T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONLU SİSTEMLERDE DENEME PROBLEMLERİ

Ayşe ÇAPKIN

MATEMATİK ANABİLİMDALI

Tezin Sunulduğu Tarih: **24.06.2009**

Tez Danışmanı:

Doç. Dr. Yakup HACI

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

AYŞE ÇAPKIN tarafından **DOÇ. DR. YAKUP HACI** yönetiminde hazırlanan **"SONLU SİSTEMLERDE DENEME PROBLEMLERİ"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yakup HACI

Yönetici

Prof. Dr. İsmail TARHAN

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN

Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi: 24/06/2009

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyen ve bu tezin başlangıcından sonuna kadar bilgisini ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım sayın Doç. Dr. Yakup HACI’ ya ve tezin yazım aşamasında büyük emeği geçen İsmail ÇAPKIN’ a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe ÇAPKIN

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simge	**Açıklaması**
$\neq$	Eşit değil
$\equiv$	Denk
$\leq$	Küçük eşit
$\geq$	Büyük eşit
$\Leftrightarrow$	Gerek yeter koşul
$\Rightarrow$	İse
Σ	Toplam sembolü
X	Giriş değerleri kümesi
Y	Çıkış değerleri kümesi
S	Durum değerleri kümesi
f_z	Çıkış fonksiyonu
f	Durum fonksiyonu
$M\|\sigma$	σ durumundaki M sistemi
$\hat{P}$	M sisteminin k-denkliği bölümü
ξ	t_v zamanında sistemin çıkış dizisi
ε	t_v zamanında sistemin giriş dizisi

ÖZET

SONLU SİSTEMLERDE DENEME PROBLEMLERİ

Ayşe ÇAPKIN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Yakup HACI
Haziran, 61

Sonlu deneme sistemlerinde, denemelerden faydalanılarak başlangıç durumunun bulunması amaçlanmıştır. Başlangıç durumunu bulmaya yönelik çalışmalarımızda, P_k çizelgeleri oluşturularak minimal teşhis dizisi belirlenmiş ve bu teşhis dizisinin, sonlu sisteme uygulanmasıyla çıkış dizisi elde edilmiştir. Başlangıç durumunun bulunması için oluşturulan teşhis ağacına, teşhis dizisi uygulanmış, teşhis ağacının dallarının sonlanması için verilen kurallardan yararlanılmıştır. Teşhis ağacının sonlanmasıyla uygun başlangıç durumuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Sistem, Başlangıç Durumu, P_k Çizelgeleri, Giriş ve Çıkış Dizileri, Minimalleştirme, Teşhis Ağacı.

ABSTRACT

EXPERİMENT IN A FINITE SYSTEM PROBLEMS

Ayşe ÇAPKIN
Çanakkale Onsekiz Mart University
Science Institute
Mathematics Thesis of Master of Science
Advisor: Assist. of Prof. Yakup HACI
June, 61

With the help of the investigations over finite trial systems. We find the initial states. In the study of these initial states, we form the P_k tables and find the minimal representation sequence. Then applying this to the finite system, we get the output sequence. In order to find the initial state we apply the representation sequence to the formed representation tree. Given rules on branches of the representation trees were used to finish it. Finishing the representation tree gives us the suitable initial state.

Key Words: Finite System, Initial State, P_k Tables, Input Output Sequences, Minimization, Diagnosing Tree.

İÇERİK

Sayfa

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Başlangıç durumuna bağlı olan her sonlu sistemin istenilen giriş dizisine uygun tepkisi (çıkış dizisi) belirlenemez. Eğer başlangıç durumu önceden verilmiş ise veya gerekli işlemlerden sonra başlangıç durumu belirlenebiliyor ise, o zaman her giriş dizisine uygun çıkış dizisi yani sistemin tepkisi belirlenebilir. Bu nedenle sonlu sisteme bağlı birçok uygulamalı problemde başlangıç durumunun belirlenmesi şarttır. Ayrıca sonlu sistemlerin son durumlarının belirlenebilmesi için de durumlar kümesi verildiğinde, başlangıçta sistemin bu durumların hangisinde olduğunu belirleyen yöntemlerin araştırılması gerekir. Tezde söz konusu problemin çözümü için metotlar verilerek incelenmiştir.

Tezin 2. bölümünde açıklanan graf teorisi sonlu sistemin temelini oluşturan terimlerin açıklanmasında yardımcı olmuştur. Graf teorisindeki ağaç ve orman kavramlarıyla sonlu sistemlerdeki geçiş ve teşhis ağaçlarının sonlanması sağlanmıştır.

Tezin 3. bölümünde sonlu durum sistemleri tanımlanarak, başlangıç durumu verilen bir sistemin işleyişi anlatılmış ve bununla ilgili olarak bir örnek gösterilmiştir.

4. bölümde durumların denkliğinden söz edilerek M_1 ve M_2 sistemleri için denk veya farklı olduğu durumlar incelenmiştir. Aynı sınıfa ait olan durumlar k-denk, farklı sınıfa ait olan durumlar k-ayrılabilir (farklı) olarak kabul edilmiş bundan yola çıkılarak sistemin k-denk bölgüleri bulunmuş ve P_k ile gösterilmiştir.

5. bölümde sonlu sistemlerde denemeler tanımlanarak başlangıç durumunu bulmaya yönelik çalışmalar yapılmıştır. Bunun için de, teşhis problemi ile sonlu sistemin hangi durumda olduğu belirlenmiş; son durum problemi ile de, sonlu sistem teşhis problemi ile bulunan bu duruma götürülmüştür.

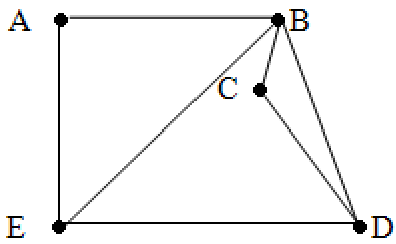
Son bölümde ise sonlu sistemin mümkün durumlar kümesi içinden başlangıç durumunun belirlenebilmesi için teşhis ve geçişler ağacı kurulmuş, verilen sonlandırma kurallarından yararlanılarak teşhis ağacının sonlanması sağlanmış, bunun sonucunda da, herhangi bir M sonlu sistemi için başlangıç durumu bulunmuştur.

BÖLÜM 2
GRAF TEORİSİNİN TEMEL TERİMLERİ

2.1.Giriş

Noktalar ve bunları birbirine bağlayan kenar adı verdiğimiz eğri parçalarından oluşan şekle graf (çizge) denir.

Daha geniş olarak matematiksel tanımını şu şekilde yapabiliriz. Öncelikle G adını verdiğimiz grafımız şu şekilde olsun.



Şekil 2.1. Graf.

Bu şekildeki grafta A, B, C, D, E noktalarına grafın noktaları denir. G grafının noktalar kümesi V(G) olarak gösterilir. Yani:

V(G) = {A,B,C,D,E} olarak gösterilir.

İki nokta arasındaki çizgilere kenar denir (Köşe ya da düğüm de denilir). Her kenarı bu çizgeye göre iki noktalı bir küme olarak gösterebiliriz. Örneğimiz olan G grafının kenarları şunlardır:

E(G) = { {A,B} , {A,E} , {B,C} , {B,D} , {B,E} , {C,D}, {D,E}}

G’ nin kenarlar kümesi matematikte E(G) olarak gösterilir.

Tanım 2.1: Matematiksel anlamda bir graf V kümesiyle V’nin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesinden meydana gelir.

V ile bütün kenarlardan oluşan E kümesinin ayrı ayrı sonlu veya sonsuz olmasına izin verilebilir. Tezde her iki kümenin sonlu olduğunu kabul edip çalışmalarımı bunun üzerinde yapacağız.

Bir grafta V kümesinin boş olması çok anlamsızdır (Çünkü Tanım 2.1'den V nin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesi vardır). Buna karşılık E kümesi boş olabilir. İki nokta arasında en az bir kenar varsa bunlara **komşu noktalar** denir.

Eğer bir noktayı kendisine bağlayan kenar varsa bu nokta kendisiyle komşu olur. Ama genel olarak her nokta kendisine komşudur diyemeyiz. Bir noktayı kendisine bağlayan kenara şeklinden dolayı **ilmek** adını alır.

İlmeği ve iki noktası arasında en çok bir kenarı bulunan graflara **basit graflar** denir.

İki noktası arasında birden çok kenar bulunan graflara, **multigraf (çoklu çizge)** denir.

Bir noktadaki kenarların sayısına (yerel) **derece** denir. Eğer V, bir G grafının bir noktası ise V deki derece L(v) ile gösterilir. L_{max} ve L_{min} ile bir G grafının derecelerinin içinde en büyüğü ve en küçüğü gösterilir.

İki noktası arasında birden çok kenarı bulunan graflarda noktaları saymak kolaydır. Ancak kenarları tek tek saymak zor olabilir. Bu durumda şu uygulamayı yapabiliriz. Her kenarın iki ucu vardır ve bu uçların her biri bir noktaya bağlanmıştır. Buna göre her noktasındaki kenar sayısını toplarsak bütün kenarları ikişer kez saymış oluruz. Yani bütün noktalardaki derecelerin toplamı, kenar sayısının iki katına eşittir. Bunu şöyle ifade edebiliriz. Bir G çizgesinde n nokta ve e kenar bulunsun.

n noktalar kümesi,

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ ise } 2e = \sum_{i=1}^{n} L(V) \qquad (2.1)$$

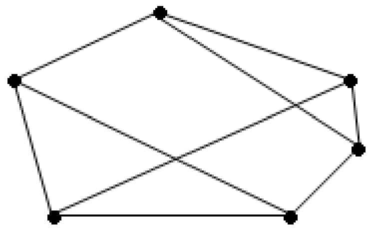
olur.

Bütün noktaların dereceleri aynı olan graflara **düzgün (regüler) graflar** denir. Lokal dereceleri hep r ise r-li düzgün graf denir. |V| = n olan bir r-li düzgün grafta;

$$|E| = e = \frac{1}{2}nr \qquad (2.2)$$

olacağı açıktır.

Bir örnek vermemiz gerekirse:



Şekil 2.2. 3-lü düzgün graf.

Bu grafta:

$$V = 6, \ r = 3 \qquad e = \frac{1}{2}nr \Rightarrow e = \frac{1}{2}.6.3 \Rightarrow e = 9 \tag{2.3}$$

olur.

Bir grafta derecelerin toplamının kenarların sayısının iki katı olduğunu söylemiştik. O halde $L(v_1) + L(v_2) + \ldots + L(v_n)$ toplamı her zaman çift bir sayıdır. Tek sayıda tek sayının toplamı yine tek sayı olduğundan yukarıdaki toplamda yer alan tek sayıların çift sayıda olması gerektiği anlaşılır. Yani bir çizgede derecesi tek olan noktaların sayısı çift olmak zorundadır. Bunu teorem olarak da yazabiliriz.

Teorem 2.1: Her grafta derecesi tek olan noktaların sayısı çifttir.

İspat: Sonlu bir G = (V,E) grafında A grafın noktasını, L(A) o noktanın derecesini göstersin. Bu durumda:

$$\sum_{A \in V} L(A) = 2\,|E| \tag{2.4}$$

eşitliği geçerlidir.

V_0 , derecesi çift olan V_1 , derecesi tek olan noktalar kümesi olsun. Biraz önce bahsettiğimiz eşitlikten;

$$\sum_{A\in V_0} L(A) + \sum_{A\in V_1} L(A) = 2|E| \qquad (2.4a)$$

dir. O halde:

$$\sum_{A\in V_0} L(A) + \sum_{A\in V_1} L(A) \qquad (2.4b)$$

çift bir sayıdır.

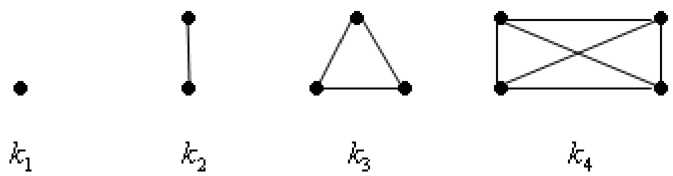
Sol taraftaki toplamda $L(A)$ sayılarının her biri çift ve toplamın sonucu da çift olduğundan;

$\sum_{A\in V_1} L(A)$ sayısı da çift olmalıdır. Ama buradaki $L(A)$ ların her biri tek sayıdadır. Dolayısıyla $L(A)$ ların toplamının çift olması için çift sayıda $L(A)$ toplamalıyız. O halde V_1 çift sayı olmalıdır. Yani derecesi tek olan noktaların sayısı çifttir.

Bir grafta tek başına kalmış noktalar bulanabilir. Böyle noktalara **izole noktalar (küsmüş noktalar)** denir.

Bütün noktaları izole olan bir grafa **boş graf** denir. Yani bir grafın boş olması kenarlar kümesi E'nin boş olması anlamına gelir.

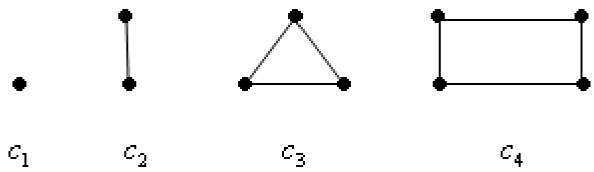
Herhangi iki noktası arasında en fazla bir kenar bulunan ve hiç ilmeği olmayan graflara tam graf denilmektedir. Nokta sayısı n olan bir tam graf K_n ile gösterilir.



Şekil 2.3. K_n tam grafı.

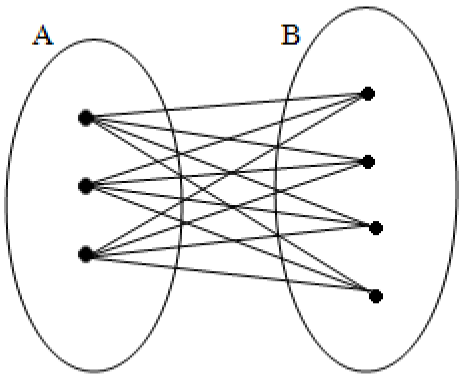
K_n grafı doğal olarak (n-1)-li düzgün graftır. $\frac{1}{2}$ n(n-1) kenara sahiptir.

C_n grafı, her noktaya tam iki kenar değen tek parça n noktalı graflardır. Bunlara **döngü** denir.



Şekil 2.4. C_n grafı.

$K_{n,m}$ grafı, noktaların n ve m elemanlı olmak üzere iki A ve B kümesine ayrılmış, A 'daki her noktanın B' deki her noktaya bağlandığı başkada kenarı olmayan graflardır. $K_{n,m}$' ye iki parça ya da iki kümeli tam graf denir. Bu graflarda nokta sayısı n+m. Kenar sayısı nm'dir.



Şekil 2.5. $K_{n,m}$ iki kümeli tam grafı.

2.2. Ağaç ve Orman

Döngüsü olmayan graflara orman denir. Bir döngü başladığı noktaya geri dönen ve iki kez aynı noktadan geçmeyen bir yolculuktur. Ağaç ise tek parça bir ormandır; Yani ağaç, döngü barındırmayan tek parça graftır.

Tanım 2.2: Bir grafta bir noktadan diğer noktaya ulaşmak için kullanılan nokta ya da kenar dizilerine **yol** denir.

Ağaçlar basit ve sade graflardır. Bir ağacın herhangi iki noktası birbirine tek ve tek bir yolla bağlıdır.

Ağacın iki noktası iki değişik yolla bağlanmış olsa bu iki yoldan kolaylıkla bir döngü elde edilebilir. Şimdi bununla ilgili teoremleri inceleyelim.

Tanım 2.3 (Bağlı): Her nokta çifti arasında en az bir yol bulunan graflara **bağlı graf** denir.

Teorem 2.2: Bağlı bir grafın ağaç olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bütün nokta çiftleri arasında yalnız tek bir yol bulunmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$**:** Bir G grafını ele alalım. G'nin ağaç olması her nokta çifti arasında yalnız bir yol bulunduğu anlamına gelecektir. Bunun doğru olmadığını düşünelim.

G'deki d_i, d_j noktalar arasında y_i ve y_j olarak iki ayrı yol bulunsun.

O zaman $y_i \cup y_j$ ortak kenarsız döngüden oluşacaktır. Bu ise ağaç tanımı ile çelişir. O halde, her nokta çifti arasında yalnız bir yol vardır.

$\Leftarrow$**:**G'de her nokta çiftleri arasında yalnız bir yol varsa graf bağlıdır.

Teorem 2.3: Her bağlı gafta en az bir ağaç vardır.

İspat: G grafını düşünelim. G'nin bağlı olması her nokta çifti arasında en az bir yol bulunduğu anlamına gelir. Öyleyse G'nin ağaç olmaması G'nin içinde bir döngü bulunduğu anlamına gelir. Şimdi bu döngülerden herhangi birini düşünelim. Bu döngüye ait kenarlardan birinin graftan çıkarılması bu döngüyü ortadan kaldıracak ancak grafın bağlılığını ya da nokta sayısını etkilemeyecektir. Bu işlemin yeterince tekrarlanması bir ağaç ile sonuçlanır.

Teorem 2.4: n noktalı bir ağacın n-1 kenarı vardır.

İspat: İspatımızı nokta sayısı üzerine tümevarımla yapacağız.

n = 1 ise, ağacımız tek noktalı kenarsız bir graf olmak zorunda olduğundan teoremimiz bu şık için doğrudur.

Şimdi n>1 olsun ve 0<r<n ise, her r noktalı ağacın r-1 kenarı olduğunu kabul edelim (tümevarım varsayımından). n noktalı bir T ağacını ele alalım. T'nin bir kenarını silelim (kenarların uç noktalarını silmeyelim). Böylece T den daha az kenarları ve iki ağaçtan oluşmuş bir orman elde ederiz. Bu iki ağacın nokta sayılarına n_1 ve n_2 diyelim. $n_1+n_2 = n$ dir. Tümevarım varsayımından dolayı bu iki küçük ağaçta n_1-1 ve n_2-1 kenar vardır. Dolayısıyla T ağacında;

$$(n_1-1) + (n_2-1) +1 = n_1 + n_2 -1 = n-1 \tag{2.5}$$

tane kenar vardır.

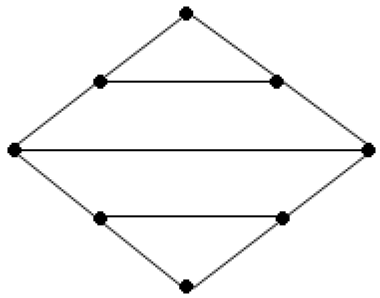
O halde n noktalı bir ağacın n-1 tane kenarı vardır.

Görüldüğü üzere ağaçta döngü yokken n noktalı bir ağacın n-1 kenarı vardır. Bundan yararlanarak şu sonuçlar ortaya çıkar.

Sonuç 2.1: En az n kenarlı n noktalı bir grafta döngü vardır.

Sonuç 2.2: n noktalı bir graf en az n kenarı varsa o zaman o grafta mutlaka bir döngü vardır.

2.3. Tek Hamlede Çizilebilen Graflar



Şekil 2.6. Tek dereceli graf.

Bu şekildeki bir grafı elimizi en fazla iki kez kaldırarak yani en fazla üç çizimde çizebilirmiyiz.

Öncelikle çizimde her noktaya 3 kenar değiyor. Yani her noktanın derecesi 3 tür. Şimdi çizimin ortasında olduğumuzu düşünelim. Bir noktaya doğru ilerliyoruz. O noktaya ulaştık. Ve o noktadan çıkıyoruz; demek ki çizimin ortasından geçtiğimiz her noktaya 2 derece kazandırırız: o noktaya ulaştığımızda ve o noktadan uzaklaştığımızda. Öte yandan çizime başladığımız ve çizimi bitirdiğimiz noktalara yalnızca 1 derece kazandırırız.

O halde hiç elimizi kaldırmazsak, elde ettiğimiz çizimin noktalarının en fazla ikisi dışında hepsinin derecesi çift olmak zorundadır.

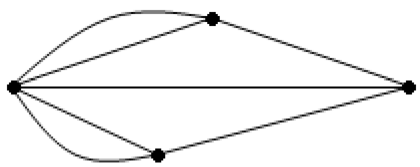
Örneğimize dönersek en fazla 3 çizim olduğundan en fazla 6 noktasının derecesi tek olabilir. Oysa çizimimizde 8 tane noktanın derecesi tek olduğundan bu imkansızdır. Yani bu graf en fazla 3 hamlede çizilemez.

Aslında tek çizimde, elimizi kaldırmadan çizebileceğimiz grafların tek dereceli noktası ya hiç olmaz ya da sadece iki tane olabilir; eğer çizimi başladığımız yerde bitiriyorsak her nokta çift dereceli olmalı, eğer çizimi başladığımız yerde bitirmiyorsak sadece iki noktanın derecesi tek olabilir; çizime başladığımız ve çizimi bitirdiğimiz nokta.

2.4. Euler Döngüsü

Graf kuramının bilinen en eski sorusu “Könisberg köprü problemi” dir. Burada Könisberg’deki Pregel nehrinin ve karalar arasında geçişi sağlayan 7 köprünün planını görüyorsunuz. Bu 7 köprünün her birinden sadece bir kez geçecek yolculuk mümkün müdür?

Euler 1736’da bunun mümkün olmadığını göstermiştir. Bunu şu şekilde açıklayabiliriz. Nehrin iki yakasını ve adacıkları dört noktayla, 7 köprüyü de bu noktalar arasına koyacağımız kenarlarla gösterelim:



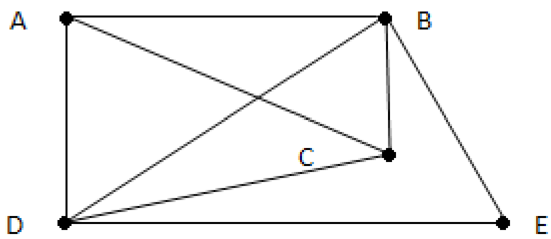
Şekil 2.7. Köprünün grafla gösterimi.

Tanım 2.4: Her kenardan tam bir kez geçen başladığı noktaya geri dönen yolculuklara Euler döngüsü denir. **Euler döngüsü** olan grafların tek parça ve her noktasının çift dereceli olması gerekir.

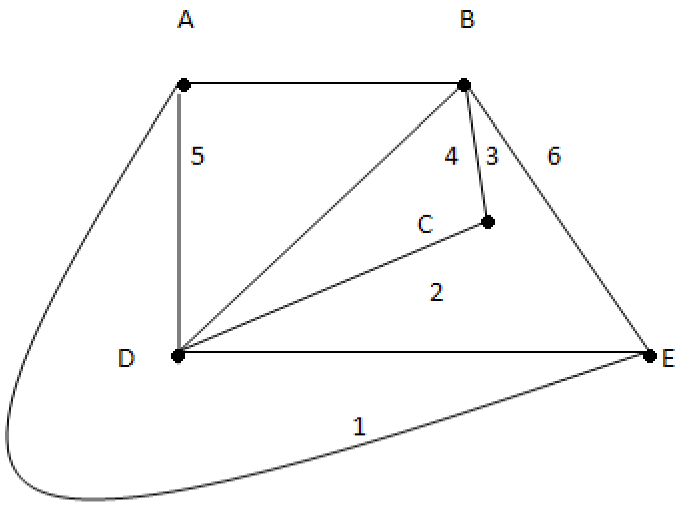
Teorem2.5: Bir G grafının Euler grafı olmazsı için gerek ve yeter koşul G grafındaki tüm noktaların derecesinin çift olmasıdır.

Bu teoremden yararlanılarak Şekil 2.7.’ ye baktığımızda bu grafın Euler grafı olmadığı açıktır.

2.5. Euler Formülü



1.Graf



2.Graf

Şekil 2.8. Düzlemsel graf.

Kenarların sadece grafın noktalarında kesişecek biçimde düzleme çizilebilen graflara düzlemsel graf denir. Örneğin 1. graf düzlemsel değildir. Çünkü AC ve BE kenar çizgileri kesişmiştir. 2. graf düzlemseldir. Yani bir düzleme kenarları kesişmeyecek şekilde çizilmiştir. 2. grafta görüldüğü şekilde düzlemsel graf düzlemi bölgelere ayırır. Bu grafta düzlemi 6 parçaya ayırmıştır(grafın dışında kalan parçayıda sayıyoruz).

Teorem 2.6 (Euler Formülü): Tek parça düzlemsel bir grafın bölge sayısı b, kenar sayısı k, nokta sayısı n ise b-k+n=2 eşitliği geçerlidir.

İspat: İspatı b üzerine tümevarımla yapacağız.

Eğer b=1 ise, o zaman grafta hiçbir döngü yok demektir, yani graf bir ağaçtır. Ağaç ve orman konusunda k=n-1 olduğunu söylemiştik. Bunu yerine koyarsak:

$$b-k+n = 1-(n-1) + n = 2 \tag{2.6}$$

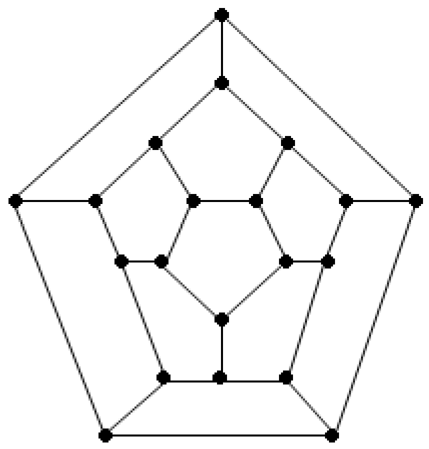
olur ve eşitlik doğrudur.

Şimdi b>1 olsun. Grafa G adını verelim. AB de grafın bir döngüsünün bir kenarı olsun. AB kenarını kaldıralım. Geriye kalan grafa G_1 adını verelim. G_1 grafının bölge, kenar ve nokta sayıları sırasıyla b_1 , k_1 , n_1 olsun. AB kenarı G nin iki bölgesine de ortaktır. Dolayısıyla AB kenarını kaldırdığımızda $b_1=b-1$, $k_1=k-1$ ve $n_1= n$ eşitlikleri geçerlidir. Ve dolayısıyla tümevarım varsayımına göre Euler formülü G_1 grafı için doğrudur. Yani; $b_1-k_1 + n_1=2$' dir.

$b - k + n = (b_1+1) - (k_1+1) + n_1 = b_1-k_1 + n_1 = 2$ bulunur. O halde b-k+n = 2 doğrudur.

2.6. Hamilton Döngüsü

Bir G grafı verildiğinde her noktadan yalnız bir kez geçmek şartı ile kapalı bir yol oluşturabilen graflara Hamilton grafı denir. Aşağıdaki graf hamilton grafıdır.



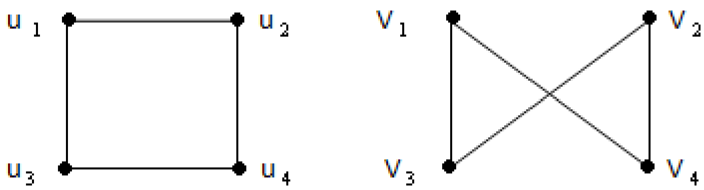
Şekil 2.9. Hamilton grafı.

2.7. Eş Yapılı (İzomorfik) Graflar

İki Graf verildiğinde bu iki graf ta kenarlar ve konumlar arasındaki ilişki aynı olabilir. Bu durumda benzer özellikte iki farklı geometrik şekiller ortaya çıkabilir. Aynı durumu yansıtan, başka bir deyişle aynı yapıya sahip graflara eşyapılı graflar denir. Başka bir deyişle bunlara izomorfik graflar denir.

İki grafın eşyapılı olabilmesi için;

- Kenar sayıları aynı olmalıdır.
- Nokta sayıları aynı olmalıdır.
- Nokta dereceleri aynı olmalıdır.
- Noktalar arasındaki ilişkiyi gösteren matrisler aynı olmalıdır. Bu matrislerdeki benzerlik satır ve sütunlardaki yer değişikliği ile de sağlanabilir.



Şekil 2.10. İzomorfik graflar.

Yukarıda görülen bu iki graf izomorfiktir. Kenar sayıları, nokta sayıları, nokta dereceleri aynıdır. Noktalar arasındaki ilişkiyi gösteren matrislerde aynıdır. Şöyle ki

Çizelge 2.1 Şekil 2.10’daki grafların matrisi

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	0	1	1	0
u_2	1	0	0	1
u_3	1	0	0	1
u_4	0	1	1	0

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	0	1	1
v_2	0	0	1	1
v_3	1	1	0	0
v_4	1	1	0	0

Matrislerinde u_2 ve u_4 satır ve sütunları yer değiştirdiğinde elde edilen matrisle ikinci matriste eşit olur. Böylece iki grafın izomorfik olduğu kolayca görülür.

BÖLÜM 3
SONLU SİSTEMLER TEORİSİ ÜZERİNE

3.1. Sonlu Durum Sistemi

Sonlu durum sistemi sonlu sayıda duruma (state) sahip, verilen girişi bir durumdan diğer duruma ileten ve çıkış üretebilen bir ağdır. Sonlu kelimesinin kullanılmasının sebebi söz konusu nesnel varlığın sahip olacağı durumların (state) sayılı olmasıdır.

Otomatlar sürenin kullanılması ve işleme dahil edilmesi açısından senkron ve asenkron otomatlar olarak sınıflandırılabilirler. Senkron otomatın durumlarında değişme ancak belirli anlarda olabilir. Durum değişimine imkan verme işlemi senkronlama adını alır.

Asenkron otomatlarda otomatın bir durumdan diğer duruma geçmesi anı önceden belli değildir ve herhangi bir olaya bağlıdır. Girişler değiştikçe otomatın durumları da değişir.

Tanım3.1: M bir sistem olsun. Bu M sistemini göz önüne alalım.

X = $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p\}$ sonlu giriş kümesi (alfabesi);

Z = $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q\}$ sonlu çıkış kümesi (alfabesi);

S = $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ sonlu durum kümesi verildiğinde

f_z ve f_s aşağıdaki gibi tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere

$$z_\nu = f_z\ (\mathrm{x}_\nu, \mathrm{s}_\nu) \tag{3.1}$$

$$s_{\upsilon+1} = f_s\ (\mathrm{x}_\nu, \mathrm{s}_\nu) \tag{3.2}$$

(X, Z, S, f_z, f_s, σ_{i_0}) bileşkesinden oluşan sisteme sonlu durum sistemi denir.

σ_{i_0} sonlu durum sisteminin başlangıç durumudur. Başlangıç durumu verilmezse giriş dizine uygun çıkış dizisi ve son durum belirlenemez.

Burada sırasıyla x_ν, z_ν ve s_ν M nin t_ν (ν=1,2,3,…) anlarındaki giriş sembolü, çıkış sembolü ve durumu belirten semboldür.

Görüldüğü gibi otomatın ν anındaki çıkış sözü; ν anındaki durum ve ν anındaki giriş sözü x_ν ye bağlıdır. ν+1 anındaki durumu ise ν anındaki durumu ile ν anındaki giriş sözüne bağlıdır.

Bir otomat, ν süresinin sayısal anlarında çalışabilir. Yalnız bu anlarda girişine sinyal verilebilir ve yalnız çıkışından sinyal alınabilir.

Sonlu durum sisteminin özel bir durumda;

$$f_z(x_\nu, s_\nu) = f_z(x_\nu) \tag{3.3}$$

dir.

Böyle sistemlere trivial (aşikar) sistem denir. Trivial bir sistem içindeki ara degişkenlerin giriş ve çıkışına herhangi bir etkide bulunmaz. Bu nedenle durum böyle sistemlerde gereksizdir.

Nontrivial bir sistemde de

$$f_z(x_\nu, s_\nu) \neq f_z(x_\nu) \tag{3.4}$$

dir.

3.2. Sonlu Durum Sistemi Örneği

Sonlu sistemlerde kullanılan f_z ve f_s fonksiyonları geçiş çizelgesi adı altında çizelge içinde gösterilebilir. Bu çizelge iki fonksiyonun bütün alabilecek parametrelerinin değerlerini listeler. Bunlar (x_ν , s_ν) olarak listelenir. x_ν , X giriş alfabesinin üzerinde ve s_ν de S durum kümesinin üzerindedir. Geçiş çizelgeleinde bütün sistemler için giriş değerleri $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p\}$, çıkış değerleri $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q\}$ ve durum kümesi $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ olarak gösterilir. Aşağıdaki çizelge bunu anlatmaktadır.

Çizelge 3.1. Sonlu sistem geçiş çizelgesi

	Z_υ				$S_{\upsilon+1}$			
x_υ / S_υ	ξ_1	ξ_2	$\cdots$	ξ_p	ξ_1	ξ_2	$\cdots$	ξ_p
σ_1								
σ_2								
.	$\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q\}$				$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$			
.								
.								
σ_n								

Çizelgede z_ν ve $s_{\upsilon+1}$ gibi bitişik iki alt çizelgesinden oluşmuştur. Ve bunlar f_z ve f_s fonksiyonları ile gösterilir. Görüldüğü gibi sütun başlığı s_ν ve x_ν için aynıdır. Yani olabilecek mevcut durumlarla, mevcut giriş değerlerinden meydana gelir. Satırlar σ_i ler, sütunlar ε_j lerdir. $f_z(\varepsilon_j,\ \sigma_i)$, z_ν alt çizelgesinde; $f_s(\varepsilon_j,\ \sigma_i)$, $s_{\upsilon+1}$ alt çizelgesinde yer alır.

Bu tanımlar giriş ve çıkış değerleri arasındaki ilişki hakkında bize yardımcı olur.

X = { d, n, u, π, λ }

Z = {0,1}

S = {1, 2, 3, 4, 5}

olan bir M sisteminin geçiş çizelgesi aşağıdaki gibi verilmiştir.

Çizelge 3.2. M sisteminin geçiş çizelgesi

	Z_v					S_{v+1}				
X_v / S_v	d	n	u	π	λ	d	n	u	π	λ
1	0	0	0	0	0	2	2	3	1	2
2	0	0	0	0	0	2	2	2	1	2
3	0	0	0	0	0	5	4	2	1	2
4	0	0	0	0	0	5	4	4	1	4
5	0	0	0	1	0	5	4	4	1	4

Örneğin bu sisteminin giriş dizisi $\pi u n \lambda \lambda d \pi$ ve başlangıç durumu da 3 olarak verilsin. Buna göre çıkış dizisini ve geçtiği durumları şu şekilde bulabiliriz.

$f_z(\pi,3) = 0$

$f_s(\pi,3) = 1$

$f_z(u,1) = 0$

$f_s(u,1) = 3$

$f_z(n,3) = 0$

$f_z(\lambda,4) = 0$

$f_s(\lambda,4) = 4$

$f_z(d,4) = 0$

$f_s(d,4) = 5$

$f_s(n,3) = 4$ $f_z(\pi,5) = 1$

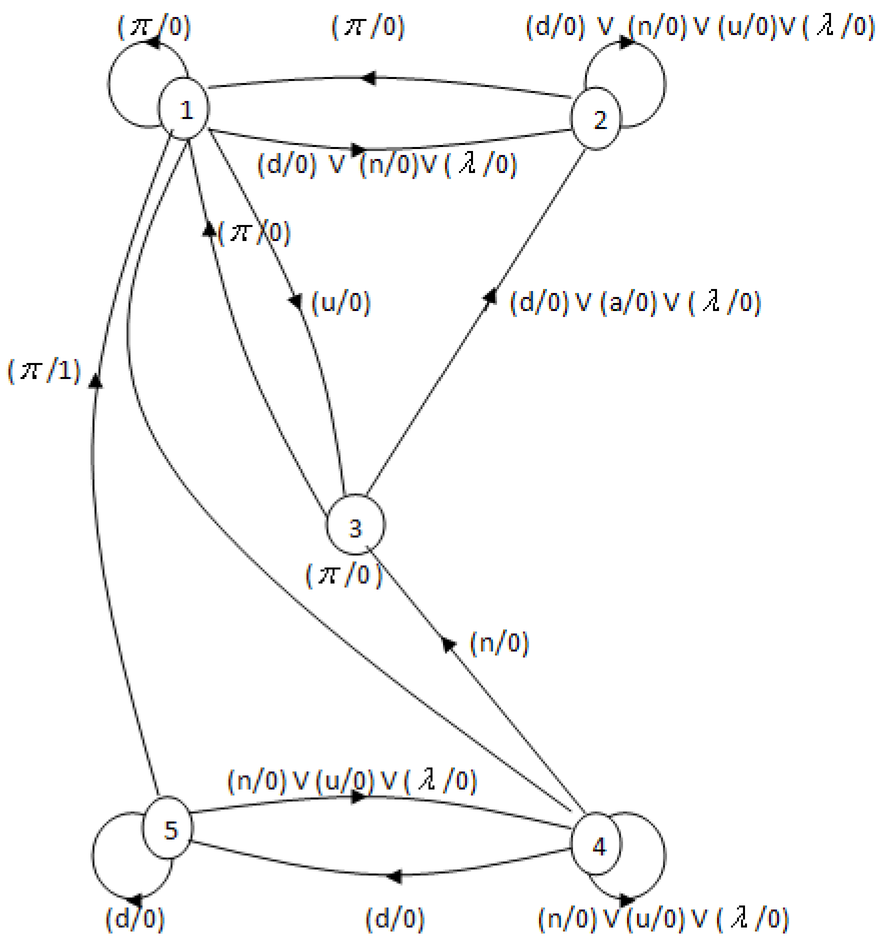
$f_z(\lambda,4) = 0$ $f_s(\pi,5) = 1$

$f_s(\lambda,4) = 4$

Görüldüğü gibi çıkış dizisi 0000001

Geçtiği durumlar ise 1344451 olarak bulunur.

Bu giriş dizisi verildiğine oluşan çıkış dizisini ve geçtiği durumları aşağıdaki graf (diagram) adını verdiğimiz şekille gösterebiliriz.



Şekil 3.1. M sistemin graf ile gösterimi

BÖLÜM 4
DENEMELER TEORİSİNDE DENKLİK BÖLGÜLERİ

4.1. Durumların Denkliği

Bu bölümle birlikte bundan sonraki bölümlerde $M|\sigma$ gösterimini " σ durumundaki M sistemi" ifadesi için kısaltma olarak kullanılmıştır.

Tanım 4.1: σ_i durumundaki M_1 sistemi ve σ_j durumundaki M_2 sistemi herhangi giriş dizisiyle oluşan $M_1|\sigma_i$ ve $M_2|\sigma_j$ aynı çıkış dizilerini veriyorlarsa o zaman bunların denk olduğu söylenir. σ_i ve σ_j denk değillerse ayrılabilir oldukları söylenir. M_1 ve M_2 aynı sistemler gibi kullanılabilir. (Sudkamp, 1997)

Böylece σ_i ve σ_j denktirler. Ancak ve ancak, σ_i başlangıç durumundaki M_1 sistemi ile σ_j başlangıç durumundaki M_2 sistemi arasında, (dış uçları gözlemlenmesiyle) hiçbir bölünme yolu yoktur. σ_i ve σ_j ayrılabilir. Ancak ve ancak hem $M_1|\sigma_i$ hem de $M_2|\sigma_j$ 'e uygulandığın da farklı çıkış dizileri veren en az bir giriş dizisi vardır. σ_i ve σ_j aralarında denktirler. Bu $\sigma_i = \sigma_j$ ile gösterilir. σ_i ve σ_j arasındaki ayrılabilirlik $\sigma_j \neq \sigma_i$ ile gösterilir. Tanım 4.1 'den durum denkliğinin yansıma kuralına ($\sigma_i = \sigma_j$), simetri kuralına (Eğer $\sigma_i = \sigma_j$ ise; 0 zaman $\sigma_i = \sigma_j$ doğrulanabilir.) ve geçişme kuralına (Eğer $\sigma_i = \sigma_j$ ve $\sigma_j = \sigma_k$ ise; 0 zaman $\sigma_i = \sigma_k$ olur.) uyduğu kolayca doğrulanabilir. Sonuç olarak, durum denkliği sıradan bir denklik bağıntısı olarak görülebilir ve herhangi bir boyuttaki durumlar kümesine direk uygulanabilir. Başka bir deyişle, durum ayrılabilirliği yansıma ve geçişme kurallarına uymaz ve bu yüzden, sadece durum çiftlerine uygulanabilir. Bazı durumlarda aynı sistemlere ait olan bir çift durumun denkliği ya da ayrılabilirliği bu sistemin geçiş çizelgesinin kontrol edilmesiyle bulunur. Bu durumların bazıları aşağıdaki 3 yardımcı teoremle tanımlanabilir.

Yardımcı Teorem 4.1: σ_i ve σ_j M sisteminin durumları olsunlar. M' nin z_v alt çizelgesinde σ_i ve σ_j satırları (dizileri) farklıysalar, o zaman $\sigma_i \neq \sigma_j$ olur (Gill, 1962).

İspat: $M|\sigma_i$ ve $M|\sigma_j$ 'ye uygulandığında farklı çıkış sembolleri veren en az bir tane giriş sembolü olmalıdır. Tanım 4.1 'den, 0 zaman, $\sigma_i \neq \sigma_j$ olur

Yardımcı Teorem 4.2: σ_i ve σ_j, M sisteminin durumları olsunlar. M sisteminin tüm geçiş çizelgesini kapsayan σ_i ve α_j satırları (dizileri) aynı iseler, o zaman, $\sigma_i = \sigma_j$ olur (Gill,1962)

İspat: Herhangi bir giriş sembolü $M|\sigma_i$ ve $M|\sigma_j$ 'ye uygulandığında çıkış sembolleri ve bir sonraki durumlar iki şekilde birbirine benzerdirler. İlk olarak $M|\sigma_i$ ve $M|\sigma_j$ aynı duruma geçtiklerinde tüm sonraki çıkışlara cevapları çakışmalıdır. Tanım 4.1 'den O zaman, $\sigma_i = \sigma_j$ olur.

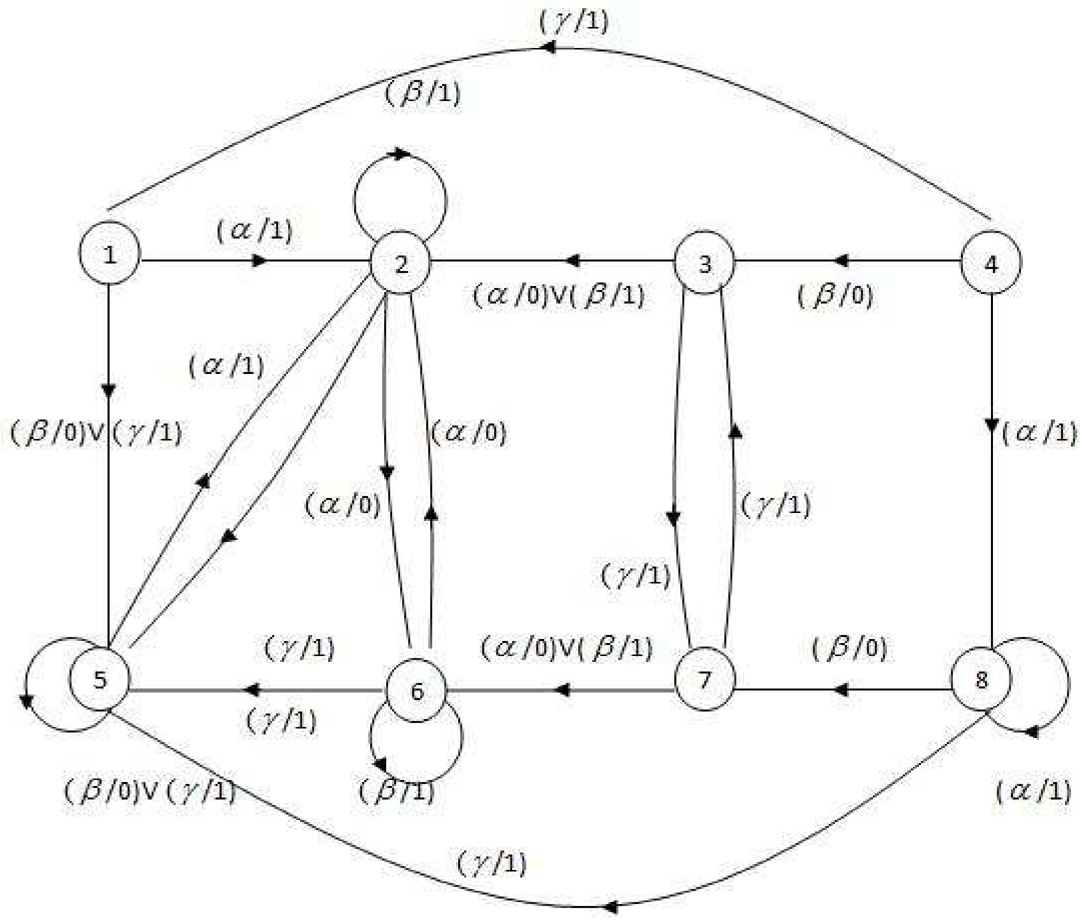
Yardımcı Teorem 4.3: σ_i ve σ_j M sisteminin durumları olsunlar. M'nin tüm geçiş çizelgesini kapsayan σ_i ve σ_j dizileri her bir σ_i, σ_j 'nin yerini aldığında (yahut σ_j ,σ_i nin yerini aldığında) benzer oluyorlarsa, 0 zaman $\sigma_i = \sigma_j$ olur(Gill, 1962).

İspat: Herhangi bir giriş sembolü $M|\sigma_i$ ve $M|\sigma_j$ ye uygulandığında çıkış sembolleri iki şekilde birbirine benzerler. $M|\sigma_i$ ve $M|\sigma_j$ ya aynı durumlar içinde geçer ya da σ_i ve σ_j, durumları içinde geçerler(Her birini söylendiği sıraya göre zorunlu değil). Eğer sonraki durum aynı ise, tüm tepki dizilerine onların cevabı çakışmalıdır. Eğer sonraki durumlar σ_i ve σ_j ise, ilk (asıl) durum yenilenir ve yukarıdaki görüş sonraki çıkış sembollerinin iki yönden aynı olduklarını göstermek iyin tekrarlanabilir. Tümevarım yoluyla, o zaman herhangi giriş dizisine σ_i ve σ_j nin cevabı benzerdir ki bu da σ_i ve σ_j olduğunu gösterir.

Yardımcı Teorem 4.1'de belirtilen özellikleri gösteren dizi çiftlerinin basitçe ayrılabilir oldukları söylenir ve bu dizilerin artakalan durumları basitçe ayrılabilen durumlar olarak adlandırılır. Yardımcı Teorem 4.2 veya 4.3'de belirtilen özellikleri gösteren dizi çiftlerinin basitçe denk olduğu söylenir. Bu dizilerin köklerindeki durumlar basitçe denk durumlar olarak adlandırılır. Böylelikle aşağıdakine ulaşırız:

Teorem 4.1: Eğer σ_i ve σ_j basitçe ayrılabilirse, o zaman $\sigma_i \neq \sigma_j$ olur. Eğer σ_i ve σ_j basitçe denk ise, o zaman $\sigma_i = \sigma_j$ olur (Gill, 1962).

Teorem 4.1'in karşıtının doğru olmadığını belirtelim. Her bir ayrılabilir durum çifti basitçe ayrılabilir değildir. Her bir denk durum çifti basitçe denk değildir. Sınıf tanımı kullanılarak basitçe bir minimal sistemdeki tüm durum çiftlerinin ayrılabilir ve basitçe indirgenebilir bir sistemde en az bir durum çiftinin denk olduğu sonucuna varılabilir.



Şekil 4.1. A6 sistemi.

A6 sisteminin dikkate alındığı Yardımcı Teorem 4.1'den 4.3'e kadarki kısmı örneklerle açıklamak için Çizelge 4.1 ve şekil 4.1 belirlenir. Geçiş çizelgesindeki 1 ve 5 dizilerinin benzer olduğuna ve her 2, 6 ile yer değiştirdiğinde, 2 ve 6 dizilerinin benzer olduğuna dikkat edilebilir. Sonuç olarak, {1,5} ve {2,6}durum çiftlerinin herbiri denktir. A6'nın z_v alt çizelgesine şöyle bir bakıldığında {1, 4, 5, 8} kümesinde hiçbir durumun {2, 3, 6, 7} kümesindeki herhangi bir duruma denk olmayacağını açığa çıkarır.

Çizelge 4.1. A6 sistemi

	Z_ν			$S_{\nu+1}$		
s_ν \ x_ν	α	β	γ	α	β	γ
1	1	0	1	2	5	5
2	0	1	1	6	2	5
3	0	1	1	2	2	7
4	1	0	1	8	3	1
5	1	0	1	2	5	5
6	0	1	1	2	6	5
7	0	1	1	6	6	3
8	1	0	1	8	7	5

4.2. k-Denkliği:

Daha sonraki tartışmalarda yararlı bulduğumuz kavram k-denkliği şöyledir:

Tanım 4.2: Eğer $M_1|\sigma_i$ ve $M_2|\sigma_j$ k uzunluğundaki bir giriş dizisiyle uyarıldığında özdeş çıkış dizileri veriyorlarsa, M_1 sisteminin σ_i durumu ve M_2 sisteminin σ_j durumunun k-denk olduğu söylenir. Eğer σ_i ve σ_j k-denk değilseler, onların k-ayrılabilir oldukları söylenir. M_1 ve M_2 sistemleri aynı sistemler olarak adlandırılabilir (Gill, 1962).

Böylece σ_i ve σ_j k-denktirler. Ancak ve ancak k-uzunluğunun giriş dizilerini kullanarak ve dış uçlarını gözlemleyerek, σ_i durumundaki M_1 sistemi ve σ_j durumundaki M_2 sistemi arasında ayrılmanın hiçbir yolu yoktur. σ_i ve σ_j

k-ayrılabilirler. Ancak ve ancak hem $M_1|\sigma_i$ hem de $M_2|\sigma_j$ 'ye uygulandığında farklı çıkış dizileri veren k-uzunluğunda en az bir giriş dizisi vardır. 1-ayrılabilir iki durum basitçe ayrılabilir olarak görülebilir.

Tanım 4.2'den k-dekliğinin yansıma, simetrik ve geçişlilik kurallarına uyduğu kolaylıkla doğrulanabilir. Sonuç olarak, k-denkliği sıradan denklik bağıntısı olarak görülebilir. Direk olarak herhangi bir büyüklükteki durumlar kümesine uygulanabilir. Başka bir deyişle, k-ayrılabilirliği yansıma ve geçişlilik kurallarına uymaz ve bu yüzden sadece durum çiftlerine uygulanabilir.

Yardımcı Teorem 4.4:

a) Eğer iki durum k-denkliği ise, o zaman her bir $l \leq k$ için l-denkliğidir.

b) Eğer iki durum k-bölünebilir ise, o zaman onlar her bir $l \geq k$ için l-ayrılabilirler (Gill, 1962).

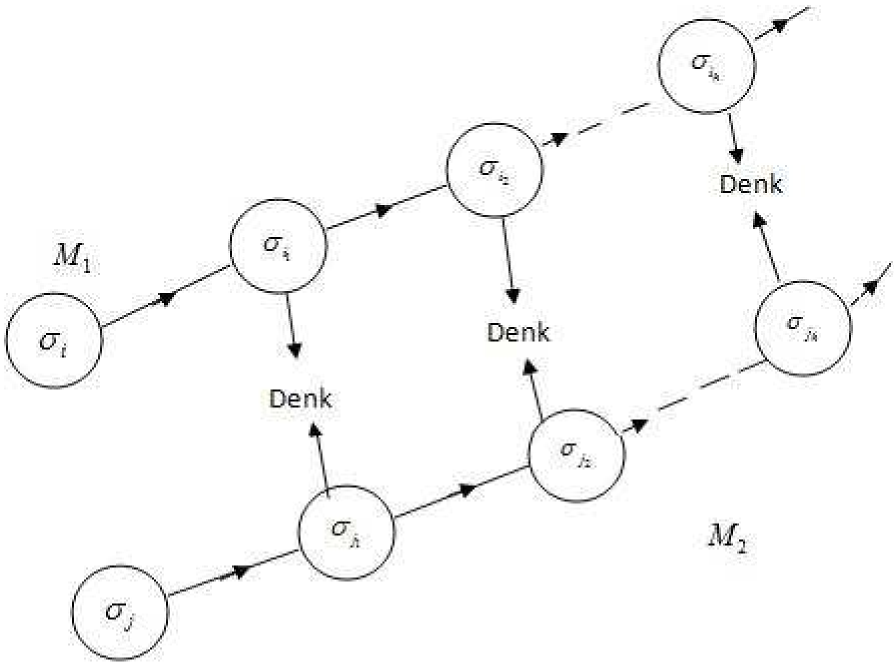
İspat:

a) σ_i ve σ_j 'nin k-denkliği olduğu fakat ε_l olarak söylenen, $l \leq k$ uzunluğunda aynı giriş dizileriyle ayrılabilir olduğunu farz edelim. O zaman ε_{k-l} , *k-l* uzunluğunun herhangi bir giriş dizisi olduğu yerde σ_i ve σ_j, $\varepsilon_l \varepsilon_{k-l}$ giriş dizisiyle ayrılabilir olmalıdır. Bu nedenle, σ_i ve σ_j k-ayrılabilirdir ki bu da bir çelişkidir.

b) σ_i ve σ_j'nin k-bölünebilir olduğunu fakat bazı $l \geq k$ için l-denkliği olduğunu varsayalım.(a)'ya göre buna rağmen σ_i ve σ_j l-denkliği ise her bir $k \leq l$ için k-denkliği olmalıdır. Daha sonra aksine b maddesi takip eder. k-uzunluğunun bir giriş dizisi uygulandığında σ_i durumuna geçen giriş durumu bu diziyle ilgili olarak σ_j 'nin k.ardılı olarak adlandırılır. Bir durumun 0.ardılı kendisinin durumudur.

Teorem 4.2: Eğer σ_i ve σ_j durumları k-denk ise ve onların k-uzunluğunun herhangi bir giri~ dizisiyle ilgili olarak k. Ardılları k-denk ise, o zaman $\sigma_i = \sigma_j$ olur. (Gill, 1962).

İspat: Eğer σ_i ve σ_j k-denk ise, o zaman Yardımcı Teorem 4.4 ile onların k uzunluğundaki tüm giriş dizileri ya da daha azı için aynı yanıtı verir. Eğer onların k. ardılları, k uzunluğunda herhangi bir giriş dizisine göre, denk iseler, o zaman onlar ilk k sembolünü izleyen tüm giriş dizilerine benzer tepki verirler. Böylece, σ_i ve σ_j herhangi bir uzunluktaki giriş dizilerine benzer tepki verir ki bu da $\sigma_i = \sigma_j$ olduğunu gösterir.



Şekil 4.2. yollar $\sigma_i = \sigma_j$ olduğunda M_1 ve M_2 .

Teorem 4.3: Eğer σ_i , σ_j durumları denkse, O zaman k uzunluğundaki herhangi giriş dizisine göre onların k. ardılları denktir (Gill, 1962).

İspat: ε_k keyfi giriş dizisine göre, sırasıyla σ_i ' ve σ_j ' , σ_i ve σ_j 'nin k. ardıllarını göstersin. Eğer σ_i ' $\neq \sigma_j$ ' ise, 0 zaman, ε_1 olarak söylenen, σ_i ' ve σ_j 'ye farklı tepkiler veren bir dizi vardır. Bu yüzden ε_k ε_1 'ye σ_i ve σ_j 'nin yanıtı farklı olmalıdır ki bu durum $\sigma_i = \sigma_j$ varsayımıyla çelişir. Bundan dolayı, hem $M_1|\sigma_i$ hem de

$M_2|\sigma_j$ ’ye uygulanan giriş dizisi sırasıyla M_1 ve M_2 ’nin geçiş diyagramında σ_i ve σ_j durumlarında başlangıçtaki yol çiftiyle birleştirilebilir.

Hem $M_1|\sigma_i$ hem de $M_2|\sigma_j$ 'ye uygulanan giriş dizisi sırasıyla M_1 ve M_2 dönüşüm diyagramında σ_i ve σ_j deki kaynak yol çiftleriyle bileştirilebilir. Teorem 4.3 eğer bu yollarda ilk durum çifti eşitse, O zaman yollarda her bir benzer durum çiftlerinin de denk olduğunu gösterir. (Yani aynı sayıdaki dalların çaprazlarından durumlar ilk duruma ulaşır.) Bu durum belirli bir giriş diziminin $M_1|\sigma_i$ ve $M_2|\sigma_j$ 'ye uygulandığında M_1 ve M_2 'de gösterilen yolların çapraz yollar olduğu Şekil 4.2'de örneklerle gösterildi. Eğer σ_i ve σ_j denk ise, k. ardıllar olan σ_{ik} ve σ_{jk} tüm k'lar için denk olmalıdır.
Önceki sonuçlar, birçok durumda, diğer durumların denkliği zaten saptanmış olduğundan saptanmış denk durumlar için kullanılabilir. Örneğin şekil 4.1 'in A6 sistemindeki {1, 5} ve {3, 7} durum çiftlerinin denk olduğu bilinir. Sonuç olarak, {4 , 8} 1-denk olduğundan, onlar ilk ardıllarından olan {1, 5} ve {3,7} çiftleriyle {4, 8} çifti de denk olmalıdır. Eğer {4, 8} çifti denk olarak biliniyorsa, onlar 4 ve 8 durumlarında başlangıç yolunda benzer durum çiftleri oluşturduğundan, O zaman
{1, 5}, {2, 6} ve {3, 7} çiftleri de denk olmalıdır.

4.3. k-Denkliği Bölgüleri

Daha sonraki bölümlerde olan amaçlar için, aşağıdaki kriterler sınıflardaki bir sistemin durumlarını bölmek veya bölüntüyle ilgilidir: (l) Aynı sınıfa ait olan tüm durumlar k-denk olmalıdır. (2) Farklı sınıflara ait olan tüm durumlar k ayrılabilir olmalıdır. Bu bölünme sistemin k-denkliği bölümü olarak adlandırılır ve P_k ile gösterilir. P_k’ nın sınıfları k-denkliği sınıfları olarak adlandırılır ve $\Sigma_{k1}, \Sigma_{k2}, \Sigma_{k3}$ olarak gösterilir. Aynı sınıflara ait olan durumlar eklenmiş durumlar olarak adlandırılır. Farklı sınıflara ait olan durumlar parçalanmış durumlar olarak adlandırılır.

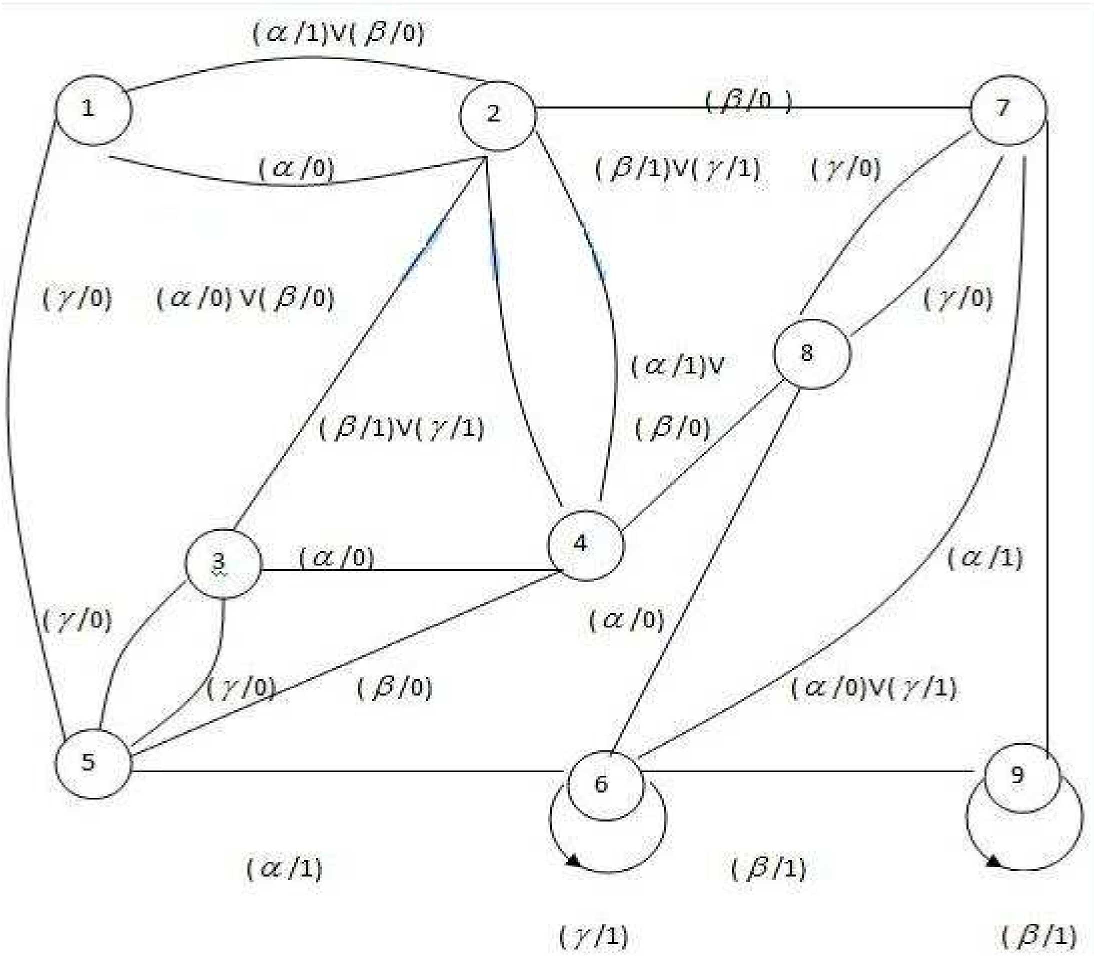
Şekil 4.3. ve Çizelge 4.2. A7 sistemini temsil eder. Bu sistem için 2-denklik bölümü

$$\begin{aligned} P_2 : \Sigma_{21} &= \{1, 3, 5, 7, 8\} \\ \Sigma_{22} &= \{2, 4, 6\} \\ \Sigma_{23} &= \{9\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

ile verilir.

A7'nin geçiş diyagramı kolayca doğrulanacağı gibi, (4.1) ile verilen P_2'deki eklenmiş durumlar, 2-denktirler ve parçalanmış durumlar 2-ayrılabilirlerdir. A7 de hiçbir durum 9 durumuna 2-denk değildir (9'un kendi durumu hariç) ve bu yüzden 9 bir tek durum sınıfı veya bir tekillik medyana getirir.

Açıkçası, bu durumun kendisinin k-ayrılabilir olduğunu gösterdiğinde, hiçbir durum aynı anda(eş zamanlı) iki farklı k-denkliği sınıfına ait olamaz. Bundan dolayı durumun kendisiyle ilgili olarak k-ayrılabilir olduğunu belirtecektir. Bu yüzden P_k' da ki durumların toplam sayısı sistemdeki durumların toplam sayısına eşittir.



Şekil 4.3. A7 sistemi.

Çizelge 4.2. A7 sistemi

	Z_v			S_{v+1}		
s_v \ x_v	α	β	γ	α	β	γ
1	1	0	0	2	2	5
2	0	1	1	1	4	4
3	1	0	0	2	2	5
4	0	1	1	3	2	2
5	1	0	0	6	4	3
6	0	1	1	8	9	6
7	1	0	0	6	2	8
8	1	0	0	4	4	7
9	0	1	1	7	9	7

Yardımcı Teorem 4.5: Sistemin k-denkliği bölgüsü tektir (Gill, 1962).

İspat: Σ_{k1}, Σ_{k2}, …, Σ_{ku} ’dan meydana gelen P_k ’nın tek olmadığını farz edelim. Aynı sistemler için Σ_{k1}', Σ_{k2}', … , Σ_{kv}' ’den oluşan, P'_k olarak söylenen, başka k-denkliği bölümü olmalıdır. $\Sigma_{kr} = \{\sigma_{r1}, \sigma_{r2}, \ldots \sigma_{rd}\}$ olsun. Σ_{kr} durumları k-denkliği olduğundan ve Σ_{kr} deki herhangi bir duruma denk olan Σ_{kr} ’nin dışında hiçbir durum olmadığından, Σ'_{ks} olarak söylenen, σ_{r1}, σ_{r2}, $\ldots \sigma_{rd}$ durumlarını içeren ve öteki durumları içermeyen P'_k de bir sınıf olmalıdır. r = 1,2, ... , u için bu değişkenler uygulandığında, P_k ’da ki her bir sınıf P'_k da ki benzer sınıflarla eşlenir. P'_k ’da ki durumların toplam sayısı P_k da kilerle aynı olmalıdır. P_k ve P'_k benzer olmalıdır ve bu yüzden P_k tektir.

Yardımcı Teorem 4.6: P_k da parçalanmış durumlar aynı zamanda P_{k+1}'de de parçalanmış olmalıdır. (Gill, 1962).

İspat: Yardımcı Teorem 4.4'den iki durum k-ayrılabilir ise, onlar ayrıca (k+1)- ayrılabilir olmalıdır. O zaman, şimdiki Yardımcı teorem, P_k ve P_{k+1} tanımından doğrudan çıkar.

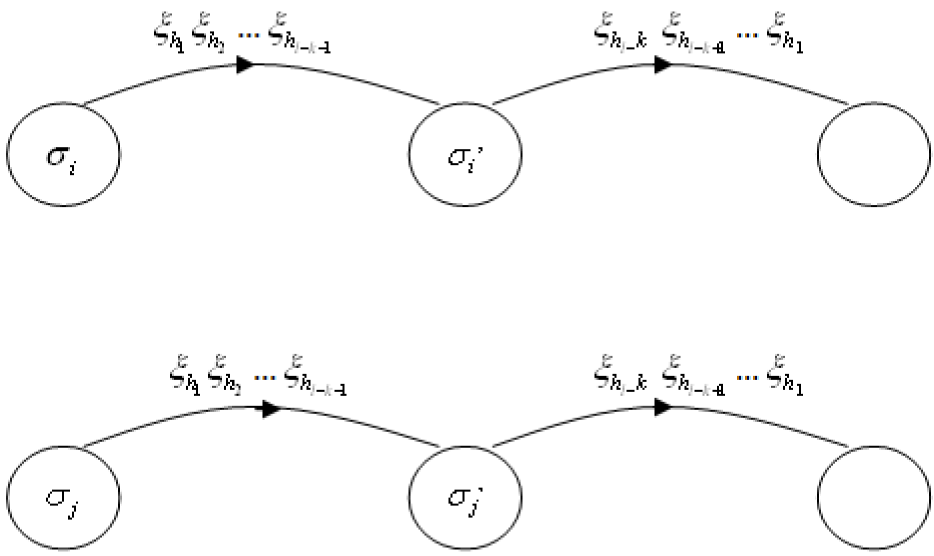
Örnek olarak, A7 sisteminin P_3 'ü {1, 3, 6} veya {2, 5, 9} gibi sınıfları içermeyebilir, bu yüzden, (4.1)'den sonuca varılabileceği gibi bu sınıflar P_2'de parçalanmış durumları içerir.

Yardımcı Teorem 4.7: M sistemi k-denk olan iki ayrılabilir durum içeriyorsa, o zaman k-denk fakat (k+ 1)-ayrılabilir olan iki durum da içermelidir (Gill, 1962).

İspat: σ_i ve σ_j k-denk olan M' nin ayrılabilir durumları olsunlar ve ξ_{h_1}, ξ_{h_2} ,…, ξ_{h_l} giriş dizisi σ_i ve σ_j 'yi ayıran giriş dizilerinin en kısası olsun. σ_i ve σ_j, sonra ξ_{h1} uygulandığında farklı çıkış sembolleri verir, ama daha önce vermez. σ_i ve σ_j k-denk olduklarından, $l >$ k'ya ulaşmalıyız. ξ_{h_1}, ξ_{h_2} ,…, ξ_{h_1-k-1} ilgili olarak σ_i ve σ_j'in (l-k-1). ardılları σ'_i ve σ'_j olsun, sırasıyla l >k, l-k-1 ≥ 0 olduğundan ve bu ardıllar daima vardır. σ'_i ve σ'_j, daha sonra, uzunluğu l-(l-k-1)=k+1 olan $\xi_{h_1-k}\xi_{h_1-k+1}\cdots\xi_{h_l}$ dizisiyle ayrılabilir. σ_i ve σ_j k-denk oldukları farz edilirse bu bir çelişki yarattığı için onlar herhangi daha kısa diziyle ayrılamazlar. Bundan dolayı, σ'_i ve σ'_j k-denktirler fakat (k+1)-ayrılabilirdir ki teorem ispatlanır. Yukarıdaki durum şekil 4.4 'te örneklerle açıklanır.

Şimdi P_k da her bir denk sınıfta eklenmiş durumların denk olduğunu farz edelim. O zaman, açıkça P_{k+u} tüm negatif olmayan u tamsayıları için P_k ile aynıdır. P_k' da iki eklenmiş durum ayrılabilir ise, o zaman onlar k-denk olan iki ayrılabilir durum meydana getirir. Bu durumda, Yardımcı Teorem 4.7 aracılığıyla, sistem k-denk fakat (k+1)-ayrılabilen iki durum içermelidir. Bu yüzden, P_k, P_{k+1}'de parçalanmış iki eklenmiş durum içermelidir.Bundan dolayı, P_k ’nın herhangi bir sınıfındaki eklenmiş durumlar ayrılabilir ise P_{k+1}, P_k ’den farklı olmalıdır.Yardımcı Teorem 4.6’yla P_{k+1}, P_k ’dan farklıysa P_k ’nın bir “ tam düzeltmesi” olmalıdır. Şöyle ki, iki veya daha fazla alt sınıflar içinde P_k ’nın bir veya daha fazla sınıflarının parçalanmasıyla elde edilmelidir. Sonuç olarak aşağıdakiler söylenebilir:

Teorem 4.4: P_k ve P_{k+1} ’in benzer olduğu durumlarda, P_k ’nın her bir sınıfında komşu durumlar denk olmaz ise, P_{k+1}, P_k ’nın bir tam geliştirilmişi olmalıdır. (Gill, 1962).



Şekil 4.4. Yardımcı Teorem 4.7 için örnekle açıklama.

Örnek olarak A7 sistemi için

$$
\begin{aligned}
P_3:\ & \Sigma_{31} = \{1, 3, 5, 7, 8\} \\
& \Sigma_{32} = \{2,4\} \\
& \Sigma_{33} = \{6\} \\
& \Sigma_{34} = \{9\}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

P_2 ’nin bir “tam geliştirilmişi” ne ve

$$
\begin{aligned}
P_4 :\ & \Sigma_{41} = \{1, 3, 8\} \\
& \Sigma_{42} = \{2, 4\} \\
& \Sigma_{43} = \{5,7\} \\
& \Sigma_{44} = \{6\} \\
& \Sigma_{45} = \{9\}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

P_3 ’ün bir “tam geliştirilmişi” ne sahibiz. Buna rağmen

$$
\begin{aligned}
P_5 :\ & \Sigma_{51} = \{I, 3, 8\} \\
& \Sigma_{52} = \{2, 4\} \\
& \Sigma_{53} = \{5,7\} \\
& \Sigma_{54} = \{6\} \\
& \Sigma_{55} = \{9\}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

P_4 ’e benzer olduğu görülür. Bu yüzden P_4 ’ün her bir sınıfındaki komşu olan durumlar denktir.

4.4. Denklik Bölgüleri

Eğer bu bölünmenin her bir sınıftaki eklenmiş durumlar denk ise, M sistemi için bir k-denklik bölümü M’nin bir denklik bölümü olarak adlandırılır ve $\hat{P}$ ile gösterilir. Bu şartlar altında bölünmelerdeki her bir sınıf bir denklik sınıfı olarak adlandırılır. $\hat{P}$, P_k bölünmesinden daha çok inceltilmiştir. Teorem 3.4 ile, ilk kez, bir bölüntü önceden üretilene benzer üretim oluncaya kadar, k=1,2,3,… için P_k yapılışıyla $\hat{P}$ bulunabilir; bu bölüntü $\hat{P}$ dir.$P_i = P_j$ ’nin benzer bölümler olduğu gerçeğidir ve $|P_i|$,

P_i ’deki sınıfların sayısını göstersin. Bu gösterimi kullanarak önceki sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir (Gill, 1962)

$$\left|P_k\right| \leq \left|P_{k+1}\right| \tag{4.5}$$

Eğer $\left|P_k\right| \leq \left|P_{k+1}\right|$ ise, o zaman;

$$P_k = P_{k+u} = \hat{P}, \quad u=0,1,2,3,\ldots \tag{4.6}$$

Bir verilen n-durumlu sistemdeki tüm durumlar 1-denkse, P_1, n tane durum içeren tekil sınıflardan meydana gelir. Açıkçası, tün n durumlar 1-denk ise, herhangi giriş dizisiyle ilgili olarak onların ilk ardılları da 1-denktir. Sonuç olarak, tüm n durumları 2-denk olmalıdır ve bundan dolayı $P_1 = P_2$ ’ dir. (4.6)’dan, o zaman,

$$P_1 = \hat{P}$$

olur ve tüm n durumları denktir. Bu çeşit sistemler için $f_z(x_v, s_v)$ tüm s_v için aynıdır ve bundan dolayı $f_z(x_v, s_v) = f_z(x_v)$ olur. Tüm durumları denk olan bir sistemin aşikar (bayağı) sistem olduğu söylenebilir. Aksi belirtilmedikçe, ilerideki tartışma yalnızca aşikar olmayan sistemler için, örneğin, en az bir ayrılabilir durum çifti veya en az iki sınıfı olan 1-denk bölünmesi olan sistemler için sınırlandırılır.

Yardımcı Teorem 4.8: $P_k = P_{k-1}$ ise o zaman ;

$$\left|P_k\right| \geq k+1 \tag{4.7}$$

dir (Gill, 1962)

İspat: $P_k = P_{k-1}$ ise o zaman, (4.5) ve (4.6) ile r = 1,2,…, k için $|P_r| > |P_{r-1}|.|P_1| \geq 2$ olduğundan, (4.7) tümevarımla gösterilir.

Yardımcı Teorem 4.9: n-durumlu sistem için $P_k \neq P_{k-1}$ ise, o zaman P_k'nın her bir sınıfındaki durumların sayısı en çok n-k dır (Gill, 1962)

İspat: Yardımcı Teorem 4.8'le, P_k' daki sınıfların sayısı en az k+1 'dir. Bir sınıfın n-k ' dan fazla içerdiğini farz edelim, n-k+1 durumları söylenir. O zaman, P_k'daki her bir öteki sınıfın en az bir durum içermesi gerektiğinden, P_k'daki durumların toplam sayısı en az k+(n-k+1) = n+1'dir. Durumların sayısının toplamı n'yi aşamayacağından, yardımcı teorem çelişki olarak devam eder.

Yardımcı Teorem 4.10: Bir n durumlu sistemde $P_n = P_{n-1}$'dir (Gill, 1962).

İspat: $P_n \neq P_{n-1}$ ise, o zaman, Yardımcı Teorem 4.8'yle $|P_n| \geq n+1$ olur. n-durumlu sistemin k denkliği bölümlerinde sınıfların sayısı n'i aşamayacağından, yardımcı teorem çelişki olarak devam eder. Yardımcı Teroem 4.10' dan ve (4.6) denkleminden aşağıdaki sonuca varılabilir.

Teorem 4.5: n-durumlu sistemde

$$P_{n-1} = \hat{P} \tag{4.8}$$

olur (Gill, 1962).

Böylece, k =1,2,3,… için P_k 'yı oluşturan sırasıyla, n- durumlu sistem için $\hat{P}$ belirleme sürecinde en çok n-1 'de bu tür yapılara ihtiyaç duyulur. Teorem 4.5 'in alternatif formülü aşağıdaki gibidir:

Teoremden Elde Edilen Sonuç 4.1: n-durumlu sistemdeki iki durum (n-1)-denk, (n-1) ayrılabilir ise ayrılabilirlerdir.

P_1 **'in Belirlenmesi:** P_1 aşağıdaki kurallar arasından belirlenebilir:
Durumlar P_1'de komşudurlar ancak ve ancak her bir giriş sembolü için, benzer çıkış sembollerini veriyorlarsa (Gill, 1962).

P_k **($k \geq 1$) 'den** P_{k+1} **'in Belirlenmesi:** Her giriş sembolü ile ilgili olarak, ilk ardılları k-denk durumlarını gösteren P_k 'daki eklenmiş durumlar içinde geçen, her bir giriş sembolü için P_k 'da ki eklenmiş durum çiftleri k-denktir. Böylece eklenmiş durumlar, o zaman, (k+1)-denk P_{k+1} **'**de eklenmiş olmalıdır. Aynı giriş sembolleri ile ilgili ilk ardıllar k-denk durumları gösteren P_k **'**da ki parçalanmış durumlar içinden geçen, aynı giriş sembolleri için P_k **'**da ki eklenmiş durum çiftleri k-ayrılabilir. Böylece eklenmiş durumlar, o zaman, (k+1)-ayrılabilir ve P_{k+1} **'**de parçalanmış olmalıdır. P_k **'**de ki parçalanmış durum çiftleri P_{k+1} **'**de parçalanmış olmalıdır. Bundan dolayı, P_{k+1}**,** alt sınıflar içinde P_k **'**da her bir sınıfın durumlarının bölünmesiyle P_k **'**den belirlenebilir. Öyle ki iki durum aynı alt sınıftadır ancak ve ancak her bir giriş sembolüyle ilgili olan onların ilk ardılları P_k **'**da eklenmiş durumlardır. Sonuç olarak alt sınıflar P_{k+1} **'** in sınıflarıdır. Tek olan alt sınıflar içinden ayrılamayacağından, P_k **'**da görülen tek olanlar kendiliğinden P_{k+1} için tek olarak atanır. (Gill, 1962)
Örnek olarak (4.2) 'de verildiği gibi A7 sisteminin P_3'ü düşünelim. 1, 3 ve 8 durumlarının ilk ardılları α veya β uygulandığında Σ_{32} 'de ve γ uygulandığında Σ_{31} 'de eklenmiştir. 5 ve 7 durumlarının ilk ardılları α uygulandığında Σ_{33} 'de, β uygulandığında Σ_{32} 'de ve γ uygulandığında Σ_{31} 'de eklenmiştir. Sonuçta, {1, 3, 8} ve {5, 7} P_4 'ün sınıflarıdır. Her bir giriş sembolleriyle ilgili olarak 2 ve 4 durumlarının ilk ardılları P_3 'de eklenmiş durumlardır; {2, 4}, bu yüzden P_4 'de bir sınıftır.{6} ve {9} gibi tek olanlar P_4 'de tek gibi gözükür. Sonuçta P_4 bölüntüsü, o zaman, (4.3)' de gösterildiği gibidir.

k=1, 2, 3, … için P_k’nın aralıksız oluşturulması için kriter taslak oluşturabiliriz. Herhangi bir giriş sembolü için, P_k ’ da ki eklenmiş durum çiftlerinin her biri P_k’da ki eklenmiş durumlar içinde olduğunda,

P_k’ nın daha fazla geliştirilmesi mümkün değildir ve bu yüzden $P_k = \hat{P}$’dir. Taslak kriter, o zaman, verilen sistemin denklik bölümlerinin belirlenmesinde yardımcı olur.

4.5. P_k Çizelgeleriyle Bölünme

Geçiş çizelgeleri, diyagram veya matrisin incelenmesiyle verilen sistemin denk bölümlerinin belirlenmesindeki yöntem, bununla beraber en basit durumlarda yine de neredeyse imkansızdır. Bu bölümde P_k çizelgeleri olarak adlandırılan bir serinin oluşturulmasıyla, bölünmenin simetrik olarak uygulanabildiği bir metodu tanımlamamız gerekir.

Çizelge 4.3. A7 için P_1 çizelgesi

		S_{v+1}		
Σ	s_v \ x_v	α	β	γ
a	1	2_b	2_b	5_a
	3	2_b	2_b	5_a
	5	6_b	4_b	3_a
	7	6_b	2_b	8_a
	8	4_b	4_b	7_a
b	2	1_a	4_b	4_b
	4	3_a	2_b	2_b
	6	8_a	9_b	6_b
	9	7_a	9_b	7_a

Çizelge 4.4. A7 için P_2 çizelgesi

		$S_{\nu+1}$		
Σ	$s_\nu \backslash x_\nu$	α	β	γ
a	1	2_b	2_b	5_a
	3	2_b	2_b	5_a
	5	6_b	4_b	3_a
	7	6_b	2_b	8_a
	8	4_b	4_b	7_a
b	2	1_a	4_b	4_b
	4	3_a	2_b	2_b
	6	8_a	9_c	6_b
c	9	7_a	9_c	7_a

Sistem için aşağıdaki değişimlerle verilen sistemin P_k çizelgesi aslında $s_{\nu+1}$ alt çizelgesiyle benzer olur. (1) $\{\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \ldots, \sigma_{ir}\}$ P_k 'da bir sınıfsa, $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \ldots, \sigma_{ir}$ dizileri beraber gruplandırılır. Her bir grup bir kuralla komşu olanlardan ayrılır. Çizelgedeki grupların dizimi ve her bir grup içindeki dizilerin dizimi keyfidir. Aynı gruba ait olan ve bu yüzden bir k-denkliği sınıfını temsil eden diziler eklenmiş diziler olarak adlandırılır. Farklı gruplara ait olan diziler parçalanmış diziler olarak adlandırılır. (2) P_k çizelgesindeki etiketlendirilmiş her bir dizi bir "$\sum$" sütunu eklenir. Bu etiketler keyfidir ve her bir yeni P_k çizelgesinde bağımsız bir şekilde seçilebilir. (3) Girişin ait olduğu P_k çizelgesindeki grubu tanımlayan her bir $s_{\nu+1}$ girişine bir indis atandı. Bu yüzden eğer σ_i dizisi "a" ile etiketlendirilmiş gruptaysa, o zaman her bir $s_{\nu+1}$ girişi σ_i indis "a" olarak gösterildi.

Çizelge 4.3.’ten 4.6. ’ya kadar Şekil 4.3. ’ün A7 sistemi için P_1, P_2, P_3 ve P_4 çizelgeleridir.

P_1 **Çizelgesinin Oluşturulması:** z_ν alt çizelgelerinde aynı olan diziler komşu olması nedeniyle dönüşüm çizelgesinin dizileri düzensizdir. Öyle ki dizilerin her bir grubu 1-denk sınıfa eşlenir ve bu yüzden, P_1 çizelgesindeki eklenmiş bir dizinin grubuna eşlenir. P_1 çizelgesi z_ν alt çizelgesinin silinmesi, kurallarla dizi gruplarının ayrılması,
“$\sum$” sütunu eklenmesi ve yukarıda tarif edildiği gibi $s_{\nu+1}$ girişlerinin indislenmesiyle şimdi oluşturulabilir. Örneklerle açıklamak için, Çizelge 4.2 .ve 4.3. e başvuralım (Gill, 1962).

Çizelge 4.5. A7 için P_3 çizelgesi

		$S_{\nu+1}$		
Σ	s_ν \ x_ν	α	β	γ
a	1	2_b	2_b	5_a
	3	2_b	2_b	5_a
	5	6_c	4_b	3_a
	7	6_c	2_b	8_a
	8	4_b	4_b	7_a
b	2	1_a	4_b	4_b
	4	3_a	2_b	2_b
c	6	8_a	9_d	6_c
d	9	7_a	9_d	7_a

Çizelge 4.6. A7 için P_4 çizelgesi

		$S_{\nu+1}$		
Σ	s_ν \ x_ν	α	β	γ
a	1	2_b	2_b	5_c
	3	2_b	2_b	5_c
	8	4_b	4_b	7_c
b	2	1_a	4_b	4_b
	4	3_a	2_b	2_b
c	5	6_d	4_b	3_a
	7	6_d	2_b	8_a
d	6	8_a	9_e	6_d
e	9	7_e	9_e	7_c

P_k Çizelgesinden P_{k+1} Çizelgesinin Oluşturulması (k$\geq$1): Her bir sütunda, aynı indislerle gösterilen P_k çizelgesinde eklenmiş dizilerin çifti, P_{k+1} çizelgesinde eklenmiş dizilerdir. Aynı sütunda, farklı indislerle gösterilen P_{k+1} çizelgesindeki parçalanmış dizilerdir. P_k çizelgesinde parçalanmış diziler, P_{k+1} çizelgesinde de parçalanmışlardır. Tek bir dizi içeren P_k çizelgesindeki bir grup P_{k+1} çizelgesinde bir tek dizi grubu olarak artakalır. Bundan dolayı, P_{k+1} çizelgesindeki gruplar P_k çizelgesindeki indislerin gözden geçirilmesiyle belirlenebilir. Gruplar kurulduğunda, çizelgesinin kendisi yukarıda şart koşulan formata göre oluşturulabilir. Yukarıdaki kurallar için gerekçe, indislerin atandıkları yöntemden hemen bulunur ve P_k **’**den P_{k+1} belirlemek için kriterden bulunur (Gill, 1962).

Örnek olarak, çizelge 4.5. ’de görülen, A7 için P_3 çizelgesini düşünelim. ”a” grubunda, 1, 3 ve 8 dizileri her bir sütunda aynı indislere sahiptir ve aynı şekilde (l, 3 ve 8 'in farklı formlarındaki indisleri) 5 ve 7 dizileri de. Sonuçta, 1, 3 ve 8 dizileri ve 5 ve 7 dizileri P_4 çizelgesinde iki grup dizi oluştururlar. “b” grubundaki tüm diziler her bir sütunda benzer indislerle gösterilir ve bu yüzden grup, P_4 çizelgesinde bozulmadan kalır. Her birinde bir dizi içeren, “c” ve “d” grupları, P_4 çizelgesine bozulmadan geçirilebilir.

P_1 çizelgesi ve $(k \geq 1)$ P_k çizelgesinden P_{k+1} çizelgesinin oluşturulması için bir yöntem verelim. Bu yöntemle tüm eklenmiş dizilerin her bir sütunda benzer indisler gösterildiği bir çizelge bulunana kadar, k’nın bir biri ardına gelen değerleri için P_k çizelgesi oluşturabiliriz. Bu komşu dizilerin arta kalan girişleri denk durumlar gösterir ve bundan dolayı bu çizelgede arta kalan girişlerin grupları istenilen denklik sınıflarını gösterir. Teorem 4.5. ’le, bu koşul $k \leq$ n-l ’in aynı değerleri için bulunmalıdır. A7 sistemi durum Çizelge 4.6. ’da P_4 çizelgesiyle gösterildi. A7 için denklik bölüntü bu yüzden,

$$P:\{1,3,8\},\{2,4\},\{5,7\},\{6\},\{9\} \tag{4.9}$$

ile verilir. (Şengül, 2006 s.44-60)

BÖLÜM 5
SONLU SİSTEMLERDE DENEMELER

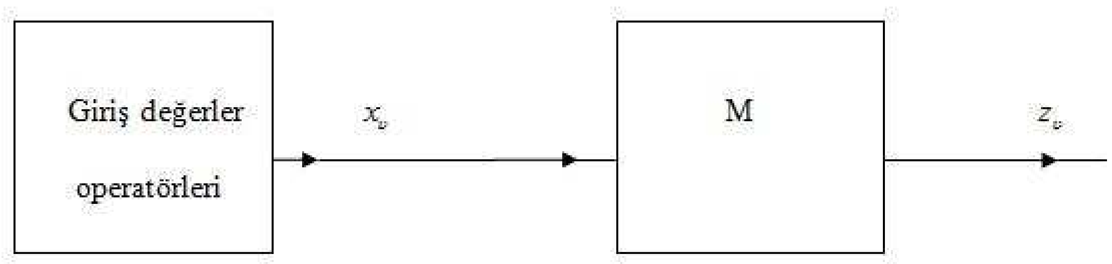
5.1. Denemelerin Sınıflandırılması

Sonlu sisteme giriş dizisinin uygulanması, uygun çıkış dizisinin gözlenmesi, bu gözlemlere dayanarak sonuca varma sürecine deneme (experiment, tecrübe) denir. Denemeler aşağıdaki tanımlarla sınıflandırılırlar.

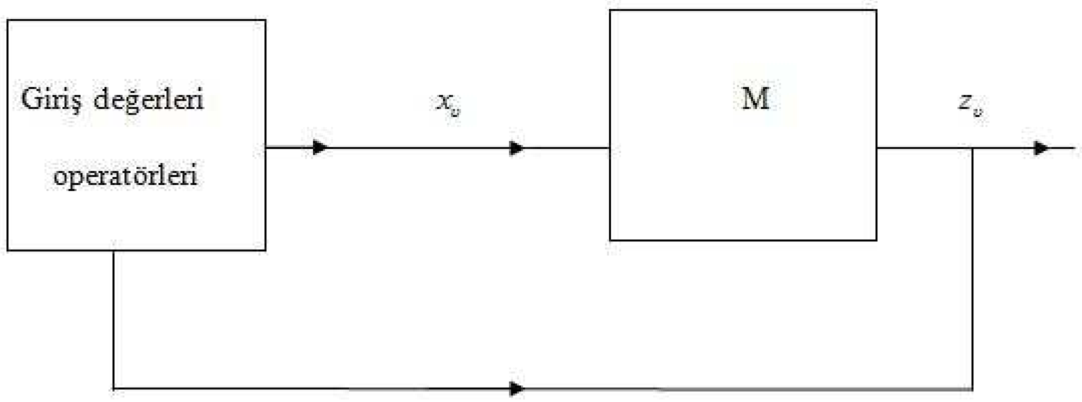
Tanım 5.1: (Koşulsuz denemeler) Sonlu sisteme uygulanan giriş dizisi önceden tamamı ile belirlenmiş ise koşulsuz deneme olarak adlandırılır.

Tanım 5.2 (Koşullu denemeler) Sonlu sisteme uygulanan giriş dizisi bir sonraki alt dizi bir önceki alt dizinin tepkisine uygun biçimde belirlenen iki veya daha çok alt diziden oluşmuş ise bu durumda koşullu deneme adını alır.

Genellikle koşulsuz denemelerin uygulanması koşullu denemelerin uygulanmasına göre daha sadedir. Şöyle ki, koşullu denemeler durumunda bazı ara sonuçların incelenmesi şarttır.



(a)



(b)

Şekil 5.1. (a) Koşulsuz Deney; (b) Koşullu Deney.

Geçiş çizelgeleri aynı olan sonlu sistemler denemenin başlandığı zaman (an) aynı durumda iseler bu sistemlere biri diğerinin kopyasıdır denir.

Denemeler gereken sonlu sistemlerin sayısına (kopyası) göre aşağıdaki gibi ifade edilir:

Tanım 5.3: Sonlu sistemin bir kopyasını gerektiren denemelere sade denemeler denir.

Tanım 5.4: Sonlu sistemin birden çok kopyasını gerektiren denemelere tekrarlı denemeler denir.

Uygulamada incelenen sonlu sistemlerin genelde bir kopyası olduğundan sonlu sistemler teorisinde sade denemelerin daha avantajlı olduğu görülmektedir. Deneme yapıldığı zaman uygulanan giriş dizisini oluşturan sembollerin sayısına denemenin uzunluğu, alt dizilerin sayısına denemenin derecesi, sonlu sistemlerin sayısına ise denemenin tekrarlık derecesi denir. O halde koşulsuz deneme birinci dereceden, koşullu deneme iki veya daha çok dereceden denemelerdir. Sade denemenin tekrarlık derecesi 1 (bir), tekrarlı denemenin tekrarlık derecesi 2 (iki) veya daha çoktur. Uzunluk, derece ve tekrarlılık derecelerine sonlu sistemler teorisinde denemelerin değeri, ölçüleri olarak adlandırılmaktadır.

5.2. Teşhis ve Son Durum Denemeleri

Bu bölümde aşağıdaki iki problem için denemeler incelenmektedir.

Tanım 5.5: (Teşhis Problemi) Geçiş çizelgesi verilmiş olan M sonlu sistemi σ_{i_1}, σ_{i_2}, σ_{i_3},…, σ_{i_m} durumlarından birinde olduğu bellidir. Bu durum bulunmalıdır.

Tanım 5.6: (Son Durum Problemi) Geçiş çizelgesi verilmiş olan M sonlu sistemi σ_{i_1}, σ_{i_2}, σ_{i_3},…, σ_{i_m} durumlarından birinde olduğu bellidir. M sonlu sistemi bu duruma götürülmelidir.

Görüldüğü gibi teşhis problemi M sonlu sisteminin başlangıç durumunu, son durum problemi ise M sonlu sisteminin son durumunun belirlenmesi problemidir.

Teşhis problemini çözen deneye teşhis deneyi, son durum problemini çözen deneye ise son durum deneyi denir. Açıktır ki her bir teşhis deneyi aynı zamanda son durum deneyidir. Çünkü M sisteminin başlangıç durumunu bilerek ve giriş dizisi uygulanarak son durum belirlenebilir. Fakat bunun aksi her zaman doğru değildir.

Uygulamada incelenen sonlu M sisteminin minimal sistem oluğunu düşünülür. Eğer göz önüne alınan M sistemi minimal olmazsa o zaman bilinen minimalleştirme yöntemlerinden birisi uygulanarak sistem minimalleştirilebilir. Sonlu M sisteminin $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \sigma_{i_3},\ldots, \sigma_{i_m}\}$ herhangi koşullu durumlar kümesi olsun. Eğer bu kümenin elemanlarından biri M sisteminin başlangıç durumu olduğu belli ise söz konusu kümeye mümkün başlangıç durumlar kümesi denir ve A(M) ile gösterilir. Bu nedenle A(M) kümesinin durumları da mümkün durumlar olarak adlandırılır. Eğer A(M) bir elemanlı küme ise yani m=1 halinde hem teşhis hem de son durum problemleri doğrudan çözülür. Bu nedenle $m \geq 2$ durumu incelenmektedir.

5.3. İki Durum İçin Teşhis Deneyleri

Bu arada m=2 hali için teşhis problemi incelenmektedir. Böyle problem iki durum için teşhis problemi olarak adlandırılır. n sayıda durumu olan bir M sonlu sistemi göz önüne alalım. A(M) = $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ olsun. Varsayımımıza göre M minimal sonlu sistem olduğundan σ_{i_o} ve σ_{j_o} lar farklı, dolayısıyla (n-1) farklı durumlardır. Bu nedenle $M|\sigma_{i_0}$ ve

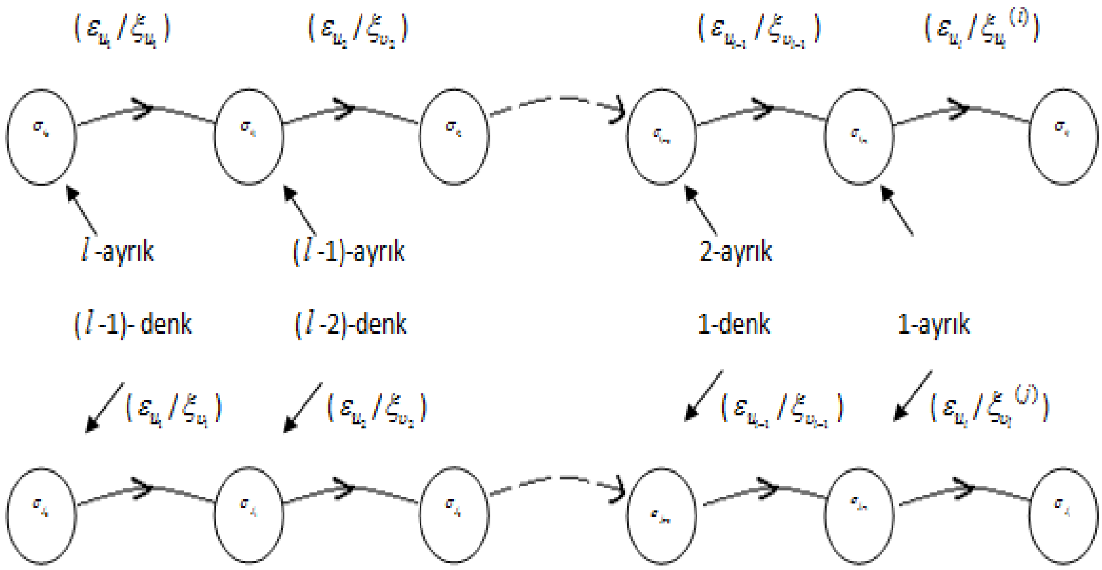
M $\left|\sigma_{j_0}\right.$ 'a uygulandığında farklı çıkış dizileri oluşturan, uzunluğu n-1 veya daha küçük olan giriş dizileri bulunabilir. Böyle giriş dizisi $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ için teşhis dizisi olarak adlandırılır.

Verilmiş M sonlu sistemi için A(M) = $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ halinde iki duruma göre teşhis denemesi aşağıdaki gibidir. M sonlu sistemine $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ için teşhis dizisi uygulanır ve çıkış dizisi gözlemlenir. Bu tepkiye göre başlangıç durumu belirlenir. Tezimizin bu bölümünde iki durum için teşhis dizisinin nasıl kurulacağı araştırılmıştır.

Kabul edelim ki herhangi l için σ_{i_0} ve σ_{j_0} l farklı (l-1)- denk durumlar olsun. O zaman $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ için en kısa teşhis dizisinin uzunluğu l dir. Uzunluğu bu özelliğe sahip l olan $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$' a göre istenilen teşhis dizisi $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ için minimal teşhis dizisi olarak adlandırılır ve $\varepsilon(\sigma_{i_0},\sigma_{j_0})$ ile gösterilir. Eğer σ_{i_0} ve σ_{j_0} l farklı l-1 denk iseler o zaman bu durumlar P_e de bölünmüş P_{e-1} de komşu durumlardır.

Buna göre söz konusu l aşağıdaki gibi bulunabilir. M sonlu sisteminin bilinen yöntemle k-denk bölgüleri oluşturularak σ_{i_0} ve σ_{j_0} ' ların P_k 'de iki farklı sınıflarda olduğu en küçük k belirlenir. Bu k değeri l olarak alınır.

Açıktır ki, M$\left|\sigma_{i_0}\right.$ ve M$\left|\sigma_{j_0}\right.$ 'a $\varepsilon(\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0})$ uygulandığında çıkış dizileri yalnız sonuncusu yani l'inci sembol ile farklılık gösterir. İlk l-1 sayıda sembolleri aynı olacaktır. Bu nedenle her $0 \leq k \leq l$-1 için σ_{i_0} ve σ_{j_0} ' ların $\varepsilon(\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0})$' a göre k'ncı geçişleri (l-k) farklı ve (l-k-1) denk olacaktır. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 5.2. $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ için minimal teşhis dizisi.

Görüldüğü gibi burada $\varepsilon(\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0})$ dizisi $\varepsilon_{u_1}\varepsilon_{u_2}...\varepsilon_{u_l}$ şeklindedir. Şekilde M$|\sigma_{i_0}$ ve M $|\sigma_{j_0}$ sonlu sistemlerinin geçtiği durumlar sırasıyla σ_{i_1}, $\sigma_{i_2}, \dots,$ σ_{i_e} ve σ_{j_1}, σ_{j_2}, σ_{j_e} ile gösterilmiştir. Bu zaman da M$|\sigma_{i_0}$ sonlu sistemi için çıkış dizisi $\xi_{\upsilon_1}\xi_{\upsilon_2}\dots\xi_{\upsilon_l}{}^{(i)}$ biçiminde, M $|\sigma_{j_0}$ sonlu sistemi için çıkış dizisi de $\xi_{\upsilon_1}\xi_{\upsilon_2}\dots\xi_{\upsilon_l}{}^{(j)}$ biçiminde olur.

Şekildeki gösterimleri kullanılırsa σ_{i_0} ve σ_{j_0} l-farklı ve l-1 denk olduğundan $\{\sigma_{i_0}$, $\sigma_{j_0}\}$ için minimal teşhis dizisinin $\varepsilon_{u_1}\varepsilon_{u_2}...\varepsilon_{u_l}$ biçiminde olduğu görülür.

Yukarıdaki yöntem uygulanarak aşağıdaki genel algoritma belirlenebilir.

5.1 Algoritma: σ_{i_0} ve σ_{j_0} M sonlu sisteminin iki durumu olsun. $\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$ için minimal teşhis dizisini belirleyelim.

(1) M için P_k çizelgelerini oluşturalım. σ_{i_0} ve σ_{j_0}'ın P_{e-1} komşu, P_e'de ayrılan durum olan l 'yi bulalım. Farz edelim ki, k=1.

(2) (a) Eğer l-k>0 ise 3. adımına geçiş yapılır.

(b) Eğer l-k=0 ise ε_{u_k}, $\sigma_{i_{k-1}}$ ve $\sigma_{j_{k-1}}$ satılırlarının farklı olduğu sütuna uygun her hangi z $_{\upsilon}$ alt çizelgesine karşılık gelir. Bu durumda $\varepsilon_{u_1}\varepsilon_{u_2}...\varepsilon_{u_l}$ {σ_{i_0}, σ_{j_0}}'a göre minimal teşhis dizisidir.

(**3)** ε_{u_k}, P_{l-k} çizelgesinde $\sigma_{i_{k-1}}$ ve $\sigma_{j_{k-1}}$ satırlarının öyle sütununa uygundur ki, bu sütunda σ_{i_k} ve σ_{j_k} alt indisleri farklı olan σ_{i_k} ve σ_{j_k} kafeslerine sahiptirler. k bir sayı arttırılarak (**2**)'ye dönülür.

Çizelge 5.1. makine A1

	Z_{υ}		$S_{\upsilon+1}$	
S_{υ} \ X_{υ}	α	β	α	β
1	0	1	1	4
2	0	1	1	5
3	0	1	5	1
4	1	1	3	1
5	1	1	2	5

Çizelge 5.2. A1 için P_1 çizelgesi

		S_{v+1}	
Σ	S_v \ X_v	α	β
a	1	1_a	4_b
	2	1_a	5_b
	3	5_b	1_a
b	4	3_a	4_b
	5	2_a	5_b

Çizelge 5.3. A1 için P_2 çizelgesi

		S_{v+1}	
Σ	S_v \ X_v	α	β
a	1	1_a	4_c
	2	1_a	5_c
b	3	5_c	1_a
	4	3_b	4_c
c	5	2_a	5_c

Çizelge 5.4. A1 için P_3 çizelgesi

		S_{v+1}	
Σ	S_v \ X_v	α	β
a	1	1_a	4_c
	2	1_a	5_d
b	3	5_d	1_a
c	4	3_b	4_c
d	5	2_a	5_d

Çizelge 5.5. A1 için P_4 çizelgesi

		S_{v+1}	
Σ	$S_v \backslash X_v$	α	β
a	1	1_a	4_d
b	2	1_a	5_e
c	3	5_e	1_a
d	4	3_c	4_d
e	5	2_b	5_e

Çizelge 5.6. A1’ün durum çiftleri için minimum teşhis dizisi

σ_{i_0}	σ_{j_0}	$\varepsilon(\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0})$	$\xi^{(i)}_{v_1}$	$\xi^{(j)}_{v_1}$
1	2	$\beta\alpha\alpha\alpha$	1	0
1	3	$\alpha\alpha$	0	1
1	4	α	0	1
1	5	α	0	1
2	3	$\alpha\alpha$	0	1
2	4	α	0	1
2	5	α	0	1
3	4	α	0	1
3	5	α	0	1
4	5	$\alpha\alpha\alpha$	1	0

BÖLÜM 6
DENEMELER TEORİSİNDE GRAF UYGULAMALARI

6.1. Geçişler Ağacı

Verilen M sonlu sisteminin durumlar kümesinin istenilen sonlu alt kümesi σ-küme olarak adlandırılır. Bir elemandan oluşan σ-kümeye sade σ-küme denir. İki veya daha çok aynı elemana sahip σ-küme tekrarlı σ-küme, bütün elemanları aynı olan σ-küme ise homojen σ-küme olarak adlandırılır.

Mümkün başlangıç durumu kümesinin elemanları sayısı m olan sonlu sistemi göz önüne alalım. Böyle sonlu sistemin bütün elemanlarının sayısı m olan σ-kümelerinin kümesine A-grup denir. A-gruptaki σ-kümelerinin sayısına grubun çözümü denir. Açıktır ki, A-grubun çözümü m sayısından büyük olmayacaktır. A-gurubunu oluşturan σ-kümelerin hepsi sade ise A-grubu sade, σ-kümelerin hepsi homojen ise A-gruba homojen grup denir.

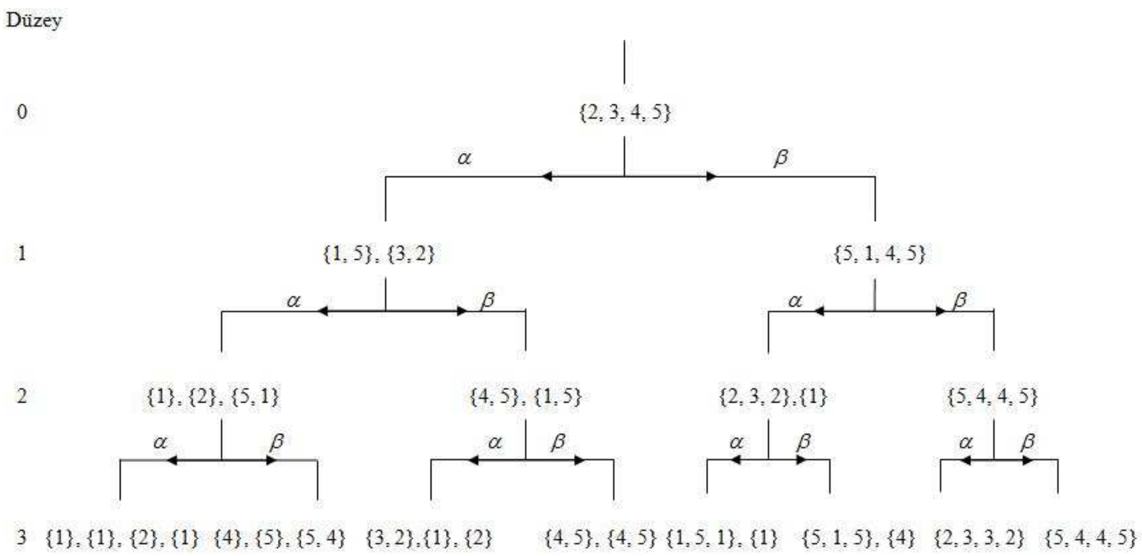
Farz edelim ki, G, g_1, g_2, …, g_r σ-kümelerini içine alan A-gruptur. G-nin $\xi_{i_1}\ \xi_{i_2}\ \ldots \xi_{i_l}$ - geçişi aşağıdaki gibi kurulan başka bir A- grup olarak adlandırılır.

(1) g_i kümesini $\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}...\varepsilon_{i_l}$ - giriş dizisine uygun aynı çıkışlara sahip iki durumu aynı kümede olan alt kümelere ayıralım. Her alt kümeye σ-küme gibi bakalım ve bütün böyle σ-kümelerin oluşturduğu A-grubu G$'$ ile gösterelim.

(2) G$'$ kümesindeki her bir durumu onun $\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}...\varepsilon_{i_l}$ geçişi işe değiştirelim. Bu işlemler sonucu elde edilen A-gruba, G-nin ε_{i_k} geçişi denir.

Açıktır ki, k'ıncı düzey p^k sayıda dalı içine alır. k'ncı dalı k-ıncı düzeyde (k=1, 2, …, l) olan ve her bir (k+1)'ıncı dalını k-ıncı dalını doğuran (k=1, 2, …, l-1) l-sayıda dallar dizisi ağaçta yol olarak adlanır. l-ye yolun uzunluğu denir. Bu yolda k-ıncı dal ε_{i_k} ise (k=1, 2, …, l), o zaman bu yol $\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}...\varepsilon_{i_l}$ dizisini oluşturur.

M ve A(M) için yapılan her bir geçiş ağacı A-grup ile bağlıdır. Başlangıç dalın bağlı olduğu A-grup A(M) dir. Eğer b dalı G, A-grup ile bağlı ise, o zaman b –dalının doğurduğu ε_i dalı G-nin ε_i -geçişi ile bağlı olacaktır. Böylece k-ıncı düzeyin (k$\geq$1) dallarının bağlı olduğu A- grup (k-1)'inci düzeyin bağlı olduğu A-grup ile belirlenebilir. Eğer yolun sonuncu dalı G ile bağlı ise o zaman, ağaçtaki uygun yol G, A grubuna gider.



Şekil 6.1. A1 için Geçişler Ağacı ve {2, 3, 4, 5} mümkün durumlar kümesi.

Yukarıda incelenen kuralları dikkate alırsak M ve A(M)' ye göre yapılan geçişler ağacı için aşağıdaki sonuçların doğru olduğu görülür.

1) Farz edelim ki, A(M) ile G_0, A-gurubu ile işaret edilmiş olsun ve G_k ağaçtaki yolun k-ıncı dalına bağlı olan A-grup olsun. O halde

(a) G_k'nın çözümü ya G_{k-1}'in çözümüne eşittir ya da G_{k-1}'in çözümünden büyüktür.

(b) Eğer G_{k-1} tekrarlı σ-kümeyi içine alıyorsa o zaman G_k'de tekrarlı σ-kümeyi de içine alır.

2) A(M)= { σ_{i_1}, σ_{i_2}, …, σ_{i_m} }ve G , ağaçta ε giriş dizisinin belirttiği yolun gittiği A-grup olsun. Farz edelim ki, σ_{i_k}', ε-ye göre σ_{i_k}'nın geçişi olsun. O halde;

(a) σ'_{i_1}, σ'_{i_2}, …, σ'_{i_m} -ler G'nin σ-kümelerini içine aldığı m sayıda durumlardır

(b) σ'_{i_k} ve σ'_{i_e} -lerin G'nin farklı σ-kümelerinin içinde olması için gerek yeter koşul σ'_{i_k} ve σ'_{i_e} 'lerin ε-giriş dizisine uygun farklı çıkış dizilerine sahip olmasıdır.

3) b_1 ve b_2 iki aynı A-grubuna bağlı dallar olsun. O zaman G, A-grubuna bağlı dalın b_1 dalından l sayıda-daldan sonra ulaşmak için gerek ve yeterli koşul G, A-grubuna bağlı dalın b_2 dalından l sayıda daldan sonra ulaşılmasının mümkün olmasıdır.

6.2. Teşhis Ağacı

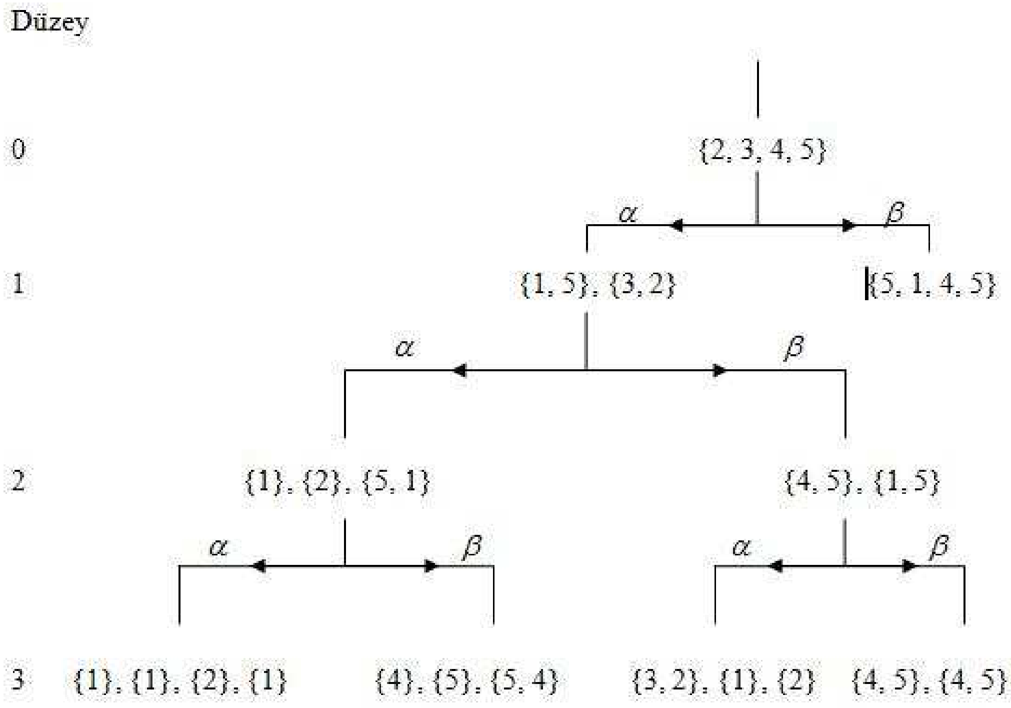
Önceki bölümde incelenen geçişler ağacı sonsuz olarak devam ettirilebilir. Bu nedenle denemeler teorisinde her zaman uygulanması mümkün olmaz. Bu eksikliği gidermek için geçişler ağacının 'kesilmiş' ağaç kavramının verilmesi gereklidir. Bunun için geçişler ağacında dallar dizisinin sonuçlanmasını sağlayan kurallardan yararlanabiliriz. Böyle ağaçlardan birisi aşağıdaki gibi tanımlanan teşhis ağacıdır.

Tanım 6.1: Aşağıdaki koşulların biri sağlandığında k'ıncı düzeyin b-dalının sonuncu olduğu hesap edilen geçişteki ağacına teşhis ağacı denir.

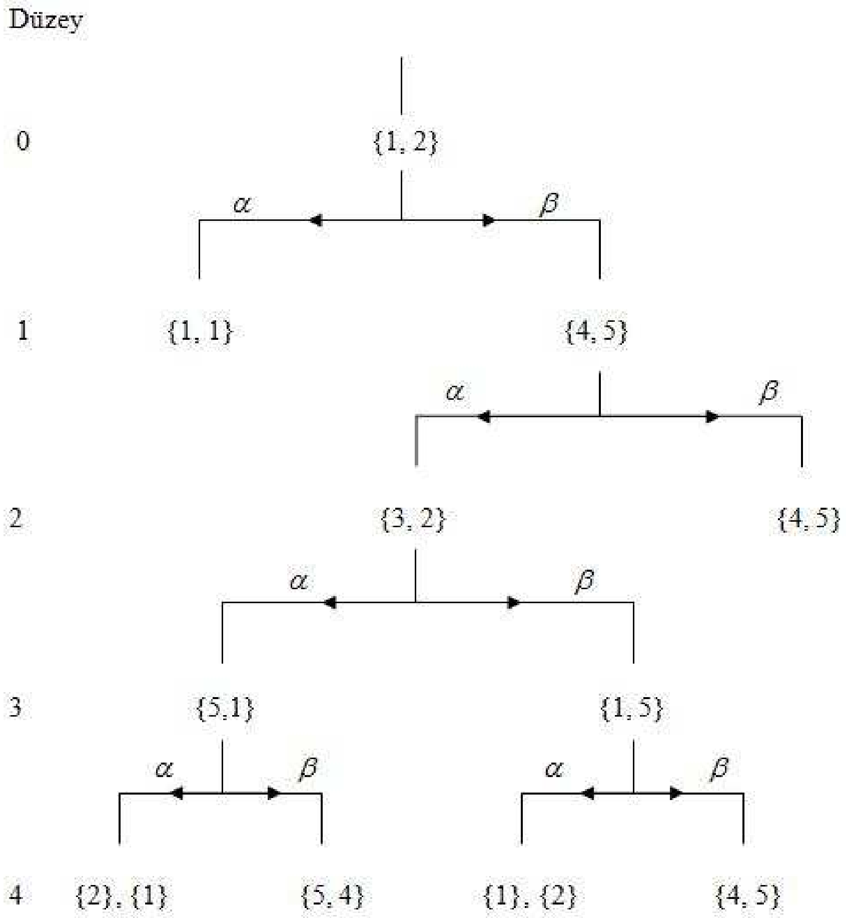
(1) b ile bağlı olan A-grubu tekrarlı σ-kümeyi içine alır.

(2) b ile bağlı olan A-grubu k-dan önce gelen düzeyde herhangi bir dal ile bağlıdır.

(3) k düzeyinin sade A-grubu ile bağlı dalı olsun.(bu b-dalının kendisi de olabililir.)



Şekil 6.2. A1 için teşhis ağacı ve {2, 3, 4, 5}mümkün durumlar kümesi.



Şekil 6.3. A1 için Teşhis Ağacı ve {1, 2} mümkün durumlar kümesi.

Şekil 6.2.' ye bakıldığında 0. düzey başlangıç dalı {2, 3, 4, 5} mümkün başlangıç durumlar kümesi ile başlamaktadır. Durumlar kümesine $\alpha\beta$ teşhis dizisi uygulanarak sonraki dallar belirlenmiştir. {2, 3, 4, 5 } kümesine β uygulandığında 1. düzeyde (1) kuralıyla sonlanan {5, 1, 4, 5} A-grubu ile bağlıdır. {2, 3, 4, 5} kümesine α uygulandığında ise bu 3 kuraldan herhangi birine uygun bir A-grup olmadığından dal sonlanmamıştır. 1. düzeydeki {1, 5}, {3, 2} A-grubuna α ve β uygulandığında yine bu 3 kurala uyan A-grup bulunmadığından 2.düzeyde dallar sonlanmamıştır.3.düzeyde ise (3) kuralına uyan bir dal sade A-grup ile sonlanmıştır.

Şekil 5.5.'deki teşhis ağacı 0.düzeyde başlangıç dalı {1, 2} mümkün başlangıç durumlar kümesi ile başlamaktadır. $\alpha\beta$ teşhis dizisi uygulanarak sonraki dallar belirlenmiştir.{1, 2} kümesine α uygulandığında 1.düzeyde (1) kuralına uyan {1, 1}

A-grup ile sonlanmıştır. {1, 2} kümesine β uygulandığında {4, 5} A-grubu bulunmuştur. Bu A-grup herhangi bir kurala uymadığından bu dal sonlanmamıştır. {4, 5} kümesine β uygulandığında 2.düzeyde (2) kuralına göre sonlanan {4, 5} A-grubu ile bağlıdır. α uygulandığında ise bulunan {3,2} A-grubu herhangi bir kurala uymadığından dal sonlanmamıştır. 3.düzeyde de yine (3) kurala uyan herhangi bir A-grup olmadığından dallar sonlanmamıştır. 3.düzeydeki {5, 1} A-grubuna α ve β uygulandığında 4. düzeyde (3) kuralına göre sonlanan {2}, {1} A-grup ile bağlıdır. Yine 3.düzeydeki {1, 5} kümesine α ve β uygulandığında 4. düzeyde (3) kuralına göre sonlanan {1}, {2} sade A-grubu ile bağlıdır.

Teşhisler ağacında sonuncu dalı sade A-grubu ile bağlı olan yola teşhis yolu denir.

M, A(M) = $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \sigma_{i_3}, \ldots, \sigma_{i_m}\}$ verilmiş olsun. $M|\sigma_{i_1}$, $M|\sigma_{i_2}$, …,$M|\sigma_{i_m}$ durumları için m sayıda farklı çıkış dizileri oluşturan giriş dizisine M ve A(M) için teşhis dizisi denir.

Bu tanımlardan ve daha önceki yorumlardan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.1: M ve A(M) için oluşturulan teşhis ağacında teşhis yoluyla elde edilen giriş dizisi M ve A(M) için teşhis dizisidir.

M ve A(M) için oluşturulan teşhis dizilerinin en kısa olanına M ve A(M) için minimal teşhis dizisi denir.

Geçişler ağacında bulunan fakat (1) ve (2) kurallarına göre teşhis ağacında bulunmayan yollara M ve A(M) için oluşturulan teşhis ağacının kesik yolları deni**r.**

Teorem 6.2: M ve A(M) için oluşturulan teşhis ağacında kesik yollar minimal teşhis dizilerini belirleyemezler.

İspat: Eğer yol (1) kuralına göre kesilmiş ise, o halde söz konusu yol tekrarlı σ-kümeyi içine alan A-gruba bağlı olan b dalı ile sonuçlanır.

Bu durumda geçişler ağacında b dalından geçen yol tekrarlı σ-kümeyi içine alan A- gruba ulaşır.

Sonuçta böyle bir yol sade A-gruba ulaşamaz ve bu nedenle teşhis yolu olamaz. Şimdi (2) yoluyla sonuçlanan kesik yolu göz önüne alalım. Farz edelim ki bu yol j’ inci düzeyde G, A-grubu ile bağlı olan b_j dalında sonuçlansın.

Bu durumda i<j olan i’ inci düzeyin G-grubuna bağlı b_i dalı vardır. O halde açıktır ki, eğer geçişler ağacında sade A-gruba bağlı b_j -den l sayıda dallardan sonra ulaşılırsa, o zaman sade A-gruba b_i’ den geçen l sayıda dal yardımıyla ulaşılır. Sonuçta geçişler ağacında teşhis yolu b_j dalından geçerse, b_i dalından da geçmek zorundadır. i<j olduğundan sonuncu yol öncekinden daha kısa olacaktır. Böylece, geçişler ağacı b_j dalından geçen teşhis yoluna sahipse, o halde bu yol minimal teşhis dizisini belirleyemez.

Teorem 6.3: M sonlu sistemi ve mümkün başlangıç durumlar kümesi A(M) için oluşturulmuş teşhis ağacında, teşhis yollarının dizileri kümesi M ve A(M) için bütün minimal teşhis dizileri kümesidir.

İspat: Bir önceki teoreme göre teşhis ağacı ile verilen teşhis yolları kümesi M ve A(M) için bütün minimal teşhis dizileri ile elde edilen yolları içine alır. (3) kuralına göre bütün teşhis yollarının uzunlukları aynı olduğundan onların hepsi minimaldirler. Eğer teşhis ağçözümü acında teşhis yollarına rastlanmışsa, o halde böyle yolların hepsi (1) ve (2) kurallarına göre sona erer ve bu nedenle bir önceki teoreme göre M ve A(M) için teşhis dizisi yoktur.

Elde edilen sonuçlardan yararlanılarak m sayıda durum için teşhis probleminin çözümü için aşağıdaki algoritma oluşturulur**.**

Algoritma 6.1: M ve mümkün başlangıç durumlar kümesi A(M) = { σ_{i_1}, σ_{i_2}, …, σ_{i_m} } verilmiş olsun.

M sistemin başlangıç durumunun bulunması gereklidir.

(a) M ve A(M) için teşhis ağacı oluşturulur.

(b) Bu ağaçla elde edilen herhangi minimal teşhis dizisi bulunur.

(c) Bu diziye uygun $M|\sigma_{i_1}$, $M|\sigma_{i_2}$, …,$M|\sigma_{i_m}$ çıkışları izlenir.

(d) M sonlu sisteminin söz konusu minimal teşhis dizisine uygun çıkış dizisi gözlenir.

(c) adımında gözlenen tepki ile aynı olan σ_{i_k} durumu M sisteminin başlangıç durumudur.

Sonlu sistem için güncel örnekler verilebilir. Bu örneklerden bir tanesi aşağıdaki gibidir.

Bu örneklerde X giriş alfabesi, Z çıkış alfabesi ve S de uygun durum kümesi olarak sıralansın. Sonlu sistem için iyi bir örnekte aşağıdaki gibidir.

Örnek 6.1: Bir organizma uyarıcı tarafından pozitif ve negatif olmak üzere iki şekilde uyarılsın. Organizma negatif uyarıcıya tepki göstermesin. Pozitif uyarıcıya tepki göstersin. (Bir tepki göstersin, bir göstermesin)

X={Pozitif uyarıcı, Negatif uyarıcı}

Z={Tepki var, Tepki yok}

S={Son pozitif uyarıcıya karşı tepkili, Son pozitif uyarıcıya karşı tepkisiz}

Eğer durum son uyarıcıya karşı tepkili, giriş pozitif uyarıcı ise çıkışı da tepkisiz olur (Son uyarıcı olmadığından).

Diğer durumda “son uyarıcıya tepkisiz” dir. Bu durumdaysa girişi “pozitif uyarıcı” ise çıkışı “Tepkili” dir. Ve diğer durum “Son uyarıcıya karşı tepkilidir.”

Pozitif uyarıcı $\Rightarrow \varepsilon_1$

Negatif uyarıcı $\Rightarrow \varepsilon_2$

Tepki var $\Rightarrow \xi_1$

Tepki yok $\Rightarrow \xi_2$

Son pozitif uyarıcıya karşı tepkili $\Rightarrow \sigma_1$

Son pozitif uyarıcıya karşı tepkisiz $\Rightarrow \sigma_2$

$f_z(\varepsilon_1, \sigma_1) = \xi_2$

$f_s(\varepsilon_1, \sigma_1) = \sigma_2$

$f_z(\varepsilon_2, \sigma_1) = \xi_2$

$f_s(\varepsilon_2, \sigma_1) = \sigma_1$

$f_z(\varepsilon_1, \sigma_2) = \xi_1$

$f_s(\varepsilon_1, \sigma_2) = \sigma_1$

$f_z(\varepsilon_2, \sigma_2) = \xi_2$

$f_z(\varepsilon_2, \sigma_2) = \sigma_2$

Burada giriş ve durum değerlerinin uygulamasıyla f_z ve f_s fonksiyonları bulunmuştur. Burada f_z çıkış değerlerini gösterirken f_s de sistemin sonraki alacağı değerleri göstermektedir.

KAYNAKLAR

Aksoy Y., 1996. *Bole Cebiri Ve Lojik Devre Sentezi,* Yıldız Teknik Üniversitesi. İstanbul. 219-272 s.

Anderson A., 2004. *Discrete Mathematics with Combinatorics.* New Jersey.

Gill A., 1962. *Introduction to The Theory of Finite-State Machines,* McGraw-Hill. Company. London. (3th chap.) 49-62, 67-78, 166-179 p.

Johnsonbaugh P. R., 1997. *Discrete Mathematics,* (4th ed.). Intenational ed..—upper Saddle River:Prentice Hall International. 516-528 p.

Minez Z. G., 1999. Diskret Sistemlerin Minimalleştirilmesi, Dumlupınar Kütahya Üniversitesi, , (Yüksek Lisans Tezi). Kütahya Üniversitesi 7-60.

Yablonsky S. V., 1989. *Introduction toDiscrete Mathematics, Translated from Russion,* Mr, Publishhers Moscow. 44-49 p.

Weisstein E. W., (February 13,2006). Dynamical Systems. Retrived February 13, 2006, from http://mathworld.wolfram.com/DynamicalSystem.html

Burden R. L. ve Faires., J. D. 2001. *Numerical Analysis* (7th ed.). Brooks/Cole, Pacific Grove, Australia. 498–516p, 611–613 p.

Owen G., 1995. *Game Theory* (3th ed.) Department of Mathematics Novel Postgroduate School Montery, California. (8th chap.) 164-172 p.

Harary F., 1969. *Graf Theory, Universty of Michigan*. Cambrige, Massachusetts. (4th chap.) 32-40 p.

Şengül E., 2006. P_2 Sistemi Fonksiyonlarının Normal Formlarının Minimalleştirme Yöntemleri (Yüksek Lisans Tezi) Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi. Çanakkale.

Nesin A., 2003. *Matematik Dünyası*. 11 Kasım 2007, http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/?konu=CizgelerKuramı.

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER:

Adı Soyadı: Ayşe ÇAPKIN

Doğum Yeri: Manisa

Doğum Tarihi:10.01.1983

EĞİTİM DURUMU:

Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Yüksek Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

İŞ DENEYİMİ:

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl: Fen Bilimleri Dershaneleri, 2008- ….

İLETİŞİM:

E-posta Adresi: aysecapkinn@hotmail.com