# ARALIĞIN İÇ NOKTASINDA SÜREKSİZLİĞE SAHİP DİRAC OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ ve TERS PROBLEMLER

Yalçın GÜLDÜ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2006

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# ARALIĞIN İÇ NOKTASINDA SÜREKSİZLİĞE SAHİP DİRAC OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ ve TERS PROBLEMLER

Yalçın GÜLDÜ
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2006

## FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAH

Üye : Prof. Dr. Rauf AMİROV

Üye : Prof. Dr. Etibar PANAHOV

Üye : Doç. Dr. Eşref ORUÇOV

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

## ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2006

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Halil GÜRSOY

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

# İÇİNDEKİLER

# ÖZET

Doktora Tezi

ARALIĞIN İÇ NOKTASINDA SÜREKSİZLİĞE SAHİP DİRAC OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ ve TERS PROBLEMLER

Yalçın GÜLDÜ
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Bu çalışma Dirac operatörlerin spektral teorisine aittir. Sunulan bu çalışmada, sonlu aralığın iç noktasında süreksizlik koşullarına sahip Dirac operatörü için çözümün bir integral gösterimi, çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri, spektral karakteristiklerin özellikleri, davranışları, Weyl fonksiyonu ve Weyl çözümünün özellikleri ile ters problem için teklik teoremleri incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Operatör, Spektrum, Ters Problem, Dirac Operatör, Weyl Fonksiyon, Weyl Çözümü.

# SUMMARY

Ph.D Thesis

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR DIRAC OPERATOR WITH DISCONTINUITY CONDITIONS INSIDE AN INTERVAL

Yalçın GÜLDÜ
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Rauf AMİROV

This study belongs to spectral theory of Dirac operators. Integral representation of solution, some properties of kernel, properties and behaviours of spectral characteristics, properties of Weyl function and Weyl solution and finally uniqueness theorems are investigated for Dirac operators with discontinuity conditions inside a finite interval.

**Keywords:** Operator, Spectrum, Inverse Problem, Dirac Operator, Weyl Function, Weyl Solution.

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Rauf AMİROV' a ve başta Yrd.Doç.Dr. Yaşar ÇAKMAK olmak üzere tüm emeği geçenlere içten teşekkürlerimi sunarım.

# GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi; matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir(telin titreşimi vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce $l_2$ uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte $l_2$ ve $H$ soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra $H$ de lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX. ve XX. yüzyıllarda birçok matematikçiler sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normalleştirici sayılar, vs. spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır.

**Tanım 0.1.** Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları(bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak biçimde) diferansiyel operatörlere singülerdir denir.

İkinci mertebeden regüler operatörler için toplanabilir teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan(artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü E. C. Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. B. M. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilşkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish vs. matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

**Tanım 0.2:** $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine $L$ operatörünün spektral karakteristikleri denir. $L$ diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerinin bulunması problemine düz problem, spektral karakteristikleri verildiğinde bu hangi Sturm-Liouville tipinde $L$ diferansiyel operatörünün spektral karakteristikleri olduğu problemine ise ters problem denir.

Ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörlerin spektral analizinde önemli bir yere sahiptir ve de fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V.A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

**Teorem 0.3:** $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0 < x < \pi), \tag{0.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{0.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V.A. Ambartsumyan' ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G.Borg' a aittir[2].

**Teorem 0.4:** $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (0.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{0.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$ ler ise (0.1) denklemi ve

$$y^{'}(0) - h_1 y(0) = 0, \qquad (h \neq h_1) \tag{0.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.6}$$

sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve $h$, $h_1$ ve $H$ sayılarını tek olarak belirtir. ($h, h_1$ ve $H$ sonlu gerçel sayılardır.)

G. Borg' un bu çalışmasında, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilir ve operatörü bu dizilerin yardımıyla belirtmektedir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilir. G. Borg, aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N. Levinson [3], [4] ispatlamıştır. Ayrıca, N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan çevirme operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte, J. Lions[5], [6] ve B. M. Levitan[7] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için çevirme operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner [8] kendi çalışmalarında incelemiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko [9] tarafından kaydedilmiştir. 1950 yılında V.A. Marchenko[9] ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (0.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \qquad \varphi'(0,\lambda) = h, \tag{0.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{0.8}$$

sayıları verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V.A. Marchenko, G. Borg'un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada, $\rho(\lambda)$ fonksiyonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşulu verilmiştir. V. A. Marchenko' nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M.G. Krein [10], [11] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V.A. Marchenko' nun çalışması yayınlanmadan önce A.N. Tikhonov [12] tarafından V. A. Marchenko' nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A.N. Tikhonov çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

**Teorem 0.5:** $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda\rho^2(x)U = 0, \qquad x > 0, \qquad U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ dır. $R(\lambda) = \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I.M. Gelfand ve B. M. Levitan [13], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Ayrıca, bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ $(\alpha_n > 0)$ dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimptotik eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \cdots + \frac{a_{\|\frac{m}{2}\|}}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}}, \\ \alpha_n &= \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \cdots + \frac{b_{\|\frac{m}{2}\|}}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\|\frac{m+1}{2}\|}} \end{aligned}$$

burada $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} q(t)dt\right]$ dir. Eğer $m$ çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\dfrac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer $m$ tek ise $\sum \left(\dfrac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektrumuna göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G. Gasimov' un [14] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{0.9}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.9) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (0.9) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [14] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralı, yani
$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$

2) $\lambda_n$ ve $\mu_n$'ler

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\\ \sqrt{\mu_n} &= n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3) $a_0 \neq a_0'$

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll[15], H. E. Moses[16] ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0,\infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan[17] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx}+Q(x)y=\lambda y, \quad 0<x<\infty \tag{0.10}$$

$$y_1(0)=0, \quad y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{0.11}$$

$$(y_1(0)=0, \quad y_2(\pi)+H_1y_1(\pi)=0 \quad H_1\neq H) \tag{0.11$'$}$$

sınır problemi ele alınmıştır. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$, (0.10) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=0, \quad \varphi_2(0,\lambda)=-1 \tag{0.12}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ fonksiyonu (0.10), (0.11) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x)\in L_2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda)=\int_0^n f^T(x)\varphi(x,\lambda)dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\lambda)-F_n(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda)=0$$

olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f^T(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F^2(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{0.13}$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Ayrıca, bu çalışmada aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilmiştir:

**Teorem 0.6:**

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}$$

ve

$$F(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} (1-\cos\lambda x)/\lambda \\ -\sin\lambda x/\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\cos\lambda y}{\lambda} & -\frac{\sin\lambda y}{\lambda} \end{pmatrix} d\rho(\lambda)$$

olmak üzere $y \leq x$ için $K(x,y)$ matris fonksiyonu

$$F(x,y) + K(x,y) + \int\limits_0^x K(x,s)F(s,y)ds = 0 \qquad (0.14)$$

integral denklemini sağlar.

**Teorem 0.7:** $\rho(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $g(x) \in L_2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int\limits_0^\infty g^T(x)s(x,\lambda)dx, \qquad s(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ -\cos\lambda x \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}, \qquad c(x,\lambda) = \begin{pmatrix} (1-\cos\lambda x)/\lambda \\ -\sin\lambda x/\lambda \end{pmatrix}$$

olacak biçimde

$$f(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda)c^T(y,\lambda)d\sigma(\lambda)$$

matris fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

Bu takdirde her sabit $x \geq 0$ için (0.14) integral denklemi her iki değişkene göre sürekli olan tek $K(x,y)$ çözümüne sahiptir.

**Teorem 0.8:** $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere, monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (0.10), (0.11) sınır probleminin spektral fonksiyonu olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:

1. Eğer $g(x) \in L_2(0,\infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g^T(x) s(x,\lambda) dx$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

2.

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda) c^T(y,\lambda) d\left\{\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}\right\}$$

matris fonksiyonu $F_{11}(x,0) = F_{21}(x,0) = 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türeve sahiptir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasimov ve C. Cebiyev[18] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teoremler ispatlanmıştır:

**Teorem 0.9:** $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (0.10), (0.11) ve (0.10) $(0.11')$ problemlerinin özdeğerleri ise

$$\alpha_n = \frac{H_1 - H}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_n - \mu_k}, \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots) \tag{0.15}$$

dir.

**Teorem 0.10:** $p(x)$ ve $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$ de olacak biçimde $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (0.10), (0.11) ve (0.10), $(0.11')$ problemlerinin spektrumları olması için

1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarının sıralı olması, yani

$$\ldots < \lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \ldots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1} < \ldots$$

2. $\alpha \neq \beta$, $0 \leq \beta$, $\alpha \leq \pi$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_{n,k}|^2$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_{n,k}|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k} \\
\mu_n &= n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}
\end{aligned}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

Dirac operatörü için özfonksiyonların tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülerize izin hesaplanması, periodik ve antiperiodik problemler, açılım teoremleri, özfonksiyonların asimptotiği, $2n$ mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile [19]-[32] çalışmalarında incelenmiştir.

Diğer taraftan $W_2^{-1}(0,1)$ uzayında singüler reel değerli potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem R. O. Hryniv ve Ya. V. Mykytyuk[33] tarafından yapılan çalışmada incelenmiştir.

Bu çalışmada, $q \in W_2^{-1}(0,1)$ reel değerli dağılım(distrubition) fonksiyonu olmak üzere $H := L_2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$l := -\frac{d^2}{dx^2} + q \tag{0.16}$$

diferansiyel ifadesine karşılık gelen $T$ Sturm-Liouville operatörü tanımlanmış ve A. M. Savchuk ve A. A. Shkalikov'un [34]'deki çalışmasına göre, regülarizasyon yöntemi ile Dirichlet sınır koşullarından bahsedilmiştir.

Distrubition anlamında $\sigma' = q$ olacak şekilde reel değerli $\sigma \in H$ alınmış ve

$$D(T_\sigma) = \left\{ u \in W_1^1(0,1) \middle| \, u' - \sigma u \in W_1^1(0,1), l_\sigma(u) \in H, u(0) = u(1) = 0 \right\} \tag{0.17}$$

tanım kümesinde

$$Tu = T_\sigma u = l_\sigma(u) := -(u' - \sigma u)' - \sigma u' \tag{0.18}$$

ifadesi yazılmıştır.

Burada, distrubition anlamında bütün $u \in D(T_\sigma)$ için $l_\sigma(u) = -u'' + qu$ ifadesi incelendiğinde özellikle $T_\sigma$ operatörü, regüler potansiyeller için ilkel $\sigma$ nın özel seçimine bağlı değildir ve (0.16)'ya karşılık gelen standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörü ile çakışır. Ayrıca $T_\sigma$, ilkel $\sigma \in H$'ye düzgün resolvent anlamında sürekli olarak bağlıdır ve böylece $T_\sigma$, herhangi bir $q = \sigma' \in W_2^{-1}(0,1)$ için

(0.16)'ya ait standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörüdür. Ele alınan potansiyeller sınıfı Dirac $\delta-$tipli ve $\frac{1}{x}$-Coulomb tipli potansiyelleri içerir ve matematiksel fizik ve kuantum mekaniğinde geniş olarak kullanılır[35,36].

[34] den iyi bilinir ki, her reel değerli $\sigma \in H$ için yukarda tanımlanan $T_\sigma$ operatörü, diskret basit $\left(\lambda_k^2\right), k \in N$ spektrumlu self adjoint operatördür ve $\lambda_k$, $\lambda_k = \pi k + \mu_k$ ($\mu_k \in \ell_2$ olan dizi) şeklinde asimptotiğe sahiptir[34,37,38]. Regüler $q$ potansiyelleri için yukardaki asimptotikler $\mu_k = O(\frac{1}{k})$ olacak şekilde yazılır.

Bu çalışmada, reel ikişerli farklı sayılardan oluşan ve yukarda ifade edilen asimptotiklere sahip hangi $\left(\lambda_k^2\right)$ dizileri, $W_2^{-1}(0,1)$ den olan singüler potansiyelli Sturm-Liouville operatörlerinin spektrumu dur? sorusunun cevabı araştırılmıştır. Bu soru, ele alınan potansiyeller için ters spektral probleme götürür. Yani; bu durum, karşılık gelen spektral parametreye dayanan $q$ potansiyelinin kurulmasıdır.

Regüler durumda, yukarıda bahsedilen problemin çözümü için sadece $\left(\lambda_k^2\right)$ spektrumunun yetersiz olduğu bilinmektedir. Aynı dirichlet spektrumlu Sturm-Liouville operatörlerinin ürettiği bir çok farklı $q$ potansiyelleri(isospectral) vardır. J. Pöschel ve E. Trubowitz[39]; verilen $\left(\lambda_k^2\right)$ spektrumlu (reel, basit ve $\lambda_k = \pi k + O(\frac{1}{k})$ asimptotiğine ait) $H$ Hilbert uzayındaki bütün potansiyellerin kümesinin, analitik olarak $w_n = n$ ağırlıkları ile $\ell_2(w_n)$ ağırlıklı uzaya difeomorfik olduğunu göstermişlerdir.

$q$ potansiyelini yeniden tek olarak elde etmek için spektrumun yanında bazı ek bilgiler verilmelidir. Bu bilgiler, $(0,1)$ aralığının yarısı üzerindeki potansiyelin bilinmesi veya farklı sınır koşulları olan aynı diferansiyel ifade ile verilen Sturm-Liouville operatörünün spektrumu veya biri bütün aralık için ve diğerleri aralığın eşit iki yarısı için olan üç spektrum olabilir.

Çevirme operatörlerine dayanan regüler Sturm-Liouville operatörünün spektral verisinden, $q$ potansiyelini yeniden elde etmenin algoritması, 1950'lerin başlarında V. A. Marchenko[40] ve I. M. Gelfand, B. M. Levitan[41] tarafından geliştirilen Gelfand-Levitan-Marchenko denklemi olarak adlandırılır. İki spektrum ile $q$ potansiyelinin kurulumu için bir alternatif metod, M. G. Krein[42] tarafından geliştirildi. Daha sonra $H$ Hilbert uzayından potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için [39] da E. Trubowitz ve J. Pöschel tarafından farklı bir yaklaşım önerildi. Yazarlar, spektral veriyi ve $H$' deki potansiyeller arasındaki dönüşümü ayrıntılı olarak çalışmışlar ve ters spektral problemin çözülebilirliğini ispatlamışlardır. Özellikle spektral veriyi tam olarak karakterize etmişlerdir.

[33] çalışmasında; I. M. Gelfand, B. M. Levitan ve V. A. Marchenko'ya göre, klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve $W_2^{-1}(0,1)$ den singüler potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüştür. Şöyle ki, spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elemanından $q$'nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır.

Diğer singülerite tiplerine(örneğin Sturm-Liouville operatörler sınıfı için $a$ süreksizlik noktası, $1/x^{\gamma}$'ya benzer potansiyeller, vs.), [43]'de O. Hald, [44]'de L. Andersson, [45]'de R. Carlson, [46]'da O. Hald ve J. R. McLaughlin, [47]'de V. A. Yurko, [48]'de V. A. Yurko ve G. Freiling bakmışlardır.

Aralığın iç noktasında singüleriteye ve süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler, R. Kh. Amirov, V. A. Yurko[49] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $x = 0$ noktasında singüleriteye sahip self-adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralığın iç noktasında çözümün süreksizliğe sahip olduğu durumu incelenmiştir ve verilen operatörün spektral özellikleri ve bu spektral özelliklere göre ters problemin konumu ve çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Benzer şekilde R. Kh. Amirov [50] çalışmasında, self-adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahip olduğu durum incelenmiştir. Burada verilen diferansiyel operatörü üreten diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışları, operatörün spektral özellikleri, spektrumu basit olduğu durumda yani yalnızca özdeğerlerden oluştuğu durumda, özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon ve koşulmuş fonksiyonlara göre operatörün ayrılışımı, spektral parametrelere göre ters problemin konumu ve bu ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

R. Kh. Amirov'un [51] çalışmasında, sonlu aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörler sınıfı için ve [52] çalışmasında Dirac operatörü için çevirme operatörü, çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri, spektral karakteristiklerin özellikleri ve ters problem için teklik teoremleri öğrenilmiştir.

Aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Dirac operatörü için düz ve ters problemlerin araştırıldığı bu tezde aşağıdaki yol izlenmiştir.

1. Bölüm de tez de kullanılan temel tanım, teoremler ile bir boyutlu Dirac sistemi ve özellikleri verilmiştir.

2. Bölüm de, sonlu aralıkta Dirac diferansiyel denklemlerin kanonik sistemi ele alınmış, karakteristik fonksiyonun elde edilişi, çevirme operatörü ve özellikleri araştırılmıştır.

2.1 alt bölümünde; $\Omega(x) \equiv 0$ ve $\Omega(x) \neq 0$ olduğu durumlarda

$$\begin{cases} y_2'(x) + p(x)y_1(x) + q(x)y_2(x) = \lambda y_1(x) \\ -y_1'(x) + q(x)y_1(x) - p(x)y_2(x) = \lambda y_2(x) \end{cases} \tag{2.1.1$'$}$$

$$\begin{cases} y_2'(x) = \lambda y_1(x) \\ -y_1'(x) = \lambda y_2(x) \end{cases} \tag{2.1.1$''$}$$

$$\Gamma_1(y) := y_2(0) - hy_1(0) = 0 \tag{2.1.2}$$

$$\Gamma_2(y) := y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{2.1.3}$$

olmak üzere (2.1.1$''$), (2.1.2), (2.1.3) ve (2.1.1$'$), (2.1.2), (2.1.3) problemlerinin karakteristik fonksiyonları elde edilmiştir.

2.2 alt bölümünde,

$$By'(x) + \Omega(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi \tag{2.1.1}$$

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0 \tag{2.1.2}$$

$$y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{2.1.3}$$

sınır koşulları ve $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ aralığının $x = a$ iç noktasındaki

$$y(a - 0) = Ay(a + 0) \tag{2.1.4}$$

süreksizlik koşuluna sahip $L$ problemin, (2.1.1) matris denkleminin $Y(0,\lambda)=I$ başlangıç koşulunu ve (2.1.4) süreksizlik koşulunu sağlayan $Y(x,\lambda)$ çözümünün;

$$Y(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt \tag{2.2.3}$$

şeklinde bir gösterime sahip olduğunu gösterilmiştir. Burada $Y_0(x,\lambda)$ , (2.1.1) matris denkleminin $\Omega(x)=0$ olduğu durumda $Y_0(0,\lambda)=I$ başlangıç koşulunu ve (2.1.4) süreksizlik koşulunu sağlayan çözümüdür. Ayrıca her bir durum da $K_+(x,t)$ $K_-(x,t)$ fonksiyonları için aşağıdaki integral denklemleri sistemleri elde edilmiştir.

I. $t<x<a$ için,

$$\begin{aligned}
K_+(x,t) &= \frac{1}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2})+\int_{\frac{x+t}{2}}^{x}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta \\
K_-(x,t) &= \int_{\frac{x-t}{2}}^{x}B\Omega(\zeta)K_+(\zeta,t-x+\zeta)d\zeta
\end{aligned}$$

II. $a<x$ ve $-x<t<x-2a$ için,

$$\begin{aligned}
K_+(x,t) &= \frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2})+\alpha^+\int_{\frac{x+t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta \\
&\quad +\alpha^-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_+(\zeta,t-2a+x+\zeta)d\zeta \\
&\quad +\int_{a}^{x}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta \\
K_-(x,t) &= \int_{\frac{x-t}{2}}^{x}B\Omega(\zeta)K_+(\zeta,t-x+\zeta)d\zeta
\end{aligned}$$

III. $a < x$ , $x - 2a < t < 2a - x$ için,

$$
\begin{aligned}
K_+(x,t) &= \frac{\alpha^+}{2} B\Omega(\frac{x+t}{2}) + \alpha^+ \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t+x-\zeta) d\zeta \\
&+ \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int\limits_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t-2a+x+\zeta) d\zeta \\
&+ \int\limits_{a}^{x} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t+x-\zeta) d\zeta \\
K_-(x,t) &= \frac{\alpha^-}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B\Omega\left(\frac{t-x+2a}{2}\right) \\
&+ \alpha^+ \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta \\
&+ \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int\limits_{\frac{2a-x+t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t+2a-x-\zeta) d\zeta \\
&+ \int\limits_{a}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta
\end{aligned}
$$

IV. $a < x$ , $2a - x < t < x$ için,

$$
\begin{aligned}
K_+(x,t) &= \frac{\alpha^+}{2} B\Omega(\frac{x+t}{2}) + \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t+x-\zeta) d\zeta \\
K_-(x,t) &= \frac{\alpha^-}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B\Omega\left(\frac{t-x+2a}{2}\right) \\
&+ \frac{\alpha^-}{2} B\Omega\left(\frac{x-t+2a}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&+ \alpha^+ \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta
\end{aligned}
$$

$$+\alpha^{-}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{\frac{2a-x+t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_{-}(\zeta,t+2a-x-\zeta)d\zeta$$

$$+\int\limits_{a}^{x} B\Omega(\zeta)K_{+}(\zeta,t+\zeta-x)d\zeta$$

2.3 alt bölümünde; 2.2 alt bölümünde alınan integral denklemleri sistemlerinin her bölge için çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiş ve ayrıca $\Omega(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ise çevirme operatörünün $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir:

1) $B\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}+\Omega(x)K(x,t)=-\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial t}B$

2) $BK(x,-x+0)=K(x,-x+0)B$

3) $BK(x,x-0)+\Omega(x)=K(x,x-0)B,\ x<a$

4) $BK(x,x-0)+\alpha^{+}\Omega(x)=K(x,x-0)B,\ x>a$

5) $B\left[K(x,x-2a-0)-K(x,x-2a+0)\right]$

$=\left[K(x,x-2a-0)-K(x,x-2a+0)\right]B,\ x>a$

6) $B\left[K(x,2a-x-0)-K(x,2a-x+0)\right]+\alpha^{-}\Omega(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$=\left[K(x,2a-x-0)-K(x,2a-x+0)\right]B,\ x>a$

3. Bölümde, verilen $L$ probleminin spektrumunun özellikleri, Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonunun özellikleri ile $L$ probleminin belirlenmesi için Weyl fonksiyonuna ve diskret spektral verilere göre ters(inverse) problemin çözümü incelenmiştir.

3.1 alt bölümünde,

$\Omega(x)=0$ olduğu duruma karşılık gelen $L_0$ probleminin

$$\begin{aligned}\Delta_0(\lambda)= \quad & \alpha^{+}\left[h\cos\lambda\pi+\sin\lambda\pi\right)+\alpha^{-}(-h\cos\lambda(2a-\pi)-\sin\lambda(2a-\pi)]+\\ & +H\left[\alpha^{+}(\cos\lambda\pi-h\sin\lambda\pi)+\alpha^{-}(\cos\lambda(2a-\pi)-h\sin\lambda(2a-\pi))\right]\end{aligned}$$

karakteristik fonksiyonunun özellikleri incelenmiştir.

3.2 alt bölümünde, $L$ probleminin spektral karakteristiklerinin $n$'nin yeterince büyük değerlerinde davranışları öğrenilmiştir.

3.3 alt bölümünde, $L$ probleminin Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonunun özellikleri araştırılmıştır.

3.4. alt bölümde, $L$ probleminin belirlenmesi için Weyl fonksiyonuna ve diskret spektral verilere göre ters(inverse) problemin çözümü verilmiştir.

# I.BÖLÜM

## 1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 1.1.1:** $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L_2[a,b]$ uzayı,

$$L_2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda iç çarpım ise

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$).

**Tanım 1.1.2:** $\ell_2$ uzayı,

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) |\, x_i \in K, \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 1.1.3:** $L$, $D(L)$ tanım kümesinde sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \qquad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise $\lambda$ sayısına $L$ operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise $\lambda$ ya karşılık gelen özfonksiyonu denir.

**Tanım 1.1.4:** $\{\lambda_n\}$ dizisi $L$ operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \left\{ y_1^2(x,\lambda_n) + y_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx$$

sayılarına $L$ operatörünün normalleştirici sayıları denir.

**Tanım 1.1.5:** $L-\lambda I$ operatörünün sınırlı $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı $\lambda'$lar kümesine $L$ operatörünün spektrumu denir.

**Tanım(Adjoint Operatör) 1.1.6:** $H_1$ ve $H_2$ iki Hilbert uzayları ve $L : H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \to H_1$ operatörü $< Lx, y >=< x, L^*y >$ şartını sağlıyorsa $L^*$ operatörüne $L$ nin adjointi denir. Eğer $L = L^*$ ise $L$ operatörüne self adjoint operatör denir.

**Tanım(Çevirme Operatörü) 1.1.7:** $E$ lineer topolojik uzay, $A$ ve $B$ de $A : E \to E,\ \ B : E \to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. $E_1$ ile $E_2$ de $E$ lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere $E$ uzayının tamamında tanımlı, $E_1$ den $E_2$ ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip $X$ operatörü,

i) $X$ ve $X^{-1}$ operatörleri $E$ uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre $A$ ve $B$ operatörler çifti için çevirme operatörü denir.

**Tanım 1.1.8:** $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir $z_0$ noktasının $\delta$ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında analitiktir denir.

**Tanım 1.1.9:** $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir.

**Teorem(Rouché Teoremi) 1.1.10:** $f$ ve $g$ kompleks düzlemin bir $B$ bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar olsunlar. Eğer $\gamma$, $f$ ve $g$ nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen, $B$ içinde bulunan basit kapalı bir eğri ve de $\gamma$ üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ olsun. Bu durumda $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonlarının $\gamma$ içindeki sıfırlarının sayısı katlılığı ile birlikte aynıdır.

**Teorem(Cauchy İntegral Teoremi) 1.1.11:** $f(z)$ bağlantılı $G$ bölgesinde birebir analitik fonksiyon, $\gamma$ ise $G$ de bulunan keyfi düzlendirilebilir kapalı eğri olacak biçimde $f(z)'$nin $\gamma$ eğrisi üzerinden integrali sıfıra eşittir:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

**Teorem(Cauchy İntegral Formülü) 1.1.12:** $B$ bir bölge ve $\gamma$ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer $a$, $\gamma$ içinde bir nokta ve $f(z)$, $B$ de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

dir.

**Tanım 1.1.13:** Analitik $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası $z_0$ olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

ise $z_0$ noktasına $f(z)$ nin kutup noktası denir.

**Teorem(Rezidü Teoremi) 1.1.14:** $D$ bölgesinde ($f(z)$ nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, \ldots, z_n$ noktaları hariç) ve $D$ nin $\Gamma$ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Re\,s}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. $z_0$ noktası $f(z)$ nin $k$ katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Re\,s}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[ f(z)(z-z_0)^k \right]$$

$z_0$ noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Re\,s}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[ f(z)(z-z_0) \right]$$

dir. $f(z)$ tam fonksiyon olmak üzere

$$R = (\lim_{n \to \infty} \sqrt{|a_k|})^{-1}$$

formülü ile tanımlı $R$ sayısı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k z_k$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı ve $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ olsun.

**Tanım 1.1.15:** $r > R$ için

$$M(r) < \exp(r^{\mu})$$

olacak şekilde $\mu > 0$ varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir ve (1.1.6) eşitsizliğini sağlayan $\mu$ sayılar kümesinin

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}$$

formülü ile tanımlı $\rho$ alt sınırına $f(z)$ nin mertebesi denir.

**Tanım 1.1.16:** $f(z)$ tam fonksiyonunun mertebesi sonlu $\rho(0 < \rho < \infty)$ olmak üzere $r > R$ için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho}) \tag{1.1.1}$$

olacak şekilde $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir.

(1.1.1) eşitsizliğini sağlayan $a$ sayı kümesinin $\sigma$ alt sınırına $f(z)$ fonksiyonunun tipi denir ve

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$$

dir.

**Tanım 1.1.17:** $\sigma = 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\sigma = \infty$ olmak üzere $\rho(0 < \rho < \infty)$ mertebeli $f(z)$ tam fonksiyonu sırası ile minimal, normal, maksimal tipe sahiptir denir.

**Tanım(Mittag-Leffler Açılımı) 1.1.18:** Bir $f(z)$ fonksiyonunun sonlu düzlemdeki aykırılıkları mutlak değer büyüklüğüne göre sıralanmış, basit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kutup yerleri, ve bu noktalardaki rezidüleri sırasıyla $b_1, b_2, b_3, \ldots$ olsun. Eğer $C_N$ hiçbir kutup yerinden geçmeyen, üzerinde $|f(z)| < M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği $R_N$ yarıçaplı çember ise ve $N \to \infty$ iken $R_N \to \infty$ oluyorsa

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right]$$

yazılır.

## 1.2. Bir Boyutlu Dirac Sistemi ve Özellikleri

$p_{ik}(x)'$ler, $(i,k=1,2)$ $[0,\pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$L = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x) \equiv p_{21}(x) \tag{1.2.1}$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B\frac{d}{dx} + L(x) - \lambda I\right) y = 0 \tag{1.2.2}$$

denklemi

$$\begin{cases} y_2' + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 = \lambda y_1 \\ -y_1' + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 = \lambda y_2 \end{cases} \tag{1.2.2$'$}$$

şeklinde iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemine denktir.

$V(x)$-potansiyel fonksiyon, $m$-zerreciğin kütlesi olmak üzere $p_{12}(x) = p_{21}(x) \equiv 0$, $p_{11}(x) = V(x)+m$, $p_{22}(x) = V(x)-m$ ise $(1.2.2')$ sistemi, relativistic kuantum teorisinde bir boyutlu stasyoner dirac sistemi olarak bilinmektedir.

Sabit, ortogonal ve normalleştirilmiş tabana göre; iki boyutlu uzayın herhangi düzgün ortogonal dönüşümü,

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır[53].

$$BH = HB$$

olduğu kolayca görülür.

(1.2.2) 'de $y = H(x)z$ dönüşümü yapılır ve her tarafı $H^{-1}$ ile soldan çarpılırsa;

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz) + H^{-1}LHz = H^{-1}\lambda Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx} + \left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH\right)z = \lambda z \tag{1.2.3}$$

elde edilir.

$$Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$$

matrisi hesaplanacak olursa,

$$H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} \varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix},$$

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix},$$

$$H^{-1}LH =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \varphi'(x) + p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'(x) + p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

ifadesi elde edilir. $q_{12}(x) \equiv 0$ olarak seçilirse,
$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x) + \frac{1}{2}(p_{22}(x) - p_{11}(x))\sin 2\varphi(x) = 0$ olur.

Böylece eğer $p_{11}(x) \neq p_{22}(x)$ ise

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x) - p_{22}(x)}$$

olarak elde edilir ve $Q(x)$ matrisi,

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre (1.2.3) denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{1.2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **I. kanonik formu** denir.

Şimdi $izQ(x) = q_{11}(x) + q_{22}(x) = 0$ olmak üzere $\varphi(x)$ fonksiyonu seçilsin. Bu durumda $2\varphi'(x) + p_{11}(x) + p_{22}(x) = 0$ olacağından

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \{p_{11}(s) + p_{22}(s)\}\, ds$$

elde edilir. Buna göre (1.2.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{1.2.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin **II. kanonik formu** denir. (1.2.4) ve (1.2.5) denklemlerine (1.2.2) sisteminin kanonik formları da denir. (1.2.2) denklem sistemlerinin spektral teorisinin çeşitli problemlerini incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik davranışı araştırılırken ve de keyfi vektör değerli fonksiyonların (0 ve $\pi$ noktalarında homojen sınır koşulları altında) (1.2.2) denklem sisteminin özfonksiyonlarına göre açılımı incelenirken (1.2.4) kanonik denklemini kullanmak uygundur. Sonsuz aralıkta verilmiş (1.2.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (1.2.5) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar.

(1.2.4) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2' + \{p(x) - \lambda\}\, y_1 = 0, \quad y_1' + \{r(x) - \lambda\}\, y_2 = 0 \tag{1.2.6}$$

$$y_1(0) \sin\alpha + y_2(0) \cos\alpha = 0 \tag{1.2.7}$$

$$y_1(\pi) \sin\beta + y_2(\pi) \cos\beta = 0 \tag{1.2.8}$$

sınır problemi gözönüne alınsın. Herhangi bir $\lambda_0$ için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x,\lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_0) \\ y_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $\lambda_0$'a özdeğer, buna karşılık gelen $y(x,\lambda_0)$'a özfonksiyon denir.

**Lemma 1.2.1:** $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere $\lambda_1$ ve $\lambda_2$ özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir, yani,

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1) z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1) z_2(x,\lambda_2)\}\, dx = 0$$

dır.

**İspat:** $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları (1.2.6) sisteminin çözümleri olduğundan,

$$\begin{aligned}
y_2'(x,\lambda_1) + \{p(x) - \lambda_1\}\, y_1(x,\lambda_1) &= 0 \\
y_1'(x,\lambda_1) - \{r(x) - \lambda_1\}\, y_2(x,\lambda_1) &= 0 \\
z_2'(x,\lambda_2) + \{p(x) - \lambda_2\}\, z_1(x,\lambda_2) &= 0 \\
z_1'(x,\lambda_2) - \{r(x) - \lambda_2\}\, z_2(x,\lambda_2) &= 0
\end{aligned}$$

dır. Bu denklemler sırası ile $z_1(x,\lambda_2), -z_2(x,\lambda_2), -y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ ile çarpılır ve sonuçları toplanırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\{y_2(x,\lambda_1) z_1(x,\lambda_2) - y_1(x,\lambda_1) z_2(x,\lambda_2)\} \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1) z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1) z_2(x,\lambda_2)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik 0'dan $\pi$'ye $x$'e göre integrallenirse,

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int\limits_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}\,dx$$

$$=\{y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)-y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}|_0^\pi$$

bulunur. Öte yandan,

$\{y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)-y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}|_0^\pi=0$ olduğundan

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int\limits_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}\,dx=0$$

veya

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int\limits_0^\pi y^T(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx=0$$

olur. $\lambda_1\neq\lambda_2$ olduğundan, $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldirler.

**Lemma 1.2.2:** (1.2.6)-(1.2.8) sınır-değer probleminin özdeğerleri reeldir.

**İspat:** $\lambda_1=u+iv$'nin kompleks özdeğer olduğu kabul edilsin. $p(x)$ ve $r(x)$ reel değerli ve $[0,\pi]$ de sürekli fonksiyonlar, $\alpha$, $\beta$ sayıları reel olduğundan, $\lambda_2=\overline{\lambda_1}=u-iv$ sayısıda problemin $\overline{y}(x,\lambda_1)$ özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğerdir.

Bu durumda, Lemma 1.2.1'den,

$$\int\limits_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)\overline{y}_1(x,\lambda_1)+y_2(x,\lambda_1)\overline{y}_2(x,\lambda_1)\}\,dx=0$$

ve

$$\int\limits_0^\pi \left\{|y_1(x,\lambda_1)|^2+|y_2(x,\lambda_1)|^2\right\}dx=0$$

olur. Buradan $y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ sıfır olur ki, bu da özfonksiyonların sıfır olmaması ile çelişir. O halde özdeğerler reeldir.

# II. BÖLÜM

# ÇEVİRME OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ

## 2.1 Karakteristik Fonksiyonun Elde Edilmesi

Sonlu aralıkta

$$By'(x) + \Omega(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi \tag{2.1.1}$$

Dirac diferansiyel denklemlerin kanonik sistemi ele alınsın ve

$$\Gamma_1(y) := y_2(0) - hy_1(0) = 0 \tag{2.1.2}$$

$$\Gamma_2(y) := y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{2.1.3}$$

sınır koşulları ve $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ aralığının $x = a$ iç noktasındaki

$$y(a-0) = Ay(a+0) \tag{2.1.4}$$

süreksizlik koşulu ve (2.1.1) denklemi tarafından üretilen sınır değer problemi $L$ ile gösterilsin. Burada,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

$p(x), q(x)$ reel değerli ve $p(x), q(x) \in L_2(0,\pi)$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$, $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ve $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ olan reel sayıdır.

Ayrıca (2.1.4) süreksizlik koşulundaki $A$ matrisi için $\det A = 1$ dir. Diğer taraftan $L$ operatörünün tanım kümesi

$D(L) = \Big\{ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \end{pmatrix}^T : y_1(x), y_2(x);\ [0,a), (a,\pi]$ aralıklarında

$y(a-0) = Ay(a+0)$ süreksizlik koşullarını sağlayan mutlak sürekli

fonksiyonlar, $y_2(0) - hy_1(0) = 0,\ y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \}$

şeklindedir.

(2.1.1) denklemi

$$\begin{cases} y_2'(x) + p(x)y_1(x) + q(x)y_2(x) = \lambda y_1(x) \\ -y_1'(x) + q(x)y_1(x) - p(x)y_2(x) = \lambda y_2(x) \end{cases} \qquad (2.1.1')$$

biçiminde ve (2.1.2) ve (2.1.3) sınır koşulları

$$\Gamma(y) = A_0 y(0) + A_1 y(\pi) = 0, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} -h & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H & 1 \end{pmatrix} \quad h, H \in R$$

olarak yazılabilir.

İlk önce $\Omega(x) \equiv 0$ olduğu durumda $\chi_0(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu araştırılacak olursa, bu durumda $(2.1.1')$ denklemi,

$$\begin{cases} y_2'(x) = \lambda y_1(x) \\ -y_1'(x) = \lambda y_2(x) \end{cases} \qquad (2.1.1'')$$

denklem sistemine indirgenir.$\chi_0(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun kökleri $(2.1.1'')$, (2.1.2), (2.1.3) problemin özdeğerleri ile çakışmaktadır. Bu denklem sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} y_1(x, \lambda) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x \\ y_2(x, \lambda) = -c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ fonksiyonlarının; $(2.1.1'')$, (2.1.2), (2.1.3) probleminin çözümü olması için (2.1.2), (2.1.3) sınır koşullarını sağlaması gerekir.

O halde,

$$\Gamma_1(y) = -c_1 + h(-c_2) = 0 \Rightarrow \Gamma_1(y) = -c_1 - hc_2 = 0$$

$$\Gamma_2(y) = -c_1 \cos \lambda\pi + c_2 \sin \lambda\pi + Hc_1 \sin \lambda\pi + Hc_2 \cos \lambda\pi = 0$$

$$\Gamma_2(y) = c_1(H \sin \lambda\pi - \cos \lambda\pi) + c_2(\sin \lambda\pi + H \cos \lambda\pi) = 0$$

olur.

$(2.1.1'')$, (2.1.2), (2.1.3) probleminin sıfırdan farklı çözümünün olması için $c_1$ ve $c_2$ ye göre elde edilen katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. $\Gamma_1(y)$ ve $\Gamma_2(y)$ ye göre yazılan sistem bir lineer cebirsel homojen denklem sistemidir.

O halde

$$\chi_0(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & -h \\ H\sin\lambda\pi - \cos\lambda\pi & \sin\lambda\pi + H\cos\lambda\pi \end{vmatrix} = 0$$

dır.

$(2.1.1'')$, $(2.1.2)$ $(2.1.3)$ probleminin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığı için özdeğerleri; $\chi_0(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun kökleridir. Determinant açılırsa;

$$\chi_0(\lambda) = (-h - H)\cos\lambda\pi + (-1 + hH)\sin\lambda\pi = 0$$

olur.

$\Omega(x) \neq 0$ olduğu durumda sistemin genel çözümü $y(x,\lambda) = e(x,\lambda)c$ şeklindedir. Burada $e(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}(x,\lambda)$; $(2.1.1)$ denkleminin $e(0,\lambda) = I$ başlangıç koşullarını sağlayan temel çözümü, $c$ keyfi sabit matristir.

$$y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x,\lambda) & e_{12}(x,\lambda) \\ e_{21}(x,\lambda) & e_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

yani

$$y_1(x,\lambda) = c_1 e_{11}(x,\lambda) + c_2 e_{12}(x,\lambda)$$

$$y_2(x,\lambda) = c_1 e_{21}(x,\lambda) + c_2 e_{22}(x,\lambda)$$

olur.

Şimdi $\Omega(x) \neq 0$ olduğu durumda $\chi(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu araştırılsın. Burada da yine bu fonksiyonun kökleri $(2.1.1')$, $(2.1.2)$, $(2.1.3)$ problemin özdeğerleri ile çakışacaktır.

$y_1(x,\lambda) = c_1 e_{11}(x,\lambda) + c_2 e_{12}(x,\lambda)$ ve $y_2(x,\lambda) = c_1 e_{21}(x,\lambda) + c_2 e_{22}(x,\lambda)$ fonksiyonları verilen problemin çözümü olması için $(2.1.2)$ $(2.1.3)$ sınır koşullarını sağlaması gerekir. Buna göre,

$$\Gamma_1(y) = c_1 e_{21}(0,\lambda) + c_2 e_{22}(0,\lambda) - h(c_1 e_{11}(0,\lambda) + c_2 e_{12}(0,\lambda)) = 0$$

$$\Gamma_2(y) = c_1 e_{21}(\pi,\lambda) + c_2 e_{22}(\pi,\lambda) + H(c_1 e_{11}(\pi,\lambda) + c_2 e_{12}(\pi,\lambda)) = 0$$

$$\Gamma_1(y) = c_1(-h e_{11}(0,\lambda) + e_{21}(0,\lambda)) + c_2(e_{22}(0,\lambda) - h e_{12}(0,\lambda)) = 0$$

$$\Gamma_2(y) = c_1(e_{21}(\pi,\lambda) + He_{11}(\pi,\lambda)) + c_2(e_{22}(\pi,\lambda) + He_{12}(\pi,\lambda)) = 0$$

olur.

$(2.1.1')$, $(2.1.2)$, $(2.1.3)$ probleminin sıfırdan farklı çözümünün olması için $c_1$ ve $c_2$ ye göre elde edilen katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. $\Gamma_1(y)$ ve $\Gamma_2(y)$ ye göre yazılan sistem bir homojen denklem sistemidir. O halde

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -he_{11}(0,\lambda) + e_{21}(0,\lambda) & -he_{12}(0,\lambda) + e_{22}(0,\lambda) \\ He_{11}(\pi,\lambda) + e_{21}(\pi,\lambda) & He_{12}(\pi,\lambda) + e_{22}(\pi,\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

dır.

$(2.1.1')$, $(2.1.2)$, $(2.1.3)$ probleminin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığı için özdeğerleri; $\chi(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun kökleri olması gerekir. Determinant açılırsa,

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) = \; & -hHe_{11}(0,\lambda)e_{12}(\pi,\lambda) - he_{11}(0,\lambda)e_{22}(\pi,\lambda) \\ & +He_{21}(0,\lambda)e_{12}(\pi,\lambda) + e_{21}(0,\lambda)e_{22}(\pi,\lambda) \\ & +hHe_{11}(\pi,\lambda)e_{12}(0,\lambda) - He_{11}(\pi,\lambda)e_{22}(0,\lambda) \\ & +he_{21}(\pi,\lambda)e_{12}(0,\lambda) - e_{21}(\pi,\lambda)e_{22}(0,\lambda) = 0\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) = \; & e_{21}(0,\lambda)e_{22}(\pi,\lambda) - e_{21}(\pi,\lambda)e_{22}(0,\lambda) \\ & -h(e_{11}(0,\lambda)e_{22}(\pi,\lambda) - e_{21}(\pi,\lambda)e_{12}(0,\lambda)) \\ & -hH(e_{11}(0,\lambda)e_{12}(\pi,\lambda) - e_{11}(\pi,\lambda)e_{12}(0,\lambda)) \\ & +H(e_{21}(0,\lambda)e_{12}(\pi,\lambda) - e_{11}(\pi,\lambda)e_{22}(0,\lambda)) = 0\end{aligned}$$

olur. Burada $e(x,\lambda)$; $e(0,\lambda) = I$ başlangıç koşullarını sağlayan temel çözümü olduğundan yani $e_{11}(0,\lambda) = 1$, $e_{22}(0,\lambda) = 1$, $e_{12}(0,\lambda) = 0$, $e_{21}(0,\lambda) = 0$ olduğundan

$$\chi(\lambda) = -e_{21}(\pi,\lambda) - he_{22}(\pi,\lambda) - hHe_{12}(\pi,\lambda) - He_{11}(\pi,\lambda) = 0$$

veya

$$\chi(\lambda) = \det(A_0 + A_1 e(\pi,\lambda))$$

elde edilir.

## 2.2. İntegral Denklemin Oluşturulması

(2.1.1) denkleminde $\Omega(x) \equiv 0$ olduğu durumda (2.1.1) matris denkleminin $Y_0(0,\lambda) = I$ ($I$ birim matristir) başlangıç koşulunu ve (2.1.4) süreksizlik koşulunu sağlayan çözümü $Y_0(x,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$BY_0' = \lambda Y_0$ eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin iki tarafı $B^{-1}$ ile çarpılırsa,

$$Y_0' = \quad B^{-1}\lambda Y_0 = \lambda B^{-1} Y_0 = -\lambda B Y_0$$

elde edilir. Buradan

$$Y_0(x,\lambda) = e^{-\lambda Bx}$$

bulunur. ($Y_0(0,\lambda) = I$)

O halde;

$$Y_0(x,\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda Bx}, & x < a \\ e^{-\lambda Bx}C, & x > a \end{cases}$$

olur. Buradaki $C$- sabit matrisi (2.1.4) süreksizlik koşulu kullanılarak elde edilebilir. Bunun için $Y_0(a-0) = AY_0(a+0)$ eşitliğinde $e^{-\lambda Ba} = Ae^{-\lambda Ba}C$ alınır. Bu eşitlikte önce her iki taraf $A^{-1}$ ile soldan çarpılırsa,

$$A^{-1}e^{-\lambda Ba} = e^{-\lambda Ba}C$$

olur. $C$'yi yalnız bırakmak için şimdi de her iki taraf $e^{\lambda Ba}$ ile soldan çarpıldığında $e^{\lambda Ba}A^{-1}e^{-\lambda Ba} = C$ elde edilir. $C$'nin ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Y_0(x,\lambda) &= \begin{cases} e^{-\lambda Bx}, & 0 < x < a \\ e^{-\lambda Bx}e^{\lambda Ba}A^{-1}e^{-\lambda Ba}, & a < x < \pi \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-\lambda Bx}, & 0 < x < a \\ e^{-\lambda B(x-a)}A^{-1}e^{-\lambda Ba}, & a < x < \pi \end{cases} \qquad (2.2.1) \\ &= \begin{cases} e^{-\lambda Bx}, & 0 < x < a \\ \alpha^{+}e^{-\lambda Bx} + \alpha^{-}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda B(2a-x)} & a < x < \pi \end{cases} \end{aligned}$$

olur. $Y(x,\lambda)$ ile $\Omega(x)\neq 0$ olduğu durumda (2.1.1) matris denkleminin $Y(0,\lambda)=I$ başlangıç koşulunu ve (2.1.4) süreksizlik koşulunu sağlayan çözümü gösterilsin.

$BY'+\Omega(x)Y=\lambda Y$ veya $BY'-\lambda Y=-\Omega(x)Y$ matris denkleminin çözümü; $Y(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)C(x)$ şeklinde olduğundan,

$Y'(x,\lambda)=Y_0'(x,\lambda)C(x)+Y_0(x,\lambda)C'(x)$ olur. Bu denklemde yerine yazılırsa

$BY_0'(x,\lambda)C(x)+BY_0(x,\lambda)C'(x)-\lambda Y_0(x,\lambda)C(x)=-\Omega(x)Y_0(x,\lambda)C(x)$

$\left[BY_0'(x,\lambda)-\lambda Y_0(x,\lambda)\right]C(x)+BY_0(x,\lambda)C'(x)=-\Omega(x)Y_0(x,\lambda)C(x)$

$BY_0(x,\lambda)C'(x)=-\Omega(x)Y_0(x,\lambda)C(x)$

$BY_0(x,\lambda)C'(x)=-\Omega(x)Y(x,\lambda)$

elde edilir. Her iki taraf $B$ ile çarpılırsa,

$Y_0(x,\lambda)C'(x)=B\Omega(x)Y(x,\lambda)$

$C'(x)=Y_0^{-1}(x,\lambda)B\Omega(x)Y(x,\lambda)$

$C(x)=\int\limits_0^x Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)Y(t,\lambda)dt+C_0$

olur. Burada $C_0$, sabit bir vektördür.

$Y(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)C(x)$ olduğundan

$$Y(x,\lambda)=C_0Y_0(x,\lambda)+\int\limits_0^x Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)Y(t,\lambda)dt$$

integral denklemi ve $Y(0,\lambda)=I$ başlangıç koşulunu sağladığından $C_0=I$ olduğu gözönünde bulundurulursa,

$$Y(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)+\int\limits_0^x Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)Y(t,\lambda)dt \qquad (2.2.2)$$

elde edilir.

Şimdi, (2.1.1) matris denkleminin $Y(0,\lambda)=I$ başlanğıç koşulunu ve (2.1.4) süreksizlik koşulunu sağlayan $Y(x,\lambda)$ çözümünün

$$Y(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)+\int\limits_{-x}^x K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt \qquad (2.2.3)$$

şeklinde gösterime sahip olduğu gösterilsin. Burada $K(x,t)$ $2\times 2$ tipinde, yani, $\begin{pmatrix} K_{11}(x,t) & K_{12}(x,t) \\ K_{21}(x,t) & K_{22}(x,t) \end{pmatrix}$ şeklinde bir matris fonksiyonudur. (2.2.3) şeklinde verilen $Y(x,\lambda)$ çözümünün (2.2.2) denklemini sağlaması için

$$Y_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt=Y_0(x,\lambda)+\int_0^x Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)Y(t,\lambda)dt$$

ve buradan

$$\begin{aligned}&\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt\\ &=\int_0^x Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)Y_0(t,\lambda)dt \\ &+\int_0^x Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir.

Tersine, eğer $K(x,t)$ matris fonksiyonu (2.2.4) eşitliğini sağlıyorsa; $Y(x,\lambda)$ fonksiyonu (2.2.3) denklemini sağlamalıdır. (2.2.4) eşitliğinin sağ tarafı öyle dönüştürülsün ki; bu ifade eşitliğin sol tarafındaki ifadeye benzer olsun.

Bunun için ilk önce aşağıdaki gösterimler kabul edilsin:

$$K_{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}\left[K(x,t)\pm BK(x,t)B\right],\ \left(K(x,t)=K_+(x,t)+K_-(x,t)\right)$$

$K_+(x,t)$ ve $K_-(x,t)$ matris fonksiyonlarının ifadelerinden açıkca görülüyor ki; bu fonksiyonlar

$$\begin{cases} BK_+(x,t)=\frac{1}{2}\left[BK(x,t)-K(x,t)B\right]=-K_+(x,t)B \\ BK_-(x,t)=\frac{1}{2}\left[BK(x,t)+K(x,t)B\right]=K_-(x,t)B \end{cases} \tag{2.2.5}$$

özelliklerine sahiptir.

$$Y_0(x,\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda Bx}, & x<a \\ e^{-\lambda B(x-a)}A^{-1}e^{-\lambda Ba}, & a<x \end{cases}$$

olduğundan,

$t < a$ için,

$Y_0^{-1}(t,\lambda) = e^{\lambda Bt}$ olur.

$a < x$ için,

$Y_0(x,\lambda) = e^{-\lambda B(x-a)} A^{-1} e^{-\lambda Ba}$, olduğundan

$a < t < \pi$ için,

$Y_0^{-1}(t,\lambda) = e^{\lambda Ba} A e^{\lambda B(t-a)}$ olur. Bu durumda

$$Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda B(x-t)}, & t < x < a \\ e^{-\lambda B(X-a)} A^{-1} e^{\lambda B(t-a)}, & t < a < x \\ e^{-\lambda B(x-t)}, & a < t < x \end{cases}$$

veya

$$Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda B(x-t)}, & t < x < a \\ \alpha^+ e^{-\lambda B(x-t)} + \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda B(2a-x-t)}, & t < a < x \\ e^{-\lambda B(x-t)}, & a < t < x \end{cases}$$

elde edilir. Burada, $\alpha^{\pm} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha} \pm \alpha)$ dır.

Şimdi $Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)$ ifadesi ve $K_{\pm}(x,t)$ fonksiyonlarının ifadeleri gözönünde bulundurularak (2.2.4) eşitliğinin sağ tarafını sol taraftaki ifadeye benzer olacak şekilde dönüştürülürse, $K_+(x,t)$ ve $K_-(x,t)$ matris fonksiyonları için integral denklemler sistemi elde edilir:

I. $t < x < a$ için,

$$\int_{-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = \int_0^x Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)Y_0(t,\lambda)dt$$

$$+ \int_0^x Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

eşitliği sağdan ve soldan $B$ ile çarpılırsa,

$$\int_{-x}^{x} BK(x,t)e^{-\lambda Bt}Bdt = \int_{0}^{x} BY_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)Y_0(t,\lambda)Bdt$$

$$+\int_{0}^{x} BY_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)B\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsBdt$$

olur. Elde edilen bu eşitlik, yukardaki eşitlikle taraf tarafa toplanırsa;

$$\int_{-x}^{x} \left[K(x,t) + BK(x,t)B\right] e^{-\lambda Bt}dt = \int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\int_{0}^{x} Be^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)e^{-\lambda Bt}Bdt + \int_{0}^{x} Be^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsBdt$$

veya

$$\frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \left[K(x,t) + BK(x,t)B\right] e^{-\lambda Bt}dt = \int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-2t)}B\Omega(t)dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t)\int_{-t}^{t} B\left[K(t,s) - BK(t,s)B\right] e^{-\lambda Bs}dsdt$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{-x}^{x} K_+(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = \int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-2t)}B\Omega(t)dt$$

$$-\int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t)\int_{-t}^{t} BK_-(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

olur. Son eşitliğin sağ tarafındaki integraller $B$, $\Omega$ ve $K$ matrislerinin özelliklerinden yararlanarak

$$I_1 = \int_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-2t)}B\Omega(t)dt = \int_{0}^{x} B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\int_0^x e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t)\int_{-t}^{t} BK_-(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt \\
&= \int_0^x e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\int_{-t}^{t} K_-(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt \\
&= \int_0^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int_{-t}^{t} K_-(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt \\
&= \int_0^x B\Omega(t)\int_{-t}^{t} K_-(t,s)e^{\lambda B(x-t-s)}dsdt
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır ve bu integrallerde gerekli değişken değiştirmesi yapılarak,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} B\Omega\left(\frac{x+\zeta}{2}\right)e^{-\lambda B\zeta}d\zeta = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{-\lambda Bt}dt \\
I_2 &= \int_0^x B\Omega(t)\int_{-x}^{2t-x} K_-(t,\zeta+x-t)e^{-\lambda B\zeta}d\zeta dt \\
&= \int_{-x}^{x}\left(\int_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt
\end{aligned}
$$

elde edilir.

O halde

$$
\begin{aligned}
&\int_{-x}^{x} K_+(x,t)e^{-\lambda Bt}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} B\Omega(\frac{x+t}{2})e^{-\lambda Bt}dt + \int_{-x}^{x}\left(\int_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt \\
&= \int_{-x}^{x}\left[\frac{1}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2}) + \int_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta\right]e^{-\lambda Bt}dt
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
K_+(x,t) = \frac{1}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2}) + \int_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta
$$

elde edilir.

Şimdi $K_{-}(x,t)$ elde edilsin. Bunun için $\int\limits_{-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$ eşitliğini sağdan ve soldan $B$ ile çarpıp, elde edilen ifade $\int\limits_{-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$ ifadesinden çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\int\limits_{-x}^{x} [K(x,t) - BK(x,t)B]\, e^{-\lambda Bt}dt = \int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int\limits_{-t}^{t} K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$-\int\limits_{0}^{x} Be^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t)e^{-\lambda Bt}Bdt - \int\limits_{0}^{x} Be^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\int\limits_{-t}^{t} K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsBdt$$

$$= \int\limits_{0}^{x} \left[e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)e^{-\lambda Bt} - e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)e^{-\lambda Bt}\right] dt$$

$$+\int\limits_{0}^{x} \left[-e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t)\int\limits_{-t}^{t} BK(t,s)e^{-\lambda Bs}ds + e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t)\int\limits_{-t}^{t} K(t,s)Be^{-\lambda Bs}ds\right] dt$$

eşitliği veya

$$\int\limits_{-x}^{x} K_{-}(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = -\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t) \left[\int\limits_{-t}^{t} \frac{1}{2}\left[BK(t,s) - K(t,s)B\right] e^{-\lambda Bs}ds\right] dt$$

$$= \int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\int\limits_{-t}^{t} K_{+}(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$= \int\limits_{0}^{x} B\Omega(t)\int\limits_{-t}^{t} K_{+}(t,s)e^{-\lambda B(x-t+s)}dsdt$$

elde edilir. Son eşitlik gerekli dönüşümlerden sonra

$$\int\limits_{-x}^{x} K_{-}(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = \int\limits_{0}^{x} B\Omega(t)\int\limits_{x-2t}^{x} K_{+}(t,\zeta+t-x)e^{-\lambda B\zeta}d\zeta dt =$$

$$= \int_{-x}^{x} \left( \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t-x+\zeta) d\zeta \right) e^{-\lambda B t} dt$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$K_-(x,t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t-x+\zeta) d\zeta, \quad t < x < a$$

olur.

Şimdi $a < x$ aralığı için inceleme yapılacak olursa, $t < x < a$ durumunda yapılan işlemlere benzer şekilde $Y_0(x,\lambda)Y_0^{-1}(t,\lambda)$ fonksiyonunun ifadesi de gözönünde bulundurularak,

$$\int_{-x}^{x} K(x,t) e^{-\lambda B t} dt = \int_{0}^{x} Y_0(x,\lambda) Y_0^{-1}(t,\lambda) B\Omega(t) Y_0(t,\lambda) dt$$

$$+ \int_{0}^{x} Y_0(x,\lambda) Y_0^{-1}(t,\lambda) B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K(t,s) e^{-\lambda B s} ds dt$$

$$= \int_{0}^{a} \left[ \alpha^+ e^{-\lambda B(x-t)} + \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda B(2a-x-t)} \right] B\Omega(t) e^{-\lambda B t} dt$$

$$+ \int_{0}^{a} \left[ \alpha^+ e^{-\lambda B(x-t)} + \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda B(2a-x-t)} \right] B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K(t,s) e^{-\lambda B s} ds dt$$

$$+ \int_{a}^{x} e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \left[ \alpha^+ e^{-\lambda B t} + \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda B(2a-t)} \right] dt$$

$$+ \int_{a}^{x} e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K(t,s) e^{-\lambda B s} ds dt$$

$$= \alpha^+ \int_{0}^{a} e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) e^{-\lambda B t} dt + \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int_{0}^{a} B\Omega(t) e^{\lambda B(2a-x-t)} e^{-\lambda B t} dt$$

$$+ \alpha^+ \int_{a}^{x} B\Omega(t) e^{\lambda B(x-t)} e^{-\lambda B t} dt + \alpha^- \int_{a}^{x} B\Omega(t) e^{\lambda B(x-t)} e^{\lambda B(2a-t)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} dt$$

$$+\alpha^+\int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int_{-t}^t K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\int_0^a \alpha^-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-t)}\int_{-t}^t K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\int_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int_{-t}^t K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$=\alpha^+\int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt+\alpha^-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-2t)}dt$$

$$+\alpha^+\int_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt+\alpha^-\int_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x+2a-2t)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}dt$$

$$+\alpha^+\int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int_{-t}^t K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\alpha^-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-t)}\int_{-t}^t K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\int_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int_{-t}^t K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

eşitliği veya

$$\frac{1}{2}\int_{-x}^x\left[K(x,t)+BK(x,t)B\right]e^{-\lambda Bt}dt=\frac{\alpha^+}{2}\int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-2t)}dt+\frac{\alpha^+}{2}\int_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x+2a-2t)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}dt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int_{-t}^t K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-t)}\int\limits_{-t}^t K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int\limits_{-t}^t K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-2t)}dt+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x+2a-2t)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_0^a \Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int\limits_{-t}^t K(t,s)Be^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_0^a \Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-t)}\int\limits_{-t}^t K(t,s)Be^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_a^x \Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int\limits_{-t}^t K(t,s)Be^{-\lambda Bs}dsdt$$

elde edilir. Buradan

$$\int\limits_{-x}^x K_+(x,t)e^{-\lambda Bt}dt=\alpha^+\int\limits_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt+\alpha^+\int\limits_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$+\alpha^+\int\limits_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\left[\int\limits_{-t}^t\frac{1}{2}(K-BKB)\right]e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\alpha^-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_0^a e^{-\lambda B(2a-x-t)}B\Omega(t)\left[\frac{1}{2}\int\limits_{-t}^t K(t,s)+BK(t,s)B\right]e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\int\limits_a^x e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\left[\int\limits_{-t}^t\frac{1}{2}K(t,s)-BK(t,s)B\right]e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$=\alpha^+\int\limits_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt+\alpha^+\int\limits_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$+\alpha^{+}\int_{0}^{a} e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K_{-}(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$+\alpha^{-}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int_{0}^{a} e^{-\lambda B(2a-x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K_{+}(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$+\int_{a}^{x} e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K_{-}(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

yazılır.

Son eşitliğin sağ tarafındaki integrallerde gerekli dönüşümler yapılırsa,

$$I_1 = \int_{0}^{a} B\Omega(t) e^{\lambda B(x-2t)} dt = \frac{1}{2}\int_{-x}^{2a-x} B\Omega(\frac{t+x}{2}) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$I_2 = \int_{a}^{x} B\Omega(t) e^{\lambda B(x-2t)} dt = \frac{1}{2}\int_{2a-x}^{x} B\Omega(\frac{t+x}{2}) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$I_3 = \int_{0}^{a} e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K_{-}(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$= \int_{0}^{a} B\Omega(t) e^{\lambda B(x-t)} \int_{-t}^{t} K_{-}(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$= \int_{0}^{a} B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K_{-}(t,s) e^{\lambda B(x-t-s)} ds dt$$

$$I_3 = \int_{-x}^{2a-x} \left( \int_{\frac{t+x}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_{-}(\zeta, t+x-\zeta) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt,$$

$$I_4 = \int_{0}^{a} e^{-\lambda B(2a-x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K_{+}(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$= \int_{0}^{a} B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K_{+}(t,s) e^{-\lambda B(2a-x-t+s)} ds dt$$

$$= \int_0^a B\Omega(t) \int_{2a-x-2t}^{2a-x} K_+(t, \zeta + x + t - 2a) e^{-\lambda B\zeta} d\zeta dt$$

$$I_4 = \int_{-x}^{2a-x} \left( \int_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t + x + \zeta - 2a) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$I_5 = \int_a^x e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K_-(t, s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$= \int_a^x B\Omega(t) \int_{-t}^{t} K_-(t, s) e^{-\lambda B(t-x+s)} ds dt$$

$$= \int_a^x B\Omega(t) \int_{-x}^{2t-x} K_-(t, \zeta + x - t) e^{-\lambda B\zeta} d\zeta dt$$

$$\begin{aligned} I_5 \quad &= \int_{-x}^{2a-x} \left( \int_a^x B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t + x - \zeta) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt \\ &+ \int_{2a-x}^{x} \left( \int_{\frac{t+x}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t + x - \zeta) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt \end{aligned}$$

olur. $I_1, I_2, I_3, I_4$ ve $I_5$ in ifadeleri son eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$\int_{-x}^{x} K_+(x, t) e^{-\lambda Bt} dt = \alpha^+ I_1 + \alpha^+ I_2 + \alpha^+ I_3 + \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} I_4 + I_5$$

$$= \frac{\alpha^+}{2} \int_{-x}^{2a-x} B\Omega(\tfrac{t+x}{2}) e^{-\lambda Bt} dt + \frac{\alpha^+}{2} \int_{2a-x}^{x} B\Omega(\tfrac{t+x}{2}) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$+\alpha^+ \int_{-x}^{2a-x} \left( \int_{\frac{t+x}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t + x - \zeta) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$+\alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int_{-x}^{2a-x} \left( \int_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t + x + \zeta - 2a) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$+\int\limits_{-x}^{2a-x}\left(\int\limits_{a}^{x}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\int\limits_{2a-x}^{x}\left(\int\limits_{\frac{t+x}{2}}^{x}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$\int\limits_{-x}^{2a-x}K_+(x,t)e^{-\lambda Bt}dt+\int\limits_{2a-x}^{x}K_+(x,t)e^{-\lambda Bt}dt=$$

$$=\int\limits_{-x}^{2a-x}\frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\tfrac{t+x}{2})+\alpha^+\int\limits_{\frac{t+x}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta$$

$$+\alpha^-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_+(\zeta,t+x+\zeta-2a)d\zeta$$

$$+\int\limits_{a}^{x}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\int\limits_{2a-x}^{x}\frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\tfrac{t+x}{2})+\int\limits_{\frac{t+x}{2}}^{x}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta]\,e^{-\lambda Bt}dt$$

elde edilir.

Buradan $a<x$ ve $-x<t<2a-x$ için,

$$\begin{aligned}K_+(x,t)=&\frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\tfrac{t+x}{2})+\alpha^+\int\limits_{\frac{t+x}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta\\ &+\alpha^-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_+(\zeta,t+x+\zeta-2a)d\zeta\\ &+\int\limits_{a}^{x}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta\end{aligned}$$

olur.

$a<x$ ve $2a-x<t<x$ için,

$$K_+(x,t)=\frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\frac{t+x}{2})+\int\limits_{\frac{t+x}{2}}^{x}B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta$$

dir.

Benzer şekilde $K_-(x,t)$ elde edilecek olursa;

$$\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left[K(x,t)-BK(x,t)B\right]e^{-\lambda Bt}dt=\frac{\alpha^+}{2}\int_{0}^{a}B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int_{0}^{a}B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-2t)}dt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_{a}^{x}B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt+\frac{\alpha^-}{2}\int_{a}^{x}B\Omega(t)e^{\lambda B(x+2a-2t)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}dt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_{0}^{a}B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int_{0}^{a}B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-t)}\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{x}B\Omega(t)e^{\lambda B(x-t)}\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt-\frac{\alpha^+}{2}\int_{0}^{a}B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int_{0}^{a}B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-2t)}dt-\frac{\alpha^+}{2}\int_{a}^{x}B\Omega(t)e^{\lambda B(x-2t)}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int_{a}^{x}B\Omega(t)e^{\lambda B(x+2a-2t)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}dt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_{0}^{a}e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)Be^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int_{0}^{a}\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-t)}\int_{-t}^{t}K(t,s)Be^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{x}e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)Be^{-\lambda Bs}dsdt$$

olduğundan,

$$\int_{-x}^{x} K_-(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-2t)}dt$$

$$+\alpha^- \int_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x+2a-2t)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} dt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_0^a e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\int_0^a e^{-\lambda B(2a-x-t)}B\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^x e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_0^a e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)Be^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\int_0^a e^{-\lambda B(2a-x-t)}\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)Be^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^x e^{-\lambda B(x-t)}\Omega(t)\int_{-t}^{t} K(t,s)Be^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$= \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int_0^a B\Omega(t)e^{\lambda B(2a-x-2t)}dt$$

$$+\alpha^- \int_a^x B\Omega(t)e^{\lambda B(x+2a-2t)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} dt$$

$$+\alpha^+\int_0^a e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\left[\frac{1}{2}\int_{-t}^{t} K(t,s)+BK(t,s)B\right]e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\alpha^-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\int_0^a e^{-\lambda B(2a-x-t)}B\Omega(t)\left[\frac{1}{2}\int_{-t}^{t} K(t,s)-BK(t,s)B\right]e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$+\int_a^x e^{-\lambda B(x-t)}B\Omega(t)\left[\frac{1}{2}\int_{-t}^{t} K(t,s)+BK(t,s)B\right]e^{-\lambda Bs}dsdt$$

$$= \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int_0^a B\Omega(t) e^{\lambda B(2a-x-2t)} dt$$

$$+\alpha^- \int_a^x B\Omega(t) e^{\lambda B(x+2a-2t)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} dt$$

$$+\alpha^+ \int_0^a e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^t K_+(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$+\alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int_0^a e^{-\lambda B(2a-x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^t K_-(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$+ \int_a^x e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^t K_+(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$I_1 = \int_0^a B\Omega(t) e^{\lambda B(2a-x-2t)} dt = \frac{1}{2} \int_{x-2a}^x B\Omega(\frac{t+2a-x}{2}) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_a^x B\Omega(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda B(x+2a-2t)} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_x^{2a-x} B\Omega(\frac{x+2a-t}{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda Bt} dt \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^a e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^t K_+(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$= \int_0^a B\Omega(t) e^{\lambda B(x-t)} \int_{-t}^t K_+(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$= \int_0^a B\Omega(t) \int_{-t}^t K_+(t,s) e^{-\lambda B(x-t+s)} ds dt$$

$$I_3 = \int_{x-2a}^x \left( \int_{\frac{x-t}{2}}^a B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$I_4 = \int_0^a e^{-\lambda B(2a-x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^t K_-(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$= \int_0^a B\Omega(t) \int_{-t}^t K_-(t,s) e^{\lambda B(2a-x-t-s)} ds dt$$

$$= \int_0^a B\Omega(t) \int_{x-2a}^{x-2a+2t} K_-(t, \zeta + 2a - x - t) e^{-\lambda B\zeta} d\zeta dt$$

$$I_4 = \int_{x-2a}^{x} \left( \int_{\frac{t+2a-x}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t + 2a - x - \zeta) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$I_5 = \int_a^x e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^t K_+(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt$$

$$= \int_a^x B\Omega(t) \int_{-t}^t K_+(t,s) e^{-\lambda B(x-t+s)} ds dt$$

$$= \int_a^x B\Omega(t) \int_{x-2t}^{x} K_+(t, \zeta + t - x) e^{-\lambda B\zeta} d\zeta dt$$

$$\begin{aligned} I_5 \; &= \int_{-x}^{x-2a} \left( \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t + \zeta - x) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt \\ &+ \int_{x-2a}^{x} \left( \int_{a}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t + \zeta - x) d\zeta \right) e^{-\lambda Bt} dt \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\int_{-x}^{x} K_-(x,t) e^{-\lambda Bt} dt = \frac{\alpha^-}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int_{x-2a}^{x} B\Omega(\tfrac{t+2a-x}{2}) e^{-\lambda Bt} dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2} \int_{x}^{2a-x} B\Omega(\tfrac{x-t+2a}{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda Bt} dt$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{x-2a}^{x}\left(\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_{+}(\zeta,t+\zeta-x)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\alpha^{-}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{x-2a}^{x}\left(\int\limits_{\frac{t+2a-x}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_{-}(\zeta,t+2a-x-\zeta)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\int\limits_{-x}^{x-2a}\left(\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}B\Omega(\zeta)K_{+}(\zeta,t+\zeta-x)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\int\limits_{x-2a}^{x}\left(\int\limits_{a}^{x}B\Omega(\zeta)K_{+}(\zeta,t+\zeta-x)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

şeklinde yazılır.

Buradan,

$$\int\limits_{-x}^{x-2a}K_{-}(x,t)e^{-\lambda Bt}dt+\int\limits_{x-2a}^{2a-x}K_{-}(x,t)e^{-\lambda Bt}dt+\int\limits_{2a-x}^{x}K_{-}(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$=\frac{\alpha^{-}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{x-2a}^{2a-x}B\Omega(\tfrac{t+2a-x}{2})e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{2a-x}^{x}B\Omega(\tfrac{t-x+2a}{2})e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{2a-x}^{x}B\Omega(\tfrac{x-t+2a}{2})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{x-2a}^{2a-x}\left(\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_{+}(\zeta,t+\zeta-x)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{2a-x}^{x}\left(\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_{+}(\zeta,t+\zeta-x)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\alpha^{-}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int\limits_{x-2a}^{2a-x}\left(\int\limits_{\frac{t+2a-x}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_{-}(\zeta,t+2a-x-\zeta)d\zeta\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int\limits_{2a-x}^{x} \left( \int\limits_{\frac{t+2a-x}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t+2a-x-\zeta) d\zeta \right) e^{-\lambda B t} dt$$

$$+ \int\limits_{-x}^{x-2a} \left( \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta \right) e^{-\lambda B t} dt$$

$$+ \int\limits_{x-2a}^{2a-x} \left( \int\limits_{a}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta \right) e^{-\lambda B t} dt$$

$$+ \int\limits_{2a-x}^{x} \left( \int\limits_{a}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta \right) e^{-\lambda B t} dt$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe göre,

$a < x$, $-x < t < x - 2a$ durumunda,

$$K_-(x,t) = \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta$$

$a < x$, $x - 2a < t < 2a - x$ durumunda,

$$\begin{aligned} K_-(x,t) = {} & \frac{\alpha^-}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B\Omega(\tfrac{t-x+2a}{2}) \\ & + \alpha^+ \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta \\ & + \alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int\limits_{\frac{t+2a-x}{2}}^{a} B\Omega(\zeta) K_-(\zeta, t+2a-x-\zeta) d\zeta \\ & + \int\limits_{a}^{x} B\Omega(\zeta) K_+(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta, \end{aligned}$$

$x > a$, $2a - x < t < x$ durumunda ise,

$$K_-(x,t) = \frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B\Omega\left(\frac{t-x+2a}{2}\right)$$
$$+\frac{\alpha^-}{2}B\Omega\left(\frac{x-t+2a}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$+\alpha^+\int_{\frac{x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_+(\zeta, t+\zeta-x)d\zeta$$
$$+\alpha^-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\int_{\frac{t+2a-x}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta, t+2a-x-\zeta)d\zeta$$
$$+\int_{a}^{x} B\Omega(\zeta)K_+(\zeta, t+\zeta-x)d\zeta$$

olduğunu alınır. Böylece, her durumda, $K_+(x,t)$ ve $K_-(x,t)$ fonksiyonları için aşağıdaki integral denklemleri sistemleri elde edilmiş olunur.

I. $t < x < a$ için,

$$K_+(x,t) = \frac{1}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2}) + \int_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta, t+x-\zeta)d\zeta$$
$$K_-(x,t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_+(\zeta, t-x+\zeta)d\zeta$$

II. $a < x$ ve $-x < t < x-2a$ için,

$$K_+(x,t) = \frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2}) + \alpha^+\int_{\frac{x+t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta, t+x-\zeta)d\zeta$$
$$+\alpha^-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\int_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_+(\zeta, t-2a+x+\zeta)d\zeta$$

$$+\int_{a}^{x} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta$$

$$K_-(x,t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_+(\zeta,t-x+\zeta)d\zeta$$

III. $a < x$ , $x-2a < t < 2a-x$ için,

$$\begin{aligned}
K_+(x,t) &= \frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2}) + \alpha^+\int_{\frac{x+t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta \\
&\quad +\alpha^-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\int_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_+(\zeta,t-2a+x+\zeta)d\zeta \\
&\quad +\int_{a}^{x} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta \\
K_-(x,t) &= \frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B\Omega\left(\frac{t-x+2a}{2}\right) \\
&\quad +\alpha^+\int_{\frac{x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+\zeta-x)d\zeta \\
&\quad +\alpha^-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\int_{\frac{2a-x+t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+2a-x-\zeta)d\zeta \\
&\quad +\int_{a}^{x} B\Omega(\zeta)K_+(\zeta,t+\zeta-x)d\zeta
\end{aligned}$$

IV. $a < x$ , $2a-x < t < x$ için,

$$\begin{aligned}
K_+(x,t) &= \frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2}) + \int_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_-(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta \\
K_-(x,t) &= \frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B\Omega\left(\frac{t-x+2a}{2}\right) \\
&\quad +\frac{\alpha^-}{2}B\Omega\left(\frac{x-t+2a}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$+\alpha^{+}\int_{\frac{x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_{+}(\zeta, t+\zeta-x)d\zeta$$

$$+\alpha^{-}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\int_{\frac{2a-x+t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_{-}(\zeta, t+2a-x-\zeta)d\zeta$$

$$+\int_{a}^{x} B\Omega(\zeta)K_{+}(\zeta, t+\zeta-x)d\zeta$$

## 2.3 Çevirme Operatörünün Varlığı ve Özellikleri

Bu bölümde 2.2 alt bölümünde alınan integral denklemlerinin her bölge için çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecektir. Ayrıca çevirme operatörünün çekirdeğinin sağladığı özellikler incelenecektir. Bunun için ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanırsa;

I. $t < x < a$ için,

$$K_+^0(x,t) = \frac{1}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2}), \;\; K_-^0(x,t) = 0$$

$$\begin{cases} K_-^n(x,t) = \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_+^{n-1}(\zeta, t-x+\zeta)d\zeta \\ K_+^n(x,t) = \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_-^{n-1}(\zeta, t+x-\zeta)d\zeta \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

II. $a < x$ ve $-x < t < x - 2a$ için,

$$K_+^0(x,t) = \frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2}), \;\; K_-^0(x,t) = 0$$

$$K_-^n(x,t) = \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_+^{n-1}(\zeta, t-x+\zeta)d\zeta \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$K_+^n(x,t) = \frac{\alpha^+}{2}\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_-^{n-1}(\zeta, t+x-\zeta)d\zeta$$

$$+\alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \int\limits_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a} B\Omega(\zeta)K_+^{n-1}(\zeta, t+x+\zeta-2a)d\zeta$$

$$+\int\limits_{a}^{x} B\Omega(\zeta)K_-^{n-1}(\zeta, t+x-\zeta)d\zeta \qquad n = 1, 2, \ldots$$

III. $a < x$ ve $x - 2a < t < 2a - x$ için,

$$K_+^0(x,t)=\frac{\alpha^+}{2}B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right)\quad K_-^0(x,t)=\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}B\Omega\left(\frac{2a-x+t}{2}\right)$$

$$K_+^n(x,t)=\alpha^+\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_-^{n-1}(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta$$

$$+\alpha^-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\int\limits_{\frac{2a-x-t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_+^{n-1}(\zeta,t+x+\zeta-2a)d\zeta$$

$$+\int\limits_{a}^{x}B\Omega(\zeta)K_-^{n-1}(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta\qquad n=1,2,\dots$$

$$K_-^n(x,t)=\alpha^+\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_+^{n-1}(\zeta,t-x+\zeta)d\zeta$$

$$+\alpha^-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\int\limits_{\frac{2a-x+t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_-^{n-1}(\zeta,t-x-\zeta+2a)d\zeta$$

$$+\int\limits_{a}^{x}B\Omega(\zeta)K_+^{n-1}(\zeta,t-x+\zeta)d\zeta\qquad n=1,2,\dots$$

IV. $a<x$ ve $2a-x<t<x$ için,

$$K_+^0(x,t)=\frac{\alpha^+}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2})$$
$$K_-^0(x,t)=\frac{\alpha^-}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}B\Omega\left(\frac{2a-x+t}{2}\right)+\frac{\alpha^-}{2}B\Omega\left(\frac{2a+x-t}{2}\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$K_+^n(x,t)=\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x}B\Omega(\zeta)K_-^{n-1}(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta\qquad n=1,2,\dots$$

$$K_-^n(x,t)=\alpha^+\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_+^{n-1}(\zeta,t-x+\zeta)d\zeta$$

$$+\alpha^-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\int\limits_{\frac{2a-x+t}{2}}^{a}B\Omega(\zeta)K_-^{n-1}(\zeta,t-x-\zeta+2a)d\zeta$$

$$+\int_a^x B\Omega(\zeta)K_+^{n-1}(\zeta,t-x+\zeta)d\zeta \quad n=1,2,\ldots$$

elde edilir.

Şimdi ise $t<x<a$ için yukarıda elde edilen ardışık yaklaşımlara göre alınan integral denklemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecek olursa;

$$K_+^0(x,t)=\frac{\alpha^+}{2}B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right),$$

$$\int_{-x}^x \left|\left|K_+^0(x,t)\right|\right| dt=\int_{-x}^x \left|\left|\frac{1}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2})\right|\right| dt=\frac{1}{2}\int_{-x}^x ||B|| \left|\left|\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|\right| dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-x}^x \left|\left|\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|\right| dt$$

$$\int_{-x}^x \left|\left|K_+^0(x,t)\right|\right| dt=\int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \, d\zeta=\sigma(x) \text{ olur.}$$

$n=1$ için,

$$\int_{-x}^x \left|\left|K_-^1(x,t)\right|\right| dt=\int_{-x}^x \left|\left|\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^x B\Omega(\zeta)B\Omega\left(\frac{2\zeta+t-x}{2}\right)d\zeta\right|\right| dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{-x}^x \left(\int_{\frac{x-t}{2}}^x ||\Omega(\zeta)|| \left|\left|\Omega\left(\frac{2\zeta+t-x}{2}\right)\right|\right| d\zeta\right) dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x \left(\int_{x-2\zeta}^x ||\Omega(\zeta)|| \left|\left|\Omega\left(\frac{2\zeta+t-x}{2}\right)\right|\right| dt\right) d\zeta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \left(\int_{x-2\zeta}^x \left|\left|\Omega\left(\frac{2\zeta+t-x}{2}\right)\right|\right| dt\right) d\zeta$$

olur. Buradan

$$\int_{-x}^x \left|\left|K_-^1(x,t)\right|\right| dt \leq \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \left(\int_0^\zeta ||\Omega(s)|| \, ds\right) d\zeta=\int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \, \sigma(\zeta)d\zeta$$

$$= \int\limits_0^x \sigma(\zeta) d(\sigma(\zeta)) = \left.\frac{\sigma^2(\zeta)}{2}\right|_0^x = \frac{\sigma^2(x)}{2}$$

elde edilir.

$n = 2$ için,

$$K_+^2(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) \int\limits_{\frac{2\zeta - t - x}{2}}^{\zeta} B\Omega(s) B\Omega\left(\frac{2s - 2\zeta + t + x}{2}\right) ds d\zeta$$

olduğundan

$$\int\limits_{-x}^{x} \left|\left|K_+^2(x,t)\right|\right| dt = \int\limits_{-x}^{x} \left|\left| \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) \int\limits_{\frac{2\zeta - t - x}{2}}^{\zeta} B\Omega(s) B\Omega\left(\frac{2s - 2\zeta + t + x}{2}\right) ds d\zeta \right|\right| dt$$

$$\leq \frac{1}{2} \int\limits_{-x}^{x} \left( \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} ||\Omega(\zeta)|| \left( \int\limits_{\frac{2\zeta - t - x}{2}}^{\zeta} ||\Omega(s)|| \left|\left|\Omega\left(\frac{2s - 2\zeta + t + x}{2}\right)\right|\right| ds \right) d\zeta \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{x} \left( \int\limits_{-x}^{2\zeta - x} ||\Omega(\zeta)|| \left( \int\limits_{\frac{2\zeta - t - x}{2}}^{\zeta} ||\Omega(s)|| \left|\left|\Omega\left(\frac{2s - 2\zeta + t + x}{2}\right)\right|\right| ds \right) dt \right) d\zeta$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{x} ||\Omega(\zeta)|| \left( \int\limits_{-x}^{2\zeta - x} \left( \int\limits_{\frac{2\zeta - t - x}{2}}^{\zeta} ||\Omega(s)|| \left|\left|\Omega\left(\frac{2s - 2\zeta + t + x}{2}\right)\right|\right| ds \right) dt \right) d\zeta$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{x} ||\Omega(\zeta)|| \int\limits_{0}^{\zeta} \left( \int\limits_{2\zeta - 2s - x}^{2\zeta - x} ||\Omega(s)|| \left|\left|\Omega\left(\frac{2s - 2\zeta + t + x}{2}\right)\right|\right| dt \right) ds d\zeta$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{x} ||\Omega(\zeta)|| \int\limits_{0}^{\zeta} ||\Omega(s)|| \int\limits_{2\zeta - 2s - x}^{2\zeta - x} \left|\left|\Omega\left(\frac{2s - 2\zeta + t + x}{2}\right)\right|\right| dt ds d\zeta$$

olur. Buradan,

$$\int\limits_{-x}^{x} \left|\left|K_+^2(x,t)\right|\right| dt \leq \int\limits_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int\limits_0^{\zeta} ||\Omega(s)|| \int\limits_0^{s} ||\Omega(u)|| du ds d\zeta$$

$$= \int\limits_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int\limits_0^{\zeta} ||\Omega(s)|| \sigma(s) ds d\zeta = \int\limits_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int\limits_0^{\zeta} \sigma(s) d(\sigma(s)) d\zeta$$

$$= \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \frac{\sigma^2(\zeta)}{2} d\zeta = \int_0^x \frac{\sigma^2(\zeta)}{2} d(\sigma(\zeta)) = \frac{\sigma^3(x)}{3!}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $n = k$ için de tümevarım yöntemiyle

$$\int_{-x}^{x} \left|\left|K_+^{2k}(x,t)\right|\right| dt \leq \frac{\sigma^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!} \text{ ve } \int_{-x}^{x} \left|\left|K_-^{2k+1}(x,t)\right|\right| dt \leq \frac{\sigma^{(2k+2)}(x)}{(2k+2)!}$$

eşitliklerin doğruluğu elde edilir. Gerçekten de,

$$K_+^{2k+2}(x,t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) K_-^{2k+1}(\zeta, t+x-\zeta) d\zeta$$

$$\int_{-x}^{x} \left|\left|K_+^{2k+2}(x,t)\right|\right| dt \leq \int_{-x}^{x} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} ||\Omega(\zeta)|| \left|\left|K_-^{2k+1}(\zeta, t+x-\zeta)\right|\right| d\zeta dt$$

$$= \int_0^x \int_{-x}^{2\zeta - x} ||\Omega(\zeta)|| \left|\left|K_-^{2k+1}(\zeta, t+x-\zeta)\right|\right| dt d\zeta$$

$$= \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int_{-x}^{2\zeta - x} \left|\left|K_-^{2k+1}(\zeta, t+x-\zeta)\right|\right| dt d\zeta$$

olur. Böylece,

$$\int_{-x}^{x} \left|\left|K_+^{2k+2}(x,t)\right|\right| dt \leq \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int_{-\zeta}^{\zeta} \left|\left|K_-^{2k+1}(\zeta, u)\right|\right| du d\zeta$$

$$\leq \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \frac{\sigma^{(2k+2)}(\zeta)}{(2k+2)!} d\zeta = \frac{1}{(2k+2)!} \int_0^x \sigma^{(2k+2)}(\zeta) d\sigma(\zeta) = \frac{\sigma^{(2k+3)}(x)}{(2k+3)!}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$K_+^{2k+3}(x,t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta) K_+^{2k+2}(\zeta, t+\zeta-x) d\zeta$$

$$\int_{-x}^{x} \left|\left|K_+^{2k+3}(x,t)\right|\right| dt \leq \int_{-x}^{x} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} ||\Omega(\zeta)|| \left|\left|K_+^{2k+2}(\zeta, t-x+\zeta)\right|\right| d\zeta dt$$

$$= \int_0^x \int_{x-2\zeta}^x ||\Omega(\zeta)|| \left|\left|K_+^{2k+2}(\zeta, t-x+\zeta)\right|\right| dt d\zeta$$

$$= \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int_{x-2\zeta}^x \left|\left|K_+^{2k+2}(\zeta, t-x+\zeta)\right|\right| dt d\zeta$$

$$= \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int_{x-2\zeta}^x \left|\left| \int_{\frac{2\zeta-x+t}{2}}^{\zeta} B\Omega(s) K_-^{2k+1}(s, 2\zeta+t-x-s) ds \right|\right| dt d\zeta$$

$$\leq \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int_{x-2\zeta}^x \int_{\frac{2\zeta-x+t}{2}}^{\zeta} ||\Omega(s)|| \left|\left|K_-^{2k+1}(s, 2\zeta+t-x-s)\right|\right| ds dt d\zeta$$

$$= \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int_0^{\zeta} \int_{x-2\zeta}^{2s+x--2\zeta} ||\Omega(s)|| \left|\left|K_-^{2k+1}(s, 2\zeta+t-x-s)\right|\right| dt ds d\zeta$$

veya

$$\int_{-x}^x \left|\left|K_+^{2k+3}(x,t)\right|\right| dt \leq \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int_0^{\zeta} ||\Omega(s)|| \int_{-s}^{s} \left|\left|K_-^{2k+1}(s,u)\right|\right| du ds d\zeta$$

$$\leq \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int_0^{\zeta} ||\Omega(s)|| \frac{\sigma^{(2k+2)}(s)}{(2k+2)!} ds d\zeta = \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \int_0^{\zeta} \frac{\sigma^{(2k+2)}(s)}{(2k+2)!} d\sigma(s) d\zeta$$

$$= \int_0^x ||\Omega(\zeta)|| \frac{\sigma^{(2k+3)}(\zeta)}{(2k+3)!} d\zeta = \frac{1}{(2k+3)!} \int_0^x \sigma^{(2k+3)}(\zeta) d\sigma(\zeta) = \frac{1}{(2k+4)!} \sigma^{(2k+4)}(x)$$

olur.

O halde

$$\int_{-x}^x \left|\left|K_+^{2k}(x,t)\right|\right| dt \leq \frac{\sigma^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!}$$

$$\int_{-x}^x \left|\left|K_-^{2k+1}(x,t)\right|\right| dt \leq \frac{\sigma^{(2k+2)}(x)}{(2k+2)!}$$

eşitliklerinden $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-x}^x \left|\left|K_\pm^n(x,t)\right|\right| dt$ serisinin $[0, \pi]$ aralığında $x$'e göre düzgün yakınsak olduğu söylenir.

$K(x,t)=K_+(x,t)+K_-(x,t)$ olduğundan $K^n(x,t)=K_+^n(x,t)+K_-^n(x,t)$ dir.

$$K^n(x,t)=\int_{\frac{x+t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_-^{n-1}(\zeta,t+x-\zeta)d\zeta+\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} B\Omega(\zeta)K_+^{n-1}(\zeta,t-x+\zeta)d\zeta$$

$$K^0(x,t)=K_+^0(x,t)+K_-^0(x,t)=\frac{1}{2}B\Omega(\frac{x+t}{2})=K_+^0(x,t)$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{n}\int\limits_{-x}^{x}||K^m(x,t)||\,dt\leq e^{\sigma(x)}-1$ olur.

$\Omega(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda $Y(x,\lambda)$ fonksiyonunun (2.2.3) ifadesi $By'+\Omega(x)y=\lambda y$ denkleminde yerine yazılırsa,

$Y(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)+\int\limits_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$ olduğundan,

$$B\frac{d}{dx}\left(Y_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt\right)+\Omega(x)\left(Y_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt\right)$$

$$=\lambda\left(Y_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt\right)$$

veya

$$BY_0'(x,\lambda)+B\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt+\Omega(x)Y_0(x,\lambda)$$

$$+\Omega(x)\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt=\lambda Y_0(x,\lambda)+\lambda\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

yazılır.

$BY_0'(x,\lambda)=\lambda Y_0(x,\lambda)$ olduğundan,

$$B\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt+\Omega(x)Y_0(x,\lambda)+\Omega(x)\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt=\lambda\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

elde edilir.

$t<x<a$ için,

$$B\frac{d}{dx}\left(\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt\right)+\Omega(x)e^{-\lambda Bx}+\Omega(x)\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt=\lambda\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

olur. Buradan,

$$B\left[K(x,x-0)e^{-\lambda Bx}-K(x,-x+0)e^{\lambda Bx}+\int\limits_{-x}^{x}\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}e^{-\lambda Bt}dt\right]$$

$$+\Omega(x)e^{-\lambda Bx}+\Omega(x)\int\limits_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt=\lambda\int\limits_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

yazılır. Böylece,

$$\left[BK(x,x-0)+\Omega(x)\right]e^{-\lambda Bx}-BK(x,-x+0)e^{\lambda Bx}$$

$$+\int\limits_{-x}^{x}\left[B\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}+\Omega(x)K(x,t)\right]e^{-\lambda Bt}dt=\lambda\int\limits_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

olur.

Son eşitliğin sağ tarafındaki integral için bir kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\lambda\int\limits_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt=K(x,x-0)Be^{-\lambda Bx}-K(x,-x+0)Be^{\lambda Bx}$$

$$-\int\limits_{-x}^{x}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}Be^{-\lambda Bt}dt$$

elde edilir. O halde

$$\left[BK(x,x-0)+\Omega(x)\right]e^{-\lambda Bx}-BK(x,-x+0)e^{\lambda Bx}$$

$$+\int\limits_{-x}^{x}\left[B\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}+\Omega(x)K(x,t)\right]e^{-\lambda Bt}dt=K(x,x-0)Be^{-\lambda Bx}$$

$$-K(x,-x+0)Be^{\lambda Bx}-\int\limits_{-x}^{x}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}Be^{-\lambda Bt}dt$$

olur. Bu son eşitlikten,

1) $BK(x,x-0)+\Omega(x)=K(x,x-0)B$

2) $BK(x,-x+0)=K(x,-x+0)B$

3) $B\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}+\Omega(x)K(x,t)=-\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial t}B$

elde edilir.

$a < x$ için,

$$B\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{-x}^{x-2a} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt + \int\limits_{x-2a}^{2a-x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt + \int\limits_{2a-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt\right)$$

$$+\Omega(x)\left[\alpha^{+}e^{-\lambda Bx} + \alpha^{-}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda B(2a-x)}\right] + \Omega(x)\int\limits_{-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$= \lambda\left(\int\limits_{-x}^{x-2a} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt + \int\limits_{x-2a}^{2a-x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt + \int\limits_{2a-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt\right)$$

olur. Böylece,

$$B\left[K(x,x-2a-0)e^{-\lambda B(x-2a)} - K(x,-x+0)e^{\lambda Bx}\right.$$

$$+\int\limits_{-x}^{x-2a} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}e^{-\lambda Bt}dt + K(x,2a-x-0)e^{-\lambda B(2a-x)}$$

$$-K(x,x-2a+0)e^{-\lambda B(x-2a)} + \int\limits_{x-2a}^{2a-x} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}e^{-\lambda Bt}dt$$

$$\left.+K(x,x-0)e^{-\lambda Bx} - K(x,2a-x+0)e^{-\lambda B(2a-x)} + \int\limits_{2a-x}^{x} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}e^{-\lambda Bt}dt\right]$$

$$+\alpha^{+}\Omega(x)e^{-\lambda Bx} + \alpha^{-}\Omega(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\lambda B(2a-x)} + \Omega(x)\int\limits_{-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$= \lambda\left(\int\limits_{-x}^{x-2a} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt + \int\limits_{x-2a}^{2a-x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt + \int\limits_{2a-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt\right)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan,

$$\lambda\int\limits_{-x}^{x-2a} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = K(x,x-2a-0)Be^{-\lambda B(x-2a)}$$

$$-K(x,-x+0)Be^{\lambda Bx} - \int\limits_{-x}^{x-2a} \frac{\partial K(x,t)}{\partial t}Be^{-\lambda Bt}dt$$

$$\lambda \int_{x-2a}^{2a-x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = K(x,t)Be^{-\lambda Bt}\Big|_{x-2a}^{2a-x} - \int_{x-2a}^{2a-x} \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} Be^{-\lambda Bt}dt$$

$$= K(x, 2a - x - 0)Be^{-\lambda B(2a-x)} - K(x, x - 2a + 0)Be^{-\lambda B(x-2a)}$$

$$- \int_{x-2a}^{2a-x} \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} Be^{-\lambda Bt}dt$$

$$\lambda \int_{2a-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt = K(x, x - 0)Be^{-\lambda Bx} - K(x, 2a - x + 0)Be^{-\lambda B(2a-x)}$$

$$- \int_{2a-x}^{x} \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} Be^{-\lambda Bt}dt$$

olarak bulunur. Böylece,

$$[BK(x, x - 2a - 0) - BK(x, x - 2a + 0)]\, e^{-\lambda B(x-2a)}$$

$$+ \left[ BK(x, 2a - x - 0) - BK(x, 2a - x + 0) + \alpha^{-}\Omega(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] e^{-\lambda B(2a-x)}$$

$$-BK(x, -x + 0)e^{\lambda Bx} + [BK(x, x - 0) + \alpha^{+}\Omega(x)]\, e^{-\lambda Bx} + \int_{-x}^{x} B \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} e^{-\lambda Bt}dt$$

$$+\Omega(x) \int_{-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

$$= [K(x, x - 2a - 0)B - K(x, x - 2a + 0)B]\, e^{-\lambda B(x-2a)}$$

$$+ [K(x, 2a - x - 0)B - K(x, 2a - x + 0)B]\, e^{-\lambda B(2a-x)}$$

$$-K(x, -x + 0)Be^{\lambda Bx} + K(x, x - 0)Be^{-\lambda Bx} - \int_{-x}^{x} \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} Be^{-\lambda Bt}dt$$

olur. Bu son eşitlikten,

1) $B\,[K(x, x - 2a - 0) - K(x, x - 2a + 0)]$

   $= [K(x, x - 2a - 0) - K(x, x - 2a + 0)]\, B$

2) $B\,[K(x, 2a - x - 0) - K(x, 2a - x + 0)] + \alpha^{-}\Omega(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= [K(x,2a-x-0) - K(x,2a-x+0)]\, B$

3) $BK(x,-x+0) = K(x,-x+0)B$

4) $BK(x,x-0) + \alpha^{+}\Omega(x) = K(x,x-0)B$

5) $B\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x} + \Omega(x)K(x,t) = -\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial t}B$

elde edilir.

O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 2.3.1:** $\int\limits_0^{\pi} ||\Omega(x)||\, dx < +\infty$ olsun. (2.1.1) denkleminin $Y(0,\lambda) = I$ başlangıç değer koşulunu sağlayan $Y(x,\lambda)$ çözümü,

$$Y(x,\lambda) = Y_0(x,\lambda) + \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

şeklinde gösterilebilir, öyleki $||K(x,t)||$ öklid normu, $\sigma(x) = \int\limits_0^{x} ||\Omega(t)||\, dt$ olmak üzere

$$\int\limits_{-x}^{x} ||K(x,t)||\, dt \le e^{\sigma(x)} - 1$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca $\Omega(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ise $K(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $B\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x} + \Omega(x)K(x,t) = -\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial t}B$

2) $BK(x,-x+0) = K(x,-x+0)B$

3) $BK(x,x-0) + \Omega(x) = K(x,x-0)B, \qquad t < x < a$

4) $BK(x,x-0) + \alpha^{+}\Omega(x) = K(x,x-0)B, \qquad a < x$

5) $B\,[K(x,x-2a-0) - K(x,x-2a+0)]$

$= [K(x,x-2a-0) - K(x,x-2a+0)]\, B, \qquad a < x$

6) $B\,[K(x,2a-x-0) - K(x,2a-x+0)] + \alpha^{-}\Omega(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \left[K(x, 2a - x - 0) - K(x, 2a - x + 0)\right] B, \qquad a < x$$

Diğer taraftan $p(x) \in L_2(0,\pi)$ ve $q(x) \in L_2(0,\pi)$ olduğundan $K(x,t) = (K_{ij}(x,t))_{i,j=1}^2$ matris fonksiyonunun elemanları; her bir fiks edilmiş $x \in [0,\pi]$ için $t$ değişkenine göre $L_2(0,\pi)$ uzayına aittir.

## III. BÖLÜM

### 3.1. Karakteristik Fonksiyon ve Özellikleri

Bu bölümde $L$ self-adjoint operatörünün spektrumunun özellikleri öğrenilecektir.

$\Omega(x) \equiv 0$ olduğu durumda $L$ problemi $L_0$ olarak gösterilsin.

İlk olarak,

$$\begin{cases} y_2' = \lambda y_1 \\ -y_1' = \lambda y_2 \end{cases}$$

denklem sisteminin

$y_1(0) = 1$, $y_2(0) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü yazılırsa;

$$\begin{cases} y_1(x,\lambda) = -h\sin\lambda x + \cos\lambda x \\ y_2(x,\lambda) = h\cos\lambda x + \sin\lambda x \end{cases}$$

olur.

$\varphi_{01}(0) = 1$, $\varphi_{02}(0) = h$ başlangıç koşullarını ve $\varphi_0(a-0) = A\varphi_0(a+0)$ süreksizlik koşulunu sağlayan $\varphi_0(x,\lambda)$ fonksiyonunu elde etmek için;

önce $x < a$ olduğunda,

$$\begin{pmatrix} -h\sin\lambda x + \cos\lambda x \\ h\cos\lambda x + \sin\lambda x \end{pmatrix} = \varphi_0(x,\lambda) = \frac{1}{2i}\left[f_0(x,\lambda) - \overline{f_0(x,\lambda)}\right]$$

olacak şekilde $f_0(x,\lambda)$ aranır. Bu fonksiyon

$$f_0(0,\lambda) = \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix}, f(a-0,\lambda) = Af(a+0,\lambda)$$

koşullarını sağlamaktadır.

$$f_0(x,\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, & x < a \\ c_1 \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + c_2 \begin{pmatrix} -h-i \\ 1-ih \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}, & a < x \end{cases}$$

olduğundan,

$f(a-0,\lambda)=Af(a+0,\lambda)$ süreksizlik koşuluna göre,

$$\begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} e^{i\lambda a} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \left[ c_1 \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} e^{i\lambda a} + c_2 \begin{pmatrix} -h-i \\ 1-ih \end{pmatrix} e^{-i\lambda a} \right]$$

$$(-h+i)e^{i\lambda a} = \alpha c_1(-h+i)e^{i\lambda a} + \alpha c_2(-h-i)e^{-i\lambda a}$$

$$(1+ih)e^{i\lambda a} = \alpha^{-1}c_1(1+ih)e^{i\lambda a} + \alpha^{-1}c_2(1-ih)e^{-i\lambda a}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}+\alpha),\ c_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}-\alpha)\frac{-1-ih}{1-ih}e^{2\lambda ai}$$

bulunur. Bu durumda,

$$f_0(x,\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, & x<a \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}+\alpha) \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} e^{i\lambda x} & \\ +\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}-\alpha)\frac{-1-ih}{1-ih}e^{2\lambda ai} \begin{pmatrix} -h-i \\ 1-ih \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}, & x>a \end{cases}$$

veya

$$f_0(x,\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, & x<a \\ \alpha^{+} \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \alpha^{-} \begin{pmatrix} i-h \\ -1-ih \end{pmatrix} e^{i\lambda(2a-x)}, & a<x \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

$$\varphi_0(x,\lambda) = \frac{1}{2i}\left[f_0(x,\lambda) - \overline{f_0(x,\lambda)}\right]$$

olduğundan,

$$\varphi_0(x,\lambda)=\begin{cases}\begin{pmatrix}-h\sin\lambda x+\cos\lambda x\\ h\cos\lambda x+\sin\lambda x\end{pmatrix}, & x<a\\ \alpha^+\begin{pmatrix}-h\sin\lambda x+\cos\lambda x\\ h\cos\lambda x+\sin\lambda x\end{pmatrix} & \\ +\alpha^-\begin{pmatrix}\cos\lambda(2a-x)-h\sin\lambda(2a-x)\\ h\cos\lambda(2a-x)+\sin\lambda(2a-x)\end{pmatrix}, & a<x\end{cases}$$

olur. Böylece,

$By'=\lambda y$ denkleminin $\varphi_0(0,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\ h\end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını ve

$\varphi_0(a-0)=A\varphi_0(a+0),\ A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}$ süreksizlik koşullarını sağlayan

$\varphi_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_{01}(x,\lambda)\\ \varphi_{02}(x,\lambda)\end{pmatrix}$ çözümü,

$$\varphi_0(x,\lambda)=\begin{cases}\begin{pmatrix}-h\sin\lambda x+\cos\lambda x\\ h\cos\lambda x+\sin\lambda x\end{pmatrix}, & 0<x<a\\ \alpha^+\begin{pmatrix}-h\sin\lambda x+\cos\lambda x\\ h\cos\lambda x+\sin\lambda x\end{pmatrix} & \\ +\alpha^-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\lambda(2a-x)-h\sin\lambda(2a-x)\\ h\cos\lambda(2a-x)+\sin\lambda(2a-x)\end{pmatrix}, & a<x<\pi\end{cases}$$

şeklinde gösterime sahiptir.

$\Delta_0(\lambda)$ ile $L_0$ probleminin karakteristik fonksiyonu gösterilecek olursa;

$\Delta_0(\lambda)=y_2(\pi,\lambda)+Hy_1(\pi,\lambda)=0$ olduğundan

$$\Delta_0(\lambda)=\alpha^+\left[h\cos\lambda\pi+\sin\lambda\pi\right)+\alpha^-(-h\cos\lambda(2a-\pi)-\sin\lambda(2a-\pi)]$$
$$+H\left[\alpha^+(\cos\lambda\pi-h\sin\lambda\pi)+\alpha^-(\cos\lambda(2a-\pi)-h\sin\lambda(2a-\pi))\right]=0$$

olduğu açıktır.

Bu denklemin kökleri $L_0$ probleminin özdeğerleridir. Burada $n > 0$ ise $\lambda_n^0 > 0$, $n = 0$ için $\lambda_0^0 = 0$ ve $n < 0$ ise $\lambda_n^0 < 0$ olarak kabul edilirse; $n = 1, 2, \ldots$için $\lambda_{-n}^0 = -\lambda_n^0$ olduğu açıktır.

Aşağıdaki lemma doğrudur.

**Lemma 3.1.1:** $\inf\limits_{n\neq m} \left|\lambda_n^0 - \lambda_m^0\right| = \beta > 0$ yani $\Delta_0(\lambda) = 0$ karakteristik denkleminin kökleri ayrıktır.

**İspat:** Tersi kabul edilecek olursa, yani $\left\{\lambda_n^0\right\}$ dizisinin $\left\{\lambda_{n_k}^0\right\}$ ve $\left\{\hat{\lambda}_{n_k}^0\right\}$ alt dizileri vardır, öyleki $\lambda_{n_k}^0 \neq \hat{\lambda}_{n_k}^0$ ve $k \to \infty$ iken $\lambda_{n_k}^0, \hat{\lambda}_{n_k}^0 \to \infty$ ve ayrıca

$$\lim_{k\to\infty} \left|\lambda_{n_k}^0 - \hat{\lambda}_{n_k}^0\right| = 0$$

dır. $L_2(0, \pi; R^2)$ uzayında $L_0$ probleminin $\varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)$ ve $\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0)$ özfonksiyonlarının ortogonallik koşulundan yararlanılırsa;

$$0 = \int_0^\pi \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\overline{\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0)}dx = \int_0^\pi \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\overline{\varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)}dx$$

$$+\int_0^\pi \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\left[\overline{\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)}\right] dx$$

veya

$$0 = \int_0^a \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\overline{\varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)}dx + \int_a^\pi \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\overline{\varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)}dx$$

$$+\int_0^\pi \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\left[\overline{\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)}\right] dx$$

$$\geq \int_0^a \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\overline{\varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)}dx + \int_0^\pi \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\left[\overline{\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)}\right] dx$$

$$= \int_0^a \begin{pmatrix} -h\sin\lambda_{n_k}^0 x + \cos\lambda_{n_k}^0 x & h\cos\lambda_{n_k}^0 x + \sin\lambda_{n_k}^0 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\sin\lambda_{n_k}^0 x + \cos\lambda_{n_k}^0 x \\ h\cos\lambda_{n_k}^0 x + \sin\lambda_{n_k}^0 x \end{pmatrix} dx$$

$$+\int_0^\pi \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)\left[\overline{\varphi_0(x, \hat{\lambda}_{n_k}^0) - \varphi_0(x, \lambda_{n_k}^0)}\right] dx$$

$$= \int\limits_0^a (h^2+1)dx + \int\limits_0^\pi \varphi_0(x,\lambda^0_{n_k}) \left[\overline{\varphi_0(x,\hat{\lambda}^0_{n_k}) - \varphi_0(x,\lambda^0_{n_k})}\right] dx$$

$$= (h^2+1)a + \int\limits_0^\pi \varphi_0(x,\lambda^0_{n_k}) \left[\overline{\varphi_0(x,\hat{\lambda}^0_{n_k}) - \varphi_0(x,\lambda^0_{n_k})}\right] dx$$

olur. Burada $< \cdot, \cdot >$ sembolü $R^2$ öklid uzayındaki iç çarpımı gösterir. Böylece

$$0 \geq (h^2+1)a + \int\limits_0^\pi < \varphi_0(x,\lambda^0_{n_k}), \left[\overline{\varphi_0(x,\hat{\lambda}^0_{n_k}) - \varphi_0(x,\lambda^0_{n_k})}\right] > dx \qquad (3.1.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\varphi_0(x,\lambda)$ çözümünün ifadesinden görüldüğü gibi her $x \in [0,\pi]$ için $x$'e göre düzgün olarak

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left|\varphi_0(x,\hat{\lambda}^0_{n_k}) - \varphi_0(x,\lambda^0_{n_k})\right|\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|\left| \begin{array}{c} -h\sin\hat{\lambda}^0_{n_k}x + \cos\hat{\lambda}^0_{n_k}x + h\sin\lambda^0_{n_k}x - \cos\lambda^0_{n_k}x \\ h\cos\lambda^0_{n_k}x + \sin\hat{\lambda}^0_{n_k}x - h\cos\lambda^0_{n_k}x - \sin\lambda^0_{n_k}x \end{array} \right|\right|_{R^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{(h^2+1)(\sin\hat{\lambda}^0_{n_k}x - \sin\lambda^0_{n_k}x)^2 + (h^2+1)(\cos\hat{\lambda}^0_{n_k}x - \cos\lambda^0_{n_k}x)^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{2(h^2+1)(1-\cos(\hat{\lambda}^0_{n_k} - \lambda^0_{n_k})x)} = \lim_{k\to\infty} 2\sqrt{h^2+1}\sin\frac{(\hat{\lambda}^0_{n_k} - \lambda^0_{n_k})}{2}x = 0$$

olur. Burada $||\cdot||_{R^2} = \sqrt{< \cdot, \cdot >}$ dir.

Bu nedenle (3.1.1) eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limite geçilirse $0 > (h^2+1)a$ olduğu elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki Lemma 3.1.1 'in doğru olduğunu gösterir.

$\Delta(\lambda)$, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ 'ler sırasıyla $L$ probleminin karakteristik fonksiyonunu, özdeğer dizisini ve normalleştirici sayılar dizisini göstersin.

$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonu ile (2.1.1) denkleminin $\varphi(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını ve (2.1.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin.

$$Y_0(x,\lambda) \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} = e^{-\lambda Bx} \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ I - \lambda x B + \lambda^2 x^2 B^2 - \lambda^3 x^3 B^3 + \ldots \right\} \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ I - \lambda x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda^2 x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + +\lambda^3 x^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \ldots \right\} \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} - \lambda x \begin{pmatrix} 1+ih \\ h-i \end{pmatrix} - \lambda^2 x^2 \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} + \lambda^3 x^3 \begin{pmatrix} 1+ih \\ h-i \end{pmatrix} + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} -h+i-\lambda x - \lambda x i h + \lambda^2 x^2 h - \lambda^2 x^2 i + \lambda^3 x^3 + \lambda^3 x^3 i h + \ldots \\ 1+ih-\lambda x h + \lambda x i - \lambda^2 x^2 - \lambda^2 x^2 i h + \lambda^3 x^3 h - \lambda^3 x^3 i + \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -h(1-\lambda^2 x^2 + \ldots) + i(1-\lambda^2 x^2 + \ldots) - (\lambda x - \lambda^3 x^3 + \ldots) - ih(\lambda x - \lambda^3 x^3 + \ldots) \\ (1-\lambda^2 x^2 + \ldots) + ih(1-\lambda^2 x^2 + \ldots) - h(\lambda x - \lambda^3 x^3 + \ldots) + i(\lambda x - \lambda^3 x^3 + \ldots) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -h\cos\lambda x + i\cos\lambda x - \sin\lambda x - ih\sin\lambda x \\ \cos\lambda x + ih\cos\lambda x - h\sin\lambda x + i\sin\lambda x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} (\cos\lambda x + i\sin\lambda x) = f_0(x,\lambda)$$

olduğu görülür. Böylece

$$f_0(x,\lambda) = Y_0(x,\lambda) \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix}, \; F(x,\lambda) = Y(x,\lambda) \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix}$$

vektör çözümleri yardımı ile,

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) = \frac{F(x,\lambda) - \overline{F(x,\lambda)}}{2i} &= \frac{1}{2i} \left[ Y(x,\lambda) \begin{pmatrix} -h+i \\ 1+ih \end{pmatrix} - Y(x,\lambda) \begin{pmatrix} -h-i \\ 1-ih \end{pmatrix} \right] \\ &= Y(x,\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\varphi_0(x,\lambda)=\frac{f_0(x,\lambda)-\overline{f_0(x,\lambda)}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h+i\\1+ih\end{pmatrix}-Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h-i\\1-ih\end{pmatrix}\right]$$
$$=Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}1\\h\end{pmatrix}$$

yazılabilir.

$$Y(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$ gösteriminden yararlanılırsa,

$$Y(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h+i\\1+ih\end{pmatrix}=Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h+i\\1+ih\end{pmatrix}+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}\begin{pmatrix}-h+i\\1+ih\end{pmatrix}dt$$

$$Y(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h-i\\1-ih\end{pmatrix}=Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h-i\\1-ih\end{pmatrix}+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}\begin{pmatrix}-h-i\\1-ih\end{pmatrix}dt$$

elde edilir. Daha sonra elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\frac{1}{2i}\left\{Y(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h+i\\1+ih\end{pmatrix}-Y(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h-i\\1-ih\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h+i\\1+ih\end{pmatrix}-Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h-i\\1-ih\end{pmatrix}\right\}$$

$$+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}\begin{pmatrix}-h+i+h+i\\1+ih-1+ih\end{pmatrix}\frac{1}{2i}dt$$

olur. Buradan,

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}\begin{pmatrix}1\\h\end{pmatrix}dt$$

elde edilir.

$$e^{-\lambda Bt}\begin{pmatrix}1\\h\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\lambda t\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\lambda^2t^2\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.-\lambda^3t^3\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+\ldots\right]\begin{pmatrix}1\\h\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix} - \lambda t \begin{pmatrix} h \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda^2 t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -h \end{pmatrix} - \lambda^3 t^3 \begin{pmatrix} -h \\ 1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda t - \lambda t h - \lambda^2 t^2 + \lambda^3 t^3 h + \dots \\ -\lambda t h + \lambda t - \lambda^2 t^2 h - \lambda^3 t^3 + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda t h - \lambda^2 t^2 + \lambda^3 t^3 h + \dots \\ h + \lambda t - \lambda^2 t^2 h - \lambda^3 t^3 + \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(1 - \lambda^2 t^2 + \dots\right) - h(\lambda t - \lambda^3 t^3 + \dots) \\ h\left(1 - \lambda^2 t^2 + \dots\right) + (\lambda t - \lambda^3 t^3 + \dots) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda t - h\sin\lambda t \\ h\cos\lambda t + \sin\lambda t \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_{-x}^{x} K(x,t) e^{-\lambda B t} \begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix} dt$$

$$= \varphi_0(x,\lambda) + \int_{-x}^{x} K(x,t) \begin{pmatrix} \cos\lambda t - h\sin\lambda t \\ h\cos\lambda t + \sin\lambda t \end{pmatrix} dt$$

olur.

$\varphi(x,\lambda)$ matris çözümünün $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ bileşeni için

$$\varphi_1(x,\lambda) = \varphi_{01}(x,\lambda)$$
$$+ \int_{-x}^{x} \left\{K_{11}(x,t)\left[\cos\lambda t - h\sin\lambda t\right] + K_{12}(x,t)\left[h\cos\lambda t + \sin\lambda t\right]\right\} dt$$

$$\varphi_2(x,\lambda) = \varphi_{02}(x,\lambda)$$
$$+ \int_{-x}^{x} \left\{K_{21}(x,t)\left[\cos\lambda t - h\sin\lambda t\right] + K_{22}(x,t)\left[h\cos\lambda t + \sin\lambda t\right]\right\} dt$$

ifadeleri elde edilir. Buradan,

$$\varphi_1(x,\lambda) = \varphi_{01}(x,\lambda) + \int_{0}^{x} \left[K_{11}(x,t) + K_{11}(x,-t)\right] \cos\lambda t dt$$

$$+ \int_{0}^{x} \left[K_{11}(x,-t) - K_{11}(x,t)\right] h \sin\lambda t dt + \int_{0}^{x} \left[K_{12}(x,t) + K_{12}(x,-t)\right] h\cos\lambda t dt$$

$$+\int_0^x [K_{12}(x,t)-K_{12}(x,-t)]\sin\lambda t dt$$

veya

$$\varphi_1(x,\lambda)=\varphi_{01}(x,\lambda)+\int_0^x \widetilde{K}_{11}(x,t)\cos\lambda t dt+\int_0^x \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(x,t)h\sin\lambda t dt$$

$$+\int_0^x \widetilde{K}_{12}(x,t)h\cos\lambda t dt+\int_0^x \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(x,t)\sin\lambda t dt$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_{11}(x,t) &= K_{11}(x,t)+K_{11}(x,-t)\\ \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(x,t) &= K_{11}(x,-t)-K_{11}(x,t)\\ \widetilde{K}_{12}(x,t) &= K_{12}(x,t)+K_{12}(x,-t)\\ \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(x,t) &= K_{12}(x,t)-K_{12}(x,-t)\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\varphi_2(x,\lambda)=\varphi_{02}(x,\lambda)+\int_0^x \widetilde{K}_{21}(x,t)\cos\lambda t dt+\int_0^x \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(x,t)h\sin\lambda t dt$$

$$+\int_0^x \widetilde{K}_{22}(x,t)h\cos\lambda t dt+\int_0^x \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(x,t)\sin\lambda t dt$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_{21}(x,t) &= K_{21}(x,t)+K_{21}(x,-t)\\ \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(x,t) &= K_{21}(x,-t)-K_{21}(x,t)\\ \widetilde{K}_{22}(x,t) &= K_{22}(x,t)+K_{22}(x,-t)\\ \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(x,t) &= K_{22}(x,t)-K_{22}(x,-t)\end{aligned}$$

ve ayrıca $\left(\widetilde{K}_{ij}(x,\cdot)\right)_{i,j=1}^2$ ve $\left(\widetilde{\widetilde{K}}_{ij}(x,\cdot)\right)_{i,j=1}^2 \in L_2(-x,x)$ dir.

Böylece $L$ probleminin karakteristik denklemi

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi \widetilde{K}_{21}(\pi,t)\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t) h \sin\lambda t dt$$
$$+ \int_0^\pi \widetilde{K}_{22}(\pi,t) h\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\sin\lambda t dt$$
$$+ H\left[\int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t) h\sin\lambda t dt\right.$$
$$\left.+\int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t) h\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin\lambda t dt\right] = 0$$

şeklinde elde edilir. Burada $\Delta_0(\lambda) = \varphi_{02}(\pi,\lambda) + H\varphi_{01}(\pi,\lambda)$ dır.

**Lemma 3.1.2:** $L$ probleminin özdeğerleri basittir. Yani $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$ dır.

**İspat:** $\quad B\varphi'(x,\lambda) + \Omega(x)\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)$

$$B\dot{\varphi}'(x,\lambda) + \Omega(x)\dot{\varphi}(x,\lambda) = \lambda\dot{\varphi}(x,\lambda) + \varphi(x,\lambda)$$

olduğundan $R^2$ öklid uzayında 1.denklem $\dot{\varphi}(x,\lambda)$, 2.denklem ise $\varphi(x,\lambda)$ ile skaler olarak çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{cases} B\varphi'(x,\lambda)\dot{\varphi}(x,\lambda) + \Omega(x)\varphi(x,\lambda)\dot{\varphi}(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)\dot{\varphi}(x,\lambda) \\ B\dot{\varphi}'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) + \Omega(x)\dot{\varphi}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) = \lambda\dot{\varphi}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) + \varphi^2(x,\lambda) \end{cases}$$

$B\dot{\varphi}'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) - B\varphi'(x,\lambda)\dot{\varphi}(x,\lambda) = \varphi^2(x,\lambda)$ olur. Yani,

$$< \varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) >=< B\dot{\varphi}'(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) > - < B\varphi'(x,\lambda), \dot{\varphi}(x,\lambda) >$$

elde edilir. Buradan

$$< B\dot{\varphi}'(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) >$$
$$=< \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1'(x,\lambda) \\ \dot{\varphi}_2'(x,\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix} >$$
$$=< \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_2'(x,\lambda) \\ -\dot{\varphi}_1'(x,\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix} >= \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_2'(x,\lambda) \\ -\dot{\varphi}_1'(x,\lambda) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \dot{\varphi}_2'(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda) - \dot{\varphi}_1'(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)$$

ve diğer taraftan

$$< B\varphi'(x,\lambda), \dot{\varphi}(x,\lambda) >$$

$$= \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(x,\lambda) \\ \varphi_2'(x,\lambda) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1(x,\lambda) \\ \dot{\varphi}_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_2'(x,\lambda) \\ -\varphi_1'(x,\lambda) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1(x,\lambda) \\ \dot{\varphi}_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \varphi_2'(x,\lambda)\dot{\varphi}_1(x,\lambda) - \varphi_1'(x,\lambda)\dot{\varphi}_2(x,\lambda)$$

olur. Dolayısıyla

$$< \varphi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) >= \dot{\varphi}_2'(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda) - \dot{\varphi}_1'(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)$$

$$- [\varphi_2'(x,\lambda)\dot{\varphi}_1(x,\lambda) - \varphi_1'(x,\lambda)\dot{\varphi}_2(x,\lambda)]$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlik $[0,\pi]$ aralığı üzerinde $\lambda = \lambda_n$ yazılarak integrallenirse ve

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx = \int_0^\pi \left[\varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n)\right] dx$$

olduğu gözönünde bulundurulursa,

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx$$

$$= \int_0^\pi [\dot{\varphi}_2'(x,\lambda_n)\varphi_1(x,\lambda_n) - \dot{\varphi}_1'(x,\lambda_n)\varphi_2(x,\lambda_n)]\, dx$$

$$- \int_0^\pi [\varphi_2'(x,\lambda_n)\dot{\varphi}_1(x,\lambda_n) - \varphi_1'(x,\lambda_n)\dot{\varphi}_2(x,\lambda_n)]\, dx$$

$$= \dot{\varphi}_2(x,\lambda_n)\varphi_1(x,\lambda_n)|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{\varphi}_2(x,\lambda_n)\varphi_1'(x,\lambda_n)dx - \dot{\varphi}_1(x,\lambda_n)\varphi_2(x,\lambda_n)|_0^\pi$$

$$+\int_0^\pi \dot{\varphi}_1(x,\lambda_n)\varphi_2'(x,\lambda_n)dx - \int_0^\pi \left[\varphi_2'(x,\lambda_n)\dot{\varphi}_1(x,\lambda_n) - \varphi_1'(x,\lambda_n)\dot{\varphi}_2(x,\lambda_n)\right] dx$$

$$= \dot{\varphi}_2(\pi,\lambda_n)\varphi_1(\pi,\lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi,\lambda_n)\varphi_2(\pi,\lambda_n) - \dot{\varphi}_2(0,\lambda_n)\varphi_1(0,\lambda_n)$$

$$+\dot{\varphi}_1(0,\lambda_n)\varphi_2(0,\lambda_n) + \int_0^\pi \left[\dot{\varphi}_1(x,\lambda_n)\varphi_2'(x,\lambda_n) - \dot{\varphi}_2(x,\lambda_n)\varphi_1'(x,\lambda_n)\right] dx$$

$$-\int_0^\pi \left[\varphi_2'(x,\lambda_n)\dot{\varphi}_1(x,\lambda_n) - \varphi_1'(x,\lambda_n)\dot{\varphi}_2(x,\lambda_n)\right] dx$$

$$= \dot{\varphi}_2(\pi,\lambda_n)\varphi_1(\pi,\lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi,\lambda_n)\varphi_2(\pi,\lambda_n)$$

$$-\dot{\varphi}_2(0,\lambda_n)\varphi_1(0,\lambda_n) + \dot{\varphi}_1(0,\lambda_n)\varphi_2(0,\lambda_n)$$

$$= \dot{\varphi}_2(\pi,\lambda_n)\varphi_1(\pi,\lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi,\lambda_n)\varphi_2(\pi,\lambda_n)$$

$$= \varphi_1(\pi,\lambda_n)\dot{\varphi}_2(\pi,\lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi,\lambda_n)\left(-H\varphi_1(\pi,\lambda_n)\right)$$

$$= \varphi_1(\pi,\lambda_n)\dot{\varphi}_2(\pi,\lambda_n) + H\varphi_1(\pi,\lambda_n)\dot{\varphi}_1(\pi,\lambda_n)$$

$$= \varphi_1(\pi,\lambda_n)\left[\dot{\varphi}_2(\pi,\lambda_n) + H\dot{\varphi}_1(\pi,\lambda_n)\right]$$

$$= \varphi_1(\pi,\lambda_n)\dot{\Delta}(\lambda_n)$$

olur. Yani

$$\alpha_n = \dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_1(\pi,\lambda_n)$$

elde edilir. Buradan $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$ olduğu açıktır.

## 3.2. Özdeğerler ve Normalleştirici Sayıların Asimptotik İfadeleri

**Lemma 3.2.1:** $L$ probleminin özdeğerleri için $\lambda_n = \lambda_n^0 + \varepsilon_n$ asimptotik eşitliği doğrudur. Burada $\varepsilon_n \in \ell_2$ dir.

**İspat:** $\delta$ yeterince küçük pozitif sayı olmak üzere $(\delta \ll \dfrac{\beta}{2})$

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \left\{ \lambda : |\lambda| = \left|\lambda_n^0\right| + \frac{\beta}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\} \\ G_\delta &= \left\{ \lambda : \left|\lambda - \lambda_n^0\right| \geq \delta,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\} \end{aligned}$$

olsun. $\Delta_0(\lambda)$ sinüs tipli olduğundan, $\lambda \in \overline{G_\delta}$ için $|\Delta_0(\lambda)| > C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi}$ olacak şekilde $C_\delta > 0$ vardır veya

$\lambda \in \overline{G_\delta}$ için

$$\Delta_0(\lambda) = \alpha^+(h\cos\lambda\pi + \sin\lambda\pi) + \alpha^-\left(-\sin\lambda(2a-\pi) - h\cos\lambda(2a-\pi)\right)$$

$$+H\alpha^+\left(-h\sin\lambda\pi + \cos\lambda\pi\right) + H\alpha^-(\cos\lambda(2a-\pi) - h\sin\lambda(2a-\pi))$$

olduğundan,

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq \frac{\alpha^+}{2} h \left|e^{i\lambda\pi} + e^{-i\lambda\pi}\right| - \frac{\alpha^+}{2}\left|e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}\right|$$

$$-\frac{|\alpha^-|}{2}\left|e^{i\lambda(2a-\pi)} - e^{-i\lambda(2a-\pi)}\right| - \frac{|\alpha^-|}{2} h \left|e^{i\lambda(2a-\pi)} + e^{-i\lambda(2a-\pi)}\right|$$

$$-\frac{\alpha^+}{2} Hh \left|e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}\right| - \frac{\alpha^+}{2} H \left|e^{i\lambda\pi} + e^{-i\lambda\pi}\right|$$

$$-\frac{|\alpha^-|}{2} H \left|e^{i\lambda(2a-\pi)} + e^{-i\lambda(2a-\pi)}\right| - \frac{|\alpha^-|}{2} Hh \left|e^{i\lambda(2a-\pi)} - e^{-i\lambda(2a-\pi)}\right|$$

$$= \alpha^+ h\left|\cos(\pi x + i\pi y)\right| - \alpha^+\left|\sin(\pi x + i\pi y)\right|$$

$$-\left|\alpha^-\right|\left|\sin(x(2a-\pi) + i(2a-\pi)y)\right|$$

$$-\left|\alpha^-\right| h \left|\cos((2a-\pi)x + i(2a-\pi)y)\right|$$

$$-\alpha^+ Hh\left|\sin(\pi x + i\pi y)\right| - \alpha^+ H\left|\cos(\pi x + i\pi y)\right|$$

$$-\left|\alpha^-\right| H\left|\cos((2a-\pi)x + i(2a-\pi)y)\right|$$

$$-\left|\alpha^-\right| Hh\left|\sin((2a-\pi)x + i(2a-\pi)y)\right|$$

$$\geq \alpha^+ h\left|\sinh \pi y\right| - \alpha^+\left|\cosh \pi y\right|$$

$$-\left|\alpha^-\right|\left|\cosh(2a-\pi)y\right| - \left|\alpha^-\right| h\left|\cosh(2a-\pi)y\right|$$

$$-\alpha^+ Hh\left|\cosh \pi y\right| - \alpha^+ H\left|\cosh \pi y\right|$$

$$-\left|\alpha^-\right| H\left|\cosh(2a-\pi)y\right| - \left|\alpha^-\right| Hh\left|\cosh(2a-\pi)y\right|$$

$$\geq \alpha^+ h\left|\sinh \pi y\right| - \alpha^+\cosh \pi y - \left|\alpha^-\right|\cosh \pi y - -\left|\alpha^-\right| h\cosh \pi y$$

$$-\alpha^+ Hh\cosh \pi y - \alpha^+ H\cosh \pi y - \left|\alpha^-\right| H\cosh \pi y - \left|\alpha^-\right| Hh\cosh \pi y$$

$$= \alpha^+ h\left|\sinh \pi y\right| - \cosh \pi y(\alpha^+ + \alpha^+ hH + \alpha^+ H + \left|\alpha^-\right|$$

$$+\left|\alpha^-\right| h + \left|\alpha^-\right| H + \left|\alpha^-\right| Hh)$$

$$\geq e^{\pi y}\left[\frac{\alpha^+}{2}h - \frac{\alpha^+}{2}h\left|e^{-2\pi y}\right| - \frac{\alpha^+}{2}(1+hH+H+\frac{h}{2})\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha^+}{2}(1+hH+H+\frac{h}{2})e^{-2\pi y}\right] = e^{\left|\operatorname{Im}\lambda\right|\pi}C_\delta$$

olur. Diğer taraftan

$$\Delta(\lambda) = \varphi_2(\pi,\lambda) + H\varphi_1(\pi,\lambda)$$

ve

$$\Delta_0(\lambda) = \varphi_{02}(\pi,\lambda) + H\varphi_{01}(\pi,\lambda)$$

olduğundan

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi \widetilde{K}_{21}(\pi,t)\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t)h\sin\lambda t dt$$

$$+\int_0^\pi \widetilde{K}_{22}(\pi,t)h\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\sin\lambda t dt +$$

$$+H\left[\int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\sin\lambda t dt\right.$$

$$\left.+\int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin\lambda t dt\right]$$

yazılır.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda|\pi}(\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)) \\
&= \lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda|\pi}\left[\int_0^\pi \widetilde{K}_{21}(\pi,t)\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t)h\sin\lambda t dt\right. \\
&\left.+\int_0^\pi \widetilde{K}_{22}(\pi,t)h\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\sin\lambda t dt\right] \\
&+e^{-|\operatorname{Im}\lambda|\pi} H\left[\int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\sin\lambda t dt\right. \\
&\left.+\int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin\lambda t dt\right] = 0
\end{aligned}
$$

olur([54] Lemma 1.3.1 'den).

Yani $n$ 'nin yeterince büyük değerlerinde $\lambda \in \Gamma_n$ için

$$|\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)| < \frac{C_\delta}{2} e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $n$ yeterince büyük doğal sayı olmak üzere $\lambda \in \Gamma_n$ için

$$|\Delta_0(\lambda)| > C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi} > \frac{C_\delta}{2} e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi} > |\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)|$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu durumda Rouché teoremi uygulanırsa; $n$ 'nin yeterince büyük değerlerinde $\Gamma_n$ yörüngesinin iç kısmında $\Delta_0(\lambda)$ ve $\Delta_0(\lambda) + \{\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\} = \Delta(\lambda)$ fonksiyonlarının eşit sayıda sıfırları yani $(2n+1)$ sayıda $\lambda_{-n},\ldots,\lambda_0,\ldots,\lambda_n$ sıfırları vardır.

Benzer şekilde Rouché teoreminden yararlanarak; yeterince büyük $n$ 'ler için $\left|\lambda-\lambda_n^0\right| < \delta$ dairelerinin herbirinde $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun yalnızca bir sıfırı olduğu gösterilir.

Bu durumda $\delta$ yeterince küçük pozitif sayı olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ olmak üzere $\lambda_n = \lambda_n^0 + \varepsilon_n$ yazılabilir.

$\lambda_n$ sayıları, $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun kökleri olduğundan,

$$\Delta(\lambda_n) = \Delta_0(\lambda_n^0 + \varepsilon_n) + \int_0^\pi \widetilde{K}_{21}(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) tdt$$

$$+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t)h\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt + \int_0^\pi \widetilde{K}_{22}(\pi,t)h\cos(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt$$

$$+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt + H\left[\int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt\right.$$

$$+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt + \int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\cos(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt$$

$$\left.+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt\right] = 0$$

dır. Diğer taraftan $\Delta_0(\lambda_n^0) = 0$ olduğundan

$$\Delta_0(\lambda_n) = \Delta_0(\lambda_n^0 + \varepsilon_n) = \Delta_0(\lambda_n^0) + \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\varepsilon_n + \ddot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\frac{\varepsilon_n^2}{2!} + \ldots$$

ve

$$\Delta_0(\lambda_n^0 + \varepsilon_n) = \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) = \left(\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0) + o(1)\right)\varepsilon_n$$

olur. Eğer $\Delta_0(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)$ ifadesi $\Delta(\lambda_n)$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\left(\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0) + o(1)\right)\varepsilon_n + \int_0^\pi \widetilde{K}_{21}(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) tdt$$

$$+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t)h\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt + \int_0^\pi \widetilde{K}_{22}(\pi,t)h\cos(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt$$

$$+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt$$

$$+H\left[\int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt\right.$$

$$\left.+\int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\cos(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)tdt\right] = 0$$

olur. $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonu sinüs tipli olduğundan, tüm $\lambda_n^0$ kökleri için $N_1$, $N_2$ sabitleri vardır öyleki $0 < N_1 < \left|\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\right| < N_2 < \infty$ , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$dir[55]. Ayrıca [56, 57] çalışmasından yararlanılırsa; $\sup\limits_n |h_n| \leq M$ olmak üzere

$$\lambda_n^0 = n + h_n$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.2[56]:** $e^{\alpha_0 \lambda} + a_1 e^{\alpha_1 \lambda} + \ldots + a_{p-1} e^{\alpha_{p-1} \lambda} + a_p = 0$

$\alpha_s$ 'ler$(s = 0, 1, \ldots, p-1)$ gerçel sayılar, $\alpha_{s-1} > \alpha_s > 0$, $a_s$ 'ler $(s = \overline{1, p})$ kompleks, ve $a_p \neq 0$ ise bu denklemin kökleri $\lambda_n = \dfrac{2\pi n i}{\alpha_0} + \Psi(n)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ dir. $\Psi(n)$ ise sınırlı kompleks değerli fonksiyon, $\sup\limits_n |\Psi(n)| < +\infty$ dur.
Bu teoreme göre,

$$\Delta_0(\lambda) = \alpha^+ (h \cos \lambda\pi + \sin \lambda\pi) + \alpha^- (-\sin \lambda(2a - \pi) - h \cos \lambda(2a - \pi))$$

$$+\alpha^+ H(-h \sin \lambda\pi + \cos \lambda\pi) + \alpha^- H(\cos \lambda(2a - \pi) - h \sin \lambda(2a - \pi)) = 0$$

$$\alpha^+ h \cos \lambda\pi + \alpha^+ \sin \lambda\pi - \alpha^- \sin \lambda(2a - \pi) - \alpha^- h \cos \lambda(2a - \pi)$$

$$-\alpha^+ hH \sin \lambda\pi + \alpha^+ H \cos \lambda\pi + \alpha^- H \cos \lambda(2a - \pi) - \alpha^- hH \sin \lambda(2a - \pi) = 0$$

denklemi

$$e^{2i\lambda\pi} + \left( \frac{\alpha^- i - \alpha^- h + \alpha^- hHi + \alpha^- H}{\alpha^+ h - \alpha^+ i + \alpha^+ hHi + \alpha^+ H} \right) e^{2i\lambda a}$$

$$+ \left( \frac{-\alpha^- i - \alpha^- h - \alpha^- hHi + \alpha^- H}{\alpha^+ h - \alpha^+ i + \alpha^+ hHi + \alpha^+ H} \right) e^{2i\lambda(\pi - a)}$$

$$+ \frac{\alpha^+ h + \alpha^+ i - \alpha^+ hHi + \alpha^+ H}{\alpha^+ h - \alpha^+ i + \alpha^+ hHi + \alpha^+ H} = 0$$

şeklinde yazılır ve

$$\alpha_0 = 2\pi,\ \alpha_1 = 2a,\ \alpha_2 = 2(\pi - a), \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > 0$$

$$a_1 = \frac{\alpha^- i - \alpha^- h + \alpha^- hHi + \alpha^- H}{\alpha^+ h - \alpha^+ i + \alpha^+ hHi + \alpha^+ H}$$

$$a_2 = \frac{-\alpha^- i - \alpha^- h - \alpha^- hHi + \alpha^- H}{\alpha^+ h - \alpha^+ i + \alpha^+ hHi + \alpha^+ H}$$

$$a_3 = \frac{\alpha^+ h + \alpha^+ i - \alpha^+ hHi + \alpha^+ H}{\alpha^+ h - \alpha^+ i + \alpha^+ hHi + \alpha^+ H}$$

gösterimleri kabul edilerek Teorem 3.2.2 uygulanırsa, denklemin kökleri için

$$i\lambda_n^0 = \frac{2\pi n i}{2\pi} + \Psi(n) = ni + \Psi(n)$$

veya

$$\lambda_n^0 = n - i\Psi(n) = n + \Psi_1(n) \quad (\Psi_1(n) = h_n = -i\Psi(n))$$

ifadesi elde edilir.

Burada $\sup\limits_n |\Psi_1(n)| < M < \infty$ koşulu sağlanır. O halde

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n \;=\; & -\frac{1}{\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0) + o(1)} \left[ \int_0^\pi \widetilde{K}_{21}(\pi,t) \cos(n + h_n + \varepsilon_n)\, tdt \right. \\
& + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t) h \sin(n + h_n + \varepsilon_n) tdt + \int_0^\pi \widetilde{K}_{22}(\pi,t) h \cos(n + h_n + \varepsilon_n) tdt \\
& + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t) \sin(n + h_n + \varepsilon_n) tdt \qquad (3.2.1) \\
& + H \left( \int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t) \cos(n + h_n + \varepsilon_n) tdt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t) h \sin(n + h_n + \varepsilon_n) tdt \right. \\
& \left.\left. + \int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t) h \cos(n + h_n + \varepsilon_n) tdt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t) \sin(n + h_n + \varepsilon_n) tdt \right) \right]
\end{aligned}$$

$\widetilde{K}_{11}(\pi,\cdot), \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,\cdot), \widetilde{K}_{12}(\pi,\cdot), \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,\cdot), \widetilde{K}_{21}(\pi,\cdot), \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,\cdot), \widetilde{K}_{22}(\pi,\cdot), \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,\cdot) \in L_2(0,\pi)$ olduğundan, (3.2.1)'den [54, sayfa 66-67]'ye göre $\varepsilon_n \in \ell_2$ olduğu elde edilir.

**Lemma 3.2.3:** *$L$ probleminin normalleştirici sayıları için $\alpha_n = \alpha_n^0 + \delta_n$ asimptotik eşitliği geçerlidir. Burada $\delta_n \in \ell_2$ dir.*

**İspat:**

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi \widetilde{K}_{21}(\pi,t) \cos \lambda tdt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t) h \sin \lambda tdt$$

$$+\int_0^\pi \widetilde{K}_{22}(\pi,t)h\cos\lambda t dt+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\sin\lambda t dt$$

$$+H\left[\int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos\lambda t dt+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\sin\lambda t dt\right.$$

$$\left.+\int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\cos\lambda t dt+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin\lambda t dt\right]$$

olduğundan

$$\dot{\Delta}(\lambda_n)=\dot{\Delta}_0(\lambda_n)-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{21}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt$$

$$+\int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{22}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt$$

$$+\int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt$$

$$+H\left[-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{11}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt+\int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt\right.$$

$$\left.-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt+\int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt\right]$$

yazılır.

$$\varphi_1(\pi,\lambda_n)=\varphi_{01}(\pi,\lambda_n)+\int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt$$

$$+\int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt$$

ve $\varphi_{01}(\pi,\lambda_n)=\varphi_{01}(\pi,\lambda_n^0+\varepsilon_n)=\varphi_{01}(\pi,\lambda_n^0)+\tilde{\delta}_n \quad \tilde{\delta}_n\in\ell_2$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_0(\lambda_n)=\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0+\varepsilon_n)&=\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)+\ddot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\varepsilon_n+\dddot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\frac{\varepsilon_n^2}{2!}+\ldots\\&=\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)+O(\varepsilon_n)\end{aligned}$$

ve

$$\alpha_n = \dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_1(\pi, \lambda_n)$$

olduğundan,

$$\alpha_n = \dot{\Delta}_0(\lambda_n)\varphi_1(\pi, \lambda_n)$$
$$+ \left[\int_0^\pi - t\widetilde{K}_{21}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t) h\cos\lambda_n t dt\right.$$
$$-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{22}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt$$
$$+H\left[-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{11}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt\right.$$
$$\left.-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt\right]\varphi_1(\pi,\lambda_n)$$

veya

$$\alpha_n = \left[\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0) + O(\varepsilon_n)\right]\left[\varphi_{01}(\pi,\lambda_n^0) + \tilde{\delta}_n + \int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt\right.$$
$$\left.+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt\right]$$
$$+ \left[\int_0^\pi - t\widetilde{K}_{21}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{21}(\pi,t) h\cos\lambda_n t dt\right.$$
$$-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{22}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt$$
$$+H\left(-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{11}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt\right.$$
$$\left.\left.-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt\right)\right]\varphi_1(\pi,\lambda_n)$$

eşitliği alınır. Buradan,

$$\alpha_n = \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\varphi_{01}(\pi,\lambda_n^0) + \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\tilde{\delta}_n + \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\left[\int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt\right.$$

$$+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt$$

$$\left.+\int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt\right] + O(\varepsilon_n)\varphi_{01}(\pi,\lambda_n^0) + O(\varepsilon_n)\tilde{\delta}_n$$

$$+O(\varepsilon_n)\left[\int_0^\pi \widetilde{K}_{11}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt\right.$$

$$\left.+\int_0^\pi \widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt + \int_0^\pi \widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt\right]$$

$$+\left[\int_0^\pi - t\widetilde{K}_{21}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt\right.$$

$$-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{22}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{22}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt$$

$$+H\left[-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{11}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{11}(\pi,t)h\cos\lambda_n t dt\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^\pi t\widetilde{K}_{12}(\pi,t)h\sin\lambda_n t dt + \int_0^\pi t\widetilde{\widetilde{K}}_{12}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt\right]\right]\varphi_1(\pi,\lambda_n)$$

olur. Böylece, Lemma 3.2.1 'de olduğu gibi

$$\alpha_n = \alpha_n^0 + \delta_n,\ \ \delta_n \in \ell_2$$

olduğu açıktır.

## 3.3. Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonunun Özellikleri

$\Phi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\Phi_1(x,\lambda)\\ \Phi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu, (2.1.1) denkleminin

$$\begin{aligned} U(\Phi) &= \Phi_2(0,\lambda)-h\Phi_1(0,\lambda)=-h \\ V(\Phi) &= \Phi_2(\pi,\lambda)+H\Phi_1(\pi,\lambda)=0 \end{aligned}$$

koşullarını ve (2.1.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonuna $L$ sınır değer probleminin Weyl çözümü denir.

$$\Psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\Psi_1(x,\lambda)\\ \Psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix},\ \varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix} \text{ ve } C(x,\lambda)=\begin{pmatrix}C_1(x,\lambda)\\ C_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

fonksiyonları, (2.1.1) denkleminin

$$\Psi(\pi,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\ -H\end{pmatrix},\ \varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\ h\end{pmatrix} \text{ ve } C(0,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını ve (2.1.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $\Psi(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$ fonksiyonlarının $\lambda$ 'ya göre tam oldukları açıktır.

Ayrıca

$$\Psi(x,\lambda)=c_1(\lambda)\varphi(x,\lambda)+c_2(\lambda)C(x,\lambda)$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\begin{cases}\Psi_1(\pi,\lambda)=c_1(\lambda)\varphi_1(x,\lambda)+c_2(\lambda)C_1(x,\lambda)\\ \Psi_2(\pi,\lambda)=c_1(\lambda)\varphi_2(x,\lambda)+c_2(\lambda)C_2(x,\lambda)\end{cases}$$

veya

$$\Psi_1(0,\lambda)=c_1(\lambda)\varphi_1(0,\lambda)+c_2(\lambda)C_1(0,\lambda)=c_1(\lambda)+c_2(\lambda)$$

$$\Psi_2(0,\lambda)=c_1(\lambda)\varphi_2(0,\lambda)+c_2(\lambda)C_2(0,\lambda)=c_1(\lambda)h$$

olur. O halde,

$$c_1(\lambda)=\frac{1}{h}\Psi_2(0,\lambda)$$

$$
\begin{aligned}
c_2(\lambda) &= \Psi_1(0,\lambda) - \frac{1}{h}\Psi_2(0,\lambda) \\
&= -\frac{1}{h}(\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)) = -\frac{1}{h}\Delta(\lambda)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\Psi(x,\lambda) = \frac{1}{h}\Psi_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda) - \frac{1}{h}\Delta(\lambda)C(x,\lambda)
$$

elde edilir. O halde

$$
-\frac{h\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = C(x,\lambda) - \frac{\Psi_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}
$$

olur.

Diğer taraftan, $\Phi(x,\lambda) = A(\lambda)C(x,\lambda) + B(\lambda)\varphi(x,\lambda)$ şeklinde Weyl çözümü oluşturulsun.

$B(\lambda) = \dfrac{\Phi_2(0,\lambda)}{h}$ ve $A(\lambda) = \Phi_1(0,\lambda) - \dfrac{\Phi_2(0,\lambda)}{h} = 1$

olduğundan Weyl çözümü için

$$
\Phi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + \frac{\Phi_2(0,\lambda)}{h}\varphi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.3.1}
$$

ifadesi elde edilir.

$$
\begin{cases}
-\dfrac{h\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = C(x,\lambda) - \dfrac{\Psi_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\[2ex]
\Phi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + \dfrac{\Phi_2(0,\lambda)}{h}\varphi(x,\lambda)
\end{cases}
$$

olduğundan, $C(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ (2.1.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü ve bunların lineer bileşeni de (2.1.1)'in bir çözümü olduğundan, bu çözümün tekliğinden

$$
-\frac{h\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \Phi(x,\lambda) \tag{3.3.2}
$$

ve de

$$
-\frac{\Psi_2(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\Phi_2(0,\lambda)}{h} \tag{3.3.3}
$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla $\Phi(x,\lambda)$ Weyl çözümü; (3.3.2) şeklinde de ifade edilebilir. Ayrıca, (3.3.3) eşitliğindeki $-\dfrac{\Psi_2(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \dfrac{\Phi_2(0,\lambda)}{h} = M(\lambda)$ fonksiyonları Weyl fonksiyonudur.

Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu, kutup(poles) noktaları $L$ probleminin spektrumunda yerleşen merimorf fonksiyonlardır.

**Teorem 3.3.1:**

$$M(\lambda) = -\frac{h}{\alpha_0(\lambda-\lambda_0)} - h\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left\{ \frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)} + \frac{1}{\alpha_n^0\lambda_n^0} \right\} \tag{3.3.4}$$

gösterimi doğrudur.

**İspat:** $\varphi(x,\lambda)$ için ispatladığımız gösterime benzer olarak $\Psi(x,\lambda)$ çözümü içinde

$$\Psi(x,\lambda) = \Psi_0(x,\lambda) + \int_{-(\pi-x)}^{\pi-x} N(x,t) \begin{pmatrix} \cos\lambda t - h\sin\lambda t \\ h\cos\lambda t + \sin\lambda t \end{pmatrix} dt \tag{3.3.5}$$

gösterimi doğrudur. Buradan,

$$\begin{aligned}\Psi_1(x,\lambda) &= \Psi_{01}(x,\lambda) \\ &+ \int_0^{\pi-x} \left\{ \left( \tilde{N}_{11}(x,t) + \tilde{N}_{12}(x,t)h \right)\cos\lambda t + \left( \tilde{\tilde{N}}_{11}(x,t)h + \tilde{\tilde{N}}_{12}(x,t) \right)\sin\lambda t \right\} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(x,\lambda) &= \Psi_{02}(x,\lambda) \\ &+ \int_0^{\pi-x} \left\{ \left( \tilde{N}_{21}(x,t) + \tilde{N}_{22}(x,t)h \right)\cos\lambda t + \left( \tilde{\tilde{N}}_{21}(x,t)h + \tilde{\tilde{N}}_{22}(x,t) \right)\sin\lambda t \right\} dt\end{aligned}$$

yazılır. Burada,

$$\tilde{N}_{11}(x,t) = N_{11}(x,t) + N_{11}(x,-t), \quad \tilde{\tilde{N}}_{11}(x,t) = -N_{11}(x,t) + N_{11}(x,-t)$$

$$\tilde{N}_{12}(x,t) = N_{12}(x,t) + N_{12}(x,-t), \quad \tilde{\tilde{N}}_{12}(x,t) = N_{12}(x,t) - N_{12}(x,-t)$$

$$\tilde{N}_{21}(x,t) = N_{21}(x,t) + N_{21}(x,-t), \quad \tilde{\tilde{N}}_{21}(x,t) = -N_{21}(x,t) + N_{21}(x,-t)$$

$$\tilde{N}_{22}(x,t) = N_{22}(x,t) + N_{22}(x,-t), \quad \tilde{\tilde{N}}_{22}(x,t) = N_{22}(x,t) - N_{22}(x,-t) \text{ dir.}$$

$\tilde{N}(x,t) = \left\{ \tilde{N}_{ij}(x,t) \right\}_{i,j=1}^{2}$ matris fonksiyonunun $\tilde{N}_{ij}(x,t)$ elemanları ve

$\tilde{\tilde{N}}(x,t) = \left\{ \tilde{\tilde{N}}_{ij}(x,t) \right\}_{i,j=1}^{2}$ matris fonksiyonunun $\tilde{\tilde{N}}_{ij}(x,t)$ elemanları her fiks edilmiş $x \in [0,\pi]$ için $t$ değişkenine göre $L_2(0,\pi)$ uzayına aittir.

(2.1.1) denkleminin $\Psi_0(\pi,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -H \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını ve (2.1.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü için;

$$\Psi_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} H\sin\lambda\,(x-\pi) + \cos\lambda\,(x-\pi) \\ -H\cos\lambda\,(x-\pi) + \sin\lambda\,(x-\pi) \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} H\sin\lambda\,(\pi-x) - \cos\lambda\,(\pi-x) \\ H\cos\lambda\,(\pi-x) + \sin\lambda\,(\pi-x) \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$f_0(x,\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -H+i \\ -1-iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi-x)}, & a<x<\pi \\ c_1 \begin{pmatrix} -H+i \\ -1-iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi-x)} + c_2 \begin{pmatrix} -i-H \\ -1+iH \end{pmatrix} e^{-i\lambda(\pi-x)}, & 0<x<a \end{cases}$$

olur. $f_0(a-0) = Af_0(a+0)$ koşulundan yararlanılırsa,

$$c_1 \begin{pmatrix} -H+i \\ -1-iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi-a)} + c_2 \begin{pmatrix} -i-H \\ -1+iH \end{pmatrix} e^{-i\lambda(\pi-a)}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H+i \\ -1-iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi-a)}$$

veya

$$\begin{cases} c_1(-H+i)e^{i\lambda(\pi-a)} + c_2\,(-i-H)\,e^{-i\lambda(\pi-a)} = \alpha\,(-H+i)\,e^{i\lambda(\pi-a)} \\ c_1\,(-1-iH)\,e^{i\lambda(\pi-a)} + c_2\,(-1+iH)\,e^{-i\lambda(\pi-a)} = \alpha^{-1}\,(-1-iH)\,e^{i\lambda(\pi-a)} \end{cases}$$

olduğu çıkar. Buradan,

$c_1 = \alpha^+, \;\; c_2 = \alpha^- \left(\dfrac{iH+1}{iH-1}\right) e^{2i\lambda(\pi-a)}$ olduğundan,

$$f_0(x,\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -H+i \\ -1-iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi-x)}, & a<x<\pi \\ \alpha^+ \begin{pmatrix} -H+i \\ -1-iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi-x)} & \\ +\alpha^- \left(\dfrac{iH+1}{iH-1}\right) \begin{pmatrix} -i-H \\ -1+iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi+x-2a)}, & 0<x<a \end{cases}$$

veya

$$f_0(x,\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -H+i \\ -1-iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi-x)}, & a<x<\pi \\ \alpha^+ \begin{pmatrix} -H+i \\ -1-iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi-x)} & \\ +\alpha^- \begin{pmatrix} i-H \\ 1+iH \end{pmatrix} e^{i\lambda(\pi+x-2a)}, & 0<x<a \end{cases}$$

olduğu elde edilir.

Bu durumda,

$$\Psi_0(x,\lambda) = \begin{cases} \alpha^+ \begin{pmatrix} \cos\lambda(\pi-x) - H\sin\lambda(\pi-x) \\ -\sin\lambda(\pi-x) - H\cos\lambda(\pi-x) \end{pmatrix} & \\ +\alpha^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\lambda(x+\pi-2a) - H\sin\lambda(x+\pi-2a) \\ -\sin\lambda(x+\pi-2a) - H\cos\lambda(x+\pi-2a) \end{pmatrix}, & x<a \\ \begin{pmatrix} \cos\lambda(\pi-x) - H\sin\lambda(\pi-x) \\ -\sin\lambda(\pi-x) - H\cos\lambda(\pi-x) \end{pmatrix}, & a<x \end{cases}$$

olduğu çıkar. O halde, $M(\lambda) = -\dfrac{\Psi_2(0,\lambda)}{\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)}$ olduğundan,

$$M_0(\lambda) = -\frac{\Psi_{02}(0,\lambda)}{\Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)} \tag{3.3.6}$$

yazılır.

$$f_i(\lambda) = \int_0^{\pi} \left\{ \left( \widetilde{N}_{i1}(0,t) + \widetilde{N}_{i2}(0,t)h \right) \cos\lambda t + \left( \widetilde{\widetilde{N}}_{i1}(0,t)h + \widetilde{\widetilde{N}}_{i2}(0,t) \right) \sin\lambda t \right\} dt, \ i = 1,2$$

gösterimi kabul edilsin. Bu durumda,

$\Psi_i(0,\lambda) = \Psi_{0i}(0,\lambda) + f_i(\lambda)$, $i = 1,2$ eşitlikleri elde edilir. Lebesgue lemmasından

$\lambda \in G_\delta$ için $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda|\pi} |f_i(\lambda)| = 0$ olur.

$\Delta(\lambda) = \Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda), \quad \Delta_0(\lambda) = \Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)$

ve

$\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda) = \Psi_{02}(0,\lambda) + f_2(\lambda) - h\left[\Psi_{01}(0,\lambda) + f_1(\lambda)\right]$

eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\Delta(\lambda) = \Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda) + f_2(\lambda) - hf_1(\lambda)$$

veya

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + f_2(\lambda) - hf_1(\lambda)$$

dır. $\lambda \in G_\delta$ için $|\Delta(\lambda)| > C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi}$ olduğu gözönünde bulundurulursa,

$$M(\lambda) - M_0(\lambda) = -\frac{\Psi_2(0,\lambda)}{\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)} + \frac{\Psi_{02}(0,\lambda)}{\Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)}$$

$$= -\frac{\Psi_2(0,\lambda)\left[\Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)\right] + \Psi_{02}(0,\lambda)\left[\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)\right]}{\left[\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)\right]\left[\Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)\right]}$$

$$= \frac{-f_2(\lambda)\Psi_{02}(0,\lambda) + hf_2(\lambda)\Psi_{01}(0,\lambda) + f_2(\lambda)\Psi_{02}(0,\lambda) - hf_1(\lambda)\Psi_{02}(0,\lambda)}{\left[\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)\right]\left[\Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)\right]}$$

$$= \frac{-f_2(\lambda)\left[\Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)\right]}{\left[\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)\right]\left[\Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)\right]}$$

$$+ \frac{\Psi_{02}(0,\lambda)\left[f_2(\lambda) - hf_1(\lambda)\right]}{\left[\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)\right]\left[\Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)\right]}$$

$$= -\frac{f_2(\lambda)}{\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)} + \frac{f_2(\lambda) - hf_1(\lambda)}{\Psi_2(0,\lambda) - h\Psi_1(0,\lambda)} \frac{\Psi_{02}(0,\lambda)}{\Psi_{02}(0,\lambda) - h\Psi_{01}(0,\lambda)}$$

$$= -\frac{f_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{f_2(\lambda) - hf_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)} M_0(\lambda)$$

olur. Son eşitlikten,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \sup_{\lambda\in G_\delta} |M(\lambda) - M_0(\lambda)| = 0 \tag{3.3.7}$$

olduğu alınır.

Diğer taraftan $\varphi(x,\lambda_n)(\varphi_0(x,\lambda_n^0))$ ve $\Psi(x,\lambda_n)(\Psi_0(x,\lambda_n^0))$ vektör fonksiyonları $L(L_0)$ probleminin özfonksiyonlarıdır. O yüzden de $\beta_n(\beta_n^0)$ sabitleri mevcuttur öyleki

$$\Psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n)(\Psi_0(x,\lambda_n^0) = \beta_n^0\varphi_0(x,\lambda_n^0))$$

eşitliği sağlanır. O halde,

$$\Psi_1(0,\lambda_n) = \beta_n\varphi_1(0,\lambda_n)$$

olduğundan

$$\beta_n = \Psi_1(0,\lambda_n) = \frac{1}{h}\Psi_2(0,\lambda_n) = \frac{-H}{\varphi_2(\pi,\lambda_n)} = \frac{1}{\varphi_1(\pi,\lambda_n)}$$
$$\beta_n^0 = \Psi_{01}(0,\lambda_n^0) = \frac{1}{h}\Psi_{02}(0,\lambda_n^0) = \frac{-H}{\varphi_{02}(\pi,\lambda_n^0)} = \frac{1}{\varphi_{01}(\pi,\lambda_n^0)}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_1(\pi,\lambda_n)\\ \alpha_n^0 &= \dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\varphi_{01}(\pi,\lambda_n^0)\end{aligned}$$

eşitliklerinden yararlanılırsa, $\Psi_2(0,\lambda)$ ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonları $\lambda = \lambda_n$'de analitik ve $\Psi_2(0,\lambda_n) \neq 0$, $\Delta(\lambda_n) = 0$, $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$ olduğundan $M(\lambda)$, $\lambda = \lambda_n$ de basit kutup noktasına sahiptir. Ayrıca $M_0(\lambda)$'da, $\lambda = \lambda_n^0$ da basit kutup noktasına sahip olduğundan

$$\begin{cases} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda) = -\dfrac{\Psi_2(0,\lambda_n)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)} = -\dfrac{h}{\dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_1(\pi,\lambda_n)} = -\dfrac{h}{\alpha_n} \\ \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M_0(\lambda) = -\dfrac{\Psi_{02}(0,\lambda_n^0)}{\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)} = -\dfrac{h}{\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)\varphi_{01}(\pi,\lambda_n^0)} = -\dfrac{h}{\alpha_n^0} \end{cases} \tag{3.3.8}$$

elde edilir.

$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \frac{M(\mu) - M_0(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu,\ \lambda \in int\Gamma_n$ eğrisel integrali ele alınsın. (3.3.7) 'den dolayı $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = 0$ dır.

$\lambda$, $M(\mu)$'nün bir kutbu olmadığından $\frac{M(\mu)}{\mu - \lambda}$; $\mu = \lambda_n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ ve $\lambda$ noktalarında basit kutup yerlerine sahiptir. Bu durumda (3.3.8) 'den yararlanılırsa,

$$\text{Res}\left(\frac{M(\mu)}{\mu - \lambda}, \lambda_n\right) = \lim_{\mu \to \lambda_n} (\mu - \lambda_n)\frac{M(\mu)}{\mu - \lambda} = -\frac{h}{\alpha_n(\lambda_n - \lambda)}$$
$$\text{Res}\left(\frac{M(\mu)}{\mu - \lambda}, \lambda\right) = \lim_{\mu \to \lambda} (\mu - \lambda)\frac{M(\mu)}{\mu - \lambda} = M(\lambda)$$

olur. Rezidü teoremine göre,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \frac{M(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu = M(\lambda) - \sum_{\lambda_n \in int\Gamma_n} \frac{h}{\alpha_n(\lambda_n - \lambda)}$$

yazılır.

Benzer şekilde,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \frac{M_0(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu = M_0(\lambda) - \sum_{\lambda_n^0 \in int\Gamma_n} \frac{h}{\alpha_n^0(\lambda_n^0 - \lambda)}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \frac{M(\mu) - M_0(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu = -M(\lambda) + M_0(\lambda) + \sum_{\lambda_n \in int\Gamma_n} \frac{h}{\alpha_n(\lambda_n - \lambda)}$$
$$- \sum_{\lambda_n^0 \in int\Gamma_n} \frac{h}{\alpha_n^0(\lambda_n^0 - \lambda)}$$

olur.

O halde

$$I_n(x) = -M(\lambda) + M_0(\lambda) - \sum_{\lambda \in int\Gamma_n} \frac{h}{\alpha_n(\lambda - \lambda_n)} + \sum_{\lambda \in int\Gamma_n} \frac{h}{\alpha_n^0(\lambda - \lambda_n^0)}$$

olduğu elde edilir. Buradan $n \to \infty$ iken limite geçilirse; $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = 0$ olduğundan,

$$0 = -M(\lambda) + M_0(\lambda) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h}{\alpha_n(\lambda - \lambda_n)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h}{\alpha_n^0(\lambda - \lambda_n^0)}$$

$$M(\lambda) = M_0(\lambda) - h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n(\lambda - \lambda_n)} - \frac{1}{\alpha_n^0(\lambda - \lambda_n^0)} \right\}$$

olur.

Mittag-Leffler açılımına göre,

$$M_0(\lambda) + \frac{h}{\alpha_0^0 \lambda} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{h}{\alpha_n^0} \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_n^0} + \frac{1}{\lambda_n^0} \right)$$

yazılır. Buradan,

$$M_0(\lambda) = -\frac{h}{\alpha_0^0 \lambda} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{h}{\alpha_n^0} \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_n^0} + \frac{1}{\lambda_n^0} \right)$$

elde edilir.

Elde edilen $M(\lambda)$ ve $M_0(\lambda)$ eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= -\frac{h}{\alpha_0^0 \lambda} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{h}{\alpha_n^0} \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_n^0} + \frac{1}{\lambda_n^0} \right) \\ &-h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n(\lambda - \lambda_n)} - \frac{1}{\alpha_n^0(\lambda - \lambda_n^0)} \right\} = -\frac{h}{\alpha_0^0 \lambda} - \frac{h}{\alpha_0(\lambda - \lambda_0)} + \frac{h}{\alpha_0^0 \lambda} \\ &- \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left\{ \frac{h}{\alpha_n^0} \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_n^0} + \frac{1}{\lambda_n^0} \right) - h \left( \frac{1}{\alpha_n(\lambda - \lambda_n)} - \frac{1}{\alpha_n^0(\lambda - \lambda_n^0)} \right) \right\} \end{aligned}$$

olur.

Buradan

$$M(\lambda) = -\frac{h}{\alpha_0(\lambda - \lambda_0)} - h \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left\{ \frac{1}{\alpha_n(\lambda - \lambda_n)} + \frac{1}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} \right\}$$

eşitliği elde edilir.

## 3.4. Ters Problemler

Bu bölüm de $L$ probleminin belirlenmesi için Weyl fonksiyonuna ve diskret spektral verilere göre ters(inverse) problemin çözümü verilmiştir. Bu tip ters problemler, Dirac operatörü için konulan klasik ters problemlerden daha geneldir.

$L$ problemi ile beraber, $\tilde{\Omega}(x)$ potansiyele sahip $\tilde{L}$ problemi ele alınsın ve herhangi $\alpha$ sembolü $L$ problemine ait ise $\tilde{\alpha}$ sembolünün de $\tilde{L}$ problemine ait olduğu kabul edilsin.

**Teorem 3.4.1:** Eğer $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ ise $L = \tilde{L}$ dır. Dolayısıyla Weyl fonksiyonu $L$ sınır değer problemini tek olarak belirtmektedir.

**İspat:** $P(x,\lambda) = [P_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1,2}$ matrisi ele alınsın.

$$P(x,\lambda)\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix},$$

eşitliği ile verilen

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix}, \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}$$ çözümlerinin Wronsky determinantı için

$$W\left\{\tilde{\varphi}(x,\lambda), \tilde{\Phi}(x,\lambda)\right\} \equiv \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) - \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) = -\tilde{h} = -h$$

olduğu gözönünde bulundurulursa,

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x,\lambda) & P_{12}(x,\lambda) \\ P_{21}(x,\lambda) & P_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix}$$

eşitliğinin her iki tarafı sağdan $\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_2 & -\tilde{\Phi}_1 \\ -\tilde{\varphi}_2 & \tilde{\varphi}_1 \end{pmatrix}$ matrisi ile çarpıldığında,

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x,\lambda) & P_{12}(x,\lambda) \\ P_{21}(x,\lambda) & P_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_2 & -\tilde{\Phi}_1 \\ -\tilde{\varphi}_2 & \tilde{\varphi}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_2 & -\tilde{\Phi}_1 \\ -\tilde{\varphi}_2 & \tilde{\varphi}_1 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan,

$$-h\begin{pmatrix} P_{11}(x,\lambda) & P_{12}(x,\lambda) \\ P_{21}(x,\lambda) & P_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1\tilde{\Phi}_2 - \Phi_1\tilde{\varphi}_2 & -\varphi_1\tilde{\Phi}_1 + \Phi_1\tilde{\varphi}_1 \\ \varphi_2\tilde{\Phi}_2 - \Phi_2\tilde{\varphi}_2 & -\varphi_2\tilde{\Phi}_1 + \Phi_2\tilde{\varphi}_1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{cases} P_{11}(x,\lambda) = -\dfrac{1}{h}\Big(\varphi_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) - \Phi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\Big) \\ P_{12}(x,\lambda) = -\dfrac{1}{h}\Big(-\varphi_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) + \Phi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\Big) \\ P_{21}(x,\lambda) = -\dfrac{1}{h}\Big(\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) - \Phi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\Big) \\ P_{22}(x,\lambda) = -\dfrac{1}{h}\Big(-\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) + \Phi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\Big) \end{cases} \tag{3.4.1}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\lambda) = P_{11}(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) = P_{21}(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) + P_{22}(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) \\ \Phi_1(x,\lambda) = P_{11}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) \\ \Phi_2(x,\lambda) = P_{21}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) + P_{22}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) \end{cases} \tag{3.4.2}$$

olduğu alınır. (3.4.1) ve $\Phi(x,\lambda) = -h\dfrac{\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ ifadelerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,\lambda) &= -h\frac{\Psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)},\ \Phi_2(x,\lambda) = -h\frac{\Psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ \tilde{\Phi}_1(x,\lambda) &= -h\frac{\tilde{\Psi}_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)},\ \tilde{\Phi}_2(x,\lambda) = -h\frac{\tilde{\Psi}_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece,

$$P_{11}(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\varphi_1(x,\lambda)\tilde{\Psi}_2(x,\lambda) - \Psi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\Big)$$

$$= 1 + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big[\varphi_1(x,\lambda)\Big(\tilde{\Psi}_2(x,\lambda) - \Psi_2(x,\lambda)\Big) - \Psi_1(x,\lambda)(\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda))\Big]$$

$$P_{12}(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(-\varphi_1(x,\lambda)\tilde{\Psi}_1(x,\lambda) + \Psi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\Big)$$

$$P_{21}(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Psi}_2(x,\lambda) - \Psi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\Big)$$

$$P_{22}(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(-\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Psi}_1(x,\lambda)+\Psi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\Big)$$
$$=1+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big[\Psi_2(x,\lambda)(\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda))-\varphi_2(x,\lambda)(\tilde{\Psi}_1(x,\lambda)-\Psi_1(x,\lambda))\Big]$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\varphi_1(x,\lambda)=\varphi_{01}(x,\lambda)$$
$$+\int_{-x}^{x}\{K_{11}(x,t)\left[\cos\lambda t-h\sin\lambda t\right]+K_{12}(x,t)\left[h\cos\lambda t+\sin\lambda t\right]\}\,dt$$
$$\varphi_2(x,\lambda)=\varphi_{02}(x,\lambda)$$
$$+\int_{-x}^{x}\{K_{21}(x,t)\left[\cos\lambda t-h\sin\lambda t\right]+K_{22}(x,t)\left[h\cos\lambda t+\sin\lambda t\right]\}\,dt$$

$$\Psi(x,\lambda)=\Psi_0(x,\lambda)+\int_{-(\pi-x)}^{\pi-x}N(x,t)\begin{pmatrix}\cos\lambda t-h\sin\lambda t\\ h\cos\lambda t+\sin\lambda t\end{pmatrix}dt$$
$$\Psi_1(x,\lambda)=\Psi_{01}(x,\lambda)$$
$$+\int_{-(\pi-x)}^{\pi-x}\{N_{11}(x,t)\left[\cos\lambda t-h\sin\lambda t\right]+N_{12}(x,t)\left[h\cos\lambda t+\sin\lambda t\right]\}\,dt$$
$$\Psi_2(x,\lambda)=\Psi_{02}(x,\lambda)$$
$$+\int_{-(\pi-x)}^{\pi-x}\{N_{21}(x,t)\left[\cos\lambda t-h\sin\lambda t\right]+N_{22}(x,t)\left[h\cos\lambda t+\sin\lambda t\right]\}\,dt$$

eşitlikleri ve $\lambda\in G_\delta$ için $|\Delta(\lambda)|>C_\delta e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi}$ olduğu dikkate alınarak, Lebesgue lemmasından

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\in G_\delta}}\max_{0\le x\le\pi}|P_{11}(x,\lambda)-1|=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\in G_\delta}}\max_{0\le x\le\pi}|P_{22}(x,\lambda)-1|\\&=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\in G_\delta}}\max_{0\le x\le\pi}|P_{12}(x,\lambda)|=\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\in G_\delta}}\max_{0\le x\le\pi}|P_{21}(x,\lambda)|=0\end{aligned}\qquad(3.4.3)$$

yazılır. (3.3.1) ve (3.4.1) den,

$$P_{11}(x,\lambda)=-\frac{1}{h}\Big[\varphi_1(x,\lambda)\tilde{C}_2(x,\lambda)-C_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)+(\tilde{M}(\lambda)-M(\lambda))\varphi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\Big]$$

$$P_{12}(x,\lambda) = -\frac{1}{h}\left[C_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)\tilde{C}_1(x,\lambda) + (M(\lambda)-\tilde{M}(\lambda))\varphi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\right]$$

$$P_{21}(x,\lambda) = -\frac{1}{h}\left[\varphi_2(x,\lambda)\tilde{C}_2(x,\lambda) - C_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) + (\tilde{M}(\lambda)-M(\lambda))\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\right]$$

$$P_{22}(x,\lambda) = -\frac{1}{h}\left[C_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \tilde{C}_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda) + (M(\lambda)-\tilde{M}(\lambda))\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\right]$$

eşitlikleri elde edilir.

Böylece eğer $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ ise, her fiks edilmiş $x$ için $P_{jk}(x,\lambda)$ fonksiyonları $\lambda$ 'ya göre tamdırlar.

Ayrıca (3.4.3)'den yararlanılırsa,

$$P_{11}(x,\lambda) \equiv 1, P_{12}(x,\lambda) \equiv 0,\ P_{22}(x,\lambda) \equiv 1,\ P_{21}(x,\lambda) \equiv 0$$

olduğu çıkar. Bunlar (3.4.2) eşitliklerinde gözönünde bulundurulursa, her $x$ ve her $\lambda$ için,

$$\varphi_1(x,\lambda) \equiv \tilde{\varphi}_1(x,\lambda),\ \varphi_2(x,\lambda) \equiv \tilde{\varphi}_2(x,\lambda),\ \Phi_1(x,\lambda) \equiv \tilde{\Phi}_1(x,\lambda),\ \Phi_2(x,\lambda) \equiv \tilde{\Phi}_2(x,\lambda)$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla $L = \tilde{L}$ dır.

**Teorem 3.4.2:** Eğer her $n \in Z$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ ise o halde $L = \tilde{L}$ dır. Dolayısıyla diskret spektral veriler, $L$ problemini tek olarak belirtmektedir.

**İspat:**

$$M(\lambda) = -\frac{h}{\alpha_0(\lambda-\lambda_0)} - h\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left\{\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)} + \frac{1}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right\}$$

$$\tilde{M}(\lambda) = -\frac{\tilde{h}}{\tilde{\alpha}_0(\lambda-\tilde{\lambda}_0)} - \tilde{h}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left\{\frac{1}{\tilde{\alpha}_n(\lambda-\tilde{\lambda}_n)} + \frac{1}{\tilde{\alpha}_n^0\tilde{\lambda}_n^0}\right\}$$

ve her $n \in Z$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ olduğundan,

$$\frac{M(\lambda)}{h} = \frac{\tilde{M}(\lambda)}{\tilde{h}}$$

olur.

$$\Psi_2(x,\lambda) - \tilde{\Psi}_2(x,\lambda) - \Psi_{02}(x,\lambda) + \tilde{\Psi}_{02}(x,\lambda) =$$

$$= \left(h - \tilde{h}\right) \int_0^{\pi - x} \left\{ \tilde{\tilde{N}}_{21}(x,t) \sin \lambda t + \tilde{N}_{22}(x,t) \cos \lambda t \right\} dt$$

yazılabildiğinden,

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda| \pi} \left[ \Psi_2(x,\lambda) - \tilde{\Psi}_2(x,\lambda) - \Psi_{02}(x,\lambda) + \tilde{\Psi}_{02}(x,\lambda) \right]$$

$$= \left(h - \tilde{h}\right) \lim_{|\lambda| \to \infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda| \pi} \int_0^{\pi - x} \left\{ \tilde{\tilde{N}}_{21}(x,t) \sin \lambda t + \tilde{N}_{22}(x,t) \cos \lambda t \right\} dt$$

ve her bir $x$ için,

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda| \pi} \int_0^{\pi - x} \left\{ \tilde{\tilde{N}}_{21}(x,t) \sin \lambda t + \tilde{N}_{22}(x,t) \cos \lambda t \right\} dt = 0$$

olduğundan,

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda| \pi} \left[ \Psi_2(x,\lambda) - \tilde{\Psi}_2(x,\lambda) - \Psi_{02}(x,\lambda) + \tilde{\Psi}_{02}(x,\lambda) \right] = 0$$

olur ki $\left| \Psi_2(x,\lambda) - \tilde{\Psi}_2(x,\lambda) - \Psi_{02}(x,\lambda) + \tilde{\Psi}_{02}(x,\lambda) \right| \leq \dfrac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda| \pi}}{|\lambda|}$

şeklinde sınırlıdır. O halde Liouville teoreminden

$\left| \Psi_2(x,\lambda) - \tilde{\Psi}_2(x,\lambda) - \Psi_{02}(x,\lambda) + \tilde{\Psi}_{02}(x,\lambda) \right| = c(\text{sabit})$dir.

$x = \pi$ noktasında $\Psi_2(\pi,\lambda) = \Psi_{02}(\pi,\lambda)$, $\tilde{\Psi}_2(\pi,\lambda) = \tilde{\Psi}_{02}(\pi,\lambda)$ olduğundan

$\left| \Psi_2(\pi,\lambda) - \tilde{\Psi}_2(\pi,\lambda) - \Psi_{02}(\pi,\lambda) + \tilde{\Psi}_{02}(\pi,\lambda) \right| = 0$ dır.

Buna göre $\left(h - \tilde{h}\right) \displaystyle\int_0^{\pi - x} \left\{ \tilde{\tilde{N}}_{21}(x,t) \sin \lambda t + \tilde{N}_{22}(x,t) \cos \lambda t \right\} dt = 0$ olur. Bu durumda $h - \tilde{h} = 0$ veya $h = \tilde{h}$ dır. Böylece $\tilde{M}(\lambda) = M(\lambda)$ olur ki Teorem 3.4.1 'den $L = \tilde{L}$ dır.

**Teorem 3.4.3:** Eğer her $n \in Z$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ ise $L = \tilde{L}$ dır, yani $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri $L$ problemini tek olarak belirtir.

**İspat:** $\Delta(\lambda)$ ve $\tilde{\Delta}(\lambda)$ fonksiyonlarının özelliklerinden,

$\displaystyle\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} = 1$ olduğu açıktır. $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $\Delta(\lambda)$ ile $\tilde{\Delta}(\lambda)$ analitik fonksiyonlar olup, analitik fonksiyonların teklik teoreminden, $\Delta(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}(\lambda)$ olduğu çıkar.

$\Psi(x,\lambda_n)=\beta_n\varphi(x,\lambda_n)$ olduğundan

$\tilde{\Psi}(x,\tilde{\lambda}_n)=\tilde{\beta}_n\tilde{\varphi}(x,\tilde{\lambda}_n)=\tilde{\beta}_n\tilde{\varphi}(x,\lambda_n)$

ve

$\tilde{\Psi}(x,\tilde{\lambda}_n)=\tilde{\Psi}(x,\lambda_n)=\beta_n\tilde{\varphi}(x,\lambda_n)=\tilde{\beta}_n\tilde{\varphi}(x,\lambda_n)$

yazılır. Buradan $\beta_n=\tilde{\beta}_n$ olur. Ayrıca $\Delta(\lambda)\equiv\tilde{\Delta}(\lambda)$ olduğundan $\dot{\Delta}(\lambda_n)\equiv\tilde{\dot{\Delta}}(\widetilde{\lambda_n})$ dir. O halde $\dot{\Delta}(\lambda_n)=\alpha_n\beta_n$ eşitliğinden $\alpha_n\beta_n=\tilde{\alpha}_n\tilde{\beta}_n$ yazılır. Buna göre $\alpha_n=\tilde{\alpha}_n$ olur. Böylece Teorem 3.4.2'den $L=\tilde{L}$ olur.

## KAYNAKLAR

[1]. V.A. Ambartsumyan, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53 (1929), 690-695.

[2]. G.Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78 (1945), 1-96.

[3]. N. Levinson, 1949, The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B., pp. 25-30.

[4]. N.,Levinson, 1949, Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators, Casopis. Pest. Mat. Fys. 74, 17-20.

[5]. J. Delsarte, 1938b, Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.

[6]. J.,Delsarte, and J. Lions, 1957, Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.

[7]. B. M. Levitan, 1964, Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.

[8]. A. V. Povzner, 1948, On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb., 23.

[9]. V.A. Marchenko, Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72 (1950), 457-560.

[10]. M.G. Krein, Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76 (1951), 21-24.

[11]. M.G. Krein, On a Method of the Effective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95 (1954), 767-770.

[12] A.N. Tikhonov, Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 1949, 797-800.

[13]. I.M. Gelfand and B. M. Levitan, On the Determination of a Differential Equation by its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 15

(1951), 309-360.

[14]. M.G. Gasimov and B. M. Levitan, About Sturm-Liouville Differential. Operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3, (1964).

[15]. F. Prats and J. Toll, 1959, Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States, Phys. Rev., 113, (1), 363-370.

[16]. H. E.,Moses, 1957, Calculation of the Scattering Potential for One-Dimentional Dirac Equation from Reflection Coefficient and Point Eigenvalues, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, pp. 240.

[17]. M. G. Gasymov, and B. M. Levitan, 1966, The Inverse Problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

[18]. M. G. Gasymov, and T. T. Dzhabiev, 1975, On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator, Baku/ELM., pp. 46-71.

[19]. I. S. Sargsjan, 1966a, A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System, Dokl. Akad. Nauk. Arm. SSR, 42, (2), 77-82.

[20]. I. S. Sargsjan, 1966d, Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional Dirac System. Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., 1, (6), 392-436.

[21]. C. Quigg, J. L. Rosner and H. B. Thacker, 1978, Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and IIPhys. Rev., D 18, No:1, pp. 274-295.

[22]. H. Grosse, and A. Martin, 1979, Theory of the Inverse Problem for Confining Potentials, Nuclear Phys., B 14 B, pp. 413-432.

[23]. E. Abdukadyrov, 1967, Computation of the Regularized Trace for a Dirac System, Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., 22, (4), 17-24.

[24]. A. B. Khasanov, 1994, On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum, Theory and Math. Phys. v. 99, No:1, 20-26.

[25]. M. G. Gasymov, 1967, The Inverse Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n, Soviet Physics Dokl. 11, 676-678.

[26]. S. G. Veliev, 1972, Inverse Problem for the Dirac Systems on the Whole Axis, DEP. VINITI, 4917-4972.

[27]. F. G. Maksudov and S. G. Veliev, 1975, The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis, Soviet Math. Dokl. V. 16, No:6, 1629-1633.

[28]. B. W. Roos and W. C. Sangren, 1961, Spectra for a Pair Singular First Order Differential Equations, Proc. Amer. Math. Soc., V. 12, pp. 468-476.

[29]. B. J. Harris, 1983, Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators, Proc. of the Royal Society of Edinburgh, 95 A, 341-366.

[30]. W. D. Evans and B. J. Harris, 1980, Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., A 88, 1-15.

[31]. M. O. Otelbayev, 1973, Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator, Mat. Zametki, 14, 843-852.

[32]. V. V. Martynov, 1965, Conditions of Discreteness and Continuity of the Spectrum in the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 996-999.

[33]. R. O. Hryniv and Ya. V. Mykytyuk, Inverse Spectral Problems for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials, Inverse Problems 19 (2003) 665-684.

[34]. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, 1999 Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials Mat. Zametki 66 897-912 (in Russian).

[35]. S. Albeverio , F. Gesztesy , R. H$\phi$egh-Krohn and H. Holden 1988, Solvable Models in Quantum Mechanics(New York:Springer)

[36]. S. Albeverio and P. Kurasov, 2000 Singular Perturbations of Differential Operators, Solvable Schrödinger Type Operators (Cambridge: Cambridge University Press)

[37]. A. M. Savchuk, 2001 On Eigenvalues and Eigenfunctions of Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials Mat. Zametki 69 277-85 (in Russian).

[38]. R. O. Hryniv and Ya V. Mykytyuk, 2003 Transformation Operators for

Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials Math. Phys. Anal. Geom.

[39]. J. Pöschel and E. Trubowitz, 1987 Inverse Spectral Theory(Pure Appl. Math. Vol 130)(Orlando, FL:Academic).

[40]. V. A. Marchenko 1950 Some Questions of the Theory of Second Order Differential Operators Dokl. Akad. Nauk SSSR 72 457-60.

[41]. I. M. Gelfand and B. M. Levitan, 1951 On Determination of a Differential Equation by its Spectral Function Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 15 309-60 (in Russian).

[42]. M. G. Krein, 1951 Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem Dokl. Akad. Nauk SSSR 76 21-4 (in Russian).

[43]. O. Hald, 1984 Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem Commun. Pure Appl. Math. 37 539-77.

[44]. L. Andersson, 1988 Inverse Eigenvalue Problems for a Sturm-Liouville Equation in Impedance Form Inverse Problems 4 929-71.

[45]. R. Carlson, 1994 Inverse Sturm-Liouville Problems with a Singularity at Zero Inverse Problems 10 851-64.

[46]. O. Hald and J. R. McLaughlin, 1998 Inverse Problems: Recovery of BV Coefficients From Nodes Inverse Problems 14 245-73.

[47]. V. A. Yurko, 2000 Inverse Problems for Differential Equations with Singularities Lying Inside the Interval J. Inverse III-Posed Probl. 8 89-103.

[48]. G. Freiling and V. Yurko, 2002 On the Determination of Differential Equations with Singularities and Turning Points Results Math. 41 275-90.

[49]. R. Kh. Amirov and V. A. Yurko, On Differential Operators with Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval. Ukr. Math. Jour., 2001, v.53, No11, p. 1443-1458.

[50]. R. Kh Amirov, Direct and Inverse Problems for Differential Operators with Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval Transactions of NAS Azerbaijan.

[51]. R. Kh Amirov, On Sturm-Liouville Operators with Discontinuity Con-

ditions Inside an Interval J. Math. Anal. Appl. 317 (2006) 163-176.

[52]. R. Kh Amirov, On a System of Dirac Differential Equations with Discontinuity Conditions Inside an Interval, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 57, No.5, 2005.

[53]. B. M. Levitan and I. S. Sargsjan, 1970, Introduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.

[54]. V. A. Marchenko, Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev (1977).

[55]. B. Ya. Levin, Entire Functions, Moscow University, Moscow (1971).

[56]. V. F. Zhdanovich, Formulas for the Zeros of Dirichlet Polynomials and Quasipolynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 135, No.8, 1046-1049 (1960).

[57]. M. G. Krein and B. Ya. Levin, On Entire Almost Periodic Functions of Exponential Type, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 64, No.3, 285-287 (1948).

## ÖZGEÇMİŞ

Yalçın Güldü 1969 yılında Sivas'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sivas ' da tamamladı. 1987 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 1992 yılında mezun oldu. Aynı yıl Tuzla Anadolu Teknik Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 1997 yılında Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde Araştırma görevlisi olarak Cumhuriyet Üniversitesi'ne geçti. 1997 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Yüksek Lisans sınavını kazanarak, Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve buradan 2001 yılında mezun oldu. Halen Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde Öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.