171211

SİNGÜLER STURM – LIOUVILLE OPERATÖRÜ
İÇİN TERS(INVERSE) PROBLEMLER
A. SİNAN ÖZKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
2005

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

SİNGÜLER STURM – LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS(INVERSE) PROBLEMLER

A SİNAN ÖZKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
2005

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf AMİROV ....

Üye: Doç. Dr. Eşref ORUCOV ....

Üye: Yrd. Doç. Dr. Bünyamin AYDIN ....

Üye: ....

Üye: ....

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

16.09.2005

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Rauf AMİROV

T.C. CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİNGÜLER STURM – LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS (INVERSE) PROBLEMLER

A. Sinan ÖZKAN
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof Dr. Rauf AMiROV

Bu tez, giriş ve dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, lineer operatörlerin temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

İkinci bölümde, simetrik operatörlerin selfadjoint genişlemeleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, simetrik diferansiyel operatörlerin selfadjoint genişlemeleri araştırılmış ve Bessel Potansiyelli, dissipative Schrödinger operatörünün bir selfadjoint genişlemesi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Sturm – Liouville operatörünün bazı spektral özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, aşağıdaki L operatörü tarafından üretilen bir inverse problem için teklik teoremi ispatlanmıştır.

$$L:\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y \\ y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(1) + Hy(1) = 0 \end{cases}$$

Burada $0 \le x \le 1$ ve $q(x) \in L_2(0,1)$ dır.

Anahtar Kelimeler: Simetrik operatör, dissipative operatör, Schrödinger operatörü, selfadjoint genişleme, Sturm – Liouville operatörü, inverse problem.

SUMMARY

MsC Thesis

INVERSE PROBLEMS FOR SINGULER STURM – LIOUVILLE OPERATOR

A. Sinan ÖZKAN

Cumhuriyet University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Rauf AMİROV

This thesis has formed by introduction and four parts.

In the first part, basic definitions and theorems for linear operators have been given.

In the second part, selfadjoint extensions of symmetric operators have been investigated.

In the third part, selfadjoint extensions of symmetric differential operators have been studied and a selfadjoint extension of dissipative Schrödinger operator with Bessel potential has been given.

In the fourth part, some spectral properties of Sturm – Liouville operator have been given. Moreover, in this part, a uniqueness theorem which is generated by the following operator L has been proved:

$$L:\begin{cases}-y''+q(x)y=\lambda y\\ y'(0)-hy(0)=0\\ y'(1)+Hy(1)=0\end{cases}$$

where $0\le x\le 1$ and $q(x)\in L_2(0,1)$.

Key Words: Symmetric operator, dissipative operator, Schrödinger operator, selfadjoint extension, Sturm – Liouville operator, inverse problem.

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam, Prof. Dr. Rauf AMİROV' a içten teşekkürlerimi sunarım.

GİRİŞ

Fonksiyonel analiz, matematiksel fizik ve uygulamalı matematiğin birçok önemli problemi, operatörler teorisi yardımıyla çözüme kavuşur. Operatörler içerisinde ise selfadjoint (özeşlenik) operatörler sınıfı ayrı bir yere sahiptir. Özellikle, lineer cebirsel denklem sistemleri, lineer diferansiyel denklemler ve integral denklemler teorilerinde adjoint operatör kavramı önemli rol oynar. Bir operatörün adjoint operatörünün bulunması ise her zaman kolay olmayabilir. Bu noktada, selfadjoint operatörlerin önemi ortaya çıkar. Zira bu tür operatörlerin adjointi kendine eşittir. Diğer yandan selfadjoint operatörlerin spektrumu reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları ortogonaldir[1]. Ayrıca, kompakt selfadjoint operatörler için geçerli olan Hilbert Schmidt Teoremi[2], Spektral Teorem adıyla, kompakt olmayan, selfadjoint operatörlere genelleştirilebilmiştir[2]. Bütün bu özellikler ve daha fazlası, selfadjoint operatörlerin önemini ortaya koyar.

Bu çalışmanın 2. ve 3. bölümlerinde, verilen bir operatörün, selfadjoint bir operatöre genişletilebilmesi için sağlaması gereken şartlar araştırılmış ve bu şartlar sağlandığında, selfadjoint genişlemenin kurulma yöntemi verilmiştir.

Selfadjoint genişlemeye sahip olabilecek yapıda olan operatörler içinde, ilk sırada yer alan, simetrik operatörlerdir. Bir L operatörünün simetrik olması, $L \subset L^*$ olması demektir. Yani, verilen operatörün adjointi onun bir genişlemesi ise, bu operatör simetrik operatördür. Şimdi akla şu soru gelir: "Hangi şartlar altında, simetrik L operatörünün, $L \subset L_l \subset L^*$ koşulunu sağlayan, selfadjoint bir L_l genişlemesi mevcuttur?" İkinci bölümde bu sorunun cevabı verilmiş ve bu genişlemenin nasıl kurulacağı gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde, simetrik operatörlerden daha geniş bir sınıf olan dissipative operatörler incelenmiştir[2],[3]. Üçüncü bölümde ise bu genel teori, ikinci mertebeden diferansiyel operatörlere indirgenmiş; simetrik ve dissipative diferansiyel operatörlerin genişlemeleri incelenmiştir[1],[3],[5].

Son olarak 4.bölümde, selfadjoint bir operatör olan Sturm – Liouville operatörü ele alınmış; onun bazı spektral özellikleri incelenmiş ve inverse

Sturm–Liouville problemi için teklik teoremi ispatlanmıştır. İnverse problemlerin tarihsel gelişimi şöyle özetlenebilir:

1929'da Ambartsumyan[7] yayınladığı makalede ispatlamıştır ki, $q(x)$ reel değerli, sürekli bir fonksiyon iken;

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le 1 \tag{1}$$

$$y'(0) = y'(1) = 0$$

probleminin özdeğerleri, $\lambda_n = (n\pi)^2$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde ise $q(x) \equiv 0$ dır.

Daha sonra 1946'da İsveçli matematikçi Borg[9], bu sonucu şu şekilde geliştirmiştir:

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2}$$

$$y'(1) + Hy(1) = 0 \tag{3}$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0,\quad h \ne h_1 \tag{4}$$

olmak üzere, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri sırasıyla, (1),(2),(3) ve (1),(4),(3) problemlerinin özdeğer dizileri ise bu durumda $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1, H sayılarını tek şekilde belirler.

V.A. Marchenko Borg'un çalışmasında ispatladığı teoremi, $p(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M.G. Krein, [18] çalışmasında, Sturm – Liouville operatörünü iki spektruma göre belirlemek için etkili bir yöntem vermiştir.

Gelfand, Levitan, Bargmann, Tikhonov ve Hochstadt, inverse problemler teorisini geliştiren matematikçilerden bazılarıdır.

Yeryüzünde karşılaşılan bir çok fiziksel problem inverse problemdir. Özellikle kuantum mekaniğindeki bir çok problem, inverse problemler yardımıyla çözülür.

1. BÖLÜM
HİLBERT UZAYLARINDA
LİNEER OPERATÖRLERİN GENEL TEORİSİ:

1.1. HİLBERT UZAYLARI:

Tanım1.1.1: X, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x,y,z \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $(.,.): X \times X \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna X 'de bir iç çarpım; X 'e de bir iç çarpım uzayı denir.

i) $(x,x) \geq 0,\ (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

ii) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

iii) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

iv) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

Bu koşullardan dolayı her iç çarpım uzayında,

$$(x,\lambda y)=\overline{\lambda}(x,y),$$
$$(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$$

özelliklerinin de sağlanacağı açıktır.

Herhangi bir iç çarpım uzayında, Cauchy-Schwartz eşitsizliği denilen

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Gerçekten de, $y \neq 0$ için ($y=0$ ise ispat açıktır.);

$$0 \leq (x-\lambda y, x-\lambda y)=(x,x)-\overline{\lambda}(x,y)-\lambda\overline{(x,y)}+\lambda\overline{\lambda}(y,y)$$

ifadesinde $\lambda=\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$ seçilirse istenen elde edilir.

$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ ifadesine x vektörünün normu denir. İç çarpım uzayının tanımından ve Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden, aşağıdakilerin her bir x için sağlanacağı kolayca gösterilebilir.

i) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Gerçekte bu koşulları sağlayan X vektör uzayına normlu uzay denir. Tanımdan görülür ki herhangi bir iç çarpım uzayı aynı zamanda bir normlu uzaydır, fakat bunun tersi genelde doğru değildir.

Hilbert uzayının tanımından önce, yakınsak dizi ve Cauchy dizisi kavramlarını verelim.

Tanım1.1.2: $(x_n) \subset X$ dizisini ve $x_0 \in X$ elemanını alalım. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists N > 0$ tam sayısı, $\forall n > N$ için $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde var ise (x_n) dizisine X 'de yakınsak dizi; $x_0 \in X$ elemanına ise (x_n) dizisinin limiti denir.

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ile gösterilir.

Tanım1.1.3: $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists N > 0$ tam sayısı, $\forall n, m > N$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde var ise (x_n) dizisine X 'de bir Cauchy dizisi (temel dizi) denir

Bu iki tanımdan, her bir yakınsak dizinin Cauchy dizisi olduğu görülür. Bunun tersi her zaman geçerli değildir. Zira, $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesinde, $\sqrt{2}$ gerçel sayısına yakınsayan bir dizi mevcuttur. Yakınsaklıktan dolayı bu dizi bir Cauchy dizisidir. Ancak $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğundan, dizi $\mathbb{Q}$ 'da yakınsak değildir. Bu ise her Cauchy dizisinin yakınsak olmadığına bir ters örnektir. Böylece şimdi vereceğimiz tam uzay kavramı bir anlam kazanır:

Tanım1.1.4: Bir iç çarpım uzayında, her Cauchy dizisi, uzay içinde kalan bir limite sahip ise bu uzaya tam iç çarpım uzayı denir. Tam olmayan herhangi bir iç çarpım uzayı tamlaştırılabilir. Bunun en iyi örneği $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar uzayının tamlanışı olan $\mathbb{R}$, reel sayılar uzayıdır.

Şimdi Hilbert uzayının tanımını ve ileride kullanacağımız bazı Hilbert uzayı örneklerini verebiliriz.

Tanım1.1.5: H, tam, iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Aşağıdaki dizi ve fonksiyon uzayları verilen iç çarpımlarla birer Hilbert uzayıdır:

$$l_2 = \left\{ (x_n) : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \right\}, \quad (x,y) = \sum_k x_k \overline{y_k},$$

$$L_2(a,b) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : \int_b^a |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}, \quad (f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx .$$

Özellikle ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde bu uzayları çok kullanacağız.

Tanım 1.1.6: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ise

$$H_1 \times H_2 = \{ [f,g] : f \in H_1, g \in H_2 \}$$

kümesi;

$$[f,g] + [f',g'] = [f+f', g+g'], \quad f, f' \in H_1, \quad g, g' \in H_2$$
$$\alpha[f,g] = [\alpha f, \alpha g], \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

işlemleri ile bir vektör uzayıdır. Bu uzaya H_1 ve H_2 uzaylarının direkt çarpım uzayı denir.

Kolayca gösterilebilir ki; $H_1 \times H_2$ uzayı;

$$([f,g], [f',g']) = (f,f') + (g,g')$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır. Bu uzayın normu;

$$\| [f,g] \| = \left(\|f\|^2 + \|g\|^2 \right)^{1/2}$$

ile tanımlanır.

Tanım1.1.7: H bir Hilbert uzayı, M ve N, H'ın sıfırdan farklı iki alt uzayı olsun. Eğer herhangi bir $h \in H$ vektörü,

$$h = f + g, \quad f \in M, \quad g \in N$$

şeklinde tek türlü yazılışa sahipse; yada başka bir deyişle $h=0$ olması $f=g=0$ olmasını gerektiriyorsa H uzayına M ve N uzaylarının direkt toplamı denir.

$$H = M \oplus N$$

ile gösterilir.

Tanım 1.1.8: f ve g bir H Hilbert uzayının $(f,g)=0$ koşullu iki elemanı ise f ile g ortogonaldir denir ve $f \perp g$ ile gösterilir.

Herhangi bir $S \subset H$ kümesi için;

$$S^{\perp} = \{h \in H : \forall s \in S; h \perp s\}$$

kümesine S'nin ortogonal tümleyeni adı verilir. İç çarpımın sürekliliğinden dolayı herhangi $M \subset H$ kapalı alt uzayı için $M^{\perp}$, H'in kapalı bir alt uzayı olur. Üstelik bu durumda,

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

eşitliği geçerlidir.

Ortogonal tümleyen kavramı ile ilgili son olarak şu sonuç verilmelidir:

$M \subset H$ alt uzayı için $\overline{M} = H$ olması için gerekli ve yeterli koşul $M^{\perp} = \{0\}$ olmasıdır. Burada $\overline{M}$, M'nin topolojik anlamda kapanış kümesidir ve $\overline{M} = H$ eşitliği sağlandığında, M'ye H'da yoğun alt uzay denir.

1.2. LİNEER OPERATÖRLER:

Bu kısımda lineer operatörlerin tanımı ve bazı temel özellikleri verilecektir. Gerçekte lineer operatörler teorisi oldukça kapsamlıdır. Fakat burada sadece ileriki bölümlerde kullanılacak olan özellikler incelenecektir. Bundan böyle sadece Hilbert uzayları üzerinde çalışacağız. Vereceğimiz tanım ve teoremler, genel vektör uzaylarına yada normlu uzaylara taşınabilir.

Tanım1.2.1: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve L, $D(L) \subset H_1$ alt uzayından H_2'ye tanımlı bir dönüşüm olsun. Herhangi $f,g \in D(L)$ vektörleri ve herhangi $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ skalerleri için;

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha\, Lf + \beta\, Lg$$

eşitliği sağlanıyorsa L'ye H_1'den H_2'ye tanımlı lineer operatör denir. $L: D(L) \to H_2$ ile gösterilir. Burada $D(L)$, L'nin tanım uzayı; $f \in D(L)$ için Lf vektörü f elemanının L altındaki görüntüsü;

$$R(L) = L(D(L)) = \{g \in H_2 : Lf = g,\ \exists f \in D(L)\}$$

kümesi ise L'nin görüntü kümesi olarak adlandırılır. Not edilmelidir ki, $R(L)$ kümesi de H_2'nin bir alt uzayıdır.

Yukarıdaki tanımda $H_2 = \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) alınırsa bu özel operatör H_1'de bir lineer fonksiyonel adını alır.

Eğer $H_1 = H_2 = H$ ise L, H uzayından kendi üzerine tanımlı lineer operatör olarak adlandırılır.

Şimdi süreklilik ve sınırlılık kavramlarını tanıtıp, lineer operatör için bu iki kavramı karşılaştıralım:

Tanım1.2.2: $D(A) \subset H_1$, $A: D(A) \to H_2$ herhangi bir dönüşüm (lineer olmayabilir) olsun $f_0 \in D(A)$ olmak üzere;

Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $f \in D(A)$ ve $\|f - f_0\| < \delta$ iken $\|Af - Af_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa A'ya f_0 noktasında sürekli dönüşüm denir. Eğer A, $D(A)$'nın her noktasında sürekli ise $D(A)$'da süreklidir denir.

Yukarıdaki tanımdan açıktır ki $f_n \to f_0$ olacak şekilde her $(f_n) \subset D(A)$ dizisi için $Af_n \to Af$ olması A'nın f_0'da sürekli olmasına denktir.

Lemma1.2.3: $L: D(L) \to H_2$ lineer operatörü bir $f_0 \in D(L)$ noktasında sürekli ise L, $D(L)$'de süreklidir.

İspat: $(f_n) \subset D(L)$, $f_n \to f_0$ dizisini alalım. Diyelim ki, $g_0 \in D(L)$ keyfi bir nokta ve $(g_n) \subset D(L)$, $(g_n) \to g_0$ koşulunu sağlayan herhangi bir dizidir. Bu durumda $(g_n - g + f_0)$ dizisi f_0'a yakınsar. L operatörü f_0'da sürekli olduğundan;

$$Lg_n - Lg + Lf \to Lf$$

olur. Bu ise $Lg_n \to Lg$ demektir.

Tanım1.2.4: $L : D(L) \to H_2$ lineer operatör olsun. Eğer her bir $f \in D(L)$ için;

$$\|Lf\| \le m\|f\|$$

olacak şekilde $m > 0$ sayısı varsa L'ye $D(L)$'de sınırlı lineer operatör denir. $D(L) = H_1$ ise L, sınırlı lineer operatör olarak adlandırılır.

$$\|L\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Lf\|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} \|Lf\|$$

sayısı, L sınırlı iken sonludur. Bu sayıya L operatörünün normu denir. Sınırlı lineer operatörler uzayı için bu tanım bilinen norm aksiyomlarını sağlar.

L sınırlı olduğunda, $\|Lf\| \le \|L\|\|f\|$ eşitsizliği her $f \in D(L)$ için geçerlidir. Üstelik tanımdan alırız ki $\|L\|$, bu eşitsizliği sağlayan sayıların infimumudur. Yani $\forall f \in D(L)$ için $\|Lf\| \le m\|f\|$ ise $\|L\| \le m$ dır.

Teorem1.2.5: L lineer operatörünün $D(L)$'de sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul bu operatörün $D(L)$'de sınırlı olmasıdır.

İspat: L sınırlı ise $f_n \to 0$ koşullu $(f_n) \subset D(L)$ dizisi için $\|Lf_n\| \le \|L\|\|f_n\|$ eşitsizliğinden alırız ki $Lf_n \to 0$ dır. Yani L, $f_0 = 0$ noktasında süreklidir. Bu durumda L, Lemma1.2.3 den dolayı $D(L)$'de süreklidir.

Tersine L; $D(L)$'de sürekli ise sınırlıdır. Zira aksi durumda $\exists (g_n) \subset D(L)$ dizisi için;

$$a_n = \frac{\|Lg_n\|}{\|g_n\|}$$

ifadesinin limiti, $n \to \infty$ iken sonsuz olmalıdır.

$$f_n = \frac{g_n}{a_n\|g_n\|}$$

alırsak, $f_n \to 0$ olmasına rağmen $Lf_n \to 0$ olmadığı sonucunu elde ederiz. Bu ise L'nin sürekliliği ile çelişir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi ileride de çok kullanacağımız bir lineer operatör örneğinden yola çıkarak genişleme tanımını verelim.

Diyelim ki $H = L_2(0,1)$ uzayında $f' = \dfrac{df}{dx}$ olmak üzere;

$$Lf = f', \quad D(L) = C^{\infty}[0,1]$$

$$\tilde{L}f = f', \quad D(\tilde{L}) = C^{1}[0,1]$$

operatörünü alalım. Burada $C^{\infty}[0,1]$, $[0,1]$ aralığında tanımlı ve her mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonlar uzayı; $C^{1}[0,1]$ ise sadece birinci mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonlar uzayıdır. Açıktır ki L ve $\tilde{L}$'nin ifadelerinin aynı olmasına karşın tanım uzayları farklı olduğundan bunlar farklı operatörlerdir. Burada dikkati çeken $D(L) \subset D(\tilde{L})$ ve $\forall f \in D(L)$; $Lf = \tilde{L}f$ olmasıdır.

Aşağıdaki tanım bu özelliği kavramlaştırır ve bu bir anlamda bizim başlangıç noktamızdır.

Tanım1.2.6: L ve $\tilde{L}$, sırasıyla, $D(L)$ ve $D(\tilde{L})$ tanım kümeli lineer operatörler olsun.

i) $D(L) = D(\tilde{L})$ ve $\forall f \in D(L)$ için $Lf = \tilde{L}f$ ise L ve $\tilde{L}$ operatörleri birbirine eşittir denir; $L = \tilde{L}$ ile gösterilir.

ii) $D(L) \subset D(\tilde{L})$ ve $\forall f \in D(L)$; $Lf = \tilde{L}f$ ise $\tilde{L}$ operatörüne L'nin bir genişlemesi veya L'ye $\tilde{L}$'nin bir kısıtlanması denir. $L \subset \tilde{L}$ ile gösterilir.

Tanımdan görülüyor ki bir operatörün sonsuz sayıda genişlemesi olabilir. Aynı eşitlikle üretilen operatörlerden en küçük tanım kümeli olana o eşitliğin ürettiği minimal operatör; en geniş tanım kümeli olana ise maksimal operatör adı verilir.

Teorem 1.2.7: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L : D(L) \to H_2$, $D(L)$ tanım kümesi H_1'de yoğun olacak şekilde verilen bir lineer operatör olsun.

Eğer L, $D(L)$'de sürekli ise tek bir biçimde tanımlı $\tilde{L}: H_1 \to H_2$ sürekli, lineer operatörü vardır öyle ki, $\forall f \in D(L)$ için $\tilde{L}f = Lf$ ve $\|\tilde{L}\| = \|L\|$ eşitlikleri sağlanır.

İspat: $\overline{D(L)} = H_1$ olduğundan $\forall f \in H_1$ için öyle bir $(f_n) \subset D(L)$ dizisi vardır ki, $f_n \to f$ dır. Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisi olduğundan (f_n) bir Cauchy dizisidir. Yani, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N$ vardır öyle ki, $\forall m, n > n_0$ için,

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon / \|L\|$$

dır. Şu halde $m, n > n_0$ için,

$$\|Lf_n - Lf_m\| = \|L(f_n - f_m)\| \leq \|L\| \; \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

olacağından (Lf_n), H_2'de bir Cauchy dizisi olur. H_2 bir Hilbert uzayı olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} Lf_n = g$$

olacak şekilde bir $g \in H_2$ elemanı vardır. Dolayısıyla;

$$\tilde{L}: H_1 \to H_2; \; f \in B_1, \; \tilde{L}f = \lim_{n\to\infty} Lf_n$$

şeklinde tanımlı $\tilde{L}$ operatörü aradığımız genişleme için uygun bir adaydır. Zira $f \in D(L)$ ise $f_n = f$ aldığımızda $\tilde{L}f = Lf$ eşitliğini elde ederiz.

Ayrıca $f_1, f_2 \in H_1$ vektörleri ve α, β skalerleri için,

$$\tilde{L}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \tilde{L} f_1 + \beta \tilde{L} f_2$$

olduğundan $\tilde{L}$ lineerdir. Diğer yandan her bir $f \in H_1$ için,

$$\|\tilde{L}f\| = \left\|\lim_{n\to\infty} Lf_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|Lf_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|L\| \|f_n\| = \|L\| \|f\|$$

olup $\|\tilde{L}\| \leq \|L\|$ dır. Dolayısıyla $\tilde{L}$ sınırlı yani süreklidir. Ayrıca $\forall f \in D(L)$ için $\tilde{L}f = Lf$ olduğundan $\|\tilde{L}\| \geq \|L\|$ olur. Böylece $\|\tilde{L}\| = \|L\|$ sonucu elde edilir.

$\tilde{L}$'nin tekliği tanımından çıkan bir sonuçtur.

Bu teorem, yoğun bir kümede tanımlı, sürekli, lineer operatörün, sürekli ve normu koruyacak şekilde tüm uzaya genişletilebileceğini kanıtlamaktadır. Bizim asıl amacımız, herhangi bir lineer operatörün ne zaman selfadjoint bir operatöre genişletilebildiğini bulmaktır. Şimdilik genişleme kavramını bir tarafa bırakıp, operatör teorisinin ileride kullanacağımız bazı tanım ve teoremlerini vermeye devam edelim.

Tanım1.2.8: L_1, L_2 iki operatör olsun. $R(L_1) \subset D(L_2)$ olmak üzere,

$$L_3 : D(L_1) \to R(L_2), \quad f \in D(L_1), \quad L_3 f = L_2(L_1 f)$$

şeklinde tanımlı operatöre L_1, L_2 operatörlerinin bileşkesi denir ve $L_2 L_1$ ile gösterilir.

L_1 ve L_2 sınırlı lineer operatörler ise $L_2 L_1$ operatörü de lineer ve sınırlıdır.

Gerçekten de lineerlik bileşke operatörün tanımından açıktır. Sınırlılık ise, $f \in D(L_1)$,

$$\|(L_2 L_1) f\| = \|L_2(L_1 f)\| \le \|L_2\| \|L_1 f\| \le \|L_2\| \|L_1\| \|f\|$$

eşitsizliğinden alınır.

Tanım1.2.9: L bir lineer operatör olsun.

$$N(L) = \{ f \in D(L) : Lf = 0 \}$$

kümesi $D(L)$ uzayının bir alt uzayıdır bu uzaya L operatörünün sıfır uzayı (çekirdeği) adı verilir. Eğer L operatörü sınırlı ise $N(L)$ bir kapalı alt uzay olur.

Tanım1.2.10: L bir lineer operatör olsun.

$$f, g \in D(L), \quad f \ne g \quad \text{iken} \quad Lf \ne Lg$$

ise L operatörüne birebir operatör denir.

Tanım1.2.11: L_1 ve L_2,

i) $R(L_1) = D(L_2)$

ii) $\forall f \in D(L_1), \quad L_2(L_1 f) = f$

koşullarının sağlayan iki operatör ise L_2 operatörüne L_1'in ters (invers) operatörü denir ve L_1^{-1} ile gösterilir. Aynı şekilde L_1 de L_2'nin ters operatörüdür. Yani $\left(L_1^{-1}\right)^{-1} = L_1$ eşitliği geçerlidir.

Bir operatör her zaman terse sahip olmayabilir. Aşağıdaki teorem bunu karakterize eden önemli bir sonuçtur.

Teorem1.2.12: L lineer operatörü için aşağıdaki koşullar denktir:

i) $L^{-1} : R(L) \to D(L)$ ters operatörü mevcuttur.

ii) L birebirdir.

iii) $N(L) = \{0\}$ dır.[2]

Aşağıdaki ilk sonuç literatürde ters operatör teoremi olarak bilinir. Diğeri ise ileride kullanılacak önemli bir sonuçtur.

Sonuç1.2.13: L lineer, sınırlı ve terse sahip bir operatör ise L^{-1} de lineer ve sınırlıdır.[2]

Sonuç1.2.14: L lineer operatörünün sınırlı bir terse sahip olması için gerek ve yeter koşul $\forall f \in D(L)$ için;

$$\|Lf\| \geq m\|f\|$$

olacak şekilde bir $m > 0$ sayısının var olmasıdır.[2]

1.3. KAPALI OPERATÖRLER ve OPERATÖRÜN KAPANIŞI:

Topolojiden bildiğimiz gibi kapalılık ve kapanış, kümeler için verilen kavramlardır. Bir kümenin kapanışı, kendisi ile yığılma (limit) noktalarının birleşiminden oluşan kümedir. Eğer verilen bir küme kapanışına eşitse yada başka bir deyişle tüm yığılma noktalarını içeriyorsa o kümeye kapalı küme denir. Bir operatörün kapalılığı da biçimsel olarak böyledir. Gerçekte, verilen bir operatörün kapalılığını yine bir küme olan operatörün grafiği yardımıyla incelemek mümkündür. Daha ötesi göreceğiz ki, operatörün kapalılığı ile grafiğinin kapalılığı denktir. İşe öncelikle grafiğin tanımını vererek başlayalım.

Bundan böyle, aksi belirtilmedikçe, L lineer operatörü, H, Hilbert uzayının bir $D(L) \subset H$ alt uzayından yine H üzerine tanımlı kabul edilecektir.

Tanım1.3.1: L lineer operatörü için,

$$G(L)=\{[f,Lf]\in H\times H \mid f\in D(L)\}$$

$$G'(L)=\{[Lf,f]\in H\times H \mid f\in D(L)\}$$

kümelerine sırasıyla L operatörünün grafiği ve ters grafiği denir.

Tanım1.3.2: $L:D(L)\to H$ bir lineer operatör olsun.

i) $f_n\to f$

ii) $Lf_n\to g$

koşullarını sağlayan her bir $(f_n)\subset D(L)$ dizisi için $f\in D(L)$ ve $g=Lf$ oluyorsa L operatörüne kapalı operatör denir.

Lemma1.3.3: Kabul edelim ki L, $D(L)$ üzerinde süreklidir. Bu durumda L'nin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $D(L)$'nin kapalı olmasıdır.

İspat: Diyelim ki L kapalı ve $f\in\overline{D(L)}$ dır. Bu durumda $\exists(f_n)\subset D(L)$ vardır ki $f_n\to f$ dır. L sürekli olduğundan (Lf_n) dizisi yakınsaktır. Bu ise L kapalı olduğundan tanım gereği $f\in D(L)$ demektir. Dolayısıyla $D(L)$ kapalıdır. Tersine $D(L)$ kapalı ise Tanım1.3.2'deki koşulları sağlayan her dizi için $f\in D(L)$, $Lf_n\to Lf$ olacağından L kapalıdır.

Lemma1.3.4: L kapalıdır $\Leftrightarrow$ $G(L)$ kapalıdır.

İspat: L kapalı olsun.

$$[f,g]\in\overline{G(L)}\Rightarrow\exists([f_n,Lf_n])\subset G(L) \text{ öyle ki, } \|\,[f_n,Lf_n]-[f,g]\,\|\to 0$$

$$\Rightarrow\|\,[f_n-f,Lf_n-g]\,\|\to 0$$

$$\Rightarrow\|f_n-f\|^2+\|Lf_n-g\|^2\to 0$$

$$\Rightarrow f_n\to f \text{ ve } Lf_n\to g \text{ dır.}$$

L kapalı olduğundan $f\in D(L), Lf=g$ elde edilir. Buradan $[f,g]\in G(L)$ olduğu çıkar. Bu ise $G(L)$'nin kapalılığını kanıtlar.

$G(L)$ kapalı olsun. $f_n \to f$ ve $Lf_n \to g$ olacak şekilde $(f_n) \in D(L)$ dizisini alalım. Bu durumda $[f_n, Lf_n] \to [f, g]$ olacağından ve $G(L)$ kapalı olduğundan $[f, g] \in G(L)$ dır. Dolayısıyla $f \in D(L)$ ve $g = Lf$ olur. Bu ise L'nin kapalılığını kanıtlar.

Bu sonuç bir operatörün kapalılığı için bir kriter verir. Bazı durumlarda operatörün kapalılığı, onun grafiğinin kapalılığı ile tanımlanır.

Tanım1.3.5: Bir L lineer operatörünün, kapalı bir genişlemesi varsa L'ye kapanabilir operatör denir. Bu kapalı genişlemelerin minimal olanı ise L'nin kapanışı olarak adlandırılır. $\overline{L}$ ile gösterilir.

Eğer bir L operatörü kapanabilir ve bunun kapanışı $\overline{L}$ ise $G(\overline{L}) = \overline{G(L)}$ dır. Ancak bu her operatörün bu yolla kapanabilir olmasını garanti etmez. Zira $H \times H$'ın her alt uzayı bir operatör için grafik olmak zorunda değildir. Bunun hangi durumda var olduğunu aşağıdaki lemma karakterize eder.

Lemma1.3.6: $H \times H$'ın bir M alt uzayının bir lineer operatörün grafiği olması için gerekli ve yeterli koşul $[0, g] \in M$ iken $g = 0$ olmasıdır.

İspat: İlk olarak diyelim ki M bir lineer operatörün grafiğidir. Bu durumda $[0, g] \in M$ ise $\exists f \in D(L)$ vardır ki $f = 0$ ve $Lf = g$ dır. L lineer olduğundan bu $g = 0$ demektir.

Tersine $[0, g] \in M$ iken $g = 0$ olsun.

$S = \{f : \exists g;\ [f, g] \in M\}$ kümesini tanımlayalım. Bu kümedeki her bir f için bir tek g karşılık gelmektedir. Zira $[f, g] \in M$ ve $[f, g'] \in M$ ise M alt uzay olduğundan $[f, g] - [f, g'] = [0, g - g'] \in M$ dır. Buradan ise $g - g' = 0$, yani $g = g'$ olduğu sonucu çıkar. O halde $D(L) = S$ tanım kümeli, $Lf = g$ şeklinde bir operatör tanımlamak uygundur. Açıktır ki L lineerdir ve $G(L) = M$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 1.2.7'de, yoğun bir kümede tanımlı, sürekli lineer operatörün sürekli bir genişlemesinin varolduğu kanıtlandı. Ayrıca, H, Hilbert uzayında verilen $D(L)$ tanım kümeli bir L operatörü için $\overline{D(L)}$ uzayının da bir Hilbert uzayı olduğu biliniyor. Zira bir Hilbert uzayının her kapalı alt uzayı da Hilbert uzayıdır. Dolayısıyla, L operatörü sürekli ise bir tek $\overline{L}:\overline{D(L)}\to H$ sürekli genişlemesi vardır ve $\|\overline{L}\|=\|L\|$ dır. Böylece aşağıdaki teoremi elde etmiş oluruz.

Teorem1.3.7: H Hilbert uzayında tanımlı ve $D(L)$ üzerinde sınırlı her lineer operatör kapanabilirdir ve onun kapanışı $\overline{D(L)}$'a sürekli genişlemesi ile elde edilen operatördür.

Teorem1.3.8(Kapalı Grafik Teoremi): H Hilbert uzayı, $D(L)\subset H$ ve $L:D(L)\to H$ kapalı lineer operatör olsun. Bu durumda L sınırlıdır.

İspat:

$$P_1:G(L)\to D(L),\qquad P_1[f,Lf]=f$$
$$P_2:G(L)\to H,\qquad P_2[f,Lf]=Lf,\ f\in D(L)$$

lineer operatörlerini tanımlayalım. Buna göre;

$$\|P_1[f,Lf]\|=\|f\|\leq\left(\|f\|^2+\|Lf\|^2\right)^{1/2}=\|[f,Lf]\|$$

olduğundan P_1 ve benzer şekilde de P_2 sınırlıdır. P_1'in birebir ve örtenliği de açık olduğundan Sonuç1.2.13'den alırız ki, P_1^{-1} sınırlı tersi vardır. Dolayısıyla $P_2P_1^{-1}$ sınırlıdır.

$$\left(P_2P_1^{-1}\right)f=P_2[f,Lf]=Lf,\quad f\in D(L)$$

olduğundan $L=P_2P_1^{-1}$ olup L sınırlıdır.

Lemma1.3.9: L, birebir lineer operatör ise L^{-1}'in kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul L'nin kapalı olmasıdır.

İspat: L, birebir olduğundan, $G(L)=G'\left(L^{-1}\right)$ dır. Gerçekten; $[f,Lf]\in G(L)$ için $f\in D(L)=R(L^{-1})$ olduğundan $f=L^{-1}g,\ g\in R(L)$ dır.

Buradan ise, $[f,Lf]=\left[L^{-1}g,g\right]$ olup $[f,Lf]\in G'(L^{-1})$ dır. Benzer şekilde ters kapsam da gösterilebileceğinden $G(L)=G'\left(L^{-1}\right)$ dır. Dolayısıyla;

L kapalıdır $\Leftrightarrow$ $G(L)$ kapalıdır $\Leftrightarrow$ $G'(L^{-1})$ kapalıdır $\Leftrightarrow$ L^{-1} kapalıdır.

Teorem1.3.10: L, birebir, kapalı, lineer operatör ise L^{-1} tersi sınırlıdır.

İspat: L kapalı ise L^{-1} kapalıdır. Dolayısıyla Kapalı Grafik Teoreminden, L^{-1} operatörü sınırlı olur.

Sonuç1.3.11: L bir lineer operatör ve $\forall f\in D(L)$;

$$\|Lf\|\geq m\|f\|$$

olacak şekilde bir $m>0$ sayısı var olsun. Buna göre;

L kapalıdır $\Leftrightarrow$ $R(L)$ kapalıdır.

İspat: Sonuç1.2.14'e göre L operatörünün sınırlı tersi mevcuttur. Lemma1.3.9 ve Lemma1.3.3 sonuçlarından ispatı tamamlarız.

1.4. ADJOİNT OPERATÖR:

Fonksiyonel analizin en önemli kavramlarından birisi adjoint operatör kavramıdır. Operatör teorisinin temel terimlerinden biri olmasının yanı sıra, lineer cebirsel ve lineer integral denklemlerin çözümünde önemli role sahiptir. Ayrıca fizik ve uygulamalı matematiğin bir çok probleminin çözümünde operatörün adjointinden yararlanılır.

Tanım1.4.1: H bir Hilbert uzayı ve $L:D(L)\to H$, $\overline{D(L)}=H$ olacak şekilde bir lineer operatör olsun. D^*;

$$(Lf,g)=(f,h)$$

koşulunu, $\forall f\in D(L)$ ve bir $h\in H$ için sağlayan tüm $g\in H$ vektörlerinin kümesi olsun. D^* üzerinde, $L^*g=h$ eşitliği ile tanımlı L^* operatörüne L'nin adjoint operatörü denir. Burada $\overline{D(L)}=H$ koşulu her bir $g\in D^*=D\left(L^*\right)$ vektörüne bir tek $h\in H$ elemanının karşılık gelmesini garantiler. Böylece tanım anlamlı olur.

Bu tanımdan $f\in D(L), g\in D\left(L^*\right)$ için,

$$(Lf,g)=\left(f,L^*g\right)$$

eşitliği alınır. Adjoint operatörün lineer olduğu da bu eşitlikten kolayca gösterilebilir.

Aşağıdaki teorem adjoint operatörlerin sağladığı temel özellikleri ifade eder:

Teorem1.4.2: L_1 ve L_2 tanım uzayları H'da yoğun olan iki lineer operatör ise aşağıdakiler geçerlidir:

i) $(\lambda L_1)^* = \bar{\lambda} L_1^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$

ii) $L_1 \subset L_2 \Rightarrow L_2^* \subset L_1^*$

iii) $(L_1 + L_2)^* \supset L_1^* + L_2^*$

iv) $(L_1 L_2)^* \supset L_2^* L_1^*$

v) $(L_1 + \lambda I)^* = L_1^* + \bar{\lambda} I$

vi) L_1 terse sahip ise ve ters operatörün tanım uzayı da H'da yoğun ise,

$(L_1^{-1})^* = (L_1^*)^{-1}$

dır.

Lemma1.4.3: $G'(-L^*) = G(L)^{\perp}$ dır.

İspat: $[f, Lf] \in G(L)$ ve $[-L^*g, g] \in G'(-L^*)$ keyfi elemanları için;

$$\left([f,Lf],[-L^*g,g]\right) = (f,-L^*g) + (Lf,g) = (f,-L^*g) + (f,L^*g) = (f,0) = 0$$

olur. Yani $G'(-L^*) \subset G(L)^{\perp}$ dır.

Diğer yandan herhangi $[h,g] \in G(L)^{\perp}$ ve $\forall f \in D(L)$ için,

$(f,h) + (Lf,g) = \left([f,Lf],[h,g]\right) = 0$

olacağından; $g \in D(-L^*)$ ve $h = -L^*g$ olur. Bu ise $G(L)^{\perp} \subset G'(-L^*)$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem1.4.4: L^* kapalı bir operatördür.

İspat: İç çarpımın sürekliliğinden; $G(L)^{\perp}$ kapalıdır. Lemma1.4.3'e göre $G'\left(-L^*\right)=G(L)^{\perp}$ olup $G'\left(-L^*\right)$ ve dolayısıyla $G\left(L^*\right)$ kapalıdır. Bu ise L^*'ın kapalılığına denktir.

$\left(L^*\right)^*$ operatörüne L'nin ikinci adjointi denir ve L^{**} ile gösterilir.

Teorem1.4.5: Verilen bir L operatörünün kapanabilir olması için gerekli ve yeterli koşul L^*'ın tanım kümesinin H'da yoğun olmasıdır. Bu durumda $L^{**}=\overline{L}$ eşitliği geçerli olur.

İspat: İlk olarak $\overline{D(L^*)}=H$ olsun. Önce gösterelim ki $\overline{G(L)}\subset\left[G'\left(-L^*\right)\right]^{\perp}$ dır. Gerçekten, $[h_1,h_2]\in\overline{G(L)}$ elemanı için bir $\left([h_n,Lh_n]\right)\subset G(L)$ dizisi vardır öyle ki, $[h_n,Lh_n]\rightarrow[h_1,h_2]$ dır. $G(L)\perp G'\left(-L^*\right)$ olduğundan $\forall f\in D\left(L^*\right)$ için $\left([h_n,Lh_n],\left[-L^*f,f\right]\right)=0$ dır. Bu ise iç çarpımın sürekliliğinden dolayı, $\left([h_1,h_2],\left[-L^*f,f\right]\right)=0$ demektir. Yani $[h_1,h_2]\in G'\left(-L^*\right)^{\perp}$ dır. Şu halde $[0,g]\in\overline{G(L)}\Rightarrow[0,g]\in G'(-L^*)^{\perp}$ olacağından herhangi bir $f\in D\left(L^*\right)$ için, $\left([0,g],\left[-L^*f,f\right]\right)=0$ ve dolayısıyla $(g,f)=0$ olur. $D\left(L^*\right)$ yoğun olduğundan $g=0$ dır. Yani, $\overline{G(L)}$ bir grafik olup bundan dolayı L kapanabilirdir.

İddianın ters yönünü ispatlamak için öncelikle, L kapanabilir olduğunda $(\overline{L})^*=L^*$ olduğunu ispatlayalım. Bunun için; $\left[f,L^*f\right]\in G\left(L^*\right)$ alalım. Gösterelim ki, $\left[f,L^*f\right]\in G\left(\overline{L}^*\right)$ dır. $f\in D(L^*)$ olduğundan $\forall g\in D(L)$ için $(f,Lg)=\left(L^*f,g\right)$ olur. Ayrıca $g\in D(L)$ için $\overline{L}g=Lg$ olacağından, $\left(f,\overline{L}g\right)=\left(L^*f,g\right)$ elde edilir. Bu $\forall g\in D(\overline{L})$ için de sağlanacağından,

$f \in D(\overline{L}^*)$ ve $h \in L^* f = \overline{L}^* f$ olur. Dolayısıyla, $\left[f, L^* f\right] = \left[f, \overline{L}^* f\right] \in G\left(\overline{L}^*\right)$ dır. Bu ise $G(L^*) \subset G(\overline{L}^*)$, yani $L^* \subset \overline{L}^*$ demektir. Benzer şekilde ters kapsam da var olacağından $G(L^*) = G(\overline{L}^*)$ yani, $L^* = \overline{L}^*$ olur.

Bu durumda Lemma1.4.3'den $G(\overline{L}) = G'(-L^*)^{\perp}$ eşitliğini alırız. $D\left(L^*\right)$ yoğun değil ise $\exists g \in D\left(L^*\right)^{\perp}$ vardır ki $g \neq 0$ dır. Ayrıca,

$$\left(\left[0, g\right], \left[-L^* f, f\right]\right) = (g, f) = 0, \quad f \in D(L^*)$$

olacağından $\left[0, g\right] \in G'\left(L^*\right)^{\perp} = G\left(\overline{L}\right)$ elde edilir. Bu ise $G(\overline{L})$'nin grafik olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, $D(L^*)$ yoğun olmalıdır. Ayrıca,

$$G\left(\overline{L}\right) = G'\left(-L^*\right)^{\perp} = G\left(L^{**}\right)$$

eşitliği, ispatı tamamlar.

Son olarak ileride kullanacağımız ve operatör teorisinde önemli bir yere sahip olan özdeğer ve özfonksiyon tanımlarını ve fonksiyonel analizin en çok bilinen sonuçlarından biri olan Riesz teoremini verelim:

Tanım1.4.6: L bir lineer operatör olsun. L'nin tanım uzayından olan en az bir $f \neq 0$ vektörü için,

$$Lf = \lambda f$$

koşulunu sağlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün özdeğeri; bu $f \neq 0$ vektörüne ise L'nin bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu denir.

Teorem1.4.7(Riesz Teoremi): f^*, H Hilbert uzayında tanımlı bir lineer fonksiyonel ise, $\forall f \in H$ için,

$$f^*(f) = (f, g)$$

eşitliğini sağlayan bir tek $g \in H$ vektörü vardır. Üstelik, $\left\|f^*\right\| = \|g\|$ dır.

2. BÖLÜM
SİMETRİK ve DİSSİPATİVE OPERATÖRLER:

Bu bölümde ilk olarak simetrik operatörleri ve onların selfadjoint genişlemelerini ele alacağız. Daha sonra ise daha geniş bir sınıf olan dissipative operatörleri inceleyeceğiz.

Bundan böyle H, bir kompleks Hilbert uzayı ve tüm operatörler, H 'ın bir alt uzayından yine H üzerine tanımlı kabul edilecektir.

2.1. SİMETRİK OPERATÖRLERİN TEMEL ÖZELLİKLERİ:

Tanım2.1.1: Tanım uzayı H 'da yoğun olan L_0 lineer operatörü;

$$\forall f,g \in D(L_0), (L_0 f, g) = (f, L_0 g) \tag{2.1.1}$$

koşulunu sağlıyorsa L_0 'a simetrik operatör denir. Buradaki (2.1.1) koşulu, $L_0 \subset L_0^*$ olması demektir.

Tanım2.1.2: $L_0 = L_0^*$ olduğunda L_0 'a selfadjoint operatör denir.

Açıktır ki (2.1.1) koşulu ve $D(L_0) = D(L_0^*)$ eşitliği L_0 'ın selfadjoint olması için gerekli ve yeterlidir. Bu ise simetriklik ile selfadjointliğin denk olmadığını gösterir. Selfadjoint operatörün simetrik olmasına rağmen bunun tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek bunu ispatlayan bir ters örnektir:

$H = L_2(0,1)$ uzayında,

$D(L_0) = \{ f \in L_2(0,1) : f$ mutlak sürekli ve $f(0) = f(1) = 0 \}$

$L_0 f = if'$

operatörünü alalım.

$$\int_0^1 if'(x)\overline{g}(x)dx = i\left(f(1)\overline{g}(1) - f(0)\overline{g}(0)\right) - i\int_0^1 f(x)\overline{g}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\overline{ig'(x)}dx$$

olduğundan $\forall f \in D(L_0)$ için $(L_0 f, g) = (f, L_0 g)$ dır. Yani L_0 simetriktir. Oysa ileride gösterilecek ki, L_0 'ın adjointi;

$D\left(L_0^*\right) = \{ f \in L_2(0,1) : f$ mutlak sürekli$\}$

uzayında tanımlı olan;

$$L_0^* f = if'$$

operatörüdür. Dolayısıyla $D(L_0^*) \neq D(L_0)$ dır. Yani L_0 selfadjoint değildir.

Şimdi simetrik operatörlerin bazı temel özelliklerini inceleyelim:

Lemma2.1.3: L_0 bir simetrik operatör olsun. Bu durumda;

i) L_0 kapanabilirdir ve kapanışı $\overline{L_0} = L_0^{**}$ dır.

ii) $\overline{L_0}$ simetriktir.

iii) L_0'ın herhangi bir genişlemesi L_1 ise ; $L_1^* \subset L_0^*$ dır.

İspat: i) L_0 simetrik olduğundan tanım gereği $D(L_0)$, H'da yoğundur. Bu durumda $L_0^* \supset L_0$ olduğundan L_0^* da yoğun kümede tanımlanmış olur. Dolayısıyla, Teorem 1.4.5'den L_0 kapanabilirdir ve $\overline{L_0} = L_0^{**}$ dır.

ii) Adjoint kapalı operatör olduğundan L_0^* kapalıdır. Dolayısıyla, $L_0 \subset L_0^*$ olduğundan $\overline{L_0} \subset L_0^*$ olur. Ayrıca Teorem1.4.5'in ispatında verilen $L_0^* = \left(\overline{L_0}\right)^*$ eşitliğinden $\overline{L_0} \subset \left(\overline{L_0}\right)^*$ elde edilir. Yani $\overline{L_0}$ simetriktir.

iii) L_1, L_0'ın bir genişlemesi ise adjoint maximal tanım kümeli operatör olduğundan $L_1^* \subset L_0^*$ olduğu kolayca gösterilir.

Lemma2.1.4: L_0 simetrik (yada selfadjoint) ise $f \in D(L_0)$ için;

$$\|(L_0 - \lambda I)f\| \geq |\operatorname{Im}\lambda| \, \|f\| \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\lambda = u + iv$ alınırsa kolayca ;

$$\|(L_0 - \lambda I)f\|^2 = \|(L_0 - uI)f\|^2 + v^2\|f\|^2 + iv(L_0 f, f) - iv(f, L_0 f)$$

eşitliği kolayca görülür.

L_0 simetrik olduğundan $f \in D(L_0)$ için,

$$(L_0 f, f) = (f, L_0 f) \Rightarrow (L_0 f, f) - (f, L_0 f) = 0$$

$$\Rightarrow (L_0 f, f) - \overline{(L_0 f, f)} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}[(L_0 f, f)] = 0$$

olur. Buradan, $(L_0 f, f) \in \mathbb{R}$ alınır. Şu halde son eşitliğin sağındaki son iki terim kısalır. Ayrıca $\|(L_0 - \lambda I)f\|^2 \geq 0$ olduğundan; $\|(L_0 - \lambda I)f\| \geq |\nu|\,\|f\|$ elde edilir. Bu ise istenen eşitsizliktir.

Lemma2.1.5: L_0 kapalı, simetrik operatör ve $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$N(L_0 - \lambda I) = \{0\}$$

$$H = R(L_0 - \lambda I) \oplus N(L_0^* - \bar{\lambda} I) = R(L_0 - \bar{\lambda} I) \oplus N(L_0^* - \lambda I)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: $\forall f \in D(L_0)$ için $\|(L_0 - \lambda I)f\| \geq |\operatorname{Im}\lambda|\,\|f\|$ olduğundan $N(L_0 - \lambda I) = \{0\}$ eşitliği çıkar. Ayrıca $L_0 - \lambda I$ 'nın kapalılığından $R(L_0 - \lambda I)$'nın da kapalılığı alınır. Bu ise ispatı tamamlar. Zira $R(L_0 - \lambda I) = N(L_0^* - \bar{\lambda} I)^{\perp}$ dır.

Tanım2.1.6: H Hilbert uzayında tanımlı L_0 simetrik operatörü için,

$$N_+ = N(L_0^* - iI),\ N_- = N(L_0^* + iI)$$

uzayları L_0'ın defekt uzayları olarak adlandırılır. Bu uzayların boyutları olan n_+ ve n_- sayılarına ise L_0'ın indeks defektleri (defekt sayıları) denir. İndeks defektler (n_+, n_-) ile gösterilir.

Lemma2.1.7: L_0 simetrik ve $L = \overline{L_0}$ ise

$$D(L^*) = D(L) \oplus N_+ \oplus N_- \tag{2.1.3}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Herhangi bir $f \in D(L^*)$ alalım. Lemma2.1.5'de $\lambda = i$ alırsak;

$$H = R(L - iI) \oplus N(L^* + iI)$$

olacağından, $L^* f - if \in H$ için,

$$L^* f - if = (Lg - ig) + h_-,\ h_- \in N_-,\ g \in D(L)$$

yazılışı geçerlidir. $D(L) \subset D(L^*)$ olduğundan, bir önceki eşitlik gereği;

$$L^*\left(f - g - \frac{1}{2} i h_-\right) = i(f - g) + h_- - L^*\left(\frac{1}{2} i h_-\right)$$

$$= i(f-g)+h_- - \frac{1}{2}h_-$$

$$= i\left(f-g-\frac{1}{2}ih_-\right)$$

olur. Bu nedenle, $f-g-\frac{1}{2}ih_- \in N_+$ olur. O halde,

$$f = g+\left(f-g-\frac{1}{2}ih_-\right)+\frac{1}{2}ih_- = g+\phi_+ +\phi_-,\ g\in D(L),\ \phi_+\in N_+,\ \phi_-\in N_-$$

bulunur. Bu gösterimin tekliğini göstermek için $f=0$ alalım ve gösterelim ki, $g=\phi_+=\phi_-=0$ dır. Bunun için son eşitliğin her iki yanına L^*-iI operatörünü uygularsak $f=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= (L^*-iI)g+(L^*-iI)\phi_+ +(L^*-iI)\phi_- \\ &= (L^*-iI)g+(L^*+iI)\phi_- -2i\phi_- \\ &= (L^*-iI)g-2i\phi_- \end{aligned}$$

olur. Son eşitliğin sağındaki terimler Lemma2.1.5.'e göre ortogonaldir. Yani ikisi de sıfır olmalıdır. O halde $\phi_-=0$ bulunur. Benzer şekilde $\phi_+=0$ olacağından $g=0$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç2.1.8: L kapalı, simetrik operatör ve L_I, L'nin, $L\subset L_I\subset L^*$ koşulunu sağlayan bir genişlemesi ise o halde,

$$D(L_1)=D(L)\oplus N \qquad (2.1.4)$$

eşitliğini sağlayan bir tek $N\subset N_+\oplus N_-$ alt uzayı vardır.

İspat: $N=\{n\in N_+\oplus N_- \mid \exists f_I\in D(L_I), f\in D(L); f_I=f+n\}$

kümesini alalım. $D(L_I)$ ve $D(L)$ alt uzaylar olduğundan N de öyledir. Ayrıca bu şekilde gösterime sahip N kümesinin tekliği de açıktır. İspatı bitirmek için $D(L)\cap N=\{0\}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} g\in D(L)\cap N &\Rightarrow g\in D(L), g\in N \\ &\Rightarrow g\in D(L), g\in N_+\oplus N_- \\ &\Rightarrow g\in D(L)\cap N_+\oplus N_- \\ &\Rightarrow g=0 \end{aligned}$$

Bu sonuç gösterir ki bir L_0 simetrik operatörünün simetrik (ve selfadjoint) genişlemesinin tanım kümesi $D(\overline{L_0})$'a $N_+ \oplus N_-$'nın bir alt uzayının eklenmesiyle elde edilir.

Tanım2.1.9: Simetrik L_0 için,

$$\langle f,g\rangle = (L_0^* f,g)-(f,L_0^* g),\ f,g\in D(L_0^*) \tag{2.1.5}$$

ifadesine $D(L_0^*)\times D(L_0^*)$ uzayında bir bilineer form denir.

Tanımdan, $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Lemma2.1.10: L_0 simetrik operatör ve $f\in D(L_0^*)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

i) $f\in D(\overline{L_0})$ dır.

ii) $\forall g\in D(L_0^*)$ için $\langle f,g\rangle = 0$ dır.

iii) $\forall \phi\in N_+\oplus N_-$ için $\langle f,\phi\rangle = 0$ dır.

İspat: $(i)\Rightarrow(ii)$ olduğunu gösterelim: $f\in D(\overline{L_0})$ olsun. Buna göre $\forall g\in D(L_0^*)$ için $L_0^* = (\overline{L_0})^*$ olduğundan, $(\overline{L_0}f,g)=(f,L_0^* g)$ olur. Ayrıca $\overline{L_0}\subset \overline{L_0}^{\,*} = L_0^*$ olduğundan $\forall f\in D(\overline{L_0})$ için $\overline{L_0}f = L_0^* f$ dır. Bu durumda,

$$(L_0^* f,g)=(f,L_0^* g)$$

ve dolayısıyla $\forall g\in D(L_0^*)$ için $\langle f,g\rangle = (L_0^* f,g)-(f,L_0^* g)=0$ bulunur.

$(ii)\Rightarrow(i)$ olduğunu gösterelim:

$f\in D(L_0^*)$ ve $\forall g\in D(L_0^*)$ için, $\langle f,g\rangle = 0$ olsun. Şu halde $(L_0^* f,g)=(f,L_0^* g)$ olur. Bu eşitlik $\forall g\in D(L_0^*)$ için sağlandığından $f\in D(L_0^{**}) = D(\overline{L_0})$ elde edilir.

$(i)\Rightarrow(iii)$ olduğunu gösterelim:

$f\in D(\overline{L_0})$ ise (ii)'den $\forall g\in D(L_0^*)$; $\langle f,g\rangle = 0$ dır. $N_+\oplus N_- \subset D(L_0^*)$ olduğundan $\forall \phi\in N_+\oplus N_-$ için de $\langle f,\phi\rangle = 0$ olur.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ olduğunu gösterelim:

$f \in D(L_0^*)$ alalım. $\forall \phi \in N_+ \oplus N_-$ için $\langle f, \phi \rangle = 0$ olsun. Şimdi keyfi bir $g \in D(L_0^*)$ için $g = g_0 + \phi$, $g_0 \in D(\overline{L_0}), \phi \in N_+ \oplus N_-$ yazılışı geçerli olduğundan,

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g_0 \rangle + \langle f, \phi \rangle$$

eşitliğini alırız. Bu eşitliğin sağ yanındaki terimler sıfır olacağından *(ii)* sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

2.2. SELFADJOİNT GENİŞLEMENİN İNŞASI:

Şimdi, verilen bir simetrik operatörün, hangi koşullar altında bir selfadjoint genişlemeye sahip olduğunu inceleyip bu selfadjoint genişlemenin nasıl kurulacağını göreceğiz. Bunun için önce adjoint uzay kavramını tanıyalım:

Tanım2.2.1: N, $N_+ \oplus N_-$'nin bir alt uzayı olsun.

$$N^* = \{ f \in N_+ \oplus N_- \mid \forall g \in N, \langle f, g \rangle = 0 \}$$

kümesi N'nin adjoint uzayı olarak adlandırılır.

Eğer $N \subset N^*$ ise yada denk olarak $\forall f, g \in N$ için $\langle f, g \rangle = 0$ ise N'ye simetrik; $N = N^*$ ise N'ye selfadjoint denir.

Lemma2.2.2: L_0 simetrik ve L_1, $\overline{L_0} \subset L_1 \subset L_0^*$ olacak şekilde bir lineer operatör olsun. Bu durumda N, $N_+ \oplus N_-$'nin bir alt uzayı olmak üzere,

$$D(L_1) = D(\overline{L_0}) \oplus N, \quad D(L_1^*) = D(\overline{L_0}) \oplus N^*$$

dır. Ayrıca,

L_1 simetriktir $\Leftrightarrow$ N simetriktir,

L_1 selfadjointtir $\Leftrightarrow$ N selfadjointtir.

İspat: $L = \overline{L_0}$ olsun. Bu durumda $L^* = \left(\overline{L_0}\right)^* = L_0^*$ olur. Dolayısıyla $\forall f \in D(L_1)$, $g \in D(L^*)$ için;

$$\langle f, g \rangle = (L_0^* f, g) - (f, L_0^* g) = (L_1 f, g) - (f, L^* g)$$

olur. $\overline{L_0} \subset L_1 \subset L_1^* \subset L_0^*$ olduğundan Sonuç2.1.8 gereği, $D(L_1) = D(\overline{L_0}) \oplus N$ ve $D(L_1^*) = D(\overline{L_0}) \oplus P$ olacak şekilde $N, P \subset N_+ \oplus N_-$ alt uzayları vardır.

Şimdi gösterelim ki $N^* = P$ dır. Biliyoruz ki, herhangi bir $f \in N^*$ ve her $g \in N$ için $\langle f, g \rangle = 0$ dır. Şu halde,

$$D(L^*) = D(L) \oplus N_+ \oplus N_-$$

olduğundan; her bir $f \in D(L_1) \subset D(L^*)$, için $f = f_0 + \phi$ ve her bir $g \in D(L^*)$ için $g = g_0 + \psi$ geçerlidir. Burada $f_0, g_0 \in D(\overline{L_0})$, $\phi, \psi \in N_+ \oplus N_-$ dır.

Şimdi $\psi \in P \Leftrightarrow g \in D(L_1^*) \Leftrightarrow (L^* f, g) - (f, L^* g) = 0 \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0$ dır.

Ayrıca $\langle f, g \rangle = 0$ iken,

$$\langle \phi, \psi \rangle = \langle f - f_0, g - g_0 \rangle$$

$$= \langle f, g \rangle - \langle f_0, g \rangle - \langle f, g_0 \rangle + \langle f_0, g_0 \rangle$$

eşitliğinde sağ yandaki tüm terimler Lemma2.1.10'dan dolayı sıfır olduğundan $\langle \phi, \psi \rangle = 0$ bulunur. Şu halde "$\psi \in P \Leftrightarrow \forall \phi \in N \subset N_+ \oplus N_-$ için $\langle \phi, \psi \rangle = 0$" önermesi doğrudur.

Bu ise $\psi \in N^*$ olması için gerekli ve yeterlidir. Dolayısıyla $P = N^*$ dır.

Böylece gösterdik ki; L_0 simetrik operatör ve $\overline{L_0} \subset L_1 \subset L_0^*$ ise,

$$D(L_1) = D(\overline{L_0}) \oplus N, \; D(L_1^*) = D(\overline{L_0}) \oplus N^*, \; N \subset N_+ \oplus N_-$$

eşitlikleri geçerlidir.

Son iddianın ispatı bu eşitliklerden aşikardır. Gerçekten de;

L_1 simetriktir $\Leftrightarrow D(L_1) \subset D(L_1^*) \Leftrightarrow N \subset N^* \Leftrightarrow$ N simetriktir.

L_1 selfadjointtir $\Leftrightarrow D(L_1) = D(L_1^*) \Leftrightarrow N = N^* \Leftrightarrow$ N selfadjointtir .

Lemma2.2.3: $\phi, \psi \in N_+ \oplus N_-$ ve $\phi = \phi_+ + \phi_-$, $\psi = \psi_+ + \psi_-$, $\phi_\pm, \psi_\pm \in N_\pm$ olsun. Bu durumda,

$$\langle \phi, \psi \rangle = 2i[(\phi_+, \psi_+) - (\phi_-, \psi_-)] \;, \langle \phi, \phi \rangle = 2i[\|\phi_+\|^2 - \|\phi_-\|^2] \tag{2.2.1}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: $\phi_\pm, \psi_\pm \in N_\pm$ olduğundan,

$$L^* \phi_\pm = \pm i \phi_\pm, L^* \psi_\pm = \pm i \psi_\pm$$

dır. Dolayısıyla;

$$
\begin{aligned}
\langle \phi, \psi \rangle &= \left(L^* \phi, \psi\right) - \left(\phi, L^* \psi\right) \\
&= \left(L^* (\phi_+ + \phi_-), \psi_+ + \psi_-\right) - \left(\phi_+ + \phi_-, L^* (\psi_+ + \psi_-)\right) \\
&= \left(L^* \phi_+ + L^* \phi_-, \psi_+ + \psi_-\right) - \left(\phi_+ + \phi_-, L^* \psi_+ + L^* \psi_-\right) \\
&= \left(i\phi_+ - i\phi_-, \psi_+ + \psi_-\right) - \left(\phi_+ + \phi_-, i\psi_+ - i\psi_-\right) \\
&= i\left(\phi_+ - \phi_-, \psi_+ + \psi_-\right) + i\left(\phi_+ + \phi_-, \psi_+ - \psi_-\right) \\
&= 2i\left[(\phi_+, \psi_+) - (\phi_-, \psi_-)\right]
\end{aligned}
$$

olur ki, böylece ilk eşitliğin doğruluğu görülür. İkincisi ise bunun açık bir sonucudur.

Sonuç2.2.4: $N \subset N_+ \oplus N_-$ simetrik ise herhangi $\phi \in N$ için $\phi = \phi_+ + \phi_-$, $\phi_\pm \in N_\pm$ olmak üzere

$$\|\phi_+\| = \|\phi_-\| \tag{2.2.2}$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma2.2.5: L_0, (n_+, n_-) indeks defektine sahip bir simetrik operatör olsun. Eğer $N_+ \oplus N_-$ uzayının bir N alt uzayı n-boyutlu ise N^* uzayının boyutu $n_+ + n_- - n$ dır.

İspat: $N_+ \oplus N_-$ uzayının n-boyutlu bir N alt uzayını alalım. $\{\phi_i\}_{i=1}^n$, N 'nin bir tabanı olsun. Diyelim ki $\phi \in N_+ \oplus N_-$ elemanı her bir $f \in N_+ \oplus N_-$ için $\langle f, g \rangle = 0$ koşulunu sağlamaktadır. Bu durumda gösterelim ki $\phi = 0$ dır. Gerçekten de, $\phi = \phi_+ + \phi_-$,$\phi_\pm \in N_\pm$ olmak üzere $f = \phi_+$ ve $f = \phi_-$ alırsak Lemma2.2.3'den $\phi_+ = \phi_- = 0$, yani $\phi = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla her bir $f \in N_+ \oplus N_-$ için $\langle f, g \rangle = 0$ koşulunu sağlayan $\phi \in N_+ \oplus N_-$ elemanı yalnızca sıfırdır.

Şimdi asıl amacımız için $N_+ \oplus N_-$ 'de $\{\phi_i^*\}_{i=1}^n$ fonksiyonellerini tanımlayalım öyle ki $f \in N_+ \oplus N_-$ için $\phi_i^*(f) = \langle f, \phi_i \rangle$ olsun. Buna göre her $f \in N_+ \oplus N_-$ için $\left(\sum \alpha_i \phi_i^*\right)(f) = 0$ ise $\langle f, \sum \alpha_i \phi_i \rangle = 0$ olacağından az önce ispatladığımıza göre $\sum \alpha_i \phi_i = 0$ olur. ϕ_i vektörleri lineer bağımsız olduğundan ϕ_i^* fonksiyonelleri de öyledir. Ayrıca N^*, $\{\phi_i^*\}_{i=1}^n$ kümesinin ortogonal tümleyeni olduğundan istenen elde edilir.

Bu lemma, N uzayı ve onun adjoint uzayının boyutları arasında bir bağıntı kuran önemli bir sonuçtur.

Şimdi bu bölümün temel teoremlerinden ilkini verelim:

Teorem2.2.6: Sonlu indeks defektli bir simetrik operatörün selfadjoint bir genişlemeye sahip olması için gerek ve yeter koşul onun indeks defektlerinin eşit olmasıdır.

İspat: Lemma2.2.2'ye göre aşağıdaki önermenin doğruluğunu göstermek yeterlidir.

" $n_+ = n_- \Leftrightarrow N_+ \oplus N_-$'nin en az bir selfadjoint alt uzayı vardır"

İlk olarak $n_+ = n_- = n$ olsun. Diyelim ki $\{\phi_{i\pm}\}_{i=1}^n$, $N_\pm$'nin ortonormal tabanıdır. $\phi_i = \phi_{i+} + \phi_{i-}$ ve $N = span\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ alalım. Buna göre $\forall f, g \in N$ için,

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \ , g = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ dır. Lemma2.2.3'e göre,

$$\langle f, g \rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i [\phi_{i+} + \phi_{i-}], \sum_j \beta_j [\phi_{j+} + \phi_{j-}] \right\rangle$$

$$= 2i \sum_i \sum_j \alpha_i \overline{\beta}_j [(\phi_{i+}, \phi_{j+}) - (\phi_{i-}, \phi_{j-})]$$

elde edilir. Ortonormallikten dolayı bu eşitliğin sağ tarafındaki terim sıfırdır. Dolayısıyla $\forall f, g \in N$ için $\langle f, g \rangle = 0$ olup N simetriktir. Yani $N \subset N^*$ kapsamı geçerlidir. Ayrıca

$$\dim N^* = n_+ + n_- - n = n = \dim N$$

olduğundan $N = N^*$ olup, N selfadjointtir.

Diğer yandan N selfadjoint ise $n_+ = n_-$ olduğunu gösterelim. Diyelim ki $\{\phi_i\}_{i=1}^{k}$, N'nin tabanı ve $\phi_i = \phi_{i+} + \phi_{i-}$, $\phi_{i\pm} \in N_\pm$ olsun. Bu durumda $\{\phi_{i+}\}_{i=1}^{k}$ lineer bağımsızdır. Gerçekten; öyle olmasa, yani $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi_{i+} = 0$ iken α_i'lerin en az biri sıfırdan farklı olsa bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi_{i-}$$

olur. Ayrıca $\sum \alpha_i \phi_{i+} = 0$ olduğundan simetrik N için $\sum \alpha_i \phi_{i-} = 0$ dır. Bu ise ϕ_i'lerin lineer bağımsızlığı ile çelişir. Yani $\{\phi_{i+}\}$ lineer bağımsızdır. Benzer şekilde $\{\phi_{i-}\}$ de lineer bağımsız olur. Bu ise $k \leq \min\{n_+, n_-\}$ demektir. Bununla birlikte N selfadjoint olduğundan Lemma2.2.5'e göre

$$k = n_+ + n_- - k \quad \Rightarrow \quad 2k = n_+ + n_-$$

olur. Şimdi $n_+ \neq n_-$ kabul edilirse $n_+ + n_- > 2\min\{n_+ + n_-\} \geq 2k$ olacağından bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla $n_+ = n_-$ olmalıdır.

Tanım2.2.7: $D(L_0^*)$ uzayındaki $f_1, f_2, \ldots, f_k$ fonksiyonlarını alalım. Eğer $f_j = h_j + \phi_j$, $h_j \in D(\overline{L_0})$, $\phi_j \in N_+ \oplus N_-$ gösteriminde ϕ_j'ler aralarında lineer bağımsız ise f_k elemanlarına $D(L_0)$ uzayına göre lineer bağımsız (veya göreceli lineer bağımsız) vektörler denir.

Buna göre $D(L_0^*)$'daki $f_1, f_2, \ldots, f_k$ elemanları için yine $D(L_0^*)$'da $det(\langle f_i, g_j \rangle) \neq 0$ koşulunu sağlayan $g_1, g_2, \ldots, g_k$ elemanları varsa $f_1, f_2, \ldots, f_k$ elemanları $D(L_0)$'a göre lineer bağımsızdır.

Şimdi ise eşit indeks defektli simetrik operatörün selfadjoint genişlemesinin nasıl kurulacağını veren temel sonucu ispatlayalım:

Teorem2.2.8: L_0, $n_+ = n_- = n$ sonlu indeks defektine sahip simetrik operatör olsun.

i) Eğer $n = 0$ ise L_0 'ın kapanışı onun yegane selfadjoint genişlemesidir.

ii) $n \neq 0$ ise ve $f_1, f_2, ..., f_n \in D(L_0^*)$, fonksiyonları,

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad (i, j = 1,2,...,n) \tag{2.2.3}$$

koşulunu sağlayan, $D(L_0)$'a göre lineer bağımsız elemanlar ise;

$$\mathcal{M} = \{f \in D(L_0^*) \mid \langle f, f_i \rangle = 0,\ i = \overline{1,n}\}$$

kümesi L_0'ın bir M selfadjoint genişlemesinin tanım kümesidir. Burada M, $f \in \mathcal{M}$ için $Mf = L_0^* f$ ile tanımlanır.

iii) Tersine, M, L_0'ın bir selfadjoint genişlemesi ve $h_1, h_2, ..., h_{2n} \in D(L_0^*)$, $D(L_0)$'a göre lineer bağımsız vektörler ise, h_i'lerin lineer kombinasyonları arasında (2.2.3) koşulunu sağlayan öyle $f_1, f_2, ..., f_n$ vektörleri vardır ki (ii) deki gibi tanımlanan $\mathcal{M}$ alt uzayı M'nin tanım kümesidir.

İspat: $f_i = g_i + \phi_i$, $g_i \in D(\overline{L_0})$, $\phi_i \in N_+ \oplus N_-$ diyelim. $N = span\{\phi_i\}$ seçersek, $\forall \phi, \phi' \in N$ için Lemma2.1.10'dan,

$$\langle \phi, \phi' \rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i \phi_i, \sum_j \beta_j \phi_j \right\rangle = 0$$

olur. Dolayısıyla N simetriktir. Yani $N \subset N^*$ dır. Ayrıca Lemma2.2.5'den N ve N^*'ın boyutları eşit olduğundan $N = N^*$ olup N' selfadjointtir. Bu durumda $\mathcal{M} = D(L_0^*) \oplus N$ olduğundan $\mathcal{M}$ tanım kümeli M genişlemesi selfadjoint olur. Üstelik bu M, L_0^*'ın $\mathcal{M}$ ye kısıtlamasıdır.

Tersine M, L_0'ın selfadjoint genişlemesi ise en az bir N selfadjoint uzayı için $D(M)=D(\overline{L_0})\oplus N$ eşitliği geçerlidir. Bu durumda N için uygun bir taban seçimi ispatı tamamlar.

Örnek2.2.9: $A=\{f:[0.1]\to\mathbb{C} \mid f$ mutlak sürekli, $f'\in L_2(0,1)\}\subset L_2(0,1)$ olmak üzere $\Omega=[0,1]$ üzerinde tanımlı f fonksiyonları için

$$D(L)=\{f\in A \mid f(0)=f(1)=0\},\ Lf=if'$$

operatörünü alalım. $\forall f,g\in D(L)$ için;

$$(Lf,g)=\int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx$$

$$=i\int_0^1 \overline{g(x)}f'(x)dx$$

$$=i\left(\overline{g(x)}f(x)\right)\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)\overline{ig(x)}'\,dx$$

$$=(f,Lg)$$

eşitliğinden dolayı L simetriktir. Şimdi L'nin adjointini bulalım. $\forall g\in A$ için, $(Lf,g)=(f,k)$ eşitliği $\forall f\in D(L)$ için sağlandığından $A\subset D(L^*)$ dır. Diğer yandan,

$$L^*f=if\Rightarrow if'=if\Rightarrow f=c_1e^x,$$

$$L^*f=-if\Rightarrow if'=-if\Rightarrow f=c_2e^{-x}$$

olduğundan, $N_-=N(L^*+i\mathrm{I})$ ve $N_+=N(L^*-i\mathrm{I})$ olmak üzere (2.1.3) eşitliğinden,

$$D(L^*)=D(L)\oplus N_+\oplus N_-=\{g \mid g=f(x)+c_1e^x+c_2e^{-x},\ f\in D(L)\}$$

alınır. Açıktır ki $f(x), e^{x}, e^{-x} \in A$ dır. Bu gösterir ki $D(L^*) \subset A$ dır. Dolayısıyla, $D(L^*) = A$ olur. O halde verilen $Lf = if'$ operatörünün adjointi, A tanım kümeli, $L^* f = if'$ operatörüdür.

Şimdi L operatörünün selfadjoint genişlemesini bulalım.

$L^* f = if$ ve $L^* f = -if$ denklemlerinin çözümleri olan e^x ve e^{-x} fonksiyonları $D(L^*)$ kümesine ait olduğuna göre L'nin indeks defektleri $(1,1)$ dır. Şu halde genişlemenin tanım kümesi, $D(L)$'ye göre lineer bağımsız olan ve $\langle f_1, f_1\rangle = 0$ koşullu $f_1 \in D(L^*)$ elemanları yardımı ile elde edilen,

$$\mathcal{M} = \left\{ f \in D(L^*) \mid \langle f, f_1\rangle = 0 \right\}$$

kümesidir. Bu koşullardan,

$$\langle f, f_1\rangle = 0 \Rightarrow f(1)\overline{f_1}(1) - f(0)\overline{f_1}(0) = 0 \qquad (2.2.4)$$

$$\langle f_1, f_1\rangle = 0 \Rightarrow f_1(1)\overline{f_1}(1) - f_1(0)\overline{f_1}(0) = 0 \qquad (2.2.5)$$

eşitlikleri alınır. Şimdi, h_1, h_2, $h_1(1) = 1$, $h_1(0) = 0$, $h_2(1) = 0$, $h_2(0) = 1$ koşullarını sağlayan elemanlar olmak üzere;

$$\det\left(\langle h_i, h_j\rangle\right) = 1 \neq 0$$

olduğundan h_1, h_2 $D(L)$'ye göre lineer bağımsızdır.

$$f_1(x) = \alpha h_1(x) + \beta h_2(x)$$

seçersek (2.2.5)'den;

$$\{\alpha h_1(1) + \beta h_2(1)\}\{\overline{\alpha} h_1(1) + \overline{\beta} h_2(1)\} = \{\alpha h_1(0) + \beta h_2(0)\}\{\overline{\alpha} h_1(0) + \overline{\beta} h_2(0)\}$$

elde ederiz. Buradan ise $\alpha\overline{\alpha} = \beta\overline{\beta}$ ve dolayısıyla $|\alpha|^2 = |\beta|^2$ yani $\dfrac{\alpha}{\beta} = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ bulunur. Bunu (2.1.4)'de kullanırsak;

$$f(1) = e^{i\theta} f(0), \ \theta \in \mathbb{R}$$

alırız. Şu halde,

$$\mathcal{M}=\left\{f\in D\left(L^{*}\right) \mid f(1)=e^{i\theta}f(0),\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

kümesi, aranan selfadjoint genişlemenin tanım kümesidir. Dolayısıyla L'nin selfadjoint genişlemesi, $\mathcal{M}=D(M)$, $Mf=if'$ operatörüdür.

Yukarıdaki $\ell f=if'$ diferansiyel ifadesi için aralığı $\Omega=[0,\infty)$ seçelim. $f'=-f$ denkleminin çözümü olan $f(x)=e^{-x}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında karesiyle Lebesque anlamında integrallenebilen mutlak sürekli fonksiyon olduğundan $D(L^{*})$'a aittir; oysa ki $f'=f$ denkleminin çözümü olan $f(x)=e^{x}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sonlu Lebesque integraline sahip olmadığından $D(L^{*})$ kümesine ait değildir. Dolayısıyla, ℓ diferansiyel ifadesinin ürettiği simetrik operatörün indeks defektleri $(0,1)$ dır. Buradan ise bu simetrik operatörün bir selfadjoint genişlemeye sahip olmadığı sonucu çıkar. Çünkü indeks defektleri eşit değildir.

Eğer aralığı $\Omega=(-\infty,+\infty)$ alsaydık bu durumda yukarıdaki çözümlerin her ikisi de bu aralıkta karesiyle integrallenemeyen fonksiyon olduğundan ℓ diferansiyel ifadesinin ürettiği simetrik operatörün indeks defektleri $(0,0)$ olacaktı. Dolayısıyla bu simetrik operatörün yegane selfadjoint genişlemesi onun kapanışı olacaktı.

2.3. DİSSİPATİVE OPERATÖRLER:

Simetrik operatör tanımından kolayca gösterilebilir ki, L bir simetrik operatör ise, $\forall f\in D(L)$ için,

$$\operatorname{Im}(Lf,f)=0 \qquad (2.3.1)$$

eşitliği geçerlidir. Şimdi, incelemelerimizi daha geniş bir operatör sınıfına genişletecek ve simetrik operatörlerin sağladığı bazı özellikleri bu sınıfın elemanlarına taşıyacağız.

Tanım2.3.1: H bir Hilbert uzayı, A, $\overline{D(A)}=H$ tanım kümeli bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall f\in D(A)$ için,

$$\operatorname{Im}(Af,f)\geq 0 \qquad (2.3.2)$$

ise A'ya dissipative operatör;

$$\operatorname{Im}(Af,f)\leq 0 \tag{2.3.3}$$

ise A'ya accumulative operatör denir. A dissipative operatör iken $-A$ accumulative operatör olacağından dissipative operatörler için geçerli olan sonuçlar accumulative operatörler için de geçerlidir.

Eğer A dissipative operatörünün kendisinden başka bir dissipative genişlemesi mevcut değil ise A' ya maksimal dissipative operatör adı verilir.

Şimdi, Lemma2.1.3'de simetrik operatörler için ispatladığımız gerçekleri dissipative operatörler için verelim:

Teorem2.3.2: A bir dissipative operatör ise aşağıdakiler geçerlidir:

i) A kapanabilir.

ii) $\overline{A}$ kapanışı da dissipative operatördür.

iii) A maximal dissipative ise $\overline{A}=A$ dır.

İspat:i) $\overline{G(A)}$'nın bir grafik olduğunu, yani $[0,g]\in\overline{G(A)}$ iken $g=0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $f_n\to 0$ ve $Af_n\to g$ olacak şekilde $(f_n)\subset D(A)$ dizisini alalım. O halde $\forall f\in D(A)$ için, $\operatorname{Im}(A(f+\alpha f_n),f+\alpha f_n)\geq 0$ eşitsizliği $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ için sağlanır. Buradan ise,

$$\operatorname{Im}(Af,f)+\operatorname{Im}(\alpha(g,f))\geq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ için sağlanacağından $(g,f)=0$ ve dolayısıyla $g=0$ bulunur. Bu nedenle A kapanabilirdir.

ii) A dissipative ise $\operatorname{Im}(Af,f)\geq 0$, yani $\operatorname{Im}(f,Af)\leq 0$ dır.

$(f,\overline{A}f)\in G(\overline{A})=\overline{G(A)}$ alalım. Buna göre $f_n\to f$, $Af_n\to\overline{A}f$ olacak şekilde $(f_n)\subset D(A)$ vardır. $\operatorname{Im}(f_n,Af_n)\leq 0$ olduğundan $\operatorname{Im}(f,\overline{A}f)\leq 0$ ve dolayısıyla $\operatorname{Im}(\overline{A}f,f)\geq 0$ olur. Bu nedenle $\overline{A}$ dissipative operatördür.

iii) (ii)'nin direkt bir sonucudur.

Lemma2.3.3: A bir kapalı dissipative operatör ve $\operatorname{Im}\lambda<0$ ise $R(A-\lambda I)$ kapalıdır.

İspat: A kapalı ise $A-\lambda I$ operatörü de kapalıdır. Ayrıca $\forall f\in D(A)$ için;

$$\operatorname{Im}((A-\lambda I)f,f)=\operatorname{Im}(Af,f)-\operatorname{Im}\lambda\|f\|^2\geq 0$$

olacağından $\operatorname{Im}((A-\lambda I)f,f)\geq -\operatorname{Im}\lambda\|f\|^2$ bulunur. Diğer yandan;

$$\operatorname{Im}((A-\lambda I)f,f)\leq |((A-\lambda I)f,f)|\leq \|(A-\lambda I)f\|\|f\|$$

olduğundan $\|(A-\lambda I)f\|\geq(-\operatorname{Im}\lambda)\|f\|$ elde edilir. Buradan ise Sonuç1.3.11'e göre $A-\lambda I$'nın kapalılığından; $R(A-\lambda I)$'nın kapalılığı çıkar.

Teorem2.3.4: A'nın bir maximal dissipative operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $\operatorname{Im}\lambda<0$ için $R(A-\lambda I)=H$ olmasıdır.

İspat: A maximal dissipative operatör ise kapalı olacağından Lemma2.3.3'den $R(A-\lambda I)=H$ elde edilir. Tersine $\operatorname{Im}\lambda<0$ için $R(A-\lambda I)=H$ olsun. Diyelim ki A maximal değildir. Yani A'nın kendisinden farklı bir $\widetilde{A}$ dissipative genişlemesi vardır. O halde öyle bir $f_0\in D(\widetilde{A})$ vardır ki $f_0\notin D(A)$ dır. Ancak $R(A-\lambda I)=H$ olduğundan, $(\widetilde{A}-\lambda I)f_0=(A-\lambda I)g_0$ olacak şekilde bir $g_0\in D(A)$ bulunmalıdır. $g_0\in D(A)$ için $Ag_0=\widetilde{A}g_0$ olduğundan $(\widetilde{A}-\lambda I)h_0=0$ olacak şekilde bir $h_0\neq 0$ elemanı vardır. Buradan ise;

$$\operatorname{Im}(\tilde{A}h_0,h_0)=(\operatorname{Im}\lambda)\|h_0\|^2<0$$

çıkar ki bu, $\widetilde{A}$'nın dissipative olması ile çelişir. Dolayısıyla A maximal dissipative operatör olur.

Teorem2.3.5: Her bir dissipative operatör bir maximal dissipative genişlemeye sahiptir.

İspat: A kapalı değilse bile $\overline{A}=A_1$ diyelim. Teorem2.3.2'de A_1'in de dissipative olduğunu göstermiştik. Şimdi A_1'in maximal dissipative genişlemeye sahip olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

$\operatorname{Im}\lambda<0$ için $R(A_1-\lambda I)\neq H$

olsun. Buna göre $N=R(A_1-\lambda I)^{\perp}\neq\{0\}$ dır. Şimdi $\widetilde{A}$ genişlemesini $D(\widetilde{A})=D(A_1)+N$ üzerinde $\widetilde{A}(f+u)=A_1f+\overline{\lambda}u$ eşitliği ile kuralım. Burada $f\in D(A_1),u\in N$ dır. Bu tanım anlamlıdır. Zira

$$f+u=0 \Rightarrow \left(\widetilde{A}(f+u), f+u\right)=0$$
$$\Rightarrow (Af,f)+(Af,u)=0$$
$$\Rightarrow (Af,f)-\overline{\lambda}(u,u)=0$$
$$\Rightarrow \overline{\lambda}\|u\|^2$$
$$\Rightarrow u=0$$
$$\Rightarrow f=0$$

dır. Şimdi $\widetilde{A}$ 'nın dissipative olduğunu gösterelim:

$$\left(\tilde{A}(f+u), f+u\right)=(A_l f,f)+\overline{\lambda}(u,f)+(A_l f,u)+\overline{\lambda}(u,u)$$
$$=(A_l f,f)+\overline{\lambda}(u,f)+\left(f,A_l^{*}u\right)+\overline{\lambda}(u,u)$$
$$=(A_l f,f)+\overline{\lambda}(u,f)+\lambda(f,u)+\overline{\lambda}(u,u)$$
$$=(A_l f,f)+2\operatorname{Re}\left(\lambda(f,u)\right)+\overline{\lambda}(u,u)$$

eşitliği geçerlidir. Buradan,

$$\operatorname{Im}\left(\widetilde{A}(f+u), f+u\right)=\operatorname{Im}(Af,f)+\|u\|^2 \operatorname{Im}\overline{\lambda}\geq 0$$

elde edilir. Bu ise $\widetilde{A}$ 'nın dissipative olması demektir.

2.4. POZİTİF TANIMLI SİMETRİK OPERATÖRLER:

Tanım2.4.1: A, bir H Hilbert uzayında tanımlı simetrik operatör olsun. Eğer $\forall f \in D(A)$ için $(Af,f)\geq m\|f\|^2$ olacak şekilde bir $m>0$ sayısı varsa A 'ya pozitif tanımlı simetrik operatör denir. Bu m sayısı ise A 'nın alt sınırı olarak adlandırılır.

$$Af=-f'',\ D(A)=\{f\in L_2(0,1): f' \text{ mutlak sürekli, } f(0)=f(1)=0\}$$

operatörü bir pozitif tanımlı simetrik operatördür.

Gerçekten de; $\forall f \in D(A)$ için,

$$(Af,f)=-\int_0^1 f''(x)\overline{f(x)}dx=\int_0^1 |f'(x)|^2 dx$$

eşitliği kısmi integrasyon ile gösterilebilir. Ayrıca; $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt$ olduğundan,

$$|f(x)|^2\leq\left(\int_0^x |f'(t)|dt\right)^2\leq\int_0^x dt\int_0^x |f'(t)|^2 dt = x\int_0^x |f'(t)|^2 dt\leq x\int_0^1 |f'(t)|^2 dt$$

alınır. Her iki yanı x'e göre $(0,1)$ aralığında integrallersek,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \le \int_0^1 x \int_0^1 |f'(t)|^2 dt dx = \frac{1}{2} \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

elde ederiz. Bu ise $\|f\|^2 \le \frac{1}{2}(Af, f)$ olduğunu kanıtlar.

Teorem2.4.2: A pozitif tanımlı simetrik operatör ise o zaman bir pozitif tanımlı selfadjoint A' genişlemesine sahiptir.

İspat: $\|u\|_A = (Au, u)^{1/2}$ normuna göre $D(A)$ uzayının tamlanışını alalım. Burada yeni iç çarpım $(u,v)_A = (Au, v)$ şeklinde olacaktır. Bu şekilde tanımlanmış Hilbert uzayını H_A ile gösterelim.

Şimdi A^*'ın $D(A') = D(A^*) \cap H_A$ tanım kümeli A' genişlemesini alalım. $A \subset A'$ olduğu açıktır. $D(A')$'nın seçiminden dolayı, $u, v \in D(A')$ ise öyle $(u_n),(v_n) \subset D(A)$ dizileri vardır ki, $\|u - u_n\|_A \to 0$, $\|v - v_n\|_A \to 0$ dır. Dolayısıyla $m, n \to \infty$ iken;

$$(v_n, v_m)_A = (Au_n, v_m) = (u_n, Av_m)$$

terimleri limite sahiptir. Tekrarlı limitlerin eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (Au_n, v_m) &= \lim_{n\to\infty} (Au_n, v) \\ &= \lim_{n\to\infty} (u_n, A^* v) \\ &= \lim_{n\to\infty} (u_n, A'v) \\ &= (u, A'v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (Au_n, v_m) &= \lim_{m\to\infty} (Au, v_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} (u, A^* v_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} (A^* u, v_m) \\ &= (A'u, v) \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Dolayısıyla $(A'u, v) = (u, A'v)$ olduğundan A' simetriktir.

Şimdi herhangi $v \in H$ alalım. $\forall u \in D(A)$ için,

$$\left|(u,v)\right| \le \|u\|\,\|v\| \le \|v\|\frac{1}{\sqrt{m}}(Au,u)^{1/2} = \|u\|_A\|v\|\frac{1}{\sqrt{m}}$$

olduğundan (u,v) sınırlı lineer fonksiyoneldir ve Riezs teoremine göre $\forall u \in D(A)$ için bir tek $v^* \in H_A$ vardır öyle ki, $(u,v) = (u,v^*)_A = (Au,v^*)$ dır. Buradan ise $v^* \in D(A^*)$ ve $A^*v^* = v$ elde edilir. Ayrıca $v^* \in H_A$ olduğundan $v \in D(A')$ olup, $v = A'v^*$ yani $v \in R(A')$ olur. Dolayısıyla $R(A') = H$ dır. Şimdi bunun yardımıyla A' 'nın selfadjoint olduğunu gösterelim:

$\forall g \in D(A'^*)$ için bir $h \in D(A')$ vardır ki, $A'h = A'^*g$ dır. Dolayısıyla, $f \in D(A')$ için,

$$(A'f,g) = (f,A'^*g) = (f,A'h) = (A'f,h)$$

olur. Buradan ise, $g - h \in R(A')^{\perp} = \{0\}$, yani $g = h$ elde edilir. Böylece $g \in D(A')$ olup A' selfadjointtir.

Teoremde kurulan A' genişlemesi A operatörünün Friedrichs genişlemesi olarak adlandırılır.

3. BÖLÜM

SİMETRİK DİFERANSİYEL OPERATÖRLER:

Bir önceki bölümde gördük ki, simetrik bir operatörün selfadjoint genişlemesinin var olması için gerekli ve yeterli koşul, onun sonlu ve eşit indeks defektlere sahip olmasıdır. Bu bize diferansiyel operatörlerin bu bakımdan uygun olduğu sonucunu verir. Zira n. mertebeden bir diferansiyel denklemin en fazla n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Dolayısıyla diferansiyel operatörlerin indeks defektleri sonludur.

Bu bölümde, 2. Bölümde elde edilen sonuçları 2. mertebeden diferansiyel operatörlere uygulayacağız.

3.1. TEMEL KAVRAMLAR:

$$\ell f = (pf')' + qf \tag{3.1.1}$$

eşitliği ile tanımlı ℓ diferansiyel ifadesi 2. mertebeden bir formal diferansiyel operatör olarak adlandırılır. Gerçekte bu ifadenin bir operatör belirtebilmesi için tanım uzayının belli olması gerekir. Formal kelimesinin kullanılması bu yüzdendir. Burada $p(x)$ ve $q(x)$; a,b uç noktalı bir Ω aralığında tanımlı ve $C^{\infty}(\Omega)$ uzayından alınan fonksiyonlardır. Ayrıca, $\forall x \in (a,b)$, $p(x) \neq 0$ kabul edilir. a ve b sayılarının biri yada ikisi birden sonsuz olabilir.

Tanım3.1.1: Eğer a sonlu, $p(a) \neq 0$ ve $p,q \in C^{\infty}([a,b))$ ise a'ya regüler sol uç nokta; benzer şekilde b sonlu, $p(b) \neq 0$ ve $p,q \in C^{\infty}((a,b])$ ise b'ye regüler sağ uç nokta denir. Regüler olmayan uç noktaya singüler uç nokta adı verilir. Bir formal ℓ operatörü a ve b'nin her ikisi de regüler olduğunda regüler operatör, aksi halde singüler operatör olarak adlandırılır.

Tanım3.1.2: $\ell f=(pf')'+qf$ formal operatörü için, $\ell^* g=(\overline{p}g')'+\overline{q}g$ formal operatörü ℓ'nin formal adjointi olarak adlandırılır. Eğer $\ell=\ell^*$ ise ℓ'ye formal selfadjoint operatör denir.

Açıktır ki, ℓ'nin formal selfadjoint olması için gerekli ve yeterli koşul p ve q fonksiyonlarının reel değerli olmasıdır.

Lemma3.1.3: ℓ formal selfadjoint ise her f ve g için,

$$\overline{g}\ell f-f\overline{\ell g}=\frac{d}{dx}[f,g] \tag{3.1.2}$$

eşitliği geçerlidir. Burada,

$$[f,g]=p(f'\overline{g}-f\overline{g}') \tag{3.1.3}$$

dır.

İspat: Doğrudan hesaplamayla,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f,g]&=\frac{d}{dx}p(f'\overline{g}-f\overline{g}')\\&=p'(f'\overline{g}-f\overline{g}')+p(f'\overline{g}-f\overline{g}')'\\&=p'f'\overline{g}-p'f\overline{g}'+p(f''\overline{g}+f'\overline{g}'-f'\overline{g}'-f\overline{g}'')\\&=p'f'\overline{g}-p'f\overline{g}'+pf''\overline{g}+pf'\overline{g}'-pf'\overline{g}'-pf\overline{g}''\\&=\overline{g}(pf''+p'f'+qf)-f(p\overline{g}''+p'\overline{g}'+q\overline{g})\\&=\overline{g}\ell f-f\overline{\ell g}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Sonuç3.1.4: Eğer $[\alpha,\beta]$, Ω'nın sonlu alt aralığı ise $f,g,\ell f,\ell g\in L_2(\alpha,\beta)$ olmak üzere,

$$\int_\alpha^\beta\left(\overline{g}\ell f-f\overline{\ell g}\right)dx=[f,g]_\alpha^\beta \tag{3.1.4}$$

Green formülü sağlanır. Burada,

$$[f,g]_\alpha^\beta = [f,g](\beta) - [f,g](\alpha) \tag{3.1.5}$$

dır.

3.2. REGÜLER OPERATÖRÜN SELFADJOİNT GENİŞLEMESİ:

Şimdi, $\Omega = [a,b]$ üzerinde,

$$\ell f = (pf')' + qf$$

formal operatörünü alalım. Diyelim ki ℓ regülerdir. Buna göre,

$$A = \{f \in L_2(\Omega) \mid f' \text{ mutlak sürekli, } f'' \in L_2(\Omega)\}$$

olmak üzere,

$$D(L) = \{f \in A \mid f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\}$$

$$D(L') = A$$

$$Lf = \ell f \, , \; L'f = \ell f$$

operatörlerini tanımlayalım. Tanımdan açıkça görülür ki, $L \subset L'$ dır.

Lemma3.2.1:

$$(L'f,g) - (f,L'g) = [f,g]_a^b, \; f,g \in D(L') \tag{3.1.6}$$

$$(Lf,g) = (f,L'g), \; f \in D(L), \; g \in D(L') \tag{3.1.7}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: Açıktır ki (3.1.6) eşitliği (3.1.4) eşitliğinden (3.1.7) eşitliği ise $D(L)$'nin tanımından çıkar. Zira, $f \in D(L)$ ise $[f,g]_a^b = 0$ olacağından (3.1.7), (3.1.6)'dan elde edilir.

(3.1.6) ve (3.1.7) eşitlikleri ℓ'nin formal selfadjoint olmasının direkt bir sonucudur. Üstelik bu eşitlikler ℓ ile L, L' arasında bir bağlantı kurar. Ayrıca (3.1.6) eşitliği $\langle \cdot,\cdot \rangle$ bilineer formu için yeni bir gösterim sağlar.

Lemma3.2.2: $\overline{D(L)} = L_2(a,b)$ dır.

İspat: $C_0^\infty[a,b]=\{f\in C^\infty[a,b] \mid f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0\}$ uzayı, $L_2(a,b)$'de yoğun olduğundan ve $D(L)\supset C_0^\infty[a,b]$ olduğundan lemma geçerlidir.

Teorem3.2.3: L simetrik operatördür.

İspat: Lemma3.2.1'deki (3.1.7) eşitliğinden ve Lemma3.2.2'den teoremin ispatı açıktır.

Lemma3.2.4: Herhangi bir $g\in L_2(\Omega)$ için, $\ell f=g$ denklemini ve $f(a)=f'(a)=0$ koşullarını sağlayan bir tek f fonksiyonu vardır.

Lemma3.2.5: $R(L)=N(L')^{\perp}$ dır.

İspat: Lemma3.2.4'e göre, $L'f=g$ denklemi, $f(a)=f'(a)=0$ koşullarını sağlayan bir tek f çözümüne sahiptir. $N(L')$'nın $\{k_1,k_2\}$ tabanını alalım öyle ki, $k_1(b)=k_2'(b)=1$ ve $k_1'(b)=k_2(b)=0$ koşulları sağlansın. Bu durumda;

$$(g,k_1)=(L'f,k_1)=[f,k_1]_a^b=p(b)f'(b)$$
$$(g,k_2)=(L'f,k_2)=[f,k_2]_a^b=p(b)f(b)$$

eşitlikleri elde edilir. ℓ regüler olduğundan $p(b)\neq 0$ dır. Dolayısıyla $(g,k_j)=0,\ j=1,2$ olması için gerekli ve yeterli koşul $f\in D(L)$ olmasıdır. Buradan ise $g\in N(L')^{\perp}\Leftrightarrow g\in R(L)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem3.2.6: $L^*=L'$ ve $(L')^*=L$ dır.

İspat: (3.1.7) eşitliğinden $L^*\supset L'$ olduğu elde edilir. Zira adjointin tanım kümesi maximaldir. Dolayısıyla ters kapsamı da gösterebilirsek ispatı tamamlarız.

Şimdi herhangi $g\in D(L^*)$ alalım. $L^*g=h$ ise $L'f=h$ denkleminin bir mutlak sürekli f çözümü vardır ve herhangi $k\in D(L)$ için,

$$(k,h)=(k,L'f)=(Lk,f)$$

dır. Ayrıca,

$$(k,h)=\left(k,L^{*}g\right)=(Lk,g)$$

olacağından, $(Lk,f-g)=0$ yani $f-g\in R(L)^{\perp}$ olur. $R(L)^{\perp}=N(L')$ olduğundan $f-g\in N(L')$ elde edilir. O halde $f\in D(L')$ olduğundan g de öyle olmalıdır. Dolayısıyla $L^{*}\subset L'$ olacağından $L^{*}=L'$ eşitliği ispatlanmış olur.

Şimdi $(L')^{*}=L$ olduğunu gösterelim. $L^{**}=\overline{L}\supset L$ ve $L^{*}=L'$ olduğundan $(L')^{*}=L^{**}=\overline{L}\supset L$ yani $(L')^{*}\supset L$ dır. Tersine herhangi bir $f\in D\left((L')^{*}\right)$ ve $\forall g\in D(L)$ için, $\left((L')^{*}f,g\right)=(f,L'g)=(f,Lg)$ olacağından $f\in D\left(L^{*}\right)$ olur. Yani $(L')^{*}\subset L^{*}=L'$ dır. Böylece, $f\in D\left(L^{*}\right)$, $g\in D(L')$ için,

$$(L'g,f)=\left(g,(L')^{*}f\right)=(g,L'f)$$

elde edilir. Bu nedenle (3.1.6) eşitliğinden $[g,f]_{a}^{b}=0$ bulunur. Burada $g\in D(L')$ için özel olarak $g'(a)=1,g(a)=g(b)=g'(b)=0$ koşullu fonksiyon seçersek; $[g,f]_{a}^{b}=0$ eşitliğinden $f(a)=0$ buluruz. g için benzer seçimlerle $f'(a)=f(b)=f'(b)=0$ elde edilir. Bu ise $f\in D(L)$ demektir. Yani $(L')^{*}=L$ dır.

Sonuç3.2.7: L bir kapalı operatördür.

İspat: $(L')^{*}$ adjoint operatörü kapalı olduğundan $(L')^{*}=L$ eşitliğine göre L de kapalıdır.

3.3. SİNGÜLER OPERATÖRÜN SELFADJOİNT GENİŞLEMESİ:

ℓ singüler olduğunda yukarıdaki yöntemin direk bir genelleşmesi yapılmak istenirse bazı zorluklarla karşılaşılır. Zira ℓ'nin ürettiği kapalı simetrik operatörün tanım kümesi hem ℓ'nin katsayılarına hem de Ω'ya bağlıdır. Ω'nın uç noktaları sonsuz olabileceği gibi, ℓ'nin katsayıları Ω'da integrallenemeyebilir. Bu problemleri aşmak için uygulanacak olan taktik, Ω'nın uç noktalarının komşuluklarında sıfır olan fonksiyonların oluşturduğu kümeyi, simetrik operatörün tanım kümesi olarak seçmektir.

Diyelim ki, D_0 kümesi f' mutlak sürekli, $f'' \in L_2(\Omega)$ koşullarını sağlayan ve (a,b)'nin sonlu bir $[a_1,b_1]$ alt aralığının dışında sadece sıfır değerini alan fonksiyonların kümesi olsun. Burada her bir fonksiyon için ayrı bir alt aralık olabilir.

$$A = \{ f \in L_2(\Omega) \mid f' \text{ mutlak sürekli, } f'' \in L_2(\Omega) \}$$

kümesi 3.2'de tanımlanmıştı. Bu kümeler üzerinde,

$$L_0 f = \ell f,\ D(L_0) = D_0,\quad L'f = \ell f,\ D(L') = A$$

operatörlerini tanımlayalım.

Açıktır ki $D_0 \subset A$ ve $L_0 \subset L'$ dır. Ayrıca $f \in D_0$ için,

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f(\beta) = f'(\beta) = 0$$

olacak şekilde $a < \alpha < \beta < b$ sayıları vardır.

Lemma3.3.1: $\forall f \in D(L_0), \forall g \in D(L')$ için,

$$(L_0 f, g) = (f, L'g)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $f \in D_0$ için, $f(\alpha) = f'(\alpha) = f(\beta) = f'(\beta) = 0$ olacak şekilde $a < \alpha < \beta < b$ sayıları var olduğundan Green formülünde $[f,g]_\alpha^\beta = 0$ olur. Dolayısıyla verilen eşitlik sağlanır.

Teorem3.3.2: L_0 simetriktir.

İspat: Bir önceki lemmadan dolayı $\forall f, g \in D(L_0)$ için,

$$(L_0 f, g) = (f, L_0 g)$$

eşitliğinin sağlanacağı açıktır. Ayrıca $D_0 \supset C_0^\infty[a,b]$ ve $\overline{C_0^\infty[a,b]} = L_2(a,b)$ olduğundan D_0, $L_2(a,b)$ uzayında yoğundur. Dolayısıyla L_0 simetriktir.

Teorem3.3.3: $L_0^* = L'$ dır.

İspat: $L_0 \subset L' \subset L_0^*$ olduğundan, sadece $L_0^* \subset L'$ olduğunu göstermek yeterlidir. Diyelim ki ℓ, Ω içindeki bir kapalı ve sınırlı $\Delta = [\alpha, \beta]$ aralığında regülerdir. Bu durumda L_Δ ve L'_Δ operatörleri, sırasıyla L_0 ve L' operatörlerinin Δ aralığına kısıtlanmış operatörleri olmak üzere, L_Δ ve L'_Δ, $L_2(\Delta)$ uzayı üzerinde regüler durumda olduğu gibi tanımlanır.

Şimdi keyfi bir $f \in D(L_0^*)$ alalım. Bu durumda her bir $h \in D(L_0)$ için,

$$(L_0 h, f) = (h, L_0^* f)$$

olur. $L_0^* f = g \in L_2(\Omega)$ olmak üzere, Δ'da tanımlı ve $h(\alpha) = h'(\alpha) = h(\beta) = h'(\beta) = 0$ koşulunu sağlayan bir h fonksiyonu seçelim. Bu durumda f_Δ, f fonksiyonunun Δ'ya kısıtlanışı olmak üzere yukarıdaki eşitlikten,

$$(L_\Delta h, f_\Delta) = (h, g_\Delta)$$

elde edilir. Burada $f_\Delta \in D(L_\Delta^*)$, $g_\Delta = L_\Delta^* f_\Delta$ dır. Regüler durumda $L_\Delta^* = L'_\Delta$ olduğundan $f_\Delta \in D(L'_\Delta)$, $g_\Delta = L'_\Delta f_\Delta$ olur. Bu durumda $f_\Delta \in A = D(L')$ dır. Δ keyfi olduğundan $f \in D(L')$ olur. Bu ise $L_0^* = L'$ demektir.

Daha önce regüler durum için $[f,g]_a^b$ ifadesini tanımlamıştık. Bu gösterimi singüler duruma taşımak için limitten yararlanacağız. Şimdi aşağıdaki tanımlamaları göz önüne alalım:

$$[f,g]^b = \lim_{x \to b^-} [f,g](x)$$
$$[f,g]_a = \lim_{x \to a^+} [f,g](x)$$
$$[f,g]_a^b = [f,g]^b - [f,g]_a$$

Lemma3.3.4: ℓ regüler veya singüler formal diferansiyel operatör ise her bir $f, g \in A$ için yukarıdaki limitler mevcut ve sonludur.

İspat: $a < \alpha < x < b$ için Green formülüne göre,

$$\int_{\alpha}^{x}\left(\overline{g}\ell f - f\overline{\ell g}\right)dt = [f,g](x) - [f,g](\alpha)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $f,g \in D(L')$ olduğundan $f,g,\ell f,\ell g \in L_2(\Omega)$ dır. Yani yukarıdaki eşitliğin sol yanındaki integral mevcuttur. Dolayısıyla $x \to b^-$ için limite geçersek yukarıdaki ilk limitin varlığı çıkar. Diğeri de benzer şekilde gösterilir.

Teorem3.3.5: Formal selfadjoint ℓ diferansiyel ifadesinden elde edilen simetrik operatör (m,m) eşit indeks defektlerine sahiptir. Diferansiyel ifade ikinci mertebeden olduğunda $m = 0,1$ veya 2 dır.

İspat: ℓ formal selfadjoint olduğundan katsayıları olan p ve q fonksiyonları reel değerlidir. Dolayısıyla, $\ell f = if$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\ell\overline{f} = -i\overline{f}$ olmasıdır. Buradan ise indeks defektlerin eşitliği çıkar. ℓ ikinci mertebeden olduğunda yukarıdaki denklemlerin en fazla iki lineer bağımsız çözümü olacağından son iddianın doğruluğu görülür.

Şimdi ikinci mertebeden formal selfadjoint diferansiyel ifadenin ürettiği simetrik operatörün selfadjoint genişlemesinin nasıl kurulacağını veren temel sonucu verelim. Bunun ispatı genel simetrik operatörler için ispatladığımız teorem de $\langle f,g\rangle = [f,g]_a^b$ alınmasıyla elde edilir.

Sonuç3.3.6: ℓ formal selfadjoint diferansiyel ifadesinin ürettiği L_0 simetrik operatörü (m,m), $m \leq 0,1,2$ indeks defektlerine sahiptir ve bu yüzden L_0'ın bir selfadjoint genişlemesi vardır. Ayrıca;

i) $m = 0$ ise $\overline{L_0} = L'$ operatörü L_0'ın yegane selfadjoint genişlemesidir.

ii) $m \neq 0$ ise, $\{f_i\}_{i=1}^{m} \subset D(L')$,

$[f_i,f_j]_a^b = 0$, $i,j = 1,2$

koşullarını sağlayan, $D(L_0)$'a göre lineer bağımsız elemanlar olmak üzere,

$$\mathcal{M} = \left\{f \in D(L') \mid [f,f_i]_a^b = 0,\ i = \overline{1,m}\right\}$$

kümesi L_0'ın bir selfadjoint genişlemesinin tanım kümesidir.

iii) Tersine L_0'ın her bir selfadjoint genişlemesi bu yolla elde edilir. Genelliği bozmadan, f_i elemanları, $D(L')$ kümesinde $D(L_0)$'a göre lineer bağımsız olan $2m$ sayıda fonksiyonun lineer kombinasyonları arasından seçilebilir.

Sonuç3.3.7: Diyelim ki Ω aralığının sol uç noktası, a, regülerdir. Bu durumda, ℓ'nin ürettiği L_0'ın indeks defektleri $(1,1)$ ise onun bir selfadjoint genişlemesinin tanım kümesi, $\varphi \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathcal{M} = \{f \in D(L') \mid f(a)\cos\varphi - f'(a)\sin\varphi = 0,\}$$

şeklinde bulunur.

İspat: L_0'ın indeks defektleri $(1,1)$ olduğundan bir önceki sonuca göre herhangi selfadjoint genişlemenin tanım kümesi $[f, f_1]_a^b = 0$ koşulu ile elde edilir. Burada f_1, $[f_1, f_1]_a^b = 0$ koşulunu sağlayan, $D(L_0)$'a göre lineer bağımsız bir elemandır. Şimdi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$f_1 = \alpha h_1 + \beta h_2$$

alalım, öyle ki, en az bir $c \in (a,b)$ ve her bir $x > c$ için $h_1(x) = h_2(x) = 0$ ve $h_1(a) = h_2'(a) = 1$, $h_1'(a) = h_2(a) = 0$ olsun. Bu durumda $[f_1, f_1]_a^b = 0$ koşulundan $\alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta$; $[f, f_1]_a^b = 0$ koşulundan ise $\bar{\alpha} f'(a) - \bar{\beta} f(a) = 0$ eşitlikleri elde edilir. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \tan\varphi$ alırsak bu koşul, $f'(a)\sin\varphi - f(a)\cos\varphi = 0$ eşitliğine dönüşür.

Örnek3.3.8: $\ell f = -f''$, $\Omega = [0,1]$ olmak üzere

$$D(L) = \{f \in L_2(\Omega) | f \in A, f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0\},$$

$$Lf = \ell f$$

operatörünü alalım.

Gösterdik ki , $\ell f=(pf')'+qf$ diferansiyel ifadesinde p ve q fonksiyonları reel değerli olduğunda ℓ'nin ürettiği simetrik operatör bir selfadjoint genişlemeye sahiptir. Zira indeks defektleri eşittir.

L'nin selfadjoint genişlemesini bulmak için indeks defektlerini belirleyelim.

$$n_+ = n_- = m$$

olsun. Şu halde $m=\dim N\left(L^*-iI\right)$ olduğundan;

$$-f''=if$$

denkleminin çözümlerine bakmalıyız. Açıkça bu çözümler;

$$f_1(x)=e^{\kappa_1 x}\ ,\ f_2(x)=e^{\kappa_2 x}\ ,\ \kappa_1=e^{-i\pi/4}\ ,\ \kappa_2=e^{-5i\pi/4}$$

dır.

$$\left|f_1(x)\right|^2=e^{x\sqrt{2}}\ ,\ \left|f_2(x)\right|^2=e^{-x\sqrt{2}}$$

olduğundan her ikisi de $[0,1]$ aralığında Lebesque anlamında integrallenebilirdir. Yani $f_1,f_2\in L_2(\Omega)$ dır. Ayrıca bu çözümler mutlak sürekli olacağından ikisi de $D\left(L^*\right)=D(L')$ kümesi içinde kalır. Dolayısıyla $m=2$ dır.

Buna göre selfadjoint genişlemesinin tanım kümesi,

$$M=\left\{f\in D\left(L^*\right)\ \middle|\ [f,f_1]_0^1=[f,f_2]_0^1=0\right\}$$

şeklindedir. Burada f_1 ve f_2 , $D(L)$'ye göre lineer bağımsız olan ve $\left[f_i,f_j\right]_0^1=0$, $i,j=1,2$ koşullarını sağlayan elemanlardır. Şimdi,

$$f_1(x)=\alpha_1 h_1(x)+\alpha_2 h_2(x)$$
$$f_2(x)=\alpha_3 h_3(x)+\alpha_4 h_4(x)$$

eşitliklerini alalım. Burada, kabul edelim ki, h_i fonksiyonları reel değerli ve

$$h_1(0)=h_2(0)=h_1'(0)=h_2'(0)=0;\ h_1(1)=h_2'(1)=0,\ h_1'(1)=h_2(1)=1$$
$$h_3(1)=h_4(1)=h_3'(1)=h_4'(1)=0;\ h_3(0)=h_4'(0)=0,\ h_3'(0)=h_4(0)=1$$

koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

Bu durumda, $\det\left(\left[h_i,h_j\right]_0^1 \right) = 1 \neq 0$ olduğu kolayca hesaplanır. Dolayısıyla h_i'ler $D(L)$'ye göre lineer bağımsız elemanlardır.

Şimdi $\left[f_i,f_j\right]_0^1 = 0$ koşullarında h_i'lerin yukarıdaki özelliklerini kullanırsak;

$$[f_1,f_1]_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1\overline{\alpha_2} = \overline{\alpha_1}\alpha_2$$
$$[f_2,f_2]_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3\overline{\alpha_4} = \overline{\alpha_3}\alpha_4$$

sonuçlarını elde ederiz. Dolayısıyla $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ ve $\alpha_3\overline{\alpha_4}$ sayıları reel sayılardır. Ayrıca $[f,f_1]_0^1 = 0$, $[f,f_2]_0^1 = 0$ olduğundan;

$$\overline{\alpha_3}f'(0) - \overline{\alpha_4}f(0) = 0$$
$$\overline{\alpha_1}f'(1) - \overline{\alpha_2}f'(1) = 0$$

elde edilir. $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ ve $\alpha_3\overline{\alpha_4}$ reel olduğundan, bu koşullar,

$$f(0)\cos\varphi - f'(0)\sin\varphi = 0$$
$$f(1)\cos\psi - f'(1)\sin\psi = 0, \ \varphi,\psi \in \mathbb{R}$$

koşullarına dönüşür. Şu halde L'nin bir M selfadjoint genişlemesi,

$$D(M) = \left\{ f \in A \left| \begin{matrix} f(0)\cos\varphi - f'(0)\sin\varphi = 0 \\ f(1)\cos\psi - f'(1)\sin\psi = 0 \end{matrix} \right. \right\}, \varphi,\psi \in \mathbb{R} \ ; \ Mf = -f''$$

şeklinde olacaktır.

Yukarıdaki $\ell f = -f''$ diferansiyel ifadesinde $\Omega = [0,+\infty)$ alırsak, ℓ'nin ürettiği simetrik operatörün indeks defektleri $(1,1)$ olacaktır. Gerçekten de;

$$-f'' = if$$

denkleminin çözümlerinden biri olan,

$f(x) = e^{\kappa_1 x}$, $\left(\kappa_1 = e^{-i\pi/4} \right)$, $L_2(0,+\infty)$ da olmadığından denklemin yalnızca bir lineer bağımsız çözümü $D(L')$ içindedir. Yani $n_+ = n_- = 1$ dır. Bu durumda ise Sonuç3.3.7'den dolayı selfadjoint genişleme;

$$f(0)\cos\varphi - f'(0)\sin\varphi = 0, \ \varphi \in \mathbb{R}$$

koşuluyla elde edilir.

Eğer ki $\Omega=(-\infty,+\infty)$ alsaydık $-f''=if$ denkleminin iki çözümü de $L_2(-\infty,+\infty)$ uzayında olmayacağından $n_+=n_-=0$ olacaktı. Bu durumda ise L'nin kapanışı, onun yegane selfadjoint genişlemesi olacaktı.

3.4.DİSSİPATİVE SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN SELFADJOİNT GENİŞLEMESİ:

Aşağıdaki diferansiyel ifadeyi göz önüne alalım:

$$\ell(y)=-y''(x)+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}y(x)+q(x)y(x);0<x<+\infty \tag{3.4.1}$$

Burada $0\le\nu<1$, $q(x)$ bir sürekli ve reel değerli fonksiyondur. Bu diferansiyel ifadenin ürettiği operatör Schrödinger Operatörü olarak bilinir.

Diyelim ki, $v_1(x),v_2(x)$, $\ell(y)=0$ denkleminin $v_1'(1)=0=v_2(1)$ $v_2'(1)=1=v_1(1)$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümleridir. Bu durumda, $W[v_1,v_2]_x$, v_1 ve v_2 fonksiyonlarının $W[v_1,v_2]_x=v_1v_2'-v_1'v_2$ eşitliği ile hesaplanan Wronskian determinantı olmak üzere;

$$W[v_1,v_2]_x\equiv W[v_1,v_2]_1=1$$

olduğundan v_1,v_2 lineer bağımsızdır.

$$D_0=\{y\in L_2(0,\infty):y'(x),\ (0,\infty)\text{'da mutlak sürekli; } \ell(y)\in L_2(0,\infty)\ \}$$

kümesi tanımlansın. $y(x),z(x)\in D_0$ keyfi fonksiyonları için:

$$W[y,\bar{z}]_x=W[y,v_1]_x\,W[\bar{z},v_2]_x-W[y,v_2]_x\,W[\bar{z},v_1]_x,0\le x\le\infty \tag{3.4.2}$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik doğrudan hesaplama ile kolayca gösterilebilir.

Şimdi $D(L)$, aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $y\in D_0$ fonksiyonlarının kümesi olsun:

$$W[y,v_1]_0+h_1W[y,v_2]_0=0 \tag{3.4.3}$$

$$W[y,v_1]_\infty-h_2W[y,v_2]_\infty=0 \tag{3.4.4}$$

Bu küme üzerinde $Ly=\ell(y)$ operatörü tanımlansın.

Lemma3.4.1: Herhangi bir $y \in D(L)$ için,

$$\operatorname{Im}(Ly,y) = (\operatorname{Im} h_1)\left|W[y,v_2]_0\right|^2 + (\operatorname{Im} h_2)\left|W[y,v_2]_\infty\right|^2$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Keyfi bir $y \in D(L)$ için, kısmi integrasyon yardımıyla;

$$(Ly,y) - (y,Ly) = W[y,\bar{y}]_\infty - W[y,\bar{y}]_0 \tag{3.4.5}$$

olduğu gösterilebilir. (3.4.2) eşitliğini ve $D(L)$'nin tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned} W[y,\bar{y}]_\infty &= W[y,v_1]_\infty W[\bar{y},v_2]_\infty - W[y,v_2]_\infty W[\bar{y},v_1]_\infty \\ &= (h_2 - \bar{h}_2) W[y,v_2]_\infty W[\bar{y},v_2]_\infty \\ &= 2i(\operatorname{Im} h_2)\left|W[y,v_2]_\infty\right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W[y,\bar{y}]_0 &= W[y,v_1]_0 W[\bar{y},v_2]_0 - W[y,v_2]_0 W[\bar{y},v_1]_0 \\ &= -(h_1 - \bar{h}_1) W[y,v_2]_0 W[\bar{y},v_2]_0 \\ &= -2i(\operatorname{Im} h_1)\left|W[y,v_2]_0\right|^2 \end{aligned}$$

eşitliklerini alırız. Bunların (3.4.5)'de kullanılmasıyla lemma ispatlanır. Dolayısıyla gösterdik ki; herhangi bir $y \in D(L)$ için,

$$\operatorname{Im}(Ly,y) = (\operatorname{Im} h_1)\left|W[y,v_2]_0\right|^2 + (\operatorname{Im} h_2)\left|W[y,v_2]_\infty\right|^2$$

eşitliği geçerlidir.

Bu lemmadan görüldüğü gibi h_1 ve h_2 sayıları $\operatorname{Im} h_1 \geq 0$ (veya $h_1 = \infty$) ve $\operatorname{Im} h_2 \geq 0$ (veya $h_2 = \infty$) olacak şekilde seçildiğinde L, D_0 üzerinde kurulan maximal dissipative operatörü; $\operatorname{Im} h_1 = \operatorname{Im} h_2 = 0$ (veya $h_2 = \infty$, $h_1 = \infty$) seçildiğinde ise selfadjoint operatörü verir. Burada $h_1 = \infty$ ve $h_2 = \infty$ ifadeleri sırasıyla $W[y,v_2]_0 = 0$ ve $W[y,v_2]_\infty = 0$ koşulları ile denktir.

Şimdi incelememizi $\operatorname{Im} h_1 > 0$, $\operatorname{Im} h_2 = 0$ durumuna özelleştirelim. Bu durumda L'nin dissipative olacağı açıktır. Amacımız onun selfadjoint genişlemesini kurmaktır. Bunun için aşağıdaki tanımlamaları göz önüne alalım:

$$H = D_+ = L_2(0,\infty),\ D_- = L_2(-\infty,0)$$

$$H_1 = \{(\varphi_-, y, \varphi_+) : \varphi_- \in D_-, y \in H, \varphi_+ \in D_+\}$$

$$W_2^1(a,b) = \{f \in L_2(a,b) : f' \text{ mutlak sürekli}, f'' \in L_2(a,b)\}.$$

H_1 uzayının elemanlarını $f = (\varphi_-, y, \varphi_+)$ üçlüleri şeklinde yazabileceğimiz gibi, $f = \varphi_- + y + \varphi_+$ şeklinde de yazabileceğimizi biliyoruz. Şimdi, $\widetilde{D}$, H_1 uzayının,

$$\begin{aligned} &W[y,v_1]_0 + h_1 W[y,v_2]_0 = \alpha\varphi_-(0) \\ &W[y,v_1]_0 + \overline{h}_1 W[y,v_2]_0 = \alpha\varphi_+(0) \\ &W[y,v_1]_\infty - h_2 W[y,v_2]_\infty = 0 \\ &y \in D,\ \varphi_+ \in W_2^1(0,\infty),\ \varphi_- \in W_2^1(-\infty,0),\ \alpha = \sqrt{2\operatorname{Im} h_1} \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

koşullarını sağlayan tüm $f = \varphi_- + y + \varphi_+$ elemanlarının kümesini göstermek üzere, $\widetilde{D}$ üzerinde,

$$\tilde{L}f = (i\varphi'_-, \ell(y), i\varphi'_+) = i\varphi'_- + \ell(y) + i\varphi'_+$$

operatörünü tanımlayalım.

Teorem3.4.2: $\widetilde{L}$ operatörü H_1 uzayı üzerinde selfadjoint bir operatördür.

İspat: Diyelim ki, $f_1, f_2 \in \tilde{D}$; $f_1 = \varphi_- + y + \varphi_+$, $f_2 = \psi_- + z + \psi_+$ dır. Kısmi integrasyon formülünü, $(\ell(y), y) - (y, \ell(y)) = W[y,\overline{y}]_\infty - W[y,\overline{y}]_0$ eşitliğini ve $W_2^1(0,\infty)$, $W_2^1(-\infty,0)$ uzaylarının tanımını kullanarak;

$$(\tilde{L}f_1, f_2) - (f_1, \tilde{L}f_2) = i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) + W[y,\overline{z}]_\infty - W[y,\overline{z}]_0 \tag{3.4.7}$$

eşitliğini elde ederiz. $\widetilde{L}$ 'nin simetrikliği için (3.4.7) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadenin sıfıra eşit olduğunu göstermek gerekir. Bunun için de (3.4.6) koşullarından yararlanacağız.

$$i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) = i\left(\frac{1}{\alpha}W[y,v_1]_0 + \frac{h_1}{\alpha}W[y,v_2]_0\right)\left(\frac{1}{\alpha}W[\overline{z},v_1]_0 + \frac{\overline{h}_1}{\alpha}W[\overline{z},v_2]_0\right) -$$

$$-i\left(\frac{1}{\alpha}W[y,v_1]_0+\frac{\bar{h}_1}{\alpha}W[y,v_2]_0\right)\left(\frac{1}{\alpha}W[\bar{z},v_1]_0+\frac{h_1}{\alpha}W[\bar{z},v_2]_0\right)$$

$$=\frac{i}{\alpha^2}W[y,v_1]_0W[\bar{z},v_1]_0+\frac{i|h_1|^2}{\alpha^2}W[y,v_2]_0W[\bar{z},v_2]_0$$

$$+\frac{i\bar{h}_1}{\alpha^2}W[y,v_1]_0W[\bar{z},v_2]_0+\frac{ih_1}{\alpha^2}W[y,v_2]_0W[\bar{z},v_1]_0$$

$$-\frac{i}{\alpha^2}W[y,v_1]_0W[\bar{z},v_1]_0-\frac{ih_1}{\alpha^2}W[y,v_1]_0W[\bar{z},v_2]_0$$

$$-\frac{i|h_1|^2}{\alpha^2}W[y,v_2]_0W[\bar{z},v_2]_0-\frac{i\bar{h}_1}{\alpha^2}W[y,v_2]_0W[\bar{z},v_1]_0$$

$$=\frac{2\,\mathrm{Im}\,h_1}{\alpha^2}\left(W[y,v_1]_0W[\bar{z},v_2]_0-W[y,v_2]_0W[\bar{z},v_1]_0\right)$$

$$=W[y,\bar{z}]_0$$

$$W[y,\bar{z}]_\infty=W[y,v_1]_\infty W[\bar{z},v_2]_\infty-W[y,v_2]_\infty W[\bar{z},v_1]_\infty=\left(h_2-\bar{h}_2\right)W[y,v_2]_\infty W[\bar{z},v_2]_\infty$$

$$=2i\,\mathrm{Im}\,h_2W[y,v_2]_\infty W[\bar{z},v_2]_\infty$$

Son hesaplanan ifadeler (3.4.7) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\mathrm{Im}\,h_2=0$ olduğu da göz önüne alınarak,

$$\left(\tilde{L}f_1,f_2\right)=\left(f_1,\tilde{L}f_2\right),\quad f_1,f_2\in\tilde{D}$$

bulunur. Bu son eşitlik $\tilde{L}$ operatörünün simetrikliğini kanıtlar. Yani $\tilde{L}\subset\tilde{L}^*$ dır. İspatı tamamlamak için $\tilde{L}\supset\tilde{L}^*$ olduğunu da göstermeliyiz. Bunun için keyfi bir $g\in D\left(\tilde{L}^*\right)$, $g=\psi_-+z+\psi_+$ elemanını alıp bunun $D\left(\tilde{L}\right)=\tilde{D}$ uzayında içerildiğini kanıtlamak gerekir. $\tilde{L}^*g=g^*=\psi_-^*+z^*+\psi_+^*$ olsun.

$$\left(\tilde{L}f,g\right)=\left(f,g^*\right)\tag{3.4.8}$$

eşitliği her bir $f\in D\left(\tilde{L}\right)$ için sağlandığından f için uygun seçimler yapabiliriz. Örneğin (3.4.8)'de $f=\varphi_-=\left(\varphi_-,0,0\right)$, $\varphi_-(0)=0$, $\varphi_-\in W_2^1\left(-\infty,0\right)$ seçersek,

$$\int_{-\infty}^{0}i\varphi_-'\bar{\psi}_-d\xi=\int_{-\infty}^{0}\varphi_-\psi_-^*d\xi$$

ifadesini alırız. Son eşitliğinin sol tarafındaki integralde kısmi integrasyon uygularsak,

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi_-\left(i\psi'_- - \psi^*_-\right)d\xi = 0$$

buluruz. Burada φ_- fonksiyonu $\overset{0}{W}{}_2^1(-\infty,0) = \left\{\varphi_- \in W_2^1(-\infty,0):\ \varphi_-(0) = 0\right\}$ *Sobolev* uzayının keyfi fonksiyonu olduğundan ve bu uzay $L_2(-\infty,0)$'da yoğun olduğundan $\psi^*_- = i\psi'_-$ olur.

f için benzer seçimlerle $\psi^*_+ = i\psi'_+$ ve $l(z) = z^*$ bulunabilir. Dolayısıyla $g^* = \widetilde{L}g$ yazabiliriz. Bu ise önceki gibi,

$$i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) + W[y,\overline{z}]_\infty - W[y,\overline{z}]_0 = 0 \tag{3.4.9}$$

eşitliğini verir.

Şimdi $\forall f \in D(\tilde{L})$, $f = \varphi_- + y + \varphi_+$ elemanı için (3.4.4) koşullarından aşağıdaki eşitlikler alınır:

$$W[y,v_2]_0 = \frac{1}{i\alpha}(\varphi_-(0) - \varphi_+(0))$$

$$W[y,v_1]_0 = \alpha\varphi_-(0) - \frac{h_1}{i\alpha}(\varphi_-(0) - \varphi_+(0)).$$

Bunları (3.4.9) eşitliğinde kullanırsak (3.4.2) bağıntısının da yardımıyla;

$$\begin{aligned}
i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) + i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) &= W[y,v_1]_\infty W[\overline{z},v_2]_\infty - W[y,v_2]_\infty W[\overline{z},v_1]_\infty \\
&\quad - W[y,v_1]_0 W[\overline{z},v_2]_0 + W[y,v_2]_0 W[\overline{z},v_1]_0 \\
&= W[y,v_2]_\infty\left[h_2 W[\overline{z},v_2]_\infty - W[\overline{z},v_1]_\infty\right] \\
&\quad - W[\overline{z},v_2]_0\left[\alpha\varphi_-(0) - \frac{h_1}{i\alpha}(\varphi_-(0) - \varphi_+(0))\right] \\
&\quad + W[\overline{z},v_1]_0\left[\frac{1}{i\alpha}(\varphi_-(0) - \varphi_+(0))\right] \\
&= W[y,v_2]_\infty\left[h_2 W[\overline{z},v_2]_\infty - W[\overline{z},v_1]_\infty\right] \\
&\quad + \varphi_-(0)\left[\left(\frac{h_1}{i\alpha} - \alpha\right)W[\overline{z},v_2]_0 + \frac{1}{i\alpha}W[\overline{z},v_1]_0\right] \\
&\quad + \varphi_+(0)\left[-\frac{h_1}{i\alpha}W[\overline{z},v_2]_0 - \frac{1}{i\alpha}W[\overline{z},v_1]_0\right]
\end{aligned}$$

eşitliğini alırız. Bu eşitliğin her iki yanındaki terimleri $\varphi_-(0)$ ve $\varphi_+(0)$ sayılarının katsayıları şeklinde eşitlersek,

$$W[z,v_1]_0 + h_1 W[z,v_2]_0 = \alpha\psi_-(0)$$
$$W[z,v_1]_0 + \overline{h}_1 W[z,v_2]_0 = \alpha\psi_+(0), \quad \alpha = \sqrt{2\operatorname{Im} h_1}$$
$$W[z,v_1]_\infty - h_2 W[z,v_2]_\infty = 0$$

koşullarının sağlandığını görürüz. Bu ise g'nin (3.4.4) koşullarını sağlaması yani $D(\widetilde{L}) = \widetilde{D}$'nin elemanı olması demektir. Dolayısıyla $\widetilde{L}$'nin selfadjointliği kanıtlanmış olur.

Bu teorem gösterir ki, $\widetilde{L}$ operatörü; $\operatorname{Im} h_1 > 0$, $\operatorname{Im} h_2 = 0$ olmak üzere (3.4.3), (3.4.4) koşulları ile tanımlanmış olan L dissipative operatörünün selfadjoint genişlemesidir.

4. BÖLÜM
STURM – LIOUVILLE OPERATÖRÜ:

4.1. İNVERSE PROBLEMİN TANIMI ve TARİHSEL GELİŞİMİ:

Aşağıdaki diferansiyel denklemi ve sınır koşullarını göz önüne alalım:

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)f'(t)\right)+q(t)f(t)=\rho w(t)f(t) \tag{4.1.1}$$

$$(\sin\alpha)f'(a)+(\cos\alpha)f(a)=0 \tag{4.1.2}$$

$$(\sin\beta)f'(b)+(\cos\beta)f(b)=0 \tag{4.2.3}$$

Burada $p(t), q(t)$ ve $w(t)$, $t\in[a,b]$ değişkeninin reel değerli fonksiyonları ve ρ bir kompleks parametredir.

1830'larda Sturm ve Liouville adlı iki matematikçinin çalışmaları göstermiştir ki, ρ parametresi keyfi seçilemez. Daha ötesi, (4.1.1) denklemini ve (4.1.2), (4.1.3) sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir $f(t)$ fonksiyonunun varlığına olanak veren ρ sayıları $\mathbb{C}$'de ayrık bir küme belirler. İşte bu ρ sayılarının ve onlara karşılık gelen $f(t)$ fonksiyonlarının araştırılması problemi, literatürde Sturm – Liouville Problemi olarak bilinir. ρ sayılarına problemin özdeğerleri, $f(t)$ fonksiyonlarına ise özfonksiyonları denir.

Şimdi kabul edelim ki, $p(t), q(t), w(t)$ fonksiyonları ve $p'(t)$, $\left(p(t)w(t)\right)''$ türevleri $[a,b]$'de sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca diyelim ki, $\forall t\in[a,b]$, $p(t)>0,\ w(t)>0$ koşulları sağlanır. Bu durumda,

$$x=\frac{1}{M}\int_a^t\sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}ds\,,\quad M=\int_a^b\sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}ds\,,\quad g(t)=\left(p(t)w(t)\right)^{\frac{1}{4}}$$

olmak üzere,

$$y=g(t)f$$

eşitliği ile (4.1.1) denklemi,

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+q_1(x)y=\lambda y \tag{4.1.4}$$

denklemine dönüşür. Burada, $q_1(x)=\frac{g''(x)}{g(x)}+M^2\frac{q(x)}{w(x)}$, $\lambda=M^2\rho$ dır.

(4.1.4) denklemi, Sturm – Liouville denkleminin kanonik (standart) formu olarak adlandırılır. Yukarıdaki dönüşüm ise Liouville dönüşümü diye bilinir.

Kolayca gösterilebilir ki, Liouville dönüşümü ile (4.1.2), (4.1.3) sınır koşulları,

$$y'(0)-hy(0)=0$$
$$y'(1)+Hy(1)=0$$

biçimini alır. Burada $h,H\in\mathbb{R}$ dır. Böylece aşağıdaki sınır değer problemini alırız:

$$-y''+q(x)y=\lambda y \tag{4.1.5}$$
$$y'(0)-hy(0)=0 \tag{4.1.6}$$
$$y'(1)+Hy(1)=0 \tag{4.1.7}$$

λ_n, $n\in\mathbb{N}$ sayıları (4.1.5) - (4.1.7) probleminin özdeğerleri ve $\varphi(x,\lambda_n)$, $n\in\mathbb{N}$, bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere,

$$\alpha_n=\int_0^1\varphi^2(x,\lambda_n)dx$$

eşitliği ile tanımlanan α_n sayılarına problemin normalleştirici sayıları;

$$P(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonuna ise problemin spektral fonksiyonu adı verilir.

Bilinen spektral veriler (özdeğerler dizisi, normalleştirici sayılar dizisi, spektral fonksiyon gibi) yardımıyla, bilinmeyen $q(x)$ fonksiyonunun ve h,H sayılarının araştırılması problemine Sturm – Liouville inverse problemi denir. Bu konuda ilk çalışma 1929'da V.A. Ambartsumyan tarafından yapılmıştır. Ambartsumyan, aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem4.1.1: $q(x)$, $[0,1]$ aralığında tanımlı, reel değerli, sürekli bir fonksiyon olsun.

$$-y''+q(x)y=\lambda y$$
$$y'(0)=y'(1)=0$$

probleminin özdeğerleri, $\lambda_n = (n\pi)^2$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde ise $q(x) \equiv 0$ dır.

Daha sonra 1946'da İsveçli matematikçi Borg, bu sonucu şu şekilde geliştirmiştir:

Teorem4.1.2:

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad h \neq h_1 \tag{4.1.6a}$$

olmak üzere, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri sırasıyla, (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7) ve (4.1.5), (4.1.6a), (4.1.7) problemlerinin özdeğer dizileri ise bu durumda $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1, H sayılarını tek şekilde belirler.

Borg'un bu çalışması yayınlandıktan kısa bir süre sonra Levinson, bir çok yeni ve önemli sonuç elde etmiştir. İnverse problemler teorisi böylece, Bargmann, Tikhonov, Gelfand, Levitan ve Marchenko gibi ünlü matematikçilerin çalışmaları ile geliştirilmiştir.

Yeryüzünde karşılaşılan bir çok fiziksel problem inverse problemdir. Telin titreşim denklemi yada Schrödinger dalga denklemi ile kurulan problemler bunun en iyi örnekleridir.

4.2. OPERATÖRÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ:

$$W_2^2[0,1] = \{y \in L_2(0,1) : y' \text{ mutlak sürekli}, y'' \in L_2(0,1)\}$$

uzayından alınan fonksiyonlar için,

$$\ell y = -y'' + q(x) y$$

diferansiyel ifadesini alalım. Burada $q(x) \in L_2(0,1)$ dır.

Tanım1.4.6 hatırlanırsa, (4.1.5) – (4.1.7) probleminin gerçekte,

$$D(L) = \left\{ y \in W_2^2[0,1] \;: y'(0) - hy(0) = 0,\; y'(1) + Hy(1) = 0 \right\},$$

$$Ly = \ell y$$

operatörünün özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının araştırılması problemi olduğu kolayca anlaşılır. Bu şekilde tanımlı L operatörüne Sturm – Liouville Operatörü denir. Aşağıdaki teoremler, Sturm – Liouville Operatörü için en temel sonuçlardır.

Teorem4.2.1: L operatorünün iki farklı λ_1, λ_2 özdeğerine karşılık gelen $y_1(x), y_2(x)$ özfonksiyonları ortogonaldir. Yani,

$$\int_0^1 y_1(x,\lambda_1)y_2(x,\lambda_2)dx = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \tag{4.2.1}$$

dır.

İspat: Hipoteze göre,

$$-y_1'' + q(x)y_1 = \lambda_1 y_1, \quad -y_2'' + q(x)y_2 = \lambda_2 y_2$$

eşitliklerini alırız. Buna göre, birinci eşitliği y_2 ile ikinciyi ise $-y_1$ ile çarpıp toplarsak,

$$-y_1''y_2 + y_2''y_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, y_1 y_2 \tag{4.2.2}$$

eşitliğini alırız.

$$-y_1''y_2 + y_2''y_1 = (y_2'y_1 - y_2y_1')'$$

olduğundan (4.2.2) eşitliğinden,

$$(y_2'y_1 - y_2y_1')' = (\lambda_1 - \lambda_2)\, y_1 y_2$$

alırız. Son eşitliğin her iki tarafını $(0,1)$ 'de integrallersek, sınır koşullarından,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx = 0$$

buluruz. Bu ise $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan (4.2.1) eşitliğini kanıtlar.

Teorem4.2.2: L operatörünün özdeğerleri reel sayılardır.

İspat: $q(x)$ fonksiyonu ve h, H sayıları reel olduğundan, $\lambda_1 = u + iv,\ v \neq 0$ bir özdeğer ise $\overline{\lambda}_1 = u - iv$ de bir özdeğer olur. Ayrıca λ_1'e karşılık gelen özfonksiyon $y_1(x,\lambda_1)$ ise $\overline{\lambda}_1$'e karşılık gelen $\overline{y_1(x,\lambda_1)}$ dır. Dolayısıyla bir önceki teoremden,

$$0 = \int_0^1 y_1(x,\lambda_1)\overline{y_1(x,\lambda_1)}dx = \int_0^1 |y_1(x,\lambda_1)|^2\, dx$$

alırız. Bu ise $y_1(x,\lambda_1) = 0$ çelişkisine yol açar. Bu nedenle $v = 0$ olmalıdır.

4.3. ÖZDEĞERLERİN ve ÖZFONKSİYONLARIN ASİMPTOTİK DAVRANIŞLARI:

$$-y'' + q(x)y = \eta y, \; q(x) \in L_2(0,1), \quad \sqrt{\eta} = \lambda \tag{4.3.1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{4.3.2}$$

$$y'(1) + Hy(1) = 0 \tag{4.3.3}$$

problemini alalım. Diyelim ki, $y_0(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.3.1) denkleminin,

$$y_0(0,\lambda) = 1, \quad y_0'(0,\lambda) = h \tag{4.3.4}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Parametrelerin değişimi metodu ile kolayca gösterilebilir ki, bu çözüm;

$$y_0(x,\lambda) = \cos\lambda x + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-t)q(t)\, y_0(t,\lambda)\, dt \tag{4.3.5}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi bu çözümün, $|\lambda|$'nın büyük değerlerindeki davranışını ifade eden aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma4.3.1: $|\lambda|$'nın büyük değerlerinde $y_0(x,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} y_0(x,\lambda) &= \cos\lambda x + \frac{\sin\lambda x}{2\lambda}\left(2h + \int_0^x q(t)\,dt\right) + \\ &+ \frac{1}{2\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-2t)q(t)\,dt + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{|\lambda|^2}\right) \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

$$y_0(1,\lambda) = \cos\lambda + \frac{\sin\lambda}{2\lambda}\left(2h + \int_0^1 q(t)\,dt\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.3.7}$$

İspat: (4.3.6)'yı kanıtlamak için (4.3.5)'den ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için geçerli olan,

$$|\sin z| \le e^{|\operatorname{Im} z|}, \quad |\cos z| \le e^{|\operatorname{Im} z|}$$

eşitsizliklerinden faydalanacağız.

$$y_0(x,\lambda)=\cos\lambda x+\frac{h}{\lambda}\sin\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-t)q(t)\left[\cos\lambda t+\frac{h}{\lambda}\sin\lambda t\right]dt$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-t)q(t)\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-\tau)q(\tau)y_0(\tau,\lambda)d\tau\right]dt'$$

$$=\cos\lambda x+\frac{h}{\lambda}\sin\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x(\sin\lambda x\cos\lambda t-\cos\lambda x\sin\lambda t)q(t)\left(\cos\lambda t+\frac{h}{\lambda}\sin\lambda t\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \sin\lambda(x-t)q(t)\int_0^t \sin\lambda(t-\tau)q(\tau)y_0(\tau,x)d\tau dt\quad O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{|\lambda|^2}\right)$$

$$=\cos\lambda x+\frac{h}{\lambda}\sin\lambda x+\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x\int_0^x \cos^2\lambda t q(t)dt+\frac{h}{\lambda^2}\sin\lambda x\int_0^x \cos\lambda t\sin\lambda t q(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\cos\lambda x\int_0^x \sin\lambda t\cos\lambda t q(t)dt-\frac{h\cos\lambda x}{\lambda^2}\int_0^x \sin^2\lambda t q(t)dt+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{|\lambda|^2}\right)$$

$$=\cos\lambda x+\frac{h}{\lambda}\sin\lambda x+\frac{1}{2\lambda}\sin\lambda x\int_0^x(1+\cos 2\lambda t)q(t)dt+$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\cos\lambda x\int_0^x \sin 2\lambda t q(t)dt+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{|\lambda|^2}\right)$$

$$=\cos\lambda x+\frac{\sin\lambda x}{2\lambda}\left(2h+\int_0^x q(t)dt\right)+\frac{1}{2\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-2t)q(t)dt+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{|\lambda|^2}\right)$$

Böylece (4.3.6)'yı ispatlamış olduk. (4.3.7)'yi ispatlamak için aynı yöntemle,

$$y_0(1,\lambda)=\cos\lambda+\frac{\sin\lambda}{2\lambda}\left(2h+\int_0^1 q(t)dt\right)+$$

$$+\frac{1}{2\lambda}\int_0^1 \sin\lambda(1-2t)q(t)dt+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|^2}\right)$$

eşitliğini alırız. Ayrıca bu son eşitliğin sağ yanındaki son iki terim $o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ sınıfından olduğundan (4.3.7) eşitliği de kanıtlanmış olur. Bu lemma $y_0(x,\lambda)$ fonksiyonunun $|\lambda|$'nın büyük değerlerindeki davranışını verir. Şimdi (4.3.1) – (4.3.3) probleminin özdeğerlerinin ve normalleştirici sayılarının asimptotik ifadelerini verelim:

Diyelim ki, λ_n, $n \in \mathbb{N}$ sayıları, (4.3.1) – (4.3.3) probleminin özdeğerleri ve $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları da bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları olsun. Normalleştirici sayıların,

$$\alpha_n = \int_0^l \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{4.3.8}$$

eşitliği ile tanımlandığını söylemiştik.

Teorem4.3.2: (4.3.1)–(4.3.3) probleminin λ_n, $n \in \mathbb{N}$ özdeğerleri ve α_n, $n \in \mathbb{N}$ normalleştirici sayıları için,

$$\lambda_n = n\pi + \frac{c}{n\pi} + s_n,\ c = h + H + \frac{1}{2}\int_0^l q(t)dt,\ s_n \in l_2 \tag{4.3.9}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} + b_n,\ b_n \in l_2 \tag{4.3.10}$$

asimptotik ifadeleri geçerlidir.

İspat: Diyelim ki λ_n, $n \in \mathbb{N}$ sayıları (4.3.1) – (4.3.3) probleminin özdeğerleri ve $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları da bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlardır.

$y_0(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonlarının Wronskian determinatını yazarsak,

$$W[y_0,\varphi]_x \equiv W[y_0,\varphi]_l = y_0(l)\varphi'(l) - y_0'(l)\varphi(l)$$

elde ederiz. Ayrıca $W[y_0,\varphi]_x \equiv W[y_0,\varphi]_0$ olduğundan, (4.3.4) koşullarından,

$$-\varphi(l)\left[y_0'(l) - \frac{\varphi'(l)}{\varphi(l)}y_0(l)\right] = y_0(0)\varphi'(0) - y_0'(0)\varphi(0)$$

$$= \varphi'(0) - h\varphi(0) = 0$$

bulunur. Buradan ise (4.3.1) – (4.3.3) probleminin her bir λ_n özdeğerinin,

$$y_0'(l,\lambda_n) + Hy_0(l,\lambda_n) = 0 \tag{4.3.11}$$

denklemini sağladığı görülür. Bu denklem özdeğer denklemi olarak bilinir. Bunun yardımıyla özdeğerlerin asimptotik ifadeleri bulunabilir. Bunun için,

$$y_0(x,\lambda)=\cos\lambda x+\frac{h}{\lambda}\sin\lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-t)q(t)y(t)dt$$

$$y_0'(x,\lambda)=-\lambda\sin\lambda x+h\cos\lambda x+\int_0^x \cos\lambda(x-t)q(t)y(t)dt$$

ifadelerini (4.3.11)'de yerine yazarsak;

$$-\lambda\sin\lambda+(h+H)\cos\lambda+\frac{Hh}{\lambda}\sin\lambda+\int_0^1 \cos\lambda(1-t)q(t)y(t)dt+$$

$$\frac{H}{\lambda}\int_0^1 \sin\lambda(1-t)q(t)y(t)dt=0$$

alırız. Son eşitliğin her iki yanını λ'ya bölersek,

$$-\sin\lambda+\frac{h+H}{\lambda}\cos\lambda+\frac{1}{\lambda}\int_0^1 \cos\lambda(1-t)q(t)y(t)dt+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|^2}\right)=0$$

bulunur. Lemma4.3.1'in ispatındaki gibi, integral içindeki $y(t)$ fonksiyonunun açık şekilde yazılıp düzenlenmesi sonucu aşağıdaki eşitlik alınır:

$$-\sin\lambda+\frac{c}{\lambda}\cos\lambda+\frac{1}{2\lambda}\int_0^1 \cos\lambda(1-2t)q(t)dt+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|^2}\right)=0 \qquad (4.3.12)$$

Burada $c=h+H+\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt$ dır.

Şimdi, (4.3.12) eşitliğinde,

$$f(\lambda)=-\sin\lambda,\quad g(\lambda)=\frac{c}{\lambda}\cos\lambda+\frac{1}{2\lambda}\int_0^1 \cos\lambda(1-2t)q(t)dt+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|^2}\right)$$

alarak, bu fonksiyonlara Rouche Teoremini uygulayalım. Bunun için,

$$G=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:|\operatorname{Re}\lambda|\le\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \ |\operatorname{Im}\lambda|\le\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}$$

bölgesini seçersek, bu bölgenin ∂G sınırında aşağıdakiler geçerlidir:

$$\lambda\in\partial G,\quad \lambda=\sigma\mp i\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

ise,

$$|\sin\lambda| = \left|\sin\left[\sigma \mp i\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\right| \geq \frac{1}{4}e^{|\operatorname{Im}\lambda|};$$

$$\lambda \in \partial G, \quad \lambda = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \mp it$$

ise,

$$|\sin\lambda| = \left|\sin\left[\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \mp it\right]\right| \geq \frac{1}{4}e^{|\operatorname{Im}\lambda|}$$

dır. Ayrıca $\forall\lambda \in \partial G$ için;

$$|g(\lambda)| \leq \frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|}\left\{C + \frac{1}{2}\int_0^1 |q(t)|\,dt + \frac{C_1}{|\lambda|}\right\}$$

değerlendirilmesi doğrudur. Buradan $|\lambda|$'nın yeterince büyük değerleri düşünülürse, ∂G de;

$$|g(\lambda)| \leq \frac{1}{4}e^{|\operatorname{Im}\lambda|}$$

yazabiliriz. Bu ise gösterir ki, f ve g fonksiyonları G bölgesinde Rouche teoreminin koşullarını sağlar. Dolayısıyla $f(\lambda) = -\sin\lambda$ fonksiyonu ile $f(\lambda) + g(\lambda)$ fonksiyonun G içindeki sıfırlarının sayısı aynıdır. $n \to \infty$ için limite geçersek tüm kompleks düzlemde bunun doğru olduğunu görürüz. Bu sonuçla alırız ki, (4.3.12) denkleminin sıfırları,

$$\lambda_n = n\pi + \delta_n, \quad \delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

şeklindedir. δ_n sayılarının yapısını belirlemek için λ_n'i (4.3.12)'de yerine yazarsak,

$$-\sin(n\pi+\delta_n) + \frac{c}{n\pi+\delta_n}\cos(n\pi+\delta_n) +$$

$$+\frac{1}{2(n\pi+\delta_n)}\int_0^1 \cos\left[(n\pi+\delta_n)(1-2t)\right]q(t)\,dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

eşitliğini alırız. Ayrıca bu eşitlikte,

$$\sin(n\pi+\delta_n)=(-1)^n\sin(\delta_n)=(-1)^n\left[\delta_n-\frac{\delta_n^{\,3}}{3!}+\frac{\delta_n^{\,5}}{5!}-\cdots\right] \tag{4.3.13}$$

$$=(-1)^n\delta_n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\cos(n\pi+\delta_n)=(-1)^n\cos(\delta_n)=(-1)^n\left[1-\frac{\delta_n^{\,2}}{2}+\frac{\delta_n^{\,4}}{4!}-\cdots\right] \tag{4.3.14}$$

$$=(-1)^n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n\pi+\delta_n}=\frac{1}{n\pi}\left[1-\frac{\delta_n}{n\pi}+\frac{\delta_n^{\,2}}{(n\pi)^2}-\ldots\right]=\frac{1}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.3.15}$$

bağıntılarını kullanırsak,

$$(-1)^{n+1}\delta_n+\frac{(-1)^n c}{n\pi}+s_n=0\,,\ s_n\in l_2$$

ve dolayısıyla,

$$\delta_n=\frac{c}{n\pi}+s_n\,,\ s_n\in l_2$$

ifadesini alırız. Bu ise, özdeğerlerin,

$$\lambda_n=n\pi+\frac{c}{n\pi}+s_n,\quad s_n\in l_2$$

asimptotik ifadesini verir. Burada s_n kalan terimi,

$$\frac{1}{2(n\pi+\delta_n)}\int_0^1\cos\left[(n\pi+\delta_n)(1-2t)\right]q(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ifadesinden gelir ve karesiyle, yakınsak seri oluşturan diziler sınıfındandır. Ayrıca s_n, $o\left(\frac{1}{n}\right)$ sınıfındandır.

(4.3.10) eşitliğini ispatlamak için (4.3.9)'u,

$$\varphi(x,\lambda_n)=\cos\lambda_n x+\frac{h\sin\lambda_n x}{\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^x\sin\lambda_n(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda_n)\,dt$$

eşitliğinde kullanırsak, Lemma4.3.1'in, (4.3.13), (4.3.14) ve (4.3.15) eşitliklerinin de yardımıyla,

$$\varphi(x,\lambda_n) = \cos n\pi x + a_n\beta(x), \ a_n \in l_2$$

asimptotik iİadesini alırız. Bu ifadeyi; α_n, normalleştirici sayıları için;

$$\alpha_n = \int_0^1 \left[\varphi(x,\lambda_n)\right]^2 dt$$

eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\alpha_n = \frac{1}{2} + b_n, \quad b_n \in l_2$$

ifadesini alırız.

4.4. İNVERSE PROBLEM İÇİN TEKLİK TEOREMİ:

Bir önceki alt bölümde Sturm – Liouville düz problemini, yani $q(x)$ fonksiyonu ve h, H sayıları verildiğinde (4.3.1)–(4.3.3) probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının ifadelerini araştırdık. Şimdi ise bunun tersini yapacağız, yani özdeğerler dizisi ve normalleştirici sayılar dizisi bilindiğinde, bu verilerin $q(x)$ fonksiyonunu ve h, H sayılarını nasıl belirlediğini inceleyeceğiz.

Diyelim ki, $y_0(x,\lambda)$, $y_1(x,\lambda)$ fonksiyonları (4.3.1) denkleminin,

$$y_0(0) = 1, \quad y_0'(0) = h \tag{4.4.1}$$

$$y_1(1) = 1, \quad y_1'(1) = -H \tag{4.4.2}$$

başlangıç koşullu çözümleri olsun. Bu çözümler açıkça,

$$y_0(x,\lambda) = \cos\lambda x + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-t)q(t)y(t)dt$$

$$y_1(x,\lambda) = \cos\lambda(1-x) + \frac{H}{\lambda}\sin\lambda(1-x) - \frac{1}{\lambda}\int_x^1 \sin\lambda(x-t)q(t)y_1(t,\lambda)dt$$

şeklindedir. Bundan böyle (4.3.1)–(4.3.3) probleminin bir λ_n özdeğerine karşılık gelen ve (4.4.1), (4.4.2) koşullarını sağlayan özfonksiyonları sırasıyla $y_0(x,\lambda_n)$, $y_1(x,\lambda_n)$ şeklinde göstereceğiz.

Lemma4.4.1: (4.3.1)–(4.3.3) probleminin λ_n özdeğerleri ve α_n normalleştirici sayıları için aşağıdakiler geçerlidir.

i) $\alpha_n = y_0(1,\lambda_n)D'(\lambda_n)$, $D(\lambda) = y_0'(1,\lambda) + Hy_0(1,\lambda)$ (4.4.3)

ii) $y_1(x,\lambda_n) = \dfrac{y_0(x,\lambda_n)}{y_0(1,\lambda_n)}, \; n \geq 1$ (4.4.4)

İspat: Wronsky determinantının özelliğinden ve (4.4.2) koşullarından,

$$D(\lambda) = y_0'(1,\lambda) + Hy_0(1,\lambda) = W[y_0, y_1]_{x=1} = W[y_0, y_1]_x \qquad (4.4.5)$$

eşitliğini alırız. Bu eşitlik, $\lambda = \lambda_n$ için $D(\lambda_n) = 0$ olduğu sonucunu verir. Bu notun yardımıyla aradığımız eşitlikleri elde edelim:

i) $y_0(x,\lambda_n)$ özfonksiyonu için,

$$-y_0''(x,\lambda_n) + q(x)y_0(x,\lambda_n) = \lambda_n^2 y_0(x,\lambda_n)$$

$$-y_0''(x,\lambda) + q(x)y_0(x,\lambda) = \lambda^2 y_0(x,\lambda)$$

eşitliklerinin her iki yanını sırasıyla $y_0(x,\lambda)$ ve $y_0(x,\lambda_n)$ fonksiyonları ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak,

$$y_0''(x,\lambda)y_0(x,\lambda_n) - y_0''(x,\lambda_n)y_0(x,\lambda) = \left(\lambda_n^2 - \lambda^2\right) y_0(x,\lambda_n)y_0(x,\lambda)$$

eşitliğini alırız. Bu eşitliğin her iki yanını $[0,1]$'de integrallersek;

$$y_0''(x,\lambda)y_0(x,\lambda_n) - y_0''(x,\lambda_n)y_0(x,\lambda) = \left(y_0'(x,\lambda)y_0(x,\lambda_n) - y_0'(x,\lambda_n)y_0(x,\lambda)\right)'$$

olduğunu kullanarak,

$$\left(y_0'(x,\lambda)y_0(x,\lambda_n) - y_0'(x,\lambda_n)y_0(x,\lambda)\right)\Big|_{x=0}^{1} = \left(\lambda_n^2 - \lambda^2\right)\int_0^1 y_0(x,\lambda_n)y_0(x,\lambda)dx$$

alırız. $y_0(x,\lambda_n)$ özfonksiyon olduğundan, (4.4.5)'e göre son eşitlik,

$$y_0(1,\lambda_n)D(\lambda) = \left(\lambda_n^2 - \lambda^2\right)\int_0^1 y_0(x,\lambda_n)y_0(x,\lambda)dx$$

şeklinde yazılır. $D(\lambda_n) = 0$ olduğundan,

$$y_0(1,\lambda_n)\frac{D(\lambda) - D(\lambda_n)}{\left(\lambda_n^2 - \lambda^2\right)} = \int_0^1 y_0(x,\lambda_n)y_0(x,\lambda)dx$$

olur. $\lambda_n = \sqrt{\eta_n}$ olduğunu hatırlayıp, $\eta \to \eta_n$ için limite geçersek,

$$y_0(1,\lambda_n)D'(\lambda_n) = \int_0^1 [y_0(x,\lambda_n)]^2 dx$$

elde ederiz. Bu ise (4.4.3)'ü ispatlar.

ii) λ_n özdeğeri için (4.4.5) eşitliğinden alırız ki;

$$y_0(x,\lambda_n)y_1'(x,\lambda_n)-y_0'(x,\lambda_n)y_1(x,\lambda_n)=D(\lambda_n)=0$$

dır. Bu eşitliğin düzenlenmesiyle,

$$\left[\frac{y_1(x,\lambda_n)}{y_0(x,\lambda_n)}\right]' y_0^2(x,\lambda_n)=0$$

ve dolayısıyla,

$$y_1(x,\lambda_n)=cy_0(x,\lambda_n)$$

alırız. $x=1$ için $1=cy_0(1,\lambda_n)$, yani, $c=\dfrac{1}{y_0(1,\lambda_n)}$ olacağından

$$y_1(x,\lambda_n)=\frac{y_0(x,\lambda_n)}{y_0(1,\lambda_n)}$$

eşitliği geçerlidir.

Böylece ispat tamamlanır. Şimdi ise asıl amacımız olan inverse problem için teklik teoremini ifade ve ispat edelim:

$$\begin{cases} -y''+q_i(x)y=\eta y,\ \eta=\lambda^2 \\ y'(0)-h_i y(0)=0 \qquad\qquad ,\ i=1,2 \\ y'(1)+H_i y(1)=0 \end{cases}$$

problemlerini L_i, $i=1,2$ olarak gösterelim.

Teorem4.4.2: $(h_i,H_i,q_i)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times L_2(0,1)$, $i=1,2$ üçlüleri aynı λ_n, $n\in\mathbb{N}$ özdeğerlerine ve α_n, $n\in\mathbb{N}$ normalleştirici sayılarına sahip, L_i problemlerinin katsayıları olsun. Bu durumda, $L_1=L_2$ dır. Yani,

$h_1=h_2$, H_1=H_2 ve $q_1=q_2$, (h.h.y.) dır.

İspat: $i=1,2$ için $-y''+q_i(x)y=\eta y$ denklemlerinin (4.4.1) koşulunu sağlayan, çözümlerini sırasıyla,

$$y_0(x,\lambda,q_1,h_1),\ y_0(x,\lambda,q_2,h_2)$$

şeklinde; (4.4.2) koşulunu sağlayan çözümlerini ise sırasıyla,

$$y_1(x,\lambda,q_1,H_1),\ y_1(x,\lambda,q_2,H_2)$$

şeklinde gösterelim. (4.4.3) eşitliğinden,

$$y_0(1,\lambda_n,q_1,h_1) = y_0(1,\lambda_n,q_2,h_2) \tag{4.4.6}$$

olduğunu alırız. Zira α_n normalleştirici sayıları aynıdır ve $D(\lambda_n)$ sadece λ_n'e bağlıdır. (4.4.6) eşitliğini, (4.3.7)'yi kullanarak yeniden yazarsak,

$$\cos\lambda_n + \frac{\sin\lambda_n}{2\lambda_n}\left(2h_1 + \int_0^1 q_1(t)\,dt\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) = \cos\lambda_n + \frac{\sin\lambda_n}{2\lambda_n}\left(2h_2 + \int_0^1 q_2(t)\,dt\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\lambda_n = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$ alırsak,

$$\frac{\sin\left(N\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{(2N+1)\pi}\left[2h_1 - 2h_2 + \int_0^1 (q_1(t) - q_2(t))\,dt\right] = o\left(\frac{1}{N}\right) \tag{4.4.7}$$

olur. Son eşitliğin her iki yanını N ile çarpıp $N \to \infty$ için limite geçersek,

$$h_1 - h_2 + \frac{1}{2}\int_0^1 (q_1(t) - q_2(t))\,dt = 0 \tag{4.4.8}$$

buluruz.

Diğer yandan özdeğerlerin (4.3.9) ifadesinden, aynı λ_n özdeğeri için,

$$\begin{aligned}\lambda_n &= n\pi + \left(h_1 + H_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 q_1(t)\,dt\right)\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= n\pi + \left(h_2 + H_2 + \frac{1}{2}\int_0^1 q_2(t)\,dt\right)\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

bağıntısını alırız. Buradan,

$$\begin{aligned}n\pi(\lambda_n - n\pi) &= h_1 + H_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 q_1(t)dt + o(1)\\ &= h_2 + H_2 + \frac{1}{2}\int_0^1 q_2(t)\,dt + o(1)\end{aligned}$$

eşitliğini ve $n \to \infty$ iken,

$$h_1 + H_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 q_1(t)dt = h_2 + H_2 + \frac{1}{2}\int_0^1 q_2(t)dt \tag{4.4.9}$$

eşitliğini alırız. (4.4.8) ve (4.4.9) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak;

$$H_1 = H_2$$

bulunur.

Şimdi, $H_1 = H_2 = H$ olmak üzere, $\gamma = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \left(N + \frac{1}{2} \right)\pi,\ N \in \mathbb{N} \right\}$

eğrisi üzerinde,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{D(\lambda)} \left[y_0(x,\lambda,q_1,h_1) - y_0(x,\lambda,q_2,h_2) \right] \left[y_1(x,\lambda,q_1,H) - y_1(x,\lambda,q_2,H) \right] d\lambda$$

integralini inceleyelim. Burada $D(\lambda)$, y_0, y_1 fonksiyonları λ'nın analitik fonksiyonlarıdır. Ayrıca $D(\lambda)$, $\lambda = \lambda_n$ özdeğerinde basit sıfırlara sahiptir. Yani λ_n özdeğerleri, integral içindeki fonksiyonun basit kutuplarıdır. Dolayısıyla bu kutuplardaki rezidüler toplamı Lemma4.4.1'in kullanılmasıyla;

$$\frac{1}{D'(\lambda_n)} \left[y_0(x,\lambda_n,q,h_1) - y_0(x,\lambda_n,q_2,h_2) \right] \left[y_1(x,\lambda_n,q_1,H) - y_1(x,\lambda_n,q_2,H) \right]$$

$$= \frac{y_0(1,\lambda_n,q_1,h_1)}{\alpha_n} \left[y_0(x,\lambda_n,q_1,h_1) - y_0(x,\lambda_n,q_2,h_2) \right] \left[\frac{y_0(x,\lambda_n,q_1,h_1)}{y_0(1,\lambda_n,q_1,h_1)} - \frac{y_0(x,\lambda_n,q_2,h_2)}{y_0(1,\lambda_n,q_2,h_2)} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha_n} \left[y_0(x,\lambda_n,q_1,h_1) - y_0(x,\lambda_n,q_2,h_2) \right]^2$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca bu integral değerlendirilirse $O\left(N^{-3}\right)$ olduğu görülür. Bu ise rezidüler toplamının sıfır olması demektir. Yani,

$$\frac{1}{\alpha_n} \left[y_0(x,\lambda_n,q_1,h_1) - y_0(x,\lambda_n,q_2,h_2) \right]^2 = 0$$

olmalıdır. Buradan ise,

$$y_0(x,\lambda_n,q_1,h_1) = y_0(x,\lambda_n,q_2,h_2)$$

bulunur. Bu son eşitliği L_1 ve L_2 problemlerinin denklem ve sınır koşullarında kullanarak,

$$-y_0''(x,\lambda_n,q_1,h_1) + q_1(x) y_0(x,\lambda_n,q_1,h_1) =$$

$$= -y_0''(x,\lambda_n,q_2,h_2) + q_2(x) y_0(x,\lambda_n,q_2,h_2)$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = y'(0) - h_2 y(0)$$

eşitlikleri alınır. Bu son eşitliklerden de $h_1 = h_2$ ve $q_1 = q_2$ (h.h.y.) elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

YK

KAYNAKLAR:

[1] Naimark M.A. 1968, Linear Differential Operators, Ungar New York

[2] Hutson V., Pym J.S., 1980, Applications of Functional Analysis and Operator Theory, London

[3] Gorbachuk V.I. and Gorbachuk M.L. 1990 Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, USSR

[4] Savchuk A. M. 2001 On eigenvalues and eigenfunctions of Sturm—Liouville operators with singular potentials Mat. Zametki **69** 277-85 (in Russian)

[5] Allahverdiev B.P. and Canoğlu A. 1997 Spectral Analysis of Dissipative Schrödinger operators, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 127A, 1113-1121.

[6] Pöschel J. and Trubowitz E. 1987 Inverse Spectral Theory (Pure Appl. Math. vol 130) (Orlando, FL: Academic)

[7] Ambartsumyan B. A. 1929 Über eine Frage der Eigenwerttheorie Z. Phys. **53** 690-5

[8] Hochstadt H. and Liebermann B. 1978 An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data SIAM J. Appl. Math. **34** 676-80

[9] G.Borg, Eine Umkehrung der Strurm – Liouvilleschen Eitenwerthufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78 (1945), 1-96.

[10] Gesztesy F. and Simon B. 2000 Inverse spectral analysis with partial information on the potential, II. The case of discrete spectrum Trans. Am. Math. Soc. **352** 2765-89

[11] Sakhnovich L. 2001 Half-inverse problem on the finite interval inverse Problems **17** 527-32

[12] Levitan B. M. 1984 Inverse Sturm-Liouville Problems (Moscow: Nauka) (in Russian) (Engl. transl. 1987 (Utrecht: VNU Science Press))

[13] Marchenko V. A. 1977 Sturm-Liouville Operators and Their Applications (Kiev: Naukova Dumka) (in Russian) (Engl. transl. 1986(Basel: Birkhâuser))

[14] Gesztesy F. and Simon B. 1999 On the determination of a potential from three spectra Differential Operators and Spectral Theory (Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2 189) (Providence, RI: American Mathematical Society) pp 85-92

[15] Pivovarchik V. N. 1999 An inverse Sturm-Liouville problem by three spectra Integr. Eguat. Oper. Theory **34** 234-43

[16] Marchenko V. A. 1950 Some questions of the theory of second order differential operators Dokl. Akad. Nauk SSSR **72** 457-60

[17] Gelfand I. M. and Levitan B. M. 1951 On determination of a differential equation by its spectral function Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **15** 309-60 (in Russian)

[18] Krein M. G. 1951 Solution of the inverse Sturm-Liouville problem Dokl. Akad. Nauk SSSR **76** 21-4 (in Russian)

[19] McLaughlin J. R.1986 Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data SIAM Rev. **28** 53-72

[20] Zhikov V. V. 1967 On inverse Sturm-Liouville problems on a finite segment Izv. Akad. Nauk SSSR **35** 965-76 (in Russian)

[21] Rundell W. and Sacks P. E. 1992 The reconstruction of Sturm-Liouville operators inverse Problems **8** 457-82

[22]Coleman C. F. and Mc Laughlin J. R. 1993 Solution of the inverse spectral problem for an impedance with integrable derivative: I Commun. Pure Appl. Math. **46** 145-84

Coleman C. F. and McLaughlin J. R. 1993 Solution of the inverse spectral problem for an impedance with integrable derivative: II Commun. Pure Appl Math. **46** 185-212

[23] Hald O. 1984 Discontinuous inverse eigenvalue problem Commun. Pure Appl. Math. **37** 539-77

[24] Andersson L. 1988 Inverse eigenvalue problems for a Sturm-Liouville equation in impedance form Inverse Problems **4** 929-71

[25] Carlson R. 1994 Inverse Sturm-Liouville problems with a singularity at zero Inverse Problems **10** 851-64

[26] Hald O. A. and McLaughlin J. R. 1998 Inverse problems: recovery of B V coefficients from nodes Inverse Problems **14** 245-73

[27] Yurko V. A. 2000 Inverse problems for differential equations with singularities lying inside the interval J. Inverse III-Posed Probl. **8** 89-103

[28] Freiling G. and Yurko V. 2002 On the determination of differential equations with singularities and turning points Results Math. **41** 275-90

[29] Gohberg I. and Krein M. 1965 Introduction to the Theory of Linear Non-Selfadjoint Operators in Hilbert Space (Moscow: Nauka) (in Russian) (Engl. transl. 1969 Am. Math. Soc. Transl. Math. Monographs vol 18 (Providence, RI: American Mathematical Society))

[30] Gohberg I. and Krein M. 1967 Theory of Volterra Operators in Hilbert Space and its Applications (Moscow: Nauka) (in Russian) (Engl. transl. 1970 Am. Math. Soc. Transl. Math. Monographs vol 24 (Providence, RI: American Mathematical Society))

[31] McLaughlin J. R. 1988 Stability theorems for two inverse problems Inverse Problems **4** 529-40

[32] Dineen S. 1981 Complex Analysis in Locally Convex Spaces (Amsterdam: North-Holland)

[33] He X. and Volkmer H. 2001 Riesz bases of solutions of Sturm-Liouville equations J. Fourier Anal. Appl. **7** 297-307

[34] Gasimov M.G. and Levitan B. M. 1964 Determination of a Sturm-Liouville Differential Equation by two of it's spectra, Survey Math. Sci. v. 8, No:4(56), 141-151

[35] Savchuk A. M. and Shkalikov A. A. 1999 Sturm-Liouville operatörs with singular potentials Mat. Zametki **66** 897-912 (in Russian)

[36] Albeverio S, Gesztesy F, Hϕegh-Krohn R. and Holden H. 1988 Solvable Models in Quantum Mechanics (New York: Springer)

[37] Albeverio S. and Kurasov P. 2000 Singular Perturbations of Differential Operators. Solvable Schrödinger Type Operators (Cambridge: ambridge University Press)

ÖZGEÇMİŞ:

1981 yılında Sivas'ta doğdum. İlk ve orta öğrenimimi burada tamamladım. 2002 yılında, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldum. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım. Halen Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.