T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU ARALIKTA SÜREKSİZLİĞE SAHİP STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ VE TERS PROBLEMLER

Abdullah ERGÜN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2006

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Eşref Orucov

Üye : Prof. Dr. Rauf Amirov

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nihat Yıldız

Üye :

Üye :

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

25../01/2006

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Halil Gürsoy

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 01.01.1994 tarihinde C.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SONLU ARALIKTA SÜREKSİZLİĞE SAHİP
STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ VE TERS PROBLEMLER

Abdullah ERGÜN
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Rauf Amirov

Bu çalışma ikinci mertebeden diferansiyel operatörlerin spektral teorisine aittir. Sunduğumuz çalışmada Bir aralıkta süreksizliğe sahip Sturm-Liouville operatörleri ve ters problemi incelenmiştir.

Bu çalışma Sturm-Liouville operatörleri için inverse (ters) problemlerinin çözümünde önem taşımaktadır. Çalışmanın en önemli sonuçlarından biride budur.

ANAHTAR KELİMELER: Operatör, Spektrum, Inverse Problem,
Sturm-Liouville operatör

SUMMARY

MSc Thesis

STURM-LIOUVİLLE OPERATORS WITH DISCONTINUOITIES INSIDE A FINITE INTERVAL AND INVERSE PROBLEMS

Abdullah ERGÜN

Cumhuriyet Üniversity
Graduate School of Natural
and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Rauf AMİROV

This study belongs to spectral theories of second order differential operators. Sturm-Liouville operators with discontinuoities and inverse problems have been investigated.

The results of this study will be important for Sturm-Liouville operators.

KEY WORDS: Operator, Spectrum,Trace, Sturm-Liouville Operator,
Inverse Problem

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof.Dr. Rauf Amirov'a ve tüm emeği geçenlere içten teşekkürlerimi sunarım.

GİRİŞ

Bu çalışmanın ana konusu $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n, ...$ dizilerinin farklı sınır koşullarıyla verilen

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \qquad (0 \le x \le b < \infty)$$

tipinde bir Sturm-Liouville operatörünün iki spektrumu olmaları için gerekli ve yeterli koşul bulmaktır.

Burada $q(x)$, $(0, b'), b' < b$ aralığı üzerinde integrallenebilir gerçel değerli bir fonksiyondur.

Bu alanda tüm teorinin gelişimini başlatan sonuç V.A.Ambartsumyan tarafından bulunmuş ve 1929'da yayımlanmıştır.

Ambartsumyan şu teoremi ispat etmiştir.

Teorem: $q(x)$ $[0, \pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \qquad (0 \le x \le \pi) \tag{0.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{0.2}$$

probleminin özdeğerlerini $\lambda_0, \lambda_1, ...$ ile belirtelim. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ 'dır.

Bundan sonraki önemli çalışma Borg tarafından yapılmıştır. Borg'un asıl sonucu aşağıdaki teoremlerle ifade edilebilir.

(0.1) denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{0.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{0.4}$$

sınır değer koşulları ile verilen problemin özdeğerlerini $\lambda_0, \lambda_1, ...$ (burada h ve H sonlu gerçel sayılardır.) (0.1) denklemi ve

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \quad (h_1 \ne h) \tag{0.5}$$

sınır değer koşulları ile verilen problemin özdeğerlerini $\mu_0, \mu_1, ...$ ile gösterelim.

Bu durumda $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ $(n=0,1,...)$ dizileri, h, h_1, H sayılarını ve $q(x)$ fonksiyonunu tek olarak belirler.

Borg'un çalışması, iki spektruma göre diferansiyel denklemin kurulması için etkin yöntemler içermektedir. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (0.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1 \qquad \varphi'(0,\lambda)=h \tag{0.6}$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümü

$\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$

fonksiyonları ise bu operatörün λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları olsun.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi_n^2(x,\lambda_n)\,dx \tag{0.7}$$

sayılarına verilen operatörün normalleştirici sayıları

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonuna ise bu operatörün spektral fonksiyonu denir. V.A. Marchenko yukarıda bahsettiğimiz makalede Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörünün spektral fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M. G. Krein çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ $(n=0,1,...)$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat bu çalışmada verilen gerekli ve yeterli koşul $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanarak vermiştir.

1951 yılında I.M.Gel'fand ve B.M.Levitan $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Bu kişiler ayrıca Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem veren bir yöntem önerdiler.

Marchenko, hemen hemen M.G.Krein'in makalesine benzer bir dizi çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalarda özel olarak iki spektruma göre klasik Sturm-Liouville operatörünün kurulması için etkin metotlar vermiştir.

Ters problemler teorisi kuantum mekaniği problemlerinde de önemlidir.

Yapılan bu çalışma dört kısımdan oluşmaktadır. Giriş kısmında Sturm-Liouville operatörler s için ters probleminin gelişme tarihinden bahsedilmektedir.

Çalışmanın ikinci kısmında Sturm-Liouville operatörünün bazı temel özellikleri ve operatör hakkında ön bilgiler verilmiştir. Üçüncü kısım üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde α_n Normalleştirici sayıları λ_n ve μ_n spektrumları yardımıyla ifade edilmiştir. İkinci bölümde α_n sayıları için asimptotik formül verilmiştir. Üçüncü bölümde ise ters Sturm-Liouville Problemi incelenmiştir.

Çalışmanın dördüncü kısmında aralıkta süreksizliğe sahip Sturm-Liouville sınır değer probleminin çözümü alınarak spektrum için özellikler öğrenilmiş ve ters problem incelenmiştir.

1.BÖLÜM

1.1. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Klasik ters Sturm-Liouville probleminde $q(x)$ reel fonksiyon olmak üzere,

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x) \tag{1.1.1}$$

$$y'(0)-hy(0)=0 \tag{1.1.2}$$

$$y'(1)+Hy(1)=0 \tag{1.1.3}$$

ve burada h ve H farklı iki reel sayıdır.

Eğer bu sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümü $y(x,\lambda)\neq 0$ ise λ ' ya özdeğer ve $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna (1.1.1)-(1.1.3) probleminin λ 'ya karşılık gelen özfonksiyon adı verilir.

Teorem 1.1.1. L operatorünün iki farklı λ_1,λ_2 özdeğerine karşılık gelen $y_1(x),y_2(x)$ özfonksiyonları ortogonaldir. Yani,

$$\int_a^b y_1(x,\lambda_1)y_2(x,\lambda_2)dx=0\ ,\ \lambda_1\neq\lambda_2 \tag{1.1.4}$$

dır.

İspat: Hipoteze göre,

$$-y_1''+q(x)y_1=\lambda_1 y_1,\quad -y_2''+q(x)y_2=\lambda_2 y_2$$

eşitlikleri sağlanır. Buna göre, birinci eşitlik y_2 ile ikinci ise $-y_1$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$-y_1''y_2+y_2''y_1=(\lambda_1-\lambda_2)y_1y_2 \tag{1.1.5}$$

eşitliği alınır.

$$-y_1''y_2+y_2''y_1=(y_2'y_1-y_2y_1')'$$

olduğundan (1.1.5) eşitliği,

$$(y_2'y_1-y_2y_1')'=(\lambda_1-\lambda_2)y_1y_2$$

şeklinde alınır. Son eşitliğin her iki tarafı $(0,1)$ aralığında integrallenir ve (1.1.2),(1.1.3) sınır koşulları göz önünde tutulursa

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx=0$$

eşitliği bulunur.

Lemma 1.1.2. L operatörünün özdeğerleri reeldir.

İspat: $q(x)$ fonksiyonu ve h,H sayıları reel olduğundan, $\lambda_1=u+iv,\ v\neq 0$ sayısı bir özdeğer ise $\overline{\lambda}_1=u-iv$ sayısıda bir özdeğer olur. Ayrıca λ_1'e karşılık gelen özfonksiyon $y_1(x,\lambda_1)$ ise $\overline{\lambda}_1$'e karşılık gelen özfonksiyon $\overline{y}_1(x,\lambda_1)$ dır. Dolayısıyla teorem 1.1.1'den,

$$0=\int_0^1 y_1(x,\lambda_1)\overline{y}_1(x,\lambda_1)dx=\int_0^1 |y_1(x,\lambda_1)|^2\,dx$$

alınır. Bu ise $y_1(x,\lambda_1)=0$ çelişkisine yol açar. Bu nedenle $v=0$ olmalıdır.

Tanım 1.1.3. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında belli bir $v(z_0)$ komşuluğunda diferansiyellenebilirse $f(z)$'ye z_0 noktasında analitik veya holomorf fonksiyon denir.

Teorem 1.1.4. Eğer $q(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise $a\leq x\leq b$ aralığında herhangi bir α için (1.1.1) denkleminin $\phi(x,\lambda)$ tek çözümü vardır öyleki;

$$\phi(a,\lambda)=\sin\alpha \text{ ve } \phi'(a,\lambda)=-\cos\alpha$$

dır. Bununla birlikte her fikse edilmiş $x\in[a,b]$ için $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonu λ'nın tam fonksiyonudur.

İspat:

$$\phi_0(x,\lambda)=\sin\alpha-(x-a)\cos\alpha$$

$$\phi_n(x,\lambda)=\phi_0(x,\lambda)+\int_a^x (q(t)-\lambda)\phi_{n-1}(t,\lambda)(x-t)dt\ ,\ n=1,2,,... \tag{1.1.6}$$

olarak tanımlayalım.Burada $q(x)$ sürekli ve $x\in[a,b]$ için $|q(x)|\leq M$ ve

$|\phi_0(x,\lambda)|\leq K\ ,\ |\lambda|\leq N$

(1.1.6) ifadesinden

$$\phi_n(x,\lambda)-\phi_{n-1}(x,\lambda)=\int_a^x (q(t)-\lambda)(\phi_{n-1}(t,\lambda)-\phi_{n-2}(t,\lambda))(x-t)dt \qquad (1.1.7)$$

eşitliği buradan

$$|\phi_n(x,\lambda)-\phi_{n-1}(x,\lambda)|\le (M+N)(b-a)\int_a^x |\phi_{n-1}(t,\lambda)-\phi_{n-2}(t,\lambda)|dt$$

eşitsizliği alınır. Bu durumda

$n=1$ için

$$|\phi_1(x,\lambda)-\phi_0(x,\lambda)|\le \int_a^x (M+N)K(x-t)dt$$

$$=\frac{1}{2}K(M+N)(x-a)^2$$

$n=2$ için

$$|\phi_2(x,\lambda)-\phi_1(x,\lambda)|\le \frac{K(M+N)^2(b-a)}{2}\int_a^x (t-a)^2dt$$

$$=\frac{K(M+N)^2(b-a)(x-a)^3}{3!}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan genelleştirme yapılırsa

$$|\phi_n(x,\lambda)-\phi_{n-1}(x,\lambda)|\le \frac{K(M+N)^n(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

alınır. Şimdi

$$\phi(x,\lambda)=\phi_0(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}[\phi_n(x,\lambda)-\phi_{n-1}(x,\lambda)]$$

serisi tanımlanırsa, bu seri, $|\lambda|\le N$ olan λ'lar için ve $x\in[a,b]$ olan x'ler için yakınsaktır. (1.1.7) eşitliğinden $n\ge 2$ için

$$\phi_n'(x,\lambda)-\phi_{n-1}'(x,\lambda)=\int_a^x (q(t)-\lambda)(\phi_{n-1}(t,\lambda)-\phi_{n-2}(t,\lambda))dt$$

ve

$$\phi_n''(x,\lambda)-\phi_{n-1}''(x,\lambda)=(q(t)-\lambda)(\phi_{n-1}(x,\lambda)-\phi_{n-2}(x,\lambda))$$

ifadeleri bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\phi''(x,\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\phi_n''(x,\lambda)-\phi_{n-1}''(x,\lambda)\right)\\ &= \phi_1''(x,\lambda)-\phi_0''(x,\lambda)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\phi_n''(x,\lambda)-\phi_{n-1}''(x,\lambda)\right)\\ &= I_1+I_2\end{aligned}$$

alınır. Burada

$$I_1=\phi_1''(x,\lambda)-\phi_0''(x,\lambda)=(q(x)-\lambda)\phi_0(x,\lambda)$$

ve

$$I_2=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\phi_n''(x,\lambda)-\phi_{n-1}''(x,\lambda)\right)=(q(x)-\lambda)\sum_{n=2}^{\infty}\ \left(\phi_{n-1}(x,\lambda)-\phi_{n-2}(x,\lambda)\right)$$

şeklinde alınır. Böylece

$$\begin{aligned}\phi''(x,\lambda) &= I_1+I_2\\ &= (q(x)-\lambda)\left(\phi_0(x,\lambda)+\sum_{n=2}^{\infty}\ \left(\phi_{n-1}(x,\lambda)-\phi_{n-2}(x,\lambda)\right)\right)\\ &= (q(x)-\lambda)\left(\phi_0(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}\ \left(\phi_n(x,\lambda)-\phi_{n-1}(x,\lambda)\right)\right)\\ &= (q(x)-\lambda)\phi(x,\lambda)\end{aligned}$$

bulunur ve $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1.1) denklemini sağlar. Başlangıç koşulları için;

$$\phi_n(x,\lambda)=\phi_0(x,\lambda)+\int_a^x (q(t)-\lambda)\phi_{n-1}(t,\lambda)(x-t)dt$$

$$\phi_n'(x,\lambda)=\phi_0'(x,\lambda)+\int_a^x (q(t)-\lambda)\phi_{n-1}(t,\lambda)dt$$

alınırsa Her $n\in \mathrm{N}$ için

$$\phi_n(a,\lambda)=\phi_0(a,\lambda) \text{ ve } \phi_n'(a,\lambda)=\phi_0'(a,\lambda)$$

dır. Bu durumda

$$\phi(a,\lambda)=\phi_0(a,\lambda)=\sin\alpha$$
$$\phi'(a,\lambda)=\phi_0'(a,\lambda)=-\cos\alpha$$

ifadesi alınır. Ayrıca $\phi_n(x,\lambda)$ fonksiyonu ve yakınsak $\phi(x,\lambda)$ serisi λ'nın tam fonksiyonudur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

(1.1.1) denkleminin $\phi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümleri

$$\phi(0,\lambda)=1 \text{ ve } \phi'(0,\lambda)=h$$

ve

$$\psi(0,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \text{ ve } \psi'(0,\lambda)=\frac{h}{\sqrt{1+h^2}}$$

başlangıç şartlarını sağladığı gösterilebilir. Burada $h\to\infty$ için $\psi(0,\lambda)=0$ ve $\psi'(0,\lambda)=1$' dir.

Lemma 1.1.5. $\lambda=(w\pi)^2$ olsun. Bu durumda

$$\phi(x,\lambda)=\cos(w\pi x)+\frac{h}{w\pi}\sin(w\pi x)+\frac{1}{w\pi}\int_0^x \sin(w\pi(x-r))q(r)\phi(r,\lambda)dr \qquad (1.1.8)$$

ve

$$\psi(x,\lambda)=\frac{1}{w\pi}\sin(w\pi x)+\frac{1}{w\pi}\int_0^x \sin(w\pi(x-r))q(r)\psi(r,\lambda)dr \qquad (1.1.9)$$

alınır.

İspat: $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1.1)'i sağlamak üzere

$$q(x)\phi(x,\lambda)=\phi''(x,\lambda)+\lambda\phi(x,\lambda)$$

vardır. Her iki taraf $\sin(w\pi(x-r))$ ile çarpılıp $[0,x]$ aralığında r değişkenine göre integrallenirse

$$\int_0^x \sin(w\pi(x-r))q(r)\phi(r,\lambda)dr=\int_0^x \sin(w\pi(x-r))\phi''(r,\lambda)dr$$
$$+\lambda\int_0^x \sin(w\pi(x-r))\phi(r,\lambda)dr$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci integral için

$$\int_0^x \sin(w\pi(x-r))\phi''(r,\lambda)dr = -h\sin(w\pi x) + w\pi\int_0^x \cos(w\pi(x-r))\phi'(r,\lambda)dr$$

$$= -h\sin(w\pi x) + w\pi\left[\phi(x,\lambda) - \cos(w\pi x) - w\pi\int_0^x \sin(w\pi(x-r))\phi(r,\lambda)dr\right]$$

$$= -h\sin(w\pi x) + w\pi\phi(x,\lambda) - w\pi\cos(w\pi x) - (w\pi)^2\int_0^x \sin(w\pi(x-r))\phi(r,\lambda)dr$$

eşitliği sağlanır. Böylece

$$\int_0^x \sin(w\pi(x-r))q(r)\phi(r,\lambda)dr = -h\sin(w\pi x) + w\pi\phi(x,\lambda) - w\pi\cos(w\pi x)$$

ifadesi alınır. Bu durumda (1.1.8) ifadesi alınır. (1.1.9) eşitliği benzer şekilde gösterilir.

Lemma 1.1.6. $w\pi = \sigma + it$ olsun. Bu durumda $w_0 > 0$ olmak üzere $|w\pi| > w_0$'dır ve

$$\phi(x,\lambda) = O\left(e^{|t|x}\right)$$

$$\psi(x,\lambda) = O\left(\frac{e^{|t|x}}{|w\pi|}\right) \tag{1.1.10}$$

$$\phi(x,\lambda) = \cos(w\pi x) + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|w\pi|}\right),$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin(w\pi x)}{w\pi} + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|w\pi|^2}\right), \tag{1.1.11}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: $\phi(x,\lambda) = e^{|t|x} f(x)$ olmak üzere (1.1.8) eşitliğinden

$$f(x) = \left(\cos(w\pi x) + \frac{h}{w\pi}\sin(w\pi x)\right)e^{-|t|x} + \frac{1}{w\pi}\int_0^x \sin(w\pi(x-r))e^{-|t|(x-r)}q(r)f(r)dr$$

alınır. $\mu = \max_{0\le x\le 1}|f(x)|$ olsun.

$$\mu \le 1 + \frac{|h|}{|w\pi|} + \frac{\mu}{|w\pi|}\int_0^x |q(r)dr|$$

ifadesinden

$$\mu \le \left(1+\frac{|h|}{|w\pi|}\right)\left(1-\frac{1}{|w\pi|}\int_0^x |q(r)|dr\right)^{-1}$$

olur ve payda pozitifdir.

Bu ise $|w\pi| > \int_0^1 |q(r)|dr$ olduğunu verir. Bununla birlikte $\phi(x,\lambda)$ için (1.1.10) alınır.

Benzer şekilde $\psi(x,\lambda)$ için (1.1.9) kullanılarak gösterilir. (1.1.8) ve (1.1.9)'in sağ tarafından integral alıp (1.1.10) kullanılırsa (1.1.11)'nin doğruluğu gösterilebilir.

1.2. ÖZDEĞERLER İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

Bu kısımda özdeğerlerin varlığından yararlanılarak özdeğerler için asimptotik formüler gösterilecektir. Bunun için aşağıdaki durumlar incelenecektir.

1. $h \ne \infty$ ve $H \ne \infty$

2. $h = \infty$ ve $H \ne \infty$

3. $h = \infty$ ve $H = \infty$

I. $h \ne \infty$ ve $H \ne \infty$ olsun.

Herhangi bir λ için $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1.2) koşulunu sağlasın. Bununla birlikte (1.1.3) eşitliği ile özdeğerler bulunabilir. Lemma 1.1.2'den özdeğerler reeldir. Bu durumda (1.1.11) eşitliğinden

$$\phi(x,\lambda) = \cos(w\pi x) + O\left(\frac{1}{|w|}\right) \tag{1.2.1}$$

(1.2.1) ve (1.1.8) eşitlikleri kullanılarak

$$\phi'(x,\lambda) = -w\pi \sin(w\pi x) + O(1) \tag{1.2.2}$$

eşitliğini göstermek zor değildir.

(1.1.3) eşitliğinde (1.2.1) ve (1.2.2) yerlerine yazılırsa

$$-w\pi \sin(w\pi) + O(1) = 0 \tag{1.2.3}$$

denklemi alınır.

w'nin büyük tamsayı değerlerinde çözüm vardır. Böylece özdeğerlerin varlığı gösterilir. (1.2.3)eşitliğinin n. mertebeden kökü w_n olsun. λ özdeğeri

$$\Delta(\lambda)=\phi'(1,\lambda)+H\phi(1,\lambda)=0$$

denklemini sağlar. Burada $\lambda=(w\pi)^2$ alınırsa $\Delta(\lambda)=\Delta_1(\lambda)$ için (1.1.8) w'nin tam fonksiyonudur. (1.2.1) ve (1.2.2) asimptotik formüllerinden $\sin(w\pi)\neq 0$ için

$$\Delta_1(w)=-w\pi\sin(w\pi)\left(1+O\left(\frac{1}{|w|}\right)\right) \tag{1.2.4}$$

alınır. W uzayı olarak $r=n+\frac{1}{2}$ yarıçaplı D_r dairesi alınacak olursa burada n bir doğal sayıdır. Rouché teoremi ve (1.2.4) asimptotik formülünden $w\sin(w\pi)$ fonksiyonunun D_r'nin sınırındaki $(\Delta_1(\lambda))$ sıfırlarının sayısı $2(n+1)$ dir. $\Delta_1(\lambda)$ fonksiyonu yalnız pozitif köklere sahiptir. Pozitif kökler özdeğerlerle ilişkilidir ve $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ w_k şeklinde $(n+1)$ tane özdeğere sahiptir. Buradan

$$w_n=n+O(1) \tag{1.2.5}$$

alınır. $w_n=m_n+O(1)$ olsun. Burada $m_n\neq n$ dir.

Böylece w_n'nin n+1 tane özdeğeri s_k $(k=0,1,\ldots)$ olarak alınır. Diğer taraftan $\left(m_n+\frac{1}{2}\right)$ yarıçaplı dairede $\Delta_1(\lambda)$'nin sıfırları $2(m_n+1)$ olmalıdır ve s_k $(k=0,1,\ldots)$ özdeğerleri için $(m_n+1)\neq n+1$ olmalıdır. Böylece (1.2.5) ispatlanır.

$w_n=n+\delta_n$ alınırsa (1.2.5) eşitliğinden

$$(n+\delta_n)\sin(\delta_n\pi)+O(1)=0$$

formu alınır. Bununla birlikte

$$\sin(\delta_n\pi)=O(n^{-1}) \text{ ve } \delta_n=O(n^{-1})$$

ifadesi alınır. Böylece büyük n'ler için (1.2.3)'ün kökleri

$$w_n=n+O(n^{-1}) \tag{1.2.6}$$

şeklindedir. $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1.8) eşitliği ile verilen ifadesi (1.1.3) koşulunda yerine yazılırsa

$$(-w\pi + B)\sin(w\pi) + A\cos(w\pi) = 0 \tag{1.2.7}$$

eşitliği alınır. Burada

$$A = h + H + \int_0^1 \left(\cos(w\pi r) - \frac{H}{w\pi}\sin(w\pi r)\right) q(r)\phi(r,\lambda)dr,$$

$$B = \frac{Hh}{w\pi} + \int_0^1 \left(\sin(w\pi r) + \frac{H}{w\pi}\cos(w\pi r)\right) q(r)\phi(r,\lambda)dr.$$

şeklindedir. (1.2.1) eşitliğinden,

$$A = h + H + \frac{1}{2}\int_0^1 q(r)dr + \int_0^1 q(r)\cos(2w\pi r)dr + O\left(\frac{1}{w}\right)$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^1 q(r)\sin(2w\pi r)dr + O\left(\frac{1}{w}\right)$$

ve $q(x)$ türevlenebilir fonksiyon olduğundan

$$\int_0^1 q(r)\cos(2w\pi r)dr = O\left(\frac{1}{w}\right)$$

$$\int_0^1 q(r)\sin(2w\pi r)dr = O\left(\frac{1}{w}\right)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$A = h + H + \frac{1}{2}\int_0^1 q(r)dr = O\left(\frac{1}{w}\right)$$

$$B = O\left(\frac{1}{w}\right)$$

olur. Dolayısıyla (1.2.7) eşitliği

$$\tan(w\pi) = \frac{h + H + \frac{\overline{q}}{2} + O\left(\frac{1}{w}\right)}{w\pi + O\left(\frac{1}{w}\right)}$$

formunda yazılabilir. Burada $w_n = n + \delta_n$ alınırsa

$$\tan(\delta_n \pi) = \frac{h + H + \frac{\overline{q}}{2}}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\delta_n = \frac{h + H + \frac{\overline{q}}{2}}{n\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

alınır. Dolayısıyla

$$\lambda_n = (w_n \pi)^2 = (n\pi)^2 + \overline{q} + 2(h + H) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.2.8}$$

asimptotik ifadesi elde edilir.

II. $h = \infty$ ve $H \neq \infty$ olsun.

λ için $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1.2) koşulunu sağlasın Bu durumda (1.1.3) koşulunu sağlayan $\psi(x,\lambda)$ için özdeğerler bulunabilir. (1.1.9) eşitliğinden

$$\psi'(x,\lambda) = \cos(w\pi x) + \int \cos(w\pi(x - r))q(r)\psi(x,\lambda)dr$$

alınır ve (1.1.3) koşulundan

$$\cos(w\pi) + \int_0^1 \cos(w\pi(1 - r))q(r)\psi(r,\lambda)dr +$$
$$+ H\left(\frac{\sin(w\pi)}{w\pi} + \frac{1}{w\pi}\int_0^1 \sin(w\pi(1 - r))q(r)\psi(r,\lambda)d\right) = 0$$

elde edilir. $\psi(x,\lambda)$ için (1.1.11) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\cos(w\pi) + \frac{1}{w\pi}\int_0^1 \cos(w\pi(1 - r))q(r)\sin(w\pi r)dr + \\ &+ H\frac{\sin(w\pi)}{w\pi} + O\left(\frac{1}{w^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

alınır. Bu eşitlikte bulunan integral için

$$\int_0^1 \cos(w\pi(1-r))q(r)\sin(w\pi r)dr$$

$$= \int_0^1 [\cos(w\pi)\cos(w\pi r)+\sin(w\pi)\sin(w\pi r)]q(r)\sin(w\pi r)dr$$

$$= \frac{\cos(w\pi)}{2}\int_0^1 q(r)\sin(2w\pi r)dr + \frac{\sin(w\pi)}{2}\int_0^1 q(r)(1-\cos(2w\pi r))dr$$

$$= \frac{\sin(w\pi)}{2}\int_0^1 q(r)dr + O\left(\frac{1}{w}\right)$$

eşitliği sağlanır, dolayısıyla (1.2.9) eşitliği

$$\cos(w\pi)+\frac{\sin(w\pi)}{w\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 q(r)dr + H\right)+O\left(\frac{1}{w^2}\right)=0$$

formunda veya

$$H_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 q(r)dr + H$$

olmak üzere

$$\cos(w\pi)+H_1\frac{\sin(w\pi)}{w\pi}+O\left(\frac{1}{w^2}\right)=0 \qquad (1.2.10)$$

alınır. Yeterince büyük w'ler için (1.2.10) denkleminin n tane kökünün olduğu görülebilir. Burada $n \in N$ dir.

Eğer $w_n = \left(n-\frac{1}{2}\right)+\delta_n$ alınırsa (1.2.10) eşitliği

$$\cot\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)+\delta_n\right)\pi = -\frac{H_1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklinde alınır. Burada

$$\delta_n = \frac{H_1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur. Böylece

$$w_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{H_1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olduğu alınır. Dolayısıyla $\overline{q} = \int_0^1 q(r)dr$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_n = (w_n\pi)^2 &= \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + 2H_1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + \overline{q} + 2H + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \qquad (1.2.11)$$

asimptotik ifadesi bulunur.

III. $h = \infty$ ve $H = \infty$ olsun.

(1.1.2) ve (1.1.3) sınır şartları $y(0) = y'(1) = 0$ formunda yazılırsa $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.1.2) eşitliğini sağlar. Bu durumda $\psi(1,\lambda) = 0$ dır. (1.2.8) eşitliğinden

$$\sin(w\pi) + \int_0^1 \sin(w\pi(1-r))q(r)\psi(r,\lambda)dr = 0$$

veya

$$\sin(w\pi)\left(1 + \int_0^1 \cos(w\pi r)q(r)\psi(r,\lambda)dr\right) - \cos(w\pi)\int_0^1 \sin(w\pi r)q(r)\psi(r,\lambda)dr = 0$$

ifadesi alınır. $\psi(x,\lambda)$ için (1.1.11) eşitliğinden

$$\sin(w\pi) - \frac{\cos(w\pi)}{2w\pi}\int_0^1 q(r)dr + O\left(\frac{1}{w^2}\right) = 0 \qquad (1.2.12)$$

elde edilir. Büyük w için (1.2.12)'nin $n \in N$ tane kökü görülebilir. Bununla birlikte $w_n = n + \delta_n$ alınırsa (1.2.12) eşitliğnden

$$\tan(n + \delta_n)\pi = \frac{\overline{q}}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\delta_n = \frac{\overline{q}}{2n\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ifadesi alınır. Burada $\overline{q} = \int_0^1 q(r)dr$ ve $w_n = n + \frac{\overline{q}}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ve böylece

$$\lambda_n = (w_n\pi)^2 = (n\pi)^2 + \overline{q} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.2.13}$$

asimptotik ifadesi elde edilir.

2.BÖLÜM

REGÜLER STURM-LİOUVİLLE DENKLEMLERİNİN İKİ SPEKTRUMA GÖRE BELİRLENMESİ

2.1. Normalleştirici Sayıların Spektrumlarla İfade Edilmesi

$q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli integrallenebilir fonksiyon ve h_1, h_2, H ve $h_1 \neq h_2$ gerçel sayılar olmak üzere,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad 0 < x < \pi \tag{2.1.1}$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2.1.2}$$

$$y'(0) - h_2 y(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2.1.3}$$

(2.1.1)-(2.1.2) ve (2.1.1)-(2.1.3) sınır değer problemlerini ele alalım.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (2.1.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1 \quad \varphi'(0,\pi) = h_1 \tag{2.1.4}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü ve $\psi(x,\lambda)$ ile (2.1.1) denkleminin

$$\Psi(0,\lambda) = 1 \quad \Psi'(0,\pi) = h_2 \tag{2.1.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. (2.1.1)-(2.1.2), (2.1.1)-(2.1.3) sınır değer problemlerinin öz değerleri sırasıyla $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ve $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ şeklinde olsun.

O zaman (2.1.1)-(2.1.2) probleminin $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ öz değerleri ile (2.1.1)-(2.1.3) probleminin $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ özdeğerlerinin sırasıyla

$$\phi_1(\lambda) = \varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) \tag{2.1.6}$$

$$\phi_2(\lambda) = \psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) \tag{2.1.7}$$

fonksiyonlarının sıfırlarıyla çakıştığı açıktır.

$$\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$$

fonksiyonları (2.1.1)-(2.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır ve onların normları

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi_n(x)\,dx \qquad n=0,1,2,... \tag{2.1.8}$$

şeklinde verilir.

$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...$ sayılarına (2.1.1)-(2.1.2) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları denir.

Bu bölümde $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,...$ ve $\mu_0,\mu_1,\mu_2,...$ iki spektrum yardımıyla $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...$ sayılarını hesaplamak için formül verilir. Bu sonuca ulaşmak için

$$f(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{2.1.9}$$

fonksiyonundan yararlanılır. Öyle ki $f(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$f'(\pi,\lambda)+Hf(x,\lambda)=0 \tag{2.1.10}$$

eşitliğini sağlasın.

O halde

$$m(\lambda)=\frac{\psi'(\pi,\lambda)+H\psi(\pi,\lambda)}{\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)} \tag{2.1.11}$$

olduğu elde edilir.

Bu formülden görüldüğü gibi $m(\lambda)$ fonksiyonu meromorf fonksiyondur ve kutup noktaları ile sıfır yerleri sırasıyla (2.1.1)-(2.1.2) ve (2.1.1)-(2.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakışır.

Diğer taraftan

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi f(x,\lambda_1)f(x,\lambda_2)\,dx =$$

$$=\int_0^\pi\left[-f''(x,\lambda_1)f(x,\lambda_2)+f(x,\lambda_1)f''(x,\lambda_2)\right]dx$$

$$=f'(0,\lambda_1)f(0,\lambda_2)-f(0,\lambda_1)f'(0,\lambda_2)=(h_1-h_2)\left[m(\lambda_1)-m(\lambda_1)\right]$$

olduğundan son eşitlikte eğer

$$\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = \bar{\lambda}$$

yazılırsa

$$\int_0^{\pi} \left| f(x,\lambda) \right|^2 dx = (h_1 - h_2) \frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} \tag{2.1.12}$$

eşitliği bulunur. Buradan açıktır ki eğer $h_1 > h_2$ $(h_1 < h_2)$ ise o zaman $m(\lambda)$ fonksiyonu üst yarı düzlemi kendisine dönüştürür (alt yarı düzlemi kendisine dönüştürür.) Bu yüzden sıfır yerleri ve kutup noktaları yani (2.1.1)-(2.1.2) ve (2.1.1)-(2.1.3) sınır değer problemlerinin öz değerleri sıralıdır.

Şimdi aşağıdaki integral göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^{\pi} f(x,\lambda) \varphi(x,\lambda_n) dx &= \\ &= \int_0^{\pi} \left[-f''(x,\lambda) \varphi(x,\lambda_n) + f(x,\lambda) \varphi''(x,\lambda_n) \right] dx \\ &= f'(0,\lambda) \varphi(0,\lambda_n) - f(0,\lambda) \varphi'(0,\lambda_n) = (h_2 - h_1)\end{aligned}$$

olur. Buradan $\lambda \to \lambda_n$ iken

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \varphi^2(x,\lambda_n) dx = -(h_2 - h_1) \frac{\phi_1'(\lambda_n)}{\phi_2'(\lambda_n)} \tag{2.1.13}$$

formülü elde edilir.

Bu formül bir sonraki işlemlerde önemli role sahiptir. $\phi_1(\lambda)$ ve $\phi_2(\lambda)$ fonksiyonlarının özellikleri kullanılırsa

$$\alpha_n = \frac{h_2 - h_1}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{2.1.14}$$

eşitşiği alınır.

Burada $\prod$ sembolü sonsuz çarpımda $k = n$'inci teriminin mevcut olmadığını gösterir. Bilindiği gibi $\cos\sqrt{\lambda}x$ fonksiyonunu $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarına dönüştüren sırasıyla $K_{h_1}(x,t)$ ve $K_{h_2}(x,t)$ fonksiyonları mevcuttur.

Bu yüzden

$$\phi_1(\lambda) = -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + \left[H + K_{h_1}(\pi,\pi)\right]\cos\sqrt{\lambda}\pi$$
$$+\int_0^\pi \left[HK_{h_1}(\pi,t) + \left.\frac{\partial K_{h_1}(\pi,t)}{\partial x}\right|_{x=\pi} \right]\cos\sqrt{\lambda}t dt \tag{2.1.15}$$

$$\phi_2(\lambda) = -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + \left[H + K_{h_2}(\pi,\pi)\right]\cos\sqrt{\lambda}\pi$$
$$+\int_0^\pi \left[HK_{h_2}(\pi,t) + \left.\frac{\partial K_{h_2}(\pi,t)}{\partial x}\right|_{x=\pi} \right]\cos\sqrt{\lambda}t dt \tag{2.1.15'}$$

olduğu alınır.

Buradan açıktır ki $\phi_1(\lambda)$ ve $\phi_2(\lambda)$ fonksiyonları $\frac{1}{2}$. mertebeden tam fonksiyonlardır o yüzden de bu fonksiyonlar kendi sıfırları ile sabit farkıyla tek olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla bu fonksiyonlar

$$\phi_1(\lambda) = C_1 \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$$

ve

$$\phi_2(\lambda) = C_2 \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_n}\right)$$

şeklinde yazılır. Burada C_1 ve C_2 sabitlerdir.

$\phi_1(\lambda)$ ve $\phi_2(\lambda)$ fonksiyonlarının ifadelerinden ve (2.1.13) eşitliğinden yararlanılırsa

$$\alpha_n = (h_2 - h_1)\frac{C_1 \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)}{C_2 \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_n}\right)}\frac{1}{\lambda_n} =$$
$$= (h_2 - h_1)\frac{C_1}{C_2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n}\frac{1}{\mu_n - \lambda_n} \tag{2.1.16}$$

elde edilir.

(2.1.14) eşitliğini elde etmek için

$$\frac{C_1}{C_2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_k}=1 \tag{2.1.17}$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için (2.1.15) ve (2.1.15') eşitliklerinden

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\phi_1(\lambda)}{\phi_2(\lambda)}=1$$

olduğu görülür. Bu yüzden,

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{C_1}{C_2}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right)^{-1}=\\&=\frac{C_1}{C_2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\mu_k-\lambda}=1\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

olur. Şimdi,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\mu_k-\lambda}=\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_k-\mu_k}{\mu_k-\lambda}\right)=1 \tag{2.1.19}$$

eşitliğini gösterelim. λ_k ve μ_k asimptotik formüllerden

$$\lambda_k=k^2+O(1) \text{ ve } \mu_k=k^2+O(1)$$

$\lambda_k-\mu_k=0(1)$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_k-\mu_k}{\mu_k-\lambda}\right|$$

serisi λ değişkenine göre $-\infty<\lambda\leq-1$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Bu yüzden (2.1.11) sonsuz çarpımı λ'ya göre $-\infty<\lambda\leq-1$ aralığında düzgün yakınsaktır ve bu sonsuz çarpımda $\lambda\to-\infty$ olduğunda limite geçilebilir.

Buradan

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_k-\mu_k}{\mu_k-\lambda}\right)=1$$

olduğu elde edilir. Bu formül ve (2.1.18)'den (2.1.17) formülü elde edilir. Dolayısıyla (2.1.14) eşitliği doğrudur.

2.2. α_n sayıları için asimptotik formül

$q(x)$ verilen fonksiyon h_1, h_2, H gerçel sayılar olmak üzere (2.1.1)-(2.1.2) ve (2.1.1)-(2.1.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri sırasıyla

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \text{ ve } \mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$$

şeklinde ve

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{2.2.1}$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a'_0}{n} + \frac{a'_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{2.2.2}$$

asimptotik formüller doğru olsun. Burada
olur. Buradan

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[h_1 + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right], \qquad a'_0 = \frac{1}{\pi}\left[h_2 + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right]$$

şeklindedir. Bu yüzden

$$h_1 - h_2 = \pi(a_0 - a'_0) \tag{2.2.3}$$

olur.

(2.2.1) ve (2.2.2) eşitliklerinden

$$\lambda_n = n^2 + 2a_0 + \frac{c_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{2.2.4}$$

$$\mu_n = n^2 + 2a'_0 + \frac{c'_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{2.2.5}$$

elde edilir. Burada

$$c_0 = a_0^2 + 2a_1, \quad c'_0 = a_0'^2 + 2a'_1 \tag{2.2.6}$$

$\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ ve $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ dizileri verilen denklemin iki farklı spektrumudur ve bir önceki alt bölümde verildiği gibi (2.2.1)-(2.2.2) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları

$$\alpha_n = \frac{h_2 - h_1}{\mu_n - \lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n}\right) \tag{2.2.7}$$

formülleriyle verilir.

Burada (2.2.3) eşitliğinden görüldüğü gibi $h_2 - h_1$ farkı bilinendir. (2.2.7) formülünde λ_n ve μ_n sayılarının asimptotik formülerinden yararlanarak α_n sayıları için asimptotik formül elde edilir.

$$\Psi(\lambda_n) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n}\right) \tag{2.2.8}$$

sonsuz çarpımıyla verilen fonksiyonu alınır. Buradan

$$\ln\Psi(\lambda_n) = \sum_{k=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n}\right)$$

$k \neq n$ olmak üzere n'nin büyük değerleri için

$$\left|\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n}\right| < \frac{C}{n}$$

eşitsizliği elde edilir. (Burada farklı sabitler C ile gösterilecektir.)

Bu yüzden

$$\ln\Psi(\lambda_n) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p}\left(\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n}\right)^p\right] \tag{2.2.9}$$

Lemma 2.2.1. $|\mu_k - \lambda_k| \leq a \quad (k = 0,1,...)$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n}\right|^p \leq \begin{cases} C\dfrac{\ln n}{n}, & p = 1, \\ C\dfrac{a^p}{n^p}, & p \geq 2. \end{cases} \tag{2.2.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $|\mu_k - \lambda_k| \leq a \quad (k = 0,1,...)$ eşitsizliğinden

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n}\right|^p \leq a^p \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|\mu_k - \lambda_n|}$$

alınır. Son eşitsizliğin sağ tarafında ki toplamı integral toplamı olarak düşünülürse bu toplam

$$\int_0^{n-1} \frac{dx}{\left(\mu_n - x^2\right)^p} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 - \mu_n\right)^p}$$

integralleri toplamı şeklinde yazılır. (2.2.10) eşitsizliğini ispatlamak için yukarıdaki integrallerden yararlanalırsa,

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 - \mu_n\right)^p} \le \frac{C}{n^p} \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{\left(x - \sqrt{\mu_n}\right)^p} = \frac{C}{n^p} \qquad (p > 1)$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 - \mu_n\right)^p} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{\mu_n}}{x + \sqrt{\mu_n}} \right| \Bigg|_{x=n+1}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad (p = 1)$$

$$\int_0^{n-1} \frac{dx}{\left(\mu_n - x^2\right)^p} \le \frac{C}{n^p} \int_0^{n-1} \frac{dx}{\left(\sqrt{\mu_n} - x\right)^p} = \begin{cases} O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right), & (p = 1), \\ O\left(\dfrac{1}{n^p}\right), & (p > 1). \end{cases}$$

elde edilir. Buradan (2.2.10) eşitsizliğinin doğruluğu açıktır. Dolayısıyla lemmanın ispatı tamamlanır.

Lemma 2.2.1'den yararlanılarak,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \left(\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right)^p \right| \le \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right|^p \le \\ &\le C \sum_{p=3}^{\infty} \frac{a^p}{n^p} = \frac{Ca^3}{n^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p}{n^p} = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

değerlendirmesi yapılabilir. (2.2.9) formülü ve (2.2.11) eşitsizliğinden yararlanılırsa $\ln \psi(\lambda_n)$ için,

$$\ln \Psi(\lambda_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{2.2.12}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi ise (2.2.12) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamların n'nin büyük değerleri için davranışları incelenebilir. (2.2.12) eşitliğinin sağ tarafında birinci toplamın davranışını öğrenmek için (2.2.4) ve (2.2.5) asimptotik formüllerinden yararlanılır.

Bunun için (2.2.12) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci toplam

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k-\mu_k}{\mu_k-\lambda_n}=\frac{\lambda_0-\mu_0}{\mu_0-\lambda_n}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\lambda_k-\mu_k-2\left(a_0-a_0'\right)\right]\left[\frac{1}{\mu_k-\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n}\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\left(a_0-a_0'\right)}{\mu_k-\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\lambda_k-\mu_k-2\left(a_0-a_0'\right)\right] \tag{2.2.13}$$

$$=S_0+S_1+2\left(a_0-a_0'\right)S_2+S_3$$

şeklinde yazılabilir.

(2.2.1) ve (2.2.2) asimptotik formüllerinden yararlanılırsa

$$S_0=\frac{\lambda_0-\mu_0}{\mu_0-\lambda_n}=\frac{\mu_0-\lambda_0}{\lambda_n\left(1-\frac{\mu_0}{\lambda_n}\right)}=\frac{\mu_0-\lambda_0}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

ve

$$S_3=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_k-\lambda_k-2\left(a_0'-a_0\right)\right]-\frac{1}{\lambda_n}\left[\mu_n-\lambda_n-2\left(a_0'-a_0\right)\right]=\frac{A}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

elde edilir. Burada

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu_k-\lambda_k-2\left(a_0'-a_0\right)\right]$$

şeklindedir.

Şimdi

$$S_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\left[\lambda_k-\mu_k-2\left(a_0-a_0'\right)\right]-\left(c_0-c_0'\right)}{\lambda_n\left(\mu_k-\lambda_n\right)}+\frac{\left(c_0-c_0'\right)}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k-\lambda_n}$$

toplamını göz önüne alalım. λ_n ve μ_n sayılarının asimptotik formüllerinden kolayca görülür ki

$$\mu_k\left[\lambda_k-\mu_k-2\left(a_0-a_0'\right)\right]-\left(c_0-c_0'\right)=O\left(\frac{1}{k}\right)$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\left[\lambda_k-\mu_k-2\left(a_0-a_0'\right)\right]-\left(c_0-c_0'\right)}{\lambda_n\left(\mu_k-\lambda_n\right)}\right|\le\frac{C}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left|\mu_k-\lambda_n\right|}\le\frac{C}{n^3}$$

olur. Buradan

$$S_1=\frac{c_0'-c_0}{n^2}S_2+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

elde edilir. (2.2.13) ve S_0, S_3, S_1'in asimptotik formüllerinden

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k-\mu_k}{\mu_k-\lambda_n}=\frac{A+\mu_0-\lambda_0}{n^2}+\left[2\left(a_0-a_0'\right)+\frac{c_0'-c_0}{n^2}\right]S_2+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{2.2.14}$$

alınır. Şimdi ise S_2'nin davranışını öğrenelim. Bunun için S_2'nin ifadesinde μ_k'ların asimptotik ifadelerinden yararlanılırsa bu ifade

$$S_2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k-\lambda_n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+2a_0'+O\left(\frac{1}{k^2}\right)-\lambda_n}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k^2-\lambda_n\right)\left\{1+\frac{2a_0'}{k^2-\lambda_n}+O\left[\frac{1}{k^2\left(k^2-\lambda_n\right)}\right]\right\}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\lambda_n}-2a_0'\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k^2-\lambda_n\right)^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k^2-\lambda_n\right)^2}O\left(\frac{1}{k^2}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\lambda_n}\frac{\left[\frac{2a_0'}{k^2-\lambda_n}+O\left[\frac{1}{k^2\left(k^2-\lambda_n\right)}\right]\right]^2}{1+\frac{2a_0'}{k^2-\lambda_n}+O\left[\frac{1}{k^2\left(k^2-\lambda_n\right)}\right]}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\left(k^2-\lambda_n\right)^2}\le\frac{c}{n^3}$$

eşitsizliğinden ve Lemma 2.2.1'den yararlanılırsa

$$S_2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\lambda_n}-2a_0'\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k^2-\lambda_n\right)^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{2.2.15}$$

bulunur.

Şimdi ise (2.2.12) eşitliğindeki ikinci toplam (2.2.4) ve (2.2.5) asimptotik formüllerinden yararlanılarak

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_k-\mu_k}{\mu_k-\lambda_n}\right)^2=-2\left(a_0-a_0'\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k^2-\lambda_n\right)^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{2.2.16}$$

şeklinde alınır.

Bu durumda (2.2.12) eşitliği (2.2.14), (2.2.15) ve (2.2.16) eşitliklerinden

$$\ln\psi(\lambda_n)=\frac{A+\mu_0-\lambda_0}{n^2}+\left[2(a_0-a_0')+\frac{c_0'-c_0}{n^2}\right]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\lambda_n}-$$
$$-\left[4a_0'(a_0-a_0')+2(a_0-a_0')^2\right]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2-\lambda_n)^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (2.2.17)$$

elde edilir.

Şimdi ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2-\lambda_n)^p} \qquad (p=1,2,...)$$

toplamlarının davranışını öğrenelim. Bunun için

$$X(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\lambda}=-\left[ctg\pi\sqrt{\lambda}-\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\right]\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$$

fonksiyonundan yararlanalım. O zaman,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2-\lambda_n)^p}=X^{(p-1)}(\lambda_n)-\frac{1}{(k^2-\lambda_n)^p} \quad (p=1,2,...) \qquad (2.2.18)$$

dır. Burada $p=1$ durumunu inceleyelim. Bunun için $\sqrt{\lambda_n}=n+\varepsilon$ alalım. Burada

$$\varepsilon=\frac{a_0}{n}+\frac{a_1}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad (2.2.19)$$

olur. O halde (2.2.18) eşitlinden

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\lambda_n}=\frac{1}{2\lambda_n}-\left[\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}ctg\pi\sqrt{\lambda_n}+\frac{1}{n^2-\lambda_n}\right]=$$
$$=\frac{1}{2n^2}-\left[\frac{\pi\varepsilon(2n+\varepsilon)\cos\pi\varepsilon-2(n+\varepsilon)\sin\pi\varepsilon}{2\varepsilon(n+\varepsilon)(2n+\varepsilon)\sin\pi\varepsilon}\right]=$$
$$=\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{4n^2}+\frac{\pi^2}{6}\frac{\varepsilon}{n}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\lambda_n}=\frac{3}{4n^2}+\frac{\pi^2 a_0}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{2.2.20}$$

olur. Benzer şekilde

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k^2-\lambda_n\right)^2}=\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{2.2.20'}$$

ifadesi ispatlanır. Bu nedenle (2.2.20)-(2.2. 20′) formülleri ve (2.2.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\ln\psi(\lambda_n)&=\frac{A+\mu_0-\lambda_0}{n^2}+2(a_0-a_0')\left[\frac{3}{4n^2}+\frac{\pi^2 a_0}{6n^2}\right]-2\left(a^2{}_0-a_0'^2\right)\frac{\pi^2}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\&=\frac{1}{n^2}\left[A+\mu_0-\lambda_0+\frac{3}{2}(a_0-a_0')+\frac{\pi^2}{3}a_0(a_0-a_0')-\frac{\pi^2}{6}\left(a^2{}_0-a_0'^2\right)\right]+\\&+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{n^2}\left[A+\mu_0-\lambda_0+\frac{3}{2}(a_0-a_0')+\frac{\pi^2}{6}(a_0-a_0')^2\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\psi(\lambda_n)=1+\frac{1}{n^2}\left[A+\mu_0-\lambda_0+\frac{3}{2}(a_0-a_0')+\frac{\pi^2}{6}(a_0-a_0')^2\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{2.2.21}$$

olduğu alınır. (2.2.7)'den $\alpha_n=\frac{h_2-h_1}{\mu_n-\lambda_n}\psi(\lambda_n)$ alınır. Burada ki $\frac{h_2-h_1}{\mu_n-\lambda_n}$ oranını alalım. μ_n ve λ_n için asimptotik formüllerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{h_2-h_1}{\mu_n-\lambda_n}&=\frac{h_2-h_1}{2(a_0-a_0')+\frac{c_0'-c_0}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)}=\\&=\frac{h_2-h_1}{2(a_0'-a_0)}\left[1-\frac{c_0'-c_0}{2(a_0'-a_0)n^2}\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

olur. (2.2.3) ve (2.2.6) formüllerinden

$$\frac{h_2-h_1}{2(a_0'-a_0)}=\frac{\pi}{2},\qquad \frac{c_0'-c_0}{2(a_0'-a_0)}=\left[\frac{a_0'+a_0}{2}-\frac{a_1'-a_1}{a_0'-a_0}\right]\frac{\pi}{2}$$

olduğu alınır. Bu yüzden α_n sayıları

$$\alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\left[S+\frac{\pi^2}{6}\right]$$

asimptotik formülü veya

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\left[S + \frac{\pi^2}{6}(a_0 - a_0')^2 - a_0 - \frac{a_1' - a_1}{a_0' - a_0} \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (2.2.22)$$

olduğu elde edilir. Burada

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \{\mu_n - \lambda_n - 2(a_0' - a_0)\} \qquad (2.2.23)$$

olarak gösterilir.

UYARI 2.2.2 α_n sayıları için (2.2.22) asimptotik formülü n'nin yeterince büyük değerleri için geçerlidir. n'nin küçük değerleri için α_n sayıları (2.2.7) formülünden direkt hesaplanır. Bu ifadede ki $h_2 - h_1$ ise (2.2.3) denkleminden bulunur.

UYARI 2.2.3 Eğer λ_n ve μ_n'nin (2.2.1) ve (2.2.2) asimptotik formüllerinde daha fazla terim alınırsa yukarıda verilen yöntemle α_n sayılarının asimptotik formüllerinde daha fazla terim bulunur. Bu hesaplamalar burada verilmeyecektir.

2.3. Ters Sturm-Liouville Problemi

Bu alt bölümde ters Sturm-Liouville problemini ele alınacaktır.

Teorem 2.3.1. $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ sayı dizileri aşağıdaki koşulları sağlamaktadır;

1) λ_n ve μ_n'ler sıralıdır,

2) λ_n ve μ_n'ler sırasıyla (2.2.1) ve (2.2.2) asimptotik formüllerini sağlamaktadır. Öyle ki $a_0 \neq a_0'$'dır. O halde bir tek mutlak sürekli $q(x)$ fonksiyonu ve h_1, h_2, H sayıları vardır ki $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$,(2.2.1)-(2.2.2) probleminin $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$,(2.2.1)-(2.2.3) probleminin spektrumlarıdır. Ayrıca

$$h_2 - h_1 = \pi(a_0' - a_0) \qquad (2.3.1)$$

İspat: $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri 1) ve 2) özelliklerini sağlasın. (2.2.7) formülüne göre α_n dizisi kurulur. Buradan $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$'ler için (2.2.22) asimptotik formülü alınır. Burada n'ler için α_n>0 dır.

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{h_2 - h_1} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{\lambda_n - \lambda} \qquad (2.3.2)$$

fonksiyonunun sıfır yerleri ve kutup noktaları sıralıdır.

Açıkça görülür ki $\lambda \to -\infty$ iken;

$$m(\lambda) \to -\frac{1}{h_2 - h_1} \qquad (2.3.3)$$

ve

$$\frac{1}{\alpha_n} = \operatorname{Re} s\, m(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} \qquad (2.3.4)$$

Bu durumda [19],[20] çalışmasından

$$m_1(\lambda) = -\frac{1}{h_2 - h_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n(\lambda - \lambda_n)} \qquad (2.3.5)$$

olur. Burada bütün α_n 'ler aynı işaretlidir. Fakat n 'nin büyük değerleri için α_n>0 olduğundan görülür ki bütün α_n>0'dır. (2.2.22 formülü) Bu çalışmanın birinci bölümünün altıncı alt bölümünde gösterdik ki $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin mutlak sürekli $q(x)$ fonksiyonunu ve h_1, H sayılarını tek olarak belirler. Burada $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \qquad (2.3.6)$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \qquad (2.3.7)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \qquad (2.3.8)$$

probleminin özdeğerleri dizisidir. h_2 sayısı ise tanım gereği

$$h_2 = h_1 + \pi(a_0' - a_0) \qquad (2.3.9)$$

eşitliğinden bulunur.

$\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi,

$$y'(0) - h_2 y(0) = 0, \quad y'(0) - Hy(\pi) = 0 \qquad (2.3.10)$$

sınır değer koşulları ile verilen (2.3.6) denkleminin özdeğerleri dizisi olsun. Gösterelimki $\gamma_n = \mu_n$ $(n = 0,1,...)$ 'dir.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları

$$\varphi(0,\lambda)=1, \qquad \varphi'(0,\lambda)=h_1$$
$$\psi(0,\lambda)=1, \qquad \psi'(0,\lambda)=h_2$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümler olsun. Bu durumda

$$m(\lambda)=-\frac{\psi'(\pi,\lambda)+H\psi(\pi,\lambda)}{\varphi(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)}$$

fonksiyonunun sıfır yerleri ve kutup noktaları sırasıyla $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$'dir. Daha önce (ikinci bölümün birinci alt bölümünde) gösterildi ki $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$'ler sıralıdır ve $\lambda\to-\infty$ olduğunda

$$m(\lambda)\to-1$$

Diğer taraftan (2.1.13) formülünden

$$\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{h_2-h_1}\operatorname{Res} m(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}$$

eşitliği sağlanır.

Dolayısıyla $[19]$,$[20]$ çalışmalarından

$$\frac{1}{h_2-h_1}m(\lambda)=-\frac{1}{h_2-h_1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)} \qquad (2.3.11)$$

olur ve (2.3.5) , (2.3.11) formüllerinden

$$m_1(\lambda)=\frac{1}{h_2-h_1}m(\lambda)$$

elde edilir. Bu yüzden $\gamma_n=\mu_n\ (n=0,1,...)$ olduğu elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

UYARI 2.3.2. $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri için (2.2.1) ve (2.2.2) asimptotik formüllerin varlığı için gerekli ve yeterli koşul $q(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevlenebilir veya en azından $[0,\pi]$ aralığında sınırlı salınıma sahip olması gerekmektedir. Dolayısıyla bu ispatlanan teorem, daha önceden ispatlanan ters probleminin çözümün uyumsuzluğunu ortadan kaldırmaktadır.

Genelde bu bölümde verilen yöntemle o açık kapatılamıyor. Bu açığı kapatmak için $q(x)$ fonksiyonu ikinci mertebeden mutlak sürekli türevlere sahip olması koşulu yani, $q''(x) \in \sigma(0,\pi)$ (veya $L_1(0,\pi)$) olması koşulunu getirmek gerekiyor. Bu durumda $(\mu_n - \lambda_n)$ farkı n'nin büyük değerleri için yeterince küçülmektedir.

3.BÖLÜM

Aralıkta Süreksizliğe Sahip Sturm-Liouville Operatörün İçin Ters Problemler

3.1. Aralıkta Süreksizliğe Sahip Sturm-Liouville Sınır Değer Probleminin Çözümünün Gösterimi

$$ly := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = k^2 \qquad 0 < x < \pi \qquad (3.1.1)$$

diferansiyel denkleminin

$$U(y) := y'(0) = 0, \; V(y) := y(\pi) = 0 \qquad (3.1.2)$$

sınır şartları ve

$$y(d+0) = ay(d-0), \; y'(d+0) = a^{-1}y'(d-0) \qquad (3.1.3)$$

sıçrama şartlarını sağlayan problem ele alınmıştır.

Burada λ spektral bir parametre; $q(x)$ reel değerli fonksiyon $q(x) \in L_2(0,\pi)$ ve a reel $a > 0$, $a \neq 1$ ve $d \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ dir.

$q(x) = 0$ durumunda (3.1.1) denkleminin , $e_0(0,\lambda) = 1$, $e_0'(0,\lambda) = ik$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $e_0(x,\lambda)$ olsun.

$-y''(x) = \lambda y(x)$ olur ve çözüm $y(x,\lambda) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ şeklinde alınır.

Çözümde $y(0,\lambda) = 1$, $y'(0,\lambda) = ik$ başlangıç koşulları yerlerine yazılırsa

$y(0,\lambda) = c_1 = 1$ elde edilir. $y'(x,\lambda) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$ ifadesinden

$y'(0,\lambda) = 0 + c_2 k = ik$ ise $c_2 = i$ elde edilir. Bu durumda çözüm

$y(x,\lambda) = \cos kx + i \sin kx = e^{ikx}$, $0 < x < d$

şeklinde alınır.

$e_{01}(x,\lambda) = \cos kx + i \sin kx$ ise

$e_{01}'(x,\lambda) = -k \sin kx + ik \cos kx$

dir.Burada $e_{02}(x,\lambda)$ çözümü

$e_{02}(x,\lambda) = B \sin kx + B_1 \cos kx$ şeklinde aranır. Bu durumda

$e_{02}'(x,\lambda) = Bk \cos kx - B_1 k \sin kx$

olur. Burada $e_{02}(d,\lambda)=A$ ve $e_{02}'(d,\lambda)=A_1$ olsun. Dolayısıyla

$$B\sin kd + B_1\cos kd = A$$
$$kB\cos kd - B_1 k\sin kd = A_1$$

denklem sisteminden

$$B = A\sin kd + \frac{A_1}{k}\cos kd$$
$$B_1 = A\cos kd - \frac{A_1}{k}\sin kd$$

alınır. Bu alınan katsayılar çözümde yerlerine yazılırsa

$$e_{02}(x,\lambda)=\left(A\sin kd + \frac{A_1}{k}\cos kd\right)\sin kd + \left(A\cos kd - \frac{A_1}{k}\sin kd\right)\cos kd$$

elde edilir. Burada

$e_{02}'(x,\lambda)=(Ak\sin kd + A_1\cos kd)\cos kd - (Ak\cos kd - A_1\sin kd)\sin kd$ şeklinde

olur. Burada verilen (3.1.3) sıçrama şartlarından

$$y(d+0)=ay(d-0)$$

olduğundan

$$\left(A\sin kd + \frac{A_1}{k}\cos kd\right)\sin kd + \left(A\cos kd - \frac{A_1}{k}\sin kd\right)\cos kd = a(\cos kd + i\sin kd)$$

$$A\sin^2 kd + \frac{A_1}{k}\cos kd\sin kd + A\cos^2 kd - \frac{A_1}{k}\cos kd\sin kd = a\cos kd + ai\sin kd$$

buradan

$$A = a\cos kd + ai\sin kd$$

elde edilir ve

$$y'(d+0)=a^{-1}y'(d-0)$$

eşitliğinden

$$(Ak\sin kd + A_1\cos kd)\cos kd - (Ak\cos kd - A_1\sin kd)\sin kd = \frac{1}{a}(-k\sin kd + ik\cos kd)$$

$$Ak\sin kd\cos kd + A_1\cos^2 kd - Ak\sin kd\cos kd + A_1\sin^2 kd = \frac{1}{a}\left(-k\sin kd + ik\cos kd\right)$$

buradan

$$A_1 = -\frac{k}{a}\sin kd + \frac{ik}{a}\cos kd$$

elde edilir. Bulunan bu katsayıları denklemde yerlerine yazılırsa

$$B = (a\cos kd + ai\sin kd)\sin kd + \left(-\frac{k}{a}\sin kd + \frac{ik}{a}\cos kd\right)\frac{\cos kd}{k}$$

$$B = a\sin kd\cos kd + ai\sin^2 kd - \frac{1}{a}\sin kd\cos kd + \frac{i}{a}\cos^2 kd$$

ve

$$B_1 = a\cos^2 kd + ai\sin kd\cos kd + \frac{1}{a}\sin^2 kd - \frac{i}{a}\cos kd\sin kd$$

şeklinde alınır.

Bulunan B ve B_1 ifadeleri $e_{02}(x,\lambda)$ ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$e_{02}(x,\lambda) = a\sin kd\cos kd\sin kx + ai\sin^2 kd\sin kx - \frac{1}{a}\sin kd\cos kd\sin kx$$

$$+\frac{i}{a}\cos^2 kd\sin kx + a\cos^2 kd\cos kx + ai\sin kd\cos kd\cos kx$$

$$+\frac{1}{a}\sin^2 kd\cos kx - \frac{i}{a}\cos kd\sin kd\cos kx$$

$$=\frac{1}{2}(2a\cos^2 kd\cos kx - a\cos kx + a\cos kx + 2ai\sin^2 kd\sin kx - ai\sin kx$$

$$+ai\sin kx + 2\frac{i}{a}\cos^2 kd\sin kx - \frac{i}{a}\sin kx + \frac{i}{a}\sin kx + 2a\sin kd\cos kd\sin kx$$

$$-\frac{2}{a}\sin kd\cos kd\sin kx + 2ai\cos kd\sin kds\cos kx + \frac{2}{a}\sin^2 kd\cos kx$$

$$-2\frac{i}{a}\cos kd\sin kds\cos kx)$$

$$=\frac{1}{2}(a\cos^2 kd\cos kx - a\sin^2 kd\cos kx + a\cos kx$$

$$-ai\cos^2 kd\sin kx + ai\sin^2 kd\sin kx + ai\sin kx$$

$$+\frac{i}{a}\cos^2 kd\sin kx - \frac{i}{a}\sin^2 kd\sin kx + \frac{i}{a}\sin kx$$

$$+\frac{1}{a}\sin^2 kd\cos kx - \frac{1}{a}\cos^2 kd\cos kx + \frac{1}{a}\cos kx$$

$$+2a\sin kd\cos kd\sin kx - \frac{2}{a}\sin kd\cos kd\sin kx$$

$$+2ai\cos kd\sin kd\cos kx - \frac{2i}{a}\cos kd\sin kd\cos kx)$$

$$=\frac{1}{2}(a\cos kx + ai\sin kx + \frac{i}{a}\sin kx + \frac{1}{a}\cos kx + a\cos 2kd\cos kx + a\sin 2kd\sin kx$$

$$ai\cos 2kd\sin kx + ai\sin 2kd\cos kx - \frac{1}{a}\cos 2kd\cos kx - \frac{1}{a}\sin 2kd\sin kx$$

$$+\frac{i}{a}\cos 2kd\sin kx - \frac{i}{a}\sin 2kd\cos kx)$$

$$=\frac{1}{2}(\left(a+\frac{1}{a}\right)(\cos kx + i\sin kx) + a(\cos k(2d-x) + i\sin k(2d-x))$$

$$-\frac{1}{a}(\cos k(2d-x) + i\sin k(2d-x)))$$

$$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)(\cos kx + i\sin kx) + \frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)(\cos k(2d-x) + i\sin k(2d-x))$$

$$=a^+e^{ikx} + a^-e^{ik(2d-x)}$$

alınır.

Bu durumda

$$e_0(x,\lambda)=\begin{cases} e^{ikx} & , \quad 0<x<d \\ a^+e^{ikx}+a^-e^{ik(2d-x)} & , \quad d<x<\pi \end{cases} \tag{3.1.4}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi

$$e(x,\lambda)=e_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{ikt}\,dt \tag{3.1.5}$$

gösteriminin doğruluğu gösterilebilir. Bunun için

$$e(x,\lambda)=\begin{cases} e_1(x,\lambda)\,, & 0<x<d \\ e_2(x,\lambda)\,, & d<x<\pi \end{cases} \tag{3.1.6}$$

çözümü için integral deklemi;

$$e_1(x,\lambda)=e^{ikx}+\frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)q(t)e_1(x,\lambda)dt$$

$$e_2(x,\lambda)=a^+e^{ikx}+a^-e^{ik(2d-x)}$$
$$+\frac{1}{k}\int_0^d\left[a^+\sin k(x-t)-a^-\sin k(x+t-2d)\right]q(t)e_1(t,\lambda)dt$$
$$+\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)e_2(t,\lambda)dt \tag{3.1.7}$$

olduğundan,

$$e_2(x,\lambda)=a^+e^{ikx}+a^-e^{ik(2d-x)}+\frac{1}{k}\int_0^d\left[a^+\sin k(x-t)-a^-\sin k(x+t-2d)\right]q(t)e^{ikt}dt$$
$$+\frac{1}{k}\int_0^d\left[a^+\sin k(x-t)-a^-\sin k(x+t-2d)\right]q(t)\left(\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$
$$+\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\left[a^+e^{ikx}+a^-e^{ik(2d-x)}\right]dt$$
$$+\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\left(\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$

Eşitliği yazılır. Diğer tarafdan,

$$e_2(x,\lambda)=a^+e^{ikx}+a^-e^{ik(2d-x)}+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{ikt}dt$$

şeklinde arandığından

$$\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{ikt}dt=\frac{1}{k}\int_0^d\left[a^+\sin k(x-t)-a^-\sin k(x+t-2d)\right]q(t)e^{ikt}dt$$
$$+\frac{1}{k}\int_0^d\left[a^+\sin k(x-t)-a^-\sin k(x+t-2d)\right]q(t)\left(\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$
$$+\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\left[a^+e^{ikx}+a^-e^{ik(2d-x)}\right]dt$$
$$+\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\left(\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$

eşitliği elde edilir.

Burada

$$I_1 = \frac{a^+}{k}\int_0^d \sin k(x-t)q(t)e^{ikt}dt = \frac{a^+}{2}\int_0^d \frac{e^{ik(x-t)} - e^{-ik(x-t)}}{ik}q(t)e^{ikt}dt$$

$$= \frac{a^+}{2}\int_0^d \frac{e^{ikx} - e^{-ik(x-2t)}}{ik}q(t)dt = \frac{a^+}{2}\int_0^d\left(\int_{2t-x}^{x} e^{iks}ds\right)q(t)dt$$

$$= \frac{a^+}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_0^{\frac{x+s}{2}} q(t)dt\right)e^{iks}ds + \frac{a^+}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_0^d q(t)dt\right)e^{iks}ds$$

$$I_2 = -\frac{a^-}{k}\int_0^d \sin k(x+t-2d)q(t)e^{ikt}dt = -\frac{a^-}{2}\int_0^d \frac{e^{ik(x+t-2d)} - e^{-ik(x+t-2d)}}{ik}q(t)e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{a^-}{2}\int_0^d \frac{e^{ik(x+2t-2d)} - e^{-ik(x-2d)}}{ik}q(t)dt = -\frac{a^-}{2}\int_0^d\left(\int_{2d-x}^{x+2t-2d} e^{iks}ds\right)q(t)dt$$

$$= -\frac{a^-}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{d-\frac{(x-s)}{2}}^{d} q(t)dt\right)e^{iks}ds$$

$$I_3 = \frac{a^+}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)e^{ik(2d-t)}dt = \frac{a^+}{2}\int_d^x \frac{e^{ik(x-t)} - e^{-ik(x-t)}}{ik}q(t)e^{ikt}dt$$

$$= \frac{a^+}{2}\int_d^x \frac{e^{ikx} - e^{-ik(x-2t)}}{ik}q(t)dt = \frac{a^+}{2}\int_d^x\left(\int_{2t-x}^{x} e^{iks}ds\right)q(t)dt$$

$$= \frac{a^+}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_d^{\frac{x+s}{2}} q(t)dt\right)e^{iks}ds$$

$$I_4 = \frac{a^-}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)e^{ik(2d-t)} = \frac{a^-}{2}\int_d^x \frac{e^{ik(x-t)} - e^{-ik(x-t)}}{ik}q(t)e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= \frac{a^-}{2}\int_d^x \frac{e^{ik(x-2t+2d)} - e^{-ik(x-2d)}}{ik}q(t)dt = \frac{a^-}{2}\int_d^x\left(\int_{2d-x}^{x-2t+2d} e^{iks}ds\right)q(t)dt$$

$$I_4=\frac{a^-}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{d}^{d+\frac{(x-s)}{2}}q(t)\right)e^{iks}ds$$

$$I_5=\frac{a^+}{k}\int_0^d \sin k(x-t)q(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}dsdt=\frac{a^+}{2}\int_0^d\frac{e^{ik(x-t)}-e^{-ik(x-t)}}{ik}q(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}dsdt$$

$$=\frac{a^+}{2}\int_0^d q(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)\frac{e^{ik(x-t+s)}-e^{-ik(s-x+t)}}{ik}dsdt=\frac{a^+}{2}\int_0^d q(t)\left(\int_{-t}^{t}K(t,s)\left(\int_{s-x+t}^{s+x-t}e^{ik\sigma}d\sigma\right)ds\right)dt$$

$$=\frac{a^+}{2}\int_0^d q(t)\left(\int_{-x}^{x}e^{ik\sigma}\int_{\sigma-x+t}^{\sigma+x-t}K(t,s)dsd\sigma\right)dt=\frac{a^+}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^d q(t)\left(\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_6=-\frac{a^-}{k}\int_0^d \sin k(x+t-2d)q(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}dsdt$$

$$=-\frac{a^-}{2}\int_0^d\frac{e^{ik(x+t-2d)}-e^{-ik(x+t-2d)}}{ik}q(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}dsdt$$

$$=-\frac{a^-}{2}\int_0^d q(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)\frac{e^{ik(x+t+s-2d)}-e^{-ik(x+t-s-2d)}}{ik}dsdt$$

$$=-\frac{a^-}{2}\int_0^d q(t)\left(\int_{-t}^{t}K(t,s)\left(\int_{s-x-t+2d}^{s+x+t-2d}e^{ik\sigma}d\sigma\right)ds\right)dt$$

$$=-\frac{a^-}{2}\int_0^d q(t)\left(\int_{-x}^{x}e^{ik\sigma}\int_{\sigma-x-t+2d}^{\sigma+x+t-2d}K(t,s)dsd\sigma\right)dt=-\frac{a^-}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^d q(t)\left(\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}K(t,\zeta)d\zeta ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_7=\frac{1}{k}\int_d^x \sin k(x-t)q(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}dsdt=\frac{1}{2}\int_d^x\frac{e^{ik(x-t)}-e^{-ik(x-t)}}{ik}q(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)e^{iks}dsdt$$

$$=\frac{1}{2}\int_d^x q(t)\int_{-t}^{t}K(t,s)\frac{e^{ik(x-t+s)}-e^{-ik(s-x+t)}}{ik}dsdt=\frac{1}{2}\int_d^x q(t)\left(\int_{-t}^{t}K(t,s)\left(\int_{s-x+t}^{s+x-t}e^{ik\sigma}d\sigma\right)ds\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_d^x q(t)\left(\int_{-x}^{x}e^{ik\sigma}\int_{\sigma-x+t}^{\sigma+x-t}K(t,s)dsd\sigma\right)dt=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_d^x q(t)\left(\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds\right)e^{ikt}dt$$

elde edilir.

Sonuç olarak buradan $\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{ikt}dt$ ifadesi

$$\int_{-x}^{x} K(x,t)e^{ikt}dt = \frac{a^+}{2}\left[\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(s)ds\right)e^{ikt}dt + \int_{2d-x}^{x}\left(\int_0^{d} q(s)ds\right)e^{ikt}dt + \int_{2d-x}^{x}\left(\int_d^{\frac{x+t}{2}} q(s)ds\right)e^{ikt}dt\right]$$

$$+\frac{a^-}{2}\left[\int_{2d-x}^{x}\left(\int_d^{d+\frac{(x+t)}{2}} q(s)ds\right)e^{ikt}dt - \int_{2d-x}^{x}\left(\int_{d-\frac{(x+t)}{2}}^{d} q(s)ds\right)e^{ikt}dt\right]$$

$$+\frac{a^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_0^d q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K(t,\zeta)d\zeta ds\right)e^{ikt}dt - \frac{a^-}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_0^d q(s)\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d} K(t,\zeta)d\zeta ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_d^x q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K(t,\zeta)d\zeta ds\right)dt$$

şeklinde alınır. Bu alınan son eşitlikten aşağıdaki integral denklemler elde edilir.

1) $d < x < 2d$, $-x < t < 2d - x$ için,

$$K(x,t) = \frac{a^+}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(s)ds - \frac{a^-}{2}\int_{d-\frac{(x-t)}{2}}^{d} q(s)ds + \frac{a^+}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K(t,\zeta)d\zeta ds$$

$$-\frac{a^-}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d} K(t,\zeta)d\zeta ds + \frac{1}{2}\int_d^x q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K(t,\zeta)d\zeta ds$$

2) $x > 2d$, $-x < t < 2d - x$ için,

$$K(x,t) = \frac{a^+}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(s)ds + \frac{a^-}{2}\int_d^{d+\frac{(x-t)}{2}} q(s)ds + \frac{a^+}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K(t,\zeta)d\zeta ds$$

$$-\frac{a^-}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d} K(t,\zeta)d\zeta ds + \frac{1}{2}\int_d^x q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K(t,\zeta)d\zeta ds$$

3) $d < x < 2d$, $x - 2d < x$ için,

$$K(x,t)=\frac{a^+}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}}q(s)ds-\frac{a^-}{2}\int_{d-\frac{(x-t)}{2}}^{d}q(s)ds+\frac{a^+}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds$$
$$-\frac{a^-}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}K(t,\zeta)d\zeta ds+\frac{1}{2}\int_d^x q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds$$

4) $x>2d$, $2d-x<t<x-2d$ için,

$$K(x,t)=\frac{a^+}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}}q(s)ds+\frac{a^-}{2}\int_d^{d+\frac{(x-t)}{2}}q(s)ds+\frac{a^+}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds$$
$$-\frac{a^-}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}K(t,\zeta)d\zeta ds+\frac{1}{2}\int_d^x q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds$$

5) $x>2d$, $2d-x<t<x$ için,

$$K(x,t)=\frac{a^-}{2}\left(\int_d^{d+\frac{(x-t)}{2}}q(s)ds-\int_{d-\frac{(x-t)}{2}}^{d}q(s)ds\right)+\frac{a^+}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds$$
$$-\frac{a^-}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}K(t,\zeta)d\zeta ds+\frac{1}{2}\int_d^x q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds$$

6) $d<x<2d$, $x-2d<t<x$ için,

$$K(x,t)=\frac{a^+}{2}\left(\int_d^{\frac{x+t}{2}}q(s)ds+\int_0^{\frac{x+t}{2}}q(s)ds\right)-\frac{a^-}{2}\int_{d-\frac{(x-t)}{2}}^{d}q(s)ds$$
$$+\frac{a^+}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds-\frac{a^-}{2}\int_0^d q(s)\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}K(t,\zeta)d\zeta ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_d^x q(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K(t,\zeta)d\zeta ds$$

Şimdi ardışık yaklaşımlar metoduyla (bknz. [9]) yukarıdaki durumlar için integral denklemlerin varlığını gösterilebilir. Bunun için birinci durumdaki integral denklem için çözümün varlığı aşağıdaki teoremin ispatında gösterilebilir.

Teorem 3.1.1. $\int_0^{\pi}|q(t)|dt < +\infty$ olsun. Bu durumda $e(0,\lambda)=1$, $e'(0,\lambda)=ik$ başlangıç şartlarını ve (3.1.3) sıçrama şartlarını sağlayan çözümü

$$e(x,\lambda)=e_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{ikt}dt$$

formundadır ve $\int_{-x}^{x}|K(x,t)|e^{ikt}dt \le e^{c\sigma_1(x)}-1$ dir. Burada $\sigma_1(x)=\int_0^{x}(x-t)|q(t)|dt$ ve $c=a^{+}+|a^{-}|+1$ dir.

$q(x)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu olmak üzere $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu ,

$$\widetilde{K}_{xx}(x,t)-q(x)\widetilde{K}(x,t)=\widetilde{K}_{tt}(x,t)$$

$$\widetilde{K}(x,x)=\frac{a^{+}}{2}\int_0^{x}q(t)dt$$

$$\widetilde{K}(x,2d-x+0)-\widetilde{K}(x,2d-x-0)=\frac{a^{-}}{2}\int_0^{x}q(t)dt$$

$$\widetilde{K}(x,-x)=0\ ,\ \widetilde{K}=K(x,t)+K(x,-t)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat: $K_0(x,t)=\frac{a^{+}}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}}q(s)ds-\frac{a^{-}}{2}\int_{d-\frac{x-t}{2}}^{d}q(s)ds$

$$\int_{-x}^{x}|K_0(x,t)|dt=\int_{-x}^{x}\left|\frac{a^{+}}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}}q(s)ds-\frac{a^{-}}{2}\int_{d-\frac{x-t}{2}}^{d}q(s)ds\right|dt\le$$

$$\le\frac{a^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^{\frac{x+t}{2}}|q(s)|dsdt-\frac{a^{-}}{2}\int_{-x}^{x}\int_{d-\frac{x-t}{2}}^{d}|q(s)|dsdt$$

$$=\frac{a^{+}}{2}\int_0^{x}\int_{2s-x}^{x}|q(s)|dtds-\frac{a^{-}}{2}\int_{d-x}^{d}\int_{-x}^{2s+x-2d}|q(s)|dtds$$

$$\le\frac{a^{+}}{2}\int_0^{x}|q(s)|2(x-s)ds+\frac{|a^{-}|}{2}\int_0^{x}|q(s)|2(x+s-d)ds\le\frac{1}{2}\left(a^{+}+|a^{-}|\right)\int_0^{x}|q(s)|(x-s)ds$$

$$\le c\sigma_1(x)$$

elde edilir.

$$\int_{-x}^{x}|K_1(x,t)|dt=\frac{a^+}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{d}|q(s)|\int_{t-x+s}^{t+x-s}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt$$
$$+\frac{|a^-|}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{d}|q(s)|\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{d}^{x}|q(s)|\int_{t-x+s}^{t+x-s}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt$$
$$=\frac{a^+}{2}\int_{0}^{d}|q(s)|\int_{-x}^{x}\int_{t-x+s}^{t+x-s}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt$$
$$+\frac{|a^-|}{2}\int_{0}^{d}|q(s)|\int_{-x}^{x}\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt+\frac{1}{2}\int_{d}^{x}|q(s)|\int_{-x}^{x}\int_{t-x+s}^{t+x-s}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt$$

şeklindedir. Burada

$$K(s,\zeta)=\begin{cases}K_0(s,\zeta) & , (s,\zeta)\in\Psi\\ 0 & , |\zeta|>|s|\end{cases}$$

için

$$\int_{0}^{d}|q(s)|\int_{-x}^{x}\int_{t-x+s}^{t+x-s}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt=\int_{0}^{d}|q(s)|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t-x+s}^{t+x-s}|K(s,\zeta)|d\zeta ds dt$$

$$\int_{0}^{d}|q(s)|\int_{-x}^{x}\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt=\int_{0}^{d}|q(s)|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}|K(s,\zeta)|d\zeta ds dt$$

$$\int_{d}^{x}|q(s)|\int_{-x}^{x}\int_{t-x+s}^{t+x-s}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt=\int_{d}^{x}|q(s)|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t-x+s}^{t+x-s}|K_0(s,\zeta)|d\zeta ds dt$$

şeklinde alınır. Dolayısıyla

$$\int_{-x}^{x}\left|K_1(x,t)\right|dt=\frac{a^+}{2}\int_0^d\left|q(s)\right|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t-x+s}^{t+x-s}\left|K(s,\zeta)\right|d\zeta dsdt$$
$$+\frac{\left|a^-\right|}{2}\int_0^d\left|q(s)\right|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}\left|K(s,\zeta)\right|d\zeta dsdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_d^x\left|q(s)\right|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t-x+s}^{t+x-s}\left|K(s,\zeta)\right|d\zeta dsdt$$

$$=\frac{a^+}{2}\int_0^d\left|q(s)\right|\int_{t-x+s}^{t+x-s}\int_{-t}^{t}\left|K_0(s,\zeta)\right|d\zeta dsdt+\frac{\left|a^-\right|}{2}\int_0^d\left|q(s)\right|\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}\int_{-t}^{t}\left|K_0(s,\zeta)\right|d\zeta dsdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_d^x\left|q(s)\right|\int_{t-x+s}^{t+x-s}\int_{-t}^{t}\left|K_0(s,\zeta)\right|d\zeta dsdt$$

$$\leq\frac{a^+}{2}\int_0^d 2(x-s)\left|q(s)\right|c\sigma_1(x)ds+\frac{\left|a^-\right|}{2}\int_0^d\left(2(x-s)-4d\right)\left|q(s)\right|c\sigma_1(x)ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_d^x 2(x-s)\left|q(s)\right|c\sigma_1(x)ds$$

$$\leq a^+\int_0^x(x-s)\left|q(s)\right|c\sigma_1(x)ds+\left|a^-\right|\int_0^x(x-s)\left|q(s)\right|c\sigma_1(x)ds$$
$$+\int_0^x(x-s)\left|q(s)\right|c\sigma_1(x)ds\leq\left(a^+ +\left|a^-\right|+1\right)c\frac{\sigma_1^{\,2}(x)}{2}$$
$$=c^2\frac{\sigma_1^{\,2}(x)}{2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_{-x}^{x}\left|K_2(x,t)\right|dt=\frac{a^+}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^d\left|q(s)\right|\int_{t-x+s}^{t+x-s}\left|K_1(s,\zeta)\right|d\zeta dsdt$$
$$+\frac{\left|a^-\right|}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^d\left|q(s)\right|\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}\left|K_1(s,\zeta)\right|d\zeta dsdt+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_d^x\left|q(s)\right|\int_{t-x+s}^{t+x-s}\left|K_1(s,\zeta)\right|d\zeta dsdt$$

$$=\frac{a^+}{2}\int_0^d |q(s)| \int_{-x}^{x} \int_{t-x+s}^{t+x-s} |K_1(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

$$+\frac{|a^-|}{2}\int_0^d |q(s)| \int_{-x}^{x} \int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d} |K_1(s,\zeta)| d\zeta ds dt + \frac{1}{2}\int_d^x |q(s)| \int_{-x}^{x} \int_{t-x+s}^{t+x-s} |K_1(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

olur. Buradan,

$$\int_0^d |q(s)| \int_{-x}^{x} \int_{t-x+s}^{t+x-s} |K_1(s,\zeta)| d\zeta ds dt = \int_0^d |q(s)| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t-x+s}^{t+x-s} |K(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

$$\int_0^d |q(s)| \int_{-x}^{x} \int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d} |K_1(s,\zeta)| d\zeta ds dt = \int_0^d |q(s)| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d} |K(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

$$\int_d^x |q(s)| \int_{-x}^{x} \int_{t-x+s}^{t+x-s} |K_1(s,\zeta)| d\zeta ds dt = \int_d^x |q(s)| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t-x+s}^{t+x-s} |K_0(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

şeklinde alınır. Dolayısıyla

$$\int_{-x}^{x} |K_2(x,t)| dt = \frac{a^+}{2}\int_0^d |q(s)| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t-x+s}^{t+x-s} |K(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

$$+\frac{|a^-|}{2}\int_0^d |q(s)| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d} |K(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_d^x |q(s)| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t-x+s}^{t+x-s} |K(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

$$=\frac{a^+}{2}\int_0^d |q(s)| \int_{t-x+s}^{t+x-s} \int_{-t}^{t} |K_1(s,\zeta)| d\zeta ds dt + \frac{|a^-|}{2}\int_0^d |q(s)| \int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d} \int_{-t}^{t} |K_1(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_d^x |q(s)| \int_{t-x+s}^{t+x-s} \int_{-t}^{t} |K_1(s,\zeta)| d\zeta ds dt$$

$$\le \frac{a^+}{2}\int_0^d 2(x-s)|q(s)|c^2\frac{\sigma_1^{\,2}(x)}{2}ds+\frac{|a^-|}{2}\int_0^d (2(x-s)-4d)|q(s)|c^2\frac{\sigma_1^{\,2}(x)}{2}ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_d^x 2(x-s)|q(s)|c^2\frac{\sigma_1^{\,2}(x)}{2}ds$$

$$\le a^+\int_0^x (x-s)|q(s)|c^2\frac{\sigma_1^{\,2}(x)}{2}ds+|a^-|\int_0^x (x-s)|q(s)|c^2\frac{\sigma_1^{\,2}(x)}{2}ds$$
$$+\int_0^x (x-s)|q(s)|c^2\frac{\sigma_1^{\,2}(x)}{2}ds\le\left(a^+ +|a^-|+1\right)c^2\frac{\sigma_1^{\,3}(x)}{2.3}$$
$$=c^3\frac{\sigma_1^{\,3}(x)}{2.3}$$

Bu durumda $\int_{-x}^{x}|K(x,t)|dt$ ifadesi için

$$\int_{-x}^{x}|K(x,t)|dt=\int_{-x}^{x}\left|K_0(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t)\right|dt$$
$$\le c\sigma_1(x)+c^2\frac{\sigma_1^{\,2}(x)}{2}+c^3\frac{\sigma_1^{\,3}(x)}{2.3}+c^4\frac{\sigma_1^{\,4}(x)}{2.3.4}+\cdots$$

olduğundan,

$$\int_{-x}^{x}|K(x,t)|dt\le e^{c\sigma_1(x)}-1$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi ise,

$$\widetilde{K}_{xx}(x,t)-q(x)\widetilde{K}(x,t)=\widetilde{K}_{tt}(x,t)$$
$$\widetilde{K}(x,x)=\frac{a^+}{2}\int_0^x q(t)dt$$
$$\widetilde{K}(x,2d-x+0)-\widetilde{K}(x,2d-x-0)=\frac{a^-}{2}\int_0^x q(t)dt$$
$$\widetilde{K}(x,-x)=0\ ,\ \ \widetilde{K}=K(x,t)+K(x,-t)$$

eşitliklerinin sağlandığı gösterilebilir. Bunun için,

$$e(x,\lambda)=e_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{ikt}dt=e_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{0}K(x,t)e^{ikt}dt+\int_{0}^{x}K(x,t)e^{ikt}dt$$
$$=e_0(x,\lambda)+\int_{0}^{x}[K(x,t)+K(x,-t)]e^{ikt}dt=e_0(x,\lambda)+\int_{0}^{x}\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt$$

çözümü $-y''+q(x)y=\lambda y$ denkleminde yerine yazılır ve $q(x)\equiv 0$ durumunda

$$e_0(x,\lambda)=\begin{cases} e^{ikx} & , \quad 0<x<d \\ a^+e^{ikx}+a^-e^{ik(2d-x)} & , \quad d<x<\pi \end{cases}$$

olduğu göz önünde bulundurulursa

$$-e_0''(x,\lambda)+\left[-\int_0^x\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt\right]''+q(x)e_0(x,\lambda)+q(x)\int_0^x\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt$$
$$=\lambda e_0(x,\lambda)+\lambda\int_0^x\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt$$

eşitliği alınır. Burada

$$\left[\int_0^x\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt\right]''=\left[\int_0^{2d-x-0}\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt+\int_{2d-x+0}^{x}\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt\right]$$
$$=-(-\widetilde{K}(x,2d-x-0)e^{ik(2d-x)}-\widetilde{K}(x,0)e^{ik0}(0)'+\int_0^{2d-x}\widetilde{K}_x(x,t)e^{ikt}dt$$
$$+\widetilde{K}(x,x)e^{ikx}+\widetilde{K}(x,2d-x+0)e^{ik(2d-x)}+\int_{2d-x}^{x}\widetilde{K}_x(x,t)e^{ikt}dt)$$
$$=-(-\widetilde{K}_x(x,2d-x-0)e^{ik(2d-x)}-\widetilde{K}(x,2d-x-0)\left(e^{ik(2d-x)}\right)'-\widetilde{K}_x(x,2d-x-0)e^{ik(2d-x)}$$
$$+\widetilde{K}_x(x,0)e^{ik0}(0)'+\int_0^{2d-x}\left(\widetilde{K}_{xx}(x,t)e^{ikt}dt\right)+\widetilde{K}_x(x,x)e^{ikx}+\widetilde{K}(x,x)\left(e^{ikx}\right)'$$
$$\widetilde{K}_x(x,2d-x+0)e^{ik(2d-x)}+\widetilde{K}(x,2d-x+0)\left(e^{ik(2d-x)}\right)'+\widetilde{K}_x(x,x)e^{ikx}$$
$$+\widetilde{K}_x(x,2d-x+0)\left(e^{ik(2d-x)}\right)+\int_{2d-x+0}^{x}\left(\widetilde{K}_{xx}(x,t)e^{ikt}dt\right))$$

$$= \widetilde{K}_x(x,2d-x-0)e^{ik(2d-x)} + \widetilde{K}(x,2d-x-0)\left(e^{ik(2d-x)}\right)' + \widetilde{K}_x(x,2d-x-0)e^{ik(2d-x)}$$

$$- \widetilde{K}_x(x,0)e^{ik0}(0)' - \int_0^{2d-x}\left(\widetilde{K}_{xx}(x,t)e^{ikt}dt\right) - \widetilde{K}_x(x,x)e^{ikx} - \widetilde{K}(x,x)\left(e^{ikx}\right)'$$

$$- \widetilde{K}_x(x,2d-x+0)e^{ik(2d-x)} - \widetilde{K}(x,2d-x+0)\left(e^{ik(2d-x)}\right)' - \widetilde{K}_x(x,x)e^{ikx}$$

$$- \widetilde{K}_x(x,2d-x+0)\left(e^{ik(2d-x)}\right) - \int_{2d-x+0}^{x}\left(\widetilde{K}_{xx}(x,t)e^{ikt}dt\right)$$

$$\left[-\int_0^x \widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt\right]'' = -2\left[\widetilde{K}_x(x,2d-x+0) - \widetilde{K}_x(x,2d-x-0)\right]e^{ik(2d-x)}$$

$$- \left[\widetilde{K}(x,2d-x+0) - \widetilde{K}(x,2d-x-0)\right]\left(e^{ik(2d-x)}\right)' - 2\widetilde{K}_x(x,x)e^{ikx}$$

$$- \widetilde{K}(x,x)\left(e^{ikx}\right)' - \int_0^x \widetilde{K}_{xx}(x,t)e^{ikt}dt$$

şeklinde alınır.

e^{ikx} fonksiyonu $q(x) \equiv 0$ durumunda çözüm olduğundan,

$$\int_0^x \widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)'' dt = \lambda \int_0^x \widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt$$

veya

$$\int_0^x \widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)'' dt = \int_0^{2d-x-0} \widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)'' dt + \int_{2d-x+0}^{x} \widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)'' dt$$

şeklinde olur. Burada iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^{2d-x-0} \widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)'' dt = \widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)'\Big|_{t=0}^{t=2d-x-0} - \int_0^{2d-x-0} \widetilde{K}_t(x,t)\left(e^{ikt}\right)' dt$$

$$= \widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)'\Big|_{t=0}^{t=2d-x-0} - \widetilde{K}_t(x,t)e^{ikt}\Big|_{t=0}^{t=2d-x-0} + \int_0^{2d-x-0} \widetilde{K}_{tt}(x,t)\left(e^{ikt}\right)dt$$

$$= \widetilde{K}(x,2d-x-0)\left(e^{ik(2d-x)}\right)' - \widetilde{K}(x,0)\left(e^{ik0}\right)' - \widetilde{K}_t(x,t)\Big|_{t=2d-x-0} e^{ik(2d-x)}$$

$$+ \widetilde{K}_t(x,t)\Big|_{t=0} e^{ik0} + \int_0^{2d-x-0} \widetilde{K}_{tt}(x,t)e^{ikt}dt$$

$$\int_{2d-x+0}^{x}\widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)''dt = \widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)'\Big|_{t=2d-x+0}^{t=x} - \widetilde{K}_t(x,t)e^{ikt}\Big|_{t=2d-x+0}^{t=x}$$
$$+\int_{2d-x}^{x}\widetilde{K}_{tt}(x,t)\left(e^{ikt}\right)'dt$$
$$= -\widetilde{K}(x,2d-x+0)\left(e^{ik(2d-x)}\right)' + \widetilde{K}(x,x)\left(e^{ikx}\right)' + \widetilde{K}_t(x,t)\Big|_{t=2d-x+0} e^{ik(2d-x)}$$
$$-\widetilde{K}_t(x,t)\Big|_{t=x} e^{ikx} + \int_{2d-x}^{x}\widetilde{K}_{tt}(x,t)e^{ikt}dt$$

$$\int_{0}^{x}\widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)''dt = \widetilde{K}(x,2d-x-0)\left(e^{ik(2d-x)}\right)' - \widetilde{K}(x,0)\left(e^{ik0}\right)'$$
$$-\widetilde{K}_t(x,t)\Big|_{t=2d-x-0} e^{ik(2d-x)} + \widetilde{K}_t(x,t)\Big|_{t=0} e^{ik0} + \int_{0}^{2d-x-0}\widetilde{K}_{tt}(x,t)e^{ikt}dt$$
$$-\widetilde{K}(x,2d-x+0)\left(e^{ik(2d-x)}\right)' + \widetilde{K}(x,x)\left(e^{ikx}\right)' + \widetilde{K}_t(x,t)\Big|_{t=2d-x+0} e^{ik(2d-x)}$$
$$-\widetilde{K}_t(x,t)\Big|_{t=x} e^{ikx} + \int_{2d-x}^{x}\widetilde{K}_{tt}(x,t)e^{ikt}dt$$
$$= -\left[\widetilde{K}_t(x,2d-x+0) - \widetilde{K}_t(x,2d-x-0)\right]e^{ik(2d-x)}$$
$$+\left[\widetilde{K}(x,2d-x+0) - \widetilde{K}(x,2d-x-0)\right]\left(e^{ik(2d-x)}\right)' - \widetilde{K}_t(x,x)e^{ikx}$$
$$-\widetilde{K}(x,x)\left(e^{ikx}\right)' - \widetilde{K}_t(x,0) - \int_{0}^{x}\widetilde{K}_{tt}(x,t)e^{ikt}dt$$

elde edilir.

$$\left[-\int_{0}^{x}\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt\right]'' + q(x)\int_{0}^{x}\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt + q(x)e_0(x,\lambda)$$
$$= \lambda\int_{0}^{x}\widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt = \int_{0}^{x}\widetilde{K}(x,t)\left(e^{ikt}\right)''dt$$

olduğundan bulunan ifadeler birbirine eşitlenirse

$$
\begin{aligned}
&-2\left[\widetilde{K}_x(x,2d-x+0)-\widetilde{K}_x(x,2d-x-0)\right]e^{ik(2d-x)} \\
&-\left[\widetilde{K}(x,2d-x+0)-\widetilde{K}(x,2d-x-0)\right]\left(e^{ik(2d-x)}\right)'-2\widetilde{K}_x(x,x)e^{ikx} \\
&-\widetilde{K}(x,x)\left(e^{ikx}\right)'-\int_0^x \widetilde{K}_{xx}(x,t)e^{ikt}dt+q(x)\int_0^x \widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt+a^+q(x)e^{ikx}+a^-q(x)e^{ik(2d-x)} \\
&=-\left[\widetilde{K}_t(x,2d-x+0)-\widetilde{K}_t(x,2d-x-0)\right]e^{ik(2d-x)} \\
&+\left[\widetilde{K}(x,2d-x+0)-\widetilde{K}(x,2d-x-0)\right]\left(e^{ik(2d-x)}\right)'-\widetilde{K}_t(x,x)e^{ikx}-\widetilde{K}(x,x)\left(e^{ikx}\right)' \\
&-\widetilde{K}_t(x,0)-\int_0^x \widetilde{K}_{tt}(x,t)e^{ikt}dt
\end{aligned}
$$

alınır. Bu son eşitlikte terim terim eşleme yapılırsa

$$\widetilde{K}_{xx}(x,t)-q(x)\widetilde{K}(x,t)=\widetilde{K}_{tt}(x,t)$$

$$-2\frac{d}{dx}\left[\widetilde{K}(x,2d-x+0)-\widetilde{K}(x,2d-x-0)\right]=-a^-q(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\widetilde{K}(x,2d-x+0)-\widetilde{K}(x,2d-x-0)\right]=\frac{a^-}{2}q(x)$$

$$\widetilde{K}(x,2d-x+0)-\widetilde{K}(x,2d-x-0)=\frac{a^-}{2}\int_0^x q(t)dt$$

$$-2\frac{d}{dx}\widetilde{K}(x,x)=-a^+q(x)\Rightarrow\frac{d}{dx}\widetilde{K}(x,x)=\frac{a^+}{2}q(x)$$

$$\widetilde{K}(x,x)=\frac{a^+}{2}\int_0^x q(t)dt$$

$$\widetilde{K}(x,0)=0$$

eşitlikleri elde edilir.

3.2. SPEKTRUM İÇİN ÖZELLİKLER

Bu bölümde L problemi için spektrumumun özelliklerini öğrenilecektir. $q(x)\equiv 0$ durumunda L yerine L_0 problemi alınırsa kolayca görülür ki $\varphi_0(0,k)=1$, $\varphi_0'(0,k)=0$ başlangıç koşulları ve (3.1.3) sıçrama şartlarını sağlayan $\varphi_0(x,k)$ çözümü

$$\varphi_0(x,k)=\begin{cases}\cos kx & , \ 0<x<d \\ a^+\cos kx + a^-\cos(2d-x) & , \ d<x<\pi\end{cases}$$

şeklindedir. L_0 probleminin karakteristik fonksiyonunu $\Delta_0(k)$ ile gösterilsin. L_0 probleminin karakteristik denklemi

$$\Delta_0(k)=a^+\cos k\pi + a^-\cos k(2d-\pi)=0 \tag{3.2.1}$$

formundadır. Burada bu denklemin $k_n{}^0$ kökleri L_0 probleminin özdeğerleridir.

Lemma 3.2.1: $\Delta_0(k)=0$ karakteristik denklemin kökleri ayrıktır öyleki

$$\inf_{n\neq m}\left|k_n{}^0-k_m{}^0\right|=\beta>0$$

dır.

İspat: Tersi kabul edilirse $\{k_n{}^0\}$ dizisinin $\{k_{n_p}{}^0\}$ ve $\{\hat{k}_{n_p}{}^0\}$ alt dizileri var olsun. Öyleki $k_{n_p}{}^0\neq\hat{k}_{n_p}{}^0$ ve $p\to\infty$ için $\hat{k}_{n_p}{}^0\to\infty$ ve $\lim_{p\to\infty}\left|k_{n_p}{}^0-\hat{k}_{n_p}{}^0\right|=0$ dır. Eğer $L_2(0,\pi)$ uzayında ki L_0 probleminin $\varphi_0(x,k_{n_p}{}^0)$ ve $\varphi_0(x,\hat{k}_{n_p}{}^0)$ özfonksiyonları ortagonal ise

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\pi\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)\overline{\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)}dx\\&=\int_0^\pi\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)\overline{\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)}dx+\int_0^\pi\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)\overline{\left[\varphi_0\left(x,\hat{k}_{n_p}{}^0\right)-\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)\right]}dx\\&\geq\int_0^d\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)\overline{\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)}dx+\int_0^\pi\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)\overline{\left[\varphi_0\left(x,\hat{k}_{n_p}{}^0\right)-\varphi_0\left(x,k_{n_p}{}^0\right)\right]}dx\end{aligned}$$

$$= \int_0^d \cos^2 k_{n_p}{}^0 x dx + \int_0^\pi \varphi_0\left(x, k_{n_p}{}^0\right)\left[\varphi_0\left(x, \hat{k}_{n_p}{}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{n_p}{}^0\right)\right]dx$$

$$= \frac{d}{2} + \frac{\sin^2 k_{n_p}{}^0 d}{2k_{n_p}{}^0} + \int_0^\pi \varphi_0\left(x, k_{n_p}{}^0\right)\left[\varphi_0\left(x, \hat{k}_{n_p}{}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{n_p}{}^0\right)\right]dx$$

sağlanır. $\varphi_0(x,k)$ fonksiyonunun özelliklerinden $p \to \infty$ için,

$$\lim_{p\to\infty}\left|\varphi_0\left(x, \hat{k}_{n_p}{}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{n_p}{}^0\right)\right| = 0$$

olur. Yani $[0,\pi]$ aralığındaki x değerleri için $p \to \infty$ için $\left|\varphi_0\left(x, \hat{k}_{n_p}{}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{n_p}{}^0\right)\right|$ sıfıra yakınsar. Bu sonuç $p \to \infty$ da limit alınarak $\frac{d}{2} \leq 0$ da elde edilir. Böylece Lemma3.2.1'in çözümünde çelişki alınır.

Δ_k karakteristik fonksiyonun özdeğerleri dizisi ve normalleştirici sayıları dizisi sırasıyla $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve (3.1.1) denkleminin $\varphi(0,k)=1$, $\varphi'(0,k)=0$ başlangıç koşulları ve (3.1.3) sıçrama şartlarını sağlayan çözümü $\varphi(x,k)$ fonksiyonu olsun. Burada $e(x,k)$ ve $e_0(x,k)$ çözümleri

$$\varphi(x,k) = \frac{1}{2}\left[e(x,k) + \overline{e(x,k)}\right]$$

$$\varphi_0(x,k) = \frac{1}{2}\left[e_0(x,k) + \overline{e_0(x,k)}\right]$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\varphi(x,k)$ çözümünü $e(x,k)$ fonksiyonunun özelliklerini kullanarak

$$\varphi(x,k) = \varphi_0(x,k) + \int_0^x \widetilde{K}(x,t)\cos kt dt \tag{3.2.2}$$

elde edilir. L probleminin karakteristik fonksiyonu ise

$$\Delta(k) = \Delta_0(k) + \int_0^\pi \widetilde{K}(x,t)\cos kt dt \tag{3.2.3}$$

şeklinde alınır.

Lemma3.2.2. $\Delta(k_n) \neq 0$ ise L probleminin özdeğerleri basittir.

İspat: $\psi(\pi,k)=0$, $\psi'(\pi,k)=1$ başlangıç koşullarını ve (3.1.3) sıçrama şartlarını sağlayan (3.1.1) denkleminin çözümü $\psi(x,k)$ fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$-\psi''(x,k)+q(x)\psi(x,k)=k\psi(x,k)$$
$$-\varphi''(x,k)+q(x)\varphi(x,k)=k\varphi(x,k)$$

eşitlikleri sağlanır. Eğer birinci denklemi $\varphi(x,k)$ ile ikinci denklemi $\psi(x,k)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılır ve $[0,\pi]$ aralığında integral alınırsa

$$(\varphi'(x,k)\psi(x,k)-\psi'(x,k)\varphi(x,k))\left(\Big|_0^d + \Big|_d^\pi \right)=(k-k_n)\int_0^\pi \psi(x,k)\varphi(x,k_n)dx$$

denklemi elde edilir. Eğer (3.1.3) sıçrama şartları ve $\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,k_n)dx \quad k \to k_n$

göz önüne alınırsa

$$\int_0^\pi \psi(x,k_n)\varphi(x,k_n)dx = -\Delta(k_n)$$

elde edilir. Tüm $x \in [0,\pi]$ için $\psi(x,k_n)=\beta_n\varphi(x,k_n)$ eşitliğini sağlayan β_n sabitleri için

$$\alpha_n\beta_n = -\Delta(k_n) \tag{3.2.4}$$

alınır. Dolayısıyla $\Delta(k_n) \neq 0$ olduğu açıktır.

Lemma 3.2.3. L probleminin özdeğerleri için asimptotik ifade;

$$k_n = k_n^0 + \frac{d_n}{k_n^0} + \frac{\delta_n}{k_n^0} \tag{3.2.5}$$

şeklindedir. Burada $\delta_n \in l_2$ ve

$$d_n = \frac{a^+ \sin k_n^0\pi - a^- \sin k_n^0(2d-\pi)}{2\Delta_0(k_n^0)k_n^0}\int_0^\pi q(t)dt$$

biçimindedir.

İspat:

$$G_n = \left\{ k : |k| = |k_n^0| + \frac{\beta}{2}, n = 0,1,\ldots \right\},$$

$$G_\delta = \left\{k : \left|k - k_n^{\,0}\right| \geq \delta, n = 0,1,...\delta > 0\right\}$$

olsun. Burada δ, mümkün olan en küçük pozitif sayıdır.$\left(\delta << \frac{\beta}{2}\right)$ $k \in \overline{G_\delta}$ için

$\left|\Delta_0(k)\right| \geq C_\delta e^{|\operatorname{Im} k|\pi}$ olduğu [23] den görülür. Diğer taraftan

$$\lim_{|k|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im} k|\pi}\left(\Delta(k) - \Delta_0(k)\right) = \lim_{|k|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im} k|\pi} \int_0^\pi \widetilde{K}(\pi,t)\sin ktdt = 0$$

ve n, $k \in G_n$ için

$$\left|\Delta(k) - \Delta_0(k)\right| < \frac{C_\delta}{2} e^{|\operatorname{Im} k|\pi}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $k \in G_n$ için

$$\left|\Delta_0(k)\right| \geq G_\delta e^{|\operatorname{Im} k|\pi} > \left|\Delta(k) - \Delta_0(k)\right|$$

eşitsizliği n doğal sayısı için elde edilir. n'in büyük değerleri için $\Delta_0(k)$ ve $\Delta_0(k) + \{\Delta(k) - \Delta_0(k)\} = \Delta k$ fonksiyonlarının bazı sayıları Rouche teoremi ve G_n Cantour kümesinin katlı sıfırlarıdır. Burada $(n+1)$ tane sıfır $k_0, k_1, ..., k_n$ şeklindedir.

Benzer şekilde Rouché teoremi kullanılarak yeterince büyük n için $\left|k - k_n^{\,0}\right| < \delta$ dairesi içinde $\Delta(k)$ sıfıra eşittir. δ yeterince küçüktür ve $k_n = k_n^{\,0} + \varepsilon_n$ dır. Burada $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ dır. k_n' ler $\Delta(k)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıdır ve

$$\Delta(k_n) = \Delta_0\left(k_n^{\,0} + \varepsilon_n\right) + \int_0^\pi \widetilde{K}(\pi,t)\cos\left(k_n^{\,0} + \varepsilon_n\right)tdt = 0$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$\Delta_0(k) = a^+ \cos k\pi + a^- \cos k(2d - \pi)$$

$$\Delta_0\left(k_n^{\,0} + \varepsilon_n\right) = \Delta_0\left(k_n^{\,0}\right)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

olduğundan

$$\varepsilon_n \Delta_0\left(k_n^{\,0}\right) + \int_0^\pi K(\pi,t)\cos\left(k_n^{\,0} + \varepsilon_n\right)tdt = 0 \tag{3.2.6}$$

elde edilir. $\Delta_0(k)$ fonksiyonu sinüs tipli $[25]$ ve bütün n'ler için $\gamma_\delta > 0$ sayısı için

$$\left|\Delta_0\left(k_n^{\ 0}\right)\right| \geq \gamma_\delta > 0$$

sağlanır. $k_n^{\ 0} = n + h_n$ şeklinde kullanılırsa $[26.27]$ burada $\sup_n |h_n| \leq M$ dir.

$\varepsilon_n \in l_2$ ise ε_n için

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\Delta_0\left(k_n^{\ 0}\right) + o(1)} \int_0^\pi K(\pi,t)\cos\left(k_n^{\ 0} + \varepsilon_n\right)t\,dt$$

$$= \frac{1}{\Delta_0\left(k_n^{\ 0}\right) + o(1)} \left[\widetilde{K}(\pi,\pi)\frac{\sin\left(k_n^{\ 0} + \varepsilon_n\right)\pi}{k_n^{\ 0} + \varepsilon_n} - \widetilde{K}(\pi,t)\frac{\sin\left(k_n^{\ 0} + \varepsilon_n\right)t}{k_n^{\ 0} + \varepsilon_n}\Bigg|_{t=2d-\pi-0}^{t=2d-\pi+0} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k_n^{\ 0} + \varepsilon_n} \int_0^\pi \widetilde{K}_t'(\pi,t)\sin\left(k_n^{\ 0} + \varepsilon_n\right)t\,dt \right]$$

olur. Buradan

$$\widetilde{K}(\pi,\pi) = \frac{a^+}{2}\int_0^\pi q(t)dt\,, \quad \widetilde{K}(\pi,2d-\pi+0) - \widetilde{K}(\pi,2d-\pi-0) = \frac{a^-}{2}\int_0^\pi q(t)dt$$

$$\int_0^\pi \widetilde{K}_t'(\pi,t)\sin\left(k_n^{\ 0} + \varepsilon_n\right)t\,dt \in l_2$$

olduğundan

$$\varepsilon_n = \frac{a^+ \sin k_n^{\ 0}\pi - a^- \sin k_n^{\ 0}(2d-\pi)}{2\Delta_0\left(k_n^{\ 0}\right)k_n^{\ 0}}\int_0^\pi q(t)dt + \frac{\widetilde{\delta}_n}{k_n^{\ 0}},\ \widetilde{\delta}_n \in l_2$$

şeklinde alınır. L probleminin k_n özdeğerleri için (3.2.5) aismptotik formülü doğrudur. Bununla birlikte Lemma 3.2.3'ün ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.4: L probleminin normalleştirilmiş sayıları için asimptotik eşitlik $\alpha_n = \alpha^0{}_n + \delta_n$ şeklindedir. Burada $\delta_n \in l_2$ dir.

İspat:

$$\Delta(k) = \Delta_0(k) + \int_0^\pi \widetilde{K}(\pi,t)\cos kt\,dt\,,$$

$$\Delta_0(k_n) = \Delta_0(k_n) - \int_0^\pi t\widetilde{K}(\pi,t)\cos kt\,dt$$

eşitliklerinden

$$\Delta_0(k_n) = \Delta_0\left(k_n{}^0 + \varepsilon_n\right) = \Delta_0(k_n) + O(\varepsilon_n)$$
$$\cos knt = \cos k_n{}^0 t + O(\varepsilon_n t)$$

olduğu açıktır. Burada $\varepsilon_n \in l_2$ dir. Bu durumda

$$\alpha_n\beta_n = -\Delta(k_n) = -\Delta_0\left(k_n{}^0\right) + \int_0^\pi t\widetilde{K}(\pi,t)\cos k_n{}^0 t dt + O(\varepsilon_n)\int_0^\pi t\widetilde{K}(\pi,t)\cos k_n{}^0 t dt + O(\varepsilon_n)$$

olur. Burada $\varepsilon_n \in l_2$, $\widetilde{K}(\pi,\cdot) \in L_2(0,\pi)$ ve $k_n{}^0 = n + h_n$ için

$$\delta_n{}^0 = \int_0^\pi t\widetilde{K}(\pi,t)\cos k_n{}^0 t dt + O(\varepsilon_n)\int_0^\pi t\widetilde{K}(\pi,t)\cos k_n{}^0 t dt + O(\varepsilon_n) \in l_2$$

dir. $\alpha_n = \alpha^0{}_n + \delta_n$ burada $\delta_n \in l_2$ dir.

3.3. Ters problem

$\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) denkleminin $U(\Phi) = 1$, $V(\Phi) = 0$ şartlarını ve (3.1.3) sıçrama şartlarını sağlayan çözüm olsun. $M(\lambda) = \Phi(0,\lambda)$ olsun. $\Phi(x,\lambda)$ ve $M(\lambda)$ fonksiyonları L sınır değer probleminin Wely çözümleri ve Wely fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada

$$M(\lambda) = -\frac{\delta(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{3.3.1}$$

dır. Burada $\delta(\lambda) := \psi'(0,\lambda)$ dır.

$$\Phi(x,\lambda) = S(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.3.2}$$

L probleminin spektrum noktaları ile Wely çözümü ve Wely fonksiyonu λ nın meromorfik fonksiyonlarıdır.

(4.1.1) ve (4.1.2) eşitliklerinden

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{3.3.3}$$

alınır. Burada

$$\psi(x,\lambda) = \psi(0,\lambda)\varphi(x,\lambda) - \Delta(\lambda)S(x,\lambda) \tag{3.3.4}$$

dir. $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) denkleminin $\psi(\pi,\lambda)=0, \psi'(\pi,\lambda)=-1$ şartlarını ve (3.1.3) sıçrama şartlarını sağlayan çözümüdür. Burada $\langle \varphi(x,\lambda)S(x,\lambda)\rangle \equiv 1$ dir. (4.1.2) ve (4.1.3) eşitliklerinden $x<d$ ve $x>d$ için

$$\langle \Phi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\rangle \equiv 1$$

$$\langle \varphi(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\rangle \equiv -\Delta(\lambda)$$

sağlanır.

Şimdi (3.1.1)-(3.1.4) formu ile verilen L sınır değer problemini spektral karakteristiklerle yeniden yapılandırarak ters problemi araştıralım. $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral kümeden, $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ iki spektrumdan, Wely fonksiyonundan L sınır değer problemini yapılandırarak ters problemin üç ifadesi bulunabilir. Bu ters problemler Sturm-Liouville operatörünün ters problemleridir. ([8]-[9])

Ters probleminin çözümünün tekliği için Wely fonksiyonu kullanılır. L sınır değer problemleri $L(q(x),a,d)$ şeklinde gösterilirse L'den farklı $\widetilde{L}$ sınır değer problemi ise $\widetilde{L}(\widetilde{q}(x),\widetilde{a},\widetilde{d})$ şeklinde olsun.

Teorem 4.1.1. Eğer $M(\lambda)=M(\widetilde{\lambda})$ ise $L=\widetilde{L}$ dir. Bu durumda L sınır değer probleminin Wely fonksiyonu tek şekilde belirlenir.

İspat:

$$\begin{aligned} &\psi^{(V)}(x,\lambda)=O\left(|k|^{V-1}\exp(|\operatorname{Im} k|(\pi-x))\right) \\ &|\Delta(k)|\geq C_\delta |k|\exp(|\operatorname{Im} k|\pi), k\in \overline{C}_\delta, V=0,1 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

sağladığından (4.1.3) ve (4.1.5) eşitliklerinden

$$\left|\Phi^{(V)}(x,\lambda)\right|\leq C_\delta |k|^{V-1}\exp(-|\operatorname{Im} k|x), k\in G_\delta \tag{3.3.6}$$

eşitliği alınır.

$P(x,\lambda)=\left[P_{jk}(x,\lambda)\right]_{j,k=1,2}$ matrisi

$$\begin{aligned} &P_{j1}(x,\lambda)=\varphi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}'(x,\lambda)-\Phi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) \\ &P_{j2}(x,\lambda)=\Phi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

şeklinde ifade elde edilir.

$$\varphi(x,\lambda)=P_{11}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)$$
$$\Phi(x,\lambda)=P_{11}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) \qquad (3.3.8)$$

olur. (4.1.3) ve (4.1.7) eşitliklrinden fixe edilmiş x için $P_{jk}(x,\lambda)$ fonksiyonu k_n ve $\widetilde{k}_n$ kutup noktaları ile k'nın meromorfik fonksiyonudur. $G^0{}_\delta = G_\delta \cap \widetilde{G}_\delta$ şeklinde tanımlanır.Burada

$$\varphi^{(V)}(x,\lambda) \le C_\delta |k|^{-1}, \; |P_{11}(x,\lambda)| \le C_\delta, \; k \in C^0{}_\delta \qquad (3.3.9)$$

(4.1.3) ve (4.1.7) den eğer $M(\lambda)=\widetilde{M}(\lambda)$ ise $P_{1k}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının hepsi k da x fikse edilmiş olsun. Bununla birlikte (4.1.9) eşitliğinden $P_{12}(x,\lambda)\equiv 0$, $P_{11}(x,\lambda)\equiv A(x)$ olsun.

(4.1.8) eşitlikleri kullanılarak

$$\varphi(x,\lambda)\equiv A(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda), \; \Phi(x,\lambda)\equiv A(x)\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \qquad (3.3.10)$$

ifadesi alınır. (3.1.4), (3.1.5) ve (3.2.3) dan $|k|\to\infty$ için $k\in(\varepsilon,\pi-\varepsilon]$ $\varepsilon>0$ için

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{b}{2}\exp(-ikx)\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

alınır. Burada $x<d$ için $b=1$ ve $x>d$ için $b=a^+$ dır.

Benzer şekilde

$$\Phi(x,\lambda)=(ikb)\exp(ikx)\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bununla birlikte

$$\langle\Phi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\rangle\equiv 1$$

ve (4.1.2)eşitliğinden tüm x ve λ'lar için $a^+=\widetilde{a}^+$, $A(x)=1$ ve $\varphi(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$, $\Phi(x,\lambda)=\widetilde{\Phi}(x,\lambda)$ olur.

Dolayısıyla $L=\widetilde{L}$ bulunur.

Teorem 4.1.2. Eğer $k=\widetilde{k}_n$, $\alpha_n=\widetilde{\alpha}_n$ $n\ge 0$ ise $L=\widetilde{L}$' dır Operatörün $\{k_n,\alpha_n\}_{n\ge 0}$ spektral kümesi tek şekilde gösterilebilir.

İspat:(3.2.4) eşitliğinden k_n kutup noktaları ile $M(\lambda)$ Wely fonksiyonu meromorfik fonksiyondur. (3.2.4.) ve (3.2.5) ve $\beta_n = \psi(0,k_n) = \dfrac{1}{\varphi(\pi,k_n)}$ ifadeleri kullanılırsa

$$\operatorname{Re} z_{k=k_n} M(\lambda) = \frac{\delta(k_n)}{\Delta(k_n)} = \frac{\beta_n}{\Delta(k_n)} = \alpha_n \tag{3.3.11}$$

alınır. Regüler $x \in \Gamma_n$ için Wely fonksiyonu için Cauchy teoremi kullanılırsa

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{M(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu, k \in in + \Gamma_n$$

dir. Diğer taraftan $\delta(k) = \psi(0,k)$ ve (4.1.5) eşitsizliğinden

$$\delta(k) = O(\exp(|\operatorname{Im} k|\pi)) \tag{3.3.12}$$

alınır.(4.1.1), (4.1.5) ve (4.1.12) ifadelerinden

$$|M(\lambda)| \le C_\delta |k|^{-1}, \; k \in G_\delta \tag{3.3.13}$$

olur. Böylece

$$M(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n1}} \frac{M(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu$$

bulunur. Burada $\Gamma_{n1} := \{k : |k| = |k_n{}^0|, n = 0,1,...\}$ şeklindedir. rezidü teoremi ve (4.1.11) eşitlikleri kullanılarak

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n(\lambda - k_n)} \tag{3.3.14}$$

alınır. Teoremin hipotezinden (4.1.14) den $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ ve dolayısıyla Teorem 4.1.1'den $L = \widetilde{L}$ ifadesi alınır.

Teorem.4.1.3. Eğer $k = \widetilde{k}_n$, $\mu_n = \widetilde{\mu}_n \; n \ge 0$ ise $(0,\pi)$de $q(x) = \widetilde{q}(x), d = \widetilde{d}, a = \widetilde{a}$ dır.

İspat: (3.2.4) dan $\Delta(k)$ fonksiyonu tüm $\frac{1}{2}$ sıralı k'lar için tek şekilde

$$\Delta(k) = C \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{k_n}\right) \tag{3.3.15}$$

gösterilir ve (3.2.1)den

$$\Delta_0(k)=\Omega_0 k\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{k}{k_n}\right),\quad \Omega_0=\pi a^+-(2d-\pi)a^-$$

olur. Buradan

$$\frac{\Delta(k)}{\Delta_0(k)}=C\frac{k_0-k}{k_0\Omega k}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{k_n{}^0}{k_n}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{k_n-k_n{}^0}{k_n{}^0-k}\right)$$

$k\to\infty$ için

$$C=-k_0\Omega_0\prod_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{k_n{}^0}$$

alınır. (4.1.15) eşitliğinden

$$\Delta(k)=\Omega_0(k-k_0)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{k_n-k}{k_n{}^0} \tag{3.3.16}$$

bulunur. (4.1.16) eşitliğinden $\{k_n\}_{n\geq 0}$ spektrumun özelliklerinden $\Delta(k)$ karakteristik fonksiyonu tek şekilde gösterilebilir. Aynı şekilde $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ sıfırları ile $\delta(k)$ fonksiyonu tek şekilde gösterilebilir. $k=\widetilde{k}_n$, $\mu_n=\widetilde{\mu}_n$ $n\geq 0$dır. Buradan $\Delta(k)\equiv\widetilde{\Delta}(k)$ ve $\delta(k)\equiv\widetilde{\delta}(k)$ (4.1.1) eşitliğinden açıktır.Dolayısıyla $M(\lambda)=\widetilde{M}(\lambda)$ alınır.

Teorem 4.1.1'den $(0,\pi)$ aralığında $q(x)=\widetilde{q}(x)$, $d=\widetilde{d}$, $a=\widetilde{a}$ sağlanır

Kaynaklar

[1] V.P. Meschanov, A.L. Feldstein, Automatic Design of Directional Couplers, Sviaz, Moscow, 1980.

[2] O.N. Litvinenko, V.I. Soshnikov, The Theory of Heterogeneous Lines and Their Applications in Radio Engineering, Radio, Moscow, 1964 (in Russian).

[3] R.J. Krueger, Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties, J. Math. Phys. 23 (3) (1982) 396–404.

[4] D.G. Shepelsky, The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions, Adv. Soviet Math. 19 (1994) 209–231.

[5] R.S. Anderssen, The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of tortional eigenfrequencies of the Earth, Geophys. J. R. Astr. Soc. 50 (1997) 303–309.

[6] F.R. Lapwood, T. Usami, Free Oscillations of the Earth, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.

[7] G. Borg, Eine umkehrung der Sturm–Liouvilleschen eigenwertaufgabe, Acta Math. 78 (1946) 1–96.

[8] B.M. Levitan, I.S. Sargsyan, Introduction to Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Math. Monogr., vol. 39, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

[9] V.A. Marchenko, Sturm–Liouville Operators and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev, 1977. English transl.: Birkhäuser, Basel, 1986.

[10] B.M. Levitan, Inverse Sturm–Liouville Problems, Nauka, Moscow, 1984. English transl.: VNU Sci. Press, Utrecht, 1987.

[11] J. Pöschel, E. Trubowitz, Inverse Spectral Theory, Academic Press, New York, 1987.

[12] V.A. Yurko, Inverse Spectral Problems for Differential Operators and Their Applications, Gordon and Breach, New York, 2000.

[13] J.R. McLaughlin, Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, SIAM Rev. 28 (1986) 53–72.

[14] O.H. Hald, Discontinuous inverse eigenvalue problems, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984) 539–577.

[15] A. McNabb, R.S. Andersson, E.R. Lapwood, Asymptotic behavior of the eigenvalues of a Sturm–Liouville system with discontinuous coefficients, J. Math. Anal. Appl. 54 (1976) 741–751.

[16] W.W. Symes, Impedence profile inversion via the first transport equation, J. Math. Anal. Appl. 94 (1983) 435–453.

[17] T. Aktosun, M. Klaus, C. Mee, Inverse wave scattering with discontinuous wave speed, J. Math. Phys. 36 (6) (1995) 2880–2928.

[18] W. Eberhard, G.G. Freiling, A. Schneider, On the distribution of the eigenvalues of a class of indefinite eigenvalue problem, Differential Integral Equations 3 (6) (1990) 1167–1179.

[19] R. Carlson, An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with discontinuous coefficients, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (2) (1994) 475–484.

[20] V.A. Yurko, On higher-order differential operators with a singular point, Inverse Problems 9 (1993) 495–502.

[21] V.A. Yurko, On higher-order differential operators with a regular singularity, Mat. Sb. 186 (6) (1995) 133–160.
English transl.: Sb. Math. 186 (6) (1995) 901–928.

[22] V.A. Yurko, Integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval, Integral

Transforms Spec. Funct. 5 (3–4) (1997) 309–322.

[23] R. Bellman, K. Cooke, Differential–Difference Equations, Academic Press, New York, 1963.

[24] B.Ya. Levin, Entire Functions, MGU, Moscow, 1971.

[25] B.F. Jdanovich, Formulae for the zeros of Dirichlet polynomials and quasi-polynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR 135 (8) (1960) 1046–1049.

[26] M.G. Krein, B.Ya. Levin, On entire almost periodic functions of exponential type, Dokl. Akad. Nauk SSSR 64 (3) (1949) 285–287.

[27] R.Kh. Amirov, V.A. Yurko, On differential operators with singularity and discontinuity conditions inside an interval, Ukrainian Math. J. 53 (11) (2001) 1443–1458.

[28] I.I. Privalov, Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable, eleventh ed., Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).