T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

gδpr*-KAPALI VE gδpr**-KAPALI KÜMELER ÜZERİNE

Sena ÖZEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Tezin Sunulduğu Tarih: **17.06.2009**

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Erdal EKİCİ

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Sena ÖZEN tarafından **Doç. Dr. Erdal EKİCİ** yönetiminde hazırlanan **“gδpr*-KAPALI VE gδpr**-KAPALI KÜMELER ÜZERİNE”** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Yönetici

Doç. Dr. Faruk SOYDUGAN

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN

Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi:17 / 06 / 2009

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2009/03 no’lu projeden desteklenmiştir.

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı : Sena ÖZEN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamda engin bilgileriyle bizi büyük bir özenle yetiştiren tez danışmanım Sn. Doç. Dr. Erdal EKİCİ’ ye, bizlere matematiğin yanında hayatta yürüyeceğimiz doğru yolları da gösteren Sn. Prof. Dr. Kazım KAYA’ ya , bizleri bugünlere getiren Sn. Prof. Dr. Neşet AYDIN’a, Sn. Doç. Dr. Yakup HACI’ya, Sn. Prof. Dr. Kazım GÜNER’e ve tüm bölüm hocalarıma çok teşekkür ederim.

Sena ÖZEN

ÖZET

gδpr*-KAPALI VE gδpr**-KAPALI KÜMELER ÜZERİNE

Sena ÖZEN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Erdal Ekici

Haziran 2009, Sayfa Sayısı 53

Ekici ve Noiri 2006 yılında normal, almost normal ve mildly normal uzayların bir genellemesini sunmuştur. Bu genellemenin karakterizasyonunda gδpr-açık kümelerden yararlanılmıştır. Bu tezde gδpr*-kapalı kümelerin özellikleri ve gδpr**-kapalı kümelerin özellikleri araştırılmaktadır.

Anahtar sözcükler : gδpr*-kapalı küme, gδpr**-kapalı küme.

ABSTRACT

ON gδpr*-CLOSED AND gδpr**-CLOSED SETS

Sena ÖZEN
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Science and Engineering
Chair for Mathematics Thesis of Master of Science
Advisor: Doç. Dr. Erdal Ekici

June 2009, Page Number 53

In 2006, Ekici and Noiri have introduced a generalization of normal, almost normal and mildly normal spaces. gδpr-open sets are used to characterize this generalization. In this thesis, the properties of gδpr*-closed sets and gδpr**-closed sets are investigated.

Keywords : gδpr*-closed set, gδpr**-closed set.

İÇERİK

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Levine 1970 yılında genelleştirilmiş kapalı kümeler kavramını ve $T_{1/2}$-uzaylar kavramını sunduktan sonra literatürde bu bağlamda birçok çalışmalar olmuştur. Örneğin Caldas ve ark. (2008); El-Shafei ve Zakari (2006); Saraf ve ark. (2005); Cao ve ark. (2005); Muthukumaraswamy ve Devi (2004); Caldas ve Jafari (2003); Cao ve ark. (2002); Baker (2001); Dontchev ve Maki (1999); Dontchev ve Maki (1999); Ekici ve Noiri (2006).

2006 yılında Ekici ve Noiri normal, almost normal ve mildly normal uzayların bir genellemelerini sunmuşlardır. Bu çalışmada Ekici ve Noiri birçok ilişki ve özellikler elde etmişlerdir. Ayrıca karakterizasyonlarda ve ilişkilerde kullanmak üzere gδpr-kapalı küme, gδpr-açık küme ve δp-regular $T_{1/2}$ kavramlarını sunmuşlardır. Bu kavramlarla ilgili özellikleri ve karakterizasyonları araştırmışlar ve normal uzayların genellemelerindeki karakterizasyonlarda ve ilişkilerde kullanmışlardır.

Bu tezimiz altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde tezimizi tanıtacak bilgiler sunulmaktadır.

İkinci bölümde tezimiz için faydalı olacak temel tanım ve teoremler sunulmaktadır.

Üçüncü bölümde $g\delta pr^*$-kapalı kümelerin özellikleri çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde bir kümenin gδpr-çekirdeği ve $g\delta pr^*$-T_1 uzaylar çalışılmıştır.

Beşinci bölümde $g\delta pr^{**}$-kapalı kümelerin özellikleri çalışılmıştır.

Son bölümde $g\delta pr^{*}$-kapalı kümeler ve $g\delta pr^{**}$-kapalı kümeler ile birlikte çeşitli fonksiyon sınıflarının özellikleri araştırılmıştır.

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde topolojik uzayları (X, τ) ve (Y, υ) ya da kısaca X ve Y ile göstereceğiz.

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin kapanışını cl(A) ve içini int(A) ile göstereceğiz.

Tanım 2.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A=int(cl(A)) ise A kümesine düzenli açık denir (Stone, 1937).

Tanım 2.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A=cl(int(A)) ise A kümesine düzenli kapalı denir (Stone, 1937).

Tanım 2.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subset$ int(cl(A)) ise A kümesine önaçık küme denir (Mashhour ve ark., 1982).

Tanım 2.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Önaçık kümelerin tümleyenlerine önkapalı kümeler denir (El-Deeb ve ark., 1983).

Tanım 2.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\forall (x \in) G \in \tau$ için $\mathrm{int(cl}(G)) \cap A \neq \varnothing$ ise x noktasına A kümesinin bir δ-kapanış noktası denir (Velicko, 1968).

A kümesinin tüm δ-kapanış noktalarının kümesine A' nın δ-kapanışı denir ve δ-cl(A) ile gösterilir (Velicko, 1968).

Tanım 2.6. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset$ int(δ-cl(A)) ise A kümesine δ-önaçıktır denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.7. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. δ-önaçık kümelerin tümleyenlerine δ-önkapalı kümeler denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.8. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in X$ alalım. Eğer x'i bulunduran her δ-önaçık küme A' nın x' ten farklı bir noktasını kapsarsa x noktasına A kümesinin bir δ-önyığılma noktası denir (Ekici, 2005).

A kümesinin tüm δ-önyığılma noktalarının kümesi $A^{\delta P\sim}$ ile gösterilir.

Tanım 2.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan tüm δ-önkapalı kümelerin arakesitine A kümesinin δ-önkapanışı denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

A kümesinin δ-önkapanışı δ-pcl(A) ile gösterilir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinde bulunan tüm δ-önaçık kümelerin birleşimine A kümesinin δ-öniçi denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

A kümesinin δ-öniçi δ-pint(A) ile gösterilir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.11. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A'nın δ-önkapalı olması için gerek ve yeter koşul A=δ-pcl(A) olmasıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Bu durumda $A \subset B$ ise δ-pcl(A) $\subset$ δ-pcl(B) olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.13. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda δ-pcl(A) kümesi δ-önkapalıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda δ-pcl(δ-pcl(A))=δ-pcl(A) olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.15. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda $x \in$ δ-pcl(A) olması için gerek ve yeter koşul $\forall (x \in) G \in$ δ-PO(X) için $A \cap G \neq \emptyset$ olmasıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.16. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. B açık küme olmak üzere $A \subseteq B$ iken $cl(A) \subseteq B$ oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş kapalı küme denir (Levine, 1970).

Genelleştirilmiş kapalı kümeye kısaca g-kapalı küme denir (Levine, 1970).

Tanım 2.17. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer X \ A g-kapalı ise A kümesine genelleştirilmiş açık küme denir (Levine, 1970).

Genelleştirilmiş açık kümeye kısaca g-açık küme denir (Levine, 1970).

Tanım 2.18. (X, τ) topolojik uzay olmak üzere her g-kapalı küme kapalı küme ise bu uzaya $T_{1/2}$ –uzay denir (Levine, 1970).

Tanım 2.19. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset B$ ve $B \subset X$ açık olduğunda δ-pcl(A)$\subset$B oluyorsa A kümesine gδp-kapalıdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.20. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer X \ A gδp-kapalı ise A kümesine gδp-açık denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.21. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset B$ ve $B \subset X$ düzenli açık olduğunda δ-pcl(A)$\subset$B oluyorsa A kümesine gδpr-kapalıdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.22. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer X \ A gδpr-kapalı ise A kümesine gδpr-açık denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.23. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\forall$ x, $y \in X$ için $x \in cl(\{y\})$ iken $y \in cl(\{x\})$ oluyorsa bu uzaya simetrik uzay denir (Levine, 1970).

Tanım 2.24. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan tüm açık kümelerin arakesitine A' nın çekirdeği denir (Maki, 1986).

Bir $A \subset X$ kümesinin çekirdeği çek(A) ile gösterilir.

Tanım 2.25. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan tüm önkapalı kümelerin arakesitine A kümesinin önkapanışı denir (El-Deeb ve ark., 1983).

A kümesinin önkapanışı pcl(A) ile gösterilir (El-Deeb ve ark., 1983).

Tanım 2.26. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A\subset B$ ve $B\subset X$ açık olduğunda $pcl(A)\subset B$ oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş p-kapalı küme denir (Maki ve ark., 1996).

Genelleştirilmiş p-kapalı kümeye kısaca gp-kapalı küme denir (Maki ve ark., 1996).

Tanım 2.27. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A\subset B$ ve $B\subset X$ düzenli açık olduğunda $cl(A)\subset B$ oluyorsa A kümesine düzenli genelleştirilmiş kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993).

Düzenli genelleştirilmiş kapalı kümeye kısaca rg-kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993).

Tanım 2.28. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A\subset B$ ve $B\subset X$ düzenli açık olduğunda $pcl(A)\subset B$ oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş öndüzenli kapalı veya düzenli genelleştirilmiş önkapalı küme denir (Gnanambal, 1997; Noiri, 1998).

Düzenli genelleştirilmiş önkapalı kümeye kısaca gpr-kapalı küme denir (Gnanambal, 1997; Noiri, 1998).

Uyarı 2.29. (Ekici ve Noiri, 2006). (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki diyagram geçerlidir:

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{kapalı} & \rightarrow & \text{g-kapalı} & \rightarrow & \text{rg-kapalı} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{önkapalı} & \rightarrow & \text{gp-kapalı} & \rightarrow & \text{gpr-kapalı} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\delta\text{-önkapalı} & \rightarrow & \text{g}\delta\text{p-kapalı} & \rightarrow & \text{g}\delta\text{pr-kapalı}
\end{array}
$$

Tanım 2.30. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Her δ-önaçık kümenin görüntüsü δ-önaçık küme ise f ye δ-önaçık fonksiyon denir (Ekici, 2004).

Tanım 2.31. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Her δ-önkapalı kümenin görüntüsü δ-önkapalı küme ise f ye δ-önkapalı fonksiyon denir (Ekici, 2004).

Tanım 2.32. X, Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ δ-önkapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ δ-önkapalı ise f fonksiyonuna δ-önkararsızdır denir (Ekici, 2004).

Tanım 2.33. X, Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ önaçık ise f fonksiyonuna önsüreklidir denir (Blumberg, 1922; Berner, 1982; Mashhour ve ark., 1982; Rose, 1984; Ahmad ve Noiri, 1985).

Tanım 2.34. X, Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ önkapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ önkapalı ise f fonksiyonuna önkararsızdır denir (Reilly ve Vamanamurthy, 1985).

Tanım 2.35. X, Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ δ-önkapalı ise f fonksiyonuna δ-hemen hemen süreklidir denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.36. X, Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her

$A \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδp-kapalı ise f fonksiyonuna gδp-süreklidir denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.37. X, Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr-süreklidir denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.38. X, Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ gδp-kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδp-kapalı ise f fonksiyonuna gδp-kararsızdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.39. X, Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ gδpr-kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr-kararsızdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

BÖLÜM 3

gδpr*-KAPALI KÜMELER SINIFI

VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.1. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesi için $A \subset B$ ve $B \subset X$ gδpr-açık olduğunda $cl(A) \subset B$ oluyorsa A kümesine gδpr*-kapalı küme denir.

Tanım 3.2. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $X \setminus A$ kümesi gδpr*-kapalı ise A kümesine gδpr*-açık küme denir.

Teorem 3.3. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kapalı bir küme ise A gδpr*-kapalıdır.

İspat:

Kabul edelim ki $A \subset X$ kapalı bir küme olsun. B gδpr-açık küme ve $A \subset B$ olsun. Bu durumda $cl(A)=A \subset B$ olacaktır. Böylece $cl(A) \subset B$ ve A gδpr*-kapalıdır.

Uyarı 3.4. Her gδpr*-kapalı küme kapalı küme olmak zorunda değildir.

Örnek 3.5. $X=\{a, b\}$ ve $\tau =\{\emptyset, \{a\}, X\}$ olmak üzere $A=\{a\}$ gδpr*-kapalı kümedir ancak kapalı küme değildir.

Teorem 3.6. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A açık bir küme ise A gδpr*-açıktır.

İspat:

Kabul edelim ki $A \subset X$ açık bir küme olsun. Dolayısıyla $X \setminus A$ kapalıdır. Bir önceki teoremden $X \setminus A$ gδpr*-kapalıdır. O halde A gδpr*-açıktır.

Tanım 3.7. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan tüm açık kümelerin arakesitine A' nın çekirdeği denir (Maki, 1986).

Bir $A \subset X$ kümesinin çekirdeği çek(A) ile gösterilir.

Tanım 3.8. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan tüm gδpr-açık kümelerin arakesitine A kümesinin gδpr-çekirdeği denir.

Bir $A \subset X$ kümesinin gδpr-çekirdeği gδpr-çek(A) ile gösterilir.

Teorem 3.9. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A'nın gδpr*-kapalı olması için gerek ve yeter koşul cl(A) ⊂ gδpr-çek(A) olmasıdır.

İspat:

A gδpr*-kapalı ve $A \subset B$ ve B gδpr-açık olsun. A gδpr*-kapalı olduğundan cl(A) ⊂ B dir. Buradan cl(A) ⊂ gδpr-çek(A) elde edilir.

Tersine, cl(A) ⊂ gδpr-çek(A) olsun. $A \subset B$ ve B gδpr-açık olsun. Bu durumda

$$\mathrm{cl}(A) \subset g\delta pr\text{-çek}(A) \subset B$$

olur. Böylece cl(A) ⊂ B olup A gδpr*-kapalıdır.

Tanım 3.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. O açık küme ve $A \subseteq O$ iken cl(A) ⊆ O oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) küme denir. (Levine, 1970).

Teorem 3.11. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A kümesi gδpr*-kapalı ise g-kapalıdır.

İspat:

Kabul edelim ki A gδpr*-kapalı ve B açık küme olmak üzere $A \subset B$ olsun. Her açık küme gδpr-açık olduğundan B gδpr-açıktır. A gδpr*-kapalı olduğundan cl(A) ⊂ B dir. Dolayısıyla A g-kapalıdır.

Tanım 3.12. X bir topolojik uzay olsun. Her gδpr*-kapalı küme kapalı ise uzaya gδpr*-$T_{1/2}$ uzay denir.

Teorem 3.13. X bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayı $T_{1/2}$-uzay ise gδpr*-$T_{1/2}$ uzaydır.

İspat:

Kabul edelim ki X uzayı $T_{1/2}$-uzay olsun. $A \subset X$ gδpr*-kapalı kümesini alalım. Her gδpr*-kapalı küme g-kapalı olduğundan A g-kapalıdır. Ayrıca, X uzayı $T_{1/2}$-uzay olduğundan A kapalıdır.

O halde X, gδpr*-$T_{1/2}$ uzaydır.

Teorem 3.14. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. X uzayı gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olmak üzere A kümesinin gδpr*-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $cl(A) \subset$ çek(A) olmasıdır.

İspat:

A gδpr*-kapalı, $A \subset B$ ve B gδpr-açık olsun. A gδpr*-kapalı olduğundan $cl(A) \subset B$ olur. Buradan $cl(A) \subset$ çek(A) elde edilir.

Tersine, $cl(A) \subset$ çek(A) ve $A \subset B$ ve B gδpr-açık olsun. Buradan

$$cl(A) \subset \text{çek}(A) \subset B$$

olur. Böylece $cl(A) \subset B$ olup A gδpr*-kapalıdır.

Tanım 3.15. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ise gδpr*-cl(A)$= \bigcap \{B : A \subset B$ ve B, X de gδpr*-kapalı küme$\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.16. X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $x \in$ gδpr*-cl(A) olması için gerek ve yeter koşul x' i bulunduran her B gδpr*-açık kümesi için $B \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat:

$x \in$ gδpr*-cl(A) ve kabul edelim ki $B \cap A = \emptyset$ olacak şekilde x' i bulunduran bir B gδpr*-açık kümesi var olsun. Bu durumda $A \subset X \setminus B$ olduğundan gδpr*-cl(A)$\subset$

$X \setminus B$ dir. Buradan $x \notin$ gδpr*-cl(A) olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $B \cap A \neq \emptyset$ olmalıdır.

Tersine, kabul edelim ki $x \notin$ gδpr*-cl(A) olsun. O zaman $x \notin B$ olacak şekilde $A \subset B$ olan bir gδpr*-kapalı alt kümesi vardır. Buradan $x \in X \setminus B$ ve $X \setminus B$ gδpr*-açıktır.

$$(X \setminus B) \cap A = \emptyset$$

olup bu bir çelişkidir. O halde $x \in$ gδpr*-cl(A) olmalıdır.

Teorem 3.17. X bir topolojik uzay ve A, $B \subset X$ olsun. $A \subset B$ ise gδpr*-cl(A)$\subset$ gδpr*-cl(B) olur.

İspat:

$A \subset B$ olmak üzere $x \in$ gδpr*-cl(A) olsun. x' i bulunduran her G gδpr*-açık kümesi için $G \cap A \neq \emptyset$ olacaktır. $A \subset B$ olduğundan $G \cap B \neq \emptyset$ dır. Dolayısıyla $x \in$ gδpr*-cl(B) dir.

O halde gδpr*-cl(A)$\subset$gδpr*-cl(B) dir.

Teorem 3.18. X bir topolojik uzay ve A, $B \subset X$ olsun. gδpr*-cl(A)$\cap$gδpr*-cl(B)$\supset$gδpr*-cl($A \cap B$) olur.

İspat:

$x \in$ gδpr*-cl($A \cap B$) olarak alalım. Bu durumda x' i bulunduran her U gδpr*-açık kümesi için $U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ dir. Böylece x' i bulunduran her U gδpr*-açık kümesi için

$$U \cap B \neq \emptyset \text{ ve } U \cap A \neq \emptyset$$

olacaktır.

Dolayısıyla $x \in$ gδpr*-cl(A) ve $x \in$ gδpr*-cl(B) olur. Sonuç olarak gδpr*-cl(A)$\cap$gδpr*-cl(B)$\supset$gδpr*-cl($A \cap B$) elde ederiz.

Teorem 3.19. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin gδpr*-açık olması için gerek ve yeter koşul B gδpr-kapalı olmak üzere $B \subset A$ iken $B \subset int(A)$ olmasıdır.

İspat:

Kabul edelim ki A gδpr*-açık ve B gδpr-kapalı ve $B \subset A$ olsun. Buradan $X \setminus B$ gδpr-açık ve $X \setminus A \subset X \setminus B$ dir. $X \setminus A$ gδpr*-kapalı olduğundan

$$cl(X \setminus A)=X \setminus int(A) \subset X \setminus B$$

olur. Sonuç olarak $B \subset int(A)$ elde ederiz.

Tersine B gδpr-kapalı bir küme olmak üzere $B \subset A$ iken $B \subset int(A)$ olsun.

$G \subset X$ gδpr-açık ve $X \setminus A \subset G$ olsun. Bu takdirde $X \setminus G \subset A$ olup $X \setminus G \subset int(A)$ dır. Buradan

$$X \setminus int(A)= cl(X \setminus A) \subset G$$

olduğundan $X \setminus A$ gδpr*-kapalıdır. Dolayısıyla A gδpr*-açık olacaktır.

Teorem 3.20. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A gδpr*-kapalı küme ise $cl(A) \setminus A$ kümesinin boş kümeden farklı gδpr-kapalı alt kümesi yoktur.

İspat:

A gδpr*-kapalı küme olmak üzere B gδpr-kapalı bir küme ve $B \subset cl(A) \setminus A$ olsun. Buradan $X \setminus B$ gδpr-açık olacaktır. A gδpr*-kapalı küme olduğundan $cl(A) \subset X \setminus B$ ve buradan $B \subset X \setminus cl(A)$ olacaktır. Böylece

$$B \subset cl(A) \cap (X \setminus cl(A))=\emptyset$$

olacağından $B=\emptyset$ elde ederiz.

Sonuç olarak $cl(A) \setminus A$ kümesinin boş kümeden farklı gδpr-kapalı alt kümesi yoktur.

Tanım 3.21. X bir topolojik uzay olsun. $\forall$ x, $y\in X$ için $x\in cl(\{y\})$ iken $y\in cl(\{x\})$ oluyorsa bu uzaya simetrik uzay denir (Levine, 1970).

Teorem 3.22. X bir topolojik uzay olsun. Her gδpr-kapalı küme kapalı ve X uzayı simetrik olmak üzere $\forall$ $x\in X$ için $\{x\}$ kümesi gδpr*-kapalıdır.

İspat:

X simetrik uzay olmak üzere kabul edelim ki bir $x\in X$ için $\{x\}$ kümesi gδpr*-kapalı olmasın. Bu durumda $\{x\}\subset B$ ve B gδpr-açık olmak üzere $cl(\{x\})\not\subset B$ olacak biçimde bir B kümesi vardır. Buradan

$$cl(\{x\})\cap(X\setminus B)\neq\emptyset$$

olur. Buradan $y\in cl(\{x\})\cap(X\setminus B)$ olan bir y vardır. Bu durumda $x\in cl(\{y\})\subset X\setminus B$ olduğundan $x\notin B$ dir. Bu ise $\{x\}\subset B$ olmasıyla çelişir. O halde $\forall$ $x\in X$ için $\{x\}$ gδpr*-kapalıdır.

Teorem 3.23. Bir X topolojik uzayında her tek nokta kümesi gδpr-kapalı ya da açık ise X bir gδpr*-$T_{1/2}$ uzaydır.

İspat:

X bir topolojik uzay olmak üzere her tek nokta kümesi gδpr-kapalı ya da açık olsun.

$A\subset X$ gδpr*-kapalı küme olsun. $x\in cl(A)$ alalım. $\{x\}$ kümesi gδpr-kapalı olsun. Kabul edelim ki $x\notin A$ olsun. Bu durumda $\{x\}\subset cl(A)\setminus A$ olur. $\{x\}$ kümesi gδpr-kapalı olduğundan $\{x\}=\emptyset$ olmalıdır. Bu durumda bu bir çelişkidir. O halde $x\in A$ dır. $\{x\}$ kümesi açık olsun. $x\in cl(A)$ olduğundan

$$\{x\}\cap A\neq\emptyset$$

dır. Bu durumda $x\in A$ dır.

O halde $x\in A$ olarak elde ettiğimizden $cl(A)\subset A$ elde edilir. Böylece $cl(A)=A$ olduğuna ulaşırız.

Sonuç olarak X gδpr*-$T_{1/2}$ uzaydır.

Teorem 3.24. Bir X topolojik uzayı $g\delta pr^*$-$T_{1/2}$ uzayı ise her tek nokta kümesi gδpr-kapalı ya da açıktır.

İspat:

X bir $g\delta pr^*$-$T_{1/2}$ uzay ve $x\in X$ olsun. Kabul edelim ki $\{x\}$ gδpr-kapalı olmasın. Dolayısıyla $X \setminus \{x\}$ gδpr-açık değildir. O halde $X \setminus \{x\}$ $g\delta pr^*$-kapalıdır. X $g\delta pr^*$-$T_{1/2}$ uzay olduğundan $X \setminus \{x\}$ kapalıdır ve böylece $\{x\}$ açıktır.

Sonuç: Bir X topolojik uzayının $g\delta pr^*$-$T_{1/2}$ uzay olması için gerek ve yeter koşul her tek nokta kümesinin gδpr-kapalı ya da açık olmasıdır.

İspat: Teorem 3.23 ve Teorem 3.24 ten açıktır.

Teorem 3.25. X bir topolojik uzay ve A, X in bir $g\delta pr^*$-kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda $cl(A) \setminus A$ kümesi gδpr-kapalı ise A kapalı kümedir.

İspat:

A, X in bir $g\delta pr^*$-kapalı alt kümesi ve $cl(A) \setminus A$ gδpr-kapalı küme olsun. A $g\delta pr^*$-kapalı küme olduğundan $cl(A) \setminus A$ nın boş kümeden farklı gδpr-kapalı alt kümesi yoktur. Bu durumda

$$cl(A) \setminus A=\varnothing$$

olacaktır. Yani $cl(A)=A$ dır. Sonuç olarak A kapalıdır.

Teorem 3.26. X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A $g\delta pr^*$-kapalı ve gδpr-açık bir küme ise A kapalıdır.

İspat:

A $g\delta pr^*$-kapalı ve gδpr-açık bir küme olsun. $A\subset A$ ve A $g\delta pr^*$-kapalı olduğundan dolayı $cl(A)\subset A$ dır. Bu durumda $cl(A)=A$ ve böylece A kapalıdır.

Teorem 3.27. X bir topolojik uzay, A ve B, X in iki alt kümesi olsun. Bu durumda A ve B $g\delta pr^*$-kapalı kümeler ise $A\cup B$ kümesi de $g\delta pr^*$-kapalıdır.

İspat:

A ve B gδpr*-kapalı iki küme olsun.

$A \cup B \subset C$ olmak üzere C gδpr-açık kümesini alalım. A ve B gδpr*-kapalı kümeler olduğundan $cl(A) \subset C$ ve $cl(B) \subset C$ olacaktır. Bu durumda

$$cl(A) \cup cl(B) \subset C$$

ve buradan $cl(A \cup B) \subset C$ elde ederiz. Sonuç olarak $A \cup B$ gδpr*-kapalıdır.

Teorem 3.28. X bir topolojik uzay ve A, X in bir gδpr*-kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda $A \subset B \subset cl(A)$ ise B kümesi de gδpr*-kapalı kümedir.

İspat:

A, X in bir gδpr*-kapalı alt kümesi olmak üzere $A \subset B \subset cl(A)$ olsun. $B \subset C$ ve C gδpr-açık bir küme olsun. $A \subset B \subset C$ ve A gδpr*-kapalı olduğundan $cl(A) \subset C$ ve buradan

$$cl(B) \subset cl(A) \subset C$$

olacaktır. Böylece B gδpr*-kapalı kümedir.

Teorem 3.29. X bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ gδpr*-açık küme ve $int(A) \subset B \subset A$ ise B gδpr*-açıktır.

İspat:

A, X in bir gδpr*-açık alt kümesi ve $int(A) \subset B \subset A$ olsun. Bu durumda

$$X \setminus A \subset X \setminus B \subset X \setminus int(A) = cl(X \setminus A)$$

olacaktır. Bu durumda $X \setminus A$ gδpr*-kapalı olduğundan $X \setminus B$ gδpr*-kapalı olacaktır. Böylece B kümesi gδpr*-açıktır.

Teorem 3.30. X bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ gδpr*-açık küme ise int(A) da gδpr*-açıktır.

İspat:

A, X in bir gδpr*-açık alt kümesi olmak üzere

$$\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(A) \subset A$$

olduğundan dolayı int(A) kümesi de gδpr*-açıktır.

Teorem 3.31. X bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ ve A gδpr*- kapalı küme ise cl(A) da gδpr*-kapalı kümedir.

İspat:

A, X in gδpr*-kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$A \subset \mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(A)$$

olduğundan cl(A) nın gδpr*-kapalı küme olduğunu elde ederiz.

Teorem 3.32. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A gδpr*-açık, B gδpr-açık ve $\mathrm{int}(A) \cup (X \setminus A) \subset B$ ise B=X olur.

İspat:

A bir gδpr*-açık küme ve B bir gδpr-açık küme olmak üzere $\mathrm{int}(A) \cup (X \setminus A) \subset B$ olsun. Buradan

$$X \setminus B \subset X \setminus (\mathrm{int}(A) \cup (X \setminus A))$$

$$=(X \setminus \mathrm{int}(A)) \cap A = \mathrm{cl}(X \setminus A) \cap A$$

$$=\mathrm{cl}(X \setminus A) \setminus (X \setminus A)$$

olur. Bu durumda

$$X \setminus B \subset \mathrm{cl}(X \setminus A) \setminus (X \setminus A)$$

olacaktır. $X \setminus B$ gδpr-kapalı ve $X \setminus A$ gδpr*-kapalı olduğundan $\mathrm{cl}(X \setminus A) \setminus (X \setminus A)$ nın boş kümeden farklı gδpr-kapalı alt kümesi yoktur. O halde $X \setminus B = \varnothing$ olmalıdır.

Sonuç olarak X=B elde ederiz.

Teorem 3.33. X bir topolojik uzay olmak üzere X in her alt kümesi $g\delta pr^*$-kapalı ise X in açık kümelerinin sınıfı, kapalı kümelerinin sınıfına eşit olur.

İspat:

X bir topolojik uzay olmak üzere her alt kümesi $g\delta pr^*$-kapalı olsun. Bir A açık kümesi için $A \subseteq A$ ve A $g\delta pr^*$-kapalı olduğundan $cl(A) \subset A$ olur. Üstelik $A \subset cl(A)$ olduğundan cl(A)=A ve buradan A kapalıdır.

A kapalı küme olsun. Bu durumda X \ A açıktır.

$$X \setminus A \subseteq X \setminus A \text{ ve } X \setminus A$$

$g\delta pr^*$-kapalı olduğundan $cl(X \setminus A) \subseteq X \setminus A$ dır. O halde $cl(X \setminus A) = X \setminus A$ ve buradan X \ A kapalıdır.

Sonuç olarak A açıktır.

Teorem 3.34. Her $g\delta pr$-açık küme açık olmak üzere ve X bir regüler topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ olsun. Bu durumda A kompakt bir küme ise $g\delta pr^*$-kapalıdır.

İspat:

Her $g\delta pr$-açık küme açık olmak üzere, X bir regüler topolojik uzay ve A kompakt bir alt kümesi, $A \subset B$ ve B $g\delta pr$-açık bir küme olsun. Bu durumda

$$A \subset G \subset cl(G) \subset B$$

olacak şekilde bir G $g\delta pr$-açık kümesi vardır. Böylece $cl(A) \subset B$ olacaktır. O halde A kümesi $g\delta pr^*$-kapalıdır.

Teorem 3.35. X bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ olsun. A $g\delta pr^*$-kapalı ise $cl(A) \setminus A$ $g\delta pr^*$-açıktır.

İspat:

A $g\delta pr^{*}$-kapalı bir küme olmak üzere $B \subset cl(A) \setminus A$ ve B $g\delta pr$-kapalı küme olsun. A $g\delta pr^{*}$-kapalı bir küme olduğundan dolayı $B=\varnothing$ ve buradan

$$B \subset int(cl(A) \setminus A)$$

olacaktır. Sonuç olarak $cl(A) \setminus A$ $g\delta pr^{*}$-açık bir kümedir.

Teorem 3.36. X bir topolojik uzay olmak üzere $A, B \subset X$ olsun. A ve B $g\delta pr^{*}$-açık kümeler ise $A \cap B$ $g\delta pr^{*}$-açık bir kümedir.

İspat:

A ve B $g\delta pr^{*}$-açık kümeler olsun. Bu durumda $X \setminus A$ ve $X \setminus B$ $g\delta pr^{*}$-kapalıdır.

$$(X \setminus A) \cup (X \setminus B) \subset C$$

olmak üzere C kümesi $g\delta pr$-açık olsun. $X \setminus A$ ve $X \setminus B$ $g\delta pr^{*}$-kapalı kümeler olduğundan

$$cl(X \setminus A) \subset C \text{ ve } cl(X \setminus B) \subset C$$

olacaktır. Bu durumda

$$cl(X \setminus A) \cup cl(X \setminus B)=cl((X \setminus A) \cup (X \setminus B))$$

$$=cl(X \setminus (A \cap B)) \subset C$$

olur. Böylece $X \setminus (A \cap B)$ $g\delta pr^{*}$-kapalı bir küme olacaktır. Böylece $A \cap B$ $g\delta pr^{*}$-açık bir kümedir.

Teorem 3.37. X bir topolojik uzay olmak üzere X in bir $g\delta pr^{*}$-$T_{1/2}$ uzay olması için gerek ve yeter şart her $A \subset X$ $g\delta pr^{*}$-açık alt kümesinin açık olmasıdır.

İspat:

X $g\delta pr^{*}$-$T_{1/2}$ uzay ve A bir $g\delta pr^{*}$-açık alt küme olsun. Buradan $X \setminus A$ $g\delta pr^{*}$-

kapalıdır. X uzayı gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olduğundan X \ A kapalıdır. Dolayısıyla A açıktır.

Tersine, A gδpr*-kapalı bir küme olsun. Bu durumda X \ A gδpr*-açıktır. Her gδpr*-açık alt küme açık olduğundan X \ A açıktır. Böylece A kapalıdır. Yani X bir gδpr*-$T_{1/2}$ uzaydır.

BÖLÜM 4

BİR KÜMENİN gδpr-ÇEKİRDEĞİ VE

gδpr*–T_1 UZAYLARI

Teorem 4.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A gδpr–açık ise, A=gδpr-çek(A) olur.

İspat: Kabul edelim ki A gδpr–açık küme olsun. gδpr–çek(A) nın tanımı “X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan tüm gδpr-açık kümelerin arakesitine A kümesinin gδpr-çekirdeği denir.” olduğundan A=gδpr-çek(A) dır.

Teorem 4.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in$ gδpr-çek(A) ancak ve ancak her $(x \in)$G gδpr–kapalı kümesi için $A \cap G \neq \emptyset$ olur.

İspat:

$x \in$ gδpr-çek(A) olsun. Kabul edelim ki $x \in G$ gδpr–kapalı ve $A \cap G = \emptyset$ olsun. Buradan $A \subset X \setminus G$ ve $X \setminus G$ gδpr-açıktır. Hipotezden $x \in X \setminus G$ olur. Bu bir çelişkidir.

Tersine her $(x \in)$G gδpr–kapalı kümesi için $A \cap G \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki $x \notin$ gδpr-çek(A) olsun. Buradan $x \notin \bigcap \{$ U: $A \subset U$, U gδpr-açık $\}$ olur. Böylece $\exists U$ gδpr-açık kümesi vardır ∍ $A \subset U$ ve $x \notin U$ dur. $x \in X \setminus U$ ve $x \in X \setminus U$ gδpr–kapalıdır. O halde $(X \setminus U) \cap A \neq \emptyset$ olur. $A \subset U$ olduğundan $(X \setminus A) \cap A \neq \emptyset$ olur ki çelişkidir.

Tanım 4.3. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ise gδpr-cl(A)=$\bigcap \{B : A \subset B$ ve B, X de gδpr-kapalı küme$\}$ olarak tanımlanır (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 4.4. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A kapalı ise gδpr-cl(A) $\subset$ gδpr-çek(A) olur.

İspat:

Kabul edelim ki A kapalı olsun. Bu durumda gδpr-cl(A)=A$\subset$gδpr-çek(A) olur.

Tanım 4.5. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olan her x, y noktası için $x\in A$, $y\notin A$ ve $x\notin B$, $y\in B$ olacak biçimde A ve B gδpr*-açık kümeleri var ise X uzayına gδpr*- T_1 uzaydır denir.

Teorem 4.6. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x\in X$ için {x} kümesi gδpr*- kapalı ise (X, τ) topolojik uzayı gδpr*–T_1 uzaydır.

İspat:

$\forall x\in X$ için {x} kümesi gδpr*- kapalı olsun. x, $y \in X$ olmak üzere $x \neq y$ alalım. Bu durumda {x} ve {y} kümeleri gδpr*- kapalı olur. Dolayısıyla $X \setminus \{x\}$ ve $X \setminus \{y\}$ gδpr*-açıktır. Ayrıca $x \notin X \setminus \{x\}$, $y \in X \setminus \{x\}$ ve $x \in X \setminus \{y\}$, $y \notin X \setminus \{y\}$ olur.

O halde (X, τ), gδpr*–T_1 uzaydır.

BÖLÜM 5

gδpr**-KAPALI KÜMELER SINIFI VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 5.1. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesi için $A \subset B$ ve $B \subset X$ gδpr-açık olduğunda δ-pcl(A)$\subset$B oluyorsa A kümesine gδpr**-kapalı küme denir.

Tanım 5.2. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere $X \setminus A$ kümesi gδpr**-kapalı ise A kümesine gδpr**-açık küme denir.

Teorem 5.3. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A gδpr*-kapalı bir küme ise A gδpr**-kapalıdır.

İspat:

A gδpr*-kapalı bir küme B gδpr-açık bir küme olmak üzere $A \subset B$ olsun. A gδpr*-kapalı olduğundan cl(A)$\subset$B olacaktır. Bu durumda δ-pcl(A)$\subset$B olur. O halde A gδpr**-kapalıdır.

Uyarı 5.4. Her gδpr**-kapalı küme gδpr*-kapalı küme olmak zorunda değildir.

Örnek 5.5. X={a, b, c, d} ve τ={$\emptyset$, X, {a}, {c}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}} olmak üzere A={a} kümesi gδpr**-kapalı kümedir ancak gδpr*-kapalı küme değildir.

Teorem 5.6. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A δ-önkapalı bir küme ise A gδpr**-kapalıdır.

İspat:

$A \subset X$ δ-önkapalı bir küme ve B gδpr-açık bir küme olmak üzere $A \subset B$ olsun.

Bu durumda

$$\delta\text{-pcl}(A)=A\subset B$$

dir. Buradan, δ-pcl(A)$\subset$B olduğundan A gδpr**-kapalıdır.

Uyarı 5.7. Her gδpr**-kapalı küme δ-önkapalı küme olmak zorunda değildir.

Örnek 5.8. X={a, b, c} ve τ={∅, X, {a}, {b}, {a, b}} olmak üzere A={b} kümesi gδpr**-kapalı kümedir ancak δ-önkapalı küme değildir.

Teorem 5.9. X bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. Eğer A δ-önaçık bir küme ise A gδpr**-açıktır.

İspat:

Kabul edelim ki A$\subset$X δ-önaçık bir küme olsun. Dolayısıyla X \ A δ-önkapalıdır. Bir önceki teoremden X \ A gδpr**-kapalıdır. O halde A gδpr**-açıktır.

Teorem 5.10. X bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. Eğer A gδpr**-kapalı ve gδpr-açık bir küme ise A δ-önkapalıdır.

İspat:

A$\subset$X gδpr**-kapalı ve gδpr-açık bir küme olarak alalım. Bu durumda A$\subset$A ve A gδpr**-kapalı olduğundan δ-pcl(A)$\subset$A dır. Sonuç olarak A δ-önkapalıdır.

Teorem 5.11. X bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. Eğer A gδpr**-açık ve gδpr-kapalı bir küme ise A δ-önaçıktır.

İspat:

A$\subset$X gδpr**-açık ve gδpr-kapalı bir küme olarak alalım. Dolayısıyla X \ A gδpr**-kapalı ve gδpr-açık bir kümedir. Bir önceki teoremden X \ A δ-önkapalıdır.

O halde A δ-önaçıktır.

Teorem 5.12. X bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. Her gδpr-açık küme açık olmak üzere A g-kapalı bir küme ise A gδpr**-kapalıdır.

İspat:

Kabul edelim ki A, X’ in g-kapalı bir alt kümesi, $A \subset B$ ve B gδpr-açık küme olsun. Hipotezden B açık bir küme olup A g-kapalı olduğundan $cl(A) \subset B$ dir. Buradan

$$\delta\text{-}pcl(A) \subset B$$

olacağından A’ nın gδpr**-kapalı olduğu elde edilir.

Teorem 5.13. Her gδpr-kapalı küme kapalı ve X uzayı simetrik ise $\forall\ x \in X$ için $\{x\}$ gδpr**-kapalıdır.

İspat:

X simetrik bir topolojik uzay olsun. Kabul edelim ki bir $x \in X$ için $\{x\}$ gδpr**-kapalı olmasın. Bu durumda $\{x\} \subset B$ ve B gδpr-açık olmak üzere $\delta\text{-}pcl(\{x\}) \not\subset B$ olacak biçimde B kümesi vardır. Bu durumda $cl(\{x\}) \not\subset B$ dir. Buradan

$$cl(\{x\}) \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$$

ve

$$y \in cl(\{x\}) \cap (X \setminus B)$$

olacak biçimde y vardır. Böylece

$$x \in cl(\{y\}) \subset X \setminus B$$

olduğundan $x \notin B$ olur. Bu ise $\{x\} \subset B$ olmasıyla çelişir. O halde $\forall\ x \in X$ için $\{x\}$ gδpr**-kapalıdır.

Teorem 5.14. X bir topolojik uzay olmak üzere X’ in her alt kümesi gδpr**-kapalı ise her gδpr-açık küme δ-önkapalıdır.

İspat:

Kabul edelim ki X' in her alt kümesi gδpr**-kapalı olsun. $B \subset X$ gδpr-açık kümesini alalım. $B \subset B$ ve B gδpr**-kapalı olduğundan δ-pcl(B)$\subset$B dir. Aynı zamanda $B \subset$ δ-pcl(B) olduğundan δ-pcl(B)=B elde edilir. O halde B δ-önkapalıdır.

Teorem 5.15. X bir topolojik uzay olmak üzere X' in her alt kümesi gδpr**-açık ise her gδpr-açık küme δ-önkapalıdır.

İspat:

Kabul edelim ki X' in her alt kümesi gδpr**-açık olsun. $B \subset X$ alalım. Buradan $X \setminus B$ gδpr**-açıktır. Yani B gδpr**-kapalıdır. Bir önceki teoremden her gδpr-açık küme δ-önkapalıdır.

Tanım 5.16. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere gδpr**-cl(A)=$\bigcap$\{B : $A \subset B$ ve B, X de gδpr**-kapalı küme\} olarak tanımlanır.

Teorem 5.17. X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olmak üzere $x \in$ gδpr**-cl(A) olması için gerek ve yeter koşul x' i bulunduran her B gδpr**-açık kümesi için $B \cap A \neq \varnothing$ olmasıdır.

İspat:

$x \in$ gδpr**-cl(A) olmak üzere kabul edelim ki $B \cap A = \varnothing$ olacak şekilde x' i bulunduran bir B gδpr**-açık kümesi var olsun. Bu durumda $A \subset X \setminus B$ olduğundan

$$g\delta pr^{**}\text{-}cl(A) \subset X \setminus B$$

dir. O halde $x \notin$ gδpr**-cl(A) olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $B \cap A \neq \varnothing$ olmalıdır.

Tersine, x' i bulunduran her B gδpr**-açık kümesi için $B \cap A \neq \varnothing$ olmak üzere kabul edelim ki $x \notin$ gδpr**-cl(A) olsun. O zaman $x \notin B$ olacak şekilde $A \subset B$ olan bir B gδpr**-kapalı alt kümesi vardır. Buradan $x \in X \setminus B$ ve $X \setminus B$ gδpr**-açıktır.

$$(X \setminus B) \cap A = \varnothing$$

olup bu bir çelişkidir. O halde $x \in g\delta pr^{**}\text{-cl}(A)$ olmalıdır.

Teorem 5.18. X bir topolojik uzay ve A, $B \subset X$ olsun. Bu durumda $A \subset B$ ise $g\delta pr^{**}\text{-cl}(A) \subset g\delta pr^{**}\text{-cl}(B)$ olur.

İspat:

$A \subset B$ olsun. $x \in g\delta pr^{**}\text{-cl}(A)$ ise x' i bulunduran her U $g\delta pr^{**}$-açık kümesi için $U \cap A \neq \varnothing$ dır. $A \subset B$ olduğundan $U \cap B \neq \varnothing$ olacaktır. Dolayısıyla $x \in g\delta pr^{**}\text{-cl}(B)$ dir.

O halde $g\delta pr^{**}\text{-cl}(A) \subset g\delta pr^{**}\text{-cl}(B)$ elde ederiz.

Teorem 5.19. X bir topolojik uzay ve A, $B \subset X$ olsun. Bu durumda $g\delta pr^{**}\text{-cl}(A) \cap g\delta pr^{**}\text{-cl}(B) \supset g\delta pr^{**}\text{-cl}(A \cap B)$ olur.

İspat:

$x \in g\delta pr^{**}\text{-cl}(A \cap B)$ olsun. Bu durumda x' i bulunduran her G $g\delta pr^{**}$-açık kümesi için

$$G \cap (A \cap B) \neq \varnothing$$

olacaktır. Buradan x' i bulunduran her G $g\delta pr^{**}$-açık kümesi için $G \cap A \neq \varnothing$ ve $G \cap B \neq \varnothing$ olacaktır.

Böylece $x \in g\delta pr^{**}\text{-cl}(A)$ ve $x \in g\delta pr^{**}\text{-cl}(B)$ olur. Yani, $g\delta pr^{**}\text{-cl}(A \cap B) \subset g\delta pr^{**}\text{-cl}(A) \cap g\delta pr^{**}\text{-cl}(B)$ olur.

Teorem 5.20. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A $g\delta pr^{**}$-kapalı bir küme ise $\delta\text{-pcl}(A) \setminus A$ kümesinin boş kümeden farklı gδpr-kapalı alt kümesi yoktur.

İspat:

Kabul edelim ki B gδpr-kapalı bir küme ve $B \subset \delta\text{-pcl}(A) \setminus A$ olsun. Buradan $X \setminus B$ gδpr-açık ve A $g\delta pr^{**}$-kapalı küme olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset X \setminus B$$

ve

$$B\subset X \setminus \delta\text{-pcl}(A)$$

olacaktır. Böylece

$$B\subset \delta\text{-pcl}(A)\cap(X \setminus \delta\text{-pcl}(A))=\varnothing$$

olacağından B=Ø olur.

Teorem 5.21. X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Bu durumda A gδpr**-açık ve B gδpr-açık olmak üzere $\delta\text{-pint}(A)\cup(X \setminus A)\subset B$ ise B=X olur.

İspat:

X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Bu durumda A gδpr**-açık ve B gδpr-açık olmak üzere

$$\delta\text{-pint}(A)\cup(X \setminus A)\subset B$$

olsun. Buradan

$$X \setminus B\subset X \setminus (\delta\text{-pint}(A)\cup(X \setminus A))$$

$$=(X \setminus \delta\text{-pint}(A))\cap A$$

$$=\delta\text{-pcl}(X \setminus A) \setminus (X \setminus A)$$

ve böylece

$$X \setminus B\subset \delta\text{-pcl}(X \setminus A) \setminus (X \setminus A)$$

olur. $X \setminus B$ gδpr-kapalı ve $X \setminus A$ gδpr**-kapalı olduğundan $\delta\text{-pcl}(X \setminus A) \setminus (X \setminus A)$ nın boş kümeden farklı gδpr-kapalı alt kümesi yoktur. Dolayısıyla $X \setminus B=\varnothing$ ve buradan X=B olacaktır.

Teorem 5.22. X bir topolojik uzay ve A gδpr**-kapalı bir alt küme olsun. $A\subset B\subset \delta\text{-pcl}(A)$ ise B gδpr**-kapalı kümedir.

İspat:

X bir topolojik uzay olmak üzere

$$A \subset B \subset \delta\text{-pcl}(A)$$

ve $B \subset G$ ve G gδpr-açık olsun. $A \subset B \subset G$ ve A gδpr**-kapalı küme olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset G \text{ ve } \delta\text{-pcl}(B) \subset \delta\text{-pcl}(A) \subset G$$

olduğundan δ-pcl(B) $\subset$ G elde ederiz. Yani B gδpr**-kapalı kümedir.

Teorem 5.23. X bir topolojik uzay olmak üzere A gδpr**-kapalı bir alt küme ise δ-pcl(A) da gδpr**-kapalı kümedir.

İspat:

X bir topolojik uzay olmak üzere A gδpr**-kapalı bir küme olsun.

$$A \subset \delta\text{-pcl}(A) \subset \delta\text{-pcl}(A)$$

olduğundan δ-pcl(A) nın gδpr**-kapalı küme olduğunu elde ederiz.

Teorem 5.24. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ gδpr**-açık bir küme olmak üzere δ-pint(A) $\subset B \subset A$ ise B gδpr**-açıktır.

İspat:

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ gδpr**-açık bir küme olmak üzere

$$\delta\text{-pint}(A) \subset B \subset A$$

olsun. Buradan

$$X \setminus A \subset X \setminus B \subset X \setminus \delta\text{-pint}(A)$$

$$= \delta\text{-pcl}(X \setminus A)$$

olur. Ayrıca X \ A gδpr**-kapalı olduğundan X \ B gδpr**-kapalıdır.

Dolayısıyla B gδpr**-açık olacaktır.

Teorem 5.25. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ gδpr**-açık bir küme olmak üzere δ-pint(A) gδpr**-açıktır.

İspat:

A gδpr**-açık küme olmak üzere

$$\delta\text{-pint}(A) \subset \delta\text{-pint}(A) \subset A$$

olduğundan δ-pint(A) kümesi gδpr**-açıktır.

Teorem 5.26. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin gδpr**-açık olması için gerek ve yeter koşul B gδpr kapalı olmak üzere $B \subset A$ iken $B \subset \delta$-pint(A) olmasıdır.

İspat:

A gδpr**-açık bir küme olmak üzere B gδpr-kapalı ve $B \subset A$ alalım. Buradan X \ B gδpr-açık ve

$$X \setminus A \subset X \setminus B$$

olacaktır. X \ A gδpr**-kapalı olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(X \setminus A) = X \setminus \delta\text{-pint}(A) \subset X \setminus B$$

olur. Sonuç olarak $B \subset \delta$-pint(A) olacaktır.

Tersine, B gδpr-kapalı bir küme olmak üzere $B \subset A$ iken $B \subset \delta$-pint(A) olsun.

$G \subset X$ gδpr-açık bir küme olmak üzere $X \setminus A \subset G$ alalım. Buradan $X \setminus G \subset A$ olacağından $X \setminus G \subset \delta$-pint(A) olur. Böylece

$$X \setminus \delta\text{-pint}(A) = \delta\text{-pcl}(X \setminus A) \subset G$$

olduğundan X \ A gδpr**-kapalıdır. Buradan A gδpr**-açıktır.

Tanım 5.27. X bir topolojik uzay olsun. X de her $g\delta pr^{**}$-kapalı küme δ-önkapalı ise uzaya $g\delta pr^{**}$-$T_{1/2}$ uzay denir.

Teorem 5.28. Bir X topolojik uzayında her tek nokta kümesi $g\delta pr$-kapalı ya da δ-önaçık ise X bir $g\delta pr^{**}$-$T_{1/2}$ uzaydır.

İspat:

X bir topolojik uzay olmak üzere her tek nokta kümesi $g\delta pr$-kapalı ya da δ-önaçık olsun. $A \subset X$ $g\delta pr^{**}$-kapalı kümesini alalım. $x \in \delta$-pcl(A) olsun. Kabul edelim ki $\{x\}$ kümesi $g\delta pr$-kapalı ve $x \notin A$ olsun. Bu durumda

$$\{x\} \subset \delta\text{-pcl}(A) \setminus A$$

olacağından $\{x\}$ kümesi $g\delta pr$-kapalı olduğundan $\{x\} = \varnothing$ olmalıdır. Bu bir çelişkidir. O halde $x \in A$ dır. Kabul edelim ki $\{x\}$ kümesi δ-önaçık olsun. $x \in \delta$-pcl(A) olduğundan $\{x\} \cap A \neq \varnothing$ dır. Bu durumda $x \in A$ olacaktır. Sonuç olarak $x \in A$ olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset A$$

elde ederiz. O halde δ-pcl(A)=A ve buradan A δ-önkapalıdır. Yani X uzayı $g\delta pr^{**}$-$T_{1/2}$ uzaydır.

Teorem 5.29. X bir topolojik uzay olmak üzere X $g\delta pr^{**}$-$T_{1/2}$ uzayı ise her tek nokta kümesi $g\delta pr$-kapalı ya da δ-önaçıktır.

İspat:

X bir $g\delta pr^{**}$-$T_{1/2}$ uzay ve $x \in X$ olmak üzere kabul edelim ki $\{x\}$ kümesi $g\delta pr$-kapalı olmasın. Bu durumda $X \setminus \{x\}$ kümesi $g\delta pr$-açık değildir. Buradan $X \setminus \{x\}$ $g\delta pr^{**}$-kapalıdır. X $g\delta pr^{**}$-$T_{1/2}$ uzay olduğundan $X \setminus \{x\}$ δ-önkapalıdır. Yani $\{x\}$ kümesi δ-önaçık olur.

Teorem 5.30. X bir topolojik uzay olmak üzere X' in bir $g\delta pr^{**}$-$T_{1/2}$ uzay olması için gerek ve yeter koşul her A $g\delta pr^{**}$-açık kümesinin δ-önaçık olmasıdır.

İspat:

X bir topolojik uzay olmak üzere X bir gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olsun. A gδpr**-açık bir küme olsun. X \ A gδpr**-kapalıdır. X gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olduğundan X \ A δ-önkapalıdır. Buradan A δ-önaçıktır.

Tersine, her gδpr**-açık kümesi δ-önaçık olmak üzere A gδpr**-kapalı bir küme olsun. Bu durumda X \ A gδpr**-açıktır. Buradan X \ A δ-önaçıktır. Dolayısıyla A δ-önkapalıdır. Yani X bir gδpr**-$T_{1/2}$ uzaydır.

Teorem 5.31. X bir topolojik uzay ve A gδpr**-kapalı küme olsun. δ-pcl(A) \ A gδpr-kapalı küme ise A δ-önkapalıdır.

İspat:

X bir topolojik uzay olmak üzere A gδpr**-kapalı küme ve δ-pcl(A) \ A gδpr-kapalı olsun. A gδpr**-kapalı olduğundan δ-pcl(A) \ A kümesinin boş kümeden farklı gδpr-kapalı alt kümesi yoktur. Buradan

$$\delta\text{-pcl}(A) \setminus A = \varnothing$$

olacaktır. Yani δ-pcl(A)=A ve böylece A δ-önkapalı olur.

Teorem 5.32. X bir gδpr**-$T_{1/2}$ topolojik uzay olmak üzere X’ in δ-önaçık kümelerinin sınıfı δ-önkapalı kümelerinin sınıfına eşitse X’ in her alt kümesi gδpr**-kapalıdır.

İspat:

Kabul edelim ki X’ in δ-önaçık kümelerinin sınıfı δ-önkapalı kümelerinin sınıfına eşit olsun. $A \subset X$ kümesi için $A \subset B$ ve B gδpr-açık olsun. Buradan,

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset \delta\text{-pcl}(B) = B$$

yani A gδpr**-kapalıdır.

Teorem 5.33. X bir topolojik uzay olmak üzere X' in her alt kümesi gδpr**-kapalı ise X in δ-önaçık kümelerinin sınıfı δ-önkapalı kümelerinin sınıfına eşit olur.

İspat:

X bir topolojik uzay olmak üzere X in her alt kümesi gδpr**-kapalı olsun. A δ-önaçık bir küme olmak üzere $A \subseteq A$ ve A gδpr**-kapalı olduğundan δ-pcl(A)$\subset$A olacaktır. Ayrıca A$\subset$δ-pcl(A) olduğundan δ-pcl(A)=A olur. Yani, A δ-önkapalıdır. A δ-önkapalı bir küme olsun. Bu durumda X \ A δ-önaçıktır.

$$X \setminus A \subseteq X \setminus A$$

ve X \ A gδpr**-kapalı olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(X \setminus A) \subset X \setminus A$$

dır. Ayrıca

$$X \setminus A \subset \delta\text{-pcl}(X \setminus A)$$

olduğundan δ-pcl(X \ A)=X \ A ve buradan X \ A δ-önkapalıdır. O halde A δ-önaçıktır.

Tanım 5.34. X bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. x$\in$X alalım. Eğer x' i bulunduran her δ-önaçık küme A' nın x' ten farklı bir noktasını kapsarsa x noktasına A' nın bir δ-önyığılma noktası denir. (Ekici, 2005)

Uyarı 5.35. X bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. A' nın tüm δ-önyığılma noktalarının kümesini $A^{\delta P\sim}$ ile göstereceğiz.

Teorem 5.36. X bir topolojik uzay ve A, B$\subset$X olmak üzere A ve B gδpr**-kapalı kümeler ve $A^{\sim} \subset A^{\delta P\sim}$ ve $B^{\sim} \subset B^{\delta P\sim}$ ise $A \cup B$ gδpr**-kapalıdır.

İspat:

X bir topolojik uzay ve A, $B \subset X$ olmak üzere A ve B gδpr**-kapalı kümeler ve $A^{\sim} \subset A^{\delta P\sim}$ ve $B^{\sim} \subset B^{\delta P\sim}$ olmak üzere $A \cup B \subset G$ ve G gδpr-açık olsun. A ve B gδpr**-kapalı kümeler ve $A \subset G$ ve $B \subset G$ olduğundan $\delta\text{-pcl}(A) \subset G$ ve $\delta\text{-pcl}(B) \subset G$ olacaktır.

$$A^{\delta P\sim} \subset \delta\text{-pcl}(A) \text{ ve } B^{\delta P\sim} \subset \delta\text{-pcl}(B)$$

olduğundan dolayı

$$cl(A)=\delta\text{-pcl}(A) \text{ ve } cl(B)=\delta\text{-pcl}(B)$$

olacaktır. Bu durumda

$$\delta\text{-pcl}(A \cup B) \subset cl(A \cup B)=cl(A) \cup cl(B)$$

$$=\delta\text{-pcl}(A) \cup \delta\text{-pcl}(B) \subset G$$

olur. O halde $A \cup B$ gδpr**-kapalı olur.

Teorem 5.37. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A' nın gδpr**-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\delta\text{-pcl}(A) \subset g\delta pr\text{-çek}(A)$ olmasıdır.

İspat:

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A gδpr**-kapalı olsun. $A \subset B$ ve B gδpr-açık küme alalım. A bir gδpr**-kapalı küme olduğundan $\delta\text{-pcl}(A) \subset B$ olur. Buradan

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset g\delta pr\text{-çek}(A)$$

elde edilir.

Tersine, $\delta\text{-pcl}(A) \subset g\delta pr\text{-çek}(A)$ olmak üzere $A \subset B$ ve B gδpr-açık olsun. Buradan

$$\delta\text{-pcl}(A) \subset g\delta pr\text{-çek}(A) \subset B$$

olur. Böylece δ-pcl(A)$\subset$B olup A gδpr**-kapalıdır.

Teorem 5.38. X bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. Her gδpr-açık küme açık olmak üzere A'nın gδpr**-kapalı olması için gerek ve yeter koşul δ-pcl(A)$\subset$çek(A) olmasıdır.

İspat:

X bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. Her gδpr-açık küme açık olmak üzere A gδpr**-kapalı bir küme ve A$\subset$B ve B gδpr-açık küme olsun. A gδpr**-kapalı olduğundan δ-pcl(A)$\subset$B dir. Buradan δ-pcl(A)$\subset$çek(A) elde edilir.

Tersine, δ-pcl(A)$\subset$çek(A) olmak üzere A$\subset$B ve B gδpr-açık olsun. Buradan

$$\delta\text{-pcl}(A)\subset \text{çek}(A)\subset B$$

olur. Böylece δ-pcl(A)$\subset$B olacağından gδpr**-kapalıdır.

Teorem 5.39. X bir topolojik uzay ve A$\subset$X olmak üzere A gδpr**-kapalı ise δ-pcl(A) \ A kümesi gδpr**-açıktır.

İspat:

Kabul edelim ki A gδpr**-kapalı ve B$\subset$$\delta$-pcl(A) \ A ve B g$\delta$pr-kapalı küme olsun. Bu durumda B=$\emptyset$ ve buradan

$$B\subset \delta\text{-pint}(\delta\text{-pcl}(A) \setminus A)$$

olacaktır. O halde δ-pcl(A) \ A gδpr**-açıktır.

Teorem 5.40. X bir topolojik uzay ve A, B$\subset$X olsun. A ve B gδpr**-açık kümeler, $(X \setminus A)^{\sim}\subset(X \setminus A)^{\delta P\sim}$ ve $(X \setminus B)^{\sim}\subset(X \setminus B)^{\delta P\sim}$ ise A$\cap$B kümesi de gδpr**-açık kümedir.

İspat:

A ve B gδpr**-açık kümeler olsun. Bu durumda X \ A ve X \ B gδpr**-kapalı kümelerdir.

$$(X \setminus A) \cup (X \setminus B) \subset U$$

ve U gδpr-açık olsun. $X \setminus A$ ve $X \setminus B$ gδpr**-kapalı kümeler olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(X \setminus A) \subset U \text{ ve } \delta\text{-pcl}(X \setminus B) \subset U$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \delta\text{-pcl}((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) &\subset cl((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \\ &= cl(X \setminus A) \cup cl(X \setminus B) \\ &= \delta\text{-pcl}(X \setminus A) \cup \delta\text{-pcl}(X \setminus B) \\ &\subset U \end{aligned}$$

olacaktır. Yani $X \setminus (A \cap B)$ gδpr**-kapalı kümedir. Bu durumda $A \cap B$ gδpr**-açık küme olur.

BÖLÜM 6

gδpr*-KAPALI KÜMELER VE

gδpr**-KAPALI KÜMELER SINIFI VE

FONKSİYON SINIFLARI

Tanım 6.1. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ δ-önkapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ δ-önkapalı ise f fonksiyonuna δ-önkararsızdır denir (Ekici, 2004).

Tanım 6.2. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ gδpr*-kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr*-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr*-kararsızdır denir.

Tanım 6.3. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ önaçık ise f fonksiyonuna önsüreklidir denir.

(Blumberg, 1922; Berner,1982; Mashhour ve ark., 1982; Rose, 1984; Ahmad ve Noiri, 1985)

Tanım 6.4. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ önkapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ önkapalı ise f fonksiyonuna önkararsızdır denir (Reilly ve Vamanamurthy, 1985).

Tanım 6.5. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ δ-önkapalı ise f fonksiyonuna δ-hemen hemen süreklidir denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 6.6. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr*-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr*-süreklidir denir.

Tanım 6.7. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδp-kapalı ise f fonksiyonuna gδp-süreklidir denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 6.8. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr-süreklidir denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 6.9. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ gδp-kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδp-kapalı ise f fonksiyonuna gδp-kararsızdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 6.10. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ gδpr-kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr-kararsızdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 6.11. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr**-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr**-süreklidir denir.

Teorem 6.12. X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere $f : X \to Y$ gδpr*-sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonu gδp-süreklidir.

İspat:

$f : X \to Y$ gδpr*-sürekli bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ kapalı kümesi için f gδpr*-sürekli olduğundan $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr*-kapalıdır. Her gδpr*-kapalı küme gδp-kapalı küme olduğundan $f^{-1}(A)$ gδp-kapalıdır. O halde f gδp-süreklidir.

Teorem 6.13. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $f : X \to Y$ gδpr*-sürekli ve X gδpr*-$T_{1/2}$ uzay ise $f : X \to Y$ sürekli ve buradan f önsüreklidir.

İspat:

f : X $\rightarrow$ Y gδpr*-sürekli ve X gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olsun. f gδpr*-sürekli olduğundan her A $\subset$ Y kapalı kümesi için f^{-1}(A) $\subset$ X gδpr*-kapalıdır. Buradan X gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olduğundan f^{-1}(A) kapalıdır. O halde f sürekli ve böylece f önsüreklidir.

Teorem 6.14. X ve Y iki topolojik uzay ve f : X $\rightarrow$ Y bir fonksiyon olsun. f : X $\rightarrow$ Y gδpr*-sürekli ve X gδpr*-$T_{1/2}$ uzay ise f gδpr-süreklidir.

İspat:

Bir önceki teoremden f sürekli olacağından f : X $\rightarrow$ Y gδpr-sürekli olur.

Teorem 6.15. X ve Y iki topolojik uzay ve f : X $\rightarrow$ Y örten, kapalı ve gδpr*-kararsız bir fonksiyon olmak üzere X uzayı gδpr*-$T_{1/2}$ uzay ise Y uzayı da gδpr*-$T_{1/2}$ uzaydır.

İspat:

X ve Y iki topolojik uzay ve f : X $\rightarrow$ Y örten, kapalı ve gδpr*-kararsız bir fonksiyon olmak üzere X uzayı gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olsun. A $\subset$ Y gδpr*-kapalı kümesini alalım. Bu durumda f gδpr*-kararsız olduğundan f^{-1}(A) $\subset$ X gδpr*-kapalıdır. Buradan X gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olduğundan f^{-1}(A) kapalıdır. f örten ve kapalı olduğundan

$$f(f^{-1}(A)) = A \subset Y$$

kapalıdır. Sonuç olarak Y uzayı gδpr*-$T_{1/2}$ uzaydır.

Teorem 6.16. X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere A$\subset$X ve f : X $\rightarrow$ Y kapalı ve gδpr-kararsız bir fonksiyon olsun. Bu durumda A gδpr*-kapalı ise f(A) gδpr*-kapalıdır.

İspat:

X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere A$\subset$X ve f : X $\rightarrow$ Y kapalı ve gδpr-kararsız bir fonksiyon ve A gδpr*-kapalı bir küme olsun. f (A) $\subset$ B ve B gδpr-açık kümesini alalım. Bu durumda A $\subset f^{-1}$(B) ve buradan A gδpr*-kapalı olduğundan cl(A)$\subset f^{-1}$(B) olup f(cl(A))$\subset$B elde ederiz. Böylece f(cl(A)) kapalı olduğundan

$$\mathrm{cl}(f(A)) \subset \mathrm{cl}(f(\mathrm{cl}(A))) = f(\mathrm{cl}(A)) \subset B$$

olur. Yani cl(f(A))$\subset$B elde edilir. O halde f(A) gδpr*-kapalı olacaktır.

Teorem 6.17. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere A$\subset$Y ve X de her gδpr-açık küme açık olsun. Bu durumda f sürekli, kapalı bir fonksiyon ve A g-kapalı ise f^{-1}(A) gδpr*-kapalıdır.

İspat:

$f: X \to Y$ sürekli, kapalı bir fonksiyon ve A g-kapalı bir küme olsun. Kabul edelim ki f^{-1}(A)$\subset$B ve B gδpr-açık küme olsun. Bu durumda

$$f(\mathrm{cl}\,(f^{-1}(A)) \cap (X \setminus B)) \subset \mathrm{cl}(A) \setminus A$$

olur. A g-kapalı olduğundan

$$f(\mathrm{cl}\,(f^{-1}(A)) \cap (X \setminus B)) = \varnothing$$

olmalıdır. Yani

$$\mathrm{cl}\,(f^{-1}(A)) \cap (X \setminus B) = \varnothing$$

olacaktır. Dolayısıyla cl (f^{-1}(A))$\subset$B dir. O halde f^{-1}(A) gδpr*-kapalıdır.

Teorem 6.18. X ve Y iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon, A$\subset$Y ve X' de her gδpr-açık küme açık olsun. Bu durumda f sürekli, kapalı bir fonksiyon ve A g-açık ise f^{-1}(A) gδpr*-açıktır.

İspat:

$f: X \to Y$ sürekli, kapalı bir fonksiyon ve A g-açık bir küme olsun. Bu durumda Y \ A g-kapalıdır. Bu durumda X \ f^{-1}(A) gδpr*-kapalı ve böylece f^{-1}(A) kümesi gδpr*-açıktır.

Teorem 6.19. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu gδpr*-sürekli ve Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay ise f gδpr*-kararsızdır.

İspat:

$f : X \to Y$ gδpr*-sürekli bir fonksiyon ve Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olsun. $A \subset Y$ gδpr*-kapalı kümesini alalım. Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olduğundan A kapalıdır. $f : X \to Y$ gδpr*-sürekli bir fonksiyon olduğundan $A \subset X$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr*-kapalıdır. O halde f fonksiyonu gδpr*-kararsızdır.

Teorem 6.20. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $f : X \to Y$ gδpr*-kararsız ve X ve Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay ise f, δ-önkararsızdır.

İspat:

Benzer biçimde görülür.

Teorem 6.21. X ve Y iki topolojik uzay, A X' in bir alt kümesi, $f : X \to Y$ sürekli ve gδpr-kararsız bir fonksiyon ve her δ-önkapalı kümenin görüntüsü kapalı olsun. Bu durumda A gδpr**-kapalı ise $f(A)$ gδpr**-kapalıdır.

İspat:

$f : X \to Y$ sürekli, gδpr-kararsız bir fonksiyon ve A gδpr**-kapalı bir küme olmak üzere $f(A) \subset B$ ve B gδpr-açık kümesini alalım. Bu durumda $A \subset f^{-1}(B)$ olacaktır. Bu durumda A gδpr**-kapalı olduğundan $\delta\text{-pcl}(A) \subset f^{-1}(B)$ ve böylece $f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset B$ elde ederiz. Bu durumda $f(\delta\text{-pcl}(A))$ kapalı olduğundan

$$\delta\text{-pcl}(f(A)) \subset \text{cl}(f(A)) \subset \text{cl}(f(\delta\text{-pcl}(A)))$$

$$= f(\delta\text{-pcl}(A)) \subset B$$

olacaktır. Yani $\delta\text{-pcl}(f(A)) \subset B$ elde edilir ve böylece $f(A)$ nın gδpr**-kapalı olduğuna ulaşırız.

Teorem 6.22. X ve Y iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon, $A \subset Y$ ve X' de her gδpr-açık küme açık olsun. Bu durumda f sürekli, kapalı bir fonksiyon ve A g-kapalı ise $f^{-1}(A)$ gδpr**-kapalıdır.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y sürekli, kapalı bir fonksiyon ve A g-kapalı bir küme olmak üzere f^{-1}(A)$\subset$B ve B gδpr-açık küme olsun. Bu durumda

$$f(\mathrm{cl}(f^{-1}(A))\cap(X\setminus B))\subset \mathrm{cl}(A)\setminus A$$

olduğundan ve A g-kapalı olduğundan

$$f(\mathrm{cl}(f^{-1}(A))\cap(X\setminus B))=\varnothing$$

olacaktır. Bu durumda

$$\mathrm{cl}(f^{-1}(A))\cap(X\setminus B)=\varnothing$$

olur. Böylece cl (f^{-1}(A))$\subset$B ve bu durumda δ-pcl(f^{-1}(A))$\subset$B olacaktır. O halde f^{-1}(A) gδpr**-kapalıdır.

Teorem 6.23. X ve Y iki topolojik uzay, f : X$\rightarrow$Y bir fonksiyon, A$\subset$Y ve X de her gδpr-açık küme açık olsun. Bu durumda f sürekli, kapalı bir fonksiyon ve A g-açık bir küme ise f^{-1}(A) gδpr**-açıktır.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y sürekli, kapalı bir fonksiyon ve A g-açık bir küme olsun. Bu durumda Y \ A g-kapalıdır. Dolayısıyla X \ f^{-1}(A) gδpr**-kapalı ve böylece f^{-1}(A) gδpr**-açıktır.

Teorem 6.24. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olsun. f : X$\rightarrow$Y gδpr*-sürekli bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z fonksiyonu gδpr*-sürekli bir fonksiyondur.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y gδpr*-sürekli ve g: Y$\rightarrow$Z sürekli iki fonksiyon olmak üzere A$\subset$Z kapalı kümesi için ($g\circ f$)$^{-1}$(A) nın gδpr*-kapalı olduğunu göstereceğiz. A$\subset$Z kapalı kümesi için g: Y$\rightarrow$Z sürekli bir fonksiyon olduğundan g^{-1}(A) $\subset$Y kapalıdır. Ayrıca

f : X$\rightarrow$Y gδpr*-sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$, X' de gδpr*-kapalıdır. Yani, $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon olur.

Teorem 6.25. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olmak üzere f : X$\rightarrow$Y ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-kararsız fonksiyonlar ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z fonksiyonu da gδpr*-kararsız bir fonksiyondur.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-kararsız iki fonksiyon olmak üzere A$\subset$Z gδpr*-kapalı kümesi için $(g\circ f)^{-1}(A)$ nın gδpr*-kapalı olduğunu göstereceğiz. A$\subset$Z gδpr*-kapalı kümesi için g: Y$\rightarrow$Z fonksiyonu gδpr*-kararsız olduğundan $g^{-1}(A)\subset Y$ gδpr*-kapalıdır. Buradan f : X$\rightarrow$Y gδpr*-kararsız olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$, X' de gδpr*-kapalıdır.

Sonuç olarak $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδpr*-kararsız bir fonksiyondur.

Teorem 6.26. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olmak üzere f : X$\rightarrow$Y gδpr*-kararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyondur.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y gδpr*-kararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli iki fonksiyon olmak üzere A$\subset$Z kapalı kümesi için $(g\circ f)^{-1}(A)$ nın gδpr**-kapalı olduğunu göstereceğiz. A$\subset$Z kapalı kümesi için g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon olduğundan $g^{-1}(A)\subset Y$ gδpr*-kapalıdır. Öte yandan f : X$\rightarrow$Y gδpr*-kararsız bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$, X' de gδpr*-kapalıdır.

Yani $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon olur.

Teorem 6.27. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olsun. Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olmak üzere f : X$\rightarrow$Y δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z δ-hemen hemen süreklidir.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y δ-hemen hemen sürekli, g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli fonksiyonlar ve Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olsun. A$\subset$Z kapalı kümesini alalım. g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli fonksiyon olduğundan g^{-1}(A)$\subset$Y gδpr*-kapalıdır.

Buradan Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olduğundan g^{-1}(A) kapalıdır. f : X$\rightarrow$Y δ-hemen hemen sürekli olduğundan

$$f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$$

δ-önkapalıdır. O halde $g\circ f$: X$\rightarrow$Z δ-hemen hemen sürekli olacaktır.

Teorem 6.28. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olsun. Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olmak üzere f : X$\rightarrow$Y önsürekli bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z önsüreklidir.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y önsürekli ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli fonksiyonlar ve Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olsun. A$\subset$Z kapalı bir küme olsun. g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli fonksiyon olduğundan g^{-1}(A)$\subset$Y gδpr*-kapalıdır.

Buradan Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olduğundan g^{-1}(A) kapalıdır. f : X$\rightarrow$Y önsürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$, X' de önkapalıdır.

Sonuç olarak $g\circ f$: X$\rightarrow$Z önsürekli olur.

Teorem 6.29. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olmak üzere ve Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olmak üzere f : X$\rightarrow$Y önkararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z önsüreklidir.

İspat:

Bir önceki teoremden açıktır.

Teorem 6.30. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olsun. Y gδpr*-T$_{1/2}$ uzay olmak üzere f : X$\rightarrow$Y δ-önkararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z δ-hemen hemen süreklidir.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y δ-önkararsız, g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli fonksiyonlar ve Y gδpr*-T$_{1/2}$ uzay olsun. Her A$\subset$Z kapalı kümesi için g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli fonksiyon olduğundan g^{-1}(A) $\subset$Y gδpr*-kapalıdır. Buradan Y gδpr*-T$_{1/2}$ uzay olduğundan g^{-1}(A) kapalıdır. Her kapalı küme δ-önkapalı olduğundan g^{-1}(A) δ-önkapalıdır. f : X$\rightarrow$Y δ-önkararsız olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$, X' de δ-önkapalıdır.

O halde $g\circ f$: X$\rightarrow$Z δ-hemen hemen süreklidir.

Teorem 6.31. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olsun. Y gδpr*-T$_{1/2}$ uzay olmak üzere f : X$\rightarrow$Y gδp-kararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδp-süreklidir.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y gδp-kararsız, g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli fonksiyonlar ve Y gδpr*-T$_{1/2}$ uzay olsun. Her A$\subset$Z kapalı kümesi için g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli fonksiyon olduğundan g^{-1}(A) $\subset$Y gδpr*-kapalıdır.

Buradan Y gδpr*-T$_{1/2}$ uzay olduğundan g^{-1}(A) kapalıdır. Her kapalı küme gδp-kapalı olduğundan g^{-1}(A) gδp-kapalıdır. f : X$\rightarrow$Y gδp-kararsız olduğundan

$$f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$$

X' de gδp-kapalıdır.

Böylece $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδp-süreklidir.

Teorem 6.32. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olsun. Y gδpr*-T$_{1/2}$ uzay olmak üzere f : X$\rightarrow$Y gδpr-kararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδpr-süreklidir.

İspat:

Y gδpr*-$T_{1/2}$ uzay olmak üzere f : X$\rightarrow$Y gδpr-kararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr*-sürekli bir fonksiyon olmak üzere bir önceki teoremden açıktır.

Tanım 6.33. X ve Y iki topolojik uzay ve f : X$\rightarrow$Y bir fonksiyon olsun. Her A$\subset$Y gδpr**-kapalı kümesi için f^{-1}(A)$\subset$X gδpr**-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr**-kararsızdır denir.

Tanım 6.34. X ve Y iki topolojik uzay ve f : X$\rightarrow$Y bir fonksiyon olsun. Her A$\subset$Y kapalı kümesi için f^{-1}(A)$\subset$X gδpr**-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr**-süreklidir denir.

Teorem 6.35. X ve Y iki topolojik uzay ve f : X$\rightarrow$Y örten, δ-önkapalı ve gδpr**-kararsız bir fonksiyon olmak üzere X uzayı gδpr**-$T_{1/2}$ uzay ise Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzaydır.

İspat:

X ve Y iki topolojik uzay ve f : X$\rightarrow$Y örten, δ-önkapalı ve gδpr**-kararsız bir fonksiyon olmak üzere X uzayı gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olsun. A$\subset$Y gδpr**-kapalı kümesi için f gδpr**-kararsız olduğundan f^{-1}(A)$\subset$X gδpr**-kapalıdır. Buradan X gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olduğundan f^{-1}(A) δ-önkapalıdır. f örten olduğundan f (f^{-1}(A))=A$\subset$Y δ-önkapalıdır.

O halde Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzaydır.

Teorem 6.36. X ve Y iki topolojik uzay, f : X$\rightarrow$Y gδpr**-sürekli bir fonksiyon ve X gδpr**-$T_{1/2}$ uzay ise f fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y gδpr**-sürekli bir fonksiyon ve X bir gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olsun. A$\subset$Y kapalı kümesini alalım. f : X$\rightarrow$Y gδpr**-sürekli bir fonksiyon olduğundan her A$\subset$Y kapalı kümesi için f^{-1}(A)$\subset$X gδpr**-kapalıdır. X gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olduğundan f^{-1}(A) δ-önkapalıdır. Buradan f fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir.

Teorem 6.37. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f: X \to Y$ gδpr**-sürekli ve X gδpr**-$T_{1/2}$ uzay ise f gδp-süreklidir.

İspat:

Bir önceki teoremden f δ-hemen hemen sürekli olduğundan f gδp-süreklidir.

Teorem 6.38. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $f: X \to Y$ gδpr**-kararsız ve X ve Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzaylar ise f δ-önkararsızdır.

İspat:

$f: X \to Y$ gδpr**- kararsız ve X ve Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olsun. f gδpr**-kararsız ve Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olduğundan her $A \subset Y$ δ-önkapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr**-kapalıdır. Buradan X gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olduğundan $f^{-1}(A)$ δ-önkapalıdır. Dolayısıyla f δ-önkararsızdır.

Teorem 6.39. X, Y, Z topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$, g: $Y \to Z$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda $f: X \to Y$ gδpr**-sürekli bir fonksiyon ve g: $Y \to Z$ sürekli bir fonksiyon ise $g \circ f: X \to Z$ gδpr**-sürekli bir fonksiyondur.

İspat:

$f: X \to Y$ gδpr**-sürekli ve g: $Y \to Z$ sürekli iki fonksiyon olsun. Her $A \subset Z$ kapalı kümesi için $(g \circ f)^{-1}(A)$ nın gδpr**-kapalı olduğunu göstermeliyiz. $A \subset Z$ kapalı kümesi için g: $Y \to Z$ sürekli bir fonksiyon olduğundan $g^{-1}(A) \subset Y$ kapalıdır. $f: X \to Y$ gδpr**-sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))=(g \circ f)^{-1}(A)$, X' de gδpr**-kapalıdır.

O halde $g \circ f: X \to Z$ gδpr**-sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 6.40. X, Y, Z topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$, g: $Y \to Z$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda $f: X \to Y$ ve g: $Y \to Z$ gδpr**-kararsız fonksiyonlar ise $g \circ f: X \to Z$ fonksiyonu da gδpr**-kararsızdır.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr**-kararsız iki fonksiyon olsun. Her A$\subset$Z gδpr**-kapalı kümesi için $(g\circ f)^{-1}$(A) nın gδpr**-kapalı olduğunu göstermeliyiz. A$\subset$Z gδpr**-kapalı kümesi için g: Y$\rightarrow$Z fonksiyonu gδpr**-kararsız olduğundan g^{-1}(A)$\subset$Y gδpr**-kapalıdır. Buradan f : X$\rightarrow$Y gδpr**-kararsız olduğundan $f^{-1}(g^{-1}$(A))= $(g\circ f)^{-1}$(A), X' de gδpr**-kapalıdır.

O halde $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδpr**-kararsız bir fonksiyondur.

Teorem 6.41. X, Y, Z topolojik uzaylar ve f : X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olsun. Bu durumda f : X$\rightarrow$Y gδpr**-kararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr**-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδpr**-sürekli bir fonksiyondur.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y gδpr**-kararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr**-sürekli bir fonksiyon olsun. Her A$\subset$Z kapalı kümesi için $(g\circ f)^{-1}$(A) nın gδpr**-kapalı olduğunu göstereceğiz. A$\subset$Z kapalı kümesi için g: Y$\rightarrow$Z gδpr**-sürekli bir fonksiyon olduğundan g^{-1}(A)$\subset$Y gδpr**-kapalıdır. Öte yandan f : X$\rightarrow$Y gδpr**-kararsız bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}$(A))=$(g\circ f)^{-1}$(A), X' de gδpr**-kapalıdır.

O halde $g\circ f$: X$\rightarrow$Z gδpr**-sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 6.42. X, Y, Z topolojik uzaylar, f : X$\rightarrow$Y ve g: Y$\rightarrow$Z iki fonksiyon olmak üzere Y uzayı bir gδpr**-$T_{1/2}$ uzay ise ve f : X$\rightarrow$Y δ-önkararsız bir fonksiyon ve g: Y$\rightarrow$Z gδpr**-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f$: X$\rightarrow$Z δ-hemen hemen sürekli bir fonksiyondur.

İspat:

f : X$\rightarrow$Y δ-önkararsız bir fonksiyon, g: Y$\rightarrow$Z gδpr**-sürekli bir fonksiyon ve Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olsun. Her A$\subset$Z kapalı kümesi için g: Y$\rightarrow$Z gδpr**-sürekli bir fonksiyon olduğundan g^{-1}(A)$\subset$Y gδpr**-kapalıdır. Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olduğundan g^{-1}(A) δ-önkapalıdır. Öte yandan f : X$\rightarrow$Y δ-önkararsız bir fonksiyon olduğundan

$f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$, X' de δ-önkapalıdır.

O halde $g\circ f: X\rightarrow Z$ fonksiyonu δ-hemen hemen süreklidir.

Teorem 6.43. X, Y, Z topolojik uzaylar ve $f: X\rightarrow Y$, g: $Y\rightarrow Z$ iki fonksiyon olsun. Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olmak üzere $f: X\rightarrow Y$ gδp-kararsız bir fonksiyon ve g: $Y\rightarrow Z$ gδpr**-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f: X\rightarrow Z$ gδp-süreklidir.

İspat:

$f: X\rightarrow Y$ gδp-kararsız, g: $Y\rightarrow Z$ gδpr**-sürekli fonksiyonlar ve Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olsun. Her $A\subset Z$ kapalı kümesi için g: $Y\rightarrow Z$ gδpr**-sürekli fonksiyon olduğundan $g^{-1}(A)\subset Y$ gδpr**-kapalıdır. Buradan Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olduğundan $g^{-1}(A)$ δ-önkapalıdır. Her δ-önkapalı küme gδp-kapalı olduğundan $g^{-1}(A)$ gδp-kapalıdır. $f: X\rightarrow Y$ gδp-kararsız olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$, X' de gδp-kapalıdır. Böylece $g\circ f: X\rightarrow Z$ gδp-sürekli olacaktır.

Teorem 6.44. X, Y, Z topolojik uzaylar ve $f: X\rightarrow Y$, g: $Y\rightarrow Z$ iki fonksiyon olmak üzere ve Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olmak üzere $f: X\rightarrow Y$ gδpr-kararsız bir fonksiyon ve g: $Y\rightarrow Z$ gδpr**-sürekli bir fonksiyon ise $g\circ f: X\rightarrow Z$ fonksiyonu gδpr-süreklidir.

İspat:

$f: X\rightarrow Y$ gδpr-kararsız, g: $Y\rightarrow Z$ gδpr**-sürekli fonksiyonlar ve Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olmak üzere $A\subset Z$ kapalı kümesini alalım. g: $Y\rightarrow Z$ gδpr**-sürekli fonksiyon olduğundan $g^{-1}(A)\subset Y$ gδpr**-kapalıdır. Y gδpr**-$T_{1/2}$ uzay olduğundan $g^{-1}(A)$ δ-önkapalıdır. Her δ-önkapalı küme gδpr-kapalı olduğundan $g^{-1}(A)$ gδpr-kapalıdır. $f: X\rightarrow Y$ gδpr-kararsız olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)$, gδpr-kapalıdır.

Sonuç olarak $g\circ f: X\rightarrow Z$ fonksiyonunun gδpr-sürekli olduğunu elde ederiz.

KAYNAKLAR

Ahmad B. ve Noiri T., 1985. The Inverse Images of Hyperconnected Sets. *Mat. Vesnik,* 37 : 177-181.

Baker C. W., 2001. A note on θ-generalized Closed Sets. *Int. J. Math. Math. Sci.* 25 (8) : 559-563.

Berner A. J., 1982. Almost Continuous Functions with Closed Graphs. *Canad. Math. Bull.,* 25 (4) : 428-434.

Blumberg H., 1922. New Properties of All Real Functions. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 24 : 113-128.

Caldas M., Jafari S., 2003. On θ-semigeneralized Closed Sets in Topology. *Kyungpook Math. J.* 43 (1) : 135-148.

Caldas M., Jafari S., Noiri T., 2008. On λ-generalized Closed Sets in Topological Spaces. *Acta Math. Hungar.,* 118 (4) : 337-343.

Cao J., Ganster M., Reilly I., 2002. On Generalized Closed Sets. *Proceedings of the Janos Bolyai Mathematical Society 8th International Topology Conference (Gyula,1998). Topology Appl.* 123 (1) : 37-46.

Cao J., Ganster M., Reilly I., Steiner M., 2005. δ-closure, θ-closure and Generalized Closed Sets. *Appl. Gen. Topol.* 6 (1) : 79-86.

Dontchev J., Maki H., 1999. On θ-generalized Closed Sets. *Int. J. Math. Math. Sci.* 22 (2) : 239-249.

Dontchev J., Maki H., 1999. Groups of θ-generalized Homeomorphisms and Digital Line. *Topology Appl.* 95 (2) : 113-128.

Ekici E., 2004. (δ-pre, s)-continuous Functions. *Bull. Malay. Math. Sci. Soc.,*27 (2) : 237-251.

Ekici E., 2005. On δ-preopen Sets. *Mathematica*, 47 (70), (2) : 157-164.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-I. *Math. Mor.*, 10 : 9-20.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-II. *Filom*, 20 (2) : 67-80.

El-Deeb S. N., Hasanein I. A., Mashhour A. S. ve Noiri T., 1983. On p-regular Spaces. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 27 (75) : 311-315.

El-Shafei M. E., Zakari A., 2006. θ-generalized Closed Sets in Fuzzy Topological Spaces. *Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci.* 31 (2) : 197-206.

Gnanambal Y., 1997. On Generalized Preregular Closed Sets in Topological Spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 28 (3) : 351-360.

Levine N., 1970. Generalized Closed Sets in Topology. *Rend. Circ. Mat. Palermo*,19 (2): 89-96.

Maki H., 1986. The Special Issue in Commemoration of Prof. Jazuda Ikeda's Retirement.: 139-146.

Maki H., Umehara J. ve Noiri T., 1996. Every Topological Space is pre-$T_{1/2}$. *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, 17 : 33-42.

Mashhour A. S., Abd El –Monsef M. E. ve El-Deeb S. N., 1982. On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings. *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt,* 53 : 47-53.

Muthukumaraswamy K., Devi R., 2004. On fuzzy α-generalized Closed Sets. *Acta Cienc. Indica Math.* 30 (1) : 173-176.

Noiri T., 1998. Almost p-regular Spaces and Some Functions. *Acta Math. Hungar.*, 79 (3) : 207-216.

Palaniappan N. ve Rao K. C., 1993. Regular Generalized Closed Sets. *Kyungpook Math. J.*, 33 (2) : 211-219.

Park J. H., 2003. Almost p-normal, Mildly p-normal Spaces and Some Functions. *Chaos, Solitons and Fractals,* 18 : 267-274.

Raychaudhuri S. ve Mukherjee M. N., 1993. On δ-almost Continuity and δ-preopen Sets. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 21 (4) : 357-366.

Reilly I. L. ve Vamanamurthy M. K., 1985. On α-continuity in Topological Spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, 45 : 27-32.

Rose D. A., 1984. Weak Continuity and Almost Continuity. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 7 (2) : 311-318.

Saraf R. K., Navalagi G., Khanna M., 2005. On Fuzzy Semi-pre-generalized Closed Sets. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2) 28 (1) : 19- 30.

Stone M. H., 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology. *TAMS*, 41 : 375-381.

Velicko N. V., 1968. H-closed Topological Spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 78 : 103-118.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sena ÖZEN

Doğum Yeri : Çanakkale

Doğum Tarihi : 12.05.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar-SCI-Diğer

b) Bildiriler-Uluslararası-Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

İLETİŞİM

E-posta Adresi : senaozen@yahoo.com