T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZMART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER ÜZERİNE

Didem YEŞİL

Danışman:
Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Ocak, 2009
ÇANAKKALE

TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER ÜZERİNE

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Didem YEŞİL

Danışman:

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Ocak, 2009

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Didem YEŞİL tarafından **Doç. Dr. Erdal EKİCİ** yönetiminde hazırlanan **"TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER ÜZERİNE"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Yönetici

Prof. Dr. İsmail TARHAN

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN

Jüri Üyesi

Sıra No:

Tez Savunma Tarihi:07/01/2009

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Müdür V.

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana her konuda yardımcı ve destek olan, engin hoşgörüsünü esirgemeyen başta danışmanım Doç. Dr. Erdal EKİCİ' ye, Prof. Dr. Kazım KAYA' ya ve görüş ve düşünceleri ile bana yardımcı olan sevgili dostum Araş. Gör. Barış ALBAYRAK'a teşekkür ederim.Son olarak attığım her adımda bana destek olan, güç veren aileme ve her zaman yardımını esirgemeyen canım kardeşim Figen YEŞİL'e teşekkür ederim.

Didem YEŞİL

TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER ÜZERİNE

ÖZET

Bu tezde, gδp-kapalı kümeler, gδp-açık kümeler, gδp-$T_{1/2}$ uzay, gδp-kapalı kümeler ve süreklilik, $\delta_p$sg-kapalı kümeler, $\delta_p$sg –açık kümeler, $\delta_p$sg -$T_{1/2}$ uzay, $\delta_p$sg-kapalı kümeler ve süreklilik konuları ve özellikleri araştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: gδp-kapalı küme, gδp-açık küme, gδp-$T_{1/2}$ uzay, gδp-sürekli fonksiyon, $\delta_p$sg-kapalı küme, $\delta_p$sg –açık küme, $\delta_p$sg -$T_{1/2}$ uzay, $\delta_p$sg-sürekli fonksiyon.

ON GENERALIZED CLOSED SETS IN TOPOLOGICAL SPACES

ABSTRACT

In this thesis, the notions of gδp-closed sets, gδp-open sets, gδp-$T_{1/2}$ space, gδp-closed sets and continuity, $\delta_p$sg -closed sets, $\delta_p$sg -open sets, $\delta_p$sg -$T_{1/2}$ space, $\delta_p$sg -closed sets and continuity and their properties have been investigated.

Keysword: : gδp-closed set, gδp-open set, gδp-$T_{1/2}$ space, gδp-continuous function, $\delta_p$sg-closed set, $\delta_p$sg –open set, $\delta_p$sg -$T_{1/2}$ space, $\delta_p$sg-continuous function.

İÇERİK

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Genelleştirilmiş kapalı küme olarak ifade ettiğimiz g-kapalı küme ifadesi 1970 de Levine (Levine 1970) tarafından sunuldu ve çalışıldı.

Bilindiği üzere kapalı kümeler topolojik uzaylarda birçok karakterizasyon rolü üstlenmişlerdir.

Topolojik uzaylarda kapalı kümelerin üstlendiği rollerin bazıları:

1. Kompakt uzayda, Lindelöf uzayda, Sayılabilir Kompakt uzayda, her kapalı alt küme sırasıyla Kompakttır, Lindelöftür, Sayılabilir Kompakttır.

2. Normal uzayın her kapalı alt kümesi normaldir.

3. Yerel kompakt uzayın her kapalı alt kümesi yerel kompakttır.

4. Hausdorff uzayda her kompakt küme kapalıdır.

Bu bağlamda Levine 1970 de genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) kümelerin özellikleri ve ilişkilerini araştırdı. Sonuç olarak aşağıdaki ifadelere ulaştı.

1. Kompakt uzayda, Lindelöf uzayda, Sayılabilir Kompakt uzayda her genelleştirilmiş (g-kapalı) kapalı alt küme sırasıyla Kompakttır, Lindelöftür, Sayılabilir Kompakttır.

2. Normal uzayın her genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) alt kümesi normaldir.

3. Regüler yerel kompakt uzayın her genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) alt kümesi yerel kompakttır.

Üstelik Levine (1970) T_1 ve T_0 ayırma aksiyomları arasında kesin olarak ifade ettiği ve $T_{1/2}$ –uzaylar olarak adlandırdığı yeni bir ayırma aksiyomu sunmuş ve ilişkilerini çalışmıştır.

Genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) kümeler bu bağlamda büyük önem arz etmektedir.

Levine (1970) den sonra genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) kümeler üzerine çok yoğun biçimde talep olmuş ve bir çok ilişkileri araştırılmış ve çalışılmıştır. Öyle ki, zaten var olan bir çok karakterizasyonlar ve ilişkiler genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) kümeler ile yeniden araştırılmış ve ifade edilmiştir.

Son yıllarda yapılan bir çok çalışmalardan bazıları; Dontchev, J. ve Maki, H.. 1999; Devi, R., Balachandran, K. ve Maki, H.. 1995; Noiri, T. ve Sayed, O. R.. 2005; Cao, J., Ganster, M. ve Reilly, I.. 2002; Baker, C. W.. 1996; Baker, C. W., 2001; Dontchev, Julian; Maki, Haruo., 1999; Dontchev, Julian; Maki, Haruo., 1999; Fukutake, Takayoshi., 1985; Nasef, El-Maghrabi., 2005; El-Shafei ve Zahari., 2006; Saraf, Naralafi, Whanna., 2005; Cao, Ganster, Reilly, Seeiner., 2005; El-Maghrabi, Nasef., 2005; olarak gözönüne alınabilir.

Bunun yanı sıra son yıllarda genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) kümeler bir çok yeni bilim dalı içerisinde çalışma ve ilgi alanı bulmuştur.

Tezimizdeki çalışmalar bu bağlamda önem arz etmektedir.

Tezimizin ana amacı gδp-kapalı kümeleri, özelliklerini ve ilişkileri ile birlikte $\delta_p$sg- kapalı kümelerinin, özelliklerini ve ilişkilerini çalışmaktır.

Tezimiz 12 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezimiz boyunca kullanacağımız ve yararlanacağımız temel bilgi ve ifadeleri sunduk.

İkinci bölümde topolojik uzaylarda gδp-kapalı kümelerin özelliklerini ve ilişkilerini araştırdık.

Üçüncü bölümde gδp-kapalı kümelerinin tümleyenleri olan gδp-açık kümelerinin özelliklerini ve ilişkilerini araştırdık.

Dördüncü bölümde her gδp-kapalı kümenin δ-önkapalı olduğu ve gδp-$T_{1/2}$ uzay olarak adlandırılan uzaylar ve ilişkilerini inceledik.

Beşinci bölümde gδp-kapalı kümelerin sürekli fonksiyonlar ile ilişkisi ve korunma özelliklerini araştırdık.

Altıncı bölümde gδp-sürekli fonksiyonlar ve gδp-kararsız fonksiyonların gδp-kapalı kümeler ile ilişkisi ve özelliklerini araştırdık.

7, 8, 9, 10, 11 ve 12 inci bölümlerde ise topolojik uzaylarda $\delta_p$sg-kapalı kümeler, özellikleri ve ilişkileri çalışılmıştır.

Şimdi tezimizde yararlanacağımız temel tanım, teorem, ifade ve bilgileri sunalım.

Tezimizdeki temel topoloji bilgileri çok çeşitli topoloji kaynaklarından N. Bourbaki., 1996; S.Willard., 1970; J. Dugundji., 1966. v.b. bakılabilir.

Tezimiz boyunca topolojik uzayları (X, τ), (Y, υ) v. b. yada kısaca X, Y v. b. ile göstereceğiz.

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin kapanışını cl(A) ve içini int(A) ile göstereceğiz.

Tanım 1.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A = int(cl(A)) ise ***A*** ya düzenli açık küme denir (Stone, 1937).

Tanım 1.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $O \subset A \subset \mathrm{cl}O$ olacak şekilde bir O açık kümesi varsa A' ya yarı-açık küme denir (Levine, 1963).

Tanım 1.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $X \setminus A$ yarı-açık ise A kümesi yarı-kapalıdır denir (Levine, 1963).

Tanım 1.4. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $x \in G \subset A$ olacak şekilde en az bir G düzenli açığı var ise A kümesine δ-açık küme denir (Velicko, 1968).

Tanım 1.5. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. δ-açık kümelerin tümleyenlerine δ-kapalı kümeler denir (Velicko, 1968).

Tanım 1.6. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\forall x \in V \in \tau$ için $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(V)) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A nın bir δ-kapanış noktası denir (Velicko, 1968).

A kümesinin tüm δ-kapanış noktalarının kümesine A nın δ-kapanışı denir.

A nın tüm δ-kapanış noktalarının kümesini δ-cl(A) ile göstereceğiz.

Tanım 1.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset$ int(δ-cl(A)) ise A kümesine δ-önaçıktır denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 1.8. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. δ-önaçık kümelerin tümleyenlerine δ-önkapalı kümeler denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere tüm δ- önaçık kümelerinin ailesini δ-PO(X) ile göstereceğiz.

Teorem 1.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda

A kümesinin, δ- önkapalı olması için gerek ve yeter koşul cl(δ-int(A)) $\subset A$ olmasıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 1.10. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1. δ- önaçık kümelerin keyfi birleşimleri δ- önaçıktır.

2. δ-önkapalı kümelerin keyfi arakesitleri δ-önkapalıdır.

(Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 1.11. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$ alalım. A kümesini kapsayan tüm δ-önkapalı kümelerin keyfi arakesitine A kümesinin δ-önkapanışı denir ve δ- pcl(A) ile gösterilir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 1.12. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$ alalım. A kümesinde bulunan tüm δ-önaçık kümelerin birleşimine A kümesinin δ-öniçi denir ve δ- pint(A) ile gösterilir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 1.13. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1. A, δ-önkapalıdır $\Leftrightarrow$ A = δ-pcl(A)

2. $A \subset B \Rightarrow$ δ-pcl(A) $\subset$ δ-pcl(B)

3. δ-pcl(A) kümesi δ- önkapalıdır.

4. δ-pcl(δ-pcl(A)) = δ-pcl(A)

5. $x \in$ δ-pcl(A) $\Leftrightarrow$ $\forall$ $(x \in)V \in$ δ-PO(X) için $A \cap V \neq \varnothing$ olur

(Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 1.14. (X,τ) ve (Y,υ) iki topolojik uzay, $A \in$ δ-PO(X) ve $B \in$ δ-PO(Y) olsun. Bu durumda $A \times B \in$ δ-PO($X \times$Y) olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 1.15. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. O açık küme olmak üzere $A \subseteq O$ iken cl(A)$\subseteq O$ sa

1) (X,τ) T_1-uzay ise $T_{1/2}$-uzaydır.

2) (X,τ) $T_{1/2}$-uzay ise T_0-uzaydır (Levine, 1970).

Teorem 1.19. (X,τ) ve (Y,υ) iki topolojik uzay ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon ve $A\subset X$ olsun.

Eğer A g-kapalı ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ kapalı bir fonksiyon ise *f(A)* g-kapalıdır (Levine, 1970).

Tanım 1.20. (X,τ) topolojik uzay olsun. x, $y\in X$ için $x\in \mathrm{cl}(\{y\})$ iken $y\in \mathrm{cl}(\{x\})$ oluyorsa X uzayına simetriktir denir (Levine, 1970).

BÖLÜM 2

gδp-KAPALI KÜMELER

Bu bölümde topolojik uzaylarda gδp-kapalı kümelerin özellikleri ve ilişkilerini araştırdık.

Tanım 2.1. X bir topolojik uzay olmak üzere A alt kümesini alalım. $A \subset U$ ve U açık olduğunda δ-pcl(A) $\subset U$ oluyorsa A kümesine gδp-kapalıdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.2. X bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ olsun. A gδp-kapalı ise δ-pcl(A) \ A boş olmayan hiçbir kapalı kümeyi kapsamaz.

İspat: $F \subset X$ kapalı bir küme ve $F \subset$ δ-pcl(A) \ A olsun. $X \setminus F$ açık ve A gδp-kapalı olduğundan δ-pcl(A) $\subset X \setminus F$ dir. Buradan,

$$F \subset \delta\text{-pcl}(A) \cap (X \setminus \delta\text{-pcl}(A)) = \varnothing$$

elde edilir. Bu durumda $F = \varnothing$ dir.

Teorem 2.3. X bir topolojik uzay ve A gδp-kapalı bir alt küme olsun. δ-pcl(A) \ A kapalı ise A δ-önkapalıdır .

İspat: A gδp-kapalı bir küme ve δ-pcl(A) \ A kapalı olsun. A gδp-kapalı olduğundan δ-pcl(A) \ A boş olmayan kapalı bir küme kapsamaz. O halde,

$$\delta\text{-pcl}(A) \setminus A = \varnothing$$

dir. δ-pcl(A) = A ve A δ-önkapalıdır .

Teorem 2.4. X bir topolojik uzay olmak üzere A kapalı bir küme ise δ-pcl(A) \ A kapalıdır.

İspat: A kapalı bir küme ise δ-pcl(A) \ A = $\emptyset$ olacağından dolayı δ-pcl(A) \ A kapalı olacaktır.

Teorem 2.5. X bir topolojik uzay olmak üzere A, $B \subset X$ olsun. Eğer A ve B gδp-kapalı ise $A \cup B$ gδp-kapalıdır.

İspat: A ve B gδp-kapalı kümelerini alalım. $A \cup B \subset U$ ve U açık olsun. A ve B gδp-kapalı olduğundan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset U \text{ ve } \delta\text{-pcl}(B) \subset U$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} &\delta\text{-pcl}(A) \cup \delta\text{-pcl}(B) \\ &= \delta\text{-pcl}(A \cup B) \\ &\subset U \end{aligned}$$

olur. O halde $A \cup B$ gδp-kapalıdır.

Uyarı 2.6. Bir topolojik uzayda iki gδp-kapalı kümenin arakesiti gδp-kapalı olmayabilir.

Örnek 2.7. $X=\{a, b, c, d\}$ ve

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}, X\}$$

olsun. $A=\{a, b, d\}$ ve $B=\{b, c, d\}$ alt kümeleri verilsin.

Buradan A ve B gδp-kapalı olup $A \cap B=\{b, d\}$ gδp-kapalı değildir.

Teorem 2.8. X bir topolojik uzay ve A gδp-kapalı bir alt küme olsun. $A \subset B \subset$ δ-pcl(A) ise B gδp-kapalıdır.

İspat: $A \subset B \subset$ δ-pcl(A) olsun. $B \subset U$ ve U açık olsun. $A \subset B \subset U$ ve A gδp-kapalı olduğundan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset U \text{ ve } \delta\text{-pcl}(B) \subset \delta\text{-pcl}(A)$$

$\subset U$

ve

$$\delta\text{-pcl}(B) \subset U$$

olur. Sonuç olarak B gδp-kapalıdır.

Sonuç 2.9. X bir topolojik uzay ve A gδp-kapalı bir alt küme olsun. Bu durumda δ-pcl(A) da gδp-kapalıdır.

İspat: A gδp-kapalı bir küme olsun. $A \subset$ δ-pcl(A) $\subset$ δ-pcl(A) olduğundan Teorem 2.8 den açıktır.

Teorem 2.10. X bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset B \subset X$ olsun. A, X de gδp-kapalı ve B düzenli açık ise A kümesi B de de gδp-kapalıdır.

İspat: A, X de gδp-kapalı olsun. $A \subset U$ ve U, B de açık olsun Buradan $A \subset B \cap U'$ olacak şekilde U' açığı vardır. $A \subset U'$ olduğundan δ-pcl(A) $\subset U'$ olur. Buradan,

$$B \cap \delta\text{-pcl}(A) \subset B \cap U' = U$$

olur. O halde A, B de gδp-kapalıdır.

Teorem 2.11. X bir topolojik uzay olsun. X in açık kümelerinin sınıfı ile kapalı kümelerinin sınıfı aynı ise X in her alt kümesi gδp-kapalıdır.

İspat: X in açık kümelerinin sınıfı ile kapalı kümelerinin sınıfı aynı olsun. $A \subset X$ ve $A \subset U$, U açık olsun. O halde δ-pcl(A) $\subset U$ ve buradan A gδp-kapalıdır.

Teorem 2.12. X bir topolojik uzay olmak üzere X in her alt kümesi gδp-kapalı ise her açık küme δ-önkapalıdır.

İspat: X in her alt kümesi gδp-kapalı olsun. $U \subset X$ açık kümesini alalım. $U \subset U$ ve U gδp-kapalı olduğundan δ-pcl(U) $\subset U$ olur. O halde U δ-önkapalıdır.

Teorem 2.13. X bir regüler topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A kompakt ise gδp-kapalıdır.

İspat: X bir regüler topolojik uzay ve A kompakt ve $A\subset U$ ve U açık olsun. Bu durumda

$$A\subset V\subset \mathrm{cl}(V)\subset U$$

olacak biçimde V açık kümesi vardır. Buradan δ-pcl(A)$\subset U$ dur. Sonuç olarak A gδp-kapalıdır.

Tanım 2.14. (X,τ) topolojik uzay olsun. $\forall x$,y $\in X$ için $x\in \mathrm{cl}(\{y\})$ iken y$\in \mathrm{cl}(\{x\})$ oluyorsa bu uzaya simetrik uzay denir (Levine, 1970).

Teorem 2.15. X bir topolojik uzay olsun. X simetrik ise bu durumda $\forall x\in X$ için $\{x\}$ gδp-kapalıdır.

İspat: X bir simetrik topolojik uzay olsun. Kabul edelim ki $x\in X$ için $\{x\}$ gδp-kapalı olmasın. Yani $\{x\}\subset U$ ve U açık olmak üzere δ-pcl($\{x\}$)$\not\subset U$ olsun. Bu durumda $\mathrm{cl}(\{x\})\not\subset U$ dur. O halde,

$$\mathrm{cl}(\{x\})\cap(X\setminus U)\neq\varnothing$$

yani $z\in \mathrm{cl}(\{x\})\cap(X\setminus U)$ seçebiliriz. Bu durumda,

$$x\in \mathrm{cl}(\{z\})\subset X\setminus U$$

olur. Bu ise bir çelişkidir.

Tanım 2.16. X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $x\in A$ alalım. Eğer x' i bulunduran her δ-önaçık küme A nın x den farklı bir noktasını kapsarsa x' e A nın bir δ-önyığılma noktası denir (Ekici, 2005)

Uyarı 2.17. X bir topolojik uzay, $A\subset X$ olsun. A nın tüm δ-önyığılma noktalarının kümesini $A^{\delta p\sim}$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.18. X bir topolojik uzay, $A\subset X$ ve $B\subset X$ olsun. A ve B gδp-kapalı kümeler ve $A^{\sim}\subset A^{\delta p\sim}$ ve $B^{\sim}\subset B^{\delta p\sim}$ ise $A\cup B$ kümesi gδp-kapalıdır.

İspat: $A \cup B \subset U$ ve U açık olsun. A, $B \subset U$ ve A, B gδp-kapalı kümeler olduğundan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset U \text{ ve } \delta\text{-pcl}(B) \subset U$$

olacaktır. Öte yandan

$$A^{\delta p\sim} \subset \delta\text{-pcl}(A) \text{ ve } B^{\delta p\sim} \subset \delta\text{-pcl}(B)$$

olduğundan,

$$\text{cl}(A) = \delta\text{-pcl}(A) \text{ ve } \text{cl}(B) = \delta\text{-pcl}(B)$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) &= \text{cl}(A \cup B) \\ &\supset \delta\text{-pcl}(A \cup B) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $A \cup B$ gδp-kapalıdır.

Teorem 2.19. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A gδp-kapalı ve açık bir küme ise A δ-önkapalıdır.

İspat: A, gδp-kapalı ve açık olsun. $A \subset A$ olduğundan δ-pcl(A) $\subset A$ ve buradan A δ-önkapalıdır.

Tanım 2.20. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A' yı kapsayan tüm açık kümelerin arakesitine A' nın çekirdeği denir (Maki, 1986).

Bir $A \subset X$ kümesinin çekirdeğini Çek A ile göstereceğiz.

Teorem 2.21. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1. A, gδp-kapalıdır.

2. δ-pcl(A) $\subset$ Çek A

İspat: A, gδp-kapalı olsun. $A \subset U$ ve U açık olsun. A gδp-kapalı olduğundan δ-pcl(A) $\subset U$ dur. Buradan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset \text{Çek } A$$

olur.

Tersine δ-pcl(A) $\subset$ Çek A olsun. $A \subset U$ ve U açık alalım. Buradan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset \text{Çek } A \subset U$$

ve böylece,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset U$$

olur. O halde A, gδp-kapalıdır.

BÖLÜM 3

gδp-AÇIK KÜMELER

Bu bölümde gδp-kapalı kümelerin tümleyenleri olan gδp-açık kümelerin özelliklerini ve ilişkilerini araştırdık.

Tanım 3.1. X bir topolojik uzay olmak üzere A alt kümesini alalım. $X \setminus A$ kümesi gδp-kapalı ise A kümesine gδp-açık denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 3.2. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın gδp-açık olması için gerek ve yeter koşul F kapalı ve $F \subset A$ olduğunda $F \subset \delta\text{-pint}(A)$ olmasıdır (Ekici ve Noiri, 2006).

İspat: $A \subset X$ gδp-açık bir küme ve $F \subset X$ kapalı ve $F \subset A$ olsun. $X \setminus F$ açıktır ve $X \setminus A \subset X \setminus F$ dir. $X \setminus A$ gδp-kapalı olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(X \setminus A) \subset X \setminus F$$

olur. Buradan,

$$X \setminus \delta\text{-pint}(A) \subset X \setminus F$$

dir. Böylece $F \subset \delta\text{-pint}(A)$ olur.

Tersine F kapalı bir küme ve $F \subset A$ olduğunda $F \subset \delta\text{-pint}(A)$ olsun. $U \subset X$ açık bir küme ve $X \setminus A \subset U$ alalım.

$$X \setminus U \subset A$$

ve $X \setminus U$ kapalı olduğundan $X \setminus U \subset \delta\text{-pint}(A)$ olur. Buradan $\delta\text{-pcl}(X \setminus A) \subset U$ bulunur. Böylece $X \setminus A$ gδp-kapalıdır. Dolayısıyla A gδp-açıktır.

Teorem 3.3. X bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ alalım. Eğer A gδp-açık, δ-pint$(A) \cup (X \setminus A) \subset U$ ve U açık olduğunda $U = X$ dir.

İspat: $A \subset X$ gδp-açık bir küme olmak üzere δ-pint$(A) \cup (X \setminus A) \subset U$ ve U açık olsun. Bu durumda,

$$X \setminus U \subset \delta\text{-pcl}(X \setminus A) \cap A$$

$$= \delta\text{-pcl}(X \setminus A) \setminus (X \setminus A)$$

olur. $X \setminus A$ gδp-kapalı olduğundan

$$X \setminus U = \varnothing \text{ ve } X = U$$

elde edilir.

Teorem 3.4. X bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. int $(A) \cup (X \setminus A) \subset U$ ve U açık olduğunda $U = X$ ise A gδp-açıktır.

İspat: Kabul edelim ki int $(A) \cup (X \setminus A) \subset U$ ve U açık olduğunda $U=X$ olsun. $B \subset A$ ve B kapalı alalım. Buradan,

$$\text{int }(A) \cup (X \setminus A) \subset \text{int }(A) \cup (X \setminus B)$$

olduğundan

$$\text{int }(A) \cup (X \setminus B) = X$$

ve buradan da $B \subset$ δ-pint (A) olur. Yani A gδp-açıktır.

Teorem 3.5. X bir topolojik uzay ve A gδp-açık bir alt küme olsun. δ-pint $(A) \subset B \subset A$ ise B gδp-açıktır.

İspat: A gδp-açık bir küme olmak üzere δ-pint $A \subset B \subset A$ olarak alalım. Bu durumda,

$$X \setminus A \subset X \setminus B$$

$$\subset \delta\text{-pcl}(X \setminus A)$$

ve buradan $X \setminus B$ gδp-kapalıdır. O halde B gδp-açıktır.

Sonuç 3.6. X bir topolojik uzay ve A gδp-açık bir alt küme olsun. Bu durumda δ-pint(A) gδp-açıktır.

İspat: A gδp-açık bir küme olmak üzere

$$\delta\text{-pint}\, A \subset \delta\text{-pint}\, A \subset A$$

olduğundan Teorem 3.5 den açıktır.

Teorem 3.7. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A gδp-kapalı ise δ-pcl(A) \ A gδp-açıktır.

İspat: $A \subset X$ gδp-kapalı bir küme ve $B \subset$ δ-pcl(A) \ A ve B kapalı küme olarak alalım. Bu durumda,

$$B = \varnothing \text{ ve } B \subset \delta\text{-pint}(\delta\text{-pcl}(A) \setminus A)$$

dır. Dolayısıyla δ-pcl(A) \ A gδp-açıktır.

Teorem 3.8. X bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. X uzayında her δ-önaçık küme açık ve cl(A) \ A gδp-açık ise A gδp-kapalıdır.

İspat: $A \subset X$ bir küme olmak üzere cl(A) \ A gδp-açık bir küme olarak alalım. $A \subset U$ ve U açık olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(A) \cap (X \setminus U) &\subset \mathrm{cl}(A) \cap (X \setminus A) \\ &= \mathrm{cl}(A) \setminus A \end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(A) \cap (X \setminus U) &\subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A) \setminus A) \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

olur. O halde δ-pcl(A) $\subset U$ ve A gδp-kapalıdır.

Teorem 3.9. X bir topolojik uzay ve A, $B \subset X$ olsun. X uzayında her δ-önaçık küme açık olsun. A ve B gδp-açık ve δ-pcl(A) $\cap B = \varnothing$ ve $A \cap$ δ-pcl(B)$= \varnothing$ ise $A \cup B$ gδp-açıktır.

İspat: A, $B \subset X$ olmak üzere A ve B gδp-açık ve δ-pcl(A) $\cap B = \varnothing$ ve $A \cap$ δ-pcl(B)$= \varnothing$ olarak alalım. U kapalı bir küme ve $U \subset A \cup B$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} U \cap \delta\text{-pcl}(A) &\subset \delta\text{-pcl}(A) \cap (A \cup B) \\ &\subset A \cup \varnothing = A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U \cap \delta\text{-pcl}(B) &\subset \delta\text{-pcl}(B) \cap (A \cup B) \\ &\subset B \cup \varnothing = B \end{aligned}$$

olur.

Öte yandan A ve B gδp-açık olduğundan ve

$$U \cap \delta\text{-pcl}(A) \subset A \text{ ve } U \cap \delta\text{-pcl}(B) \subset B$$

olduğundan

$$U \cap \delta\text{-pcl}(A) \subset \delta\text{-pint}(A)$$

ve

$$U \cap \delta\text{-pcl}(B) \subset \delta\text{-pint}(B)$$

olur. Buradan,

$$U = U \cap (A \cup B)$$

$$
\begin{aligned}
&= (U \cap A) \cup (U \cap B) \\
&\subset (U \cap \delta\text{-pcl}(A)) \cup (U \cap \delta\text{-pcl}(B)) \\
&\subset \delta\text{-pint}(A \cup B)
\end{aligned}
$$

olur. O halde $A \cup B$ g δp-açıktır.

BÖLÜM 4

gδp-$T_{1/2}$ UZAYLAR

Bu bölümde her gδp-kapalı kümenin δ-önkapalı olduğu ve gδp-$T_{1/2}$ uzay olarak adlandırılan uzaylar ve ilişkilerini inceledik.

Tanım 4.1. X bir topolojik uzay olsun. Her gδp-kapalı küme δ-önkapalı ise uzaya gδp-$T_{1/2}$ uzay denir.

Teorem 4.2. X bir gδp-$T_{1/2}$ uzaysa her tek nokta kümesi kapalı ya da δ-önaçıktır.

İspat: X bir gδp-$T_{1/2}$ uzay olsun. $x \in X$ ve $\{x\}$ kapalı olmasın. Bu durumda $X \setminus \{x\}$ açık değildir. O halde $X \setminus \{x\}$ gδp-kapalıdır. Her gδp-kapalı küme δ-önkapalı olduğundan $X \setminus \{x\}$ δ-önkapalıdır. Sonuç olarak $\{x\}$ δ-önaçıktır.

Teorem 4.3. Her tek nokta kümesi kapalı ya da δ-önaçık ise X bir gδp-$T_{1/2}$ uzaydır.

İspat: $A \subset X$ bir gδp-kapalı küme olsun. $x \in$ δ-pcl(A) alalım.

$\{x\}$ kümesi kapalı olsun. Kabul edelimki $x \notin A$ olsun. Buradan $\{x\} \subset$ δ-pcl(A) $\setminus A$ olur. $\{x\}$ kümesi kapalı olduğundan $\{x\} = \emptyset$ olurki çelişkidir. O halde $x \in A$ dır.

$\{x\}$ kümesi δ-önaçık olsun. $x \in$ δ-pcl(A) olduğundan $\{x\} \cap A \neq \emptyset$ dir. O halde $x \in A$ dır.

Sonuç olarak δ-pcl(A) = A ve A δ-önkapalıdır. Yani X uzayı g δp-$T_{1/2}$ uzayıdır.

Sonuç 4.4. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

1. X, g δp-$T_{1/2}$ uzaydır.

2. Her tek nokta kümesi kapalı ya da δ-önaçıktır.

İspat: Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 den açıktır.

Teorem 4.5. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

1. X uzayı bir gδp-$T_{1/2}$ uzaydır.

2. $A \subset X$ için *A*' nın δ-önaçık olması için gerek ve yeter koşul *A*' nın gδp-açık olmasıdır.

İspat: (1)$\Rightarrow$(2) : *X* bir gδp-$T_{1/2}$ uzay ve *A* gδp-açık olsun. Buradan $X \setminus A$ gδp-kapalıdır. O halde uzay bir gδp-$T_{1/2}$ uzay olduğundan her gδp-kapalı küme δ-önkapalı olduğu için $X \setminus A$, δ-önkapalıdır. Buradan *A* δ-önaçıktır.

(2)$\Rightarrow$(1) : *A* gδp-kapalı olsun. Bu durumda $X \setminus A$ gδp-açıktır ve buradan $X \setminus A$ δ-önaçıktır. O halde *A* δ-önkapalıdır. Sonuç olarak her gδp-kapalı küme δ-önaçık olduğundan *X* uzayı bir gδp-$T_{1/2}$ uzayıdır.

BÖLÜM 5

gδp-KAPALI KÜMELER VE SÜREKLİLİK

Bu bölümde gδp-kapalı kümelerin sürekli fonksiyonlar ile ilişkisi ve korunma özelliklerini araştırdık.

Teorem 5.1. X ve Y iki topolojik uzay $A \subset X$ ve $f : X \to Y$ sürekli ve her δ-önkapalı kümenin görüntüsü kapalı olsun. Bu durumda A gδp-kapalı ise $f(A)$ gδp-kapalıdır.

İspat: $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon ve A gδp-kapalı olmak üzere $f(A) \subset U$ ve U açık olsun. $A \subset f^{-1}(U)$ dur. Buradan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset f^{-1}(U) \ ve \ f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset U$$

olur. Bu durumda $f(\delta\text{-pcl}(A))$ kapalıdır. O halde,

$$\begin{aligned} \delta\text{-pcl}(f(A)) &\subset \text{cl}(f(A)) \\ &\subset \text{cl}(f(\delta\text{-pcl}(A))) \\ &= f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset U \end{aligned}$$

yani δ-pcl$(f(A)) \subset U$ elde edilir. Böylece $f(A)$ gδp-kapalıdır.

Teorem 5.2. X ve Y iki topolojik uzay $A \subset Y$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f sürekli ve kapalı ve $A \subset Y$ g-kapalı ise $f^{-1}(A)$ gδp-kapalıdır.

İspat: $f : X \to Y$ sürekli ve kapalı bir fonksiyon ve $A \subset Y$ g-kapalı olsun. $f^{-1}(A) \subset U$ ve U açık olsun. Bu durumda

$$f(\mathrm{cl}(f^{-1}(A)) \cap (X \setminus U)) \subset \mathrm{cl}(A) \setminus A$$

olur. Buradan,

$$f(\mathrm{cl}(f^{-1}(A)) \cap (X \setminus U)) = \varnothing$$

ve

$$\mathrm{cl}(f^{-1}(A)) \cap (X \setminus U) = \varnothing$$

elde ederiz.

Sonuç olarak δ-pcl$(f^{-1}(A)) \subset U$ olur. O halde $f^{-1}(A)$ gδp-kapalıdır.

Teorem 5.3. X ve Y iki topolojik uzay $A \subset Y$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f sürekli ve kapalı ve A g-açık ise $f^{-1}(A)$ gδp-açıktır.

İspat: $f : X \to Y$ sürekli ve kapalı bir fonksiyon ve A g-açık olsun. Bu durumda $Y \setminus A$ g-kapalıdır. Bir önceki teoremden $X \setminus f^{-1}(A)$ gδp-kapalıdır. O halde $f^{-1}(A)$ gδp-açıktır.

BÖLÜM 6

gδp-SÜREKLİ FONKSİYONLAR VE gδp-KAPALI KÜMELER

Bu bölümde gδp-sürekli fonksiyonlar ve gδp-kararsız fonksiyonların gδp-kapalı kümeler ile ilişkisi ve özelliklerini araştırdık.

Tanım 6.1. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir δ-önaçık kümenin ters resmi δ-önaçık ise f fonksiyonuna δ-önkararsızdır denir (Ekici, 2004).

Tanım 6.2. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir gδp-kapalı kümenin ters resmi gδp-kapalı ise f fonksiyonuna gδp-kararsızdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 6.3. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\forall V\subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(V)\subset X$ δ-önkapalı ise f fonksiyonuna δ-hemen hemen süreklidir denir (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Tanım 6.4. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\forall V\subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(V)\subset X$ gδp-kapalı ise f fonksiyonuna gδp-süreklidir denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 6.5. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. O halde, eğer f, gδp-kararsız ve (X, τ) uzayı bir gδp-$T_{1/2}$ uzayı ise f δ-önkararsızdır.

İspat: $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu gδp-kararsız ve (X, τ) uzayı bir gδp-$T_{1/2}$ uzayı olmak üzere $V\subset Y$ δ-önaçık küme olsun. Her δ-önaçık küme gδp-açık olduğundan V gδp-açıkdır. Ayrıca f fonksiyonu gδp-kararsız olduğundan $f^{-1}(V) \subset X$ bir gδp-açık kümedir.

(X, τ) gδp-$T_{1/2}$ uzayı olduğundan ve buradan gδp-$T_{1/2}$ uzay tanımından her gδp-açık küme δ-önaçık olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi δ-önaçıkdır. Sonuç olarak $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ δ-önkararsızdır.

Teorem 6.6. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ gδp-sürekli bir fonksiyon ve (X, τ) gδp-$T_{1/2}$ uzayı ise $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir.

İspat: (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu gδp-sürekli ve (X, τ) bir gδp-$T_{1/2}$ uzayı olsun. $\forall V \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(V) \subset X$ gδp-kapalı ve (X, τ) gδp-$T_{1/2}$ uzayı olduğundan $f^{-1}(V) \subset X$ kümesi δ-önkapalıdır. Sonuç olarak *f* fonksiyonu δ- hemen hemen süreklidir.

Teorem 6.7. (X, τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar, $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma) \to (Z,\mu)$ iki fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ gδp-sürekli bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma) \to (Z,\mu)$ fonksiyonu sürekli ise $gof:(X,\tau) \to (Z,\mu)$ gδp-sürekli bir fonksiyondur.

b) $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ gδp-kararsız bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma) \to (Z,\mu)$ gδp-kararsız bir fonksiyon ise $gof:(X,\tau) \to (Z,\mu)$ gδp-kararsız bir fonksiyondur.

c) $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ gδp-kararsız bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma) \to (Z,\mu)$ gδp-sürekli bir fonksiyon ise $gof:(X,\tau) \to (Z,\mu)$ gδp-sürekli bir fonksiyondur.

İspat: a) $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ gδp-sürekli bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma) \to (Z,\mu)$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\forall F \subset Z$ kapalı kümesi için $(gof)^{-1}(F) = f^{-1}(g^{-1}(F))$

nin gδp-kapalı olduğunu görmeliyiz. $F \subset Z$ kapalı kümesi için $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan $g^{-1}(F)\subset Y$ kapalıdır. Buradan $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ gδp-sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$f^{-1}(g^{-1}(F)) = (\mathrm{gof})^{-1}(\mathrm{F})$$

X de gδp-kapalıdır.

Sonuç olarak $gof:(X,\tau)\to(Z,\mu)$ gδp-sürekli bir fonksiyondur.

b) $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ gδp-kararsız fonksiyonlar olsunlar. $F\subset Z$ gδp-açık kümesi için $g^{-1}(F)\subset Y$ gδp-açıktır. Ayrıca $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ gδp-kararsız bir fonksiyon olduğundan

$$f^{-1}(g^{-1}(F)) = (\mathrm{gof})^{-1}(\mathrm{F})$$

X de gδp-açıktır. Böylece $gof:(X,\tau)\to(Z,\mu)$ fonksiyonu gδp-kararsız bir fonksiyondur.

c) $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ gδp-kararsız ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ gδp-sürekli fonksiyonlar olsunlar. $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ gδp-sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall V\subset Z$ kapalı kümesi için $g^{-1}(V)\subset Y$ gδp-kapalı bir kümedir. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ gδp-kararsız bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(V))$ kümesi X de gδp-kapalıdır. Sonuç olarak $\forall V\subset Z$ kapalı kümesi için

$$f^{-1}(g^{-1}(V)) = (\mathrm{gof})^{-1}(V)$$

X de gδp-kapalı olduğundan $gof:(X,\tau)\to(Z,\mu)$ gδp-sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 6.8. $(X,\ \tau)$ ve (Y,σ) topolojik uzaylar, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ iki fonksiyon olsun. (Y,σ) uzayı bir gδp-$T_{1/2}$ uzayı olmak üzere eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ δ-önkararsız bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ gδp-sürekli bir fonksiyon ise $gof:(X,\tau)\rightarrow(Z,\mu)$ δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyondur.

İspat: $(X,\ \tau)$ ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ iki fonksiyon olmak üzere (Y,σ) uzayı bir gδp-$T_{1/2}$ uzayı, $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ δ-önkararsız bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ gδp-sürekli bir fonksiyon olsun. O halde $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ gδp-sürekli olduğundan $\forall F\subset Z$ kapalı kümesi için $g^{-1}(F)$ kümesi, Y de gδp-kapalıdır. (Y,σ) gδp-$T_{1/2}$ uzayı olduğundan $g^{-1}(F)$ kümesi δ-önkapalıdır. Ayrıca $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu δ-önkararsız olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(F))$ X de δ-önkapalıdır.

Sonuç olarak $(gof)^{-1}(F)$, X de δ-önkapalı olacaktır. Böylece $gof:(X,\tau)\rightarrow(Z,\mu)$ fonksiyonu δ-hemen hemen sürekli olduğu elde edilir.

Teorem 6.9. $(X,\ \tau)$ ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ gδp-kararsız, örten ve δ-önkapalı bir fonksiyon olsun. Eğer $(X,\ \tau)$ gδp-$T_{1/2}$ uzayı ise (Y,σ) da gδp-$T_{1/2}$ uzayıdır.

İspat: $(X,\ \tau)$ ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ gδp-kararsız, örten ve δ-önkapalı bir fonksiyon olmak üzere $F\subset Y$, gδp-kapalı olsun. O halde $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ gδp-kararsız oduğundan $f^{-1}(F)$, X de gδp-kapalıdır ve X uzayı gδp-$T_{1/2}$ uzayı olduğundan $f^{-1}(F)$, X de δ-önkapalıdır. Buradan $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ örten olduğundan $f(f^{-1}(F))=F$, Y de δ-önkapalıdır. Sonuç olarak (Y,σ) uzayı bir gδp-$T_{1/2}$ uzayıdır.

Teorem 6.10. $(X,\ \tau)$ ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$, 1-1, örten, kapalı ve δ-önaçık bir fonksiyon olsun. Eğer $(X,\ \tau)$ $T_{1/2}$ uzayı ise (Y,σ) da gδp-$T_{1/2}$ uzayıdır.

İspat: (X, τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$, 1-1 ve δ-önaçık bir fonksiyon ve (X, τ) bir $T_{1/2}$ uzayı olmak üzere $y\in Y$ alalım. (X, τ) $T_{1/2}$ uzayı ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ 1-1 ve örten olduğundan $f(x)=y$ olacak şekilde $x\in X$ vardır. (X, τ) bir $T_{1/2}$ uzayı olduğundan $\{x\}$ kapalı veya açıktır.

Eğer $\{x\}$ kapalı ise $f(x)=y$ olduğundan $\{y\}$ kapalıdır.

Eğer $\{x\}$ açık ise $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ δ-önaçık bir fonksiyon olduğundan $\{y\}$ δ-önaçıktır.

Sonuç olarak Y gδp-$T_{1/2}$ uzayıdır.

BÖLÜM 7

$\delta_p$sg-KAPALI KÜMELER

Bu bölümde topolojik uzaylarda $\delta_p$sg-kapalı kümelerin özellikleri ve ilişkilerini araştırdık.

Tanım 7.1. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ alt kümesini alalım. Eğer $A \subset U$ ve U yarı-açık olduğunda δ-pcl(A) $\subset U$ oluyorsa A kümesine $\delta_p$sg-kapalı denir.

Teorem 7.2. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesi $\delta_p$sg -kapalı ise δ-pcl(A) \ A boş olmayan yarı-kapalı küme bulundurmaz.

İspat: $F \subset X$ yarı kapalı küme ve $F \subset$ δ-pcl(A) \ A olsun. Buradan $A \subset X \setminus F$, $X \setminus F$ yarı-açık ve A $\delta_p$sg -kapalı olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset X \setminus F$$

olur. Böylece $F \subset X \setminus \delta$-pcl($A$) dır. O halde,

$$\begin{aligned} F &\subset (X \setminus \delta\text{-pcl}(A)) \cap \delta\text{-pcl}(A) \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

Bu durumda $F = \varnothing$ olur.

Teorem 7.3. X bir topolojik uzay ve A $\delta_p$sg -kapalı bir küme olsun. δ-pcl(A) \ A yarı-kapalı ise A δ-önkapalıdır.

İspat: X bir topolojik uzay ve A $\delta_p$sg -kapalı küme olmak üzere δ-pcl(A) \ A yarı-kapalı olsun. A $\delta_p$sg -kapalı küme olduğundan δ-pcl(A) \ A boş olmayan yarı-kapalı bir küme kapsamaz. O halde

$$\delta\text{-pcl}(A) \setminus A = \varnothing$$

olur. Buradan A = δ-pcl(A) olup A δ-önkapalıdır.

Teorem 7.4. X bir topolojik uzay ve A, $B \subset X$ olsun. Eğer A ve B $\delta_p$sg -kapalı ise $A \cup B$ $\delta_p$sg -kapalıdır.

İspat: A ve B $\delta_p$sg -kapalı kümeler, $A \cup B \subset U$ ve U yarı-açık olsun. A ve B $\delta_p$sg -kapalı kümeler olduklarından,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset U \text{ ve } \delta\text{-pcl}(B) \subset U$$

dur. Buradan,

$$\begin{aligned} \delta\text{-pcl}(A) \cup \delta\text{-pcl}(B) &= \delta\text{-pcl}(A \cup B) \\ &\subset U \end{aligned}$$

dur. O halde $A \cup B$ $\delta_p$sg -kapalıdır.

Teorem 7.5. X bir topolojik uzay ve A $\delta_p$sg -kapalı bir alt küme olsun. $A \subset B \subset \delta\text{-pcl}(A)$ ise B $\delta_p$sg -kapalıdır.

İspat: X bir topolojik uzay ve A $\delta_p$sg -kapalı bir alt küme olmak üzere $A \subset B \subset \delta\text{-pcl}(A)$ olsun. $B \subset U$ ve U yarı-açık olsun. $A \subset B \subset U$ ve A $\delta_p$sg -kapalı olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset U$$

ve

$$\begin{aligned} \delta\text{-pcl}(B) &\subset \delta\text{-pcl}(A) \\ &\subset U \end{aligned}$$

dur. O halde B $\delta_p$sg -kapalıdır.

Sonuç 7.6. X bir topolojik uzay ve A $\delta_p$sg-kapalı bir alt küme olsun. Bu durumda $\delta\text{-pcl}(A)$ da $\delta_p$sg-kapalıdır.

İspat: A $\delta_p$sg-kapalı bir alt küme olmak üzere

$$\mathrm{A} \subset \delta\text{-pcl}(A) \subset \delta\text{-pcl}(A)$$

olduğundan Teorem 7.5 den açıktır.

Teorem 7.7. X bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset B \subset X$ olsun. B de her yarı-açık küme açık olmak üzere A, X de $\delta_p$sg –kapalı ve B düzenli açık ise A kümesi B de de $\delta_p$sg -kapalıdır.

İspat: $A \subset \mathrm{B} \subset X$ olmak üzere A, X de $\delta_p$sg -kapalı olsun. $A \subset U$ ve U, B de yarı-açık olsun. Buradan $A \subset B \cap V$ olacak şekilde V açığı vardır. $A \subset V$ olduğundan δ-pcl(A) $\subset V$ dır. Buradan,

$$
\begin{aligned}
B \cap \delta\text{-pcl}(A) &\subset B \cap V \\
&= U
\end{aligned}
$$

olur. O halde A, B de $\delta_p$sg -kapalıdır.

Teorem 7.8. X bir topolojik uzay olsun. Her yarı-açık küme açık ve açık kümelerin sınıfı ile kapalı kümelerin sınıfı aynı ise X'in her alt kümesi $\delta_p$sg -kapalıdır.

İspat: X'in her yarı-açık kümesi açık ve açık kümelerinin sınıfı ile kapalı kümelerinin sınıfı aynı olsun. $A \subset X$, $A \subset U$ ve U yarı-açık olsun. O halde δ-pcl(A) $\subset U$ olup A $\delta_p$sg -kapalıdır.

Teorem 7.9. X bir topolojik uzay olmak üzere X'in her alt kümesi $\delta_p$sg -kapalı ise her yarı-açık küme δ-önkapalıdır.

İspat: X'in her alt kümesi $\delta_p$sg –kapalı olmak üzere $U \subset X$ yarı-açık kümesini alalım. $U \subset U$ ve U, $\delta_p$sg -kapalı olduğundan δ-pcl(U) $\subset U$ olur. O halde U δ-önkapalıdır.

Teorem 7.10. X bir topolojik uzay olsun. X simetrik ve her yarı-açık küme açık ise $\forall x \in X$ için $\{x\}$, $\delta_p$sg -kapalıdır.

İspat: X uzayı simetrik olmak üzere kabul edelim ki $x \in X$ için $\{x\}$, $\delta_p$sg -kapalı olmasın. Yani $\{x\} \subset U$ ve U yarı-açık olmak üzere δ-pcl$\{x\} \not\subset U$ olsun. Bu durumda cl$\{x\} \not\subset U$ dur. O halde

$$\mathrm{cl}\{x\} \cap (X \backslash U) \neq \emptyset$$

olur. Yani

$$z \in \mathrm{cl}\{x\} \cap (X \backslash U)$$

seçebiliriz. Buradan $x \in \mathrm{cl}\{z\} \subset X \backslash U$ dur. Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 7.11. X bir topolojik uzay, A ve $B \subset X$ olsun. A ve B $\delta_p$sg –kapalı kümeler ve $A^{\tilde{}} \subset A^{\delta p\sim}$ ve $B^{\tilde{}} \subset B^{\delta p\sim}$ ise $A \cup B$ $\delta_p$sg -kapalıdır.

İspat: $A \subset X$, $B \subset X$ $\delta_p$sg –kapalı kümeler olmak üzere $A^{\tilde{}} \subset A^{\delta p\sim}$ ve $B^{\tilde{}} \subset B^{\delta p\sim}$ alalım. $A \cup B \subset U$ ve U yarı-açık olsun. A ,$B \subset U$ ve A, B $\delta_p$sg –kapalı kümeler olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset U \text{ ve } \delta\text{-pcl}(B) \subset U$$

olacaktır.

Öte yandan

$$A^{\delta p\sim} \subset \delta\text{-pcl}(A) \text{ ve } B^{\delta p\sim} \subset \delta\text{-pcl}(B)$$

olduğundan

$$\mathrm{cl}(A) = \delta\text{-pcl}(A) \text{ ve } \mathrm{cl}(B) = \delta\text{-pcl}(B)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) &= \mathrm{cl}(A \cup B) \\ &\supset \delta\text{-pcl}(A \cup B) \end{aligned}$$

dir.

Sonuç olarak $A \cup B$ $\delta_p$sg -kapalıdır.

Teorem 7.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her yarı-açık küme açık olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

1. A, $\delta_p$sg –kapalıdır.

2. δ-pcl(A) $\subset$ Çek A

İspat: A, $\delta_p$sg -kapalı bir küme olsun. $A \subset U$ ve U yarı-açık olsun. A $\delta_p$sg -kapalı olduğundan δ-pcl(A) $\subset U$ dur. Buradan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset \text{Çek } A$$

olur.

Tersine δ-pcl(A) $\subset$ Çek A olsun. $A \subset U$ ve U yarı-açık alalım. Buradan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset \text{Çek } A \subset U$$

ve böylece,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset U$$

olur. O halde A, $\delta_p$sg –kapalıdır.

BÖLÜM 8

$\delta_p$sg-KAPALI KÜMELER VE İLİŞKİLERİ

Bu bölümde $\delta_p$sg-kapalı kümeler ve gδp-kapalı kümeler ve ilgili küme sınıflarının ilişkisi araştırıldı.

Teorem 8.1. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A δ-önkapalı küme ise A $\delta_p$sg -kapalıdır.

İspat: $A \subset X$ δ-önkapalı bir küme olsun. Bu durumda $A = \delta$-pcl(A) olup δ-pcl(A) \ $A = \varnothing$ dir. O halde A $\delta_p$sg -kapalı kümedir.

Teorem 8.2. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A $\delta_p$sg -kapalı küme ise A gδp-kapalıdır.

İspat: A $\delta_p$sg -kapalı ve $A \subset O$ ve O açık olsun. A $\delta_p$sg -kapalı olduğundan δ-pcl(A) $\subset O$ olup A gδp-kapalı kümedir.

Teorem 8.3. X bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. A $\delta_p$sg–kapalı ve yarı-açık bir küme ise A δ-önkapalıdır.

İspat: $A \subset X$ $\delta_p$sg –kapalı ve yarı-açık bir küme olsun. Bu durumda $A \subset A$ olduğundan δ-pcl(A) $\subset A$ ve buradan A δ-önkapalıdır.

BÖLÜM 9

$\delta_p$sg-AÇIK KÜMELER

Bu bölümde $\delta_p$sg -kapalı kümelerin tümleyenleri olan $\delta_p$sg -açık kümelerin özellikleri ve ilişkilerini araştırdık.

Tanım 9.1. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ alalım. $X \setminus A$ $\delta_p$sg -kapalı ise A kümesine $\delta_p$sg -açık küme denir.

Teorem 9.2. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere bu durumda A'nın $\delta_p$sg -açık olması için gerek ve yeter koşul F yarı-kapalı ve $F \subset A$ olduğunda $F \subset$ δ-pint(A) olmasıdır.

İspat: $F \subset X$ yarı-kapalı ve $F \subset A$ olsun. Bu durumda $X \setminus A \subset X \setminus F$ olup $X \setminus F$ yarı-açıktır. $X \setminus A$ $\delta_p$sg -kapalı olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(X \setminus A) \subset X \setminus F$$

dir. Buradan,

$$X \setminus \delta\text{-pint}(A) \subset X \setminus F$$

dir. Böylece $F \subset$ δ-pint(A).

Tersine F yarı-kapalı ve $F \subset A$ olduğunda $F \subset$ δ-pint(A) olsun. $U \subset X$ yarı-açık ve $X \setminus A \subset U$ alalım. $X \setminus U \subset A$ ve $X \setminus U$ yarı-kapalı olduğundan

$$X \setminus U \subset \delta\text{-pint}(A)$$

olur. Buradan

$$\delta\text{-pcl}(X \setminus A) \subset U$$

bulunur. Böylece $X \setminus A$ $\delta_p$sg -kapalı ve A $\delta_p$sg -açık olur.

Teorem 9.3. X bir topolojik uzay olmak üzere $A\subset X$ alalım. Eğer A $\delta_p$sg -açık ise δ-pint$(A) \cup (X \setminus A) \subset U$ ve U yarı-açık olduğunda $U=X$ dir.

İspat: $A\subset X$ $\delta_p$sg-açık olmak üzere δ-pint$(A) \cup (X \setminus A) \subset U$ ve U yarı-açık olsun. Bu durumda,

$$X \setminus U \subset \delta\text{-pcl}(X \setminus A) \cap A$$

$$= \delta\text{-pcl}(X \setminus A) \setminus (X \setminus A)$$

olur. $X \setminus A$ $\delta_p$sg -kapalı olduğundan

$$X \setminus U = \varnothing \text{ ve } X = U$$

elde edilir.

Teorem 9.4. X bir topolojik uzay, $A\subset X$ olsun. int $A\cup (X \setminus A)\subset U$ ve U yarı-açık olduğunda $U = X$ ise A $\delta_p$sg -açıktır.

İspat: int $A\cup (X \setminus A)\subset U$ ve U yarı-açık olduğunda $U = X$ olsun.

$B\subset A$ ve B yarı-kapalı alalım. Buradan,

$$\text{int } A\cup (X \setminus A)\subset \text{int } A\cup (X \setminus B)$$

olduğundan

$$\text{int } A\cup (X \setminus B) = X$$

ve buradan da $B\subset \delta$-pint A olur. Yani A $\delta_p$sg -açıktır.

Teorem 9.5. X bir topolojik uzay ve A $\delta_p$sg -açık bir alt küme olsun.

δ -pint $A\subset B\subset A$ ise B kümesi $\delta_p$sg -açıktır.

İspat: A $\delta_p$sg-açık bir alt küme olmak üzere δ-pint $A\subset B\subset A$ olsun. Buradan,

$$X \setminus A\subset X \setminus B$$

$$\subset \delta\text{-pcl}(X \setminus A)$$

ve buradan $X \setminus B$ $\delta_p$sg -kapalıdır. Sonuç olarak B $\delta_p$sg -açıktır.

Sonuç 9.6. X bir topolojik uzay ve A $\delta_p$sg-açık bir alt küme olsun. Bu durumda δ-pint(A) $\delta_p$sg-açıktır.

İspat: A $\delta_p$sg-açık bir alt küme olmak üzere

$$\delta\text{-pint}(A) \subset \delta\text{-pint}(A) \subset \mathrm{A}$$

olduğundan Teorem 9.5 den açıktır.

Teorem 9.7. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A $\delta_p$sg-kapalı ise δ-pcl(A) \ A $\delta_p$sg -açıktır.

İspat: A $\delta_p$sg -kapalı ve $B \subset$ δ-pcl(A) \ A ve B yarı-kapalı bir küme olsun. Bu durumda,

$$B = \varnothing$$

ve

$$B \subset \delta\text{-pint}(\delta\text{-pcl}(A) \setminus A)$$

dır. Böylece δ-pcl(A) \ A $\delta_p$sg -açıktır.

Teorem 9.8. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. X uzayında her δ-önaçık küme açık ve cl(A) \ A $\delta_p$sg -açık ise A δpg -kapalıdır.

İspat: $A \subset X$, cl(A) \ A $\delta_p$sg -açık bir küme olmak üzere $A \subset U$ ve U açık olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(A) \cap (X \setminus U) &\subset \mathrm{cl}(A) \cap (X \setminus A) \\ &= \mathrm{cl}(A) \setminus A \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\mathrm{cl}(A)\cap(X\setminus U)\subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)\setminus A)$$

$$=\varnothing$$

olur. O halde

$$\delta\text{-pcl}(A)\subset U$$

ve böylece A δpg –kapalıdır.

Teorem 9.9. X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer A δ-önaçık küme ise A $\delta_p$sg –açıktır.

İspat: A δ-önaçık ve F yarı-kapalı ve $F\subset A$ olsun. A δ-önaçık olduğundan $F\subset$ δ-pint(A) olur. O halde A $\delta_p$sg-açık kümedir.

Teorem 9.10. X bir topolojik uzay ve A, $B\subset X$ olmak üzere X de her δ-önaçık küme açık olsun. A ve B kümeleri $\delta_p$sg –açık ve δ-pcl(A) $\cap B=\varnothing$ ve $A\cap$ δ-pcl(B)= $\varnothing$ ise $A\cup B$ kümesi $\delta_p$sg –açıktır.

İspat: A ve B $\delta_p$sg –açık ve δ-pcl(A) $\cap B=\varnothing$ ve $A\cap$ δ-pcl(B)= $\varnothing$ olmak üzere U yarı-kapalı bir küme ve $U\subset A\cup B$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} U\cap\delta\text{-pcl}(A) &\subset \delta\text{-pcl}(A)\cap(A\cup B)\\ &\subset A\cup\varnothing\\ &= A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U\cap\delta\text{-pcl}(B) &\subset \delta\text{-pcl}(B)\cap(A\cup B)\\ &\subset B\cup\varnothing=B \end{aligned}$$

olur.

Öte yandan A ve B $\delta_p$sg –açık olduğundan ve

$$U \cap \delta\text{-pcl}(A) \subset A$$

ve

$$U \cap \delta\text{-pcl}(B) \subset B$$

olduğundan

$$U \cap \delta\text{-pcl}(A) \subset \delta\text{-pint}(A)$$

ve

$$U \cap \delta\text{-pcl}(B) \subset \delta\text{-pint}(B)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} U = \; & U \cap (A \cup B) \\ = \; & (U \cap A) \cup (U \cap B) \\ \subset \; & (U \cap \delta\text{-pcl}(A)) \cup (U \cap \delta\text{-pcl}(B)) \\ \subset \; & \delta\text{-pint}(A \cup B) \end{aligned}$$

olur.

O halde $A \cup B$ $\delta_p$sg –açıktır.

BÖLÜM 10

$\delta_p$sg-T$_{1/2}$ UZAYLAR

Bu bölümde $\delta_p$sg-$T_{1/2}$ uzay olarak adlandırılan topolojik uzayları, özelliklerini ve ilişkilerini inceledik.

Tanım 10.1. X bir topolojik uzay olsun. Her $\delta_p$sg –kapalı küme δ-önkapalı ise uzaya $\delta_p$sg -$T_{1/2}$ uzay denir.

Teorem 10.2. X bir $\delta_p$sg -$T_{1/2}$ uzaysa her tek nokta kümesi yarı-kapalı ya da δ-önaçıktır.

İspat: X bir $\delta_p$sg -$T_{1/2}$ uzay olsun. $x \in X$ ve $\{x\}$ yarı-kapalı olmasın. Bu durumda $X \setminus \{x\}$ yarı-açık değildir. O halde $X \setminus \{x\}$ $\delta_p$sg -kapalıdır.

Her $\delta_p$sg -kapalı küme δ-önkapalı olduğundan $X \setminus \{x\}$ δ-önkapalıdır. Sonuç olarak $\{x\}$, δ-önaçıktır.

Teorem 10.3. Her tek nokta kümesi kapalı ya da δ-önaçık ise X bir $\delta_p$sg -$T_{1/2}$ uzaydır.

İspat: X bir topolojik uzay ve her tek nokta kümesi kapalı ya da δ-önaçık olsun.

$A \subset X$ bir $\delta_p$sg -kapalı küme olsun.

$x \in$ δ-pcl(A) alalım.

$\{x\}$ kümesi kapalı olsun. Kabul edelimki $x \notin A$ olsun. Buradan $\{x\} \subset$ δ-pcl(A) $\setminus A$ olur. $\{x\}$ kümesi kapalı olduğundan $\{x\} = \emptyset$ olur ki çelişkidir Bu durumda $x \in$ δ-pcl(A) $= A$ ve buradan $x \in A$ olur.

$\{x\}$ kümesi δ-önaçık olsun. $x \in$ δ-pcl(A) olduğundan

$$\{x\} \cap A \neq \varnothing$$

dir. O halde $x \in A$ dır.

Sonuç olarak δ-pcl(A) = A ve A kümesi δ-önkapalıdır. Yani X uzayı $\delta_p sg\text{-}T_{1/2}$ uzayıdır.

Sonuç 10.4. X bir topolojik uzay ve her yarı-kapalı küme kapalı olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

a. X, $\delta_p sg\text{-}T_{1/2}$ uzaydır.

b. X de her tek nokta kümesi kapalı ya da δ-önaçıktır.

İspat: Teorem 10.2 ve Teorem 10.3 den açıktır.

Teorem 10.5. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. X uzayı bir $\delta_p sg\text{-}T_{1/2}$ uzaydır.

2. $A \subset X$ için A' nın δ-önaçık olması için gerek ve yeter koşul A' nın $\delta_p$sg –açık olmasıdır.

İspat: X bir $\delta_p sg\text{-}T_{1/2}$ uzay ve A $\delta_p$sg –açık olsun. Buradan $X \setminus A$ $\delta_p$sg-kapalıdır. O halde uzay bir $\delta_p sg\text{-}T_{1/2}$ uzay olduğundan $X \setminus A$ δ-önkapalıdır. Yani A δ-önaçıktır.

Tersine A $\delta_p$sg –kapalı olsun. Bu durumda $X \setminus A$ $\delta_p$sg –açıktır ve buradan $X \setminus A$ δ-önaçıktır. O halde A δ-önkapalıdır. Sonuç olarak X uzayı bir $\delta_p sg\text{-}T_{1/2}$ uzaydır.

BÖLÜM 11

$\delta_p$sg-KAPALI KÜMELER VE SÜREKLİLİK

Bu bölümde $\delta_p$sg -kapalı kümelerin sürekli fonksiyonlar ile ilişkisi ve korunma özelliklerini araştırdık.

Tanım 11.1. $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her yarı-açık kümenin ters resmi yarı açık ise f ye kararsızdır denir (Crossley ve Hildebrand, 1972).

Teorem 11.2. X ve Y iki topolojik uzay $A \subset X$ ve $f: X \to Y$ kararsız ve her δ-önkapalı kümenin görüntüsü kapalı olsun. Bu durumda A $\delta_p$sg-kapalı ise $f(A)$ $\delta_p$sg-kapalıdır.

İspat: $f: X \to$ Y kararsız bir fonksiyon olsun. A $\delta_p$sg -kapalı olmak üzere $f(A) \subset U$ ve U yarı-açık olsun. $A \subset f^{-1}(U)$ dur. Buradan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset f^{-1}(U) \text{ ve } f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset U$$

olur. Buradan $f(\delta\text{-pcl}(A))$ kapalıdır dolayısıyla yarı-kapalıdır.

O halde,

$$\begin{aligned} \delta\text{-pcl}(f(A)) &\subset \text{cl}(f(A)) \\ &\subset \text{cl}(f(\delta\text{-pcl}(A))) \\ &= f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset U \end{aligned}$$

yani $\delta\text{-pcl}(f(A)) \subset U$ elde edilir. Böylece $f(A)$ $\delta_p$sg -kapalıdır.

Teorem 11.3. X ve Y iki topolojik uzay $A \subset$ Y ve $f : X \rightarrow$ Y bir fonksiyon ve X de her yarı-açık küme açık olsun. f sürekli ve kapalı ve A g-kapalı ise $f^{-1}(A)$ $\delta_p$sg -kapalıdır.

İspat: $f : X \rightarrow$ Y sürekli ve kapalı bir fonksiyon ve A g-kapalı olsun. $f^{-1}(A) \subset U$ ve U yarı-açık olsun. Bu durumda,

$$f(\mathrm{cl}(f^{-1}(A)) \cap (X \setminus U)) \subset \mathrm{cl}(A) \setminus A$$

olur. Buradan,

$$(\mathrm{cl}(f^{-1}(A)) \cap (X \setminus U)) = \varnothing$$

ve

$$\mathrm{cl}(f^{-1}(A)) \cap (X \setminus U) = \varnothing$$

Sonuç olarak

$$\delta\text{-pcl}(f^{-1}(A)) \subset U$$

olur. O halde $f^{-1}(A)$ $\delta_p$sg -kapalıdır.

Teorem 11.4. X ve Y iki topolojik uzay $A \subset$ Y ve $f : X \rightarrow$ Y bir fonksiyon ve X de her yarı-açık küme açık olsun. f sürekli ve kapalı ve A g-açık ise $f^{-1}(A)$ $\delta_p$sg -açıktır.

İspat: $f : X \rightarrow$ Y sürekli ve kapalı bir fonksiyon ve A g-açık olsun. Y $\setminus A$ g-kapalıdır. Bu durumda $X \setminus f^{-1}(A)$ $\delta_p$sg -kapalıdır. O halde $f^{-1}(A)$ $\delta_p$sg -açıktır.

BÖLÜM 12

$\delta_p$sg –SÜREKLİ FONKSİYONLAR VE $\delta_p$sg-KAPALI KÜMELER

Bu bölümde $\delta_p$sg -sürekli fonksiyonlar ve $\delta_p$sg -kararsız fonksiyonların $\delta_p$sg -kapalı kümeler ile ilişkisi ve özelliklerini araştırdık.

Tanım 12.1. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir δ-önaçık kümenin ters resmi δ-önaçık ise $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonuna δ-önkararsızdır denir (Ekici, 2004).

Tanım 12.2. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $\delta_p$sg-kapalı kümenin ters resmi $\delta_p$sg-kapalı ise $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonuna $\delta_p$sg-kararsızdır denir.

Tanım 12.3. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\forall V\subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(V)\subset X$ δ-önkapalı ise $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonuna δ-hemen hemen süreklidir denir (Mukherjee ve Raychaudhuri, 1993).

Tanım 12.4. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\forall V\subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(V)\subset X$ $\delta_p$sg -kapalı ise $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonuna $\delta_p$sg-süreklidir denir.

Teorem 12.5. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. O halde, eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ $\delta_p$sg-kararsız bir fonksiyon ve (X, τ) $\delta_p$sg-$T_{1/2}$ uzayı ise $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ δ-önkararsız bir fonksiyondur.

İspat: $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ $\delta_p$sg-kararsız bir fonksiyon ve (X, τ) $\delta_p$sg-$T_{1/2}$ uzayı olmak üzere $V\subset Y$ δ-önaçık küme olsun. Her δ-önaçık küme $\delta_p$sg-açık olduğundan

V $\delta_p$sg-açıkdır. Ayrıca $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ $\delta_p$sg-kararsız bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)\subset X$ $\delta_p$sg-açıktır.

(X, τ) $\delta_p$sg-$T_{1/2}$ uzayı olduğundan her $\delta_p$sg-açık küme δ-önaçık olup $f^{-1}(V)$ kümesi δ-önaçıkdır. Sonuç olarak $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonunun δ-önkararsız bir fonksiyon olduğunu elde ederiz.

Teorem 12.6. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. O halde, eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu $\delta_p$sg-sürekli ve (X, τ) $\delta_p$sg-$T_{1/2}$ uzayı ise $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ δ-hemen hemen süreklidir.

İspat: $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu $\delta_p$sg-sürekli ve X uzayı bir $\delta_p$sg-$T_{1/2}$ uzayı olsun. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu $\delta_p$sg-sürekli olduğundan $\forall V\subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(V)\subset X$ $\delta_p$sg-kapalı ve (X, τ) uzayı bir $\delta_p$sg-$T_{1/2}$ uzayı olduğundan $f^{-1}(V)\subset X$ kümesi δ-önkapalıdır. Sonuç olarak $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ δ-hemen hemen sürekli olur.

Teorem 12.7. (X, τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ iki fonksiyon olsun.

1. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ $\delta_p$sg-sürekli bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ sürekli bir fonksiyon ise $gof:(X,\tau)\to(Z,\mu)$ $\delta_p$sg-sürekli bir fonksiyondur.

2. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ $\delta_p$sg-kararsız bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ $\delta_p$sg-kararsız bir fonksiyon ise $gof:(X,\tau)\to(Z,\mu)$ $\delta_p$sg-kararsız bir fonksiyondur.

3. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ $\delta_p$sg-kararsız bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ $\delta_p$sg-sürekli bir fonksiyon ise $gof:$ $(X,\tau)\to(Z,\mu)$ $\delta_p$sg-sürekli bir fonksiyondur.

İspat: **1.** $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ δ$_p$sg-sürekli ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ sürekli iki fonksiyon olsun. $\forall F\subset Z$ kapalı kümesi için $(gof)^{-1}(F)=f^{-1}(g^{-1}(F))$ nin δ$_p$sg-kapalı olduğunu göstermeliyiz.

$F\subset Z$ kapalı kümesi için $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ sürekli olduğundan $g^{-1}(F)\subset Y$ kapalıdır. Buradan $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ δ$_p$sg-sürekli fonksiyon olduğundan

$$(gof)^{-1}(F)=f^{-1}(g^{-1}(F)),$$

X de δ$_p$sg-kapalıdır. Sonuç olarak $gof:(X,\tau)\rightarrow(Z,\mu)$ fonksiyonu δ$_p$sg -süreklidir.

2. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ δ$_p$sg-kararsız iki fonksiyon olsun. $F\subset Z$ δ$_p$sg-açık kümesi için $g^{-1}(F)\subset Y$ gδp-açıktır. Ayrıca $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu δ$_p$sg-kararsız olduğundan

$$(gof)^{-1}(F)=f^{-1}(g^{-1}(F)),$$

X de δ$_p$sg-açıktır. Bu durumda $gof:(X,\tau)\rightarrow(Z,\mu)$ fonksiyonu δ$_p$sg-kararsız olduğunu elde ederiz.

3. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ δ$_p$sg-kararsız ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ δ$_p$sg-sürekli iki fonksiyon olsun. $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ δ$_p$sg-sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall V\subset Z$ kapalı kümesi için $g^{-1}(V)\subset Y$ δ$_p$sg-kapalıdır. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ gδp-kararsız bir fonksiyon olduğundan $(gof)^{-1}(F)=f^{-1}(g^{-1}(F))$ kümesi *X* de δ$_p$sg-kapalıdır.

Sonuç olarak $\forall V\subset Z$ kapalı kümesi için $(gof)^{-1}(F)=f^{-1}(g^{-1}(F))$ kümesi *X* de δ$_p$sg-kapalı olduğundan $gof:(X,\tau)\rightarrow(Z,\mu)$ fonksiyonu δ$_p$sg-süreklidir.

Teorem 12.8. $(X,\ \tau)$ ve (Y,σ) topolojik uzaylar, $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ iki fonksiyon olsun. (Y,σ) δ$_p$sg-$T_{1/2}$ uzayı olmak üzere eğer $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ δ-önkararsız bir fonksiyon ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\mu)$ δ$_p$sg-sürekli bir fonksiyon ise $gof:(X,\tau)\rightarrow(Z,\mu)$ δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyondur.

İspat: $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ iki fonksiyon ve (Y,σ) $\delta_P$sg-$T_{1/2}$ uzayı olmak üzere $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ δ-önkararsız ve $g:(Y,\sigma)\to(Z,\mu)$ $\delta_P$sg-sürekli iki fonksiyon olsun. O halde $\forall F\subset Z$ kapalı kümesi için $g^{-1}(F)$, Y de $\delta_P$sg-kapalıdır. (Y,σ) $\delta_P$sg -$T_{1/2}$ uzayı olduğundan $g^{-1}(F)$ kümesi δ-önkapalıdır.

Ayrıca $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ δ-önkararsız bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(F))$ X de δ-önkapalıdır. O halde

$$(gof)^{-1}(F)=f^{-1}(g^{-1}(F)),$$

X de δ-önkapalı olup $gof : (X,\tau)\to(Z,\mu)$ fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir.

Teorem 12.9. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ $\delta_P$sg-kararsız, örten ve δ-önkapalı bir fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) $\delta_P$sg-$T_{1/2}$ uzayı ise (Y,σ) uzayıda $\delta_P$sg-$T_{1/2}$ uzayıdır.

İspat: $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ $\delta_P$sg-kararsız, örten ve δ-önkapalı bir fonksiyon olmak üzere (X,τ) $\delta_P$sg-$T_{1/2}$ uzayı olsun. $F\subset Y$, $\delta_P$sg-kapalı olsun. O halde $f^{-1}(F)$, X de $\delta_P$sg-kapalıdır ve X $\delta_P$sg-$T_{1/2}$ uzayı olduğundan $f^{-1}(F)$ kümesi X de δ-önkapalıdır.

Buradan $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ örten olduğundan $f(f^{-1}(F))=F$ kümesi Y de δ-önkapalıdır. Sonuç olarak (Y,σ) uzayı $\delta_P$sg-$T_{1/2}$ uzayıdır.

Teorem 12.10. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, 1-1, örten, kapalı ve δ-önaçık bir fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) $T_{1/2}$-uzayı ise (Y,σ) uzayıda $\delta_P$sg-$T_{1/2}$ uzayıdır.

İspat: $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu 1-1, örten ve δ-önaçık bir fonksiyon ve $(X,\ \tau)$ $T_{1/2}$ uzayı olsun. $y\in Y$ alalım. $(X,\ \tau)$ $T_{1/2}$ uzayı ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, 1-1 , örten olduğundan $f(x)=y$ olacak şekilde $x\in X$ vardır ve $\{x\}$ kapalı veya açıktır.

Eğer $\{x\}$ kapalı ise $f(x)=y$ olduğundan $\{y\}$ kapalıdır.

Eğer $\{x\}$ açık ise f δ-önaçık olduğundan $\{y\}$ δ-önaçıktır.

Sonuç olarak (Y,σ) $\delta_p$sg-$T_{1/2}$ uzay olarak elde edilir.

KAYNAKLAR

Stone M. H., 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology. *TAMS*, 41: 375-381.

Velicko N. V., 1968. H-Closed Topological Spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.,* 78: 103-118.

Raychaudhuri S. ve Mukherjee M. N., 1993. On δ-almost Continuity and δ- Preopen Sets. *Bull. Inst. Math. Acad., Sinica*, 21(4): 357-366.

Ekici E., 2004. (δ-pre, s)-Continuous Functions. *Bull. Malay.Math. Sci. Soc.* 27 (2): 237-251.

Ekici E., 2005. On δ-Preopen Sets. *Mathematica,* 47 (70), (2): 157-164.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-I. *Math. Mor.* 10 (2006): 9-20.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-II. *Filom* 20 (2) (2006):67-80.

Maki H., 1986. The Special Issue in Commemoration of Prof. Jazuda Ikeda's Retirement.: 139-146.

Levine N., 1970. Generalized Closed Sets in Topology. *Rend. Circ. Mat. Palermo,* 19 (2): 89-96.

Levine N., 1963. Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces. *Amer Math. Monthly*. (70): 36-41.

Dontchev J. ve Maki H., 1999. Groups of θ-Generalized Homeomorphisms and the Digital Line. *Topology and its Appl*., 95:113-128.

Devi R., Balachandran K. ve Maki H., 1995. Semi-Generalized Homeomorphisms and Generalized Semi-Homeomorphisms in Topological Spaces. *Indian J. Rue App. Math*., 26 (3): 271-284.

Noiri T. ve Sayed O. R., 2005. On Ω-Closed Sets and Ωs-Closed Sets in Topological Spaces, *Acta Math. Hungar*, 107 (4): 307-318.

Cao J., Ganster M. ve Reilly I., 2002. On Generalized Closed Sets. *Topology and its Appl*., 123: 37-46.

Baker C. W., 1996. On Preserving g-Closed Sets. *Kyungpook Math*. 3., 36: 195-1996.

Bourbaki N., 1996. *General Topology*. Addison Wesley, Mass.

Willard S., 1970. *General Topology*.

Dugundji S., 1966. *Topology*.

Baker C. W., 2001. A Note on θ-Generalized Closed Sets. *Int. J. Math. Math. Sci*. 25 (8): 559-563.

Dontchev J. ve Maki H., 1999. Groups of θ-Generalized Homeomorphisms and Digital Line. *Topology Appl.* 95 (2): 113-128.

Dontchev J. ve Maki H., 1999. On θ-Generalized Closed Sets. *Int. J. Math. Math. Sci.* 22 (2): 239-249.

Fukutake T., 1985. On Generalized Closed Sets in Bitopological Spaces. *Bull. Fukuoka Univ. Ed. III* 35, 19-28 .

El-Shafei M. E. ve Zahari A., 2006. θ-Generalized Closed Sets in Fuzzy Topological Spaces. *Arab. J. Sci. Enf. Sec. A. Sci.* 31: 197-206.

Nasef A. A. ve El-Maghrabi A. I., 2005. Seperation Axioms Associated with Generalized Closed Sets. *proc. Math. Physc. Soc. Egype.* 83: 135-146.

Saraf R. U. ve Naralagi G., Whanna M., 2005. On Fuzzy Semi-Generalized Closed Sets. *Math. Sci. Soc.* Bully Malay., 28: 19-30.

Cao B., Ganster M., Reilly I. ve Steiner M., 2005. δ-Closure, θ-Closure and Generalized Closed Sets.*Appl. Gen. Topol.* 6: 79-86.

El-Maghrahi A. I. ve Nasef A. A., 2005. Some Classes of Compactness and Connectedness in Terms of Generalized Closed Sets. *Math. Soc.* J. Egyption., 13: 19-26.

Maki H., Ogata H., Balachandran K. ve Sundaram P., 2000. The Digital Line and Operation Approaches of $T_{1/2}$-Spaces. Sci. Math. 3: 345-352.

Dontchev J. ve Maki H., 1999. Groups of θ-Generalized Homeomorphisms and Digital Line. *Topology Appl.* 95 (2): 345-352.

Dontchev J., 1999. $T_{3/4}$-Spaces and The Digital Line. *Proceedings of the Second Galway Topology Colloquium at Oxford.* Topol. Atlas. North Bay. 29.

Velicko N. V. , 1968. H-Closed Topological Spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.* (78):103-118.

Crossley S. G. ve Hildebrand S. K., 1972. Semi Topological Properties.*Fund. Math.* (74): 233-254.

YAŞAM ÖYKÜSÜ

1983 Kayseri doğumluyum. İlkokulu 1988-1993 yıllarında Aksaray Cağıl İlköğretim Okulunda okudum. Orta Okulu 1993-1996 yıllarında Sakarya Yuvalıdere İlköğretim Okulunda okudum. Lise eğitimimi 1996-2000 yıllarında Bursa Anadolu Atatürk Lisesinde tamamladım. 2000 yılında Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2004 yılında mezun olup, aynı yıl Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Matematik Tezsiz Yüksek Lisans Programını kazandım. 2006 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Matematik Yüksek Lisansı kazandım. Aynı zamanda Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya devam etmekteyim.