislerin toplamsal abelian grubu, Γ'; D bölüm halkası üzerinde bütün $m \times n$ tipinde matrislerin toplamsal abelian grubunun sıfırdan farklı altgrubu, $m = \dim(M_L)$ ve $n = \dim(M_R)$ olmak üzere, M Γ_0-halkası, $D_{n,m}$ Γ'-halkasına izomorfiktir.

Tanım 1.20 : M bir Γ-halkası olsun. U , M nin bir alt kümesi olmak üzere,

$$Ann_l U = \{a \in M \mid \ a\Gamma U = \langle 0 \rangle\}$$

kümesine U nun sol sıfırlayanı denir.

Benzer biçimde $Ann_r U$, sağ sıfırlayanı da tanımlanabilir.

Tanım 1.21 : V, M Γ-halkasının bir ideali olsun. V nin M içindeki herhangi sıfırdan farklı ideal ile arakesiti sıfırdan farklı ise V ye M nin essential ideali denir.

Lemma 1.22 : (**Soytürk,1994**) M bir yarı-asal Γ-halkası ve U, M nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. O zaman $Ann_l U = Ann_r U$ dur ve bu durumda $Ann_l U = Ann_r U = Ann U$ yazılır.

Lemma 1.23 : (**Soytürk,1994**) M bir yarı-asal $\Gamma-$halkası ve U, M nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu durumda;

(i) $Ann U$, M nin bir idealidir.

(ii) $U \cap Ann U = \langle 0 \rangle$ dır.

Tanım 1.24 : M bir Γ-halkası ve A toplamsal değişmeli grup olsun. $\cdot$: $M \times \Gamma \times A \to A$, $(m, \gamma, a) \mapsto m\gamma a$ çarpma işlemi tanımlansın. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa A ya bir sol M-modül denir:

$(i)\, \forall m \in M, \forall a, b \in A, \forall \gamma \in \Gamma \ m\gamma\,(a + b) = m\gamma a + m\gamma b$

$(ii)\, \forall m_1, m_2 \in M, \forall a \in A, \forall \gamma \in \Gamma \ (m_1 + m_2)\,\gamma a = m_1\gamma a + m_2\gamma a$

$(iii)\, \forall m_1, m_2 \in M, \forall a \in A, \forall \gamma, \beta \in \Gamma \ m_1\gamma\,(m_2\beta a) = (m_1\gamma m_2)\,\beta a$

Benzer biçimde sağ M-modül tanımlanabilir.

Tanım 1.25 : M bir Γ-halkası, A ve B M-modüller olsun. $f : A \to B$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa f ye sol M-modül homomorfizm denir: $\forall a_1, a_2 \in A$, $\forall m \in M$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

(i) $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

(ii) $f(m\gamma a_1) = m\gamma f(a_1)$

Benzer biçimde sağ M-modül homomorfizmi de tanımlanabilir.

Tanım 1.26 : A, M Γ-halkasının bir modülü olsun. Eğer A aşağıdaki özelliği sağlarsa o zaman A ya projektif modül denir.

A_1, A_2; keyfi M-modüller olmak üzere; $f : A_1 \to A_2$ epimorfizm olsun. $g : A \to A_2$ modül homomorfizmi için $fh = g$ olacak şekilde $h : A \to A_1$ modül homomorfizmi vardır.

Lemma 1.27 : M Γ-halkası ve P_i $(i \in I)$ M-modüller olsun. Buna göre; $\sum\limits_{i \in I} P_i$ direkt toplamı projektiftir $\Leftrightarrow$ $\forall i \in I$, P_i ler projektiftir.

Uyarı 1.28 : M birimli Γ-halkası ve A M-modül olsun. Buna göre;

(i) $B = \{1_M \gamma a |\ a \in A$ ve $\gamma \in \Gamma\}$ ve $C = \{a \in A |\ 1_M \gamma a = 0, \gamma \in \Gamma\}$ olmak üzere A nın B unitary ve C $(M\Gamma C = \langle 0 \rangle)$ alt modülleri için $A = B \oplus C$ dir.

(ii) A_1, M Γ-halkasında başka bir modül olmak üzere; $A_1 = B_1 \oplus C_1$ (B_1 unitary, $M\Gamma C_1 = \langle 0 \rangle$) olsun. Eğer $f : A \to A_1$ homomorfizm ise $f(B) \subset B_1$ ve $f(C) \subset C_1$ dir.

(iii) (ii) deki homomorfizma epimorfizm (izomorfizm) ise o zaman $f_{|B} : B \to B_1$ ve $f_{|C} : C \to C_1$ epimorfizm (izomorfizm) dır.

(iv) Tanım 1.26 daki özellik şuna denktir: Keyfi bir $\Phi : A' \to A$ epimorfizmi için $A' = Ker\Phi \oplus A''$ ayrışımı vardır.

Tanım 1.29 : A, M Γ-halkasının bir modülü olsun. Eğer A aşağıdaki özelliği sağlarsa o zaman A ya injektif modül denir.

A_1, A_2; keyfi M-modüller olmak üzere; $f : A_1 \longrightarrow A_2$ monomorfizm olsun. $g : A_1 \longrightarrow A$ M-modül homomorfizmi için $hf = g$ olacak biçimde $h : A_2 \longrightarrow A$ M-modül homorfizmi vardır.

Uyarı 1.30 : Uyarı 1.28 (iii) den Tanım 1.29 daki özellik şuna denktir: Keyfi bir $\Phi : A \rightarrow A'$ monomorfizmi için $A' = \operatorname{Im}\Phi \oplus A''$ ayrışımı vardır.

Lemma 1.31 : M Γ-halkası ve P_i $(i \in I)$ M-modülleri olsun. Buna göre; $\prod\limits_{i \in I} P_i$ direkt çarpımı injektiftir $\Leftrightarrow$ $\forall i \in I$, P_i ler injektiftir.

Şimdi tezde elde edilen sonuçları bir sıra içerisinde verelim:

(1) M bir yarı-asal Γ-halkası ve Q_r, M nin quotient halkası olsun. Eğer $r, s, r_i, s_i \in Q_r$ olmak üzere, $\lim\limits_I r_i = r$, $\lim\limits_I s_i = s$ ise $\lim\limits_I (r_i \pm s_i) = r \pm s$ ve $\lim\limits_I (r_i \alpha s_i) = r \alpha s$,$\forall\ \alpha \in \Gamma$ dır.

(2) A C_Γ-modülü üzerinde aşağıdakiler denktir:

(i) A modülünün elemanlarının herhangi yönlü kümesi birden fazla limite sahip değildir.

(ii) Herhangi tek elemanlı küme kapalıdır.

(iii) $\{0_A\}$ altmodülü kapalıdır.

(iv) A non-singüler modüldür.

(3) Q_r ve $E(Q_r, \Gamma)$ modülleri non-singülerdir.

(4) Eğer T, Q_r nin althalkası ise onun kapanışı $\widehat{T}$ da bir althalkadır.

(5) T, Q_r nin althalkası ve U, T nin bir ideali olsun. Bu durumda $\widehat{U}$, $\widehat{T}$ nın bir idealidir.

(6) Q_r ve $E(Q_r, \Gamma)$ modülleri tamdır.

(7) Q ve C_Γ halkaları Q_r de kapalıdır. Bu yüzden C_Γ üzerinde tam modüllerdir.

(8) C_Γ üzerinde herhangi tam non-singüler modül injektiftir ve tersine C_Γ üzerinde herhangi injektif modül tamdır.

(9) Bir yarı-asal Γ-halkasının genelleştirilmiş centroidi bir regüler self-injektif Γ-halkasıdır.

(10) E, C_Γ daki idempotentlerin kümesi ve $Q(E)$, E nin quotient Γ-halkası olsun. O zaman $Q(E) = E$ dir.

2. BÖLÜM

ASAL VE YARI-ASAL Γ-HALKALARININ CENTROİDİ ÜZERİNE

Bu bölümde tezimizde elde edilen sonuçları temel alan konularla ilgili daha önce yapılan çalışmaların özeti verilecektir.

2.1 Asal Γ-Halkalarının Centroidi Üzerine (Öztürk ve Jun,2000)

Bu çalışmada asal Γ-halkalarının centroidi tanımlanmıştır.

M bir asal Γ-halkası ve $M\Gamma M \neq M$ olsun.

$\mathcal{M} := \{ (U, f) \mid U\,(\neq \langle 0 \rangle)$ M nin ideali ve $f : U \to M$ sağ M-modül homomorfizm$\}$

kümesini alalım. $\mathcal{M}$ üzerinde $\sim$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın :

"$(U, f) \sim (V, g)$ dır $\Leftrightarrow \exists W\,(\neq \langle 0 \rangle) \subset U \cap V$ vardır öyle ki W de $f = g$ dir."

M asal Γ-halkası olduğundan $\langle 0 \rangle \neq W$ ideali bulmak mümkündür. $\sim$ bağıntısı $\mathcal{M}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Böylece $\mathcal{M}$ denklik sınıflarına ayrılır.

$$\widehat{f} := \{ g : V \to M \mid (U, f) \sim (V, g) \}$$

olmak üzere denklik sınıfları $Cl\,(U, f) = \widehat{f}$ ile, bütün denklik sınıflarının kümesi Q ile gösterilsin.

Q üzerinde $+$ toplama işlemi, $f+g : U \cap V \to M$ bir sağ M-modül homomorfizması olmak üzere;

$$\widehat{f}+\widehat{g} := Cl\,(U,f) + Cl\,(V,g) = Cl(U \cap V, f+g)$$

biçiminde tanımlansın. Bu işlemle Q bir toplamsal değişmeli gruptur.

$M\Gamma M \neq M$ ve M bir asal Γ-halkası olduğundan $(\langle 0\rangle \neq)\, M\Gamma M$, M nin idealidir. $1_{M\Gamma} : M\Gamma M \to M$ birimsel M-modül homomorfizmini alalım. $\forall 0 \neq \beta \in \Gamma$ için $M\beta M \neq \langle 0\rangle$ dır. Bu yüzden $1_{M\beta} : M\beta M \to M$ sıfırdan farklı M-modül homomorfizmidir.

$$\mathcal{N} := \{\,(\,M\beta M, 1_{M\beta}\,)\,|\, 0 \neq \beta \in \Gamma\}$$

kümesi ve bu küme üzerinde $\approx$ bağıntısı aşağıdaki biçimde tanımlansın :

"$(M\beta M, 1_{M\beta}) \approx (M\gamma M, 1_{M\gamma})$ dır $\Leftrightarrow \exists W := M\alpha M\,(\neq \langle 0\rangle) \subset M\beta M \cap M\gamma M$ vardır öyle ki W de $1_{M\beta} = 1_{M\gamma}$ dır"

$\approx$, $\mathcal{N}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Böylece $\mathcal{N}$ denklik sınıflarına ayrılır. $(M\beta M, 1_{M\beta})$ yı kapsayan denklik sınıfı $Cl\,(M\beta M, 1_{M\beta}) = \widehat{\beta}$ ile ve $\approx$ ya göre $\mathcal{N}$ deki bütün denklik sınıflarının kümesi $\widehat{\Gamma}$ ile gösterilir.

$$\widehat{\beta} := \{\,1_{M\gamma} : M\gamma M \to M |\, (M\beta M, 1_{M\beta}) \approx (M\gamma M, 1_{M\gamma})\}$$

ve

$$\widehat{\Gamma} := \left\{\widehat{\beta}\,\middle|\, 0 \neq \beta \in \Gamma\right\} \cup \left\{\widehat{0}\right\}$$

dır. Burada $0 : M\Gamma M \to M$, $x \mapsto 0$ dönüşümü olmak üzere; $\widehat{0} := Cl\,(M\Gamma M, 0)$ şeklindeki denklik sınıfıdır.

$\widehat{\Gamma}$ üzerinde $+$ toplama işlemi, $\forall 0 \neq \beta, 0 \neq \gamma \in \Gamma$ için;

$$\widehat{\beta} + \widehat{\gamma} := Cl(M\beta M, 1_{M\beta}) + Cl(M\gamma M, 1_{M\gamma}) = Cl\,(M\beta M \cap M\gamma M, 1_{M\beta} + 1_{M\gamma})$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\left(\widehat{\Gamma}, +\right)$ toplamsal değişmeli gruptur.

Buna göre, $(.,.,.) : Q \times \Gamma \times Q \to Q$, $\left(\widehat{f}, \widehat{\beta}, \widehat{g}\right) \mapsto \widehat{f}\widehat{\beta}\widehat{g}$ dönüşümü tanımlansın.

$$V\Gamma M\beta M\Gamma U = \left\{ \sum v_i\gamma_i m_i\beta n_i\alpha_i u_i \middle|\ v_i \in V,\ u_i \in U,\ m_i, n_i \in M \text{ ve } \alpha_i, \gamma_i \in \Gamma \right\}$$

M nin bir ideali ve $f1_{M\beta}g : V\Gamma M\beta M\Gamma U \to M$,

$$(f1_{M\beta}g)\left(\sum v_i\gamma_i m_i\beta n_i\alpha_i u_i\right) = f\left(\sum g(v_i)\gamma_i m_i\beta n_i\alpha_i u_i\right)$$

dönüşümü bir sağ M-modül homomorfizması olmak üzere;

$$\widehat{f}\widehat{\beta}\widehat{g} = Cl(U,f)Cl(M\beta M, 1_{M\beta})Cl(V,g) = Cl(V\Gamma M\beta M\Gamma U, f1_{M\beta}g)$$

ile tanımlanır. Q bu işlemle birimli $\widehat{\Gamma}$-halkasıdır.

Her $0 \neq \beta \in \Gamma$ için $\varphi(\beta) = \widehat{\beta}$ ile tanımlı $\varphi : \Gamma \to \widehat{\Gamma}$ dönüşümü bir izomorfizmdir. Böylece Q Γ-halkası bir $\widehat{\Gamma}$-halkasıdır.

M nin sabit bir a elemanı ve herhangi $\gamma \in \Gamma$ için $\lambda_{a\gamma}(x) = a\gamma x$, $\forall x \in M$ ile tanımlı $\lambda_{a\gamma} : M \to M$ dönüşümünü düşünelim. $\lambda_{a\gamma}$ bir sağ M-modül homomorfizmidir. Bu durumda $\lambda_{a\gamma} \in Q$ dur.

Böylece $\Psi : M \to Q$, $\forall a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\Psi(\ a\ ) = \widehat{a} = Cl(\ M, \lambda_{a\gamma}\ )$ dönüşümü tanımlanabilir. Ψ bir monomorfizmdir. O halde M Q nun bir alt halkasıdır. Q ya M nin *quotient* Γ-halkası denir.

M herhangi bir Γ-halkası (Barnes anlamında) ve $E\,(M, \Gamma)$, M nin toplamsal grubunun endomorfizmlerinin kümesi olsun. $E\,(M, \Gamma) \subset Q$ bir Γ-halkasıdır.

$a \in M$, her $m \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $R_a : M \to M$, $R_a\,(m) = m\gamma a$ ve $L_a : M \to M$, $L_a\,(m) = a\gamma m$ dönüşümlerini tanımlayalım. $B\,(M, \Gamma)$, $a \in M$ için bütün R_a ve L_a lar tarafından üretilen $E\,(M, \Gamma)$ nın althalkası olsun.

Tanım 2.1.1 : $E\,(M, \Gamma)$ nın, $B\,(M, \Gamma)$ nın elemanları ile değişmeli olan elemanlarının kümesine M nin *centroidi* denir.

Kolaylık sağlamak için $\widehat{q} \in Q$ yerine q kullanacağız.

Lemma 2.1.2 : M bir asal Γ-halkası olsun. Herbir $0 \neq q \in Q$ için $q\,(U) \subset M$ olacak şekilde M nin $\langle 0 \rangle \neq U$ ideali vardır.

Lemma 2.1.3 : M bir asal Γ-halkası olsun. M nin Q quotient Γ-halkası asal Γ-halkasıdır.

Tanım 2.1.4 :

$$C_\Gamma := \{ g \in Q |\ g\gamma f = f\gamma g,\ \forall f \in Q,\ \gamma \in \Gamma \}$$

kümesine M Γ-halkasının *genişletilmiş centroidi* denir.

Lemma 2.1.5 : M asal Γ-halkası, C_Γ M nin genişletilmiş centroidi olsun. $0 \neq a_i$, $0 \neq b_i \in M$ için eğer $\sum a_i\gamma_i x\beta_i b_i = 0$, $\forall x \in M$ ve $\beta_i, \gamma_i \in \Gamma$ ise a_i ler (b_i ler) C_Γ üzerinde lineer bağımlıdır.

Sonuç 2.1.6 : M asal Γ-halkası, C_Γ M nin genişletilmiş centroidi olsun. Buna göre $a, b \in M$ için $a\gamma x\beta b = b\gamma x\beta a$, $\forall x \in M$ ve $\forall \beta, \gamma \in \Gamma$ ise o zaman $b = \lambda\alpha a, \forall\alpha \in \Gamma$ olacak biçimde $\exists\lambda \in C_\Gamma$ vardır.

Şimdi Γ-halkasında simetrik bi-türevin tanımını verelim:

M bir Γ-halkası olsun. $D(.,.) : M \times M \rightarrow M$ dönüşümü argümentlere göre toplamsal ve $\forall x, y \in M$, $D(x, y) = D(y, x)$ koşulunu sağlıyorsa bu dönüşüme simetrik bi-toplamsal dönüşüm denir. $d : M \rightarrow M$, $\forall x \in M$, $d(x) = D(x, x)$ ile tanımlanan dönüşüme $D(.,.)$ nin izi denir. Eğer $D(.,.)$ simetrik bi-toplamsal dönüşümü, herhangi $x, y, z \in M$, $\beta \in \Gamma$ için;

$$D(x\beta y, z) = D(x, z)\beta y + x\beta D(y, z)$$

koşulunu sağlıyorsa D ye simetrik bi-türev denir. $D(.,.)$ simetrik bi-toplamsal dönüşümünün izi, $\forall x, y \in M$,

$$d(x + y) = d(x) + d(y) + 2D(x, y)$$

bağıntısını sağlar ve çift fonksiyondur.

Lemma 2.1.7 : M $2-torsion\ free$ asal Γ-halkası, $D(\ .,.\ )$ M nin simetrik bi-türevi ve d, $D(\ .,.\ )$ nin izi olsun. Eğer $a \in M$ sabit olmak üzere; $\forall x \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$,

$$a\gamma d(x) = 0 \qquad (1)$$

ise $a = 0$ ya da $D = 0$ dır.

Lemma 2.1.8 : M $2-torsion\ free$ asal Γ-halkası, $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$ M nin simetrik bi-türevleri ve d_1 , d_2 $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$ nin izleri olsun. Eğer, $\forall x, y \in M$, $\gamma \in \Gamma$ ve $d_1 \neq 0$ için,

$$d_1(x)\gamma d_2(y) = d_2(x)\gamma d_1(y) \qquad (2)$$

ise C_Γ, M nin genişletilmiş centroidi olmak üzere; $d_2(x) = \lambda\alpha d_1(x), \forall\alpha \in \Gamma$ olacak biçimde $\exists\lambda \in C_\Gamma$ vardır. .

Teorem 2.1.9 : M $2-torsion\ free$ asal Γ-halkası, $D_1(.,.)$, $D_2(.,.)$, $D_3(.,.)$ ve $D_4(.,.)$ M nin simetrik bi-türevleri ve d_1, d_2, d_3, d_4 sırasıyla $D_1(.,.)$, $D_2(.,.)$, $D_3(.,.)$ ve $D_4(.,.)$ ün izleri olsun. Buna göre; $d_1 \neq 0 \neq d_4$ olmak üzere; $\forall x, y \in M$, $\forall\gamma \in \Gamma$

$$d_1(x)\gamma d_2(y) = d_3(x)\gamma d_4(y) \qquad (3)$$

ise o zaman C_Γ M nin genişletilmiş centroidi olmak üzere; $d_2(x) = \lambda\alpha d_4(x)$ ve $d_3(x) = \lambda\alpha d_1(x)$, $\forall\alpha \in \Gamma$ olacak biçimde $\exists\ \lambda \in C_\Gamma$ vardır.

Asal Gamma Halkalarının Centroidi Üzerine-II (Öztürk ve Jun, 2001)

Bu makalede Γ-cisim tanımlanmış ve bir M Γ-halkasının genişletilmiş centroidinin cisim olduğu ve bununla ilgili özellikler ispatlanmıştır.

Tanım 2.1.10 : M birimli bir Γ-halkası olsun. M nin bir u elemanı M de çarpımsal terse sahipse u ya tersinirdir, denir. Eğer M nin sıfırdan farklı her elemanı tersinirse M ye Γ-bölüm halkası (division ring) denir. Eğer M değişmeli Γ-bölüm halkası ise M Γ-halkasına Γ-cisim denir.

Lemma 2.1.11 : M asal Γ-halkasının genişletilmiş centroidi bir cisimdir.

Tanım 2.1.12 : M Γ-halkası, C_Γ M nin genişletilmiş centroidi olsun. $S := M\Gamma C_\Gamma$ ya M nin merkezi kapanışı denir.

Teorem 2.1.13 : C_Γ, M Γ-halkasının genişletilmiş centroidi olsun. Eğer a M nin sıfırdan farklı elemanı olmak üzere, her $x, y \in M$ ve $\gamma_1, \gamma_2\beta_1, \beta_2 \in \Gamma$ için $a\gamma_1 x\gamma_2 a\beta_1 y\beta_2 a = a\beta_1 y\beta_2 a\gamma_1 x\gamma_2 a$ ise $S = M\Gamma C_\Gamma$ minimal sağ (sol) ideale sahip bir ilkel (primitive) Γ-halkasıdır ve bu sağ (sol) ideal üzerinde S nin değişmeli halkası yalnızca C_Γ nın kendisidir.

Teorem 2.1.14 : M birimli basit Γ-halkası olsun. M deki bazı $0 \neq a$ elemanları için $a\gamma_1 x\gamma_2 a\beta_1 y\beta_2 a = a\beta_1 y\beta_2 a\gamma_1 x\gamma_2 a$, $\forall x, y \in M$, $\forall\gamma_1, \gamma_2\beta_1, \beta_2 \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $D_{n,m}$, D bölüm halkası üzerindeki bütün $n \times m$ tipinde matrislerin toplamsal abelian grubu ve Γ, D bölüm halkası üzerinde bütün $m \times n$ tipinde matrislerin toplamsal değişmeli grubunun sıfırdan farklı altgrubu olmak üzere; M, $D_{n,m}$ Γ-halkasına izomorfiktir. Üstelik; M, C_Γ cismi üzerindeki bütün $n \times n$ tipinde matrislerin Γ-halkasıdır.

Teorem 2.1.15 : M bir asal Γ-halkası ve C_Γ M nin genişletilmiş centroidi olsun. Eğer a ve b, $S = M\Gamma C_\Gamma$ da sıfırdan farklı elemanlar olmak üzere her $x \in M$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ için $a\gamma x\beta b = b\beta x\gamma a$ ise o zaman a ve b C_Γ-bağımlıdır.

Teorem 2.1.16 : M bir asal Γ-halkası, Q M nin quotient Γ-halkası ve C_Γ M nin genişletilmiş centroidi olsun. Eğer q, Q nun sıfırdan farklı elemanı olmak üzere her $x, y \in M$, $\gamma_1, \gamma_2\beta_1, \beta_2 \in \Gamma$ için $q\gamma_1 x\gamma_2 q\beta_1 y\beta_2 q = q\beta_1 y\beta_2 q\gamma_1 x\gamma_2 q$ ise o zaman e bir idempotent ve $e\Gamma S$ üzerinde S nin değişmeli halkası $C_\Gamma\Gamma e$ olmak üzere S, $e\Gamma S$ sağ (sol) minimal idealine sahip ilkel (primitive) Γ-halkasıdır.

2.2 Yarı-Asal Γ-Halkalarının Genelleştirilmiş Centroidinin Regülerliği (Öztürk ve Jun, 2004)

Bu bölümde yarı-asal Γ-halkalarının genişletilmiş centroidinin özelliklerini verilmektir.

M bir yarı-asal Γ-halkası olsun. M deki sıfır olan sıfırlayanlara sahip ideallerin kümesini F ile gösterelim. Bu durumda, F kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $U, V \in F$ için $U\Gamma V \in F$ dir.

Lemma 2.2.1 : M bir yarı-asal Γ-halkası ve U, M nin sıfırdan farklı ideali olsun. $U + AnnU$ direkt toplamı F e aittir

Lemma 2.2.2 : M bir yarı-asal Γ-halkası ve U, M nin sıfırdan farklı ideali olsun. $U \in F$ dir $\Leftrightarrow$ U essentialdır.

Uyarı 2.2.3 : Eğer U, $V \in F$ ise $U \cap V \in F$ dir.

M bir yarı-asal Γ-halkası ve $M\Gamma M \neq M$ olsun.

$$\mathcal{M} := \{ (U, f) | \ f : U \to M \text{ bir sağ } M\text{-modül homomorfizm, } \forall \ U \in F \}$$

kümesi tanımlansın. $\mathcal{M}$ üzerinde $\sim$ bağıntısı ;

"$(U, f) \sim (V, g)$ dır $\Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V$ vardır öyle ki $W \in F$ de $f = g$ dir" şeklinde tanımlanır. F çarpma işlemi altında kapalı olduğundan böyle bir $U \in F$ ideali bulmak mümkündür. Bu yüzden $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. Böylece $\mathcal{M}$ denklik sınıflarına ayrılır.

$$\widehat{f} := \{ g : V \to M | (U, f) \sim (V, g) \}$$

olmak üzere denklik sınıfları $Cl\,(U, f) = \widehat{f}$ ve bütün denklik sınıflarının kümesi Q ile gösterilir. $f + g : U \cap V \to M$ bir sağ M-modül homomorfizm olmak üzere Q üzerinde $+$ toplama işlemi;

$$\widehat{f} + \widehat{g} := Cl\,(U, f) + Cl\,(V, g) = Cl(U \cap V, f + g)$$

ile tanımlanır. Q bu işlemle toplamsal değişmeli gruptur.

$M\Gamma M \neq M$ ve M bir yarı-asal Γ-halkası olduğundan, $M\Gamma M$, M nin sıfırdan farklı bir idealidir ve bu yüzden her $0 \neq \beta \in \Gamma$ için $M\beta M\ (\neq \langle 0 \rangle)$ M nin bir idealidir. U, M nin sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere; $\langle 0 \rangle \neq M\beta M\Gamma U \subset M\beta M \cap U$ dır. Böylece $M\beta M$ essentialdır ve her $0 \neq \beta \in \Gamma$ için $M\beta M \in F$ dir. $1_{M\beta} : M\beta M \to M$, $1_{M\beta}\,(m_1\beta m_2) = m_1\beta m_2$ şeklinde M de sıfırdan farklı M-modül homomorfizm tanımlanabilir.

$$\mathcal{N} := \{ (\ M\beta M, 1_{M\beta}\ ) |\ 0 \neq \beta \in \Gamma \}$$

kümesi ve $\mathcal{N}$ üzerinde $\approx$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

"$(M\beta M, 1_{M\beta}) \approx (M\gamma M, 1_{M\gamma})$ dır $\Leftrightarrow$ $\exists W := M\alpha M\,(\in F) \subset M\beta M \cap M\gamma M$ vardır öyle ki $W \in F$ de $1_{M\beta} = 1_{M\gamma}$ dır."

$\approx$, $\mathcal{N}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $(M\beta M, 1_{M\beta})$ yı içeren denklik sınıfı $Cl\,(M\beta M, 1_{M\beta}) = \widehat{\beta}$ ve $\approx$ ya göre $\mathcal{N}$ deki bütün denklik sınıflarının kümesi $\widehat{\Gamma}$ ile gösterilir, öyle ki

$$\widehat{\Gamma} := \left\{ \widehat{\beta} \middle| 0 \neq \beta \in \Gamma \right\} \cup \left\{ \widehat{0} \right\}$$

dır. $\widehat{\Gamma}$ üzerinde $+$ toplama işlemi; $\forall \beta\,(\neq 0)\,, \gamma\,(\neq 0) \in \Gamma$,

$$\widehat{\beta} + \widehat{\gamma} := Cl(M\beta M, 1_{M\beta}) + Cl(M\gamma M, 1_{M\gamma}) = Cl\,(M\beta M \cap M\gamma M, 1_{M\beta} + 1_{M\gamma})$$

biçiminde tanımalnır. $\left(\widehat{\Gamma},+\right)$ bir toplamsal değişmeli gruptur. $V\Gamma M\beta M\Gamma U \in F$ ve $f1_{M\beta}g : V\Gamma M\beta M\Gamma U \to M$,

$$(f1_{M\beta}g)\left(\sum v_i\gamma_i m_i\beta n_i\alpha_i u_i\right) = f\left(\sum g(\ v_i\ )\gamma_i m_i\beta n_i\alpha_i u_i\right)$$

bir sağ M-modül homomorfizm olmak üzere;

$$(.,.,.) : Qx\widehat{\Gamma}xQ \to Q, \left(\widehat{f},\widehat{\beta},\widehat{g}\right) \mapsto \widehat{f}\widehat{\beta}\widehat{g}$$

dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\widehat{f}\widehat{\beta}\widehat{g} = Cl(U,f).Cl(M\beta M,1_{M\beta}).Cl(V,g) = Cl\left(V\Gamma M\beta M\Gamma U, f1_{M\beta}g\right)$$

Q bu işlemle bir $\widehat{\Gamma}$-halkasıdır ve Q çarpımsal birime sahiptir.

Her $0 \neq \beta \in \Gamma$ için $\varphi : \Gamma \to \widehat{\Gamma}$, $\varphi(\beta) = \widehat{\beta}$ dönüşümü tanımlansın. Burada $0 \neq \beta$ olması; φ altında Γ nın sıfırının görüntüsü $\widehat{\Gamma}$ nın sıfırı değildir, anlamına gelmez. $\varphi(0) = \widehat{0} = Cl\left(M\Gamma M, 0_{M\Gamma}\right)$ dır. Eğer $\beta = 0$ ise $M\beta M = \langle 0\rangle$ dır. Bu durum $M\beta M \neq \langle 0\rangle$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden dönüşüm her $0 \neq \beta \in \Gamma$ için $\varphi : \Gamma \to \widehat{\Gamma}$, $\varphi(\beta) = \widehat{\beta}$ biçiminde tanımlanır. φ dönüşümü bir izomorfizmdir, yani Q $\widehat{\Gamma}$-halkası bir Γ-halkasıdır.

M de sabit bir a elemanı ve her $\gamma \in \Gamma$ için; $\lambda_{a\gamma} : M \to M$, $\lambda_{a\gamma}(x) = a\gamma x, \forall x \in M$, dönüşümü tanımlansın. $\lambda_{a\gamma}$ dönüşümü bir sağ M-modül homomorfizmdir ve bu yüden $\lambda_{a\gamma} \in Q$ dır.

Böylece $\Psi : M \to Q$, $\Psi(a) = \widehat{a} = Cl\left(M, \lambda_{a\gamma}\right)$, $\forall a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$, dönüşümünü tanımlayabiliriz. Ψ dönüşümü bir içine sağ M-modül homomorfizmdir ve bu yüzden M, Q nun bir alt halkasıdır.

Q ya M nin sağ quotient Γ- halkası denir ve $Q_r(M)$ (yada kısaca Q) ile gösterilir. Benzer düşünce ile $Q_l(M)$, M nin sol quotient halkasıda tanımlanabilir.

Kolaylık sağlamak için $\widehat{q} \in Q$ yerine q kullanılabilir.

Tanım 2.2.4 : M bir yarı-asal Γ-halkası ve Q M nin quotient Γ-halkası olsun.

$$C_\Gamma := \{g \in Q| \; g\gamma f = f\gamma g, \forall \; f \in Q \text{ ve } \gamma \in \Gamma\}$$

kümesine M nin genelleştirilmiş centroidi denir.

Teorem 2.2.5 : M yarı-asal Γ-halkası ve Q M nin quotient Γ-halkası olsun. Q Γ-halkası aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) Herhangi $q \in Q$ için; $q(U_q) \subseteq M$ (yada $q\gamma U_q \subseteq M$, $\forall\gamma \in \Gamma$) olacak şekilde $q : U \to M$ bir sağ M-modül homomorfizmi ile $U_q \in F$ essential ideali vardır.

(ii) Eğer $q \in Q$ ve belirli bir $U_q \in F$ için $q(U_q) = (0)$ (yada $q\gamma U_q = (0)$, $\forall\gamma \in \Gamma$) ise $q = 0$ dır.

(iii) Eğer $U \in F$ ve $\Psi : U \to M$ bir sağ M-modül homomorfizm ise $\forall u \in U$, $\Psi(u) = q(u)$ (yada $\Psi(u) = q\gamma u$, $\forall u \in U$, $\gamma \in \Gamma$) olacak şekilde $q \in Q$ vardır.

(iv) W, Q da bir altmodülü ve $\Psi : W \to Q$ bir sağ M-modül homomorfizm olsun. Eğer W, M Γ-halkasının $\Psi(U) \subseteq M$ ve $AnnU = Ann_r W$ olan U idealini içerirse, herhangi $b \in W$ için $\Psi(b) = q(b)$ (yada $\Psi(b) = q\gamma b$, herhangi $b \in W$ ve $\gamma \in \Gamma$ için) ve herhangi $a \in Ann_r W$ için $q(a) = 0$ (yada $q\gamma a = 0$, herhangi $a \in Ann_r W$ ve $\gamma \in \Gamma$ için) olacak şekilde bir $q \in Q$ vardır

Önerme 2.2.6 : M bir yarı-asal Γ-halkası ve Q, M nin quotient halkası olsun. Eğer W, Q sağ (sol) M-modülünün sıfırdan farklı altmodülü ise $W\Gamma W \neq \langle 0 \rangle$ dır. Ayrıca Q bir yarı-asal Γ-halkasıdır.

Tanım 2.2.7 : Eğer herhangi $x \in M, \alpha, \beta \in \Gamma$ için $x'\beta x\gamma x = x$ olacak şekilde $x' \in M$ varsa M Γ-halkasına regüler denir.

Teorem 2.2.8 : M bir yarı-asal Γ-halkası ve C_Γ, M nin genelleştirilmiş centroidi olsun. C_Γ bir regüler Γ-halkasıdır.

Uyarı 2.2.9 : C_Γ daki bütün idempotentlerin kümesi E,

$$e_1 \leq e_2 \Leftrightarrow e_2\gamma e_1 = e_1, \gamma \in \Gamma$$

ile tanımlı '$\leq$' bağıntısı ile kısmi sıralıdır.

Tanım 2.2.10 : M bir yarı-asal Γ-halkası, Q M nin quotient Γ-halkası ve $S \subseteq Q$ olsun. $\forall s \in S$, $\gamma \in \Gamma$, $e\gamma s = s$ olan $e(S) = e \in C_\Gamma$, idempotent elemanların en küçüğüne S nin dayanağı denir.

Lemma 2.2.11 : M bir yarı-asal Γ-halkası, Q M nin quotient Γ-halkası ve $S \subseteq Q$ olsun. Eğer S, $e(S) = e \in C_\Gamma$ dayanağına sahipse bir $q \in Q$ için $q\gamma M\Gamma S = \langle 0 \rangle$ ($S\Gamma M\gamma q = \langle 0 \rangle$) eşitliği $q\gamma e(S) = 0$ a eşittir.

Lemma 2.2.12 : M bir yarı-asal Γ-halkası, Q M nin quotient Γ-halkası, $S \subseteq Q$ ve S, $e(S) = e \in C_\Gamma$ dayanağına sahip olsun. Eğer $0 \neq e_1 \leq e(S)$ ise $e_1\Gamma S \neq 0$ dır.

Önerme 2.2.13 : M bir yarı-asal Γ-halkası ve C_Γ M nin genelleştirilmiş centroidi olsun. Eğer C_Γ bir cisimse M Γ-halkası bir asal Γ-halkasıdır.

3. BÖLÜM

YARI-ASAL Γ-HALKALARININ GENELLEŞTİRİLMİŞ CENTROİDİ ÜZERİNDE MODÜLLER

Bu bölümde, ikinci bölümde verilen makalelerden yararlanılarak halka teorisindekine paralel yeni tanımlar yapılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 3.1 : M bir yarı-asal Γ-halkası, C_Γ onun genelleştirilmiş centroidi olsun. Bu durumda;

(i) I yönlü kısmi sıralı bir küme, A bir C_Γ-modül ve $a \in A$ olmak üzere; $\forall i, j \in I$, $i \leq j$ ise $e_i \leq e_j$, $\sup\{e_i\} = 1$ ve $e_i\gamma a_i = e_i\gamma a$, $\forall\gamma \in \Gamma$ olacak biçimde$\{e_i|\ i \in I\}$ idempotentlerin yönlü kümesi varsa o zaman a ya $\{a_i \in A|\ i \in I\}$ kümesinin limiti denir ve $\lim\limits_I a_i = a$ ile gösterilir.

(ii) $T \subseteq A$ olsun. $\{a_i \in T|\ i \in I\}$ kümesinin limiti a ve $a \in T$ ise T ye kapalıdır, denir.

Önerme 3.2 : M bir yarı-asal Γ-halkası ve Q_r, M nin quotient Γ-halkası olsun. Eğer $r, s, r_i, s_i \in Q_r$ olmak üzere, $\lim\limits_I r_i = r$, $\lim\limits_I s_i = s$ ise $\lim\limits_I (r_i \pm s_i) = r \pm s$ ve $\lim\limits_I (r_i\alpha s_i) = r\alpha s$,$\forall\ \alpha \in \Gamma$ dır.

İspat : $\lim\limits_I r_i = r$, $\lim\limits_I s_i = s$ olsun. $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ idempotentlerin yönlü kümesi olmak üzere $\{r_i \pm s_i\}$, $\{r_i\alpha s_i\}$, $\alpha \in \Gamma$ kümeleri için $\{e_i\gamma f_i|\ i \in I,\ \gamma \in \Gamma\}$ idempotentlerin yönlü kümesini alalım.Her $i \in I$ ve her $\gamma, \beta \in \Gamma$ için $e\gamma e_i\beta f_i = 0$ ise o zaman keyfi $j \in I$ için $k \geq i, j$ olmak üzere; $\forall\gamma, \beta, \alpha, \alpha' \in \Gamma$ için

$$(e\gamma e_i)\,\beta f_j = e\gamma\,(e_i\alpha e_k)\,\beta\,(f_j\alpha' f_k) = (e\gamma e_k\beta f_k)\,\alpha e_i\alpha' f_j = 0$$

$\sup\{f_i\} = 1$ olduğundan $e\gamma e_i = 0$ ve $\sup\{e_i\} = 1$ olduğundan $e = 0$ dır. Böylece $\sup\{e_i\gamma f_i\} = 1$ dir.

$$(e_i\gamma f_i)\,\beta\,(r \pm s) = (e_i\gamma f_i)\,\beta r \pm (e_i\gamma f_i)\,\beta s = f_i\beta\,(e_i\gamma r) \pm e_i\gamma\,(f_i\beta s)$$

$$= f_i\beta\,(e_i\gamma r_i) \pm e_i\gamma\,(f_i\beta s_i) = e_i\gamma f_i\beta\,(r_i \pm s_i)$$

Dolayısıyla Tanım 3.1(i) den $\lim_I (r_i \pm s_i) = r \pm s$ olur. Benzer biçimde;

$$e_i\gamma f_i\beta\,(r\alpha s) = f_i\gamma e_i\beta\,(r\alpha s) = f_i\gamma\,(e_i\beta r)\,\alpha s = f_i\gamma\,(e_i\beta r_i)\,\alpha s$$
$$= (e_i\beta r_i)\,\gamma\,(f_i\alpha s) = (e_i\beta r_i)\,\gamma\,(f_i\alpha s_i) = e_i\gamma f_i\beta\,(r_i\alpha s_i)$$

Dolayısıyla Tanım 3.1 (i) den $\lim_I (r_i\alpha s_i) = r\alpha s$ dır.

Tanım 3.3 : C_Γ halkasında A modülünün essential sıfırlayanlara sahip bütün elemanlarının birleşimine A nın singüler altmodülü denir. Bir modülün singüler altmodülleri sıfıra eşitse bu modüle non-singüler modül denir.

Teorem 3.4 : A C_Γ-modülü üzerinde aşağıdakiler denktir:

(a) A modülünün elemanlarının herhangi yönlü kümesi birden fazla limite sahip değildir.

(b) Herhangi tek elemanlı küme kapalıdır.

(c) $\{0_A\}$ altmodülü kapalıdır.

(d) A non-singüler modüldür.

İspat : $(a) \Rightarrow (b)$ $a \in A$ ve $\{a\}$ tek elemanlı bir küme olsun. $\{a\}$ kümesi yönlü kümedir. $\{\, e_i |\; i \in I\}$ idempotentlerin yönlü kümesi olmak üzere; $e_i\gamma a = e_i\gamma a$, $\gamma \in \Gamma$ olduğundan limit tanımından $\lim_I a = a$ dır. $a \in \{a\ \}$ olduğundan $\{a\}$ kümesi kapalıdır.

$(b) \Rightarrow (c)$ $\{0_A\}$ altmodülü tek elemanlı bir küme olduğundan kapalıdır.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sıfır altmodülünün kapanışının bir singüler ideale eşit olduğunu gösterelim.$\{0_A\}$ altmodülünün kapalı olduğunu kabul edelim.

C_Γ-halkasında U essential ideal olduğunda $e\,(U) = 1$ dir. Gerçekten; U essential ideal ve $e\,(U) \neq 1$ olsun. $f = 1 - e\,(U) \neq 0$ olur. Bu durumda $C_\Gamma\gamma f \neq \langle 0\rangle$, C_Γ nın bir ideali ve U essential ideal olduğundan $U \cap C_\Gamma\gamma f = \langle 0\rangle$

dır. Çünkü $U \cap C_\Gamma \gamma f \neq \langle 0 \rangle$ olursa; en az bir $0 \neq x \in U \cap C_\Gamma \gamma f$ vardır. $x \in U$ ve $x \in C_\Gamma \gamma f$ dır. $x = c\gamma f$ olacak şekilde $c \in C_\Gamma$ vardır. $x = c\gamma f = c\gamma (1 - e(U)) = c - c\gamma e(U)$ olur. $e\beta x = e\beta c - e\beta (c\gamma e(U)) = e\beta c - (e\beta c)\gamma e = e\beta c - (e\gamma e)\beta c = e\beta c - e\beta c = 0$ dır. Yani $e = 0$ olur. $e \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $U \cap C_\Gamma \gamma f = \langle 0 \rangle$ ve dolayısıyla $f = 0$ olur. Bu ise $f \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. Yani $e(U) = 1$ dir. Tersine eğer $e(U) = 1$ ve $U \cap V = \langle 0 \rangle$ ise V de seçilen keyfi bir f elemanı ve $\gamma \in \Gamma$ için $f\gamma U \subseteq V \cap U = \langle 0 \rangle$ olduğundan $f = e(U)\gamma f = 0$ ve buradan $V = \langle 0 \rangle$ dır. Yani U essential idealdir.

$a \in Z(A)$ olsun. Lemma 1.23 den $Ann_{C_\Gamma} \langle a \rangle$'bir essential idealdir. J bu idealin bütün idempotentlerinin bir kümesi olsun. J yönlüdür. Bu durumda her $i \in J$ için $i\alpha a = 0 = i\alpha 0$, $\alpha \in \Gamma$ dır. $a_i = 0$ olmak üzere; $\lim_{i \in J} a_j = a$ dır. Sonuç olarak $Z(A) \subseteq \overline{\langle 0 \rangle}$ dır. Şimdi $Z(A)$ nın kapalı altmodül olduğunu gösterelim. $a_i \in Z(A)$ olmak üzere; $\lim_J a_i = a$ ve $a \notin Z(A)$ olsun. $f = 1 - e(Ann_{C_\Gamma} \langle a \rangle) \neq 0$ alalım. $\{e_i | \ i \in J\}$ idempotentlerinin kümesi için limit tanımından $\sup_{i \in J} \{e_i\} = 1$ dir. Herhangi bir $j \in J$ vardır öyle ki $f\gamma e_j \neq 0$, $\gamma \in \Gamma$ dır. $a_j \in Z(A)$ ise $\sup (Ann_{C_\Gamma} \langle a_j \rangle) = 1$ dır ve bir $u_j \in Ann_{C_\Gamma} \langle a_j \rangle$ ve $u_j \beta f \gamma e_j \neq 0$ dır. Burdan $u_j \beta f \gamma e_j \alpha a = u_j \beta f \gamma e_j \alpha a_j = f\gamma e_j \alpha (u_j \beta a_j) = 0$ dır. Bunun anlamı $u_j \beta f \gamma e_j \in Ann_{C_\Gamma} \langle a \rangle$ dır. f idempotenti $Ann_{C_\Gamma} \langle a \rangle$ yı sıfırladığından; $f\alpha (u_j \beta f \gamma e_j) = u_j \beta (f\alpha f)\gamma e_j =' u_j \beta f \gamma e_j = 0$ olur. Bu ise $u_j \beta f \gamma e_j \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $a \in Z(A)$ dır.

$(d) \Rightarrow (a)$ Kabul edelim ki a_i elemanlarının herhangi bir yönlü kümesi, $a^{(1)} \neq a^{(2)}$ olacak şekilde iki limite sahip olsun. $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ idempotent kümelerini alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}(e_i \beta f_i)\gamma \left(a^{(1)} - a^{(2)}\right) &= (e_i \beta f_i)\gamma a^{(1)} - (e_i \beta f_i)\gamma a^{(2)} \\ &= f_i \beta \left(e_i \gamma a^{(1)}\right) - e_i \beta \left(f_i \gamma a^{(2)}\right) = f_i \beta (e_i \gamma a_i) - e_i \beta (f_i \gamma a_i) = 0\end{aligned}$$

Önerme 3.2 yi dikkate alırsak; $\underset{i}{sup}\{e_i\gamma f_i\} = 1$ olduğundan $a^{(1)} - a^{(2)} = 0$, yani $a^{(1)} = a^{(2)}$ elde edilir. O halde $\{a_i|\ i \in I\}$ ailesinin limiti tek olur.

Uyarı 3.5: Q_r bir Γ-halkası ve $E(Q_r, \Gamma)$, Q_r nin toplamsal grubunun endomorfizmlerinin kümesi olsun. $E(Q_r, \Gamma)$ nın bir Γ-halkası olduğunu göstermek kolaydır. $E(Q_r, \Gamma)$ Γ-halkası, Q_r nin merkezi C_Γ üzerinde bir sağ modüldür.

Teorem 3.6: Q_r ve $E(Q_r, \Gamma)$ modülleri non-singülerdir.

İspat : Önerme 3.4 ün (a) şıkkını kullanalım.$\{r_i|\ i \in I\}$ kümesinin $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ idempotent kümelerine karşılık gelen limitleri sırasıyla r ve s olsun. Bu durumda; $e_i\beta(f_i\gamma r) = f_i\beta(e_i\gamma r_i) = e_i\beta(f_i\gamma r_i) = e_i\beta(f_i\gamma s)$ dır. Böylece $(e_i\beta f_i)\gamma(r - s) = 0$ dır. Eğer $r, s \in Q_r$ ise $r - s = \sup\{e_i\beta f_i\}\gamma(r - s) = 0$ dır. Yani $r = s$ olur. $r, s \in E(Q_r, \Gamma)$ ise herhangi $x \in Q_r$ için $e_i\beta f_i\gamma(r - s)(x) = 0$ deklemleri $r(x) = s(x)$ eşitliğini verir. İspat biter.

Teorem 3.7 : Eğer T, Q_r nin althalkası ise onun kapanışı $\widehat{T}$ da bir althalkadır.

İspat : $k(T)$ ile T nin bütün limit noktalarının kümesini tanımlayalım. j bir limit sayısı ve $T_1 = T$, $T_{i+1} = k(T_i)$, $T_j = \underset{i \leq j}{\cup} T_i$ olarak alalım.Bu durumda bütün T_i lerin birleşimi kapalı bir kümedir ve $\widehat{T}$ yı verir. Bundan dolayı sonlu ötesi tümevarım ilkesine göre $k(T)$ nin bir alt halka olduğunu ispatlamak yeterlidir. $r_i, s_j \in T$ için $\lim_I r_i = r$, $\lim_J s_j = s$ ve $\{e_i\}, \{e_j\}$ sırasıyla bu limitler için idempotentlerin kümesi olsun.. $\{e_i\gamma e_j|\ (i,j) \in IxJ, \gamma \in \Gamma\}$ kümesini düşünelim. Kabul edelim ki; $(i,j) \leq (i_1, j_1) \Leftrightarrow i \leq i_1, j \leq j_1$ olsun. Bu durumda; $\lim_{IxJ}(r_i \pm s_j) = r \pm s$, $\lim_{IxJ}(r_i\gamma s_j) = r\gamma s \in k(T)$ olur ve böylece $k(T)$ bir althalkadır.

Teorem 3.8 : T, Q_r nin bir althalkası ve U, T nin bir ideali olsun. Bu durumda $\widehat{U}$, $\widehat{T}$ nın bir idealidir.

İspat : Teorem 3.7 deki gibi $k(U)$ nın $k(T)$ nin bir ideali olduğunu göstermemiz yeterlidir. $r_i, s_j \in U$ için $\lim\limits_I r_i = r$, $\lim\limits_J s_j = s$ ve $\{e_i\}, \{e_j\}$ sırasıyla bu limitler için idempotentlerin kümesi olsun. $\{e_i\gamma e_j|\ (i,j) \in IxJ, \gamma \in \Gamma\}$ kümesini düşünelim. Kabul edelim ki; $(i,j) \leq (i_1, j_1) \Leftrightarrow i \leq i_1, j \leq j_1$ olsun. Bu durumda; $\lim\limits_{IxJ} (r_i \pm s_j) = r \pm s \in k(U)$ ve $r_i \in T, s_j \in U$ için $\lim\limits_{IxJ} (r_i\gamma s_j) = r\gamma s \in k(U)$ ve $s\gamma r \in k(U)$ dır. Yani $k(U)$, $k(T)$ nin bir idealidir.

Tanım 3.9 : A C_Γ-modül ve $\{a_i|\ i \in I\}$, A nın elemanlarının herhangi bir kümesi olsun. Buna göre $\sup\{e_i\} = 1$ ve $i \geq j$ için $e_j\gamma a_i = e_j\gamma a_j$ ve $e_i \geq e_j$ olacak biçimde idempotentlerin yönlü kümesi için $\{a_i|\ i \in I\}$ kümesinin limiti varsa o zaman A modülüne tamdır, denir.

Teorem 3.10 : Q_r ve $E(Q_r, \Gamma)$ modülleri tamdır.

İspat : İlk olarak varsayalım ki $i \geq j$ için $e_j\gamma r_i = e_j\gamma r_j$, $e_i \geq e_j$ ve $\sup\{e_i\} = 1$ olacak biçimde $r_i \in Q_r$ ve $\{e_i\}$ idempotentlerin kümesi olsun.

$$N_i = \{x \in M|\ e_i\gamma x \in M,\ e_i\alpha r_i\beta x \in M,\ \gamma, \alpha, \beta \in \Gamma\}$$

kümesini alalım. Bu durumda N_i, M nin bir sağ idealidir. Gerçekten her $x, y \in N_i$ için $e_i\gamma x$, $e_i\alpha r_i\beta x \in M$ ve $e_i\gamma y$, $e_i\alpha r_i\beta y \in M$ dir. Bu durumda $e_i\gamma x - e_i\gamma y = e_i\gamma(x-y) \in M$ ve $e_i\alpha r_i\beta x - e_i\alpha r_i\beta y = e_i\alpha r_i\beta(x-y) \in M$ olur. Yani $x - y \in N_i$ dir. Her $x \in N_i$ ve $m \in M$ için, $e_i\gamma x$ ve $e_i\alpha r_i\beta x \in M$ dir. $(e_i\gamma x)\alpha' m = e_i\gamma(x\alpha' m) \in M$ and $(e_i\alpha r_i\beta x)\alpha' m = e_i\alpha r_i\beta(x\alpha' m)$ olur. Yani $x\alpha' m \in N_i$ dir. Böylece N_i, M nin bir sağ idealidir. $r_i : U \to M$,

$x \mapsto r_i(x) = r_i\gamma x$, $\gamma \in \Gamma$ sağ M-modül homomorfizm olduğundan $e_i\gamma x$ ve $e_i\alpha r_i\beta x \in M$ dir. Dolayısıyla $U_i \subseteq N_i$ olacak biçimde $U_i \in F(M)$ vardır. $N = \bigcup\limits_i e_i\gamma N_i$, $\gamma \in \Gamma$ birleşimi de bir sağ idealdir. Gerçekten $e_i\gamma a_i$, $e_j\gamma a_j \in N$ ve $k \geq i, j$ için

$$\begin{aligned} e_k\alpha r_k\beta\left(e_i\gamma a_i + e_j\gamma a_j\right) &= e_k\alpha r_k\beta e_i\gamma a_i + e_k\alpha r_k\beta e_j\gamma a_j \\ &= e_k\beta e_i\alpha r_k\gamma a_i + e_k\beta e_j\alpha r_k\gamma a_j = e_i\alpha r_k\gamma a_i + e_j\alpha r_k\gamma a_j \\ &= e_i\alpha r_i\gamma a_i + e_j\alpha r_j\gamma a_j \in M. \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$e_k\alpha\left(e_i\gamma a_i + e_j\gamma a_j\right) = e_k\alpha e_i\gamma a_i + e_k\alpha e_j\gamma a_j = e_i\gamma a_i + e_j\gamma a_j \in M$ dir.

Böylece $e_i\gamma a_i + e_j\gamma a_j \in e_k\gamma N_k$ dır. Herhangi $m \in M$, $\alpha' \in \Gamma$ için;

$e_k\alpha\left(\left(e_i\gamma a_i\right)\alpha' m\right) = \left(e_k\alpha e_i\right)\gamma a_i\alpha' m = \left(e_i\gamma a_i\right)\alpha' m \in M$ ve

$$\begin{aligned} e_k\alpha r_k\beta\left(\left(e_i\gamma a_i\right)\alpha' m\right) &= \left(e_k\alpha r_k\beta e_i\gamma a_i\right)\alpha' m \\ &= \left(e_k\beta e_i\alpha r_k\gamma a_i\right)\alpha' m = \left(e_i\alpha r_k\gamma a_i\right)\alpha' m \\ &= \left(e_i\alpha r_i\gamma a_i\right)\alpha' m \in M \end{aligned}$$

Buradan ise $\left(e_i\gamma a_i\right)\alpha' m \in e_k\gamma N_k$. Yani N is an idealdir. $e_k\gamma N_k \supseteq e_i\gamma U_i$ iken $N \supseteq \sum e_i\gamma U_i = U$, M nin bir idealidir. Ayrıca U nun sıfırlayanı sıfıra eşittir. Gerçekten $x\beta U = \langle 0\rangle$, $\beta \in \Gamma$ ise $x\beta e_i\gamma U_i = \langle 0\rangle$ olduğundan $x\beta e_i = 0$ ve $\sup\{e_i\} = 1$ olduğundan $x = 0$ dır. $\xi : N \to M$, $\xi\left(e_i\gamma a_i\right) = r_i\beta e_i\gamma a_i$ ile tanımlanan dönüşüm bir sağ M-modül homomorfizmdir. Eğer $e_i\gamma a_i = e_j\gamma a_j$ ve $k \geq i, j$ ise $r_i\beta e_i\gamma a_i = r_k\beta e_i\gamma a_i = r_k\beta e_j\gamma a_j = r_j\beta e_j\gamma a_j$ olduğundan ξ iyi tanımlıdır.

$\xi\left(e_i\gamma a_i + e_j\gamma a_j\right) = r_k\beta\left(e_i\gamma a_i + e_j\gamma a_j\right) = r_k\beta e_i\gamma a_i + r_k\beta e_j\gamma a_j = r_i\beta e_i\gamma a_i + r_j\beta e_j\gamma a_j$,

$\xi\left(\left(e_i\gamma a_i\right)\alpha m\right) = r_i\beta\left(\left(e_i\gamma a_i\right)\alpha m\right) = \left(r_i\beta e_i\gamma a_i\right)\alpha m = \xi\left(e_i\gamma a_i\right)\alpha m.$

Yani ξ bir sağ M-modül homomorfizmasıdır. ξ nin tanımlı olduğu bölge $U \in F(M)$ idealini kapsadığından Teorem 2.2.5 den, $r\beta e_i\gamma a_i = r_i\beta e_i\gamma a_i$ olacak şekilde bir $r \in Q_r$ elemanı vardır. Bu durumda $(r\beta e_i - r_i\beta e_i)\gamma a_i = 0$ dır. Yani $(r\beta e_i - r_i\beta e_i)\gamma U_i = 0$. U_i essential ideal olduğundan $r\beta e_i - r_i\beta e_i = 0$ dır. Bu durumda $r\beta e_i = r_i\beta e_i$ dır. Yani $\lim_I r_i = r$. İspat biter.

Eğer $r_i \in E(Q_r, \Gamma)$ ise herhangi $x \in Q_r$ için $r_i(x)$ in bir limiti vardır ve $r(x) = r_i(x)$ alabiliriz. Bu durumda $\lim_I r_i = r$ dir. İspat biter.

Teorem 3.11 : Q ve C_Γ halkaları Q_r de kapalıdır. Bu yüzden C_Γ üzerinde tam modüllerdir.

İspat : $r_i \in Q$ ve $r = \lim_I r_i$ alalım.. Teorem 2.2.5 den, $U_i\beta r_i\alpha e_i \subseteq M$, $U_i\alpha e_i \subseteq M$ olacak şekilde $U_i \in F(M)$ vardır. $V = \sum U_i\alpha e_i \in F(M)$ ise bu durumda $U_i\alpha e_i\beta r = U_i\alpha e_i\beta r_i$ ve buradan $r\gamma V \subseteq M$ olduğundan $r \in Q$ dur. Yani Q kapalıdır. C_Γ altmodülü $ad\ a : x \mapsto a\gamma x - x\gamma a$, $\gamma \in \Gamma$ şeklindeki tamamen sürekli dönüşümlerinin çekirdeklerinin arakesiti olarak kapalıdır. $r_i \in C_\Gamma$ ve $\lim_I r_i = r$ olsun. $e_i\beta(ad\ a(r)) = e_i\beta(a\gamma r - r\gamma a) = e_i\beta(ad\ a(r_i))$ olduğundan $ad\ a(r) = \lim_I ad\ a(r_i)$ dır. Teorem ispatlandı.

Teorem 3.12 : C_Γ üzerinde herhangi tam non-singüler modül injektiftir ve tersine C_Γ üzerinde herhangi injektif modül tamdır.

İspat : T , A C_Γ modülünün tam non-singüler altmodülü olsun. T nin bir direkt toplam olarak A dan çıkarılabileceğini gösterelim.

A da T ile kesişimleri sıfır olan bütün altmodüllerin kümesini düşünelim. Bu küme kapsama bağıntısıyla yönlü küme olduğundan Zorn Lemma ya göre bu kümede en az bir A' maksimal elemanı vardır.

A' nün A da kapalı altmodül olduğunu gösterelim. $\lim_I a_i = a$, $a_i \in A'$ ve $\{e_i |\ i \in I\}$ idempotentlerin kümesi olsun.. Eğer $a \notin A'$ ise $(A' + C_\Gamma\gamma a) \cap T \neq \langle 0\rangle$ dır. $a' \in A'$ ve $c \in C_\Gamma$ için $t = a' + c\gamma a \neq 0$, $\gamma \in \Gamma$ olsun. Herhangi

$i \in I$ için $e_i\alpha t = e_i\alpha a' + e_i\alpha c\gamma a \in A' \cap T$ ve $A' \cap T = \langle 0 \rangle$ olduğundan T altmodülünün non-singülerliği nedeniyle $t = 0$ dır. Bu $t \neq 0$ olmasıyla çelişir. $a \in A'$ olmalıdır.

a, A nın keyfi bir elemanı olsun. $a \in A' + T$ olduğunu gösterelim. $a \notin A'$ olduğunu kabul edelim. $i\gamma a \in A' + T$, $\gamma \in \Gamma$ olacak şekilde C_Γ daki bütün i idempotentlerinin I kümesini düşünelim. Buküme yönlüdür: $i_1, i_2 \in I$ ise, $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ için $i_1 \vee i_2 = i_1 + i_2 - i_1\gamma i_2 \in I$ dır, öyle ki $(i_1 \vee i_2)\beta a = i_1\beta a + (1 - i_1)\gamma i_2\beta a$ dır. $\sup I = 1$ olduğunu gösterelim. Tersine $f = 1 - \sup I \neq 0$ olsun. Eğer $f \in I$ ise $f^2 = f$ olduğundan $\forall \gamma \in \Gamma$ için $f\gamma(1 - f) = f\gamma \sup I = f$ olur. $f\gamma \sup I = 0$ ise $f = 0$ dır. $f \notin I$. Böylece $f\gamma a \notin A' + T$ ve özellikle $f\gamma a \notin A'$ olduğundan , $\left(A' + C_\Gamma\alpha f\gamma a\right) \cap T \neq \langle 0 \rangle$ dır. Bir $c \in C_\Gamma$ ve $a' \in A'$ için $0 \neq a' + c\alpha f\gamma a \in T$ alalım. Bu durumda $0 \neq c\alpha f\gamma a \in A' + T$ dır. C_Γ regüler Γ-halkası olduğundan bir c' elemanı vardır. öyle ki $e_1 = c'\beta c$ bir idempotenttir ve $c\alpha' e_1 = c$ dir. Son eşitlik gösterir ki $e_1\beta' f \neq 0$ dır. Diğer taraftan $A' + T$ de $e_1\beta' f\gamma a = \left(c'\beta c\right)\beta' f\gamma a$ olduğundan $e_1\beta f \in I$ dır. Bununla birlikte $I\gamma' f = I\gamma'(1 - \sup I) = I - I\gamma' \sup I = I - I = 0$ ve bu yüzden $e_1\beta' f = \left(e_1\beta' f\right)^2 = \left(e_1\beta' f\right)\gamma'\left(e_1\beta' f\right) = \left(e_1\beta' f\right)\gamma' f = 0$ dır. Bu ise $e_1\beta' f \neq 0$ olmasıyla çelişir. $\sup I = 1$ olmalıdır.

$a_i \in A', t_i \in T$ olmak üzere; $i\gamma a = a_i + t_i$ olsun. Eğer $j \leq i$ ise $j\beta a = j\beta(i\gamma a) = j\beta a_i + j\beta t_i$ dır. $A' + T$ direkt toplam gibi ise $a_j = j\beta a_i$, $t_j = j\beta t_i$ dir. T modülü tam olduğundan $\lim\limits_{i \in I} t_i = t$ limiti vardır. $i\gamma a = a_i + t_i$ olduğundan $i\gamma a - t_i = a_i \in A'$ dır. Her iki taraftan limit alırsak, $\sup I = 1$ olduğundan $a - t = \lim\limits_{I} a_i$ ve A' kapalı olduğundan $a - t \in A'$ olur. Yani $a \in A' + T$ dir.

Tersine A bir injektif C_Γ-modül olsun. $C_\Gamma\alpha b$ tek eleman tarafından üretilen serbest modül olmak üzere, $C_\Gamma\alpha b \cong C_\Gamma$ dır. Gerçekten; $\varphi : C_\Gamma \to C_\Gamma\alpha b$, $x \mapsto x\alpha b$ dönüşümü bir izomorfizmdir. Eğer $x = y$ ise $x\alpha b = y\alpha b$, yani

$\varphi(x) = \varphi(y)$ dir. $\varphi(x+y) = (x+y)\alpha b = x\alpha b + y\alpha b = \varphi(x) + \varphi(y)$ ve $\varphi(x\beta c) = (x\beta c)\alpha b = (x\alpha b)\beta c = \varphi(x)\beta c$ olur. Yani φ bir modül homomorfizmidir. Eğer $x\alpha y = y\alpha b$ ise $(x-y)\alpha b = 0$ dır. C_Γ regüler halka olduğundan $x - y = 0$, yani $x = y$ dir. Buradan φ $1-1$ dir. Her $x\alpha b \in C_\Gamma \alpha b$ için $\varphi(x) = x\alpha b$ olacak şekilde en az bir $x \in C_\Gamma$ vardır. Dolayısıyla φ örtendir. $A_1 = A \oplus C_\Gamma \alpha b$ direkt toplamını düşünelim. $\{a_i\}$, A nın elemanlarının bir kümesi ve $\sup\{e_i\} = 1$ ve ve $j \geq i$ için $e_i\beta a_j = e_i\beta a_i$, $\forall \beta \in \Gamma$ olacak şekilde $\{e_i\}$ idempotentlerin yönlü bir kümesi olsun. A_1 de $e_i\gamma a_i \oplus e_i\gamma b$ elemanları tarafından üretilen N altmodülünü düşünelim. $N \cap A = \langle 0 \rangle$ dır. Gerçekten; eğer $a = \sum\limits_i (c_i\beta e_i\gamma a_i \oplus c_i\beta e_i\gamma b) \in A$ ise $\left(\sum\limits_i c_i\beta e_i\right)\gamma b = 0$ olur. C_Γ Γ-halkasının regülerliğinden $\sum\limits_i c_i\beta e_i = 0$ dır. Son toplamda j, i elemanlarının bir üst sınırı olsun. $0 = \left(\sum\limits_i c_i\beta e_i\right)\gamma a_j = \sum\limits_i c_i\beta e_i\gamma a_j = \sum\limits_i c_i\beta e_i\gamma a_i$ olduğundan $a = 0$ dır. Böylece $\varphi : A \to A_1/N$ doğal homomorfizmi bir gömülmedir ve her i için $e_i\gamma\varphi(a_i) + e_i\gamma b = 0$ eşitliklerini yazabiliriz. Gerçekten; $\varphi(e_i\gamma a_i) = e_i\gamma\varphi(a_i) \in A_1/N$ dir. Burdan $e_i\gamma\varphi(a_i) = a_1 + N$, $a_1 \in A_1$dir. $e_i\gamma\varphi(a_i) = e_i\gamma a_i \oplus e_i\gamma b + N$ olduğundan $e_i\gamma\varphi(a_i) + e_i\gamma b = 0$ olur. Şimdi injektifliğin tanımını uygulayalım: $\varphi\Psi = 1$ olacak şekilde $\Psi : A_1/N \to A$ homomorfizmi vardır. $a = -\Psi(b)$ olsun.

$$0 = \Psi(e_i\gamma\varphi(a_i) + e_i\gamma b) = e_i\gamma\Psi(\varphi(a_i)) + e_i\gamma\Psi(b) = e_i\gamma a_i - e_i\gamma a.$$

Yani $e_i\gamma a_i - e_i\gamma a = 0$ olur. Buradan $e_i\gamma a_i = e_i\gamma a$ dır. Bu durumda $\lim\limits_I a_i = a$ dır. İspat biter.

Sonuç 3.13 : Bir yarı-asal Γ-halkasının genelleştirilmiş centroidi bir regüler self-injektif Γ-halkasıdır.

Uyarı 3.14: Herhangi yarı-asal, self-injektif, komütatif bir M Γ-halkası ile onun genelleştirilmiş centroidi aynıdır. Q Martindale in quotient Γ-halkası olsun. Q yu bir sağ M-modül olarak düşünelim. $M \subseteq Q$ olduğundan $Q = M \oplus A$ direkt ayrışımı geçelidir. Eğer $a \in A$ ise quotient halkası tanımından bir $U \in F$ ideali için $a\gamma U \subseteq M$, $\gamma \in \Gamma$ dır. Diğer taraftan $a\gamma U = \langle 0 \rangle$ dır. U essential ideal olduğundan $a = 0$ ve dolayısıyla $A = \langle 0 \rangle$dır. Böylece $M = Q$ dur.

Teorem 3.15: E, C_Γ daki idempotentlerin kümesi ve $Q(E)$, E nin quotient Γ-halkası olsun. O zaman $Q(E) = E$ dir.

İspat: U, E nin essential ideali olsun. Bu durumda $\sup U = 1$ ve eğer $q\gamma U \subseteq E$ ise $q \in Q(E)$ dir. $e_u = q\gamma u$ ve U idempotentlerin yönlü bir kümesi olsun. C_Γ tam olduğundan $e = \lim\limits_{U} e_u$ limiti vardır. Açıktır ki e bir idempotent ve $(e-q)\gamma u = e_u - q\gamma u = 0$ olduğundan $(e-q)\gamma U = \langle 0 \rangle$ dır ve U essential ideal olduğundan $e - q = 0$ dır. Böylece $e = q \in E$ dir. Dolayısıyla $Q(E) = E$ olur.

KAYNAKLAR

1. Barnes, W. E. : On the Γ-ring of Nabusawa, Pasific J. Math. 18 (1966), 411-422.

2. Herstein, I. N. : Rings with involution, University of Chicago Press, Chicago, 1976.

3. Kyuno, S. : On the semi-simple gamma rings, Tohoku Math. J. 29 (1977), 217-225.

4. Kyuno, S. : On prime gamma ring, Pasific J. Math. 75 (1978), 185-190.

5. Kyuno, S. : Prime ideals in gamma rings, Pasific J. Math. 98 (2) (1982), 375-379.

6. Luh, L. : The structure of primitive gamma rings, Osaka J. Math. 7 (1970), 267-274.

7. Nobusawa, N. : On a generalization of the theory, Osaka J. Math. 1 (1964), 81-89.

8. Öztürk, M. A., Jun, Y. B. : On the centroidof the prime gamma rings, Comm. Korean Math. Soc. 15 (3) (2000) , 469-479.

9. Öztürk, M. A., Sapanci, M., Soytürk, M., Kim, K. H. : Symmetric bi-derivation on prime gamma rings, Sci. Math. 3 (2000), no.2, 273-281.

10. Öztürk, M. A., Jun, Y. B. : On the centroid of the prime gamma rings 2, Turkish J. Math. 25 (2001), 367-377.

11. Öztürk, M. A., Jun, Y. B. : Regularity of the generalized centroid of semi-prime gamma rings, Commun. Korean Math. Soc. 19 (2004), No.2, pp. 233-242.

12. Soytürk, M : Türevli halkalarda bazı genelleştirmeler, Doktora tezi,

1994.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Sivas'ta doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini tamamladıktan sonra 1998 yılında C. Ü. Fen-Edeb. Fak. Matematik Bölümü'nü kazandı ve 2002 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nün açtığı Matematik Yüksek Lisans programını kazandı. 2004 yılında C. Ü. Fen-Edeb. Fak. Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen buradaki görevine devam etmektedir.