

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

ZONKLAYAN BİLEŞENLİ ALGOLLERDE BOZULMANIN
ZONKLAMA DÖNEMİNE ETKİSİ

Burak ULAŞ
Genel Fizik Anabilim Dalı
Tezin Sunulduğu Tarih: 30.09.2009

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Osman DEMİRCAN

ÇANAKKALE

DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Burak ULAŞ tarafından **Prof. Dr. Osman DEMİRCAN** yönetiminde hazırlanan “**ZONKLAYAN BİLEŞENLİ ALGOLLERDE BOZULMANIN ZONKLAMA DÖNEMİNE ETKİSİ**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

.....

Yönetici

.....

Jüri Üyesi

.....

Jüri Üyesi

.....

Jüri Üyesi

.....

Jüri Üyesi

Sıra No:.....

Tez Savunma Tarihi:...../...../.....

Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma boyunca bana destek olan danıŐmanım Prof. Dr. Osman DEMİRCAN'a, çalışmanın Atina'da geçen kısmında, her tÜrlÜ sorunda beni yalnız bırakmayan Prof. Dr. Panagiotis NIARCHOS, Alexios LIAKOS, Dr. Vassilis MANIMANIS ve Dr. Kosmas GAZEAS'a, tez süresi boyunca, değerli görÜŐ ve önerileriyle bu çalışmayı destekleyen tüm tez izleme jÜri Üyelerine teŐekkürlerimi sunarım.

Burak ULAŞ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|--------------------------------|
| r : Merkez uzaklığı | m : parlaklık birimi, kadir |
| t : Zaman | oEA : zonklayan örten Algol |
| Ω : Açısal hız | |
| m_1 : Birinci bileşenin kütlesi | |
| ω : Boyutsuz frekans | |
| ξ : Boyutsuz merkez uzaklığı | |
| ε : Boyutsuz potansiyel | |
| g : çekim ivmesi | |
| ζ_ψ : Eşpotansiyel yüzeyinin uzaklığı | |
| S_ψ : Eşpotansiyel yüzeyinin yüzey alanı | |
| G : Evrensel çekim sabiti | |
| M_\odot : Güneş kütlesi | |
| m_2 : İkinci bileşenin kütlesi | |
| P_j : j. dereceden Legendre polinomu | |
| r, θ, ϕ : Kutupsal küresel konsayılar | |
| q : Kütle oranı | |
| λ : Özdeğer, boyutsuz frekansın karesi | |
| γ : Özısılar oranı | |
| Ψ : Potansiyel | |
| P : Salınım dönemi | |
| σ : Salınım frekansı | |
| ξ_1 : Salınım genliği | |
| c_s : Ses hızı | |
| T : Sıcaklık | |
| ρ : Yoğunluk | |
| V_ψ : Eşpotansiyel yüzeyinin kapladığı hacim | |

ÖZET

ZONKLAYAN BİLEŞENLİ ALGOLLERDE BOZULMANIN ZONKLAMA DÖNEMİNE ETKİSİ

Burak ULAŞ

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Genel Fizik Anabilim Dalı Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Osman DEMİRCAN

30.09.2009, 72 sayfa

Bu çalışmada zonklayan bileşenli etkileşen yıldızların zonklayan bileşenlerinin temel zonklama frekanslarında dönmeden ve karşılıklı çekimden kaynaklanan şekil bozukluklarının etkileri araştırılmıştır. Matematiksel olarak zonklama frekansı ve zonklama genliğin kütle oranı ve merkez uzaklığı gibi temel niceliklere bağılılığı incelenmiştir artan ve azalan frekans değerleri için bu nicelikler birbirleriyle ilişkilendirilmiştir. Teorik model gözlemlerle test edilmiştir. Sonuçlar şekil bozulması olan yıldızlarda genlik ve frekansın tek yıldızlardakine göre değiştiğini göstermektedir.

Anahtar sözcükler: çift yıldızlar: zonklayan bileşenli çift yıldızlar, çift yıldızlar: yıldızlarda bozulma, zonklama.

ABSTRACT

EFFECT OF DISTORTION TO PULSATION PERIOD IN ECLIPSING ALGOLS WITH PULSATING COMPONENT

Burak ULAŞ

Çanakkale Onsekiz Mart Universty

Graduate School of Science and Engineering

Chair for General Physics Thesis of Ph.D.

Advisor: Prof. Dr. Osman DEMİRCAN

30.09.2009, p. 72

The effect of rotational and tidal distortion to the pulsation frequencies of pulsating components in close binary stars is investigated in this study. The variation of frequency and amplitude with fundamental quantities like mass ratio and central distance is studied. The theoretical model was tested by the observational data. The results show that the frequency and amplitude observable on the surface of the star vary slightly for distorted stars when compared to undistorted ones.

Keywords: binary stars: pulsating components in binary stars, binary stars: distortion, stellar pulsation.

İÇERİK

| | Sayfa |
|---|-----------|
| TEZ SINAVI SONUÇ BELGESİ | ii |
| İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI | iii |
| TEŞEKKÜR | iv |
| SİMGELER VE KISALTMALAR | v |
| ÖZET | vi |
| ABSTRACT | vii |
| | |
| BÖLÜM 1 – GİRİŞ | 1 |
| 1.1. Zonklayan Yıldızlar | 1 |
| 1.2. Çift Yıldız Bileşenlerinde Zonklama Özellikleri..... | 2 |
| | |
| BÖLÜM 2 – ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR | 4 |
| 2.1. Tarihçe | 4 |
| 2.2. Çift Yıldız Bileşeni Zonklayanlara İlişkin Çalışmalar..... | 6 |
| | |
| BÖLÜM 3 – MATERYAL VE YÖNTEM | 8 |
| 3.1. Çift Yıldızlarda Roche Modeli | 8 |
| 3.2. Topolojik Eşit Küre Yaklaşımı | 11 |
| 3.3. Küçük Adyabatik Salınımlar | 13 |
| | |
| BÖLÜM 4 – ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA | 21 |
| 4.1. Etkiyi Zonklama Zaman Ölçeğiyle İnceleme | 21 |
| 4.2. Küçük Adyabatik Salınımları Veren Diferansiyel Denklemin Çözümü | 26 |
| 4.3. Gözlemsel İnceleme | 41 |
| 4.3.1 Yöntem | 41 |
| 4.3.2 EF Her | 42 |
| 4.3.3 VV UMa | 44 |
| | |
| BÖLÜM 5 – SONUÇLAR VE ÖNERİLER | 47 |
| | |
| KAYNAKLAR | 49 |

İÇERİK

| | Sayfa |
|-------------------------|--------------|
| Ekler | I |
| Çizelgeler | IX |
| Şekiller | X |
| Özgeçmiş | XII |

BÖLÜM I

GİRİŞ

Zonklayan yıldızlar, gerek onları diğer tüm türlerden ayıran ışık değişim yapısı ile gerekse gözlemlerinden elde edilen bilgilerin derinliği ile astrofizikte önemli bir yere sahiptirler.

1.1 Zonklayan Yıldızlar

Hollow (2002)'de tanımlandığı üzere zonklayan yıldızlar, ışıklarındaki değişim fiziksel değişimlerinden kaynaklandığından, bünyesel değişenler sınıfına girerler. Zonklama, basitçe, yıldızın dış katmanlarının genişlemesi ve büzülmesi, dolayısıyla boyutlarının dönemsel olarak değişmesi olarak tanımlanabilir. Güneş gibi bir anakol yıldızının parlaklık ve boyutlarında aşırı değişim gözlenmez ve temelde durağan denilebilir. Çekirdekte füzyon ile foton üretiminden ortaya çıkan ışınım basıncı yıldız maddesini dışa doğru genişlemeye zorlarken çekim kuvveti onu bastırarak yıldızı durağan tutar.

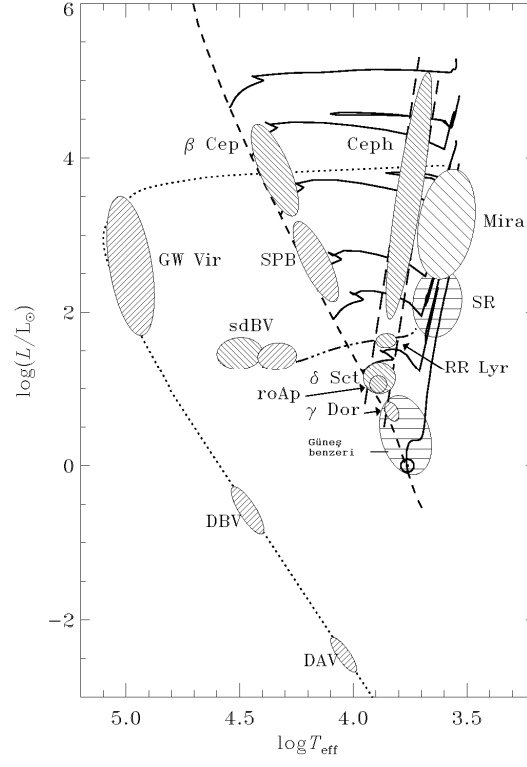
Zonklama, ilk akla gelenin aksine çekirdekte büyük oranda artan ışınım basıncı ile doğrudan ilişkili değildir. Asıl neden serbest kalan ışınım miktarına bağlanabilir. Eğer basınç ışınımın serbest kalamaması etkisiyle çekim kuvvetini geçerse yıldızın dış katmanları genişlemeye başlar. Yıldız genişledikçe merkeze doğru olan çekim kuvveti zayıflar ancak basınç da büyük oranda azalır, bu iki kuvvetin eşit olduğu bir hidrostatik denge noktasından geçer. Genişleyen dış katmanların momentumu bu noktanın geçilmesini sağlar. Genişleme devam ettikçe çekim kuvveti baskın gelir ve dış katmanları yavaşlatır, durdurur. Artık gaz ve ışınım basıncından büyük olan çekim kuvveti etkisiyle dış katmanlar çökmeye başlar. Çökme devam ettikçe basınç yüksek miktarda artar ve basıncın çekimi tekrar geçmesiyle çöken katmanların çökmesi durur. Döngünün başına tekrar gelir ve tüm basamaklar tekrarlanır (Bu döngü senaryosu Hollow (2002)'den alınmıştır).

Denge konumunda olmayan ve sürekli dengeye ulaşmaya çalışan zonklayan yıldızların, bu dengeye ulaşma çabası, onlara harmonik titreşici benzetmesi yapılarak zonklama karakteristiklerini ortaya çıkarmada büyük rol oynar. Yıldız sismolojisinde (asteroseismology) zonklamayı oluşturan ve sürdüren dalgaların türüne göre, gözlemlerin de katkısıyla, bu dalganın yıldız içindeki davranışı ortaya çıkarılıp, yıldızların iç yapısına ilişkin çok değerli bilgiler elde edilmektedir. Ayrıca bazı alt zonklayan yıldız türleri (Şekil 1.2.1) için zonklama dönemi ile ısıtma dolayısıyla uzaklık ilişkisi astrofizik için büyük önem taşımaktadır.

1.2. Çift Yıldız Bileşenlerinde Zonklama Özellikleri

Küresel yapıdan bozulmanın tek yıldızlarda bir örneğine dönme nedeniyle bozulma gösterilebilir. Tek yıldızlarda, gözlenen frekansların dönme etkisiyle bölünmeye uğradığı ve frekansı veren denkleme dönme açısal hızına bağlı ek bir terim getirdiği, dönmeyen bir yıldızla karşılaştırıldığında farklı bir frekans değeri gözleneceği bilinmektedir (Dalsgaard 2003). Bu bölünme, yıldızın iç dönmesine ilişkin bilgi de sunmaktadır. Gözlenen frekansın değişim miktarı yıldızın dönme hızına bağlı olup, hızlı ve yavaş dönen yıldızlarda sözü geçen ek terim değişmektedir. Bu tez çalışmasında da dayanak alınan birinci derece tedirginlik (pertürbasyon) yaklaşımını destekleyen ve δ Sct türü tek yıldızlardaki eksensel dönmenin salınım frekanslarına etkisini gözlemsel olarak inceleyen Kırbıyık (2008)'e göre, yavaş dönen yıldızlar için birinci derece tedirginlik yeterli olmakta, ancak, hızlı dönen yıldızlarda ikinci derece tedirginlik göz önüne alınmalıdır.

Zonklayan bileşenli çift yıldızlarda zonklama karakteristiğini çalışmada en büyük güçlük bileşenin küresel yapıdan sapmış olmasından kaynaklanmaktadır. Karşılıklı çekim ve dönme etkisiyle geometrisi bozulmuş bir yıldızda zonklamalar küresel olarak kabul edilebilecek bir modelden farklı olacak ve bu yıldız yüzeyine farklı yansıyacaktır. Bu çalışmada ele alınan problem astrofizikte halen, özellikle gözlemsel olarak, çözülmeye çalışılan bir problem olduğundan, günceldir. Problemin çözümü asterosismolojiye büyük katkılar yapması, özellikle gün geçtikçe sayıları artan çift yıldız dizgesi üyesi zonklayan bileşenlerin iç yapı ve zonklama karakteristiğini açıklaması bakımından önemlidir.



Şekil 1.2.1. Farklı zonklayan yıldız türlerinin H-R çizgesindeki konumları (Dalsgaard, 1999).

BÖLÜM II

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Tarihçe

Her ne kadar Pigott η Aql Cepheid türü değişenini ondan kısa bir süre önce keşfettiyse de (Gautschy, 2003) literatürde, ilk zonklayan yıldız keşfinin 1784 yılında Goodricke (1786) tarafından yapıldığı göze çarpmaktadır. Goodricke β Lyr'i keşfinden sonra δ Cephei²'nin dönemsel ve asimetrik ışık değişimini de gözlemiştir. O yıllarda yıldız değişim mekanizmaları iyi bilinmediğinden Cepheidler 130 yıla yakın bir süre boyunca çift yıldız olarak anılmıştır, ancak, 19. yy.da fiziğin gelişimi ile biriken gözlemsel verilerin açıklanması için çeşitli senaryolar oluşturulmuştur (Gautschy, 2003).

Yıldızlarda zonklamaların yapısına ilişkin ilk çalışma Baker and Kippenhahn (1962) tarafından Cepheid türü kararsızlıklar üzerine yapılan sayısal çözümleri içeren çalışma olarak kabul edilebilir. Daha sonra elektronik alanındaki gelişmelerin sayısal çözümlerde otomasyon sağlaması ve onları hızlandırması zonklamayı karakterize eden denklemlerin çözümlerinde bir patlamaya yol açmıştır. Günümüzde yıldız zonklamaları astrofiziğinin birçok kolunda, özellikle yıldız yapılarını anlamada önemli bir role sahiptir.

Gautschy (2003)'ün de belirttiği üzere, zonklayan yıldızların ışık eğrileri onları çift yıldız sınıfına koymakta zorluklar yaşatırken, birçok araştırmacı da tayftaki sorunlar üzerinde durmuştur. Plummer (1914) gözlemler için çapsal zonklama mekanizmasını ön plana taşıırken, Shapley (1914) tek yıldız için atmosferin çapsal zonklamasını kabul etmenin gözlemleri çift yıldız modelinden çok daha iyi açıkladığını göstermiştir. Shapley'i destekleyen en belirgin gerçeklerden biri Hertzsprung (1907, 1911, 1913) ve Russel (1913, 1914)'ın yaptığı sınıflama olmuştur. Cepheidler büyük salt parlaklığa sahip olmalarına rağmen kütleleri güneşten çok da büyük değildi, dolayısıyla, Cepheid'lerin büyük boyutları, çift sistemin yörüngesiyle karşılaştırılabilir boyutlara ulaşıyordu. Çift yıldız modelini destekleyen çalışmalar o tarihlerden sonra hızla azalmaya başlamıştır. Baade (1928)'in yıldız zonklaması üzerine geliştirdiği test, zonklayan yıldızın gözlenebilir alanının dönemsel değişiminin ısıtma ve sıcaklığı etkilemesini temel alıyordu. Bu etkiler dikine hızı ile evre arasındaki ilişkiye bakılarak ayrılabilir ve bu yarıçap hakkında bilgi verebilirdi. Bu yöntem Becker (1940), van Hoof (1943) ve Wesselink (1946) tarafından daha da geliştirilmiş ve zonklayan yıldızların fiziksel özelliklerinin belirlenmesinde kullanılmıştır. Gautschy (2003)'e göre Schwarzschild (1938) Cepheid'lerin zonklama davranışını test

etmek için zonklamaların bir adyabatik durum değişimi dizisi olduğu varsayımıyla, dikine hız verisinden ısıtma verisi türetmiş ve bu verinin δ Cephei'lerin gözlenen veriliyle çok iyi uyuştuğunu göstermiştir ve bu sonuç zonklama hipotezini tamamıyla desteklemiştir.

1917'de Eddington zonklayan yıldızları enerji kayıp ve kazanımının birbirini dengeleyeceği termodinamik bir sistem olarak incelemiş ve viskozitenin tedirginlikleri sınırlamada önemli bir rol oynayacağını ortaya atmıştır. 1918'deki detaylı çalışmasında ise adyabatik yaklaşımla salınımlara politropik modeli ve özısılları eklemeyi başarmıştır. 1919 makalesinde zonklamaların büzülmeyle desteklenemeyeceğini, bu tür bir yaklaşımın dönem değişimini açıklamada yetersiz kalacağını vurgulamıştır. Aynı çalışmada yarıçap ile parlaklık arasındaki evre farkından bahsetmiş ve bu farkı adyabatik olmayan hareketlere bağlamıştır.

Edgar (1933) zonklamanın sadece temel moda değil doğuşkan (overtone) modlarda da olduğunu ve ilişkinin, σ_k k'ncı moddaki salınım frekansını göstermek üzere, $e^{i\sigma_k t}$ olduğunu göstermiştir (Gautschy, 2003).

Yıldız kararsızlığına ilişkin çalışmalar da zonklamanın anlaşılması açısından etkili olmuştur. Cowling (1934) konvektif kararlı tüm yıldızların $\gamma > 1.38$ olduğu sürece zonklamaca da kararlı olduğunu ve nükleer enerji üretim denkleminde $n \approx 7-8$ değeri üzerinde olan yıldızların konvektif olarak kararsız olması gerektiğini göstermiştir. Ledoux (1941) ışınım basıncını da dikkate aldığı zonklama ve içyapı üzerine çalışmasında $n = 16$ ve Kramers donukluk yasası varsayımıyla, zonklamaca kararlı homojen bir yıldız için üst kütle sınırını $100M_{\odot}$ bulmuştur. Bu değer daha sonraları değişmesine rağmen mekanizma bugün kullandığımıza çok benzemektedir.

Sen (1948) politropik modele uyan incelemesinde, indeksin 4 olması varsayımıyla merkez yoğunluğunun ortalama yoğunluğa oranını 632 olarak önermiştir. Bu değer, aynı dönemde, merkezi bölgelerde çapsal yerdeğiştirmenin yüzeydekinin 10^{-6} katı olması gerektiğini vurgulayan ve en gerçekçi yıldız yapı modeli kullanılarak bulunan (Epstein 1950) $2.1 \times 10^5 - 2.4 \times 10^7$ değerinden çok daha küçüktür (Gautschy, 2003). Yine Gautschy (2003)' e göre, 1950'li yıllarda yapılan iki çalışma bugünkü iyonlaşma modelinin şekillenmesine katkıda bulunmuştur: Cox (1955)'in Epstein'in modelini zonklama kararsızlığını araştırmak için kullandığı ve adyabatik olmayan etkileri de ekleyerek ε -mekanizmasını betimlediği çalışması ile Zhevakin (1958)'in Cox'un da yaptığı gibi tetikleme mekanizması üzerinde durduğu ve He^+ iyonlaşma bölgesinin bu açıdan önemli bir rol oynadığını gösterdiği çalışmasıdır. Bu iyonlaşma bölgesiyle ilgili detaylı bir

çalışmayı yukarıda da belirtildiği üzere Baker ve Kippenhahn (1962) geliştirmiş, Cepheid türü değişenlerin tetikleme mekanizmasını ayrıntılı olarak çalışmışlardır. Ayrıntılı bir iyonlaşma yapısı kullanarak gözlemsel verilere dayalı sayısal çözümleme yapmışlardır (Gautschi, 2003).

2.2 Çift Yıldız Bileşeni Zonklayanlara İlişkin Çalışmalar

Çift yıldız bileşenleri için zonklama davranışı düşünüldüğünde, zonklamayı çift yıldız olmanın getirdiği etkilerden bağımsız düşünmek kimi zaman olanaksız olmaktadır. Bu tür yıldızlardaki zonklamalar üzerine çalışmalar çok eski olmasa da son yıllarda gözlemsel çalışmalar ile sayılarının artması dikkat çekmektedir. Özellikle zonklayan örten Algoller üzerine yapılan gözlemsel çalışmalar geçtiğimiz 10 yıl içinde epey hız kazanmıştır (Mkrichian ve ark., 2002, 2003, 2004; Soyduğan ve ark., 2006a). oEA (oscillating eclipsing Algols) adı verilen bu grubun en göze çarpan özelliği süregelen bir madde aktarımı ve aktarılan maddenin genellikle zonklayan bileşen etrafında toplanmasıdır. Günümüzde sayıları 40'a ulaşmıştır (Zhang ve ark., 2009).

Literatürde benzer problem üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Chandrasekhar ve Lebovitz (1962a) Virial teoreminin tensör formunu kullanarak dönen gazlar için üç gruba ayırdıkları modlardaki salınımları açıklamaya çalışmışlar ve dönmeyen gazlarla karşılaştırmışlardır. Chandrasekhar ve Lebovitz (1962b) ise aynı salınımların karakteristiklerini sıkıştırılabilir gazlar için McLauren sferoidleri yaklaşımıyla açıklamışlar ve farklı adyabatik koşullar için sonuçları irdemişlerdir. Mohan ve Singh (1978a, 1978b) Roche koordinatlarını kullanarak bozulmuş yıldızlarda dönme ve karşılıklı çekim etkisiyle frekanslarda oluşacak etkiyi incelemişler, bu yayınların devamı niteliğindeki Mohan ve Singh (1982)'de ise bu iki etkiyi birleştirerek, bu tez çalışmasında da değinilen yaklaşımları ele alarak, verilen bozulma parametreleri için beklenen frekansları elde etmişlerdir. Sidorov (1982) çift yıldız bileşenlerdeki salınımlarda, dönmenin frekansı arttıracığına ancak diğer bileşenin varlığının frekansa etki etmeyeceğini savunmuştur. Mohan ve Saxena (1985) soruna politropik model varsayımıyla yaklaşmış ve farklı politropik indekslerin çözümler üzerinde etkisini yayınlamıştır. Daha güncel çalışmalardan, Lee ve Saio (1997) dönmenin etkisini araştırarak farklı modlardaki düşük frekanslı salınımların açısız bağlılığını veren denklemi elde ederek dönme etkisini incelemişlerdir. Bu çalışmada küçük salınımları veren denklemi çıkardıktan sonra, adı geçen etkiler nedeniyle bozulmuş bir yıldızda tek dönemli bir zonklamanın karakteristiği, herhangi bir

merkezi uzaklıkta ve yüzeyde alacağı durum Roche modeli kullanılarak incelenmiş, küçük salınımları veren denklem çıkarıldıktan sonra daha önce literatürde yayınlanmamış yüzey genlik dağılımı grafikleri elde edilmiştir. Ayrıca, gözlemsel verilere ilk kez bu çalışmada belirtilen yöntemlerle çözüm aranmış ve etkinin gözlemsel kanıtlanabilirliği incelenmiştir.

BÖLÜM III

MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Çift Yıldızlarda Roche Modeli

Çift yıldızlar, özellikle bileşenleri birbirine yakın olanlar, çift olmanın gerektirdiği bazı koşullarla karşıya karşıyadır. Örneğin, gelgit etkisi bunlardan biridir ve özetle, dizgenin bir bileşeninin diğer bileşen üzerinde oluşturduğu çekim etkisi olarak açıklanabilir. Bu etki gelgite maruz kalan bileşenin küresel yapıdan sapmasına ve “*armutlaşmasına*” neden olmaktadır. Dolayısıyla, bu tür dizgeler çalışılırken, hem küresel olma hem de bu tür etkiler sonucu bozulup küresellikten sapma durumunu açıklayabilecek bir yöntem gereksinim duyulmaktadır. Hilditch (2001)’de de belirtildiği üzere, bu yöntem, nokta kütleli bileşenlerin kütle merkezi etrafında çembersel yörüngelerde dolandığı ve kilitli dönme gösterdiği varsayımıyla toplam çekimsel potansiyeli inceleyen Roche modelidir. Üç cisim sorununda çözümü imkânsızlaştıran matematiksel zorlukları yenebilmek için, iki kütleli cismin ortak kütle merkezi etrafında çembersel yörüngede dolandığı ve sonsuz küçük kütleli üçüncü cismin bu ikilinin çekim alanında hareket ettiği varsayılır. Eğer bu ikilinin çembersel yörüngesiyle birlikte dönen bir koordinat sistemi seçilirse, üçüncü cismin hareketinin bu koordinat sistemine göre sıfır olduğu bölgeyi temsil eden teorik bir alandan söz edilebilir. Bu alanlar *sıfır hız yüzeyleri* olarak adlandırılır. Şekilleri çekim potansiyelinin değerleri ile belirlenebilen ve nokta kütleler etrafında ayrı ayrı bulunan bu *sıfır hız yüzeyleri* kütlelerden uzaklaştıkça dizgeyi sarmaya başlar. Sadece iki yıldızdan oluşan bir dizgede bu hız yüzeyleri *sabit çekimsel potansiyel yüzeyleridir* (Hilditch, 2001). Aynı düşünceyle, yıldızın yüzeyi de aslında bir *eş potansiyel yüzeyidir* ve bu yüzeylerin matematiksel gösterimleri yıldız yüzeyinin yapısını modellemektedir.

Çembersel yörüngede dolanan bileşene sahip bir dizge için potansiyel ifadesi yazılabilir. Seçilen koordinat sisteminin orijini büyük kütleli yıldızın (m_1) merkezinde olmak üzere, küçük kütleli yıldızın (m_2) Ω sabit açısal hızıyla büyük kütleli etrafında çembersel bir yörünge izleyerek dolandığı düşünülür. Büyük kütleli yıldızın (0,0,0), küçük kütleli yıldızın da ($R,0,0$) noktasında (R , bileşenlerin merkezleri arası uzaklık olmak üzere) bulunduğunu varsayarak herhangi bir $P(x,y,z)$ noktasındaki çekimsel potansiyelin iki nokta kütleli potansiyelleri ve dönme potansiyelinin toplamı olduğunu söyleyebiliriz (Kopal, 1978; Hilditch, 2001) :

$$\Psi = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{r'} - \frac{\Omega^2}{2} \left[\left(x - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \right)^2 + y^2 \right] \quad (3.1.1)$$

Burada, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $r' = ((R-x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ olup iki bileşenin merkezinin P noktasına olan uzaklığını, göstermektedir. $\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}$ Kepler açısal hızı da merkezi

$\left(\frac{m_2 R}{m_1 + m_2}, 0, 0 \right)$ noktasında bulunan dizgenin bileşenlerinin merkezlerinden geçen yörünge

düzlemine diktir. Potansiyel ifadesini küresel kutupsal koordinat sisteminde yazmak istendiğinde aşağıdaki dönüşümler yapılmalıdır:

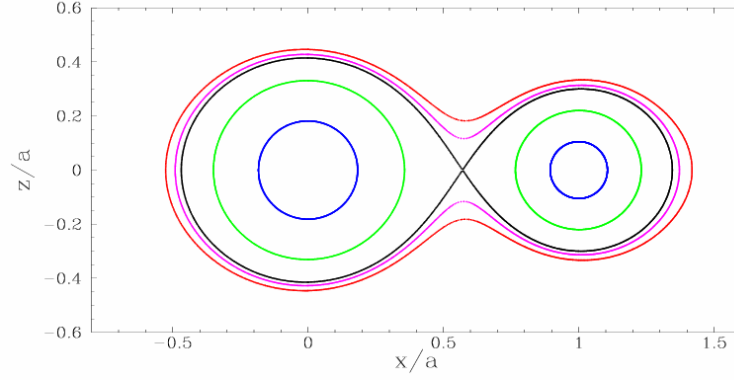
$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta = r \lambda \\ y &= r \sin \varphi \cos \theta = r \mu \\ z &= r \cos \theta = r \nu. \end{aligned}$$

Eşitlik (3.1.1)'de yerine konulduğunda,

$$\varepsilon = \frac{1}{r} + q \left\{ \frac{1}{(1 - 2\lambda r + r^2)^{\frac{1}{2}}} - \lambda r \right\} + \frac{q+1}{2} r^2 (1 - \nu^2) \quad (3.1.2)$$

boyutsuz potansiyel ifadesi bulunur. Burada, $\varepsilon = \frac{R\psi}{Gm_1} - \frac{m_2^2}{2m_1(m_1 + m_2)}$ ve $q = \frac{m_2}{m_1}$ 'dir.

ε 'un sabit olduğu yüzeyler Roche Eşpotansiyelleri adını almaktadır (Hilditch, 2001). Eğer ε büyük bir değerse sözü edilen yüzeyler eşitlik (3.1.2)'den de anlaşılacağı üzere nokta kütlelere yakın, birbirinden ayrı küreye çok benzer iki yapı gösterecektir. ε 'nın küçük değerlerde olması, bu yapıları dizgenin kütle merkezi doğrultusunda uzamaya zorlayacak ve Roche Limiti olarak adlandırılan kritik bir değerden sonra tek bir noktada birleşerek birbirine bir noktada değen iki *armut* görünümünü alacaklardır. Roche Limiti'nden daha küçük ε değerleri için ise yüzey iki bileşeni de saracak şekilde genişleyecektir (Şekil 3.1.1). Ancak böylesi bir yapı dizgeyi çift yıldız dizgesi sınıflandırmasının dışına çıkaracağından bu çalışma boyunca kritik değerden büyük olan ve ona eşit potansiyeller dikkate alınacaktır.



Şekil 3.1.1. Kütle oranı 0.5 olan bir dizge için eşpotansiyel çizgileri (Prša 2006)

Roche yüzeylerinin geometrisini incelerken onun yarıçap ve hacmine değinmek de yerinde olacaktır. Bunun için, öncelikle Kopal (1978)' de belirtilen yöntem kullanılarak Eşitlik (3.1.2)'deki $(1 - 2\lambda r + r^2)^{\frac{1}{2}}$ ifadesi için Legendre Polinomu'nu yazmak gerekmektedir. Legendre Polinomu için doğurucu fonksiyon ifadesi,

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + \eta^2 - 2\lambda\eta)}} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j P_j(\lambda)$$

şeklinindedir. Eşitlik (3.1.2)'deki benzerlikten, $(1 - 2\lambda r + r^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} r^j P_j(\lambda)$ ifadesi yerine

konulursa, $n = \frac{q+1}{2}$ olmak üzere,

$$(\varepsilon - q)r = 1 + q \sum_{j=2}^{\infty} r^{j+1} P_j(\lambda) + nr^3 (1 - r^2) \quad (3.1.3)$$

elde edilir. Eşpotansiyel yüzeylerin boyutları birim boyut olan R ile karşılaştırıldığında çok küçük olduğundan, Eşitlik (3.1.2)'nin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler göz ardı edilerek yarıçap için ilk yaklaşım yazılabilir (Kopal 1978):

$$r_0 = \frac{1}{\varepsilon - q}$$

Eğer herhangi bir r uzaklığı r_0 cinsinden yazılabilirse uzaklık sadece potansiyel ve kütle oranı değeri cinsinden elde edilebilir. Böylece, belli bir kütle oranı için tüm denklemlerimizi sabit bir ε cinsinden yazmak mümkün olacaktır. Kopal (1978)'in verdiği bu ilişkiyi Değirmenci (1995) tarafından verilen r_0^9 'lu terimdeki eki de göz önüne alarak, r_0 'ın onuncu terimine kadar yazarsak:

$$\begin{aligned}
\frac{r-r_0}{r_0} &= r_0^3 \{qP_2(\lambda) + n(1-v^2)\} \\
&+ r_0^4 \{qP_3(\lambda)\} + r_0^5 \{qP_4(\lambda)\} \\
&+ r_0^6 \{qP_5(\lambda) + 3[qP_2(\lambda) + n(1-v^2)]^2\} \\
&+ r_0^7 \{qP_6(\lambda) + 7q[qP_2(\lambda) + n(1-v^2)]P_3(\lambda)\} \\
&+ r_0^8 \{qP_7(\lambda) + 8q[qP_2(\lambda) + n(1-v^2)]P_4(\lambda) + 4q^2P_3^2(\lambda)\} \\
&+ r_0^9 \{qP_8(\lambda) + 9q[qP_2(\lambda) + n(1-v^2)]P_5(\lambda) + 9q^2P_3(\lambda)P_4(\lambda) + 12[qP_2(\lambda)n(1-v^2)]^3\} + \dots
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

elde ederiz. Hacim için de (3.1.4)'ü kullanarak:

$$V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \left[1 + 2nr_0^3 + \left(\frac{12}{5}q^2 + \frac{8}{5}nq + \frac{32}{5}n^2 \right) r_0^6 + \frac{15}{7}q^2r_0^8 + \frac{18}{9}q^2r_0^{10} + \dots \right] \tag{3.1.5}$$

Yarıçapın ve hacmin bu gösterimlerini adyabatik salınımlar için elde edeceğimiz denklemin çözümünde kullanacağız.

3.2. Topolojik Eşit Küre Yaklaşımı

Bu yaklaşım Kippenhahn ve Thomas (1970) tarafından geliştirilmiş, gelgit ve dönme etkilerinden dolayı bozulmuş yıldızların yapı denklemlerini elde etmek için kullanılmıştır. Bir cisimi topolojik eşit başka bir cisme dönüştürmek için onu sürekli fonksiyonlarla bozmak gerekir. Örneğin, bir kare çevresi bu kareye eşit bir çembere bozulabilir. Bu model de temelde, bozulmuş yıldızların topolojik olarak eşiti olan küreyi göz önüne alarak eşitliklerin bir küre yarıçapına bağlı olarak çıkarılmasını sağlar. Model, zonklayan yıldızlar için Mohan ve Singh (1982) tarafından da kullanılmıştır. Bu alt bölümde Mohan ve Singh (1982) tarafından verilen temel denklemler ve bu denklemlerin çıkarılışlarına özetle

değınilecektir. S_ψ , sabit bir eşpotansiyel yüzeyi ψ 'nin yüzey alanıysa, bu eşpotansiyel yüzeyi boyunca herhangi bir $f(x,y,z)$ fonksiyonunun ortalama değeri \bar{f} , $d\tau$ yüzey elemanı olmak üzere,

$$\bar{f} = \frac{1}{S_\psi} \int_{\psi=sbt} f d\tau$$

şeklinde yazılabilir. \bar{f} her bir eşpotansiyel yüzey için hesaplanabildiğinden (her x,y,z değeri bir eşpotansiyel yüzeye karşılık gelecektir), bu fonksiyon eşpotansiyelin fonksiyonudur, $\bar{f} = \bar{f}(\Psi)$.

İvme, potansiyelin bir doğrultudaki türevi olarak düşünölebileceğine göre, iki komşu eşpotansiyel yüzey arası uzaklık dn olmak üzere:

$$g = \frac{d\Psi}{dn}$$

olarak bulunur. O halde bu ivme ifadesinin ortalama değeri,

$$\bar{g} = \frac{1}{S_\psi} \int_{\psi=sbt} \frac{d\Psi}{dn} d\tau \quad (3.2.1)$$

bağıntısı ile verilebilir. Ψ ve $\Psi + d\Psi$ eşpotansiyel yüzeyleri arasında kalan hacim ise,

$$dV_\psi = d\Psi \int_{\psi=sbt} \frac{dn}{d\Psi} d\tau = \bar{g}^{-1} S_\psi d\Psi \quad (3.2.2)$$

olarak yazılabilir. Bu noktada, topolojik eşit küre yaklaşımının kilit bağıntısı olan hacim eşitliğini yazmak için eşpotansiyel yüzeyinin oluşturduğu hacmin yarıçapı r_ψ olan bir kürenin hacmine eşit olduğunu varsayacağız:

$$V_\psi = \frac{4}{3} \pi r_\psi^3. \quad (3.2.3)$$

$$u = \frac{S_\psi}{4\pi r_\psi^2} \quad (3.2.4)$$

Aynı tanımlama çekim ivmesi için yapılırsa,

$$w = \bar{g}^{-1} \frac{GM_{\Psi}}{r_{\Psi}^2}$$

yazılabilir. Eşitlik(3.2.2)'den iki yüzey arasındaki kütle miktarı çekildiğinde,

$$\frac{dM_{\Psi}}{dr_{\Psi}} = 4\pi r_{\Psi}^2 \rho(\Psi) \quad (3.2.5)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.2.2) ve (3.2.4)'den,

$$d\Psi = \frac{d\Psi}{dV_{\Psi}} dV_{\Psi} = \left(\frac{dV}{d\Psi} \right)^{-1} \frac{dM_{\Psi}}{\rho(\Psi)} = \frac{dM_{\Psi}}{\bar{g}^{-1} S_{\Psi} \rho(\Psi)} \quad (3.2.6)$$

yazılıp, daha önce tanımlanan u, w nicelikleri hidrostatik denge denkleminde yerine konulursa:

$$\frac{dP}{dM_{\Psi}} = - \frac{GM_{\Psi}}{4\pi r_{\Psi}^4} \cdot \frac{1}{uw} \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Böylece, adyabatik salınımları veren denklemi elde ederken de kullanacağımız ve dört temel yıldız yapı denkleminde ikisi olan (3.2.5) ve (3.2.7)'yi bulmuş oluruz.

3.3. Küçük Adyabatik Salınımlar

Yıldızlarda gerçekleşecek küçük adyabatik salınımlara ilişkin eşitliklerin elde edilmesi üzerine yapılan ilk çalışmalar Eddington (1918)'e dayanmaktadır. Eddington oluşabilecek bir salınının genliğe ve frekansa bağlı ikinci derece bir diferansiyel denklemle ifade edilebileceğini göstermiş ve bozulmamış bir yıldız yaklaşımıyla bazı özdeğerler için çözmüştür.

Salınımları verecek denklem elde edilirken ısı akışı göz önüne alınırsa dördüncü derece türev içeren, çözümü ve başlangıç koşullarının belirlenmesi oldukça güç bir diferansiyel denklemle karşı karşıya kalırız. Ancak, işlemi matematiksel olarak daha da basitleştirecek olan varsayım, adyabatik işlem varsayımı, yıldızların, salınımların gerçekleştiği büyük kısımlarının fazla donuk (opak) olması ve adyabatik olma durumuna çok yakın olmasıyla uyumaktadır. Bu yüzden tüm işlemi adyabatik işlem olarak kabul

ederek ikinci derece bir diferansiyel denklemi elde etme ve bu denkleme çözüm arama yolu, salınımların doğasını açıklamak için yanlış bir yol olmayacaktır. Bu alt bölümün ilk kısmında, Eddington (1918) tarafından verilen yöntem kullanılarak salınımları veren denklem elde edilecektir.

ξ , merkezden herhangi bir uzaklık ve P basınç olmak üzere, bu alt bölüm boyunca “0” alt indisinin tüm nicelikler için salınımlar öncesi tedirgin olmamış durumu gösterdiğini belirterek, salınımların etkisi,

$$\xi - \xi_0 = \delta\xi = \xi_0\xi_1 \quad ; \quad P - P_0 = \delta P = P_0P_1$$

kabul edilir. Varsayımlara işlemin adyabatik olduğundan başka, salınımların tek dönemli olduğu ve ikinci derece tedirginliklerin göz ardı edilebileceği de eklenirse γ , özısıların oranı ve ρ yoğunluk olmak üzere aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$P \propto \rho^\gamma$$

$$P_1 = \frac{\delta P}{P_0} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} = \gamma \rho_1 \quad (3.3.1)$$

madde kaybı olmadığı dikkate alınır, süreklilik denklemi,

$$\rho \xi^2 d\xi = \rho_0 \xi_0^2 d\xi_0$$

olacaktır. Bu ifadenin logaritmik türevi alınıp (3.3.1)’te yerine konulursa,

$$\frac{\delta \rho}{\rho_0} + 2 \frac{\delta \xi}{\xi_0} + \frac{d\delta \xi}{d\xi_0} = 0$$

$$\rho_1 = -2\xi_1 - \frac{d}{d\xi_0}(\xi_0 \xi_1) = -3\xi_1 - \xi_0 \frac{d\xi_1}{d\xi_0} \quad (3.3.2)$$

bulunur. Burada ξ_1 tedirginliğinin, $\xi_1 \cos(2\pi\sigma t)$ şeklinde bir zaman bağımlılığı bulunmakta ve tüm tedirginlikler gibi $\cos(2\pi\sigma t)$ çarpımını içermektedir. İlk yaklaşım olarak yıldızın küresel olduğunu düşünülür, $\xi = \xi_0 + \xi_0 \xi_1$ olduğu hatırlanır ve hidrostatik denge denklemi yazılırsa,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\xi} = -g - \frac{d^2\xi}{dt^2} = -g + \sigma^2 \xi_0 \xi_1$$

süreklilik denkleminde $\rho d\xi = \frac{1}{\xi^2} \rho_0 \xi_0^2 d\xi_0$ yerine konulursa,

$$\frac{1}{\rho_0 \xi_0^2} \frac{dP}{d\xi_0} = -\frac{g}{\xi^2} + \frac{\sigma^2 \xi_0 \xi_1}{\xi^2}$$

elde edilir. İvmenin $g = \frac{GM}{\xi^2}$ olduğu ve buna bağlı olarak

$$\delta \left(\frac{g}{\xi^2} \right) = -4GM \frac{\delta \xi}{\xi_0^5} = -4g_0 \frac{\xi_1}{\xi_0^2}$$

olacağı göz önüne alınırsa hidrostatik denge denklemi şu hali alır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0 \xi_0^2} \cdot \frac{d}{d\xi_0} (P_0 + P_0 P_1) &= -\frac{g_0}{\xi_0^2} + \left(\frac{4g_0}{\xi_0^2} + \frac{\sigma^2}{\xi_0} \right) \xi_1 \\ \frac{d}{d\xi_0} (P_0 + P_0 P_1) &= -g_0 \rho_0 + (4g_0 \rho_0 + \rho_0 \sigma^2 \xi_0) \xi_1 \\ \frac{dP_0}{d\xi_0} + \frac{d}{d\xi_0} (P_0 P_1) &= -g_0 \rho_0 + \rho_0 (4g_0 + \sigma^2 \xi_0) \xi_1 \end{aligned}$$

Bu eşitlik ikiye ayrılırsa,

$$\frac{dP_0}{d\xi_0} = -g_0 \rho_0 \quad ; \quad \frac{d}{d\xi_0} (P_0 P_1) = \rho_0 (4g_0 + \sigma^2 \xi_0) \xi_1$$

bulunur. Buradan da aşağıdaki eşitlik elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{d\xi_0} P_1 + \frac{dP_1}{d\xi_0} P_0 &= \rho_0 (4g_0 + \sigma^2 \xi_0) \xi_1 \\ -g_0 \rho_0 P_1 + \frac{dP_1}{d\xi_0} P_0 &= \rho_0 (4g_0 + \sigma^2 \xi_0) \xi_1 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

(3.3.1) ve (3.3.2) kullanılarak bulunacak eşitlik,

$$P_1 = -\gamma \left(3\xi_1 + \xi_0 \frac{d\xi_1}{d\xi_0} \right)$$

(3.3.3)'da yerine konursa, küçük adyabatik salınımları veren diferansiyel denkleme ulaşılabilir.

$$\begin{aligned} -4P_0\gamma \frac{d\xi_1}{d\xi_0} - \gamma P_0\xi_0 \frac{d^2\xi_1}{d\xi_0^2} + 3\gamma g_0\rho_0\xi_1 + \gamma g_0\rho_0\xi_0 \frac{d\xi_1}{d\xi_0} &= 4\rho_0 g_0\xi_1 + \rho_0\sigma^2\xi_0\xi_1 \\ (-\gamma P_0\xi_0) \frac{d^2\xi_1}{d\xi_0^2} + (\gamma g_0\rho_0\xi_0 - 4P_0\gamma) \frac{d\xi_1}{d\xi_0} + (3\gamma g_0\rho_0 - 4\rho_0 g_0 - \rho_0\sigma^2\xi_0) \xi_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\xi_1}{d\xi_0^2} - \frac{(\gamma g_0\rho_0\xi_0 - 4P_0\gamma)}{\gamma P_0\xi_0} \frac{d\xi_1}{d\xi_0} - \frac{(3\gamma g_0\rho_0 - 4\rho_0 g_0 - \rho_0\sigma^2\xi_0)}{\gamma P_0\xi_0} \xi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\xi_1}{d\xi_0^2} - \left(\frac{g_0\rho_0}{P_0} - \frac{4}{\xi_0} \right) \frac{d\xi_1}{d\xi_0} - \left(\frac{3g_0\rho_0}{P_0\xi_0} - \frac{4\rho_0 g_0}{\gamma P_0\xi_0} - \frac{\rho_0\sigma^2}{\gamma P_0} \right) \xi_1 = 0$$

$\mu = \frac{\rho_0 g_0}{P_0} \xi_0 = -\frac{\xi_0}{P_0} \frac{dP_0}{d\xi_0}$ değişken ataması yapılırsa denklem aşağıdaki şekli alacaktır

(Eddington, 1918):

$$\frac{d^2\xi_1}{d\xi_0^2} + \left(\frac{4-\mu}{\xi_0} \right) \frac{d\xi_1}{d\xi_0} + \left[\frac{\rho_0\sigma^2}{\gamma P_0} - \left(3 - \frac{4}{\gamma} \right) \frac{\mu}{\xi_0^2} \right] \xi_1 = 0 \quad (3.3.4)$$

Bu ikinci derece homojen lineer diferansiyel denklem, frekansa göre bir özdeğer problemi oluşturmaktadır. Önceki bölümlerde elde ettiğimiz ve Roche modelini belirleyen denklemleri topolojik olarak benzer küre yaklaşımıyla birleştirerek ve bu diferansiyel denklemin içine katarak, gelgit ve dönme etkisiyle bozulmuş bir yıldız için salınımların davranışı belirlenebilir (Mohan and Singh, 1982). Bu alt bölümün geri kalan kısmında Mohan ve Singh (1982)'de verilen yöntem kullanılarak Roche modeliyle temsil edilebilecek bir yıldızda salınımları veren denkleme, yan denklemlere değinilecek, genlik uzaklık dışındaki tüm simgelemelerde belirtilen makaleye sadık kalınacaktır. Bunun için öncelikle frekansın yerine geçecek boyutsuz bir nicelik belirleyeceğiz:

$$\omega^2 = \frac{R_\Psi^3}{GM_\Psi} \sigma^2. \quad (3.3.5)$$

Burada R_Ψ ve M_Ψ , Bölüm 3.2’de geçen yarıçap ve kütlelerin yüzeydeki değerleridir. Tek dönemli salınımlar için ($\xi_1 \cos(2\pi\sigma t)$) elde edilen denklemin topolojik eşit küre yaklaşımı sonucu yazımı şöyle olur:

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\zeta_\Psi^2} + \left(\frac{4-\mu}{\zeta_\Psi} \right) \frac{d\xi_1}{d\zeta_\Psi} + \left[\frac{\sigma^2 \rho(\Psi)}{\gamma P(\Psi)} - \left(3 - \frac{4}{\gamma} \right) \frac{\mu}{\zeta_\Psi^2} \right] \xi_1 = 0. \quad (3.3.6)$$

Bu denklemi gelgit ve dönme etkisiyle bozulmuş yıldızlar için de geçerli hale getirmek için Bölüm 3.1’de değinilen Roche modelinin temel denklemleri kullanılabilir. Buna göre, (3.3.6) diferansiyel denklemindeki ζ_Ψ uzaklığı Kopal (1978)’in verdiği $r_0 = 1/(\varepsilon - q)$ cinsinden yazılabilirse, soruna Roche modeli yaklaşımı da eklenmiş ve artık uzaklık belli bir kütle oranı için sadece yüzey potansiyeline bağlanmış olur. Denklemi r_0 ’a bağlı yazmak için aşağıdaki yol kullanılabilir:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dr_0^2} \left(\frac{dr_0}{d\zeta_\Psi} \right)^2 + \left\{ \frac{d}{dr_0} \left(\frac{dr_0}{d\zeta_\Psi} \right) + \frac{(4-\mu)}{\zeta_\Psi} \right\} \frac{d\xi_1}{dr_0} \frac{dr_0}{d\zeta_\Psi} + \left\{ \frac{\sigma^2 \rho(\Psi)}{\gamma P(\Psi)} - \left(3 - \frac{4}{\gamma} \right) \frac{\mu}{\zeta_\Psi^2} \right\} \xi_1 = 0 \quad (3.3.7)$$

Roche modeline sadık kalınacağından (3.1.4) ve (3.1.5), topolojik küre yaklaşımındaki (3.2.3) ile birleştirilirse:

$$\zeta_\Psi = \left(\frac{3}{4\pi} V \right)^{\frac{1}{3}} = r_0 \left[1 + \frac{2n}{3} r_0^3 + \left(\frac{4}{5} q^2 + \frac{8}{15} nq + \frac{76}{45} n^2 \right) r_0^6 + \frac{5}{7} q^2 r_0^8 + \frac{2}{3} q^2 r_0^{10} + \dots \right] \quad (3.3.8)$$

ve bu eşitlik yardımıyla

$$\frac{d\zeta_\Psi}{dr_0} = 1 + \frac{8n}{3} r_0^3 + \left(\frac{28}{5} q^2 + \frac{56}{15} nq + \frac{532}{45} n^2 \right) r_0^6 + \frac{45}{7} q^2 r_0^8 + \frac{22}{3} q^2 r_0^{10} + \dots \quad (3.3.9)$$

yazılabilir. Ayrıca, (3.3.8) serisinin tersini alarak,

$$r_0 = A_1 \zeta_\Psi + A_2 \zeta_\Psi^2 + A_3 \zeta_\Psi^3 + A_4 \zeta_\Psi^4 + A_5 \zeta_\Psi^5 + A_6 \zeta_\Psi^6 + A_7 \zeta_\Psi^7 + A_8 \zeta_\Psi^8 + A_9 \zeta_\Psi^9 + A_{10} \zeta_\Psi^{10} + A_{11} \zeta_\Psi^{11} + \dots$$

bulunabilir. Morse ve Feshbach (1953)’in verdiği bağıntıyı kullanarak,

$$A_n = \frac{1}{na_1^n} \sum_{s,t,u,\dots} \frac{\left((-1)^{s+t+u+\dots} n(n+1)\dots(n+s+t+u+\dots-1) \right)}{(s!t!u!)} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^s \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^t \dots$$

$s + 2t + 3u + \dots = n - 1$ ve a_1, a_2, \dots tersi alınan serinin katsayıları olmak üzere, her bir A_n değeri bulunarak, Mohan ve Singh(1982)'ye benzer olarak, $r_0(\zeta_\Psi)$ şu şekilde yazılabilir:

$$r_0 = \zeta_\Psi \left[1 + \frac{2n}{3} \zeta_\Psi^3 + \frac{4}{45} (n^2 - 6nq + 9q^2) \zeta_\Psi^6 + \frac{5q^2}{7} \zeta_\Psi^8 + \frac{88}{45} (3n^3 + 2n^2q + 3nq^2) \zeta_\Psi^9 - \frac{2q^2}{3} \zeta_\Psi^{10} + \dots \right].$$

Türevi alınıp ζ_Ψ yerine konulursa,

$$\frac{dr_0}{d\zeta_\Psi} = 1 - \frac{8n}{3} r_0^3 - \left(\frac{252}{45} q^2 + \frac{56}{15} nq + \frac{28}{45} n^2 \right) r_0^6 - \frac{45}{7} q^2 r_0^8 + \frac{176}{9} (3n^3 + 2n^2q + 3nq^2) r_0^9 - \frac{22}{3} q^2 r_0^{10} + \dots \quad (3.3.10)$$

bulunur. Eşpotaniyel yüzeyin alanı ise:

$$S_\Psi = 4\pi r_0^2 \left[1 + \frac{4n}{3} r_0^3 + \left(\frac{7}{5} q^2 + \frac{14}{15} nq + \frac{56}{15} n^2 \right) r_0^6 + \frac{9}{7} q^2 r_0^8 + \frac{11}{9} q^2 r_0^{10} + \dots \right] \quad (3.3.11)$$

halini alır. Kopal (1978), n eşpotaniyel yüzeyin normal birim vektörü olmak üzere, ξ ile ilgili aşağıdaki bağıntıyı vermiştir:

$$\frac{d\xi}{dn} = \frac{1}{r^2} \left[1 - (1+q)(1-\nu^2)r^3 + q \sum_{j=2}^4 P_j(\lambda) + \dots \right]$$

Bu bağıntı kullanılarak \bar{g} 'nin boyutsuz biçimi,

$$\bar{g} = \frac{1}{r_0^2} \left[1 - \frac{8n}{3} r_0^3 - \left(3q^2 + 2nq + \frac{40}{9} n^2 \right) r_0^6 - \frac{51}{14} q^2 r_0^8 - \frac{13}{3} q^2 r_0^{10} + \dots \right] \quad (3.3.12)$$

şeklinde yazılabilir.

Küçük adyabatik salınımları veren denklemi boyutsuz nicelikler cinsinden yazmaya devam edebilmek için basınç için de boyutsuz bir eşitlik bulmak gerekmektedir.

$$\frac{dP(\Psi)}{d\zeta_\Psi} = \frac{dP(\Psi)}{d\Psi} \frac{d\Psi}{dM_\Psi} \frac{dM_\Psi}{d\zeta_\Psi} \quad (3.3.13)$$

yazılabilir. Bu ifadenin terimleri tek tek incelenirse, hidrostatik denge denkleminde,

$$\frac{dP(\Psi)}{d\Psi} = -\rho(\Psi),$$

(3.2.6)'dan

$$\frac{d\Psi}{dM_\Psi} = \frac{1}{\bar{g}^{-1} S_\Psi \rho(\Psi)}$$

ve (3.2.5)'den

$$\frac{dM}{d\zeta_\Psi} = 4\pi\zeta_\Psi^2 \rho(\Psi)$$

(3.3.13)'de yerine yazılırsa, ι bir sabit olmak üzere,

$$\frac{dP(\Psi)}{dr_0} = \iota \left\{ \frac{1}{r_0^4} + \frac{4n}{3r_0} - \left(2q^2 + \frac{4}{3}nq + \frac{28}{9}n^2 \right) r_0^2 - \frac{29}{14}q^2 r_0^4 - \frac{20}{9}q^2 r_0^6 + \dots \right\} \quad (3.3.14)$$

olarak bulunacak ifadenin integralini alarak,

$$P = \frac{\iota K}{3r_0^3} \left\{ 1 + \frac{4n(\log r_0)r_0^3}{K} + \left(2q^2 + \frac{4}{3}nq + \frac{28}{9}n^2 \right) \frac{r_0^6}{K} + \frac{87}{70} \frac{q^2 r_0^8}{K} + \frac{20}{21} \frac{q^2 r_0^{10}}{K} + \dots \right\} \quad (3.3.15)$$

bulunur. Burada,

$$K = 1 + 3Cr_0^3$$

ve R_0, r_0 'ın yüzeydeki değeri olmak üzere,

$$C = \left\{ -\frac{1}{3R_0^3} - \frac{4n}{3} \log(R) - \left(\frac{2}{3}q^2 + \frac{4}{3}nq + \frac{28}{27}n^2 \right) R_0^3 - \frac{29}{70}q^2 R_0^5 - \frac{20}{63}q^2 R_0^7 + \dots \right\}$$

olarak verilir. Tüm bu gösterimleri yerine koyarak küçük adyabatik salınımları veren bağıntı (3.3.5) de hatırlanarak boyutsuz nicelikler cinsinden yazılabilir (Mohan ve Singh, 1982):

$$A(r_0) \frac{d^2 \xi_1}{dr_0^2} + B(r_0) \frac{d \xi_1}{dr_0} + [\omega^2 E(r_0) - D(r_0)] \xi_1 = 0. \quad (3.3.16)$$

Burada,

$$A(r_0) = 1 - \frac{16}{3} nr_0^3 - \left(\frac{56}{5} q^2 + \frac{112}{15} nq + \frac{104}{45} n^2 \right) r_0^6 - \frac{90}{7} q^2 r_0^8 - \frac{44}{3} q^2 r_0^{10}$$

$$B(r_0) = \frac{1}{r_0} \left\{ \begin{aligned} & \left(4 - \frac{3}{K} \right) - \left[\frac{64}{3} - \frac{20}{K} - \frac{12(\log r_0)}{K^2} \right] nr_0^3 - \left(\frac{296}{5} q^2 + \frac{592}{15} nq + \frac{1064}{45} n^2 \right) r_0^6 \\ & + \left(\frac{198}{5} q^2 + \frac{132}{5} nq + \frac{76}{15} n^2 \right) \frac{r_0^6}{K} + \left(6q^2 + 4nq + \frac{28}{3} n^2 \right) \frac{r_0^6}{K^2} - \left[\frac{48(\log r_0)^2}{K^3} + \frac{80(\log r_0)}{K^2} \right] n^2 r_0^6 \\ & + \left(-\frac{560}{7} + \frac{627}{14K} + \frac{261}{70K^2} \right) q^2 r_0^8 + \left(-\frac{316}{3} + \frac{152}{3K} + \frac{20}{7K^2} \right) q^2 r_0^{10} + \dots \end{aligned} \right\}$$

$$E(r_0) = \frac{3r_0}{\gamma K} \left\{ \begin{aligned} & 1 - 4 \left[\frac{1}{3} + \frac{(\log r_0)}{K} \right] nr_0^3 - \left(\frac{8}{5} q^2 + \frac{16}{15} nq + \frac{92}{45} n^2 \right) r_0^6 \\ & - \left(2q^2 + \frac{4}{3} nq + \frac{28}{9} n^2 \right) \frac{r_0^6}{K} + 16 \left[\frac{(\log r_0)^2}{K^2} + \frac{\log r_0}{3K} \right] n^2 r_0^6 \\ & - \left(\frac{10}{7} + \frac{87}{70K} \right) q^2 r_0^8 - \left(\frac{4}{3} + \frac{20}{21K} \right) q^2 r_0^{10} + \dots \end{aligned} \right\}$$

$$D(r_0) = \frac{3(3-4/\gamma)}{r_0^2 K} \left\{ \begin{aligned} & 1 - \left[\frac{14}{3} + \frac{4(\log r_0)}{K} \right] nr_0^3 - \left(\frac{42}{5} q^2 + \frac{84}{15} nq + \frac{128}{45} n^2 \right) r_0^6 \\ & - \left(2q^2 + \frac{4}{3} nq + \frac{28}{9} n^2 \right) \frac{r_0^6}{K} + \left[\frac{16(\log r_0)^2}{K^2} + \frac{56(\log r_0)}{3K} \right] n^2 r_0^6 \\ & - \left(\frac{129}{14} + \frac{87}{70K} \right) q^2 r_0^8 - \left(\frac{92}{9} + \frac{20}{21K} \right) q^2 r_0^{10} + \dots \end{aligned} \right\}$$

değerlerini almaktadır.

BÖLÜM IV

ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Etkiyi Zonklama Zaman Ölçeğiyle İnceleme

Çalışmada ilk yaklaşım olarak zonklama dönemini bir ses dalgasının yıldızın yüzeyinden merkezine gidip geri dönmesi için geçen süre olarak kabul eden yaklaşım ele alınmıştır. Vitense (1989)' a göre, P dönem, R yarıçap ve c_s ses hızı olmak üzere:

$$P = \frac{2R}{c_s} \quad (4.1.1)$$

olarak yazılmaktadır. O halde, küresel olmayan bir geometrik yapıda bir zonklama, herhangi bir merkez uzaklığı için o uzaklıkla eşit yarıçapa sahip kürenin zonklaması olarak düşünülebilir. Böylece, her merkez uzaklığı için ayrı bir zonklama dönemi yazılabilir. Buna göre, gelgit ve dönme etkisiyle bozulmuş herhangi bir çift yıldız bileşeninde, her bir merkez uzaklığına karşılık gelen dönem değeri ile o yıldıza hacimce eşdeğer kürenin yarıçapına karşılık gelen dönem karşılaştırılabilir. r_0 eşdeğer kürenin yarıçapı, r bozulmuş yıldıza herhangi bir merkez uzaklığı ve P_0, P onlara karşılık gelen dönemler olmak üzere:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{r}{r_0} \quad (4.1.2)$$

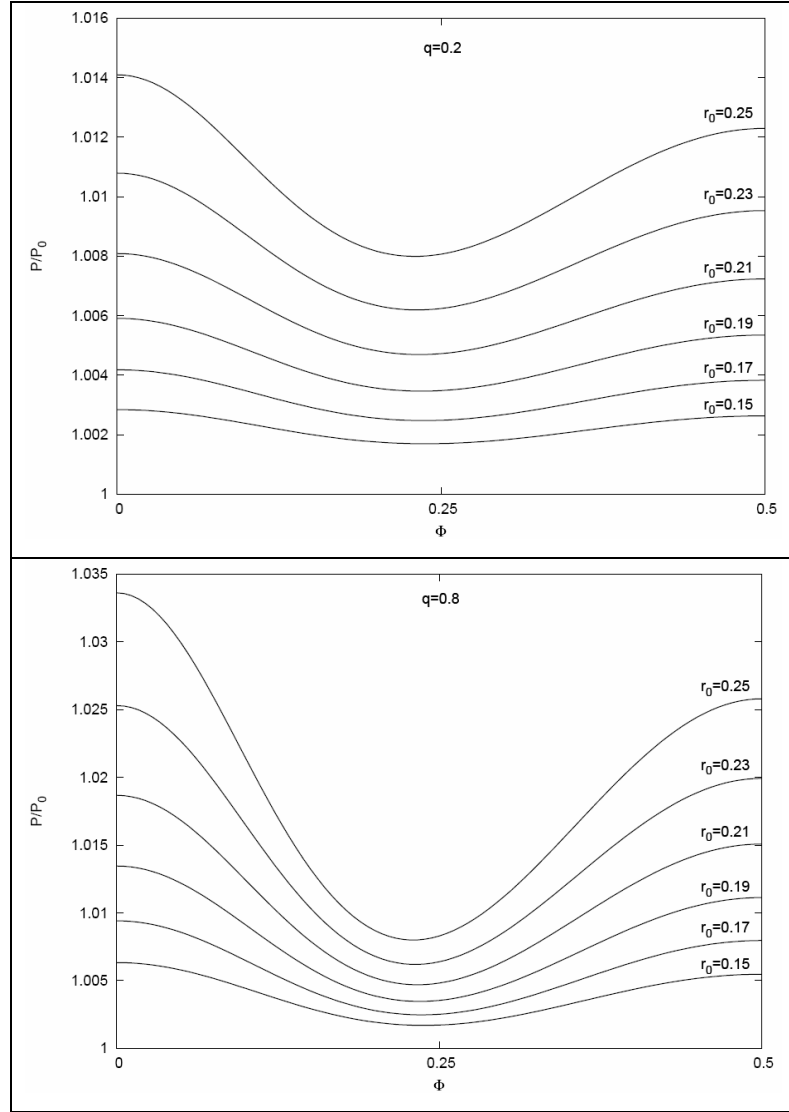
olduğu açıkça görülebilir. Bu noktada r ile r_0 arasında bulunacak bir ilişki, yukarıda adı geçen iki dönem arasında bağlantı kurulmasını sağlayacaktır. Kopal (1978), bozulmuş ve ona eşdeğer hacimde bozulmamış (küresel) bir yıldıza, bozulmadan kaynaklanan ve Legendre Polinomları ile temsil edilebilen ek terimleri içeren bu ilişkiyi, Roche modelinden $r - r_0$ ilişkisini vermektedir. $\lambda = \cos \phi \sin \theta, \nu = \cos \theta$, q kütle oranı ve $n = q + 1/2$ ve r, θ, ϕ küresel kutupsal koordinat sisteminin konsayıları olmak üzere, Değirmenci (1995) tarafından r_0^9 'lu terime verilen düzeltmeyi de kullanarak,

$$\begin{aligned}
\frac{r-r_0}{r_0} &= r_0^3 \{qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)\} \\
&+ r_0^4 \{qP_3(\lambda)\} + r_0^5 \{qP_4(\lambda)\} \\
&+ r_0^6 \{qP_5(\lambda) + 3[qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)]^2\} \\
&+ r_0^7 \{qP_6(\lambda) + 7q[qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)]P_3(\lambda)\} \\
&+ r_0^8 \{qP_7(\lambda) + 8q[qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)]P_4(\lambda) + 4q^2P_3^2(\lambda)\} \\
&+ r_0^9 \{qP_8(\lambda) + 9q[qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)]P_5(\lambda) + 9q^2P_3(\lambda)P_4(\lambda) + 12[qP_2(\lambda)n(1-\nu^2)]^3\} + \dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu bağıntıyı 2.1.2’de yerine koyduğumuzda,

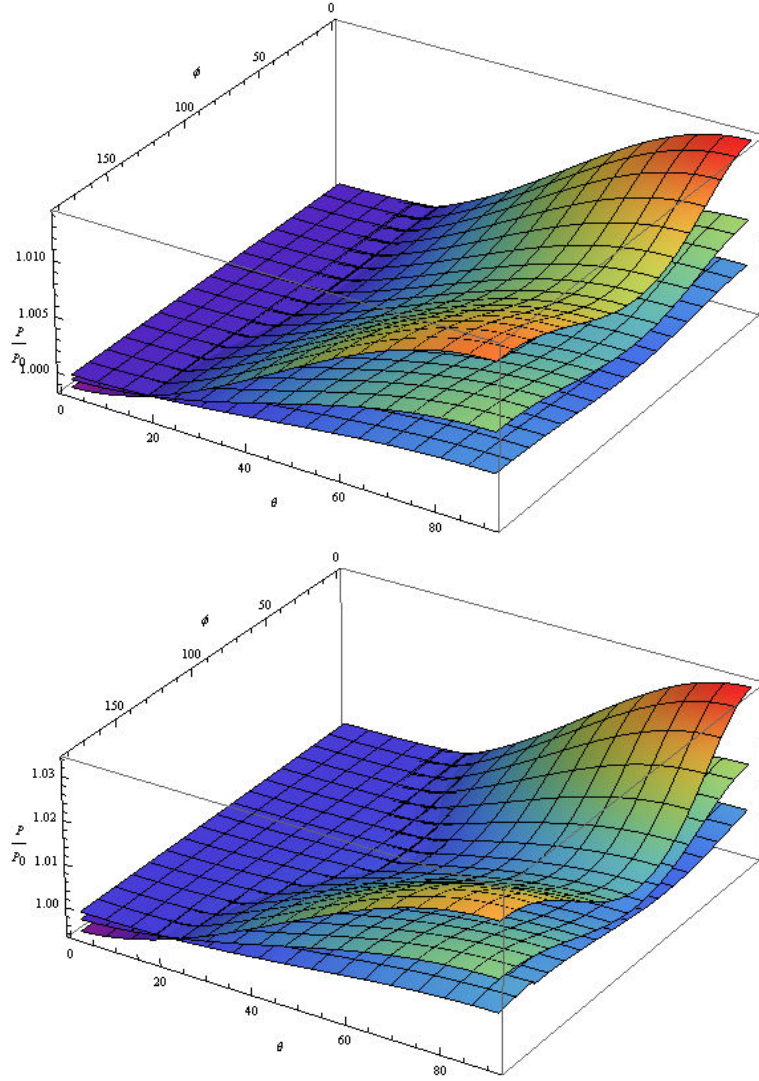
$$\begin{aligned}
\frac{P}{P_0} &= 1 + r_0^3 \{qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)\} \\
&+ r_0^4 \{qP_3(\lambda)\} + r_0^5 \{qP_4(\lambda)\} \\
&+ r_0^6 \{qP_5(\lambda) + 3[qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)]^2\} \\
&+ r_0^7 \{qP_6(\lambda) + 7q[qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)]P_3(\lambda)\} \\
&+ r_0^8 \{qP_7(\lambda) + 8q[qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)]P_4(\lambda) + 4q^2P_3^2(\lambda)\} \\
&+ r_0^9 \{qP_8(\lambda) + 9q[qP_2(\lambda) + n(1-\nu^2)]P_5(\lambda) + 9q^2P_3(\lambda)P_4(\lambda) + 12[qP_2(\lambda)n(1-\nu^2)]^3\} + \dots
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

ilişkisini buluruz (Ulaş ve Demircan, 2007). Bu bağıntı bozulmuş bir yıldızda herhangi bir merkez uzaklığı için meydana gelecek zonklamanın dönemi ile bozulmamış bir yıldızda oluşacak aynı türde zonklamanın karşılaştırılmasını sağlar. Bu bağıntının kullanılmasındaki bir yarar da kutupsal küresel koordinat sisteminin bir konsayısı olan ϕ ’nin çift yıldız dizgesinin evresiyle uyuşmasıdır. Buna göre, yüzeydeki zonklamalar ele alınarak, evreye göre çizilecek bir dönem oranı grafiği, bozulmuş yıldızın evre boyunca yüzeyinde görülecek farklı dönemleri ortaya koyacaktır. $\theta = 90^\circ$ olduğu, yani yörünge düzlemindeki zonklama dönemlerinin incelendiği varsayılırsa, farklı iki kütle oranı için, dönem oranı – evre grafikleri Şekil 4.1.1’deki gibi olmaktadır. x - z düzlemine göre simetrik bir geometrik yapı düşünüldüğünden $\frac{P}{P_0}$ oranındaki değişim 0.5 evresine göre simetri göstermektedir.



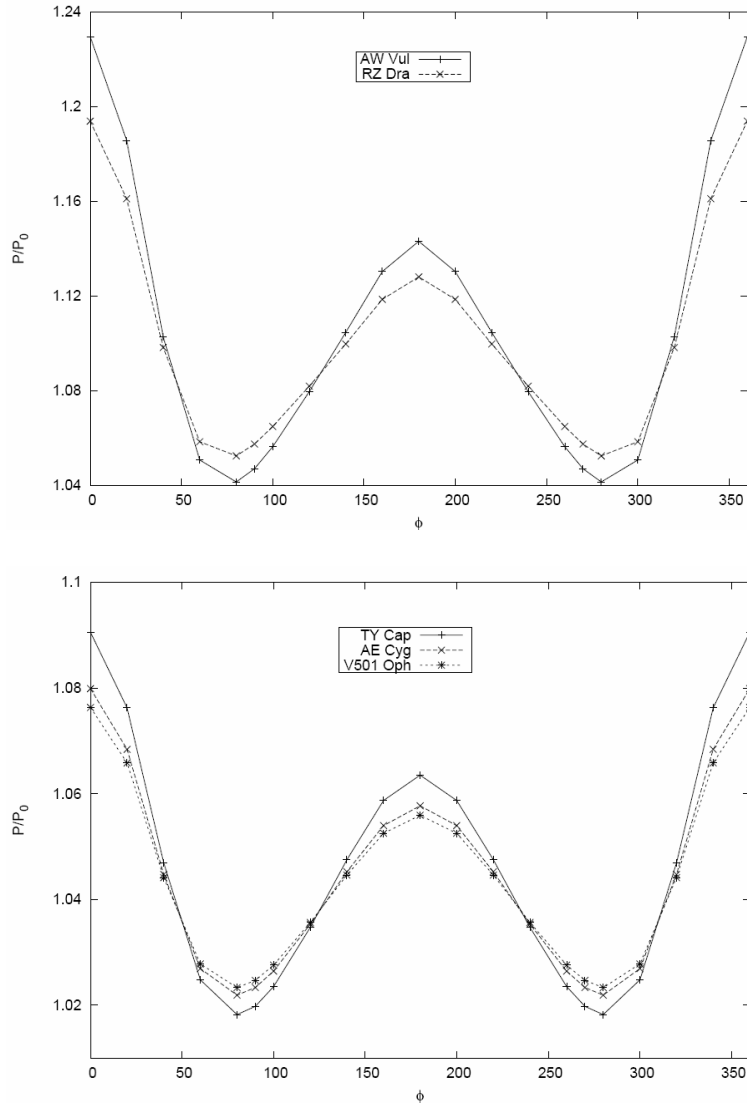
Şekil 4.1.1. Bozulmuş bir yıldızın zonklama döneminin, bozulmamış yıldızınkine oranının 0.2 (sol) ve 0.8 (sağ) kütle oranları için evreyle değişimi ($\theta = 90^\circ$).

Şekil 4.1.1’de $\theta = 90^\circ$ ’lik tek bir hat boyunca dönem oranları görülmektedir. Eğer, bu işlemleri tüm yıldız yüzeyinin dörtte birlik bölümü için yaparsak, bir başka deyişle θ açısı 0 ile 90, ϕ ise 0 ile 180 derece arasında alınır, aynı grafik Şekil 4.1.2’deki gibi 3 boyutlu olarak gösterilebilir. Sonuçlar, artan r_0 değeriyle birlikte farklı evrelerde gözlenecek



Şekil 4.1.2. Farklı θ değerlerini kapsayan, $q=0.2$ (sol) ve $q=0.8$ için, üç boyutlu yüzey gösterimi (r_0 aşağıdan yukarıya 0.15, 0.20 ve 0.25 değerlerini almaktadır).

dönem oranı farkının artacağını göstermektedir. Örneğin, Şekil 4.1.1'den de görüleceği üzere, kütle oranı 0.8 olan bir dizge için, r_0 değeri 0.25 olan bir yıldızda, 0 ve 0.25 evrelerde gözlenmesi beklenen dönem oranlarının farkı, r_0 değeri 0.15 olan bir yıldız göre çok daha büyüktür. Bu hesaplamaları zonklayan bileşenli olduğu kabul edilen ya da bileşeni zonklayan adayı olan yıldız dizgeleri (Soydugan ve ark., 2006a) için yaparsak, birkaç dizge için Şekil 4.1.3'teki grafikleri elde ederiz.



Şekil 4.1.3. Bazı dizgeler için beklenen dönem oranının evreyle değişimi. Tüm yıldızlar için aynı şekiller Ek-1’de verilmiştir.

Ayrıca, zonklayan bileşenli olduğu tespit edilmiş, aday yıldızlar için bir dönem boyunca görülebilecek en büyük zonklama dönemi oranı hesaplanmış ve bazı dizgeler için farklı özellikleri ile birlikte Çizelge 4.1.1’de verilmiştir (Tüm dizgeler için benzer liste Ek-1’de verilmiştir). Çizelgenin ilk sütununda fark olarak verilen parametre bir dizge için en büyük $\frac{P}{P_0}$ oranı ile en küçük $\frac{P}{P_0}$ oranı arasındaki farka karşılık gelmektedir. Taky türü, kütle oranı ve yörünge dönemi değerleri Soydugan (2006a)’dan alınmıştır.

Çizelge 4.1.1. Bazı yarı-ayrık dizgeler için gözlenmesi beklenen en büyük zonklama dönemi farkı ve diğer özellikler

| Fark | Dizge | Tayf türü | Yör. Dönem | Kütle Oranı |
|--------|----------|-----------|------------|-------------|
| 0.1881 | AW Vul | F0 | 0.81 | 0.73 |
| 0.1414 | RZ Dra | A5 | 0.55 | 0.44 |
| 0.0723 | TY Cap | A5 | 1.42 | 0.82 |
| 0.0530 | V501 Oph | A5 | 0.97 | 0.47 |

4.2 Küçük Adyabatik Salımları Veren Diferansiyel Denklemin Çözümü

Tüm işlemlerden sonra elde edilen (3.3.16) diferansiyel denklemi bir Sturm-Liouville problemi gibi durmaktadır. Değişken katsayılı, ikinci mertebeden, homojen bir denklem olan bu denklemin katsayılarının karmaşıklığı denklemin türünü belirlemede zorluk çıkarsa da onun bir Sturm-Liouville denklemi olduğu kanıtlanabilir. Sturm-Liouville problemi aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilir:

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) - \lambda w(x)] y = 0. \quad (4.2.1)$$

Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $w(x)$ verilen sonlu aralıkta sürekli olmalı ve $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ şartı sağlanmalıdır. (3.3.16) bu forma getirilebilir bir diferansiyel denklemdir. Bunun için önce tüm eşitlik $A(r_0)$ 'a bölünür:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dr_0^2} + \frac{B(r_0)}{A(r_0)} \frac{d\xi_1}{dr_0} + \frac{[\omega^2 E(r_0) - D(r_0)]}{A(r_0)} \xi_1 = 0.$$

Daha sonra elde edilen yeni eşitliğin her iki yanını $e^{\int \frac{B(r_0)}{A(r_0)} dr_0}$ ile çarpılır:

$$e^{\int \frac{B(r_0)}{A(r_0)} dr_0} \frac{d^2 \xi_1}{dr_0^2} + e^{\int \frac{B(r_0)}{A(r_0)} dr_0} \frac{B(r_0)}{A(r_0)} \frac{d\xi_1}{dr_0} + e^{\int \frac{B(r_0)}{A(r_0)} dr_0} \frac{[\omega^2 E(r_0) - D(r_0)]}{A(r_0)} \xi_1 = 0$$

$p(r_0) = e^{\int \frac{B(r_0)}{A(r_0)} dr_0}$, $q(r_0) = \frac{D(r_0)}{A(r_0)} e^{\int \frac{B(r_0)}{A(r_0)} dr_0}$, $w(r_0) = \frac{E(r_0)}{A(r_0)} e^{\int \frac{B(r_0)}{A(r_0)} dr_0}$ değişken değiştirilmesi yapıp $\omega^2 = \lambda$ alınırsa, (3.3.16)'un yeni hali,

$$-\frac{d}{dr_0} \left[p(r_0) \frac{d\xi_1}{dr_0} \right] + [q(r_0) - \lambda w(r_0)] \xi_1 = 0 \quad (4.2.2)$$

olacaktır. Bu da çözümünü aradığımız diferansiyel denklemin Sturm-Liouville denklemi biçiminde olduğunu göstermektedir. Katsayıların karmaşık yapıda olması analitik çözümü zorlaştırmaktadır, ancak, sayısal olarak çözülebilmektedir.

Denklem, sayısal olarak, başlangıç değer ve sınır değer problemi olarak çözülebilir. Başlangıç değer problemi olarak çözerken merkezde genliğin alacağı değer ve onun türevi başlangıç değeri olarak alınabilir. Buna göre, Kopal (1972)'nin merkez için verdiği ve hipergeometrik bir fonksiyon ile temsil edilebilen genlik kullanılabilir. Kopal (1972) merkez civarında genlik için

$$\xi_1 = B_{1,2} y^k F(a, b, c; y) \quad (4.2.3)$$

ifadesini vermiştir. Burada F hipergeometrik fonksiyonu ifade etmek üzere, $B_{1,2}$ keyfi integral sabitleri ve

$$\begin{aligned} k &= \pm \frac{1}{3}(J+1), \\ a, b &= \frac{3+2J \pm \sqrt{9+4\omega^2}}{6}, \\ c &= \frac{3+2J}{3}, \\ J^2 &= 3 \left(3 - \frac{4}{\gamma} \right), \\ y &= r_0^3. \end{aligned}$$

Bu başlangıç genlik değeri incelendiğinde, hipergeometrik fonksiyonun açılımı, $(a)_n$ Pochhammer sembolü olmak üzere, (Abramowitz ve Stegun, 1964),

$$F(a, b, c; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{y^n}{n!}$$

$$= \frac{(a)_0 (b)_0}{(c)_0} \frac{y^0}{0!} + \frac{(a)_1 (b)_1}{(c)_1} \frac{y}{1!} + \frac{(a)_2 (b)_2}{(c)_2} \frac{y^2}{2!} + \dots$$

olarak vermiştir. Öte yandan,

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$

olduğu göz önüne alınarak,

$$F(a, b, c; y) = 1 + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} y + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{y^2}{2} + \dots$$

yazılabilir. Bu durumda (4.2.3), $\gamma = \frac{5}{3}$ için, şu hali alır:

$$\xi_1 = B_{1,2} r_0^{3k} (1 + 0.1673r_0^3 + 0.1735r_0^6 + 0.1769r_0^9 + \dots).$$

Türevi ise,

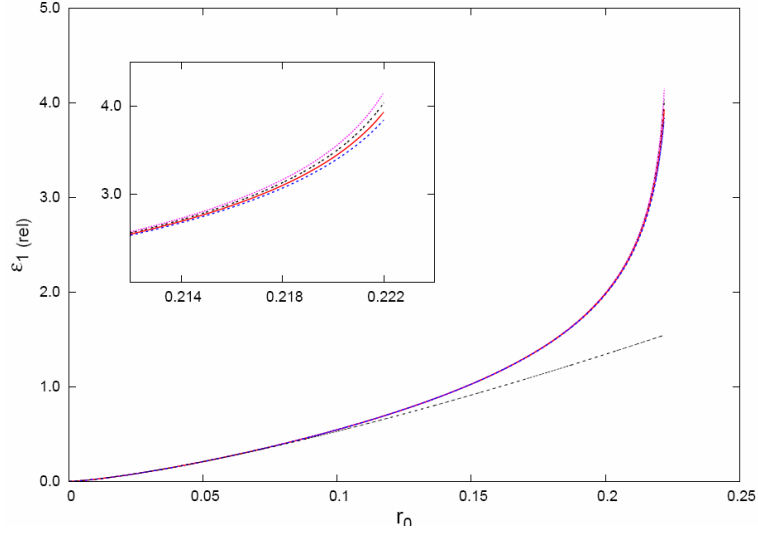
$$\xi_1' = B_{1,2} (3kr^{3k-1} + 0.1673(3k+3)r^{3k+2} + 0.1735(3k+6)r^{3k+5} + 0.1769(3k+9)r^{3k+8} + \dots)$$

olacaktır. r_0 'ın küçük değerleri için (merkez), $B_{1,2}$ lineer bağımsız olarak seçildiğinde bu eşitlik genlik için başlangıç değerini sıfıra çok yakın vermektedir. Dolayısıyla başlangıç koşulumuz sıfıra çok yakın olmalıdır.

Başlangıç koşulu belirlendikten sonra, (3.3.16) için sayısal çözüm aranmıştır. Bu amaçla Wolfram Research Inc. tarafından üretilen MATHEMATICA 6.0 yazılımı kullanılarak uygun kodlar oluşturulmuştur. Bu kodların bir örneği Ek-2' de verilmiştir. Farklı başlangıç koşulları için çeşitli sonuçlar elde edilmiş ve şekillerde gösterilmiştir.

Sayısal çözümde öncelikle başlangıç genliği ve frekansı aynı olan bir salınım için çözümün eşit merkez uzaklığı ancak farklı kütle oranlarındaki davranışı araştırılmıştır. Bu bağlamda, kütle oranı 0.2'den 0.8'e kadar 0.2 arttırılarak çözüme ulaşılmıştır. Bu çözümlere ilişkin grafik Şekil 4.2.1'de gösterilmiştir. Şekilde düşey eksen salınının görel genliğini, yatay eksen ise verilen potansiyel yüzeyine karşılık gelen uzaklığı

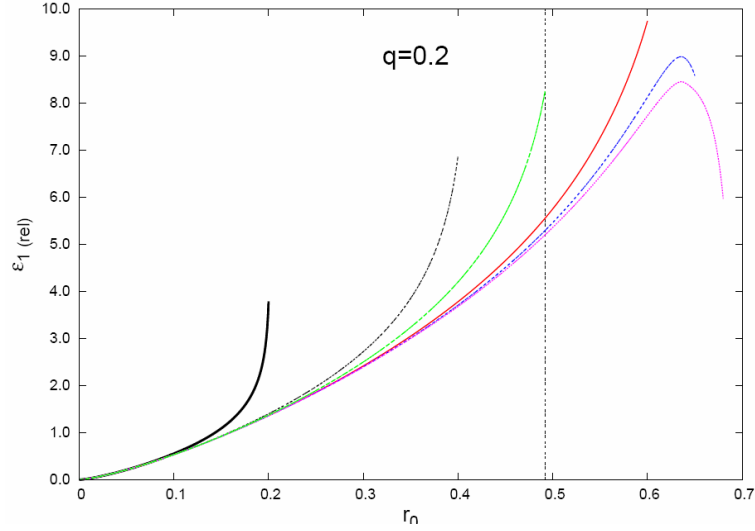
göstermektedir. Kütle oranının sıfırdan farklı olması genliğe ani bir artış getirmekte ve görelî genlik artan kütle oranıyla birlikte artmaktadır. Şekilde iç pencerede, kütle oranı aşağıdan yukarıya 0.2(0.2)0.8 arasında olan dizgeler için çözüm görülmektedir.



Şekil 4.2.1. Farklı kütle oranları için aynı başlangıç koşullu bir salınımın merkezden yüzeye alacağı görelî genlik değerleri. İç pencerede eğrilerin yüzeye yakın bölgelerde aldığı durum yakınlaştırılarak gösterilmiştir. Doğrusal kesikli çizgi bozulmamış yıldız ($q=0$) temsil etmektedir.

Önceki çözümden farklı olarak, değişen merkez uzaklığına (r_0) çözümün vereceği tepki araştırıldı. Buna göre, merkez uzaklığının artışı, sabit kütle oranı alınarak, aynı frekansa sahip bir salınım için görelî genlikte artışa karşılık gelmektedir. Çözümün anlamlılığında uzaklığın önemli bir rolü bulunmaktadır. Uzaklık belli bir değeri aştığında çözüm bozulmakta ve bir r_0 noktasında anlamlı olmayan değerler vermeye başlamaktadır. Seçilen modelde bu bozulmanın o sistem için verilen kritik potansiyele karşılık gelen merkez uzaklığından daha büyük değerlerde gerçekleştiği görüldü. Bu da, Roche modeli öngörüsüne göre, kritik değerden büyük uzaklıkların bileşenin yüzeyinin dışında olması gerektiğinden, seçilen model için çözümün halen geçerli olduğunu göstermektedir. Çözümün bu kısmına ilişkin grafik Şekil 4.2.2’de gösterilmektedir. Şekilde, kütle oranı 0.2 olan ancak merkez uzaklıkları farklı (eşpotansiyel yüzeyleri farklı) olan modeller ele alınmıştır. Sonuca göre, artan merkez uzaklığı aynı kütle oranı için daha büyük genliğe karşılık gelmektedir. Genlik, büyük merkez uzaklıklarında daha büyük olmaktadır. Şekilde, kesikli çizgi 0.2 kütle oranı için kritik potansiyelin merkez uzaklığına karşılık gelmektedir.

Bu kütle oranı için yapılan çözümler, $r_0 = 0.6$ 'dan sonra fiziksel olarak anlamlandırılmayacak değerler vermesine rağmen, bu sapmanın kritik potansiyelden sonra olması nedeniyle ve varsayımlarımız gereğince yıldız maddesinin Roche Lobu içinde olması gerektiğinden sayısal çözümde bir sorun yaratmamaktadır.

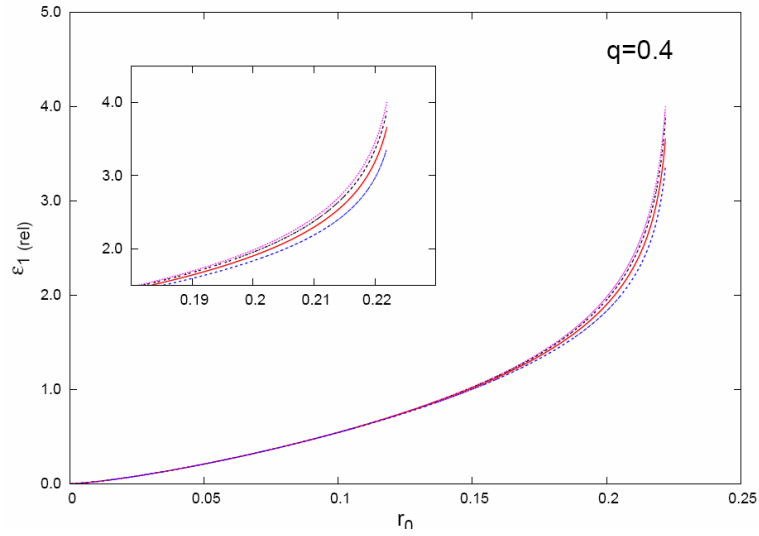


Şekil 4.2.2. Sabit frekanslı bir salınımın görelî genliğinin 0.2 kütle oranlı bir dizgeye ait bileşende merkez uzaklığıyla göstereceği değişim. Kesikli düşey çizgi seçilen model için kritik potansiyele karşılık gelen uzaklığı belirtmektedir.

Farklı frekanslardaki salınımların aynı yıldızda vereceği genlik – uzaklık ilişkisi ise Şekil 4.2.3'te verilmiştir. Şekilde, kütle oranı 0.4 olan bir dizgedeki bileşende meydana gelecek $\lambda = 4$ olmak üzere $\lambda, 4\lambda, 9\lambda$ ve 16λ frekanslı salınımların merkezden yüzeye kadar görelî genliğindeki değişim incelenmiştir. Buna göre, frekans artışı verilen merkez uzaklığı değerinde genliğin daha düşük gözlenmesine neden olacaktır. Aynı görelî genlik değeriyle başlatılmasına karşın yüzeyde ($r_0 = 0.22$) az da olsa farklı genlik değerleri ölçülmektedir. Bu değerler ve birbirleri arasındaki ardışık farklar Çizelge 4.2.1' de verilmektedir. Çizelgeye göre, bu farklar, artan frekansa göre artış göstermektedir. Bu da, bir çift yıldızın bozulmuş bileşeninin yüzeyinde büyük frekanslı salınımlar için büyük genlikler gözlenmesi gerektiğine karşılık gelmektedir.

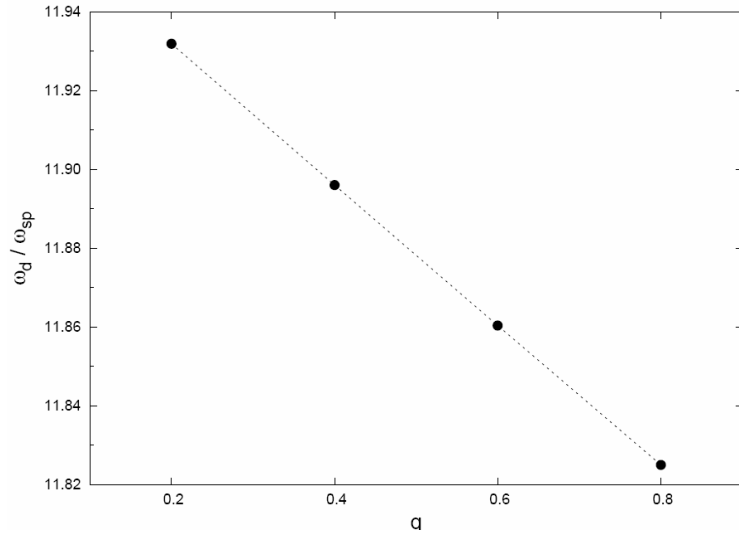
Çizelge 4.2.1. Farklı özdeğerler için yüzeydeki görelî genlik değerleri ve ardışık farkları

| Frekans ($\omega^2 = \lambda = 4$) | Yüzey genliği (ε_{1_i}) | ($\varepsilon_{1_i} - \varepsilon_{1_{i+1}}$) |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| λ | 4.0107 | 0.1330 |
| 4λ | 3.8777 | 0.2151 |
| 9λ | 3.6626 | 0.2895 |
| 16λ | 3.3731 | - |



Şekil 4.2.3. Kütle oranı 0.4 olan bir dizgede aynı başlangıç genlikli, farklı frekanslı dört salınımın görelî genliğinin merkezle yüzey arasında değişimi. İç pencerede yüzeye yakın bölgenin yakınlaştırılmış durumu gösterilmiş olup frekanslar yukarıdan aşağıya gidildikçe artmaktadır. Ardışık dört genlik değerinin değişimi sırasıyla %13, %21 ve %29'dur.

Ayrıca, yüzeylerinde aynı görelî genlik değerine ulaşılan, biri gelgit ve dönme etkisiyle bozulmuş diğeri ise bozulmamış bir yıldızda çözümden elde edilen frekanslar arasındaki ilişkiye bakılmıştır. Farklı kütle oranları için yapılan çözümde kütle oranının artışının oranı az da olsa azalttığı görülmüş ve ilgili grafik Şekil 4.2.4'te gösterilmiştir. Şekilden de görüleceği üzere, karşılıklı çekim ve dönme etkisiyle bozulmuş ve bozulmamış iki yıldızın yüzeyinde gözlenecek aynı genlikli salınımın frekansı iki yıldızda aynı olmamakla birlikte, aralarındaki ilişki kütle oranıyla değişmektedir.



Şekil 4.2.4. Eşit yüzey görelî genlikli bozulmuş ve bozulmamış bir yıldızın frekans oranlarının kütle oranıyla değişimi.

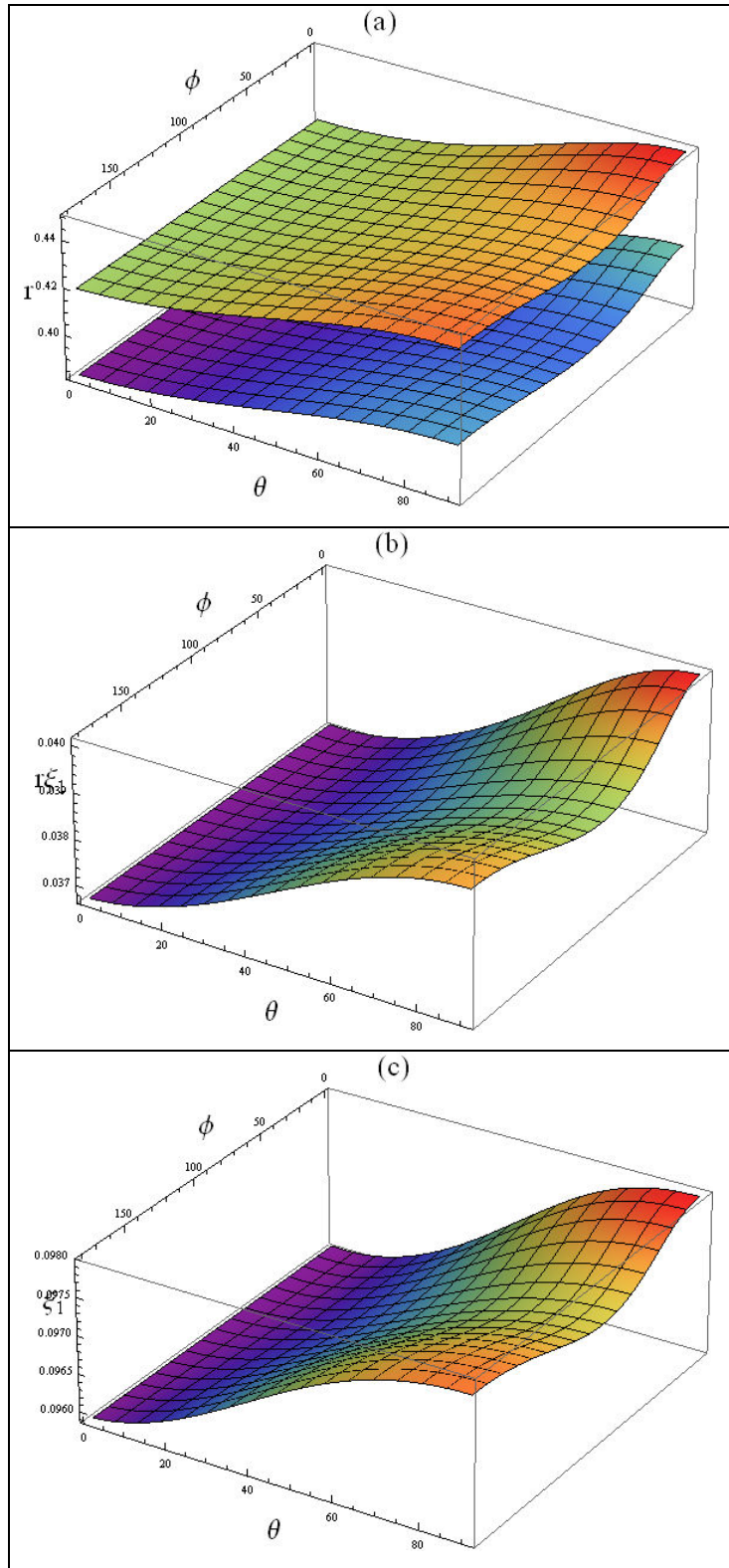
Sayısal çözümden elde edilen sonuçlara göre çizilen bu grafiklerde, bileşeni temsil eden bir r_0 uzaklığı kullanıldı. Bozulmuş bileşenin seçilen keyfi her bir noktasının merkezden yüzeye farklı uzaklıklara sahip olduğu bilindiğine göre seçilecek her bir uzaklık için (3.1.4) eşitliği ile verilen r_0 ilişkisi kullanılarak yukarıdaki çözümü yapmak mümkündür. Bunun için, yüzeyde her bir derecelik alan ayrı ayrı merkezi uzaklık değerleri kullanılarak çözülmüştür. Kutupsal koordinat kon sayılarından θ , 0 ile 90 derece arasında ve ϕ , 0 ile 180 derece arasında alınarak (eksen simetrik geometrinin dörtte biri), (3.1.2) eşitliğinde girilen yüzey potansiyeline karşılık gelen 16200 tane r uzaklığı için, her 1 derecelik yüzey alanındaki genlik değerlerinin oluşturduğu 90×180 'lik bir matris elde edilmiştir. Bu matrisin $\theta, \phi, \varepsilon_1$ grafiğindeki gösterimi genliğin yüzey boyunca dağılımını resmedecektir. Şekil 2.2.6 - 2.2.9'da, merkezde 10^{-6} gibi sıfıra yakın bir genliğe sahip, frekansı 25 c/d olan bir salınımın $2 M_{\odot}$ kütleli bir çift yıldız dizgesi bileşeninde, farklı kütle oranları (dolayısıyla potansiyel) için, tedirginlikten önce ve sonra, en büyük ξ_1 değerinde, alacağı merkez uzaklıkları, bunların farkı ve genlik değerleri gösterilmiştir. Şekillerde de görüldüğü üzere, kütle oranının artışı genliğin artmasına neden olmaktadır. Salınımın herhangi bir zamanı için en büyük merkez uzaklığı değerinde en büyük genlik görülmekte, dolayısıyla diğer bileşene bakan bölgede tedirginliğin en fazla olduğu göze çarpmaktadır. Tedirginlik öncesi ve sonrası merkez uzaklığı farklarını çizmenin yararı, genlik değerinin diğer yıldıza bakan bölgede, bir başka deyişle en uzun merkez uzaklığında,

en büyük olması, en küçük merkez uzaklığına karşılık gelen kutup bölgesinde de en küçük olmasından kaynaklanabilecek kuşku, genliğin seçilen her yüzey noktasında eşit olduğu ve böylece bozulmuş geometrinin korunduğu kuşkusunu, gidermesidir. Bu kuşku, $\xi - \xi_0 = \xi_0 \xi_1$ olduğu hatırlanarak yok edilebileceği gibi, Şekil 4.2.5 - 4.2.8'un (b) bölmeleri incelenerek de giderilebilir. Çift yıldızlar için önemli bir evrimsel adım sayılabilecek Roche Lobunu doldurma olayı da göz önüne alınarak çözüm biraz daha genişletilebilir. Ek-3'de potansiyel değeri kritik potansiyele eşit olan (Roche Lobunu doldurmuş) bileşenler için farklı kütle oranları kullanılarak elde edilen çözümler verilmiştir. Bu tür bileşenler için, diğer bileşene bakan uzaklık (r_{point}) yakınlarda çözümün davranışı fazlasıyla değişmektedir.

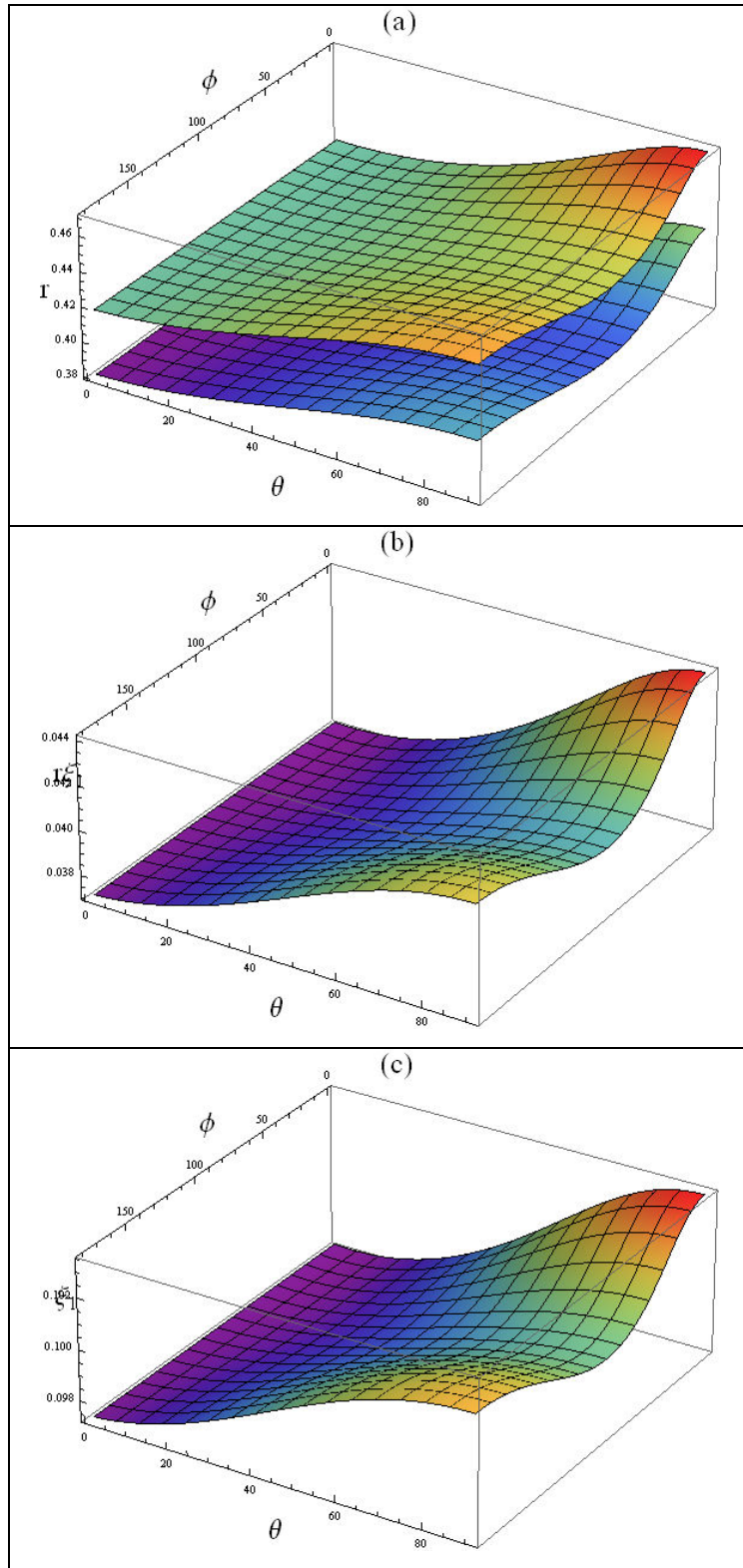
Sayısal çözümde dikkat edilmesi gereken niceliklerden biri ξ_1 'in başlangıç değeridir. Bu çalışmada 10^{-6} alınan bu değer çözümde önemli bir yer tutmaktadır. Önceki bölümde yapılan tüm hesaplara tedirginliğin birinci derece olduğu, bir başka deyişle, ξ_1^2 'nin küçük olduğu varsayımı ile başlanmıştır. Çözümde elde edilecek bu şartı sağlamayan bir genlik değeri, seçilen başlangıç değerinin yeterince küçük olmadığını akla getirmelidir.

Bu modeli, bilinen çift yıldız dizgelerinin zonklayan bileşenlerine, gözlemsel olarak elde edilmiş frekansları dikkate alarak uygularsak, yüzey boyunca genlik dağılımının bir haritasını çıkarabiliriz. Genlik göreceli olduğundan tek başına merkezi uzaklığa ilişkin bir değer verememekle beraber zonklamayı karakterize eden tedirginlik bozulmuş geometriye uygulandığından, herhangi bir zaman için $\xi = \xi_0 + \xi_0 \xi_1$ bağıntısına göre yüzeyin alacağı şekilde etkilidir. Zonklayan bileşenli çift yıldız üyelerinin en çok çalışılanlardan bir tanesi, RZ Cas (Soydugan ve ark., 2006b), çözümü yapılacak bir örnek olarak alınabilir. Kütle oranı 0.338 olan dizgenin temel zonklama frekansı ($f_1 = 64.2 c/d$) göz önüne alınıp, merkezde 10^{-6} genlikle başlatılan salınımın çözümüyle elde edilen grafikler Şekil 4.2.9 ve Şekil 4.2.10'de verilmiştir. Önceki gösterimlerden farklı olarak, burada, RZ Cas, önce sadece temel zonklama frekansı, daha sonra gözlenen iki frekans da ($f_1 = 64.2 c/d, f_2 = 12.1 c/d$) göz önüne alınarak çözülmüş, böylece eklenen diğer frekansın salınımların yapısını nasıl değiştireceğinin görülmesi sağlanmıştır. Şekillerde zonklamamanın en büyük genliğine karşılık gelen $t=0$ 'dan 20 dk sonraki durum incelenmiştir. Buna göre, Şekil 4.2.5 - 4.2.8'a benzer olarak en büyük genlik değerlerinin halen en büyük merkez uzaklıklarında görüldüğü göze çarpmaktadır. Farklı zamanlarda yüzeyin farklı şekil alabileceği de vurgulanmalıdır. Bu etkinin gözlemlerle

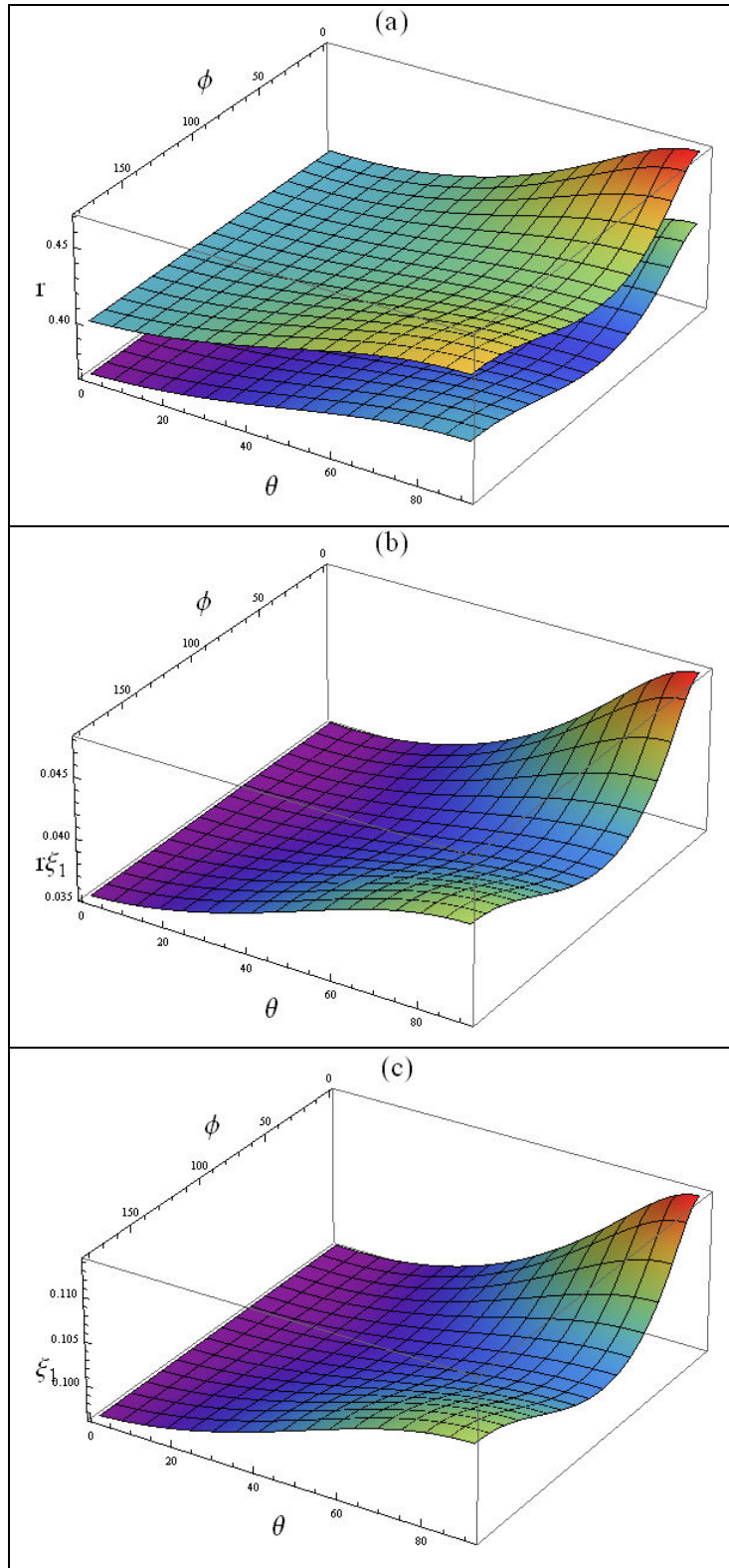
kanıtlanabilmesi için elde edilen sürekli verinin farklı evre aralıklarında (farklı yüzey bölgelerinin gözleendiği zamanlarda) çözümlenmesi, böylece farklı yüzeylerden elde edilen genliklerinin karşılaştırılması gerekmektedir. Bu yöntemle ilişkin ayrıntılar üçüncü bölümde açıklanacaktır. Merkez uzaklıkları hakkında fikir vermesi açısından RZ Cas dizgesinin Roche modeli Şekil 4.2.11’de gösterilmiştir.



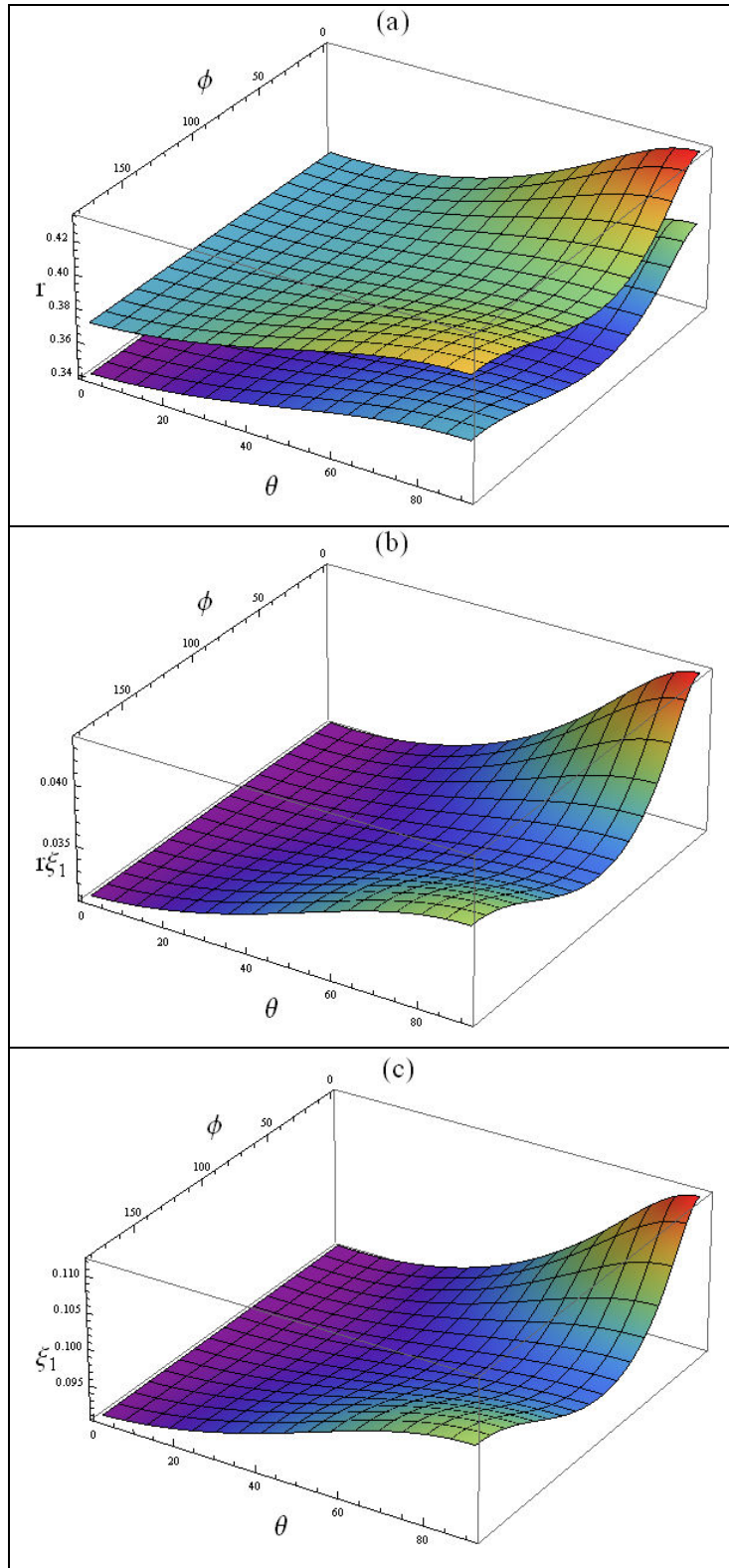
Şekil 4.2.5. Kütle oranı 0.2 olan bir dizgedeki bozulmuş bir çift yıldız bileşeninin her bir derecelik yüzey alanı için, çözümden bulunan ξ_1 değerleri kullanılarak, (a) tedirginlikten önce (alt) ve sonra (üst) merkez uzaklıklarının, (b) en büyük tedirginlikte yüzeye eklenen merkez uzaklığı miktarının (tedirginlik sonrası ve öncesi merkez uzaklıkları farkının) ve (c) en büyük genlik miktarının θ ve ϕ 'ye göre değişimi.



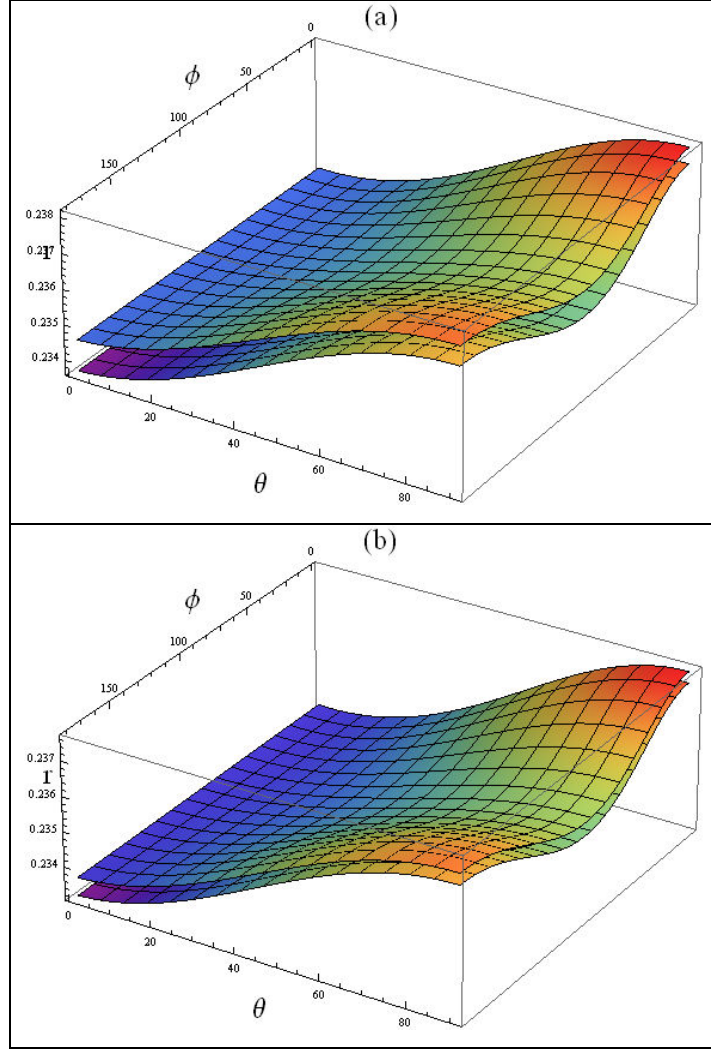
Şekil 4.2.6. Kütle oranı 0.4 olan bir dizgedeki bozulmuş bir bileşen için Şekil 2.2.6'nın benzeri.



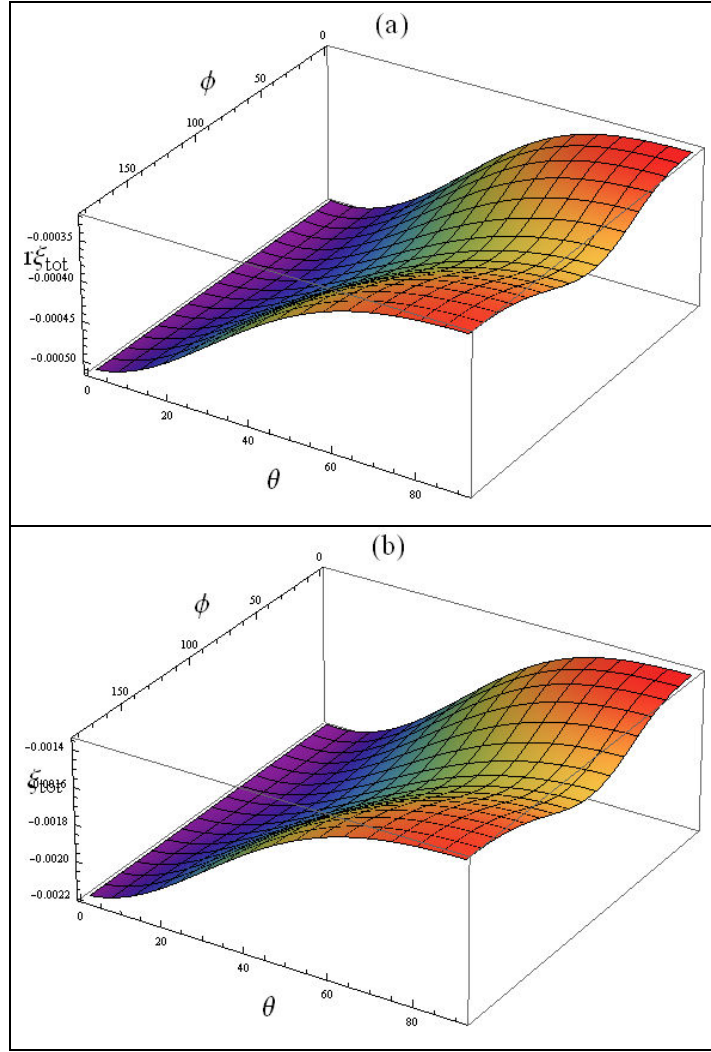
Şekil 4.2.7. Kütle oranı 0.6 olan bir dizgedeki bozulmuş bir bileşen için Şekil 2.2.6'nın benzeri.



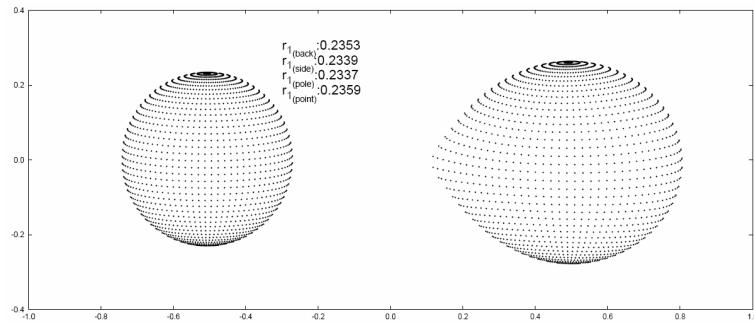
Şekil 4.2.8. Kütle oranı 0.8 olan bir dizgedeki bozulmuş bir bileşen için Şekil 2.2.6'nın benzeri.



Şekil 4.2.9. RZ Cas'ın zonklayan bileşeni için $t = 20dk$ 'deki salınımı ile tedirgin olmamış yüzeyin karşılaştırılması. (a) Temel zonklama frekansı dikkate alınarak tedirginlik öncesi (alt) ve sonrası (üst) r 'nin aldığı değerler. (b) İki frekans da eklenerek tedirginlik öncesi (üst) ve sonrası (alt) değerler.



Şekil 4.2.10. (a) RZ Cas'ın zonklayan bileşeni için $t = 20dk$ 'deki salınımı ile tedirgin olmamış yüzeyin merkez uzaklıkları arası fark. (b) İki frekans göz önüne alınarak elde edilen toplam genlik.



Şekil 4.2.11. RZ Cas dizgesinin Soyduğan ve ark. (2006b) tarafından verilen parametreler kullanılarak elde edilen Roche modeli.

4.3. Gözlemsel İnceleme

Sayısal çözüm ve teorik sonuçların test edilmesi için özdeş zonklama karakteristiğine sahip bozulmamış bir yıldız ile farklı kütle oranlarına sahip çift dizgelerin bileşenleri olan bozulmuş yıldızların gerekliliği gözlemsel kanıt arayışlarını zorlaştırmaktadır. Literatürde bu tür bir özdeşliğe sahip yıldızlar bulunmamaktadır. Bu yüzden, gözlemsel kanıt için farklı bir yöntem kullanılarak bozulma sonucu meydana gelebilecek etkinin fotometrik gözlemlerden elde edilip edilemeyeceği incelenmiştir.

4.3.1 Yöntem

Bu yöntem, gözlenen yıldızdan elde edilen verinin kendi içinde bir karşılaştırma mekanizması oluşturur. Karşılıklı çekim ve dönme etkisiyle bozulmuş bir yıldızda geometrinin bozulması, Bölüm I’de de değinildiği üzere, farklı evre aralıklarında farklı yüzeylerin, dolayısıyla farklı merkez uzaklıklarının ve zonklama dönemlerinin, gözlenmesine neden olur. O halde, gözlemsel veri kullanılarak farklı evre aralıkları için ayrı ayrı elde edilecek frekans değerleri tüm evre aralığı (verinin tamamı) kullanılarak elde edilecek küresel (global) olanla karşılaştırılıp bir sonuca varılabilir. Böylece, bir yandan tüm veriyi kullanarak bir karşılaştırma değeri elde edilmiş olunurken, bir yandan da aynı verinin kullanılması, veri alınırken eklenecek istem dışı hataların iki çözüme de eklenmesini ve karşılaştırıldıklarında bu hataların elenmesini sağlayacaktır. Ancak, yöntemde, zaman dizilerinin Fourier çözümü yapıldığında veriyi bölmenin getireceği istenmeyen etkileri kontrol altında tutmak gerekmektedir. Bunlardan en önemlisi “çözümün çözünürlüğü” adını verebileceğimiz niceliktir. Verinin uzunluğu, çözümde bulunacak frekansın doğruluğunun bir ölçüsüdür ve çok yakın yerleşmiş piklerin ayrılıp ayrılamayacağını tespit edilmesini sağlar (Dalsgaard, 2003). Buna göre bu değer ($\delta\nu$), T zaman biriminde veri uzunluğu olmak üzere şöyle verilir:

$$\delta\nu \approx \frac{1}{T}.$$

Dolayısıyla, verinin parçalara ayrılması gerektiğinde $\delta\nu$ mutlaka kontrol edilmeli ve karşılık geldiği frekans değeri boyunca ikinci bir pik beklenmediğinden emin olunmalıdır. Aksi takdirde iki farklı frekans birbirine geçerek değeri bir tane olarak alınıp, çözümde büyük bir hataya götürebilir. Ek olarak, tüm verinin sürekli diziler halinde parçalara ayrılmasında yapılacak hata istatistiksel olarak incelenebilir. Burada yapılan işlem bir veri

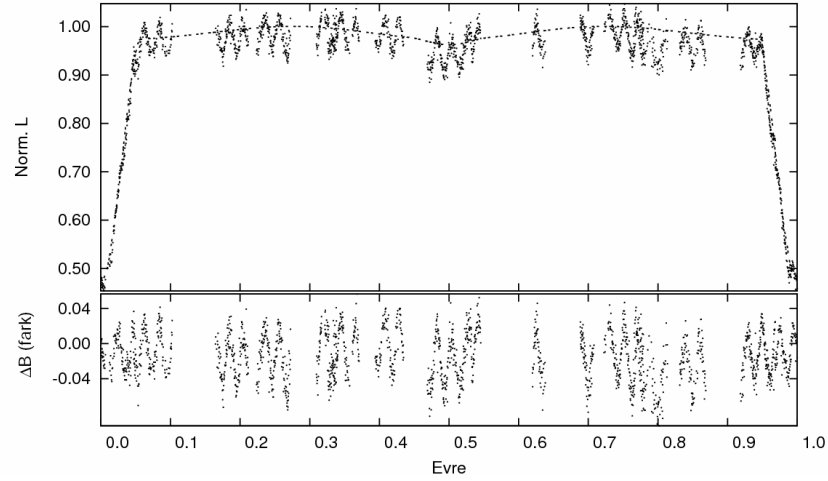
grubu örneği alarak tüm veriyi temsil etme işlemi olduğundan, alınan her bir alt veri grubunun tüm veriyi temsil edebilme yetisi incelenebilir. Örneklemede yapılacak hata yöntemin istatistik açıdan ne kadar sağlıklı olduğunu belirtecektir. Buna göre, örnekleme için alınan veri grubundaki veri sayısı n , tüm verilerin (evrensel grup) sayısı N , tüm verinin standart sapması s , standart normal tablosundan verilen anlamlılık için okunan değer Z olmak üzere (Özdamar, 2003),

$$n = \frac{Ns^2Z}{(N-1)d^2} \quad (4.3.1)$$

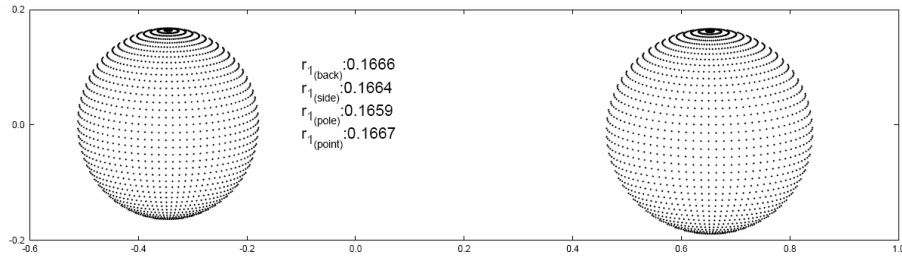
eşitliği kullanılarak örneklemede yapılacak hata bulunabilir. Burada d örnekleme verisi ve tüm verinin ortalamaları arasındaki fark olup örnekleme büyüklüğü ya da fark olarak adlandırılır. d 'nin sıfıra yaklaşması örnekleme verisi tüm veriyi daha iyi temsil etmesi anlamına gelmektedir.

4.3.2. EF Her

Bu çalışmada, gözlemsel test yapmak için ilk örnek olarak birinci bileşenin δSct türü zonklama gösterdiği Şenyüz ve Soydugan (2008) tarafından gösterilmiş (Şekil 4.3.1) bir dizge olan EF Her kullanılmıştır. EF Her anlamlı tek dönemli zonklama göstermesi, gözlem verisinin kalitesinin yüksek olması, zonklamanın belirgin bir şekilde kanıtlanması ve frekans ortamında temel zonklama dönemine karşılık gelen frekans yakınlarında ikinci bir tepe (peak) göstermemesi nedeniyle araştırılmaya uygun görülmüştür. EF Her dizgesinin seçiminin tek olumsuz yanı küresel yapıdan sapmanın az olması, bir başka deyişle bozulmanın az olması olarak gösterilebilir (Şekil 4.3.2).



Şekil 4.3.1. EF Her dizgesinin gözlemsel ve teorik ışık eğrisi (üst), gözlem noktalarının çift yıldız modelinden farkları (alt) (Şenyüz ve Soyduğan, 2008).



Şekil 4.3.2. EF Her dizgesinin Şenyüz ve Soyduğan (2008) tarafından verilen parametreler ile elde edilen Roche modeli. Bileşenin bu çalışma açısından en olumsuz yanı küresele yakın bir geometrisi olmasıdır.

Baş minimumu içermemek üzere sürekliliği 5 saat ve yukarısı olan, farklı evre aralıklarına karşılık gelen gecelerin verileri kullanılmış, bu geceler için ayrı ayrı frekans, genlik, δv , d değerleri bulunmuş ve bu frekanslar tüm veri kullanılarak yapılan çözümlemeyle karşılaştırılmıştır. Zonklama genliğinin diğer süzgeçlere göre daha büyük olması nedeniyle (Arentoft ve ark., 2007) sadece B-süzgeciyle elde edilen veriler kullanılmıştır. Elde edilen değerler Çizelge 4.3.1’de verilmiştir. $\frac{\sigma_i}{\sigma}$, $\sigma = 10.0655 \text{ cd}^{-1}$ olmak üzere, her bir veri grubundan elde edilen frekansın tüm veriler kullanılarak elde edilene oranı, $\frac{\eta_i}{\eta}$ ise, $\eta = 0^m.0352$ olmak üzere, aynı oranın genlik için olanıdır. Ayrıca, 0.01 anlamlılık düzeyine karşılık gelen (bu düzeyle, örnekleme yapılacak veri grubunun gerçek değerden %1 farklılık gösterebileceği kabul edilir) $Z = 2.58$ değeri

alınıp, (4.3.1)'deki nicelikler yerlerine yazılarak, tüm veri grupları için örnekleme hataları elde edilmiş ve Çizelge 4.3.1' de gösterilmiştir. Son sütundaki *RSS* (residual sum of squares) değerleri, belirtilen evredeki veri grubunun, tüm gözlem verisinin analizinden bulunan frekans ($f = 10.0655 \text{ cd}^{-1}$), genlik ($A = 0^m.0352$), sıfır noktası ($Zr = 0^m.0181$), ve evre kaymasının ($\vartheta = 0.0491$) oluşturduğu zaman (t) bağımlı fonksiyondan,

$$f(t) = Zr + A \sin[2\pi(ft + \vartheta)],$$

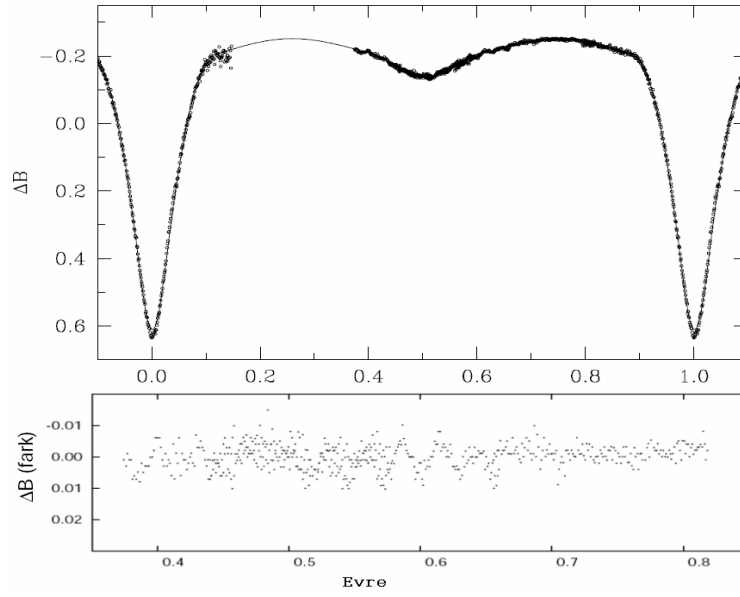
olan farklarının kareleri toplamına karşılık gelmektedir. Bu değerler, çizelgenin ikinci ve üçüncü sütununa da bağlı olarak, farklı evrelerdeki verinin tüm verinin analiziyle elde edilen değerlerle ne kadar uyduğunu göstermektedir.

Çizelge 4.3.1. EF Her dizgesinin bazı evre aralıkları için hesaplanan değerleri. Ayrıntılar için metine bakınız.

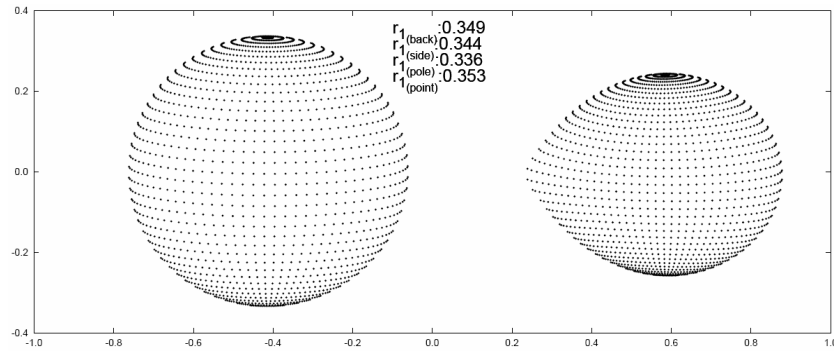
| Evre Aralığı | σ_i/σ | η_i/η | δv | d | <i>RSS</i> |
|--------------|-------------------|---------------|------------|-------|------------|
| .17 - .22 | 1.0524 | 0.8775 | 4.49 | 0.011 | 0.0340 |
| .23 - .28 | 0.9996 | 1.0083 | 4.33 | 0.009 | 0.0358 |
| .47 - .53 | 0.9829 | 1.0668 | 3.69 | 0.008 | 0.0564 |
| .73 - .78 | 0.9808 | 1.0258 | 3.72 | 0.008 | 0.0538 |
| .77 - .82 | 0.9920 | 1.0148 | 4.33 | 0.011 | 0.1211 |

4.3.3. VV UMa

EF Her dizgesine uygulanan teste benzer olarak, Kim ve ark. (2005) tarafından ışık eğrisi elde edilen ve δSct türü zonklayan bileşen bulundurduğu kanıtlanan VV UMa dizgesinin gözlemsel verisi incelenmiştir. Zonklamanın kanıtlanmış olması ve zonklama frekansına yakın ikinci bir tepe bulundurmaması, döneminin kısa olması (bileşenlerin daha bozulmuş olmasının beklenmesi), verinin duyarlılığı bakımından Bölüm 4.3.1'de ayrıntıları belirtilen yöntem için uygundur. Dizgenin ışık eğrisi ve çift yıldız modelinden farkı Şekil 4.3.3'de, bozulmanın derecesini belirtmede yardımcı olması açısından Roche modeli ise Şekil 4.3.4'de gösterilmiştir.



Şekil 4.3.3. VV UMa dizgesinin gözlemsel ve teorik ışık eğrisi (üst), gözlem noktalarının uygun evreler için çift yıldız modelinden farkları (alt) (Kim ve ark., 2005).



Şekil 4.3.4. VV UMa dizgesinin Lázaro ve ark. (2002) tarafından verilen parametreler ile elde edilen Roche modeli.

Baş minimum içermeyen ve farklı evre aralıklarına karşılık gelen üç farklı veri grubu kullanılmış, hepsi için frekans, genlik, $\delta\nu$, d , χ^2 değerleri bulunmuş ve bu nicelikler tüm veri kullanılarak yapılan çözümlemeyle karşılaştırılmıştır. Zonklama genliğinin diğer süzgeçlere göre daha büyük olması nedeniyle (Arentoft ve ark., 2007) sadece B-süzgeciyle elde edilen veriler kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.3.2’de gösterilmiştir. Son sütundaki RSS değerleri, bir önceki bölüme benzer olarak, tüm veriyi temsil eden zaman bağımlı fonksiyondan farkların kareleri toplamıdır. VV UMa için bu fonksiyonda, frekans ($f = 51.7212 \text{ cd}^{-1}$), genlik ($A = 0^m.0025$), sıfır noktası

($Zr = 0^{m}.0009$), ve evre kaymasının ($\varrho = 0.8678$) değerlerini almaktadır. Çizelgeden de görüleceği üzere, VV UMa'nın evreye göre frekans çözümlemesinde, frekans ve genlikte, EF Her dizgesiyle karşılaştırıldığında, daha büyük değişimler görülmektedir.

Çizelge 4.3.2. VV UMa dizgesinin bazı evre aralıkları için hesaplanan değerleri. Ayrıntılar için metine bakınız.

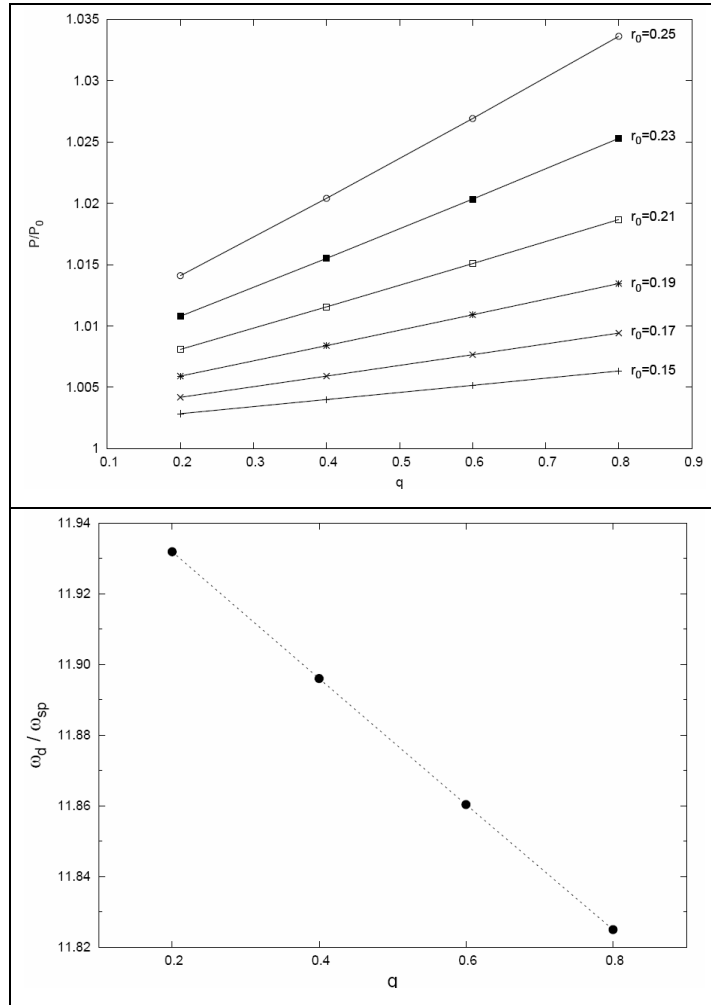
| Evre Aralığı | σ_i/σ | η_i/η | $\delta\nu$ | d | RSS |
|--------------|-------------------|---------------|-------------|--------|--------|
| .37 - .58 | 1.0152 | 0.8490 | 7.15 | 0.0047 | 0.0029 |
| .44 - .66 | 0.9707 | 1.4547 | 6.50 | 0.0041 | 0.0024 |
| .65 - .82 | 0.9892 | 0.3840 | 8.93 | 0.0049 | 0.0019 |

Elde edilen sonuca göre örnekleme alınarak bölünmüş sürekli veri dizileri ile tüm verinin frekans çözümlemesi farklı sonuçlar vermektedir. Çizelge 4.3.1 ve 4.3.2'de görülen ve Bölüm 4.3.1'de ayrıntıları verilen $\delta\nu$ değerleri, örnekleme verisinin alınmasının çözümün çözünürlüğü açısından sağlıklı olacağını ve d örnekleme hatası da örnekleme alınan veri sayısının iyi seçildiğini göstermektedir. Ek olarak belirtilmelidir ki ayrı Fourier çözümlemelerinden elde edilen ayrı frekanslar ve genlikler doğrudan bozulmaya karşılık gelmeyebilir. Gözlemsel hatalar, yıldızın küresel yapıya çok yakın olması ve elde edilen sonuçlardaki hata payları da bu etkiyi yapabilmektedir.

BÖLÜM V

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada iki farklı yöntemle Roche modelinin temellerini kullanılarak, bozulmuş yıldızlarda gözlenmesi beklenen zonklama dönemi değişikliği araştırılmış ve sonuçları verilmiştir. Bir çift yıldız üyesi zonklayan yıldızda tek dönemli ve küçük adyabatik salınımların olduğunu varsayarak, bu salınımların döneminin farklı merkez uzaklıklarında (eşpotansiyel yüzeylerde), dolayısıyla farklı evrelerde, farklı dönem görülmesine neden olacağı matematiksel olarak kanıtlanmıştır. Uygulanan iki farklı yöntemin karşılaştırması Şekil 5.1.1’de verilmiştir.



Şekil 5.1.1. Kullanılan iki yöntemle edilen sonuçların tutarlılığı. Kütle oranı arttırıldıkça (üst) ilk yöntemde zonklama döneminde artma, (alt) ikinci yöntemde zonklama frekansında azalma elde edilmiştir.

Buna göre, ilk yöntemde, bozulmamış bir yıldızın olan dönem oranının değişimi, ikinci yöntemdeki frekans oranının değişimi ile uyumaktadır. Bozulmuş ve bozulmamış (küresel) bir yıldızın yüzeyinde gözlenecek, aynı genliğe sahip salınımların frekansları oranı kütle oranının artmasıyla azalmaktadır.

Çalışmanın teorik kısmı, artan kütle oranının, seçilen bir eşpotansiyel yüzeyi için tek dönemli bir zonklamanın frekansında genel bir azalma etkisi yapacağını göstermiştir. Bu azalma miktarı kütle oranına ve çift yıldız dizgenin bileşeninin yapısına göre değişecektir. Ayrıca, bu tez çalışması, yüzeyde gözlenmesi beklenen görelî genliğin de kütle oranıyla farklılık gösterdiğini vurgulamaktadır. Yüzeyinde bozulmamış bir yıldızla aynı genlikte zonklama gözlenen bir çift yıldız bileşeninin zonklama frekansı bozulmamış yıldızınkine göre farklılık göstermektedir. Çözümlenmelerden elde edilen grafikler literatürde ilk kez yayınlanan grafiklerdir ve bir kısmı bozulmuş bir yıldızın yüzeyinde salınım sonucu ortaya çıkacak değişikliği 3 boyutlu olarak resmetmektedir.

Matematiksel modele gözlemsel destek aranmış, bu bağlamda, kaliteli bir gözlem dizisi içeren ve Şenyüz ve Soyduğan (2008) tarafından elde edilmiş, zonklayan bileşenli bir çift yıldız EF Her ve Kim ve ark. (2005) tarafından elde edilen VV UMa dizgesinin ışık eğrisi kullanılmıştır. Gözlemsel test için kullanılan yıldızların fotometrik gözlemlerden elde edilen yarıçap, dönem ve eğiklik değerleri kullanılarak bulunan $v \sin i$ değerleri, EF Her ve VV UMa için sırasıyla 1.73 km/s ve 25 km/s 'dir ve salınımlar için birinci derece tedirginlik varsayımı yapılmıştır. Bu varsayımın uygun olduğu Kırbıyık (2008) tarafından yavaş dönen ($v \sin i \approx 20 \text{ km/s}$) ve çift yıldız bileşeni olmayan (tek yıldız) δ Sct'lerde, dönmenin frekans üzerinde gözlemsel olarak incelenmesi ile gösterilmiştir. Aynı zonklama karakterine sahip küresel yıldızlar bulunmadığından dolayı, ışık eğrisine, evre evre ve sürekli olmak üzere, çözümü etkileyecek nicelikler de kontrol altında tutularak, parçalar halinde Fourier çözümü uygulanmış ve tüm eğriden bulunan değer ile karşılaştırılmıştır. Bu teknik literatürde ilk kez bu çalışmada kullanılmıştır. Her ne kadar gözlemsel olarak doyurucu bir kanıt olmasa da çift yıldız üyelerinin, özellikle de dönme ve gelgit etkilerinden daha fazla etkilenenlerinin, zonklama dönemleri bozulmamış bir yıldızdan farklılık göstermektedir. Gelişen gözlem teknikleri, verilerin daha duyarlı ve hatasız alınmasını ve paralel olarak artan farklı yapısal niceliklere sahip zonklayan bileşenli çift yıldız üye sayısı, bozulmuş yıldızların bu model de kullanılarak küresel olanlarla gözlemsel olarak karşılaştırılmasına olanak verecektir.

KAYNAKLAR

- Abramowitz M. ve Stegun I.A., 1964. *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*, 55. 1046.
- Arentoft T., De Ridder J., Grundahl F., Glowienka L., Waelkens C., Dupret M.-A., Grigahcène A., Lefever K., Jensen H.R., Reyniers M., Frandsen S. ve Kjeldsen H., 2007. Oscillating blue stragglers, γ Doradus stars and eclipsing binaries in the open cluster NGC 2506. *Astron. Astrophys.*, 465: 965-979.
- Baade W., 1928. Untersuchung von zwei Milchstraßenfeldern auf Veränderliche (124 neue Veränderliche). *Astron. Nachr.*, 228: 359.
- Baker N. ve Kippenhahn R., 1962. The Pulsations of Models of δ Cephei Stars. *ZfA*, 54: 114-151.
- Becker W., 1940. Spektralphotometrische Untersuchungen an δ Cephei-Sternen. *ZfA*, 19: 249-268.
- Chandrasekhar S. ve Lebovitz N.R., 1962a. On the Oscillations and the Stability of Rotating Gaseous Masses. *Astrophys. J.*, 135: 248-260.
- Chandrasekhar S. Ve Lebovitz N.R., 1962b. On the Oscillations and the Stability of Rotating Gaseous Masses. III. The Distorted Polytropes. *Astrophys. J.*, 136: 1082-1104.
- Cowling T., 1934. The stability of gaseous stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 94: 768-782.
- Cox J., 1955. The Pulsational Stability of Models for Red Giant Stars. *Astrophys. J.*, 122: 286-292.
- Cox J., 1980. *Theory of Stellar Pulsation*. Princeton University Press, NJ. 393.
- Dalgaard J.C., 1999. Asteroseismology. *Astrophys. Space Science*, 261: 1-12.
- Dalgaard J.C., 2003. *Lecture Notes on Stellar Oscillations*. Aarhus University. 268.
- Değirmenci Ö.L., 1995. IQ Persei Örtün Çift Sisteminin Fotoelektrik Işıkkölçümü ve Fotometrik Analizi (Doktora Tezi) Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bornova İzmir.
- Edgar J., 1933. The pulsation theory of Cepheid Variables *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 93: 422-441.
- Eddington A., 1918. The problem of the Cepheid variables *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 79: 2-22.
- Eddington A., 1919. On the pulsations of a gaseous star *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 79: 177-189.

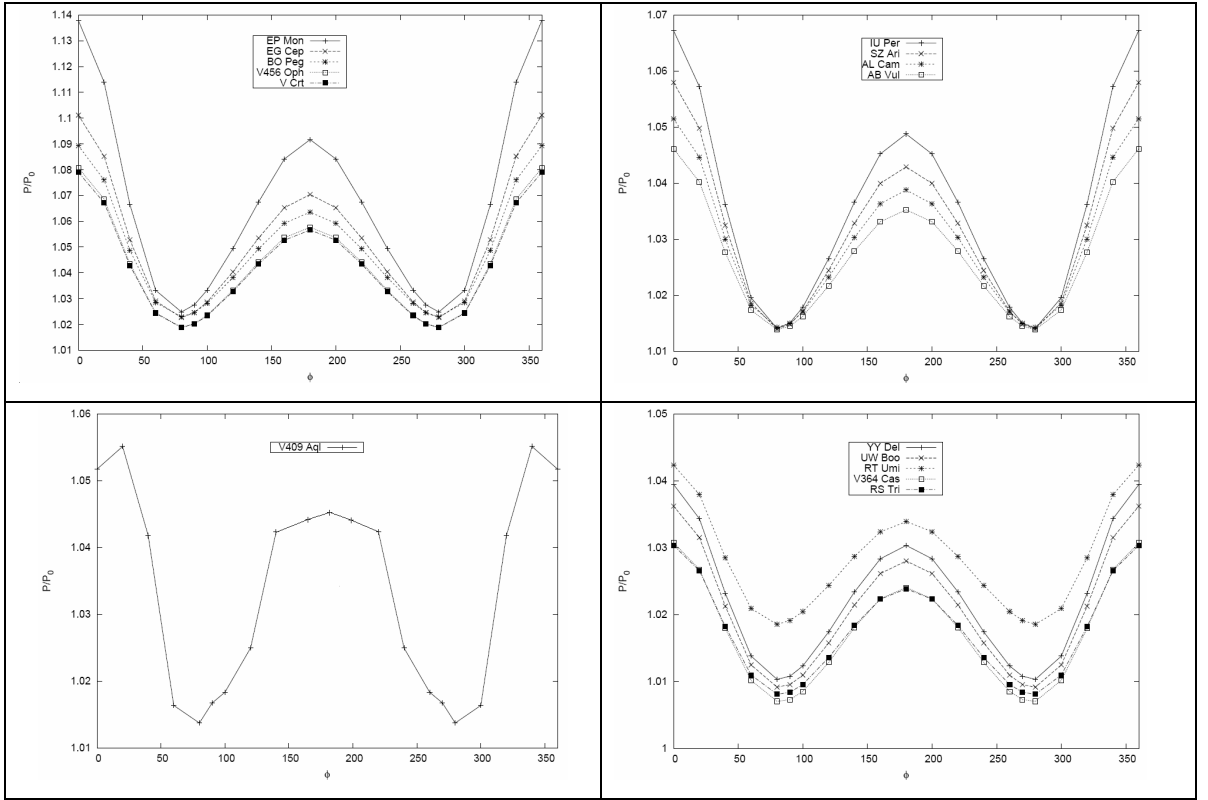
- Eddington A., 1926. *Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press, UK. 422.
- Epstein I., 1950. A Note on Energy Generation. *Astrophys. J.*, 112, 6-21.
- Gautschy A., 2003. *The history of radial stellar pulsation theory*, ETH-Bibliothek, Zurich. 32p.
- Goodricke J., 1786. A Series of Observations on, and a Discovery of, the Period of the Variation of the Light of the Star Marked δ by Bayer, Near the Head of Cepheus. *Phil. Trans.*, 76, 48-61.
- Hertzprung E., 1907. Zur Bestimmung der photographischen Sterngröße. *Zeitschr. f. Wiss. Photographie*, 5: 94.
- Hertzprung E., 1911. Ueber die Verwendung photographischer effektiver Wellenlaengen zur Bestimmung von Farbaequivalenten *Publ. Des Astrophys. Obs. Zu Postdam*, 22: 62.
- Hertzprung E., 1913. Über die Helligkeit der Plejadennebel. *Astron. Nachr.*, 195: 449.
- Hilditch R.W., 2001. *An Introduction to Close Binary Stars*, Cambridge University Press, UK. 392 p.
- Hollow R., (2002). *Pulsating Variable Stars*. 5 Nisan 2009, http://outreach.atnf.csiro.au/education/senior/astrophysics/variable_pulsating.html
- van Hoof A., 1943. *Koninklijke Vlaamsche Acad. Voor Wetensch.*, 5: 12.
- Kırbyık H., 2008. Eksensel Dönmenin Bazı Delta Scuti Yıldızlarının Salınım Frekansları Üzerine Etkileri. *XVI. Ulusal Astronomi Kongresi-2008*, Çanakkale. 929.
- Kim S.-L., Lee J.W., Lee C.-U., Kang Y.B., Koo J.-R. ve Mkrtichian D.E., 2005. On a short-periodic pulsating component in the Algol-type eclipsing binary system VV UMa. *IBVS*, 5598.
- Kopal Z., 1972. The Roche Model and Its Applications to Close Binary Systems. *Advances in Astron. And Astrophys.* Vol. 9.
- Kopal Z., 1978. *Dynamics of Close Binary Systems*, D. Reidel Publishing Co., 524 p.
- Kippenhahn R., Thomas H.C., 1970. Stellar Rotation. *Proceedings of IAU Colloq. 4*, Ohio, 20 p.
- Lázaro C., Arévalo M.J., Martínez-Pais I.G. ve Domínguez R.M., 2002. BVRJK Photometry and a Spectroscopic Study of the Algol Short-Period Binary VV Ursae Majoris. *Astron. J.*, 123: 2733–2743.
- Ledoux P., 1941. Radial Pulsations of Stars. *Astrophys. J.*, 94, 537-547.

- Lee U. ve Saio H., 1997. Low-Frequency Nonradial Oscillations in Rotating Stars. I. Angular Dependence. *Astrophys. J.*, 491, 839.
- Mathematica, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2007
- Mkrtichian D.E., Kusakin D.E., Gamarova A.Y. ve Nazarenko V., 2002. Pulsating Components of Eclipsing Binaries: New Asteroseismic Methods of Studies and Prospects. *Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics*, San Francisco, 96-99.
- Mkrtichian D.E., Kusakin D.E., Rodriguez E., Lehmann H., Olson E.C., Kim S.-L., Kusakin A.V. ve Rovithis-Livaniou H., 2003. Pulsations in Algols. *Interplay of Periodic, Cyclic and Stochastic Variability in Selected Areas of the H-R Diagram*, San Francisco, 113-120.
- Mkrtichian D.E., Kusakin D.E., Rodriguez E., Gamarova A.Y., Kim C., Kim S.-L., Lee J.W., Yoon J.-H., Kang Y.W., Olson E.C. ve Grankin K., 2004. Frequency spectrum of the rapidly-oscillating mass-accreting component of the Algol-type system AS Eri. *Astron and Astrophys.*, 419: 1015-1024.
- Mohan C. ve Singh V.P., 1978a. Use of Roche Coordinates in the Problems of Small Oscillations of Rotationally Distorted Stellar Models. *Astrophys. and Spa. Sci.*, 54: 293-304.
- Mohan C. ve Singh V.P., 1978b. Use of Roche Coordinates in the Problems of Small Oscillations of Tidally Distorted Stellar Models. *Astrophys. and Spa. Sci.*, 56: 109-117.
- Mohan C. ve Singh V.P., 1982. Effect of Rotational and Tidal Distortions on the Periods of Small Adiabatic Oscillations of Stellar Models. *Astrophys. and Spa. Sci.*, 85: 83-98.
- Mohan C. ve Saxena R.M., 1985. Effects of Rotation and Tidal Distortion on the Periods of Small Adiabatic Oscillations of the Polytropic Models of the Stars. *Astrophys. and Spa. Sci.*, 113: 155-169.
- Morse P.M. ve Feshbach H., 1953. *Methods of Theoretical Physics, Part I.*, McGraw-Hill, NY. 997 p.
- Özdamar K., 2003. *Modern Bilimsel Araştırma Yöntemleri*, Eskişehir. Kaan Kitabevi. 117.
- Plummer H., 1914. Note on the velocity of light and Doppler's principle. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 74: 660-664.
- Prša A., 2006. *Phoebe Scientific Reference*, University of Ljubljana. 25.
- Russel H., 1913. Giant and Dwarf Stars. *The Observatory*, 36: 325.

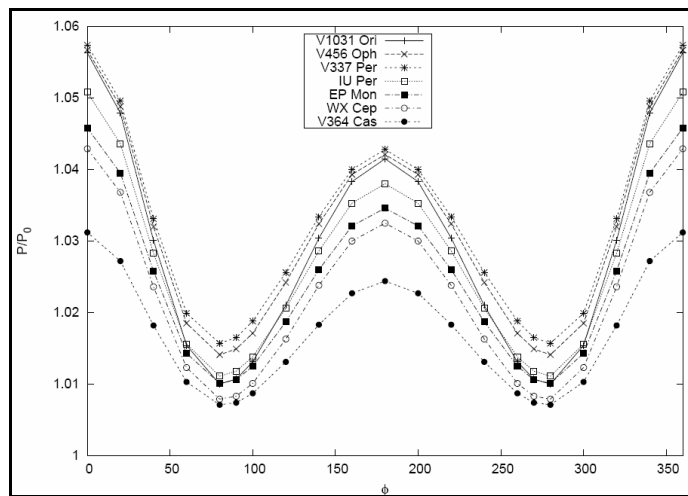
- Russel H., 1914. Relations between the Spectra and Other Characteristics of the Stars. *Popular Astronomy*, 22: 294.
- Schwarzschild M., 1936. Zur Pulsationstheorie der δ Cephei-Sterne. *ZfA*, 11: 152-180.
- Schwarzschild M., 1938. On the Light Curves of Cepheids. *Harvard Circ.*, 429: 1-7.
- Sen H., 1948. Anharmonic Pulsations of the Cepheid Variable. *Astrophys. J.*, 107: 404-412.
- Shapley H., 1914. On the Nature and Cause of Cepheid Variation. *Astrophys. J.*, 40: 448-465.
- Sidorov K. A., 1982. Influence of rotation and a binary companion on the frequency of the radial pulsations of a homogeneous star. *Astrofizika*, 18, 151-160.
- Soydugan E., Soydugan F., Demircan O. ve İbanoğlu, C., 2006a. A catalogue of close binaries located in the δ Scuti region of the Cepheid instability strip. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 370, 2013-2024.
- Soydugan E., Soydugan F., İbanoğlu C., Frasca A., Demircan O. ve Akan, M. C., 2006b. Long-term orbital period behaviors of the neglected Algol type binaries: CC Herculis and XZ Aquilae. *Astron. Nachr.*, 327: 905-911.
- Şenyüz T. ve Soydugan E., 2008. A binary star with a δ Scuti component: EF Herculis. *CoAst*, 157: 365-366.
- Ulaş B. ve Demircan O., 2007. An Attempt to Find the Geometrical Effect on Pulsational Period by virtue of Oblateness in Pulsating Components of Binary Stars. *Binary Stars as Critical Tools and Tests in Contemporary Astrophysics, International Astronomical Union. Symposium no. 240*, 459.
- Vitense E-B., 1989. *Introduction to Stellar Astrophysics*, Cambridge University Press., 243 p.
- Wesselink A., 1946. The colour index of a black body with infinite temperature. *BAN*, 10: 91-98.
- Zhang X.-B., Zhang R.-X. ve Li Q.-S., 2009. The semi-detached binary system IU Per and its intrinsic oscillation. *Research in Astron. and Astrophys.*, 9: 422-430.
- Zhevakin S.A., 1958. The Dissipation of the Energy of Oscillation of a Pulsating Star. *Astron. Zhurnal*, 35: 583.

EK-1 Zonklama Zaman Ölçeğiyle Çözümün Zonklayan ve Aday Çift Yıldız Bileşenlerine Uygulanmasından Elde Edilen Sonuçlar

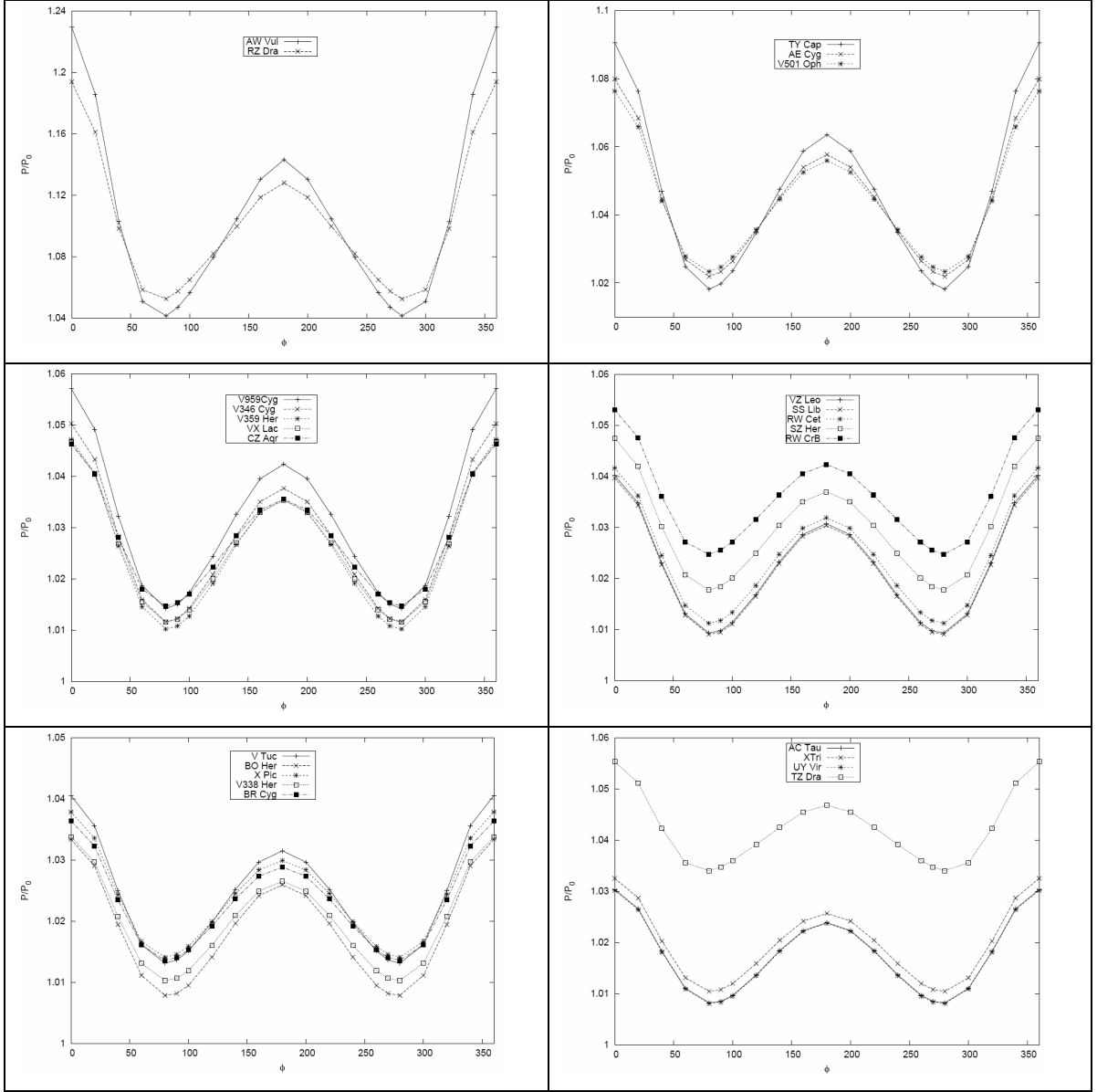
Bölüm II-1'de bir kısmı verilen liste ve grafiklerin tamamı bu ekte verilmiştir. Kullanılan çift yıldızların listesi Soydugan ve ark. (2006)'da bulunabilir.



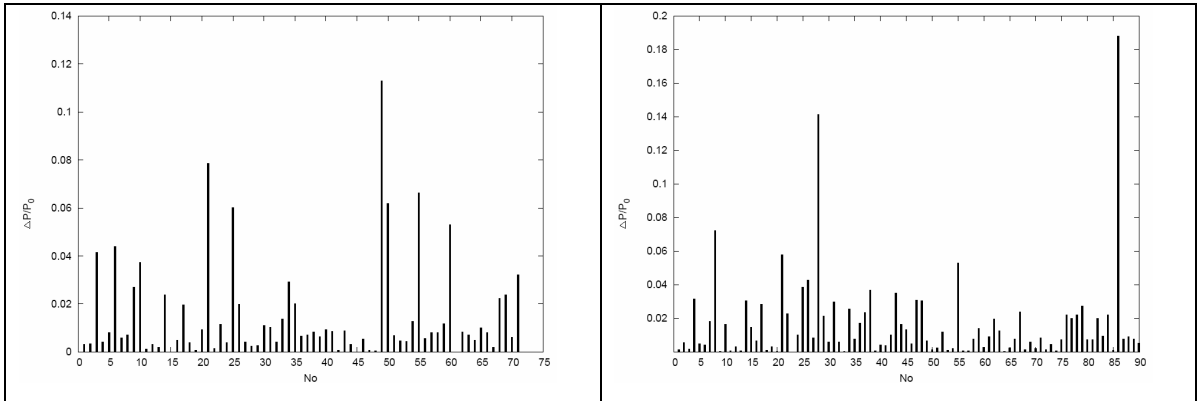
Şekil 1. Birinci bileşeni zonklayan ya da aday ayrık dizgeler.



Şekil 2. İkinci bileşeni zonklayan ya da aday ayrık dizgeler



Şekil 3. Birinci bileşeni zonklayan ya da aday yarı-ayrık dizgeler



Şekil 4. Birinci bileşeni zonklayan ya da aday olan numaralandırılmış ayrık (sol) ve yarı-ayrık (sağ) dizgeler için dönemler oranı farkının dağılımı.

Çizelge 1. Birinci bileşeni zonklayan ya da aday bazı yarı-ayrık dizgeler için gözlenmesi beklenen en büyük dönem farkı ve diğer özellikler. Çizelgenin ilk sütununda fark olarak verilen parametre bir dizge için en büyük $\frac{P}{P_0}$ oranı ile en küçük $\frac{P}{P_0}$ oranı arasındaki farka karşılık gelmektedir. Tayf türü, kütle oranı ve yörünge dönemi değerleri Soydugan (2006a)'dan alınmıştır.

| Fark | Dizge | Tayf türü | Yör. Dönem | Kütle Oranı |
|--------|----------|-----------|------------|-------------|
| 0.1881 | AW Vul | F0 | 0.81 | 0.73 |
| 0.1414 | RZ Dra | A5 | 0.55 | 0.44 |
| 0.0723 | TY Cap | A5 | 1.42 | 0.82 |
| 0.0530 | V501 Oph | A5 | 0.97 | 0.47 |
| 0.0429 | V959 Cyg | A5: | 1.84 | 0.68 |
| 0.0387 | V346 Cyg | A5 | 2.74 | 0.78 |
| 0.0370 | V359 Her | F0 | 1.76 | 0.86 |
| 0.035 | VX Lac | F0 | 1.07 | 0.72 |

Çizelge 2. Birinci bileşeni zonklayan ya da aday bazı ayrık dizgeler için gözlenmesi beklenen en büyük dönem farkı ve diğer özellikler. Çizelgenin ilk sütununda fark olarak verilen parametre bir dizge için en büyük $\frac{P}{P_0}$ oranı ile en küçük $\frac{P}{P_0}$ oranı arasındaki farka karşılık gelmektedir. Tayf türü, kütle oranı ve yörünge dönemi değerleri Soydugan (2006a)'dan alınmıştır.

| Fark | Dizge | Tayf türü | Yör. Dönem | Kütle Oranı |
|--------|----------|-----------|------------|-------------|
| 0.1130 | EP Mon | A3+ | 1.15 | 0.85 |
| 0.0785 | EG Cep | A3 | 0.54 | 0.69 |
| 0.0664 | BO Peg | A4 | 0.58 | 0.59 |
| 0.0618 | V456 Oph | A5: | 1.02 | 0.69 |
| 0.0602 | V Crt | A8V | 0.7 | 0.68 |
| 0.0531 | IU Per | A4+ | 0.86 | 0.84 |
| 0.0440 | SZ Ari | F0 | 1.72 | 0.71 |
| 0.0414 | V409 Aql | F5 | 2.05 | 0.9 |
| 0.0372 | AL Cam | A2+ | 1.33 | 0.6 |

EK-2 Sayısal Çözüm ve Çizimler için MATHEMATICA ve AWK Kodları

```

q := 0.6;
n := (q + 1) / 2;
G :=  $\frac{5}{3}$ ;
GR := 6.67 * 10-8;
MS := 2 * 1.99 * 1033;
SIG := 25;

FR :=  $\frac{1}{\frac{1}{SIG} * 24 * 60 * 60}$ ;
SM := 0.05 * 1.496 * 1013;
Ω := 3.3;
r0 :=  $\frac{1}{Ω - q}$ 

For[p = -1.0001; v := Cos[p Degree]; μ := Sin[p Degree] * Sin[i Degree], p < 89, p = p + 1;
For[i = 0; λ := Sin[p Degree] * Cos[i Degree], i < 181, i = i + 1,

t = r /. FindRoot[ $\frac{1}{r} + q * \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 2 * λ * r + r^2}} - λ * r \right) + \frac{q + 1}{2} * r^2 * (1 - v^2) == Ω, \{r, 0.5\}$ ]; λ2 :=  $\frac{(t * SM)^3 * FR^2}{GR * MS}$ ;

U :=  $-\frac{1}{3 * t^3} - \frac{4}{3} * n * \text{Log}[10, t] - \left( \frac{2}{3} * q^2 + \frac{4}{3} * n * q + \frac{28}{27} * n^2 \right) * t^3 - \frac{29}{70} * q^2 * t^5 - \frac{20}{63} * q^2 * t^7$ ;
K[x_] := 1 + 3 * U * x^3;
A[x_] :=  $1 - \frac{16}{3} * n * x^3 - \left( \frac{56}{5} * q^2 + \frac{112}{15} * n * q + \frac{104}{45} * n^2 \right) * x^6 - \frac{90}{7} * q^2 * x^8 - \frac{44}{3} * q^2 * x^{10}$ ;
B[x_] :=  $\frac{1}{x} \left( \left( 4 - \frac{3}{K[x]} \right) - \left( \frac{64}{3} - \frac{20}{K[x]} - \frac{12 * \text{Log}[10, x]}{K[x]^2} \right) * n * x^3 - \right.$ 
 $\left. \left( \frac{296}{5} * q^2 + \frac{592}{15} * n * q + \frac{1064}{45} * n^2 \right) * x^6 + \left( \frac{198}{5} * q^2 + \frac{132}{5} * n * q - \frac{76}{15} * n^2 \right) * \frac{x^6}{K[x]} + \right.$ 
 $\left. \left( 6 * q^2 + 4 * n * q + \frac{28}{3} * n^2 \right) * \frac{x^6}{K[x]^2} - \left( \frac{48 * (\text{Log}[10, x])^2}{K[x]^3} + \frac{80 * (\text{Log}[10, x])}{K[x]^2} \right) * n^2 * x^6 + \right.$ 
 $\left. \left( -\frac{560}{7} + \frac{627}{14 * K[x]} + \frac{261}{70 * K[x]^2} \right) * q^2 * x^8 + \left( -\frac{316}{3} + \frac{152}{3 * K[x]} + \frac{20}{7 * K[x]^2} \right) * q^2 * x^{10}$ ;
L[x_] :=  $\frac{3 * x}{G * K[x]} \left( 1 - 4 \left( \frac{1}{3} + \frac{\text{Log}[10, x]}{K[x]} \right) * n * x^3 - \left( \frac{8}{5} * q^2 + \frac{16}{15} * n * q + \frac{92}{45} * n^2 \right) * x^6 - \right.$ 
 $\left. \left( 2 * q^2 + \frac{4}{3} * n * q + \frac{28}{9} * n^2 \right) * \frac{x^6}{K[x]} + 16 * \left( \frac{(\text{Log}[10, x])^2}{K[x]^2} + \frac{\text{Log}[10, x]}{3 * K[x]} \right) * n^2 * x^6 - \right.$ 
 $\left. \left( \frac{10}{7} + \frac{87}{70 * K[x]} \right) * q^2 * x^8 - \left( \frac{4}{3} + \frac{20}{21 * K[x]} \right) * q^2 * x^{10}$ ;
F[x_] :=  $\frac{3 * \left( 3 - \frac{4}{G} \right)}{x^2 * K[x]} \left( 1 - \left( \frac{14}{3} + \frac{4 * \text{Log}[10, x]}{K[x]} \right) * n * x^3 - \left( \frac{42}{5} * q^2 + \frac{84}{15} * n * q + \frac{128}{45} * n^2 \right) * x^6 - \right.$ 
 $\left. \left( 2 * q^2 - \frac{4}{3} * n * q + \frac{28}{9} * n^2 \right) * \frac{x^6}{K[x]} + \left( \frac{16 * (\text{Log}[10, x])^2}{K[x]^2} + \frac{56 * \text{Log}[10, x]}{3 * K[x]} \right) * n^2 * x^6 - \right.$ 
 $\left. \left( \frac{129}{14} + \frac{87}{70 * K[x]} \right) * q^2 * x^8 - \left( \frac{92}{9} + \frac{20}{21 * K[x]} \right) * q^2 * x^{10}$ ;

eskinum = NDSolve[{A[x] * u''[x] + B[x] * u'[x] + (λ2 * L[x] - F[x]) * u[x] == 0,
u[0.0001] == 0.000001, u'[0.0001] == 0.000001}, u, {x, 0.0001, r0}];
u1 = u[r0] /. eskinum; ts = t + t * u1; ts >>> yeni_q06.txt; t >>> t_q06.txt;
frk = ts - t; u1 >>> u_q06.txt; frk >>> frk_q06.txt]]

```

Şekil 1. $q = 0.6$ ve $\varepsilon = 3.3$ olan bir dizgenin eksen-simetrik geometrik yapılı bir bileşenin dörtte birlik kısmı için, tedirginlik öncesi ve sonrası merkez uzaklığını, en büyük genlik değerini ve bunların arasındaki farkları bulup dosyalara yazdıran MATHEMATICA kodu.

```

q := 0.338;
n := (q + 1) / 2;
G := 5/3;
GR := 6.67 * 10^-8;
MS := 2.28 * 1.99 * 10^33;
SIG1 := 64.1965;
FR1 := 1 / (1/SIG1 * 24 * 60);
PH1 := 0.347;
SIG2 := 12.0957;
FR2 := 1 / (1/SIG2 * 24 * 60);
PH2 := 0.478;
SM := 4.78201 * 10^11;
Omega := 4.6088;
r0 := 1 / (Omega - q);
time := 42.75;
For[p := -1.0001; v := Cos[p Degree]; mu := Sin[p Degree] * Sin[i Degree], p < 89, p = p + 1;
For[i := 0; lambda := Sin[p Degree] * Cos[i Degree], i < 181, i = i + 1,
t = r /. FindRoot[1/r + q * (1 / (sqrt(1 - 2 * lambda * r + r^2)) - lambda * r) + (q + 1) / 2 * r^2 * (1 - v^2) == Omega, {r, 0.5}];
lambda1 := (t * SM)^3 * FR1^2 / (GR * MS); lambda2 := (t * SM)^3 * FR2^2 / (GR * MS);
U := -1 / (3 * t^3) - 4 / 3 * n * Log[10, t] - (2 / 3 * q^2 + 4 / 3 * n * q + 28 / 27 * n^2) * t^3 - 29 / 70 * q^2 * t^5 - 20 / 63 * q^2 * t^7;
K[x_] := 1 + 3 * U * x^3;
A[x_] := 1 - 16 / 3 * n * x^3 - (56 / 5 * q^2 + 112 / 15 * n * q + 104 / 45 * n^2) * x^6 - 90 / 7 * q^2 * x^8 - 44 / 3 * q^2 * x^10;
B[x_] := 1/x * ((4 - 3/K[x]) - (64 - 20/K[x] - 12 * Log[10, x] / K[x]^2) * n * x^3 -
(296 / 5 * q^2 + 592 / 15 * n * q + 1064 / 45 * n^2) * x^6 + (198 / 5 * q^2 + 132 / 5 * n * q - 76 / 15 * n^2) * x^6 / K[x] +
(6 * q^2 + 4 * n * q + 28 / 3 * n^2) * x^6 / K[x]^2 - (48 * (Log[10, x])^2 + 80 * (Log[10, x])) * n^2 * x^6 +
(-560 / 7 + 627 / (14 * K[x]) + 261 / (70 * K[x]^2)) * q^2 * x^8 + (-316 / 3 + 152 / (3 * K[x]) + 20 / (7 * K[x]^2)) * q^2 * x^10);
L[x_] := 3 * x / (G * K[x]) * (1 - 4 * (1/3 + Log[10, x] / K[x]) * n * x^3 - (8 / 5 * q^2 + 16 / 15 * n * q + 92 / 45 * n^2) * x^6 -
(2 * q^2 + 4 / 3 * n * q + 28 / 9 * n^2) * x^6 / K[x] + 16 * ((Log[10, x])^2 / K[x]^2 + Log[10, x] / (3 * K[x])) * n^2 * x^6 -
(10 / 7 + 87 / (70 * K[x])) * q^2 * t^8 - (4 / 3 + 20 / (21 * K[x])) * q^2 * x^10);
F[x_] := 3 * (3 - q/G) / (x^2 * K[x]) * (1 - (14 / 3 + 4 * Log[10, x] / K[x]) * n * x^3 - (42 / 5 * q^2 + 84 / 15 * n * q + 128 / 45 * n^2) * x^6 -
(2 * q^2 - 4 / 3 * n * q + 28 / 9 * n^2) * x^6 / K[x] + (16 * (Log[10, x])^2 + 56 * Log[10, x]) * n^2 * x^6 / (K[x]^2 + 3 * K[x]) -
(129 / 14 + 87 / (70 * K[x])) * q^2 * x^8 - (92 / 9 + 20 / (21 * K[x])) * q^2 * x^10);
num1 = NDSolve[{A[x] * u''[x] + B[x] * u'[x] + (lambda1 * L[x] - F[x]) * u[x] == 0,
u[0.0001] == 0.000001, u'[0.0001] == 0.000001}, u, {x, 0.0001, r0}];
u1 = u[t] /. num1; num2 = NDSolve[{A[x] * v''[x] + B[x] * v'[x] + (lambda2 * L[x] - F[x]) * v[x] == 0,
v[0.0001] == 0.000001, v'[0.0001] == 0.000001}, v, {x, 0.0001, r0}]; v1 = v[t] /. num2;
uv = u1 * Sin[2 * pi * (FR1 * time + PH1)] + v1 * Sin[2 * pi * (FR2 * time + PH2)]; ts = t + t * uv;
frk = ts - t; uv >>> rz_uv.txt; t >>> rz_t.txt; ts >>> rz_ts.txt; frk >>> rz_frk.txt]]

```

Şekil 2. RZ Cas dizgesinin iki frekansı kullanılarak elde edilen çözüm için Şekil 1'in benzeri.

```

{printf ("%s ", $0)
  if (NR %181 == 0) {printf ("\n")}}

# awk - f script.awk giris.dat > cikis.dat

```

Şekil 3. Çıktı dosyalarını 90×180’lik matris haline getirmek için kullanılan AWK kodu ve komut satırından çalıştırılması.

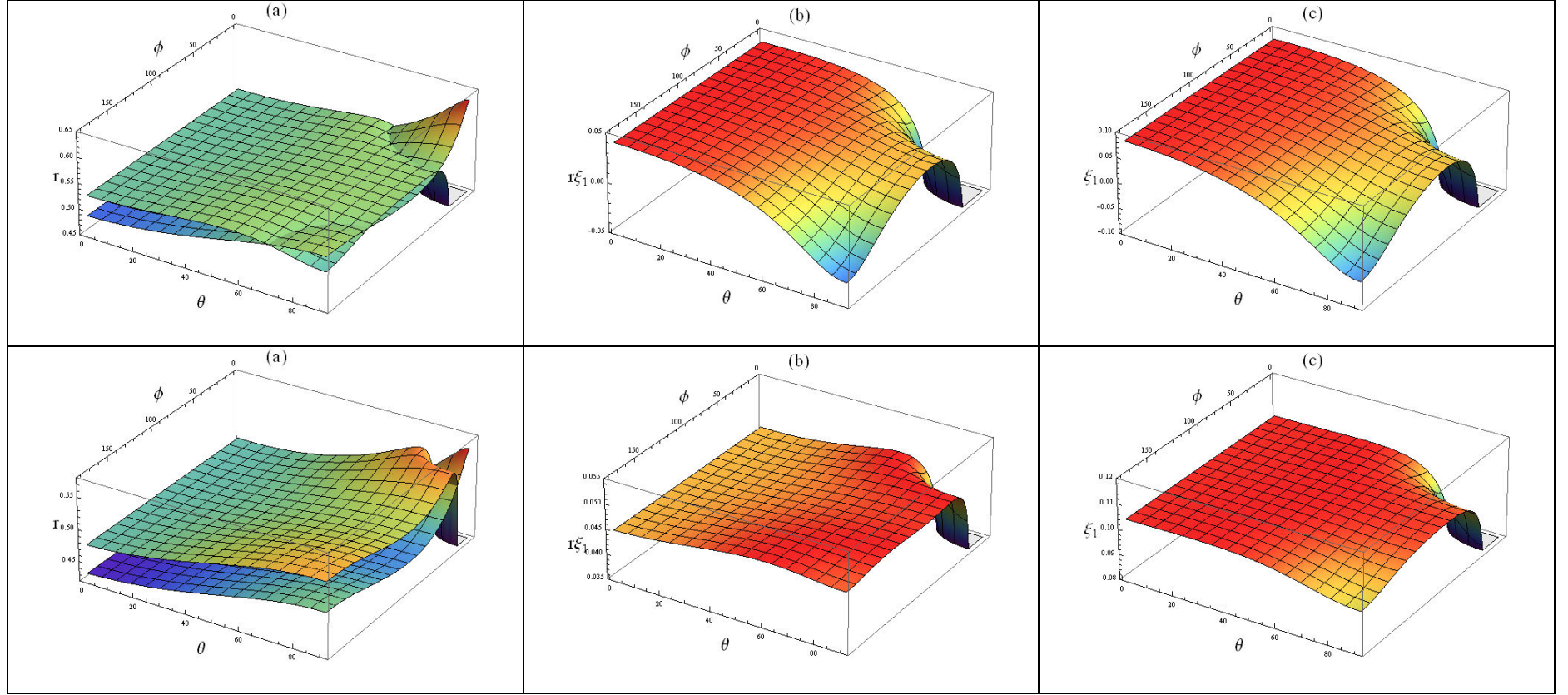
```

q6 := ReadList["ts_q06_2.txt", Table[Number, {181}], 91];
t6 := ReadList["t_q06_2.txt", Table[Number, {181}], 91];
f6 := ReadList["frk_q06_2.txt", Table[Number, {181}], 91];
u6 := ReadList["u_q06_2.txt", Table[Number, {181}], 91];
ga := ListPlot3D[{q6, t6}, ColorFunction -> "Rainbow", ViewPoint -> {8, 5, 5}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {Style["φ", FontSize -> Large], Style["θ", FontSize -> Large], Style["r", FontSize -> Large]},
  PerformanceGoal -> "Quality", PlotLabel -> Style["(a)", FontSize -> Large]];
Export["q06a.png", ga, ImageSize -> {570, 421}]
gb := ListPlot3D[{f6}, ColorFunction -> "Rainbow", ViewPoint -> {8, 5, 5}, PlotRange -> All, AxesLabel ->
  {Style["φ", FontSize -> Large], Style["θ", FontSize -> Large], Style["rξ1", FontSize -> Large]},
  PerformanceGoal -> "Quality", PlotLabel -> Style["(b)", FontSize -> Large]];
Export["q06b.png", gb, ImageSize -> {570, 421}]
gc := ListPlot3D[{u6}, ColorFunction -> "Rainbow", ViewPoint -> {8, 5, 5}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {Style["φ", FontSize -> Large], Style["θ", FontSize -> Large], Style["ξ1", FontSize -> Large]},
  PerformanceGoal -> "Quality", PlotLabel -> Style["(c)", FontSize -> Large]];
Export["q06c.png", gc, ImageSize -> {570, 421}]

```

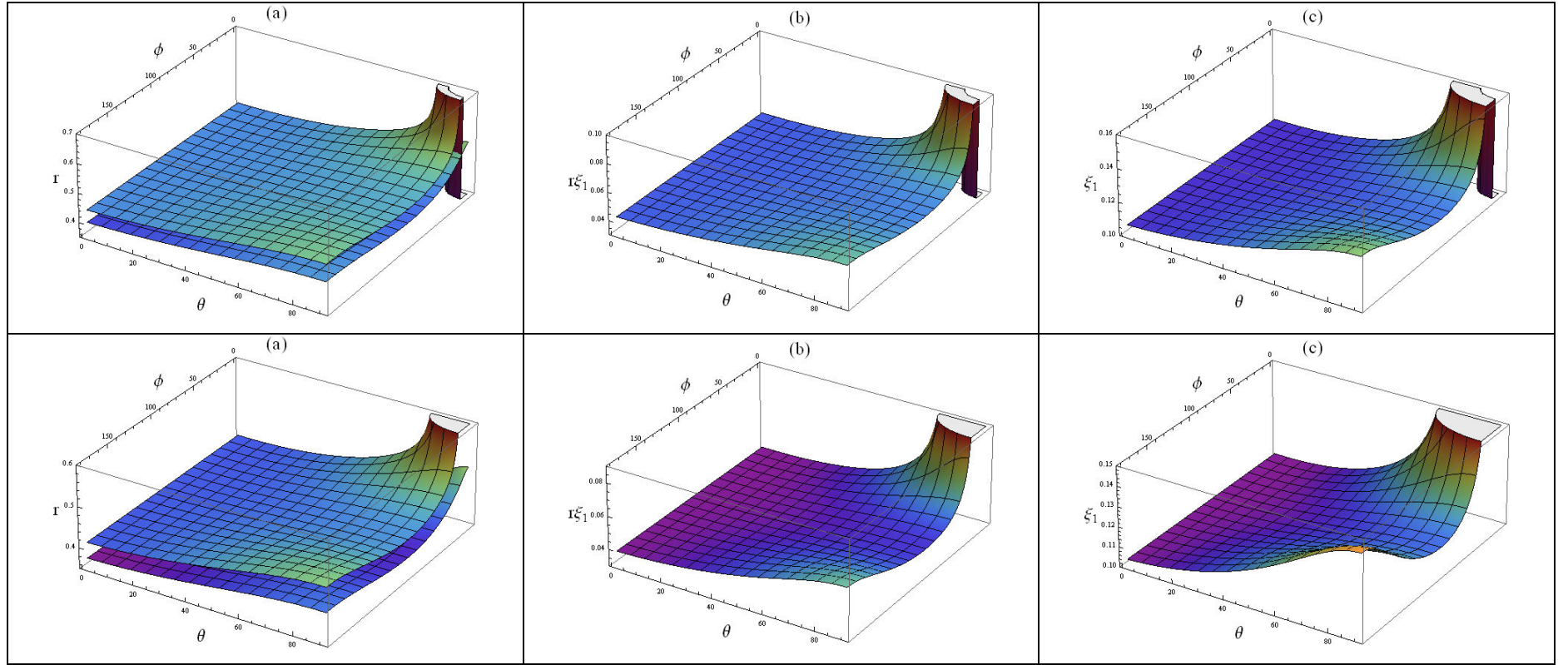
Şekil 4. q=0.6 için çizilen grafikleri .png dosyası olarak yazdıran MATHEMATICA kodu.

EK-3 Roche Lobunu Doldurmuş Bir Bileşen için Elde Edilen Çözümler



VII

Şekil 1. Her bir derecelik yüzey alanı için bileşenin potansiyeli kritik potansiyele eşit alınarak çözümünden bulunan değerlerin θ ve ϕ 'ye göre çizimi. İlk satır kütle oranı 0.2 olan bir çift yıldız bileşeni için (a) tedirginlikten önce (alt) ve sonra (üst) merkez uzaklıkları, (b) en büyük tedirginlikte yüzeye eklenen merkezi uzaklık miktarı, (c) en büyük genlik miktarını göstermektedir. İkinci satırda (d), (e) ve (f) kütle oranı 0.4 olan bir dizgenin bileşeni için (a), (b) ve (c)'ye karşılık gelmektedir. r_{point} 'e yakın değerlerde çözümün farklı davranışı göze çarpmaktadır.



Şekil 2. İlk satırda 0.6 ve ikinci satırda 0.8 kütle oranları için Şekil 1'in benzeri.

Çizelgeler

| | | |
|---------------|--|----|
| Çizelge 4.1.1 | Bazı yarı-ayrık dizgeler için gözlenmesi beklenen en büyük dönem farkı ve diğer özellikler | 26 |
| Çizelge 4.2.1 | Farklı özdeğerler için yüzeydeki görelî genlik değerleri ve ardışık farkları | 31 |
| Çizelge 4.3.1 | EF Her dizgesinin bazı evre aralıkları için hesaplanan değerleri | 43 |
| Çizelge 4.3.2 | VV UMa dizgesinin bazı evre aralıkları için hesaplanan değerleri | 46 |

Şekiller

| | | |
|--------------|--|----|
| Şekil 1.2.1 | Farklı zonklayan yıldız türlerinin H-R çizgesindeki konumları | 6 |
| Şekil 3.1.1 | Kütle oranı 0.5 olan bir dizge için eşpotansiyel çizgileri | 10 |
| Şekil 4.1.1 | Bozulmuş bir yıldızın zonklama döneminin, bozulmamış yıldızinkine oranının 0.2 ve 0.8 kütle oranları için evreyle değişimi ($\theta = 90^\circ$) | 23 |
| Şekil 4.1.2 | Farklı θ değerlerini kapsayan üç boyutlu yüzey gösterimi | 24 |
| Şekil 4.1.3 | Bazı dizgeler için beklenen dönem oranının evreyle değişimi | 25 |
| Şekil 4.2.1 | Farklı kütle oranları için aynı başlangıç koşullu bir salınımın merkezden yüzeye alacağı görelî genlik değerleri | 29 |
| Şekil 4.2.2 | Sabit frekanslı bir salınımın görelî genliğinin 0.2 kütle oranlı bir dizgeye ait bileşende merkez uzaklığıyla göstereceği değişim | 30 |
| Şekil 4.2.3 | Kütle oranı 0.4 olan bir dizgede aynı başlangıç genlikli, farklı frekanslı dört salınımın görelî genliğinin merkezle yüzey arasında değişimi | 31 |
| Şekil 4.2.4 | Eşit yüzey görelî genlikli bozulmuş ve bozulmamış bir yıldızın frekans oranlarının kütle oranıyla değişimi | 32 |
| Şekil 4.2.5 | Her bir derecelik yüzey alanı için çözümden bulunan değerlerin θ ve ϕ 'ye göre çizimi (q=0.2 için) | 35 |
| Şekil 4.2.6 | Her bir derecelik yüzey alanı için çözümden bulunan değerlerin θ ve ϕ 'ye göre çizimi (q=0.4 için) | 36 |
| Şekil 4.2.7 | Her bir derecelik yüzey alanı için çözümden bulunan değerlerin θ ve ϕ 'ye göre çizimi (q=0.6 için) | 37 |
| Şekil 4.2.8 | Her bir derecelik yüzey alanı için çözümden bulunan değerlerin θ ve ϕ 'ye göre çizimi (q=0.8 için) | 38 |
| Şekil 4.2.9 | RZ Cas'ın zonklayan bileşeni için $t = 20dk$ 'deki salınımı ile tedirgin olmamış yüzeyin karşılaştırılması | 39 |
| Şekil 4.2.10 | RZ Cas'ın zonklayan bileşeni için $t = 20dk$ 'deki salınımı ile tedirgin olmamış yüzeyin merkez uzaklıkları arası fark ve iki frekans göz önüne alınarak elde edilen toplam genlik | 40 |
| Şekil 4.2.11 | RZ Cas dizgesinin Soyduğan ve ark. (2006b) tarafından verilen parametreler kullanılarak elde edilen Roche modeli | 40 |
| Şekil 4.3.1 | EF Her dizgesinin gözlemsel ve teorik ışık eğrisi | 43 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Şekil 4.3.2 | EF Her dizgesinin Şenyüz ve Soydugan (2008) tarafından verilen parametreler ile elde edilen Roche modeli | 43 |
| Şekil 4.3.3 | VV UMa dizgesinin gözlemsel ve teorik ışık eğrisi | 45 |
| Şekil 4.3.4 | VV UMa dizgesinin Lázaro ve ark. (2002) tarafından verilen parametreler ile elde edilen Roche modeli | 45 |
| Şekil 5.1.1 | Kullanılan iki yöntemle edilen sonuçların tutarlılığı | 47 |

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Burak Ulaş

Doğum Yeri : İzmir

Doğum Tarihi : 15.06.1978

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Ege Üniversitesi – Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Ege Üniversitesi – Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI –Diğer

1) The BV light and O-C curves analyses of the triple system V505 Sagittarii, İbanoglu, C., Çakirli, O., Değirmenci, Ö.L., Saygan, S., Ulaş, B., Erkan, N., 2000, A&A, 354, 188.

2) New Times of Minima of Eclipsing Binary Systems, Yakut, K., Erkan, N., Ulaş, B., Keskin, V., 2003, IBVS, 5360.

3) Basic physical properties of the low-temperature contact binary system V781 Tau and the near-contact binary system V836 Cyg, Yakut, K., Ulaş, B., Kalomeni, B., Gulmen, O., 2005, MNRAS, 363, 1272

4) Absolute properties of the binary system BB Pegasi, Kalomeni, B., Yakut, K., Keskin, V., Degirmenci, O. L., Ulaş, B., Kose, O., 2007, AJ, 134, 642.

5) The Algol-type eclipsing binaries RW CrB and VZ Leo: New RI photometric study and search for pulsations, Ulaş, B., Niarchos, P., Lampens, P., Liakos, A., 2009, Ap&SS, 319,55.

b) Bildiriler -Uluslararası –Ulusal

6) Apsidal Motion Studies for DI Her, Yildiz, M., Ibanoglu, C., Devlen, A., Taş, G., Ulaş, B., Saygan, S., Evren, S., Çakirli, O., 2000, vsea.conf 577.

7) An Attempt to Find the Geometrical Effect on Pulsational Period by virtue of Oblateness in Pulsating Components of Binary Stars, Ulaş, B., Demircan, O., 2006, IAUS, 240E, 208.

8) Theoretical Relation Between Oscillation Frequencies of Distorted and Undistorted Polytropic Stars, Ulaş, B., Demircan, O., 2008, RoAJ, 18, 87.

9) The Algol-type eclipsing binary TZ Eridani : BV Photometry and search for pulsations and tertiary component, Liakos, A., Ulaş, B., Gazeas, K., Niarchos, P., 2008, CoAst, 157,336.

10) Musical Scale Estimation for Some Multiperiodic Pulsating Stars, Ulaş, B., 2009, CoAst, 159, 131.

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :

1999-2000 Space Camp Turkey – Eğitimci

2004- Onsekiz Mart Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Fizik Bölümü – Araştırma Görevlisi

İLETİŞİM

E-posta Adresi : bulash@gmail.com