T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPOLOJİK ÖZELLİKLER ÜZERİNE

Hatice ASLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Sunulduğu Tarih: **17.06.2009**

Tez Danışmanı:

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Hatice ASLAN tarafından **Doç. Dr. Erdal EKİCİ** yönetiminde hazırlanan **"TOPOLOJİK ÖZELLİKLER ÜZERİNE"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Yönetici

Doç. Dr. Faruk SOYDUGAN

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN

Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi 17 / 06 / 2009

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2009/04 no'lu projeden desteklenmiştir.

İNTİHAL(AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı: Hatice ASLAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana her konuda yardımcı ve destek olan, engin hoşgörüsünü esirgemeyen danışmanım Sn. Doç. Dr. Erdal Ekici’ ye teşekkür ederim. Son olarak attığım her adımda bana destek olan, güç veren babama ve her zaman yardımını esirgemeyen anneme ve kardeşime teşekkür ederim**.**

Hatice ASLAN

ÖZET

TOPOLOJİK ÖZELLİKLER ÜZERİNE

Hatice ASLAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Erdal EKİCİ

HAZİRAN 2009, Sayfa Sayısı: 53

Bu tezde G_1- topolojik özellik kavramı ve G_2- topolojik özellik kavramı çalışılmış ve özellikleri araştırılmıştır. Bu bağlamda gδpr- T_0 uzay, gδpr- T_1 uzay, gδpr- T_2 uzay ve gδpr- kompakt uzay olmanın birer G_1- topolojik özellik olduğu görülmüştür. Ayrıca gδpr- T_1 uzay ve gδpr- simetrik uzay özellikleri araştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: G_1- topolojik özellik, G_2- topolojik özellik, gδpr- T_1 uzay, gδpr- simetrik uzay.

ABSTRACT

ON TOPOLOGICAL PROPERTIES

Hatice ASLAN

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Science and Engineering

Chair for Mathematics Thesis of Master of Science

Advisor: Doç. Dr. Erdal Ekici

June 2009, Page Number: 53

In this thesis, the notions of G_1– topological property and G_2– topological property and their properties are investigated. Also, it is shown that the properties of gδpr- T_0 space, gδpr- T_1 space, gδpr- T_2 space and gδpr-compact space are G_1– topological properties. Also, properties of gδpr- T_1 space and gδpr– symmetric space are investigated.

Keywords: G_1– topological property, G_2- topological property, gδpr- T_1 space, gδpr- symmetric space.

İÇERİK

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Topolojik kümeler ile birlikte topolojik özellik dediğimiz iki topolojik uzay arasındaki özelliklerin aynı kalması fikri literatürde birçok çalışmada başlıca araştırma konusu olmuştur.

Genelleştirilmiş kapalı kümeler kapalı kümeler ile çok çeşitli yerlerde aynı karakterizasyonları üstlenmeleri açısından önemlidir. Levine, 1970 yılında genelleştirilmiş kapalı kümeleri sunmuştur.

Daha sonraları birçok alanda genelleştirilmiş kapalı kümeler uygulama alanı bulmuştur. Örneğin, Dontchev ve Maki, 1999. El- Shafei ve Zakari, 2006. Saraf ve ark., 2005. El- Maghrabi ve Nasef, 2005. El- Shafei, 2005. Muthukumaraswamy ve Devi ,2004. Dontchev ve Ganster, 1996. Thakur ve Malviya, 1995/ 96, 1997.

Ekici ve Noiri 2006 yılında gδpr- kapalı kümeleri çalışmıştır. Bu çalışmalarda Ekici ve Noiri gδpr- kapalı kümeler ile normal ve almost normal ve mildly normal uzayların birer genellemelerini sunmuştur. Bu genellemenin karakterizasyonunda gδpr- kapalı kümelerden yararlanmışlardır. Ayrıca çeşitli özelliklerin korunması fikrini de araştırmışlardır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezimizi tanıtacak bilgiler sunulmuştur.

İkinci bölümde temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde G_1- topolojik özellik bilgisi ve özellikleri araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde gδpr- T_1 uzaylar ve gδpr- simetrik uzay ve özellikleri araştırılmıştır.

Son bölümde G_2- topolojik özellik bilgisi ve özellikleri araştırılmıştır.

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin kapanışını cl(A) ve içini int(A) ile göstereceğiz.

Tanım 2.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A= int(cl(A)) ise A' ya düzenli açık küme denir (Stone, 1937).

Tanım 2.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A = cl(int(A)) ise A kümesine düzenli kapalı denir (Stone, 1937).

Tanım 2.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subset$ int(cl(A)) ise A kümesine önaçık küme denir (Mashhour ve ark., 1982).

Tanım 2.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Önaçık kümelerin tümleyenlerine önkapalı küme denir (El-Deeb ve ark., 1983).

Tanım 2.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\forall$ $(x \in)V \in \tau$ için int(cl(V)) $\cap$ $A \neq \varnothing$ ise x noktasına A kümesinin bir δ- kapanış noktası denir (Velicko, 1968).

Tanım 2.6. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin tüm δ-kapanış noktalarını kümesine A' nın δ- kapanışı denir (Velicko, 1968).

A' nın tüm δ- kapanış noktalarının kümesini δ- cl(A) ile göstereceğiz (Velicko, 1968).

Tanım 2.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A= δ- cl(A) ise A kümesine δ- kapalı denir (Velicko, 1968).

Tanım 2.8. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. δ- kapalı kümelerin tümleyenlerine

δ- açık kümeler denir (Velicko, 1968).

Tanım 2.9. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset int(\delta\text{-} cl(A))$ ise A kümesine δ- önaçıktır denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.10. (X, τ) topolojik uzay olsun. δ- önaçık kümelerin tümleyenlerine δ- önkapalı kümeler denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.11. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan tüm δ- önkapalı kümelerin arakesitine A kümesinin δ - önkapanışı denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

A kümesinin δ- önkapanışı δ- pcl(A) ile gösterilir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.12. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinde bulunan tüm δ- önaçık kümelerin birleşimine A kümesinin δ-öniçi denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

A kümesinin δ- öniçi δ- pint (A) ile gösterilir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.13. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda $\delta\text{-} pcl(A) = A \cup cl(\delta\text{-}int(A))$ olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.14. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A, δ- önkapalı olması için gerek ve yeter şart $A = \delta\text{-} pcl(A)$ olmasıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.15. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda $A \subset B$ ise $\delta\text{-} pcl(A) \subset \delta\text{-} pcl(A)$ olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.16. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda δ- pcl(A) kümesi δ- önkapalıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.17. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda δ- pcl(δ- pcl(A)) = δ- pcl(A) olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.18. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda $x \in \delta$- pcl(A) olması için gerek ve yeter koşul $\forall$ $(x \in)$ $B \in \delta$- PO(X) için $A \cap B \neq \emptyset$ olmasıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.19. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset B$ ve B açık olduğunda δ- pcl(A) $\subset$ B oluyorsa A kümesine gδp- kapalıdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.20.(X, τ) bir topolojik uzay olsun. gδp- kapalı kümelerin tümleyenlerine gδp- açık kümeler denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.21. ($X, \tau)$ topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesi için eğer $A \subset B$ ve $B \subset X$ düzenli açık olduğunda δ- pcl(A) $\subset$ B oluyorsa A kümesine gδpr- kapalı küme denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.22.(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bir gδpr- kapalı kümenin tümleyenine gδpr- açık küme denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.23. (X, τ) topolojik uzay olsun. $A \subset X$ alalım. A kümesinde bulunan tüm gδpr- açık kümelerin birleşimine A kümesinin gδpr içi denir.

A kümesinin gδpr içi ve gδpr- int(A) ile gösterilir.

Tanım 2.24. Bir (X, τ) topolojik uzayındaki bir A alt kümesi için gδpr- cl(A) = $\cap$ { G: $A \subset G$ ve G, X‘ te gδpr- kapalı} olarak tanımlanır (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.25. (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda gδpr- cl($\emptyset$) = $\emptyset$ ve gδpr- cl(X) = X olur (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.26. (X, τ) topolojik uzay A ve B (X, τ) topolojik uzayının alt kümeleri olsun. Bu durumda $A \subset B$ ise gδpr- cl(A) $\subset$ gδpr- cl(B) olur (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.27. (X, τ) topolojik uzay A (X, τ) topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Bu durumda A $\subset$ gδpr- cl(A) olur (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.28. (X, τ) topolojik uzay A (X, τ) topolojik uzayının alt kümesi olsun. Bu durumda gδpr- cl(A) = gδpr- cl(gδpr- cl(A)) olur (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.29. (X, τ) topolojik uzay A ve B (X, τ) topolojik uzayının alt kümeleri olsun. Bu durumda gδpr- cl(A $\cup$ B) $\supset$ gδpr- cl(A) $\cup$ gδpr- cl(B) olur (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.30. (X, τ) topolojik uzay A ve B (X, τ) topolojik uzayının alt kümeleri olsun. Bu durumda gδpr- cl(A $\cap$ B) $\subset$ gδpr- cl(A) $\cap$ gδpr- cl(B) olur (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.31. (X, τ) topolojik uzay A ve B (X, τ) topolojik uzayının alt kümeleri olsun. Bu durumda Eğer A $\subset$ X gδpr- kapalı ise A = gδpr- cl(A) olur (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.32. (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer gδpr- açık kümeler ailesi bir topoloji oluşturuyorsa τ^* = { V $\subset$ X: gδpr- cl(X \ V) = X \ V }ailesi gδpr- açık kümeler ailesine eşit olur (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 2.33. (X, τ) topolojik uzayı için, her gδpr- kapalı kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\tau^* = \tau$ olmasıdır (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.34. (X, τ) bir topolojik uzay ve A $\subset$ X olsun. A$\subset$ B ve B açık olduğunda cl(A) $\subset$ B ise A kümesine genelleştirilmiş kapalı küme denir (Levine, 1970).

Genelleştirilmiş kapalı kümeye kısaca g-kapalı küme denir (Levine, 1970).

Tanım 2.35. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. genelleştirilmiş kapalı kümelerin tümleyenlerine genelleştirilmiş açık kümeler denir (Levine, 1970).

Genelleştirilmiş açık kümeye kısaca g- açık küme denir (Levine,1970).

Tanım 2.36. (X, τ) topolojik uzayında her g-kapalı küme kapalı küme ise bu uzaya $T_{1/2}$ –uzay denir (Levine, 1970).

Tanım 2.37. (X, τ) bir topolojik uzay ve A ⊂ X olsun. A kümesini kapsayan tüm önkapalı kümelerin arakesitine A kümesinin önkapanışı denir (El-Deeb ve ark., 1983).

A kümesinin önkapanışı pcl(A) ile gösterilir (El-Deeb ve ark., 1983).

Tanım 2.38. (X, τ) bir topolojik uzay ve A ⊂ X olsun. A ⊂ B ve B ⊂ X açık olduğunda pcl(A) ⊂ B oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş p- kapalı küme denir (Maki ve ark., 1996).

Genelleştirilmiş p-kapalı kümeye kısaca gp-kapalı küme denir (Maki ve ark., 1996).

Tanım 2.39. (X, τ) bir topolojik uzay ve A ⊂ X olsun. A ⊂ B ve B ⊂ X düzenli açık olduğunda cl(A) ⊂ B oluyorsa A kümesine düzenli genelleştirilmiş kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993).

Düzenli genelleştirilmiş kapalı kümeye kısaca rg- kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993).

Tanım 2.40. (X, τ) bir topolojik uzay ve A ⊂ X olsun. A ⊂ B ve B ⊂ X düzenli açık olduğunda pcl(A) ⊂ B oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş öndüzenli kapalı veya düzenli genelleştirilmiş önkapalı küme denir (Gnanambal, 1997, Noiri, 1998).

Düzenli genelleştirilmiş önkapalı kümeye kısaca gpr-kapalı küme denir (Gnanambal, 1997, Noiri, 1998).

Uyarı 2.41. (X, τ) bir topolojik uzay ve A ⊂ X olsun. Bu durumda aşağıdaki diyagram geçerlidir:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{kapalı} & \rightarrow & \text{g- kapalı} & \rightarrow & \text{rg- kapalı} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{önkapalı} & \rightarrow & \text{gp- kapalı} & \rightarrow & \text{gpr- kapalı} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\delta\text{- önkapalı} & \rightarrow & \text{g}\delta\text{p- kapalı} & \rightarrow & \text{g}\delta\text{pr- kapalı}
\end{array}$$

(Ekici ve Noiri, 2006).

BÖLÜM 3

G_1–TOPOLOJİK ÖZELLİKLER VE İLİŞKİLERİ

Tanım 3.1. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau)\rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere her gδpr- açık $A \subset X$ kümesi için f(A), Y ‘de gδpr- açık ise f fonksiyonuna gδpr- açık fonksiyon denir.

Tanım 3.2. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow(Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Her gδpr- kapalı $F \subset X$ kümesi için f(F), Y‘de gδpr- kapalı ise f fonksiyonuna gδpr- kapalı fonksiyon denir.

Tanım 3.3. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Her gδpr- açık $F \subset Y$ kümesi için $f^{-1}(F)$, X’ de gδpr- açık ise f fonksiyonuna gδpr- kararsızdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 3.4. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu 1-1 ve örten ve üstelik gδpr- kararsız ve gδpr- açık oluyorsa f fonksiyonuna bir G_1–homeomorfizma denir.

Tanım 3.5. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere X ve Y uzayları arasında bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ G_1–homeomorfizması var ise X ve Y uzaylarına G_1–homeomorfik topolojik uzaylardır denir.

Tanım 3.6. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir G_1–homeomorfizma olmak üzere G_1–homeomorfizma altında korunan topolojik özelliklere G_1–topolojik özellik denir**.**

Tanım 3.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve $N\subset X$ olsun. $x \in G \subset N$ olacak biçimde bir gδpr- açık G kümesi var ise N kümesine x noktasının bir gδpr- komşuluğu denir.

Teorem 3.8. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu gδpr- açık ise her bir $x \in X$ noktasının her bir gδpr- komşuluğunun görüntüsü o noktanın görüntüsünün gδpr- komşuluğu olur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu gδpr- açık olsun. $x \in X$ ve A kümesi x noktasının bir gδpr- komşuluğu olsun. Bu durumda $x \in B \subset A$ olacak biçimde. bir B gδpr- açık kümesi vardır. Buradan $f(x) \in f(B) \subset f(A)$ elde ederiz. f fonksiyonu gδpr- açık olduğundan f (B) gδpr- açık bir kümedir. Böylece f (A) kümesi f(x) noktasının bir gδpr- komşuluğu olur.

Tanım 3.9. (X, τ) topolojik uzay olmak üzere her gδpr- kapalı küme δ- önkapalı küme ise bu uzaya δp- regüler $T_{1/2}$ – uzay denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 3.10. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar, (Y, υ) δp- regüler $T_{1/2}$ uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f fonksiyonu gδpr- açıktır,

(2) Her $A \subset X$ için f(gδpr- int (A)) $\subset$ gδpr- int (f (A)) olur,

(3) Her $B \subset Y$ için gδpr- int ($f^{-1}(B)$) $\subset$ f^{-1}(gδpr- int (B)) olur.

İspat:

(1) ⇒(2) f fonksiyonu gδpr- açık olsun. $A \subset X$ alalım. gδpr- int (A) $\subset$ A olduğunu biliyoruz. Buradan f(gδpr- int (A)) $\subset$ f (A) olacaktır. Bu durumda

gδpr- int (f (gδpr- int (A)))

= f (gδpr- int (A)) $\subset$ gδpr- int (f (A))

olacaktır.

(2) $\Rightarrow$(3) Her $A \subset X$ için $f(\ g\delta pr\text{- int }(A)\ ) \subset g\delta pr\text{- int }(\ f\ (A)\ )$olsun. $B \subset Y$ alalım. Buradan

$$f\ (\ g\delta pr\text{- int }(\ f^{-1}\ (B)\ )\ ) \subset g\delta pr\text{- int }(\ f\ (\ f^{-1}\ (B)\ )\ )$$

$$\subset g\delta pr\text{- int }(B)$$

olacaktır. Bu durumda

$$f^{-1}\ (\ f\ (\ g\delta pr\text{- int }(\ f^{-1}\ (B)\ )\ )\ ) \subset f^{-1}\ (\ g\delta pr\text{- int }(B)\ )$$

ve böylece

$$g\delta pr\text{- int }(\ f^{-1}\ (B)\ ) \subset f^{-1}\ (\ g\delta pr\text{- int }(B)\ )$$

elde ederiz.

(3) $\Rightarrow$ (1) Her $B \subset Y$ için $g\delta pr\text{- int }(\ f^{-1}\ (B)\ ) \subset f^{-1}\ (\ g\delta pr\text{- int }(B)\ )$ olsun. $A \subset X$ bir gδpr- açık küme olsun. Bu durumda

$$g\delta pr\text{- int }(\ f^{-1}\ f\ (A)\ ) \subset f^{-1}\ (g\delta pr\text{- int }(\ f\ (A)\ )\ )$$

olacaktır. Bu durumda

$$A = g\delta pr\text{- int }(A) \subset f^{-1}\ (\ g\delta pr\text{ - int }(\ f\ (A)\ )\ )$$

olur. Sonuç olarak

$$f(A) \subset f\ (f^{-1}\ (\ g\delta pr\text{ - int }(\ f\ (A)\ )\ )\ ) \subset g\delta pr\text{- int }(\ f\ (A)\ )$$

elde ederiz. Yani $f(A) \subset g\delta pr\text{- int }(\ f\ (A)\ )$ olur. Öyleyse f, gδpr- açık fonksiyon olur.

Teorem 3.11. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun gδpr- kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $A \subset Y$ ve $f^{-1}(A) \subset B$ olan her B gδpr- açık kümesi için $A \subset G$ ve $f^{-1}(G) \subset B$ olacak biçimde bir G gδpr- açık kümesinin var olmasıdır.

İspat:

f fonksiyonunun gδpr- kapalı olsun. $A \subset Y$ ve $f^{-1}(A) \subset B$ ve B gδpr- açık bir küme olarak alalım. Buradan $G = Y \setminus f(X \setminus B)$ dersek G kümesi gδpr- açık bir kümedir. Ayrıca $A \subset G$ ve $f^{-1}(G) \subset B$ elde ederiz.

Tersine, her $A \subset Y$ ve $f^{-1}(A) \subset B$ olan her B gδpr- açık kümesi için $A \subset G$ ve $f^{-1}(G) \subset B$ olacak biçimde bir G gδpr- açık kümesinin var olsun. $A \subset X$ bir gδpr- kapalı küme olarak alalım. Buradan

$$f^{-1}(Y \setminus f(A)) \subset X \setminus A$$

ve $X \setminus A$ kümesi gδpr- açık olacaktır. $U = Y \setminus f(A)$ ve $B = X \setminus A$ dersek $Y \setminus f(A) \subset G$ ve $f^{-1}(G) \subset X \setminus A$ olacak biçimde bir G gδpr- açık kümesi vardır. Böylece $f(A) = Y \setminus G$ ve f (A) gδpr- kapalı olur. Bu ise bize f' nin gδpr- kapalı olduğunu verecektir.

Teorem 3.12. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere ve (Y, υ) δp-regüler $T_{1/2}$ uzay olmak üzere f fonksiyonu gδpr- kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $A \subset X$ için gδpr- cl(f(A)) $\subset$ f (gδpr- cl (A)) olmasıdır.

İspat:

f fonksiyonu gδpr- kapalı olsun. $A \subset X$ olmak üzere $A \subset$ gδpr- cl(A) sahibiz. Ayrıca

$$f(A) \subset f(\text{g}\delta\text{pr- cl}(A))$$

ve f fonksiyonu gδpr- kapalı olduğundan dolayı

$$\text{g}\delta\text{pr- cl}(f(A)) \subset \text{g}\delta\text{pr- cl}(f(\text{g}\delta\text{pr- cl}(A)) = f(\text{g}\delta\text{pr- cl}(A))$$

olacaktır. Yani gδpr- cl(f(A)) $\subset$ f (gδpr- cl (A)) olur.

Tersine, her $A \subset X$ için gδpr- cl(f(A)) $\subset$f (gδpr- cl (A)) olsun. $A \subset X$ gδpr- kapalı bir küme olmak üzere

$$g\delta pr\text{- } cl(f(A)) \subset f (g\delta pr\text{- } cl (A)) = f(A)$$

elde ederiz. Buradan f (A), Y’ de gδpr- kapalı küme ve böylece f gδpr- kapalı bir fonksiyon olur.

Teorem 3.13. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir G_1 – homeomorfizma olmak üzere f^{-1}:$Y \to X$, $y \to f^{-1}(y) = x$ fonksiyonu da bir G_1 – homeomorfizmadır.

İspat:

f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir G_1 – homeomorfizma olsun. Buradan f gδpr-kararsız, gδpr- açık, 1-1 ve örtendir. Buradan f^{-1}: $(Y, \upsilon) \to (X, \tau)$ gδpr- kararsız, gδpr-açık, 1-1 ve örten olur. Sonuç olarak f^{-1}, G_1– homeomorfizmadır.

Teorem 3.14. (X, τ) ve (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$, g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki G_1 –homeomorfizma olmak üzere go f: $(X, \tau) \to (Z, \sigma)$, $x \to (go\ f) (x)$ fonksiyonu da bir G_1 – homeomorfizmadır.

İspat:

f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki G_1 –homeomorfizma olmak üzere go f: $(X, \tau) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonunu alalım. (Z, σ) uzayında bir A gδpr- açık küme olmak üzere g fonksiyonu bir G_1 –homeomorfizma olduğundan $g^{-1}(A)$ gδpr- açık bir küme olacaktır. $g^{-1}(A)$, (Y, υ) uzayında gδpr- açık küme ve f fonksiyonu bir G_1 –homeomorfizma olduğundan dolayı $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (go\ f)^{-1}(A)$ gδpr- açık küme olacaktır.

Bu ise bize go f: $(X, \tau) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonunun gδpr- kararsız olduğunu verecektir. Ayrıca f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonları gδpr- açık olduğundan go f: $(X, \tau) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonuda gδpr- açık olacaktır.

Sonuç olarak go f: $(X, \tau) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonu bir G_1 – homeomorfizma olacaktır.

Teorem 3.15. Topolojik uzaylar arasında G_1 –homeomorfik uzay olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

(X, τ) topolojik uzay olmak üzere i: $X \rightarrow X$, $i(x) = x$ özdeşlik dönüşümü bir G_1 – homeomorfizmadır. Dolayısıyla bağıntı yansıyandır.

Kabul edelim ki (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzayları G_1 – homeomorfik uzaylar olsun. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir G_1 – homeomorfizma olmak üzere f^{-1}: $Y \rightarrow X$, $y \rightarrow f^{-1}(y) = x$ fonksiyonu da bir G_1 – homeomorfizmadır. O halde (Y, υ) ve (X, τ) topolojik uzayları G_1 –homeomorfik uzaylar olur. Yani bağıntı simetriktir.

(X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar olmak üzere (X, τ) ile (Y, υ) topolojik uzayları G_1 –homeomorfik ve (Y, υ) ile (Z, σ) topolojik uzayları G_1 –homeomorfik uzaylar olsun. Bu durumda f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ ve g: $(Y, \upsilon) \rightarrow (Z, \sigma)$ iki G_1 –homeomorfizma olsun. Buradan go f: $(X, \tau) \rightarrow (Z, \sigma)$, $x \rightarrow$ go f (x) fonksiyonu da bir G_1 – homeomorfizmadır. Yani (X, τ) ile (Z, σ) topolojik uzayları G_1 –homeomorfik uzaylar olacaktır. Yani bağıntı geçişkendir.

Teorem 3.16. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere fonksiyonunun gδpr- kararsız olması için gerek ve yeter koşul her A gδpr- açık kümesi için $f^{-1}(Y / A)$ kümesinin gδpr-kapalı olmasıdır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu gδpr- kararsız olsun. $A \subset Y$ gδpr- açık kümesini alalım. Bu durumda $f^{-1}(A)$ gδpr- açık olacaktır. Buradan $X / f^{-1}(A) = f^{-1}(Y / A)$ gδpr- kapalıdır.

Tersine, her A gδpr –açık kümesi için $f^{-1}(Y \setminus A)$ kümesi gδpr-kapalı olsun. $A \subset Y$ gδpr- açık kümesini alalım. Buradan $f^{-1}(Y \setminus A)$ gδpr-kapalıdır. Bu durumda

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

ve $f^{-1}(A)$ gδpr- açık olacaktır. Yani f fonksiyonu gδpr- kararsız olur.

Teorem 3.17. (X, τ) ve (Y, υ) δp- regüler $T_{1/2}$ –uzaylar ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonunun gδpr- kararsız olması için gerek ve yeter koşul her $A \subset Y$ için f^{-1} (gδpr- int(A))$\subset$ gδpr- int (f^{-1} (A)) olmasıdır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu gδpr- kararsız olsun. $A \subset Y$ alalım. Bu durumda gδpr- int(A) kümesi gδpr –açık küme olduğundan f^{-1} (gδpr- int(A)) kümesi gδpr –açık olacaktır. Buradan gδpr- int(A)$\subset$ A ve buradan,

$$f^{-1}(g\delta pr\text{- } int(A)) \subset f^{-1}(A)$$

olacaktır. Üstelik

$$\begin{aligned} g\delta pr\text{- } int(f^{-1}(g\delta pr\text{- } int(A))) &= f^{-1}(g\delta pr\text{- } int(A)) \\ &\subset g\delta pr\text{- } int(f^{-1}(A)) \end{aligned}$$

olur. Yani f^{-1} (gδpr- int(A))$\subset$ gδpr- int (f^{-1} (A)) olur.

Tersine, her $A \subset Y$ için f^{-1} (gδpr- int(A))$\subset$ gδpr- int (f^{-1} (A)) olsun. A bir gδpr- açık bir küme olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(g\delta pr\text{- } int(A)) \subset g\delta pr\text{- } int(f^{-1}(A))$$

ve

$$f^{-1}(A) \subset g\delta pr\text{- } int(f^{-1}(A))$$

olacağından $f^{-1}(A)$ bir gδpr- açık küme olur. O halde f bir gδpr- kararsız fonksiyondur.

Teorem 3.18. (X, τ) ve (Y, υ) δp- regüler $T_{1/2}$ –topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

1. f bir $g\delta pr$- kararsız fonksiyon,
2. her $A \subset Y$ için $g\delta pr\text{-}\,cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(A))$ olur,
3. her $A \subset X$ için $f(g\delta pr\text{-}\,cl(A)) \subset g\delta pr\text{-}\,cl(f(A))$ olur.

İspat:

(1)⇒ (2) f bir $g\delta pr$- kararsız fonksiyon olsun. $A \subset Y$ alalım. Buradan $g\delta pr\text{-}\,cl(A)$ kümesi $g\delta pr$- kapalı olduğundan $f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(A))$ $g\delta pr$- kapalıdır. $A \subset g\delta pr\text{-}\,cl(A)$ olduğu açıktır. Böylece

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(A))$$

elde ederiz. $f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(A))$ $g\delta pr$- kapalı olduğundan

$$\begin{aligned} & g\delta pr\text{-}\,cl(f^{-1}(A)) \\ & \subset g\delta pr\text{-}\,cl(f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(A))) \\ & = f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(A)) \end{aligned}$$

ve böylece $g\delta pr\text{-}\,cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(A))$ elde edilir.

(2)⇒ (3) Her $A \subset Y$ için $g\delta pr\text{-}\,cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(A))$ olsun. $f(A) \subset Y$ alalım. Bu durumda

$$g\delta pr\text{-}\,cl(f^{-1}(f(A))) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(f(A)))$$

ve buradan

$$g\delta pr\text{-}\,cl(A) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{-}\,cl(f(A)))$$

elde ederiz. Bu durumda

$$f(\, g\delta pr\text{-}\, cl(A)\,) \subset f(\, f^{-1}(\, g\delta pr\text{-}\, cl(\, f(A)\,)\,)\,)$$

$$\subset g\delta pr\text{-}\, cl(\, f(A))$$

olacaktır. Yani $f(\, g\delta pr\text{-}\, cl(A)\,) \subset g\delta pr\text{-}\, cl(\, f(A)\,)$ olur.

(3)$\Rightarrow$ (1) Her $A \subset X$ için $f(\, g\delta pr\text{-}\, cl(A)\,) \subset g\delta pr\text{-}\, cl(\, f(A)\,)$ olsun. $A \subset Y$ kümesi $g\delta pr$- kapalı bir küme olsun. Bu durumda

$$f(\, g\delta pr\text{-}\, cl(f^{-1}(A))\,)$$

$$\subset g\delta pr\text{-}\, cl(\, f(\, f^{-1}(A)\,)\,)$$

$$\subset g\delta pr\text{-}\, cl(A) = A$$

olacaktır. Buradan $g\delta pr\text{-}\, cl(f^{-1}(A)\,) \subset f^{-1}(A)$ elde deriz. Yani $f^{-1}(A)$ kümesi $g\delta pr$ - kapalı bir kümedir.

Teorem 3.19. (X, τ) ve (Y, υ) δp- regüler $T_{1/2}$ topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere f‘ nin $g\delta pr$- kararsız fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için ve $f(x) \in A$ olan A $g\delta pr$- açık kümesi için $f(B) \subset A$ olacak biçimde $x \in B$ olan B $g\delta pr$- açık kümesi var olmasıdır.

İspat:

f bir $g\delta pr$- kararsız fonksiyon olsun. $x \in X$ ve $f(x) \in A$ ve A $g\delta pr$- açık bir küme olsun. Buradan $x \in f^{-1}(A)$ olacaktır. Bu durumda $f^{-1}(A)$ bir $g\delta pr$- açık bir kümedir. $B = f^{-1}(A)$ dersek $f(B) \subset A$ olur.

Tersine, her $x \in X$ için ve $f(x) \in A$ olan A $g\delta pr$- açık kümesi için $f(B) \subset A$ olacak biçimde $x \in B$ olan B $g\delta pr$- açık kümesi var olsun. A bir $g\delta pr$- açık küme ve $x \in f^{-1}(A)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in A$ olduğundan $f(x) \in f(B) \subset A$ olacak biçimde B $g\delta pr$- açık kümesi vardır. Buradan $x \in B \subset f^{-1}(A)$ ve böylece $f^{-1}(A)$ bir $g\delta pr$- açık küme olur.

Teorem 3.20. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau)\rightarrow (Y, \upsilon)$ bir 1-1, örten fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun bir G_1 – homeomorfizma olması için gerek ve yeter koşul f^{-1} fonksiyonunun G_1 – homeomorfizma olmasıdır.

İspat:

Tanımlardan açıktır.

Teorem 3.21. (X, τ) ve (Y, υ) δp- regüler $T_{1/2}$ topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir 1-1, örten fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun bir G_1 – homeomorfizma olması için gerek ve yeter koşul her $A \subset X$ alt kümesi için gδpr- cl (f (A)) = f(gδpr- cl (A)) olmasıdır.

İspat:

Teorem 3. 12 ve 3.18 ‘ den açıktır.

Teorem 3.22. (X, τ) ve (Y, υ) δp-regüler $T_{1/2}$ –topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir 1-1, örten fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu G_1 – homeomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $\forall$ $S \subset Y$ için gδpr- int (f^{-1} (S)) = f^{-1}(gδpr- int (S)) olmasıdır.

İspat:

Teorem 3. 10 ve Teorem 3.17 ‘ den açıktır.

Teorem 3.23. Y, X' in bir düzenli açık ve gδpr- kapalı alt uzayı olsun. A, Y içinde gδpr- açık ise A, X içinde de gδpr- açıktır (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 3.24. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $x \neq y$ olan her x ve y noktası için $x \in A$, $y \notin A$ veya $x \notin B$, $y \in B$ olacak biçimde A ve B gδpr- açık kümeleri var ise X uzayına gδpr- T_0 uzaydır denir.

Tanım 3.25. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $x \neq y$ olan her x ve y noktası için $x \in A$, $y \notin A$ ve $x \notin B$, $y \in B$ olacak biçimde A ve B gδpr- açık kümeleri var ise X uzayına gδpr- T_1 uzaydır denir.

Tanım 3.26. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $x \neq y$ olan her x ve y noktası için $x \in A$, $y \in B$ ve $A \cap B = \varnothing$ olacak biçimde A ve B gδpr- açık kümeleri var ise X uzayına gδpr- T_2 uzay denir.

Tanım 3.27. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere her kapalı K kümesi ve $x \notin K$ olan her x noktası için $x \in A$ ve $K \subset B$ olacak biçimde $A \cap B = \varnothing$ olan A ve B gδpr- açık kümeleri var ise X uzayına gδpr- regüler uzaydır.

Tanım 3.28. (X, τ) bir topolojik uzay $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin (X, τ) uzayındaki her gδpr-açık örtüsünün A' yı örten sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine X' e göre gδpr- kompaktır denir.

Tanım 3.29. (X, τ) bir topolojik X kümesi X' e göre gδpr- kompakt ise X uzayına gδpr- kompaktır denir.

Tanım 3.30. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A \cap B = \varnothing$olan her A, B kapalı kümeleri için $A \subset U$ ve $B \subset V$ ve $U \cap V = \varnothing$olacak biçimde U ve V gδpr- açık kümeleri var ise X uzayına gδpr- normal uzay denir.

Teorem 3.31. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere ve bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu 1-1, örten ve gδpr- açık olmak üzere X uzayı gδpr- T_0 uzay ise Y uzayı da gδpr- T_0 uzaydır.

İspat:

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu 1-1, örten ve gδpr- açık olmak üzere X uzayı gδpr- T_0 uzay olsun.

$y \neq z$ olacak biçimde $y, z \in Y$ noktalarını alalım. Buradan $f(a) = y$ ve $f(b) = z$ olacak biçimde $a, b \in X$ vardır. Bu durumda $a \in A$, $b \notin A$ veya $a \notin B$, $b \in B$ olacak biçimde A ve B gδpr- açık kümeleri vardır. Buradan $f(a) \in f(A)$, $f(b) \notin f(A)$ veya $f(a) \notin f(B)$, $f(b) \in f(B)$ elde ederiz. Üstelik f(A) ve f(B) gδpr- açık kümeler olacaktır.

Böylece Y uzayının gδpr- T_0 uzay olduğunu elde ederiz.

Teorem 3.32. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, gδpr- açık bir fonksiyon olmak üzere X uzayı gδpr- T_1 uzay ise Y uzayı da gδpr- T_1 uzaydır.

İspat:

$f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, gδpr- açık bir fonksiyon olmak üzere X uzayı gδpr- T_1 uzay olsun.

$y \neq z$ olan $y, z \in Y$ noktalarını alalım. Bu durumda $f(a)= y$ ve $f(b) =z$ olacak biçimde $a, b \in X$ vardır. Bu durumda $a \in A$, $b \notin A$ ve $a \notin B$, $b \in B$ olacak biçimde A ve B iki gδpr- açık kümeleri vardır. Böylece $f(a) \in f(A)$, $f(b) \notin f(A)$ ve $f(a) \notin f(B)$, $f(b) \in f(B)$ olacaktır. Üstelik f(A) ve f(B) iki gδpr- açık kümedir.

O halde Y uzayının bir gδpr- T_1 uzay olduğunu elde ederiz.

Teorem 3.33. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, gδpr- açık bir fonksiyonu olmak üzere X uzayı gδpr- T_2 uzay ise Y uzayı da gδpr- T_2 uzaydır.

İspat:

$f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, gδpr- açık bir fonksiyonu olmak üzere X uzayı gδpr- T_2 uzay olsun.

Bu durumda $y \neq z$ olmak üzere $y, z \in Y$ noktalarını alalım. Buradan $f(a)= y$ ve $f(b) =z$ olacak biçimde $a, b \in X$ vardır. Buradan $a \in A$, $b \in B$ ve $A \cap B= \emptyset$ olan A ve B iki gδpr- açık kümeleri vardır. Buradan $f(a) \in f(A)$, $f(b) \in f(B)$ ve $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ olan f(A) ve f(B) iki gδpr- açık kümeleri var olacaktır.

Böylece Y uzayının bir gδpr- T_2 uzay olduğunu elde ederiz.

Teorem 3.34. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$

gδpr- kararsız, 1-1,örten bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı gδpr- T_0 uzay ise X 'de gδpr- T_0 uzay olur.

İspat:

f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ gδpr- kararsız, 1-1, örten bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı gδpr- T_0 uzay olsun. $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in X$ olsun. Buradan $f(x) \neq f(y)$ olacaktır. Bu durumda Y uzayı gδpr- T_0 uzay olduğundan $f(x) \in A$, $f(y) \notin A$ veya $f(x) \notin B$, $f(y) \in B$, olacak biçimde A ve B gδpr- açık kümeleri vardır. Bu ise

$$x \in f^{-1}(A),\ y \notin f^{-1}(A)$$

veya

$$x \notin f^{-1}(B),\ y \in f^{-1}(B)$$

olduğunu verecektir. Üstelik $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ gδpr- açık kümelerdir. Sonuç olarak X uzayının gδpr- T_0 uzay olduğunu elde ederiz.

Teorem 3.35. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzay olmak üzere f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ gδpr- kararsız, 1-1, örten bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı gδpr- T_1 uzay ise X uzayı da gδpr- T_1 uzay olur.

İspat:

f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ gδpr- kararsız, 1-1, örten bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı gδpr- T_1 uzay olsun. Buradan $x \neq y$ olacak biçimde $x,y \in X$ olsun. f, 1-1 olduğundan $f(x) \neq f(y)$ olur. Ayrıca Y uzayı gδpr- T_1 olduğundan dolayı $f(x) \in A$, $f(y) \notin A$ ve $f(x) \notin B$, $f(y) \in B$ olacak biçimde A ve B iki gδpr- açık kümeler vardır.

Bu durumda $x \in f^{-1}(A)$, $y \notin f^{-1}(A)$ ve $x \notin f^{-1}(B)$, $y \in f^{-1}(B)$ olacaktır. O halde X uzayı gδpr- T_1 uzay olur.

Teorem 3.36. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ 1-1, örten bir fonksiyonu alalım. Bu durumda f fonksiyonu gδpr- açık ve Y uzayı gδpr- kompakt ise X uzayı da gδpr- kompakt uzay olur.

İspat:

f: (X, τ) →(Y, υ) 1-1, örten bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu gδpr-açık ve Y uzayı gδpr- kompakt olsun. X in bir gδpr- açık örtüsü A= $\{A_i : i \in I\}$ olsun. Bu durumda X= $\bigcup_{i\in I} A_i$ ve buradan Y= f(X) = f($\bigcup_{i\in I} A_i$) = $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$ olacaktır .

Buradan f fonksiyonu gδpr-açık olduğundan her $i \in I$ için $f(A_i)$ kümesi gδpr- açık olacaktır. Ayrıca Y uzayı gδpr- kompakt olduğundan, Y= $\bigcup_{i\in Io} f(A_i)$ olacak biçimde $I_0 \subset I$ sonlu kümesi vardır.

Böylece X = $f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{i\in Io} f(A_i)) = (\bigcup_{i\in Io} f^{-1}(f(A_i))) = \bigcup_{i\in Io} A_i$ ve bu durumda X uzayının bir gδpr- kompakt uzay olduğunu elde ederiz.

Teorem 3.37. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzay olmak üzere f: (X, τ) →(Y, υ) gδpr- kararsız, 1-1, örten bir fonksiyon olmak üzere X uzayı gδpr- kompakt ise Y uzayı da gδpr- kompakt uzay olur.

İspat:

f: (X, τ) →(Y,υ) gδpr- kararsız, 1-1, örten bir fonksiyon olmak üzere Y uzayının bir gδpr- açık örtüsü U = $\{ U_i : i \in I \}$ olsun.

Bu durumda Y = $\bigcup_{i\in I} U_i$ ve buradan X = $f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ olur. Ayrıca, f fonksiyonu gδpr- kararsız olduğundan dolayı $f^{-1}(U_i)$ bir gδpr- açık küme olacaktır.

Bu durumda X uzayı gδpr- kompakt uzay olduğunda X = $\bigcup_{i\in Io} f^{-1}(U_i)$ olan bir $I_0 \subset I$ sonlu küme vardır. Böylece Y = f (X) = $f(\bigcup_{i\in Io} f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i\in Io} (f f^{-1}(U_i))$

$= \bigcup_{i \in Io} U_i$ ve böylece Y uzayının gδpr- kompakt uzay olduğunu elde ederiz.

Tanım 3.38. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Her A açık kümesi için $f^{-1}(A)$ gδpr- açık oluyor ise f fonksiyonuna gδpr- sürekli fonksiyon denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 3.39. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzay olmak üzere f: (X, τ) →(Y, υ) gδpr- sürekli, 1-1, örten bir fonksiyon olmak üzere X uzayı gδpr- kompakt ise Y uzayı da kompakt uzay olur.

İspat:

f: (X, τ) →(Y, υ) gδpr- sürekli, 1-1, örten bir fonksiyon olmak üzere Y uzayının bir açık örtüsü U = { U_i : i∈ I } olsun.

Bu durumda $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ ve buradan $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ olur. Ayrıca, f fonksiyonu gδpr- sürekli olduğundan dolayı $f^{-1}(U_i)$ bir gδpr- açık küme olacaktır. Bu durumda X uzayı gδpr- kompakt uzay olduğunda $X = \bigcup_{i \in Io} f^{-1}(U_i)$ olan bir $I_0 \subset I$ sonlu küme vardır.

Böylece $Y = f(X) = f(\bigcup_{i \in Io} f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i \in Io} (f f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i \in Io} U_i$ ve böylece Y uzayının kompakt uzay olduğunu elde ederiz.

Teorem 3.40. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ) → (Y, υ) bir G_1– homeomorfizma olmak üzere gδpr- T_0 uzay olma özelliği bir G_1– topolojik özelliktir.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ) → (Y, υ) bir G_1– homeomorfizma olsun. X uzayı gδpr- T_0 uzay olsun. Bu durumda Teorem 3.31 'den Y uzayı da gδpr- T_0 uzaydır.

Teorem 3.41. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y,\upsilon)$ bir G_1 –homeomorfizma olmak üzere gδpr- T_1 uzay olma özelliği bir G_1 – topolojik özelliktir.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir G_1 –homeomorfizma olsun. X uzayı gδpr- T_1 uzay olsun.

Bu durumda Teorem 3.32 'den Y uzayı da gδpr- T_1 uzaydır.

Teorem 3.42. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir G_1 –homeomorfizma olmak üzere gδpr- T_2 uzay olma özelliği bir G_1 – topolojik özelliktir.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir G_1 – homeomorfizma olsun. X uzayı gδpr- T_2 uzay olsun. Teorem 3.33 dan Y uzayı da gδpr- T_2 uzaydır.

Teorem 3.43. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir G_1 – homeomorfizma olmak üzere gδpr- kompakt uzay olma özelliği bir G_1 – topolojik özellik olur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir G_1 –homeomorfizma olsun. X uzayı gδpr- kompakt uzay olsun. Teorem 3.37' den Y uzayı da gδpr- kompakt uzay olacaktır.

Teorem 3.44. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir gδpr- kapalı fonksiyon olmak üzere $A \subset X$ düzenli açık ve gδpr- kapalı küme ise $f|_A : (H, \tau_A) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu gδpr- kapalıdır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir gδpr- kapalı fonksiyon olmak üzere $A \subset X$ düzenli açık ve gδpr- kapalı küme olsun. U (A, τ_A) uzayında gδpr- kapalı küme olarak alalım.

Buradan $A \subset X$ düzenli açık ve gδpr- kapalı küme olduğundan Teorem 3.23' den dolayı $(f|_A)$ (U)=f (U) gδpr- kapalı küme olacaktır. Yani $f|_A$ bir gδpr- kapalı fonksiyon olur.

Teorem 3.45. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı bir fonksiyonu olmak üzere f fonksiyonu gδpr- kararsız ve Y uzayı gδpr- regüler ise X uzayı da gδpr- regüler uzay olur.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı bir fonksiyonu olmak üzere f fonksiyonu gδpr- kararsız ve Y uzayı gδpr- regüler olsun. $x \notin A$ ve A bir kapalı küme olsun. Bu durumda f fonksiyonu kapalı olduğundan f(A) bir kapalı küme ve ayrıca $f(x) \notin f(A)$ olacaktır. Y uzayı gδpr- regüler olduğundan dolayı $f(x) \in U$ ve $f(A) \subset V$ olan ayrıca $U \cap V = \emptyset$ olan U ve V iki gδpr- açık kümeleri vardır.

Bu durumda $x \in f^{-1}(U)$ ve $A \subset f^{-1}(V)$ ve üstelik $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ kümelerinin gδpr- açık olduğunu elde ederiz. Ayrıca $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ olacaktır.

Yani X uzayı bir gδpr- regüler uzaydır.

Teorem 3.46. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu gδpr-kararsız ve Y uzayı gδpr- normal ise X uzayı da gδpr- normal uzaydır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu gδpr- kararsız ve Y uzayı gδpr- normal olsun. $A \cap B = \emptyset$ olan A ve B kapalı kümelerini alalım. Bu durumda f fonksiyonu kapalı olduğundan dolayı f(A) ve f(B) kümeleri kapalı ve $f(A) \cap f(B) = \varnothing$ olacaktır.

Y uzayı gδpr- normal uzay olduğundan $f(A) \subset U$, $f(B) \subset V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olan U ve V iki gδpr- açık kümeleri vardır. Bu durumda $A \subset f^{-1}(U)$, $B \subset f^{-1}(V)$ ve $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ kümeleri gδpr- açık kümelerdir. Ayrıca $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ olacaktır.

O halde X uzayı bir gδpr- normal uzay olacaktır.

Teorem 3.47. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olmak üzere f ve g fonksiyonları gδpr- açık ise go f fonksiyonu da gδpr- açıktır.

İspat:

$f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon gδpr- açık olsun. f gδpr- açık olduğundan her A gδpr- açık kümesi için f(A) gδpr- açık olacaktır. Ayrıca, g fonksiyonu gδpr- açık olduğundan her A gδpr- açık kümesi için g(A) gδpr- açık olacaktır.

Bu durumda f(A) gδpr- açık olduğundan g(f(A)) gδpr- açık ve böylece g(f(A)) = go f (A) gδpr- açık olur.

O halde go f fonksiyonu gδpr- açıktır.

Teorem 3.48. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve $g:(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olmak üzere f ve g fonksiyonları gδpr- kapalı ise go f fonksiyonu da gδpr- kapalıdır.

İspat:

$f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve $g : (Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyonu gδpr- kapalı olsun. Bu durumda f gδpr- kapalı olduğundan her A gδpr- kapalı kümesi için f(A) gδpr- kapalı olacaktır. g fonksiyonu gδpr- kapalı olduğundan her A gδpr- kapalı kümesi için g(A) gδpr- kapalı olacaktır.

Bu durumda f(A) gδpr- kapalı kümesi için g(f(A)) gδpr- kapalı olur ve böylece g(f(A)) = go f (A) gδpr- kapalı olur.

O halde go f fonksiyonu gδpr- kapalıdır.

Teorem 3.49. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ)→(Y, υ) ve g: (Y, υ) →(Z, σ) iki fonksiyon olmak üzere f ve g fonksiyonları gδpr- kararsız ise go f : (X, τ) →(Z, σ) fonksiyonu da gδpr- kararsızdır.

İspat:

f: (X, τ) →(Y, υ) ve g : (Y, υ) → (Z, σ) iki fonksiyonu gδpr- kararsız olsun. A bir gδpr- açık küme olmak üzere g fonksiyonu gδpr- kararsız olduğundan g^{-1}(A) gδpr- açık bir küme olacaktır. Ayrıca f fonksiyonu gδpr-kararsız olduğundan g^{-1}(A) gδpr- açık kümesi için f^{-1} (g^{-1}(A)) gδpr- açık elde ederiz.

Bu durumda f^{-1} o g^{-1} (A) = (go f) $^{-1}$ (A) gδpr- açık olacaktır. O halde go f fonksiyonunun gδpr- kararsız olduğu elde edilir.

Teorem 3.50. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) ve g: (Y, υ) → (Z, σ) iki G_1– homeomorfizma olmak üzere go f fonksiyonu da bir G_1– homeomorfizmadır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) ve g: (Y, υ) → (Z, σ) iki G_1– homeomorfizma olmak üzere go f: (X, τ) → (Z, σ) fonksiyonunu alalım.(Z, σ) uzayında bir A gδpr- açık küme olmak üzere g fonksiyonu bir G_1– homeomorfizma olduğundan g^{-1} (A) gδpr- açık bir küme olacaktır. g^{-1} (A) (Y, υ) uzayında gδpr- açık küme ve f fonksiyonu bir G_1– homeomorfizma olduğundan dolayı f^{-1}(g^{-1} (A)) = (go f) $^{-1}$(A) gδpr- açık küme olacaktır.

Bu ise bize go f: (X, τ) → (Z, σ) fonksiyonunun gδpr- kararsız olduğunu verecektir.

Ayrıca f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ ve g:$(Y, \upsilon) \rightarrow (Z, \sigma)$ fonksiyonları gδpr- açık olduğundan go f:$(X, \tau) \rightarrow (Z, \sigma)$ fonksiyonu da gδpr- açık olacaktır.

Sonuç olarak go f: $(X, \tau)\rightarrow (Z, \sigma)$ fonksiyonu bir G_1 – homeomorfizma olacaktır.

BÖLÜM 4

gδpr – T_1 UZAYLAR VE

gδpr – SİMETRİK UZAYLAR

Teorem 4.1. Bir (X, τ) δp-regüler $T_{1/2}$ topolojik uzayının gδpr– T_1 uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesinin gδpr- kapalı olmasıdır.

İspat:

(⇒) :

(X, τ) topolojik uzayı gδpr- T_1 uzay olsun. Kabul edelim ki bir $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi gδpr- kapalı olmasın.

Bu durumda $x \neq y$ olacak biçimde bir $y \in \delta$- pcl({x}) vardır. Uzay gδpr- T_1 uzay olduğundan $x \notin U$, $y \in U$ ve $x \in V$, $y \notin V$ olacak biçimde U ve V gδpr- açık kümeleri vardır.

Bu durumda $U \cap \{x\} \neq \emptyset$ olacaktır ki bu bir çelişkidir.

(⇐) :

Her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi gδpr- kapalı olsun. $x, y \in X$ olmak üzere $x \neq y$ alalım.

Bu durumda $\{x\}$ ve $\{y\}$ gδpr– kapalı olacaklardır. Buradan $X \setminus \{x\}$ve $X \setminus \{y\}$ gδpr– açıktır. Ayrıca $x \notin X \setminus \{x\}$, $y \in X \setminus \{x\}$ ve $x \in X \setminus \{y\}$, $y \notin X \setminus \{y\}$olacaktır.

Yani (X, τ) topolojik uzayı gδpr- T_1 uzay olur.

Tanım 4.2. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere her x, y ∈ X için x ∈ gδpr- cl({y}) iken y ∈ gδpr– cl({x}) oluyorsa bu uzaya gδpr- simetrik uzay denir.

Teorem 4.3. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere her x ∈ X için {x} kümesinin gδpr- kapalı ise (X, τ) bir gδpr- simetrik uzay olur.

İspat:

Her x ∈ X için {x} kümesi gδpr- kapalı olmak üzere kabul edelim ki X uzayı gδpr– simetrik uzay olmasın. Bu durumda x ∈ gδpr– cl({y}) iken y ∉ gδpr– cl({ x}) olacak biçimde x, y ∈ X vardır. Buradan

$$\{y\} \subset X \setminus g\delta pr\text{ - }cl(\{x\})$$

ve

$$g\delta pr\text{– }cl(\{y\}) \subset X \setminus g\delta pr\text{– }cl(\{x\})$$

olacağından x ∈ X \ gδpr– cl({x}) olacaktır.

Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 4.4. (X, τ) bir δp- regüler $T_{1/2}$ topolojik uzay olmak üzere X bir gδpr– T_1 uzay ise gδpr- simetriktir.

İspat:

X bir gδpr- T_1 uzayı olduğundan dolayı her tek nokta kümesi gδpr- kapalı olacaktır. Bu durumda bu uzay gδpr– simetrik olur.

Teorem 4.5. (X, τ) bir δp-regüler $T_{1/2}$ topolojik uzay olmak üzere (X, τ) uzayının gδpr- simetrik uzay ve gδpr- T_0 olması için gerek ve yeter koşul (X, τ) uzayının gδpr- T_1 olmasıdır.

İspat:

(X, τ) uzayı gδpr- T_1 uzay olmak üzere gδpr- simetrik ve gδpr- T_1 uzayı aynı zamanda gδpr– T_0 uzaydır.

Tersine, (X, τ) uzayı gδpr- simetrik uzay ve gδpr- T_0 olsun. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ alalım. X uzayı gδpr- T_0 olduğundan

$$x \in A \subset X \setminus \{y\}$$

olacak şekilde A gδpr- açık kümesi vardır. Bu durumda $x \notin$ gδpr- cl($\{y\}$) ve buradan $y \notin$ gδpr– cl($\{x\}$) olacaktır. Bu durumda

$$y \in B \subset X \setminus \{x\}$$

olacak şekilde bir B gδpr- açık kümesi vardır.

O halde (X, τ) uzayı gδpr- T_1 uzay olacaktır.

Teorem 4.6. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X' in her alt kümesi gδpr- kapalı ise X' in düzenli açık kümelerinin sınıfı δ- önkapalı kümeler sınıfında kapsanılır.

İspat:

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X' in her alt kümesi gδpr- kapalı olsun. Bu durumda A düzenli açık kümesi için $A \subset A$ ve A gδpr- kapalı olduğundan δ- pcl $(A) \subset A$ olacaktır.

Yani δ- pcl $(A) = A$ ve buradan A δ- önkapalı olur.

Teorem 4.7. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X' in her alt kümesi gδpr- kapalı ise X' in düzenli kapalı kümelerinin sınıfı δ- önaçık kümelerinin sınıfında kapsanılır.

İspat:

A düzenli kapalı küme olmak üzere X \ A düzenli açıktır. Bu durumda

$$X \setminus A \subset X \setminus A$$

ve X \ A, gδpr- kapalı olduğundan δ- pcl (X\ A) ⊂ X \ A olur. Böylece

$$\delta\text{- pcl }(X \setminus A) = X \setminus A$$

ve buradan X \ A, δ- önkapalıdır. O halde A kümesi δ - önaçıktır.

Teorem 4.8. (X, τ) topolojik uzay ve A ⊂ X olmak üzere A kümesi gδpr- kapalı ve düzenli açık ise δ- önkapalıdır. (Ekici ve Noiri, 2006).

İspat: Ekici ve Noiri (2006) çalışmasında yer almaktadır.

A kümesi gδpr- kapalı ve düzenli açık olmak üzere A ⊂ A ve A kümesi gδpr- kapalı olduğundan δ- pcl (A) ⊂ A olur.

Bu durumda δ- pcl (A) = A ve buradan A δ- önkapalı olur.

Tanım 4.9. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ)→ (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere her δ- önaçık A ⊂ X kümesi için f(A), Y ‘de gδpr- açık ise f fonksiyonuna δp- gδpr-açık fonksiyon denir.

Teorem 4.10. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar.f: (X, τ) → (Y, υ) δp - gδpr-açık fonksiyon olmak üzere X δp- regüler - $T_{1/2}$ uzay ise X‘ in her gδpr- açık kümesinin görüntüsü gδpr- açıktır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) δp- gδpr- açık fonksiyon olmak üzere X δp- regüler – $T_{1/2}$ uzay olsun. A ⊂ X gδpr– açık kümesini alalım.

Bu durumda X uzayı δp- regüler– $T_{1/2}$ uzay olduğundan A, δ- önaçıktır. Bu durumda f, δp- gδpr– açık fonksiyon olduğundan f(A) kümesi gδpr- açık olacaktır.

Teorem 4.11. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ), 1-1, örten, gδpr- kararsız, kapalı bir fonksiyon olmak üzere X' in her gδpr- kapalı alt kümesi g- kapalı ve X uzayı $T_{1/2}$ uzay ise Y uzayı da $T_{1/2}$ uzaydır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) ,1-1, örten, gδpr- kararsız, kapalı bir fonksiyon olmak üzere X' in her gδpr- kapalı alt kümesi g- kapalı olsun.

X, $T_{1/2}$ uzay olsun. Bu durumda her $A \subset X$ g- kapalı kümesi kapalıdır. $A \subset Y$, g- kapalı olsun. Bu durumda f gδpr- kararsız olduğundan f^{-1} (A) gδpr- kapalı ve X uzayında her gδpr- kapalı küme g- kapalı olduğundan f^{-1} (A) g- kapalı ve hipotezden f^{-1} (A) kapalıdır. Bu durumda f fonksiyonu kapalı olduğundan A kapalı elde edilir.

O halde Y uzayı $T_{1/2}$ uzaydır.

Teorem 4.12. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ), 1-1, örten, gδpr– kararsız, δ- önaçık bir fonksiyon olmak üzere X uzayı δp- regüler- $T_{1/2}$ uzay ise Y uzayı da δp- regüler- $T_{1/2}$ uzaydır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ), 1-1, örten, gδpr- kararsız, δ- önaçık bir fonksiyon olmak üzere X uzayı δp- regüler- $T_{1/2}$ uzay olsun. Buradan her $A \subset X$, gδpr- açık kümesi δ- önaçıktır. $A \subset Y$, gδpr- açık küme alalım. Bu durumda f gδpr- kararsız olduğundan f^{-1} (A) gδpr-açık olacaktır. X uzayı δp- regüler- $T_{1/2}$ uzay olduğundan f^{-1} (A) δ- önaçıktır. Buradan f, δ- önaçık olduğundan A δ- önaçıktır.

Yani Y uzayı da δp- regüler -$T_{1/2}$ uzaydır.

Teorem 4.13. (X, τ), (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ), 1-1, örten, gδpr- kararsız, δ- önkapalı olmak üzere X uzayı δp- regüler- $T_{1/2}$ uzay ise Y uzayında δp- regüler- $T_{1/2}$ uzaydır.

İspat:

Bir önceki teoreme benzer olarak elde edilir.

BÖLÜM 5

G_2–TOPOLOJİK ÖZELLİKLER VE İLİŞKİLERİ

Tanım 5.1. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere her A kapalı kümesi için f (A) gδpr- kapalı oluyor ise $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonuna zayıf gδpr-kapalı fonksiyon denir.

Tanım 5.2. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere her A açık kümesi için f (A) gδpr- açık oluyor ise $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonuna zayıf gδpr-açık fonksiyon denir.

Teorem 5.3. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ açık ise zayıf gδpr- açıktır.

İspat:

$f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ açık ve $A \subset X$ açık olsun. Buradan f fonksiyonu açık fonksiyon olduğundan f(A) açık bulunur. Buradan $f(A) \subset X$ gδpr- açıktır Öyleyse f fonksiyonu zayıf gδpr-açık fonksiyondur.

Uyarı 5.4. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir f zayıf gδpr- açık ise açık olmayabilir.

Örnek 5.5. $X = \{a, b\}$, $\tau = \{ \emptyset, \{a\}, X\}$ ve $f: (X, \tau) \to (X, \tau)$ bir fonksiyon olmak üzere $f(a) = f(b) = b$ olsun. f fonksiyonu zayıf gδpr- açıktır ancak açık değildir.

Teorem 5.6. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir olsun.

Bu durumda f: (X, τ) → (Y, υ) gδpr- açık ise zayıf gδpr- açıktır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) gδpr - açık ve A ⊂ X açık olsun. Buradan A ⊂ X gδpr- açıktır üstelik f fonksiyonu gδpr- açık fonksiyon olduğundan f(A) gδpr- açık bulunur. Öyleyse f fonksiyonu zayıf gδpr- açık fonksiyondur.

Teorem 5.7. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Bu durumda f: (X, τ) → (Y, υ) kapalı ise zayıf gδpr- kapalıdır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) kapalı ve A ⊂ X kapalı olsun. Buradan f fonksiyonu kapalı fonksiyon olduğundan f(A) kapalı bulunur. Buradan f(A) ⊂ X gδpr- kapalıdır.

Öyleyse f fonksiyonu zayıf gδpr-kapalı fonksiyondur.

Teorem 5.8. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Bu durumda f: (X, τ) → (Y, υ) gδpr- kapalı ise zayıf gδpr- kapalıdır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) gδpr- kapalı ve A ⊂ X kapalı olsun. Buradan A⊂ X gδpr- kapalıdır, üstelik f fonksiyonu gδpr- kapalı fonksiyon olduğundan f(A) gδpr- kapalı bulunur. Öyleyse f fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı fonksiyondur.

Teorem 5.9. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f: (X, τ)→ (Y, υ) bir fonksiyon olsun. Bu durumda f: (X, τ) → (Y, υ) gδpr- kararsız ise gδpr- süreklidir (Ekici ve Noiri, 2006).

İspat. Ekici ve Noiri (2006) çalışmasında yer almaktadır.

f: (X, τ) → (Y, υ) gδpr- kararsız ve B ⊂ Y açık olsun. Buradan B ⊂ Y gδpr- açık, üstelik f fonksiyonu gδpr- kararsız fonksiyon olduğundan f^{-1}(A) gδpr- açık bulunur.

Öyleyse f fonksiyonu gδpr- sürekli fonksiyondur.

Teorem 5.10. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, bir fonksiyon olmak üzere $f^{-1} : (Y, \upsilon) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonunun gδpr-sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonunun zayıf gδpr- açık olmasıdır.

İspat:

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, bir fonksiyon olmak üzere $f^{-1} : (Y, \upsilon) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu gδpr-sürekli olsun. A de X de açık bir küme olsun. f^{-1} fonksiyonu gδpr-sürekli olduğundan dolayı f(A) gδpr- açık olacaktır.

Bu durumda $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonunun zayıf gδpr- açık olduğu elde edilir.

Tersine $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, bir fonksiyon olmak üzere $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olsun. A de X de açık bir küme olsun. f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olduğundan dolayı f(A) gδpr- açık olacaktır.

Bu durumda $f^{-1} : (Y, \upsilon) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonunun gδpr-sürekli olduğu elde edilir.

Teorem 5.11. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere ve $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, bir fonksiyon olmak üzere $f^{-1} : (Y, \upsilon) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu gδpr-sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f: (X, \tau)\rightarrow(Y, \upsilon)$ fonksiyonunun zayıf gδpr- kapalı olmasıdır.

İspat:

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, bir fonksiyon olmak üzere $f^{-1} : (Y, \upsilon) \rightarrow(X, \tau)$ fonksiyonu gδpr-sürekli olsun. A de X de kapalı bir küme olsun. X / A açık bir kümedir. f^{-1} fonksiyonu gδpr-sürekli olduğundan dolayı f(X / A)= Y / f(A) gδpr- açık ve buradan f(A) gδpr- kapalı olacaktır.

Bu durumda f: (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonunun zayıf gδpr- kapalı olduğu elde edilir.

Tersine f: (X, τ) → (Y, υ) 1-1, örten, bir fonksiyon olmak üzere f: (X, τ) →(Y, υ) fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı olsun. A da X de kapalı bir küme olsun. f fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı olduğundan dolayı f(A) gδpr- kapalı olacaktır.

Bu durumda f^{-1} : (Y, υ) → (X, τ) fonksiyonunun gδpr-sürekli olduğu elde edilir.

Tanım 5.12. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu 1-1, örten ve üstelik zayıf gδpr- açık ve gδpr- sürekli oluyorsa f: (X, τ)→ (Y, υ) fonksiyonuna bir G_2–homeomorfizma denir.

Teorem 5.13.(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere eğer f: (X, τ) → (Y, υ) bir G_1 –homeomorfizma ise G_2 –homeomorfizmadır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere f: (X, τ) → (Y, υ) bir G_1 –homeomorfizma olsun. Her gδpr- açık fonksiyon zayıf gδpr- açık ve her gδpr- kararsız fonksiyon gδpr- sürekli olduğundan f: (X, τ) → (Y, υ) bir G_2 –homeomorfizma olacaktır.

Teorem 5.14. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere eğer f: (X, τ) →(Y, υ) bir homeomorfizma ise G_2–homeomorfizmadır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere f: (X, τ) → (Y, υ) bir homeomorfizma olsun. Her açık fonksiyon zayıf gδpr- açık ve her sürekli fonksiyon gδpr- sürekli olduğundan f:(X, τ)→ (Y, υ) bir G_2 –homeomorfizma olacaktır.

Teorem 5.15. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) 1-1, örten, gδpr-sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu zayıf gδpr-kapalı olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonu G_2 – homeomorfizma olmasıdır.

İspat:

Tanımlardan açıktır.

Teorem 5.16. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) 1-1, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun zayıf gδpr- kapalı olmasıdır.

İspat:

(⇒) :

(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) 1-1, örten ve zayıf gδpr- açık bir fonksiyon ve A ⊂ X kapalı bir küme olsun. Buradan X \ A açık bir kümedir, öyleyse f zayıf gδpr- açık fonksiyon olduğundan

$$f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A) = Y \setminus f(A)$$

gδpr- açık bir kümedir. Dolayısıyla f(A) gδpr- kapalı küme olur ki bu da bize f fonksiyonunun zayıf gδpr- kapalı fonksiyon olduğunu verir.

(⇐):

(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) 1-1, örten ve zayıf gδpr-kapalı bir fonksiyon ve A ⊂ X açık bir küme olsun. Buradan X \ A kapalı bir kümedir, öyleyse f zayıf gδpr- kapalı fonksiyon olduğundan

$$f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A) = Y \setminus f(A)$$

gδpr- kapalı bir kümedir. Dolayısıyla f(A) gδpr-açık küme olur ki bu da bize f fonksiyonunun zayıf gδpr- açık fonksiyon olduğunu verir.

Teorem 5.17. Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) (X, τ) δp- regüler $T_{1/2}$ uzaydır.

(2) X' in her tek nokta kümesi düzenli kapalıdır veya δ- önaçıktır (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 5.18. Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(1) $\delta PO(X) \subset G\delta PRO(X)$,

(2) X uzayı δp- regüler $T_{1/2}$ uzaydır $\Leftrightarrow$ $\delta PO(X) = G\delta PRO(X)$ (Ekici ve Noiri, 2006).

Teorem 5.19. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere ve f: (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylarında her gδpr- kapalı küme kapalı oluyorsa bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) f: (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir G_1 – homeomorfizma

(2) f: (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir G_2 **–** homeomorfizma

(3) f: (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir homeomorfizma

Teorem 5.20. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ)$\rightarrow$ (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu zayıf gδpr- açık ise her bir $x \in X$ noktasının her bir komşuluğunun görüntüsü o noktanın görüntüsünün gδpr- komşuluğu olur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ)$\rightarrow$ (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olsun. $x \in X$ ve A kümesi x noktasının bir komşuluğu olsun.

Bu durumda $x \in B \subset A$ olacak biçimde bir B açık kümesi vardır. Buradan $f(x) \in f(B) \subset f(A)$ elde ederiz. f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olduğundan f (B) gδpr- açık bir kümedir.

Böylece f (A) kümesi f(x) noktasının bir gδpr- komşuluğu olur.

Teorem 5.21. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar, (Y, υ) δp- regüler $T_{1/2}$ uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f fonksiyonu zayıf gδpr- açıktır,

(2) Her $A \subset X$ için $f(\text{int}(A)) \subset g\delta pr\text{- int}(f(A))$ olur,

(3) Her $B \subset Y$ için $\text{int}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{- int}(B))$ olur.

İspat:

(1) ⇒ (2) f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olsun. $A \subset X$ alalım. $\text{int}(A) \subset A$ olduğunu biliyoruz. Buradan $f(\text{int}(A)) \subset f(A)$ olacaktır. Bu durumda

$$g\delta pr\text{- int}(f(\text{int}(A)) = f(\text{int}(A)) \subset g\delta pr\text{- int}(f(A))$$

olacaktır.

(2) ⇒ (3) Her $A \subset X$ için $f(\text{int}(A)) \subset g\delta pr\text{- int}(f(A))$ olsun. $B \subset Y$ alalım. Buradan

$$f(\text{int}(f^{-1}(B)) \subset g\delta pr\text{- int}(f(f^{-1}(B)) \subset g\delta pr\text{- int}(B)$$

olacaktır. Bu durumda

$$f^{-1}(f(\text{int}(f^{-1}(B)))) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{- int}(B))$$

ve böylece $\text{int}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{- int}(B))$ elde ederiz.

(3) ⇒ (1) Her $B \subset Y$ için $\text{int}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(g\delta pr\text{- int}\, B)$ olsun. $A \subset X$ bir açık küme olsun. Bu durumda

$$int\ (\ f^{-1}\ f\ (A)\ ) \subset f^{-1}\ (g\delta pr\text{- } int\ (\ f\ (A)\ )\ )$$

olacaktır. Bu durumda

$$A = int\ (A) \subset f^{-1}\ (g\delta pr\ \text{-}\ int\ (\ f\ (A)\ )$$

olur. Sonuç olarak

$$f(A) \subset f(\ f^{-1}\ g\delta pr\ \text{-}\ int\ (\ f\ (A)\ )\ ) \subset g\delta pr\ \text{-}\ int\ (\ f\ (A)\ )$$

elde ederiz. Yani $f(A) \subset g\delta pr$ - int (f (A)) olur. Öyleyse f zayıf gδpr- açık fonksiyon olur.

Teorem 5.22. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) →(Y, υ) bir fonksiyon ve (Y, υ) δp- regüler $T_{1/2}$ uzay olmak üzere f: (X, τ) →(Y, υ) fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $A \subset X$ için gδpr- cl(f(A)) ⊂f (cl (A)) olmasıdır.

İspat:

f: (X, τ) →(Y, υ) fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı olsun. $A \subset X$ olmak üzere $A \subset cl(A)$ sahibiz. Ayrıca $f\ (A) \subset f\ (cl\ (A)\ )$ ve f fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı olduğundan dolayı

$$g\delta pr\text{- } cl(\ f\ (A)\ ) \subset g\delta pr\text{- } cl\ (\ f(cl\ (A)\ ) = f\ (cl(A))$$

olacaktır. Yani gδpr- cl(f(A)) ⊂f (cl (A)) olur.

Tersine, her $A \subset X$ için gδpr- cl(f(A)) ⊂f (cl (A)) olsun. $A \subset X$ kapalı bir küme olmak üzere

$$g\delta pr\text{- } cl(\ f(A)\ ) \subset f\ (\ cl\ (A)\ ) = f(A)$$

elde ederiz. Buradan f (A) Y' de gδpr- kapalı küme ve böylece f zayıf gδpr- kapalı bir fonksiyon olur.

Teorem 5.23. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) →(Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun zayıf gδpr- kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $A \subset Y$ ve $f^{-1}(A) \subset B$ olan her B açık kümesi için $A \subset G$ ve $f^{-1}(G) \subset B$ olacak biçimde bir G gδpr- açık kümesinin var olmasıdır.

İspat:

f fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı olsun. $A \subset Y$ ve $f^{-1}(A) \subset B$ ve B açık bir küme olarak alalım. Buradan $G = Y \setminus f(X \setminus B)$ dersek G kümesi gδpr- açık bir kümedir. Ayrıca $A \subset G$ ve $f^{-1}(G) \subset B$ elde ederiz.

Tersine, her $A \subset Y$ ve $f^{-1}(A) \subset B$ olan her B açık kümesi için $A \subset G$ ve $f^{-1}(G) \subset B$ olacak biçimde bir G gδpr- açık kümesinin var olsun. $A \subset X$ bir kapalı küme olarak alalım. Buradan

$$f^{-1}(Y \setminus f(A)) \subset X \setminus A$$

ve $X \setminus A$ kümesi açık olacaktır. $U = Y \setminus f(A)$ ve $B = X \setminus A$ dersek $Y \setminus f(A) \subset G$ ve $f^{-1}(G) \subset X \setminus A$ olacak biçimde bir G gδpr- açık kümesi vardır. Böylece $f(A) = Y \setminus G$ ve $f(A)$ gδpr- kapalı olur.

Bu ise bize f' nin zayıf gδpr- kapalı olduğunu verecektir.

Teorem 5.24. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere ve $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı bir fonksiyonu olmak üzere f fonksiyonu gδpr- sürekli ve Y uzayı regüler ise X uzayı da gδpr- regüler uzay olur.

İspat:

$f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı bir fonksiyonu olmak üzere f fonksiyonu gδpr- sürekli ve Y uzayı regüler olsun. $x \notin A$ ve A bir kapalı küme olsun. Bu durumda f fonksiyonu kapalı olduğundan f(A) bir kapalı küme ve ayrıca $f(x) \notin f(A)$ olacaktır. Y uzayı regüler olduğundan dolayı $f(x) \in U$ ve $f(A) \subset V$ olan ayrıca. $U \cap V = \emptyset$ olan U ve V iki açık kümeleri vardır. Bu durumda $x \in f^{-1}(U)$ ve $A \subset f^{-1}(V)$ ve üstelik $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ kümelerinin gδpr- açık olduğunu elde ederiz. Ayrıca $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ olacaktır.

Yani X uzayı bir gδpr- regüler uzaydır.

Teorem 5.25. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere ve $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu gδpr- sürekli ve Y uzayı normal ise X uzayı gδpr- normal uzaydır.

İspat:

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, kapalı bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu gδpr- sürekli ve Y uzayı normal olsun. $A \cap B = \varnothing$ olan A ve B kapalı kümelerini alalım. Bu durumda f fonksiyonu kapalı olduğundan dolayı f(A) ve f(B) kümeleri kapalı ve $f(A) \cap f(B) = \varnothing$ olacaktır.

Y uzayı normal uzay olduğundan $f(A) \subset U$, $f(B) \subset V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olan U ve V iki açık kümeleri vardır. Bu durumda $A \subset f^{-1}(U)$, $B \subset f^{-1}(V)$ ve $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ kümeleri gδpr- açık kümelerdir. Ayrıca $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ olacaktır.

O halde X uzayı bir gδpr- normal uzay olacaktır.

Teorem 5.26. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ ve $g: (Y, \upsilon) \rightarrow (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olmak üzere $g: (Y, \upsilon) \rightarrow (Z, \sigma)$ fonksiyonu gδpr- sürekli ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu gδpr- kararsız ise $go\, f: (X, \tau) \rightarrow (Z, \sigma)$ fonksiyonu gδpr- süreklidir (Ekici ve Noiri, 2006).

İspat: Ekici ve Noiri (2006) çalışmasında yer almaktadır.

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ ve $g: (Y, \upsilon) \rightarrow (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olmak üzere $g:(Y, \upsilon) \rightarrow (Z, \sigma)$ fonksiyonu gδpr- sürekli ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu gδpr- kararsız olsun. $A \in \sigma$ alalım. g fonksiyonu gδpr- sürekli olduğundan $g^{1}(A)$ gδpr- açık olur.

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu gδpr- kararsız olduğundan, $g^{-1}(A)$ gδpr- açık için $f^{-1}(g^{-1}(A))$ gδpr- açık olur. Böylece $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (f^{-1} o\, g^{-1})(A) = (go\, f)^{-1}(A)$

kümesinin gδpr- açık olduğunu elde ederiz. Yani go f fonksiyonunun gδpr- sürekli olur.

Teorem 5.27. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar olmak üzere ve f: (X, τ) → (Y, υ) ve g: (Y, υ) → (Z ,σ) iki fonksiyon ve f örten olmak üzere go f: (X, τ) → (Z, σ) örten ve gδpr- sürekli bir fonksiyon ve f: (X, τ) → (Y, υ) gδpr- açık bir fonksiyon ise g: (Y, υ) → (Z, σ) gδpr- süreklidir.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) örten olmak üzere go f: (X, τ) →(Z, σ) örten ve gδpr- sürekli bir fonksiyon ve f gδpr- açık bir fonksiyon olsun. go f fonksiyonu gδpr- sürekli olduğundan A açığı için $(go\ f)^{-1}$ (A) gδpr- açık olacaktır. Bu durumda f($(go\ f)^{-1}$ (A)) gδpr- açık kümesini elde ederiz. Böylece f ((f^{-1}o g^{-1}) (A)) = ((fo f^{-1})o g^{-1}) (A) = g^{-1}(A) gδpr- açık olur. A açık kümesi için g^{-1}(A) gδpr- açık olduğundan dolayı g: (Y, υ) →(Z, σ) fonksiyonu gδpr- sürekli olur.

Teorem 5.28. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) ve g: (Y, υ) → (Z, σ) iki fonksiyon ve f: (X, τ) → (Y, υ) örten olmak üzere go f: (X, τ) → (Z, σ) örten ve gδpr- sürekli bir fonksiyon ve f gδpr- kapalı bir fonksiyon ise g: (Y, υ) → (Z, σ) gδpr- süreklidir.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) örten olmak üzere go f: (X, τ) → (Z, σ) örten ve gδpr- sürekli bir fonksiyon ve f gδpr- kapalı bir fonksiyon olsun. go f, gδpr- sürekli olduğundan A kapalı kümesi için $(go\ f)^{-1}$ (A) kümesi gδpr- kapalı olur. f fonksiyonu gδpr- kapalı oluğundan A gδpr- kapalı bir kümesi için f(A) gδpr- kapalı olacaktır. A kapalı kümesi için $(go\ f)^{-1}$ (A) = f^{-1}(g^{-1} (A)) gδpr- kapalı bir küme olacağından f(f^{-1}(g^{-1} (A)))= g^{-1}(A) gδpr- kapalı olur. Yani g: (Y, υ) → (Z, σ) gδpr- süreklidir.

Teorem 5.29. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere f: (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu gδpr- sürekli ve A kümesi X‘ e göre gδpr- kompakt ise f(A) kümesi de Y‘ ye göre kompakttır.

İspat:

f: (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere f: (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu gδpr- sürekli ve A kümesi X e göre gδpr- kompakt olsun. $\{ A_i : i\in I \}$ f(A) ‘ nın açık bir örtüsü olsun.

Bu durumda $f(A)\subset \bigcup_{i\in I} A_i$ ve buradan $A \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ olacaktır. A kümesi X e göre gδpr- kompakt oluğundan $A\subset \bigcup_{i\in Io} f^{-1}(A_i)$ olacak biçimde $I_0 \subset I$ sonlu kümesi vardır.

Buradan $f(A) \subset f(\bigcup_{i\in Io} f^{-1}(A_i)) \subset \bigcup_{i\in Io} f(f^{-1}(A_i)) \subset \bigcup_{i\in Io} A_i$ ve böylece f(A)‘ nın Y’ ye göre kompakt olduğunu elde ederiz.

Teorem 5.30. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) örten bir fonksiyon olmak üzere f: (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu gδpr- sürekli ve X uzayı gδpr- kompakt ise Y kompakt uzaydır.

İspat:

f: (X, τ)→ (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere f: (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu gδpr- sürekli ve X gδpr- kompakt olsun. $\{ A_i : i\in I \}$ Y’ nin açık bir örtüsü olsun.

Bu durumda $Y = \bigcup_{i\in I} A_i$ ve buradan $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ olacaktır. X gδpr- kompakt olduğundan $X = \bigcup_{i\in Io} f^{-1}(A_i)$ olacak biçimde $I_0 \subset I$ sonlu kümesi vardır.

Buradan $Y = f(\bigcup_{i\in Io} f^{-1}(A_i)) = \bigcup_{i\in Io} f(f^{-1}(A_i)) = \bigcup_{i\in Io} A_i$ ve böylece Y kompakt olduğunu elde ederiz.

Teorem 5.31. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar, f: (X, τ) → (Y, υ)

1-1,örten, zayıf gδpr- açık bir fonksiyon olsun. Bu durumda X uzayı T_2 uzayı ise Y uzayı da gδpr-T_2 uzaydır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1,örten, zayıf gδpr- açık bir fonksiyon olsun. X, T_2 uzayı olsun. $y_1 \neq y_2$ olmak üzere, y_1 ve y_2 noktalarını alalım. Bu durumda $f(x_1)= y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak biçimde x_1 ve $x_2 \in X$ vardır.

Bu ise $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ ve $A \cap B=\emptyset$ olacak biçimde A ve B açıklarının var olduğunu verir. f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olduğundan f(A) ve f(B) gδpr- açık kümeler olacaktır. $f(x_1) \in f(A)$, $f(x_2) \in f(B)$ ve $f(A) \cap f(B) =\emptyset$ olmak üzere f(A) ve f(B) gδpr- açık olduğundan Y uzayı gδpr-T_2 uzay olur.

Teorem 5.32. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1,örten, zayıf gδpr- açık bir fonksiyon olmak üzere X uzayı T_1 uzayı ise Y uzayı da gδpr- T_1 uzaydır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1,örten, zayıf gδpr- açık bir fonksiyon olmak üzere X uzayı T_1 uzay olsun. $y_1 \neq y_2$ olan y_1 ve y_2 noktalarını alalım. Bu durumda $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ vardır.

Bu ise $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$ ve $x_1 \notin V$, $x_2 \in V$ olacak biçimde U ve V açıklarının varlığını verir. f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olduğundan f(U) ve f(V) gδpr- açık kümeler olacaktır. Üstelik $f(x_1) \in f(U)$, $f(x_2) \notin f(U)$ ve $f(x_1) \notin f(V)$, $f(x_2) \in f(V)$ olmak üzere f(U) ve f(V) gδpr- açık olacaktır.

O halde Y uzayı gδpr- T_1 uzay olur.

Teorem 5.33. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1,örten, gδpr- sürekli bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı T_0 uzay ise X uzayı gδpr-T_0 uzaydır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1,örten, gδpr- sürekli bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı T_0 uzay olsun. $x \neq y$ olan $x, y \in X$ noktaları alalım.

Y uzayı T_0 uzay oluğundan ve $f(x) \neq f(y)$ olduğundan $f(x) \in A$, $f(y) \notin A$ veya $f(x) \notin B$, $f(y) \in B$ olacak biçimde A ve B açık kümeleri vardır. Bu durumda $x \in f^{-1}(A)$,$y \notin f^{-1}(A)$ veya $x \notin f^{-1}(B)$,$y \in f^{-1}(B)$ olacaktır. Üstelik f fonksiyonu gδpr- sürekli oluğundan $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ gδpr-açık ve buradan X uzayı gδpr- T_0 uzay olur.

Teorem 5.34. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, gδpr- sürekli bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı T_1 uzay ise X uzayı gδpr- T_1 uzaydır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, gδpr- sürekli bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı T_1 uzay olsun. $x \neq y$ olan $x, y \in X$ noktalarını alalım. Bu durumda Y uzayı T_1 uzay oluğundan ve $f(x) \neq f(y)$ olduğundan $f(x) \in A$, $f(y) \notin A$ ve $f(x) \notin B$, $f(y) \in B$ olacak biçimde A ve B açıkları vardır.

Bu ise bize $x \in f^{-1}(A)$,$y \notin f^{-1}(A)$ ve $x \notin f^{-1}(B)$, $y \in f^{-1}(B)$ olduğunu verir. f fonksiyonu gδpr- sürekli oluğundan $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ gδpr- açık kümeler olacaktır. O halde X uzayı gδpr- T_1 uzay olacaktır.

Teorem 5.35. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, gδpr- sürekli bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı T_2 uzay ise X uzayı gδpr- T_2 uzaydır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ 1-1, örten, gδpr- sürekli bir fonksiyon olmak üzere Y uzayı T_2 uzay olsun. $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in X$ noktalarını alalım. Bu durumda $f(x) \neq f(y)$ olur. Y uzayı T_2 uzay oluğundan $f(x) \in U$, $f(y) \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olan

U, V $\in \upsilon$ vardır.

Buradan $x \in f^{-1}(U)$, $y \in f^{-1}(V)$ ve $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ olur. f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu gδpr- sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ gδpr-açık olur.

O halde X uzayı bir gδpr- T_2 uzaydır.

Teorem 5.36. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ zayıf gδpr- açık ve g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ gδpr- açık ise go f fonksiyonu zayıf gδpr- açıktır

İspat:

f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olmak üzere f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ zayıf gδpr- açık ve g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ gδpr- açık olsun. f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olduğundan her A açığı için f(A) gδpr- açık olacaktır. g fonksiyonu gδpr- açık olduğundan ve f(A) gδpr- açık olduğundan g(f(A))=(go f) (A) gδpr- açık olur.

O halde go f fonksiyonu zayıf gδpr- açık olarak elde edilir.

Teorem 5.37. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ ve g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda go f: $(X, \tau) \to (Z, \sigma)$ sürekli ve f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ örten, zayıf gδpr- açık ise g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonu gδpr- süreklidir.

İspat:

go f: $(X, \tau) \to (Z, \sigma)$ sürekli ve f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ örten, zayıf gδpr- açık olsun. go f: $(X, \tau) \to (Z, \sigma)$ sürekli olduğundan her A açığı için $(go\ f)^{-1}(A)$ açıktır. f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu örten ve zayıf gδpr- açık olduğundan ve $(\ go\ f)^{-1}(A)$ açık bir küme olduğundan $f((\ go\ f\ )^{-1}(A)) = (\ f\ o\ f^{-1} og^{-1}\ )\ (A) = g^{-1}\ (A)$ gδpr- açık ve buradan g: $(Y, \upsilon) \to (Z, \sigma)$ fonksiyonu gδpr- süreklidir.

Teorem 5.38. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve f: $(X, \tau) \to (Y, \upsilon)$

ve g: (Y, υ) → (Z, σ) iki fonksiyon olsun. Bu durumda go f sürekli ve f örten, zayıf gδpr- kapalı ise g: (Y, υ) → (Z, σ) fonksiyonu gδpr- süreklidir.

İspat:

go f: (X, τ) → (Z, σ) sürekli olduğundan her A kapalı kümesi için $(go\ f)^{-1}(H)$ kapalıdır. f fonksiyonu örten ve zayıf gδpr- kapalı olduğundan ve $(go\ f)^{-1}(H)$ kapalı bir küme olduğundan $f(\ (go\ f)^{-1}(H)\ ) = (\ f\ o\ f^{-1}\ og^{-1}\ )\ (H) = g^{-1}(H)$ gδpr- kapalı ve buradan g: (Y, υ) → (Z, σ) fonksiyonu gδpr- süreklidir.

Teorem 5.39. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ)→ (Y, υ) ve g: (Y, υ) → (Z, σ) iki fonksiyon olsun. go f: (X, τ) → (Z, σ) zayıf gδpr- kapalı ve f: (X, τ) → (Y, υ) sürekli, örten ise g fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı olur.

İspat:

go f: (X, τ) → (Z, σ) zayıf gδpr- kapalı ve f: (X, τ) → (Y, υ) sürekli, örten olmak üzere A ⊂ Y kapalı kümesini alalım. f: (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(A)$ kapalıdır. go f: (X, τ) → (Z, σ) zayıf gδpr- kapalı olduğundan dolayı (go f) ($f^{-1}(A)$) gδpr- kapalıdır. Böylece g fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı olur.

Teorem 5.40. (X, τ), (Y, υ) ve (Z, σ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) ve g: (Y, υ) → (Z, σ) iki fonksiyon olsun.f: (X, τ) → (Y, υ) kapalı ve g: (Y, υ) → (Z, σ) zayıf gδpr- kapalı ise go f: (X, τ) → (Z, σ) zayıf gδpr- kapalıdır.

İspat:

A ⊂ Y kapalı olsun. f fonksiyonu kapalı olduğundan f (A) kapalıdır. Bu durumda (go f) (A) gδpr- kapalıdır. Dolayısıyla go f fonksiyonu zayıf gδpr- kapalıdır.

Teorem 5.41. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (Y, υ) zayıf gδpr- kapalı fonksiyon ve A ⊂ X kapalı bir küme olmak üzere $f|_A: (A,\tau_A) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu zayıf gδpr- kapalıdır.

İspat:

f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ zayıf gδpr- kapalı fonksiyon ve $A \subset X$ kapalı bir alt küme olsun.

$B \subset A$, τ_A – kapalı kümesini alalım. Bu $f|_A (B) = f(B) \subset Y$ gδpr- kapalı olacaktır.

O halde $f|_A$ fonksiyonu zayıf gδpr- kapalı olur.

KAYNAKLAR

Dontchev J. ve Ganster M.,1996. On δ- Generalized Closed Sets and $T_{3/4}$ – Spaces. *Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.* 17: 15-31.

Dontchev J. ve Maki H., 1999. Groups of θ - Generalized Homeomorphisms and the Digital Line. *Topology Appl*. 95 (2) :113-128.

El- Deeb S.N., Hasanein I.A.,Mashhour A.S. ve Noiri T., 1983. On Preregular Spaces. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 27 (75): 311-315.

El- Maghrabi, A. I. ve Nasef, A. A., 2005. Some Classes of Compactness and Connectness in Terms of Generalized of Closed Sets. *J. Egyptian Math. Soc*. 13 (1): 19-26.

El- Shafei, M. E., 2005. Some Applications of Generalized Closed Sets in Fuzzy Topological Spaces. *Kyungpook Math. J.* 45 (1): 13-19.

El- Shafei, M. E. ve Zakari, A., 2006. θ- Generalized Closed Sets in Fuzzy Topological Spaces. *Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci*. 31 (2): 197-206.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On A Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces I. *Math. Mor.*, 10 : 9-20.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On A Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces II. *Filom*, 20 (2): 67-80.

Gnanambal Y., 1997. On Generalized Preregular Closed Sets in Topological Spaces.*Indian J. Pure Appl. Math.,* 28 (3): 351-360.

Levine N., 1970. Generalized Closed Sets in Topology. *Rend. Circ. Mat. Palermo,* 19 (2): 89-96.

Mashhour A. S., Abd El –Monsef M. E. ve El-Deeb S. N., 1982. On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings. *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt,* 53: 47-53.

Maki H.,Umehara J. ve Noiri T., 1996. Every Topological Space is Pre- $T_{1/2}$.Mem. *Fac. Sci. Kochi Univ.Ser. A Math.,* 17: 33-42.

Muthukumaraswamy, K. ve Devi, R., 2004. On Fuzzy α - Generalized Closed Sets. *Acta Cienc. Indica Math.* 30 (1) :173-176.

Noiri T., 1998. Almost p- Regular Spaces and Some Functions. *Acta Math.Hungar*., 79 (3): 207-216.

Palaniappan N. ve Rao K.C., 1993. Regular Generalized Closed Sets. *Kyungpook Math. J*., 33 (2): 211-219.

Raychaudhuri S. ve Mukherjee, M. N. 1993. On δ- Almost Continuity and δ- Preopen Sets. *Bull. Inst. Math. Acad., Sinica,* 21 (4): 357-366.

Stone, M. H.,1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology. *TAMS*, 41: 375-381.

Saraf, R. K. , Navalagi Govindappa ve Khanna Meena ,2005. On Fuzzy Semi- Pre-generalized Closed Sets. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*. (2) 28 (1): 19-30.

Thakur, S. S., Malviya, R., 1997. Generalized Closed Sets in Fuzzy Topology. *Math. Notae* 38: 137-140.

Velicko, N. V.,1968. H- Closed Topological Spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 78: 103-118.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Hatice ASLAN

Doğum Yeri: İzmir

Doğum Tarihi: 31. 10 .1982

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Balıkesir Üniversitesi

Yüksek Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Tezsiz Yüksek Lisans Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLER

Katıldığı Projeler:

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl: Mini Kampüs AÖF. Kursu ,2003-2006. MEB. Türközü İ.O.,2006-2007. MEB. Yeşilçam İ.O.,2008-2009.Ceylan AÖF. Kursu 2009-…

İLETİŞİM

E- posta Adresi: haticeaslan7@mynet.com