T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

UZAY ZAMANLARIN MADDE VE EĞRİLİK SİMETRİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Necdet YÜCEL
Fizik Anabilimdalı
Tezin Sunulduğu Tarih: **07.08.2009**

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Uğur CAMCI

ÇANAKKALE

DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Necdet YÜCEL tarafından **Prof.Dr. Uğur CAMCI** yönetiminde hazırlanan **"UZAY-ZAMANLARIN MADDE VE EĞRİLİK SİMETRİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof.Dr. İhsan YILMAZ

Yönetici

Prof.Dr. Uğur CAMCI	Prof.Dr.İsmail TARHAN
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi
Yrd.Doç.Dr. Yusuf SUCU	Yrd.Doç.Dr. Can AKTAŞ
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi: 07/08/2009

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Hazırlanan bu Doktora Tezi TÜBİTAK tarafından 106T669 no'lu projeden desteklenmiştir.

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimimim her aşamasında önemli yardımlarını gördüğüm Prof.Dr. İlhami YAVUZ'a; bu tezin hazırlık sürecinde önerileriyle yol gösteren tez izleme komitesi üyeleri Prof.Dr. Can Battal Kılıç'a, Prof.Dr. Hüsnü BAYSAL'a, Prof.Dr. İhsan YILMAZ'a, Prof.Dr. İsmail TARHAN'a ve lisans eğitiminden bugüne gelmemde büyük emeği olan tez danışmanım Prof.Dr. Uğur CAMCI'ya içtenlikle teşekkür ederim.

Necdet YÜCEL

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler

$(.)$	t değişkenine göre türev
$(,)$	Kısmi türev
$(;)$	Kovaryant türev
$£_{\vec{\xi}}$	$\vec{\xi}$ vektör alanı yönündeki Lie türev operatörü

Kısaltmalar

EFE	Einstein Alan Denklemleri
EMT	Enerji-Momentum Tensörü
KV	Killing Vektör
HV	Homothetic Vektör
CKV	Konformal Killing Vektör
SCKV	Özel Konformal Killing Vektör
AC	Afin Kollinasyonu
RC	Ricci Kollinasyonu
CC	Eğrilik (Curvature) Kollinasyonu
MC	Madde Kollinasyonu

Konvansiyon

Signatür +2'dir.

ÖZET

UZAY-ZAMANLARIN MADDE VE EĞRİLİK SİMETRİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Necdet YÜCEL
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı Doktora Tezi
Danışman: Prof.Dr. Uğur CAMCI

07.08.2009, 74 sayfa

Bu çalışmanın birinci bölümünde tezin amacının anlatıldığı bir giriş yapılmış; ikinci bölümde ise temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde madde ve eğrilik simetrisi kavramları anlatılmıştır. Dördüncü ve beşinci bölümde ise sırasıyla Statik Silindirik Simetrik Uzay-Zamanın ve Bianchi Tip II, I, III, V ve VI, VIII ve IX, IV Uzay-Zamanların eğrilik simetrileri hesaplanmış ve simetri koşulunu sağlayan vektör alanlarının madde simetrisi olma koşulları belirlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Madde simetrisi, eğrilik simetrisi, Statik silindirik simetrik uzay-zaman, Bianchi tip uzay-zamanlar

ABSTRACT

RELATIONS BETWEEN MATTER AND CURVATURE SYMMETRIES OF SPACETIMES

Necdet YÜCEL

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Science and Engineering

Chair for Physics Thesis of Doctor of Philosophy

Advisor: Prof.Dr. Uğur CAMCI

07.08.2009, 74 pages

In the first chapter of this study, a brief introduction in which aim of the thesis is explained has been begun and in the second chapter, the fundamental definitions have been given. In the third chapter, matter and curvature collination concepts have been explained. In the fourth and fifth chapters, curvature collineations of static spherically symmetric space-times and Bianchi type II, I, III, V and VI, VIII and IX, IV space-times determined. After that, using vector fields that satisfies curvature collineation equations in the matter collineation equations some constraint equations have been obtained.

Keywords: Matter Collineations, Curvature Collineations, Static Spherically Symmetric Space-times, Bianchi type space-times

İÇERİK

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Einstein alan denklemlerinin (EFE) çeşitli simetrileri üzerinde çokça çalışılan önemli konulardandır. Bu simetriler

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab} \tag{1.1}$$

ile verilen EFE'lerin çözümlerinden ortaya çıkmaktadır. Burada G_{ab} Einstein tensörünün, R_{ab} Ricci tensörünün ve T_{ab} Enerji-momentum tensörünün bileşenlerini gösterirken R Ricci sabitini, κ ise gravistasyonel sabiti göstermektedir. Bir uzay-zamanın geometrisi g_{ab} metrik tensörü ile belirlenir. Sadece metrik tensöre ve onun türevlerine bağlı olan $R^a{}_{bcd}$ Riemann eğrilik tensörünün simetrilerinin çalışılması ile önemli sonuçlara ulaşılabilir. g_{ab} metrik tensörünün invaryant kaldığı simetri Killing denklemiyle ifade edilmekte ve $R^a{}_{bcd}$ Riemann tensörünü değiştirmeyen Lie dönüşümüne "Eğrilik Kollinasyon" simetrisi denilmektedir.

Madde simetrileri, uzay-zamanın simetrilerine farklı bir bakış açısı getirirler ve daha fazla fiziksel tabana sahiptirler. Verilen bir madde dağılımı için Einstein Alan Denklemlerini sağlayan bir gravitasyonel potansiyel (metrik) bulmak, relativite teorisindeki tüm araştırmalarda asıl amaçtır. Bu, seçilen madde dağılımının dinamiği ile uyumlu geometri üzerine simetriler yüklenerek elde edilebilir. T_{ab} enerji-momentum tensörünün Madde Kollinasyonu denilen (ve madde tensörünü invaryant bırakan yönleri veren) simetrileri, uzay-zamanların belirli bölgelerinde oluşan fiziksel alanların metriğin simetrilerini nasıl yansıttığını bilmemize imkan sağlar.

Ele alınan geometriyi ifade eden uzay-zaman metriği eğrilik simetrilerine izin veriyorsa bunların bulunması, sınıflandırılması ve elde edilen vektör uzaylarının aynı zamanda madde simetrisi olması için gerekli kısıtlama denklemlerinin belirlenip çözülerek Eğrilik Kollinasyonu ile Madde Kollinasyonu arasındaki ilişkinin tespit edilip sınıflandırılması tezdeki temel amaç olacaktır.

BÖLÜM 2
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Lie Cebri ve Lie Türevi

$\Xi(M)$, M manifoldu üzerindeki tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi ve Φ (M), M manifoldu üzerindeki tüm diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi olsun. Bu küme, toplama ve skaler ile çarpma işlemleri altında bir reel vektör uzayıdır. Eğer X, $Y \in \Xi(M)$ ise $[X,Y]$ **Lie bracketi** (parantezi veya komütatörü)

$$[X,Y]\,f = X\,(Y f) - Y\,(X f)\,, \quad \forall\, f \in \Phi\,(M), \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. [,] Lie parantezinin, X ve Y vektör alanlarına uyguladığı işleme **Lie çarpımı** denilmektedir. Ayrıca; Lie parantezi $\forall$ $X, Y, Z \in \Xi(M)$ için

$$[X,Y] = -[Y,X], \tag{2.2}$$

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0, \qquad \text{(Jacobi özdeşliği)} \tag{2.3}$$

bağıntılarını sağlamaktadır. (2.1) Lie çarpımı işlemine göre, (2.2) ve (2.3) özelliklerini sağlayan ($\Xi(M)$, [,]) çiftine **Lie Cebri** denir.

M manifoldu üzerinde bir $\vec{X}$ **vektör alanı**, M nin her p noktasına bir $\vec{X}_p$ vektörü atanmasıyla elde edilir. Eğer f , M de bir diferensiyellenebilir fonksiyon ise $\vec{X} f$, M üzerinde $(\vec{X} f)(p) = \vec{X}_p f$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur.

Eğer $\vec{X} f$, her f diferensiyellenebilir fonksiyonu için türevlenebilir ise $\vec{X}$ vektör alanına **diferensiyellenebilir** denir. Bir $\vec{X}$ vektör alanı,

$$\boldsymbol{X} = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada; $(\xi^i) = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ n-lisine, $(x^i) = (x^1, \ldots, x^n)$ lokal koordinat sistemine göre $\vec{X} \in T_p(M)$ vektör alanının **bileşenleri** denir.

Bir vektörün kontravaryant ve kovaryant bileşenlerinin kovaryant türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$U^a{}_{;b} = U^a{}_{,b} + \Gamma^a{}_{bc} U^c \tag{2.5}$$

$$U_{a;b} = U_{a,b} - \Gamma^c{}_{ab} U_c \tag{2.6}$$

Burada

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}) \tag{2.7}$$

Christoffel sembolü ve g_{ab} metrik tensör (ikinci ranktan ve simetrik bir tensördür) olup g^{ab} metrik tensörün tersini göstermektedir. Metrik tensör ve tersi arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c \tag{2.8}$$

Üçüncü ranktan bir tensörün kovaryant türevi

$$U^a{}_{bc;d} = U^a{}_{bc,d} + \Gamma^a{}_{dm}U^m{}_{bc} - \Gamma^m{}_{bd}U^a{}_{mc} - \Gamma^m{}_{cd}U^a{}_{bm} \tag{2.9}$$

şeklinde verilmektedir. Benzer şekilde bu tanım n. ranktan bir tensöre genişletilebilir. Lokal bir geodezik sistemde, verilen bir noktada bütün Christoffel sembollerinin sıfırlandığı (fakat türevlerinin sıfır olmadığı) bir koordinat sistemi seçmek her zaman mümkündür. Bu sistemde, kovaryant ve kısmi türevler çakışır.

Bir M manifoldu üzerindeki ***X*** vektör alanı, her $p \in M$ noktası için $\gamma_p(0) = p$ olacak şekilde yalnız bir tane $\gamma_p(\tau)$ eğrisi belirler ve X_p, bu eğriye teğet vektördür. $\gamma_p(\tau)$ eğrisi boyunca $(y^1,...,y^n)$ yerel koordinatları, $y^i(0) = x^i(p)$ başlangıç değerleri ile $\frac{dy^i}{d\tau} = x^i\left(y^i(\tau),...,y^n(\tau)\right)$ adi diferansiyel denklem sisteminin çözümleridir. Yeni bir türev ortaya koymak için p noktasından geçen $\gamma_p(\tau)$ eğrisi boyunca $q = \gamma_p(\tau)$ görüntü noktasına doğru x^i koordinatlı her bir p noktasını taşıyan (draggig) ϕ_τ gönderimi dikkate alınmalıdır. τ parametresinin yeterince küçük değerleri için ϕ_τ gönderimi birebirdir ve bu herhangi bir ***T*** tensörünün $\phi_\tau^* T$ gönderimini içerir. ***T*** tensörünün X vektör alanına göre Lie türevi şu şekilde tanımlıdır:

$$£_X T = \lim_{\tau \to 0} \frac{\phi_\tau^* T - T}{\tau} \tag{2.10}$$

T ve $\phi_\tau^* T$ tensörleri aynı tiptendirler ve her ikisi de aynı p noktasında hesaplanırlar. Eğer ***T*** ve $\phi_\tau^* T$ tensörleri çakışırsa bunların Lie türevleri sıfırlanmaktadır. Bunun anlamı; ***T*** ve $\phi_\tau^* T$ tensörlerinin, X vektör alanlarının integral eğrileri boyunca Lie taşınımı altında aynı kalmasıdır. Bununla birlikte, ***T*** tensörün $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ koordinat bazına göre bileşenleri integral eğriler boyunca değişebilir.

Ayrıca; $\vec{\xi}$ yönünde Lie türevini, $£_{\vec{\xi}}$ lineer operatörü da olarak tanımlayabiliriz. Bu operatör, Leibnitz kuralına göre işlem yapar; bir skaler üzerine etkidiğinde $\frac{d}{d\tau}$ şeklini alır, yani f bir skaler fonksiyon olmak üzere $\vec{\xi}$ yönünde f fonksiyonunun Lie türevi

$$£_{\vec{\xi}} f = D_{\vec{\xi}} f \tag{2.11}$$

olur. Normal türev, eğriye teğet boyunca türevdir ve

$$D_{\vec{\xi}} = \frac{d}{d\lambda} = \vec{\xi} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlıdır. U_a kovaryant vektörünün Lie türevi aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$£_{\vec{\xi}} U_a = U_{a;b}\xi^b + U_b \xi^b{}_{;a} \tag{2.13}$$

Benzer olarak kontravaryant bir vektörün Lie türevini

$$£_{\vec{\xi}} U^a = U^a{}_{;b}\xi^b - U^b \xi^a{}_{;b} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlarız. U_{ab} kovaryant ikinci ranktan tensörünün $\vec{\xi}$ yönündeki Lie türevi ifadesi

$$£_{\vec{\xi}} U_{ab} = U_{ab,c}\xi^c + U_{bc}\xi^c{}_{,a} + U_{ac}\xi^c{}_{,b} \tag{2.15}$$

şeklindedir. Genel olarak herhangi bir $\vec{\xi}$ vektör alanı boyunca bir $U^{a\ldots c}{}_{d\ldots f}$ karışık tensörünün Lie türevini şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} £_{\vec{\xi}} U^{a\ldots c}{}_{d\ldots f} &= \xi^p U^{a\ldots c}{}_{d\ldots f,p} - U^{p\ldots c}{}_{d\ldots f}\xi^a{}_{,p} - \ldots - U^{a\ldots p}{}_{d\ldots f}\xi^c{}_{,p} \\ &\quad + U^{a\ldots c}{}_{p\ldots f}\xi^p{}_{,d} + \ldots + U^{a\ldots c}{}_{d\ldots p}\xi^p{}_{,f} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Burada $U^{a\ldots c}{}_{d\ldots f}$ tensörü (p,q) tipinden olup p, kontravaryant indis sayısını ve q, kovaryant indis sayısını göstermektedir.

2.2. Bianchi Sınıflaması

Üç-boyutlu Lie cebirleri dokuz Bianchi tipine sınıflanmıştır (Ellis ve MacCallum, 1969). Bir Lie grubunun cebirsel yapısı, Lie cebrinin bazı $\{ X_a | a = 1,\ldots,r \}$ alınıp X_a nın bütün komütatörleri oluşturularak bu Lie cebri ile açıklanabilir. a = 1,...r olup r, G ile gösterilen Lie grubunun boyutudur. Lie cebri kapalı (yani $[X_a, X_b]$ komütatörü Lie cebri içinde tanımlı) olduğundan

$$[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = C^d{}_{ab} X_d \tag{2.17}$$

elde edilmelidir. Burada $C^{d}{}_{ab}$ ifadelerine Lie cebrinin **yapı sabitleri** denir. (2.3) Jacobi özdeşliği yapı sabitleri cinsinden yazıldığında

$$C^{e}{}_{ab}C^{d}{}_{ec} + C^{e}{}_{bc}C^{d}{}_{ea} + C^{e}{}_{ca}C^{d}{}_{eb} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C^{e}{}_{[ab}C^{d}{}_{c]e} = 0 \tag{2.18}$$

elde edilir. Yapı sabitleri kovaryant (a ve b) indislerine göre antisimetriktirler:

$$C^{d}{}_{ab} = -C^{d}{}_{ba} \tag{2.19}$$

Bir Lie cebri, $C^{d}{}_{ab}$ ile donatılmış bir reel vektör uzayı olarak düşünülebilir. Eğer Lie cebrinin boyutu üç (r =3) ise; $C^{d}{}_{ab}$ yapı sabitleri, özel olarak, uygun bir ayrıştırmaya (dekompozisyona) izin verir. Bu durumda; $C^{d}{}_{ab}$ nin antisimetri özelliği kullanılarak aşağıdaki ayrıştırma yapılabilir:

$$C^{d}{}_{ef} = S^{di}\varepsilon_{ief} + \delta^{d}_{e}a_{f} - \delta^{d}_{f}a_{e} \tag{2.20}$$

Burada; S^{di} simetrik tensör, ε_{ief} tam antisimetrik tensör ve $2a_{f} = C^{d}{}_{df}$ dir. Bu yüzden; $C^{d}{}_{ab}$ nın dokuz bileşeninin içeriği, S^{di} nın altı bileşeni ve a_{f} nin üç bileşeni ile temsil edilmiştir. Son olarak; ancak ve ancak a_{f}, S^{di} 'ye dik yani

$$S^{df}a_{f} = 0 \tag{2.21}$$

ise Jacobi özdeşliği sağlanır. Eğer a_{f} sıfırlanırsa, Lie cebri A Sınıfıdır. Bu durumda (2.21) denkleminin sağlandığı aşikardır ve Lie cebri, tam olarak, S^{di} tensörünün işareti ile karakterize edilir. Eğer a_{f} sıfır değilse, Lie cebri B Sınıfıdır. Üç-boyutlu uzayda, dokuz tane eşdeğer olmayan farklı Bianchi tiplerini veren cebirsel sınıflama aşağıdaki gibidir :

Bianchi I : $[X_i,X_j]= 0$,	i, j =1, 2 ,3		
Bianchi II : $[X_1,X_2] = 0$,	$[X_2,X_3] = X_1$,	$[X_3,X_1] = 0$,	
Bianchi III : $[X_1,X_2] = 0$,	$[X_2,X_3] = 0$,	$[X_3,X_1] = -X_1$,	
Bianchi IV : $[X_1,X_2] = 0$,	$[X_2,X_3] = X_1+X_2$,	$[X_3,X_1] = -X_1$,	
Bianchi V : $[X_1,X_2] = 0$,	$[X_2,X_3] = X_2$,	$[X_3,X_1] = -X_1$,	(2.22)
Bianchi VI : $[X_1,X_2] = 0$,	$[X_2,X_3] = qX_2$,	$[X_3,X_1] = -X_1$, $(q \neq 0,1)$	
Bianchi VII: $[X_1,X_2] = 0$,	$[X_2,X_3] = -X_1+qX_2$,	$[X_3,X_1] = -X_1$, $q^2 < 0$	
Bianchi VIII: $[X_1,X_2] = X_1$,	$[X_2,X_3] = X_3$,	$[X_3,X_1] = -2X_2$,	
Bianchi IX : $[X_1,X_2] = X_3$,	$[X_2,X_3] = X_1$,	$[X_3,X_1] = X_2$.	

Bianchi tiplerine ait KV alanlar ise

Bianchi I : $\vec{X}_{(1)} = \partial_x$, $\vec{X}_{(2)} = \partial_y$, $\vec{X}_{(3)} = \partial_z$

Bianchi II : $\vec{X}_{(1)} = \partial_y$, $\vec{X}_{(2)} = \partial_z$, $\vec{X}_{(3)} = \partial_x + z\partial_y$

$$
\begin{aligned}
&\text{Bianchi III :} \quad \vec{X}_{(1)} = \partial_z ,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x ,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y + (x - Az)\partial_z + (z - Ax)\partial_x \\
&\text{Bianchi IV :} \quad \vec{X}_{(1)} = \partial_z ,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x ,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y - z\partial_z - (z + x)\partial_x \\
&\text{Bianchi V :} \quad \vec{X}_{(1)} = \partial_z ,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x ,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y - z\partial_z - x\partial_x \\
&\text{Bianchi VI :} \quad \vec{X}_{(1)} = \partial_z ,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x ,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y + (x - Az)\partial_z + (z - Ax)\partial_x \\
&\text{Bianchi VII:} \quad \vec{X}_{(1)} = \partial_z ,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x ,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y + (x - Az)\partial_z - (z + Ax)\partial_x \\
&\text{Bianchi VIII:} \quad \vec{X}_{(1)} = \partial_x ,\ \vec{X}_{(2)} = \sec hz \cosh x\partial_y + \sinh x\partial_z - \tanh z \cosh x\partial_x , \\
&\qquad \vec{X}_{(3)} = \sec hz \sinh x\partial_y + \cosh x\partial_z - \tanh z \sinh x\partial_x \\
&\text{Bianchi IX :} \quad \vec{X}_{(1)} = \partial_x ,\ \vec{X}_{(2)} = \sec z \cos x\partial_y + \sin x\partial_z - \tan z \cos x\partial_x , \\
&\qquad \vec{X}_{(3)} = -\sec z \sin x\partial_y + \cos x\partial_z + \tan z \sin x\partial_x
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

ile verilirler (Ryan ve Shepley, 1975).

2.3. Petrov Sınıflaması

Petrov sınıflaması Weyl tensörünün cebirsel simetrilerini tanımlayan bir sınıflandırmadır. Sınıflandırma ilk olarak birbirinden bağımsız olarak Oetrov (1954) ve Pirani (1957) tarafından yapılmıştır.

Weyl Konformal tensörü R_{abcd} eğrilik tönsörü ve R_{ab} kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} + g_{bd}R_{ac} - g_{ad}R_{bc} - g_{bc}R_{ad}) + \frac{R}{6}(g_{ac}R_{bd} - g_{ad}R_{bc}) \tag{2.24}$$

Weyl tensörü aşağıdaki simetrilere sahiptir:

$$C_{abcd} = -C_{bacd} = -C_{abdc} = C_{cdab} ,\ C_{a[bcd]} = 0 ,\ C^{a}_{bad} = 0 \tag{2.25}$$

ve izsiz olma özeliğine sahiptir. Dolayısıyla 10 bağımsız bileşeni vardır. C^{*}_{abcd} tensörü de izsiz olduğundan $\psi_i\ (i = 0,1,2,3,4)$ katsayıları cinsinden açılabilir:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}C^{*}_{abcd} &= \psi_0 U_{ab}U_{cd} + \psi_1(U_{ab}W_{cd} + W_{ab}U_{cd}) + \psi_2(V_{ab}U_{cd} + U_{ab}V_{cd} + W_{ab}W_{cd}) \\
&\quad + \psi_2(V_{ab}W_{cd} + W_{ab}V_{cd}) + \psi_4 V_{ab}V_{cd}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

$\psi_i\ (i = 0,1,2,3,4)$ katsayılarının fiziksel anlamları Kramer ve Ark. (1980) tarafından, ψ_0 *l*-yönündeki enine dalga bileşeni, ψ_1 *l*-yönündeki boyuna dalga bileşeni, ψ_2 *k*-yönündeki Coulomb bileşeni, ψ_3 *k*-yönündeki boyuna dalga bileşeni ve ψ_4 *k*-yönündeki enine dalga bileşeni olarak verilmiştir.

ψ_0 katsayılarının C_{abcd} ve R_{abcd} cinsinden değerleri aşağıdaki gibidir (Allen ve Ark.):

$$\psi_0 = C_{1414} = R_{1414}$$

$$\psi_1 = C_{1434} = \frac{1}{2}\left(R_{1434} - R_{1421}\right)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\left(C_{3434} + C_{1234}\right) = \frac{1}{2}\left(R_{1434} + R_{1214}\right) \tag{2.27}$$

$$\psi_3 = C_{3234} = \frac{1}{2}\left(R_{3234} + R_{1232}\right)$$

$$\psi_4 = C_{2323} = R_{2323}$$

Bu $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ ve ψ_4 katsayılarına göre Petrov tipinin tespiti d'Inverno ve Russell-Clark (1971) tarafından

$$I \equiv \psi_0\psi_4 - 4\psi_1\psi_3 + 3\psi_2^2, \qquad J \equiv \begin{vmatrix} \psi_4 & \psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 \\ \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 \end{vmatrix} \tag{2.28}$$

$$K \equiv \psi_1\psi_4^2 - 3\psi_4\psi_3\psi_2 + 2\psi_3^3, \quad L \equiv \psi_2\psi_4 - \psi_3^2, \qquad N \equiv 12L^2 - \psi_4^2 I$$

olmak üzere aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tip 0: Weyl tensörü özdeş olarak sıfırdır.

Tip I: $I^3 \neq 27J^2$

Tip II: $I^3 = 27J^2$, $I = J = 0$ değil ve $K = N = 0$ değil

Tip III: $I^3 = 27J^2$, $I = J = 0$ ve $K = L = 0$ değil

Tip D: $I^3 = 27J^2$, $I = J = 0$ değil ve $K = N = 0$

Tip N: $I^3 = 27J^2$, $I = J = 0$ ve $K = L = 0$

2.4. Metrik Simetriler

(M,g) Riemanian manifoldu üzerinde; ψ skaler fonksiyon ve $£_{\vec{X}}$, $\vec{X}$ vektör alanı yönünde Lie türev operatörü olmak üzere, Ω ve K

$$£_{\vec{X}}\Omega = 2\psi\Omega + K \tag{2.29}$$

simetri koşulunu sağlayan ve aynı tipten olması zorunlu olmayan geometrik/fiziksel nesneler olsun. Burada $\vec{X} = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ simetriyi doğuran vektör alanıdır. En önemli ve yaygın simetriler Ω nın Riemann geometrisi ve Einstein Teorisinde ortaya çıkan temel tensör alanlarından birisi olduğu durumdaki simetrilerdir.

Uzay-zaman koordinatlarında Einstein alan denklemleri, 10 tane ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemden oluştukları için onların kesin çözümlerini elde etmek oldukça zordur. Bununla birlikte, eğer metrik tensörün bazı geometrik simetri özelliklerine sahip olduğu kabul edilirse bu problem bir dereceye kadar kolaylaştırılabilir.

Eğer (2.27) denkleminde $\Omega = \gamma$ ve K= 0 ise $\vec{X}$ **konformal killing vektör alanı**dır. **Konformal Hareketler** (Conf M), g_{ab} metrik tensör bileşenleri cinsinden

$$\pounds_{\vec{X}} g_{ab} = 2\psi\, g_{ab} \tag{2.30}$$

veya

$$\pounds_{\vec{X}} g^{ab} = -2\psi\, g^{ab} \tag{2.31}$$

denklemiyle ifade edilir (Katzin ve ark.,1969). Eğer, $\psi_{;ab} \neq 0$ ise $\vec{X}$ vektör alanına, **proper konformal killing vektör** (CKV) **alanı**; $\psi_{;ab} = 0$ ve $\psi_{;a} \neq 0$ ise **özel konformal killing vektör** (SCKV) **alanı** denir. Proper CKV ve SCKV alanları, matematiksel fizik ve kozmolojide bir çok uygulamaya sahip oldukları için fiziksel açıdan önemlidirler. Eğer $\psi_{,a} = 0$ (yani $\psi =$sabit) ve ψ = 0 ise $\vec{X}$, sırasıyla, **homotetik vektör** (HV) **alanı** ve **Killing vektör** (KV) **alanı** adını almaktadır. Metrik tensörü invaryant bırakan simetrilere **hareketler** (motions) veya **izometriler** de denilmektedir. İzometri, bir vektörün uzunluğunu koruduğu için **katı** (*rigid*) **hareket** olarak da adlandırılabilir.

Eğer uzay-zaman metriği bazı simetrileri kabul ediyorsa yani Killing denklemlerinin bir çözümü varsa, uzay-zaman bir *hareket simetrisi*ne ya da *izometri*ye sahiptir denir. Einstein alan denklemlerinin, farklı simetri yapılarına sahip bir çok çözümü mevcuttur (Petrov, 1969). Ayrıca bu çözümler, özelliklerine ve onların izin verdiği hareket gruplarına göre sınıflandırılmışlardır (Kramer ve ark., 1980).

2.5. Kollinasyon Simetrileri

Riemann geometrisinde; uzay-zaman metriğinden sonra Γ^a_{bc}, R_{ab} ve $R^a{}_{bcd}$ gibi tensör bileşenlerinin cebirsel özellikleri, uzay-zamanın geometrik yapısının anlaşılmasında önemli rol oynayan diğer adaylardır.

$\pounds_{\vec{X}}$ Lie türev operatörü Christoffel sembolüne uygulanırsa

$$\pounds_{\vec{X}} \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left[(\pounds_{\vec{X}} g_{bd})_{;c} + (\pounds_{\vec{X}} g_{cd})_{;b} - (\pounds_{\vec{X}} g_{bc})_{;d} \right] \tag{2.32}$$

bulunur. (2.29), (2.31) de kullanıldığında ise

$$\pounds_{\vec{X}}\Gamma^a_{bc} = \delta^a_b\psi_{,c} + \delta^a_c\psi_{,b} - g_{bc}\psi^{,a} \tag{2.33}$$

denklemi elde edilir. (2.33) denklemini sağlayan bir $\vec{X}$ vektör alanı varsa; uzay-zaman, bir **konformal kollinasyon**a (Conf C) izin veriyor denir (Duggal ve Sharma, 1986). Riemann eğrilik tensörünün (3.3) ile verilen bileşenlerinden

$$\pounds_{\vec{X}}R^a{}_{bcd} = \left(\pounds_{\vec{X}}\Gamma^a_{bd}\right)_{;c} - \left(\pounds_{\vec{X}}\Gamma^a_{bc}\right)_{;d} \tag{2.34}$$

olur (Yano, 1955). Böylece; (2.32), (2.34) de kullanılarak

$$\pounds_{\vec{X}}R^a{}_{bcd} = 2\delta^a_{[d}\psi_{;|b|c]} + 2g_{b[c}\psi^{,a}{}_{;d]} \tag{2.35}$$

elde edilir. (2.35) nin *a* ve *c* indislerine göre kontraksiyonu alındığında ise

$$\pounds_{\vec{X}}R_{ab} = -2\psi_{;ab} - g_{ab}\Box\psi \tag{2.36}$$

olur; burada $\Box\psi = g^{ab}\psi_{;ab}$ dir. *R* eğrilik skalerine $\pounds_{\vec{X}}$ Lie türev operatörü uygulanır ve (2.30) ve (2.36) kullanılırsa

$$\pounds_{\vec{X}}R = -2\psi R - 6\Box\psi \tag{2.37}$$

bulunur. Sonuç olarak, G_{ab} Einstein tensörünün $\vec{X}$ vektör alanı yönündeki Lie türevi

$$\pounds_{\vec{X}}G_{ab} = -2\psi_{;ab} + 2g_{ab}\Box\psi \tag{2.38}$$

dir. Eğer $\psi_{,a} = 0$ veya $\psi = 0$ ise (2.33) denklemini sağlayan $\vec{X}$ vektör alanına **Affin kollinasyon** (AC) denir. Eğer $\psi_{;ab} = 0$ veya $\psi_{,a} = 0$ veya $\psi = 0$ ise (2.35) ve (2.36) denklemlerini sağlayan $\vec{X}$ vektör alanına, sırasıyla, **eğrilik kollinasyon** (CC) ve **Ricci kollinasyon** (RC) adı verilir. Yukarıda bahsedilen kollinasyon simetrileri ve bunlar arasındaki cebirsel özellikler ilk defa Katzin ve ark. (1969) tarafından ayrıntılı bir şekilde çalışılmış ve bir diyagram halinde gösterilmiştir. Daha sonraları bu diyagramda bazı düzeltmeler yapılmış ve yeni simetriler eklenerek diyagram genişletilmiştir.

BÖLÜM 3
MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Madde Simetrileri

M manifoldu üzerindeki bir $\vec{\xi}$ vektör alanı, eğer

$$£_{\vec{\xi}} T_{ab} = 0 \quad (\Leftrightarrow £_{\vec{\xi}} G_{ab} = 0) \tag{3.1}$$

koşulunu sağlıyor ise **madde kollinasyonu** (MC) adını alır. Bu koşul, T_{ab} enerji-momentum tensörünün bir $\vec{\xi}$ vektör alanı boyunca invaryant kalmasını ifade ettiği için fiziksel açıdan madde kolinasyonlarının çalışılması istenilen bir durumdur. Bununla birlikte;

$$£_{\vec{\xi}} T^{ab} = 0 \tag{3.2}$$

veya

$$£_{\vec{\xi}} T_a^b = 0 \tag{3.3}$$

koşulunu sağlayan $\vec{\xi}$ vektör alanları tarafından doğurulan simetrilerin, (3.1) denklemiyle tanımlı olan MC simetrisiyle aynı anlama gelip gelmediği problemi vardır. MC için verilen (3.1) koşulu, genel olarak (3.2) veya (3.3) alternatif koşullarıyla eşdeğer değildir (Carot ve ark., 1994; Hall ve ark., 1996).

Einstein alan denklemlerinin bir konformal $\vec{\xi}$ vektör alanı boyunca Lie türevi alırsa

$$£_{\vec{\xi}} T_{ab} = 2 g_{ab} \Box \psi - 2\psi_{;ab} \tag{3.4}$$

elde edilir. Böylece; (3.4) denklemini sağlayan $\vec{\xi}$ vektör alanının MC olması için

$$\psi_{;ab} = g_{ab} \Box \psi \tag{3.5}$$

gerek ve yeter şartı ortaya çıkar. Sonuç olarak;

$\psi_{;ab} = 0, \Rightarrow \vec{\xi}$, SCKV alanı

$\psi_{,a} = 0, \Rightarrow \vec{\xi}$, HV alanı

ve

$\psi = 0, \Rightarrow \vec{\xi}$, KV alanı

durumlarında (3.1) denklemi sağlanır. Yani bu durumlarda $\vec{\xi}$, bir MC vektör alanı olur (Maartens ve ark., 1986; Mason ve Maartens, 1987; Coley ve Tupper, 1989; Tariq ve Tupper, 1992).

3.2. Eğrilik Simetrileri

Bir uzay-zamanın R_{abcd} Rieman eğrilik tensör bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$R^{d}_{abc} \equiv \Gamma^{d}_{ac,b} - \Gamma^{d}_{ab,c} + \Gamma^{d}_{eb}\Gamma^{e}_{ac} - \Gamma^{d}_{ec}\Gamma^{e}_{ab} \tag{3.6}$$

Bu tensörün $\vec{\xi} = \xi^{a}\left(x^{b}\right)\frac{\partial}{\partial x^{a}}$ vektör alanı yönünde $R^{a}{}_{bcd}$'nin Lie türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$£_{\vec{\xi}}\, R^{a}{}_{bcd} = 0 \tag{3.7}$$

CC denklemleri elde edilir. Bu denklemi daha açık şekilde kısmi türevli haliyle şöyle yazabiliriz;

$$R^{a}{}_{bcd;e}\xi^{e} + R^{a}{}_{ecd}\xi^{e}_{;b} + R^{a}{}_{bed}\xi^{e}_{;c} + R^{a}{}_{bce}\xi^{e}_{;d} - R^{e}{}_{bcd}\xi^{a}_{;e} = 0 \tag{3.8}$$

Bu denklemi sağlayan $\vec{\xi}$ vektör alanına Eğrilik simetrisi (CC) adı verilir. Bu denklem sistemi 4 boyutlu uzayda 256 tane denklemden oluşmaktadır. Bu denklemlerden 96 tanesi özdeşlik olarak ortaya çıkmaktadır. Riemann tensörünün simetrilerinden 64 denklem de çıkarıldığında geriye en genel durumda 96 denklem kalmaktadır.

Üzerinde çalışılan her uzay-zaman için $R^{a}{}_{bcd}$'ler kullanılarak tamamen kovaryant R_{abcd} tensörü de hesaplanmaktadır. Bu durumda $ab = A$ ve $cd = B$ ifadeleri kullanıldığında tamamen kovaryant tensör R_{AB} şeklini alır. ab ve cd indisleri, simetriden dolayı sadece $\{01,02,03,12,13,23\}$ değerlerini alabilirler. Böylece R_{AB} tensörü 6×6 tipinde simetrik bir matris olarak değerlendirilebilir. Hall ve Costa'nın aşağıdaki teoremi (Hall ve Costa, 1991a ve 1991b) proper CC'lerin var olup olmadığının tespitinde kullanılmıştır.

Teorem 1: 6x6 simetrik Riemann eğrilik matrisinin rankı 3 (üç)'den büyük iken proper (öz) CC 'ler mevcut değildir.

Bu teorem kullanıldığında; (3.7) denklem sistemini oluşturan, en çok 96 adet olabilen, denklem sisteminin çözülmesi yerine sadece rankın üç ve daha düşük olduğu alt durumlardaki denklem sistemlerinin çözülmesi yeterli olmaktadır.

6×6 tipindeki bir matrisin rankının 1 olabileceği *altı*, 2 olabileceği *onbeş* ve 3 olabileceği *yirmi* olmak üzere toplam *kırk bir* farklı durum olabilir.

3.3. Bazı Önemli Çalışmalar

(3.2) ile verilen $\pounds_{\xi} T_{ab} = 0$ MC denkleminin koordinat gösteriminde yazılışı aşağıdaki gibidir :

$$T_{ab,c}\xi^{c} + T_{ac}\xi^{c}{}_{,b} + T_{cb}\xi^{c}{}_{,a} = 0 \tag{3.9}$$

Bu denklemin, dikkate alınan bir uzay-zaman için çözülmesi (yani MC vektör alanlarının elde edilmesi) ve çözümlerin sınıflanması problemi üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bazı statik küresel simetrik uzay-zamanların MC vektör alanları Sharif (2001) tarafından araştırılmıştır. Friedmann-Robertson-Walker metriğinin MC vektör alanları Camci ve Barnes (2002) tarafından elde edilmiştir. Kantowski-Sachs, Bianchi tip I ve Bianchi tip III metriğine ait MC denklemleri, Camci ve Sharif (2003) tarafından çözülmüş ve sınıflama yapılmıştır. Ayrıca; Camci ve Sharif (2003), homojen Gödel-tipi metriklerin MC simetrilerini çalışmışlardır. Camci ve Şahin (2006) Bianchi tip II uzay-zamanın MC vektör alanlarının sınıflamasını yapmışlardır. Tsamparlis ve Apostolopoulos (2004), lokal rotasyonel simetrik uzay- zamanların MC vektör alanları elde etmiş ve tam bir sınıflama yapmıştır.

Sharif (2003); enerji-momentum tensörünün simetrileri üzerine çalışmalar yapmış, küresel simetrik Lorentzian Manifold'da Enerji-momentum tensörünün simetrilerini araştırmıştır. Sharif ve Aziz (2003), küresel simetrik statik uzay-zamanların madde kollinasyonlarına göre sınıflamasını yapmışlardır. Sharif (2004), silindirik simetrik statik uzay-zamanlarda enerji-momentum tensörünün simetrileri üzerine çalışmıştır.

BÖLÜM 4
ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Statik silindirik simetrik uzay-zamanın eğrilik kollinasyon (CC) simetrileri Shabbir ve ark. (2003) ve Bokhari ve ark. (1998, 2003) tarafından çalışılmış ve sınıflama yapılmıştır. Bu sınıflamalarda, CC denklemlerinin çözümleri sırasında ortaya çıkan olası durumlar dikkate alınmıştır. Fakat, 6X6 matris olarak yazılabilen R_{abcd} Riemann eğrilik tensörünün rankı (**eğrilik rankı**) kullanılarak sınıflama yapılmasının çok kullanışlı olduğu bilinmektedir (Hall, 2004; Hall ve Costa, 1991a ve 1991b). Bu bölümde statik küresel simetrik uzay-zamanların CC vektör alanları için literatürdeki sonuçların elde edilmesi yanında, 3.2 bölümünde (sayfa 11) verilen *Teorem 1* kullanılarak bu uzay-zamana ait eğrilik rank durumlarına göre inceleme yapılmış ve bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Statik silindirik simetrik uzay-zaman metriği

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + dr^2 + e^{\lambda} d\theta^2 + e^{\mu} dz^2 \tag{4.1}$$

ile verilmektedir (Kramer ve ark., 1980). Burada $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$ dir. Bu uzay-zaman, aşağıdaki uzaysal (spacelike) KV alanlarına izin vermektedir:

$$\vec{X}_{(1)} = \partial_t\,,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_\theta\,,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_z \tag{4.2}$$

(4.1) metriğine ait $R^a{}_{bcd}$ Rieman eğrilik tensör bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\begin{array}{lll} R^0{}_{101} = A & R^0{}_{202} = D & R^0{}_{303} = E \\ R^1{}_{212} = e^{\lambda} B & R^1{}_{313} = e^{\mu} C & R^1{}_{010} = -e^{\upsilon} A \\ R^2{}_{121} = B & R^2{}_{323} = F & R^2{}_{020} = -e^{\upsilon-\lambda} D \\ R^3{}_{131} = C & R^3{}_{232} = e^{\lambda-\mu} F & R^3{}_{030} = -e^{\upsilon-\mu} E \end{array} \tag{4.3}$$

olur. Bu bileşenlerdeki *A, B, C, D, E* ve *F* fonksiyonları

$$\begin{aligned} & A(r) \equiv -\frac{1}{4}(2\nu'' + \nu'^2)\,,\ B(r) \equiv -\frac{1}{4}(2\lambda'' + \lambda'^2) \\ & C(r) \equiv -\frac{1}{4}(2\mu'' + \mu'^2)\,,\ D(r) \equiv -\frac{e^{\lambda}}{4}\upsilon'\lambda' \\ & E(r) \equiv -\frac{e^{\mu}}{4}\upsilon'\mu'\,, \qquad F(r) \equiv -\frac{e^{\mu}}{4}\mu'\lambda' \end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlıdırlar. Burada (’) işareti *r*’ye göre türevi göstermektedir.

Teorem 1’i kullanabilmek için oluşturulan $R_{abcd} \equiv R_{IJ} \quad I, J \in \{01,02,03,12,13,23\}$ tamamen kovaryant Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki matris formunda yazılabilir:

$$R_{IJ} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

R_{abcd} Riemann eğrilik tensörünün 6×6 matris formundaki rankının üç ve üç'den küçük olabildiği durumlar Çizelge 4.1'de verilmektedir.

Çizelge 4.1. Statik silindirik simetrik uzay-zaman için eğrilik rankının üç ve üç'den küçük olabildiği durumlar

Rank=1	$A \neq 0$, B=C=D=E=F=0
	$B \neq 0$, A=C=D=E=F=0
	$C \neq 0$, A=B=D=E=F=0
	$D \neq 0$, A=B=C=E=F=0
	$E \neq 0$, A=B=C=D=F=0
	$F \neq 0$, A=B=C=D=E=0
Rank=2	$A \neq 0$, $B \neq 0$, C=D=E=F=0
	$A \neq 0$, $C \neq 0$, B=D=E=F=0
	$A \neq 0$, $D \neq 0$, B=C=E=F=0
	$A \neq 0$, $E \neq 0$, B=C=D=F=0
	$A \neq 0$, $F \neq 0$, B=C=D=E=0
	$B \neq 0$, $C \neq 0$, A=D=E=F=0
	$B \neq 0$, $D \neq 0$, A=C=E=F=0
	$B \neq 0$, $E \neq 0$, A=C=D=F=0
	$B \neq 0$, $F \neq 0$, A=C=D=E=0
	$C \neq 0$, $D \neq 0$, A=B=E=F=0
	$C \neq 0$, $E \neq 0$, A=B=D=F=0
	$C \neq 0$, $F \neq 0$, A=B=D=E=0
	$D \neq 0$, $E \neq 0$, A=B=D=F=0
	$D \neq 0$, $F \neq 0$, A=B=C=E=0
	$D \neq 0$, $F \neq 0$, A=B=C=E=0
Rank=3	$A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, D=E=F=0
	$A \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$, C=E=F=0
	$A \neq 0$, $B \neq 0$, $E \neq 0$, C=D=F=0
	$A \neq 0$, $B \neq 0$, $F \neq 0$, C=D=E=0
	$A \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, B=E=F=0
	$A \neq 0$, $C \neq 0$, $E \neq 0$, B=D=F=0
	$A \neq 0$, $C \neq 0$, $F \neq 0$, B=D=E=0
	$A \neq 0$, $D \neq 0$, $E \neq 0$, B=C=F=0
	$A \neq 0$, $D \neq 0$, $F \neq 0$, B=C=E=0
	$A \neq 0$, $E \neq 0$, $F \neq 0$, B=C=D=0
	$B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, A=E=F=0
	$B \neq 0$, $C \neq 0$, $E \neq 0$, A=D=F=0

	B $\neq$ 0, C $\neq$ 0, F $\neq$ 0, A=D=E=0
	B $\neq$ 0, D $\neq$ 0, E $\neq$ 0, A=C=F=0
	B $\neq$ 0, D $\neq$ 0, F $\neq$ 0, A=C=E=0
	B $\neq$ 0, E $\neq$ 0, F $\neq$ 0, A=C=D=0
	C $\neq$ 0, D $\neq$ 0, E $\neq$ 0, A=B=F=0
	C $\neq$ 0, D $\neq$ 0, F $\neq$ 0, A=B=E=0
	C $\neq$ 0, E $\neq$ 0, F $\neq$ 0, A=B=D=0
	D $\neq$ 0, E $\neq$ 0, F $\neq$ 0, A=B=C=0

Yukarıdaki 41 (kırk bir) durumda A,B,C,D,E ve F fonksiyonları göz önüne alındığında eğrilik rankının 3 olabildiği *dört*, 2 olduğu *altı* ve 1 olduğu *altı* farklı durum mümkündür:

(a1) Rank=3 : $\upsilon = sbt., \lambda = \lambda(r),\ \mu = \mu(r) \Leftrightarrow A, D, E = 0;\ B, C, F \neq 0$

(a2) Rank=3 : $\lambda = sbt., \upsilon = \upsilon(r),\ \mu = \mu(r) \Leftrightarrow B, D, F = 0; A, C, E \neq 0$

(a3) Rank=3 : $\mu = sbt., \upsilon = \upsilon(r),\ \lambda = \lambda(r) \Leftrightarrow C, E, F = 0; A, B, D \neq 0$

(a4) Rank=3 : $\upsilon = \upsilon(R),\ \lambda = \lambda(r),\ \mu = \mu(r)$, $2\upsilon'' + \upsilon'^2 = 0$, $2\lambda'' + \lambda'^2 = 0$,

$2\mu'' + \mu'^2 = 0 \Leftrightarrow A, B, C = 0;\ D, E, F \neq 0$

(b1) Rank=2: $\upsilon = sbt., \lambda = \lambda(r),\ \mu = \mu(r)$, $2\lambda'' + \lambda'^2 = 0$

$\Leftrightarrow A, B, D, E = 0; C, F \neq 0$

(b2) Rank=2: $\upsilon = sbt., \lambda = \lambda(r),\ \mu = \mu(r)$, $2\mu'' + \mu'^2 = 0$

$\Leftrightarrow A, C, D, E = 0;\ B, F \neq 0$

(b3) Rank=2: $\mu = sbt., \upsilon = \upsilon(r),\ \lambda = \lambda(r)$, $2\lambda'' + \lambda'^2 = 0$

$\Leftrightarrow B, C, E, F = 0;\ A, D \neq 0$

(b4) Rank=2: $\mu = sbt., \upsilon = \upsilon(r),\ \lambda = \lambda(r)$, $2\upsilon'' + \upsilon'^2 = 0$

$\Leftrightarrow A, C, E, F = 0;\ B, D \neq 0$

(b5) Rank=2: $\lambda = sbt., \upsilon = \upsilon(r),\ \mu = \mu(r)$, $2\upsilon'' + \upsilon'^2 = 0$

$\Leftrightarrow A, B, D, F = 0;\ C, E \neq 0$

(b6) Rank2: $\lambda = sbt., \upsilon = \upsilon(r),\ \mu = \mu(r)$, $2\mu'' + \mu'^2 = 0$

$\Leftrightarrow B, C, D, F = 0;\ A, E \neq 0$

(c1) Rank=1: $\upsilon = sbt., \lambda = \lambda(r),\ \mu = \mu(r)$, $2\lambda'' + \lambda'^2 = 0$, $2\mu'' + \mu'^2 = 0$

$\Leftrightarrow A, B, C, D, E = 0;\ F \neq 0$

(c2) Rank=1: $\lambda = sbt., \upsilon = \upsilon(r),\ \mu = \mu(r)$, $2\upsilon'' + \upsilon'^2 = 0$, $2\mu'' + \mu'^2 = 0$

$\Leftrightarrow A, B, C, D, F = 0;\ E \neq 0$

(c3) Rank=1: $\mu = sbt., \upsilon = \upsilon(r),\ \lambda = \lambda(r)\,,\ 2\upsilon'' + \upsilon'^2 = 0\,,\ 2\lambda'' + \lambda'^2 = 0$

$\Leftrightarrow\ A, B, C, E, F = 0; D \neq 0$

(c4) Rank=1: $\mu = \lambda = sbt., \upsilon = \upsilon(r) \Leftrightarrow B, C, D, E, F = 0;\ A \neq 0$

(c5) Rank=1: $\upsilon = \mu = sbt.,\ \lambda = \lambda(r) \Leftrightarrow A, C, D, E, F = 0;\ B \neq 0$

(c6) Rank=1: $\upsilon = \lambda = sbt.,\ \mu = \mu(r) \Leftrightarrow A, B, D, E, F = 0;\ C \neq 0$

4.1.1. EĞRİLİK SİMETRİLERİ

Bu bölümde; yukarıdaki olası farklı durumlar sırasıyla dikkate alınacak ve statik silindirik simetrik uzay-zamanlar için her bir durumda ortaya çıkan CC denklemleri yazılarak bunlara çözümler aranacak yani CC vektör alanlarına ait bileşenler belirlenecektir.

Durum (a1): $A, D, E = 0;\ B, C, F \neq 0$

Bu durumu ifade eden kısıtlama koşullarından $\upsilon = sbt., \lambda = \lambda(r),\ \mu = \mu(r)$ bulunur. Böylece, CC denklemleri aşağıdaki *onsekiz* denkleme indirgenmektedir:

$$\xi^0 = \xi^0(t)\,,\quad \xi^1 = \xi^1(r,\theta,z)\,,\quad \xi^2 = \xi^2(r,\theta,z)\,,\quad \xi^3 = \xi^3(r,\theta,z) \tag{4.6a}$$

$$\xi^1{}_{,z}(F - e^{\mu}B) = 0\,,\ \xi^1{}_{,\theta}(F - e^{\mu}C) = 0\,,\ \xi^2{}_{,r}(F - e^{\mu}C) = 0 \tag{4.6b}$$

$$\xi^2{}_{,z}(C - B) = 0\,,\ \xi^3{}_{,r}(F - e^{\mu}B) = 0\,,\quad \xi^3{}_{,\theta}(B - C) = 0 \tag{4.6c}$$

$$\xi^1_{,\theta} + e^{\lambda}\xi^2_{,r} = 0\,,\quad \xi^1_{,z} + e^{\mu}\xi^3_{,r} = 0\,,\ \xi^3_{,\theta} + e^{\lambda-\mu}\xi^2_{,z} = 0 \tag{4.6d}$$

$$F\xi^3_{,r} + B\xi^1_{,z} = 0\,,\ F\xi^2_{,r} + e^{\mu-\lambda}C\xi^1_{,\theta} = 0\,,\quad B\xi^2_{,z} + e^{\mu-\lambda}C\xi^3_{,\theta} = 0 \tag{4.6e}$$

$$B'\xi^1 + 2B\xi^1_{,r} = 0\,,\ C'\xi^1 + 2C\xi^1_{,r} = 0\,,\ F'\xi^1 + 2F\xi^3_{,z} = 0 \tag{4.6f}$$

$$(B' + B\lambda')\xi^1 + 2B\xi^2_{,\theta} = 0\,,\ (C' + C\mu')\xi^1 + 2C\xi^3_{,z} = 0 \tag{4.6g}$$

$$(F' + \lambda'F - \mu'F)\xi^1 + 2F\xi^2_{,\theta} = 0 \tag{4.6h}$$

Bu denklem sisteminin çözümünü araştıralım. (4.6f)'deki birinci ve ikinci denklemlerden

$$\frac{\xi^1_{,r}}{\xi^1} = -\frac{B'}{2B} = -\frac{C'}{2C} \ \Rightarrow\ B = C \ \text{ve}\ \xi^1 = \frac{f(\theta,z)}{\sqrt{|B|}} \tag{4.7}$$

bulunur. Burada $f(\theta,z)$ bir integrasyon fonksiyonudur. (4.6f)'deki üçüncü ve (4.6g)'deki ikinci denkleminden

$$\xi^1\left[\frac{F'}{F} - \mu' - \frac{C'}{C}\right] = 0 \tag{4.9}$$

elde edilir. Buradan $\xi^1 \neq 0$ olması durumunda

$$F = sabit \times e^{\mu} C \tag{4.10}$$

bulunur. (4.7)'de elde edilen sonucun (4.6d)'deki birinci denklemde yerine yazılmasıyla

$$\xi^2 = -f_{,\theta}(\theta,z)\int \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}dr + f_1(\theta,z) \tag{4.11}$$

ve (4.6d)'nin ikinci denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\xi^3 = -f_{,z}(\theta,z)\int \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{B}}dr + f_2(\theta,z) \tag{4.12}$$

elde edilir. Burada $f_2(\theta,z)$ ve $f_3(\theta,z)$ bir integrasyon fonksiyonlarıdır. Bu sonuçlar (4.6d)'deki son denklemde kullanılmasıyla

$$f_{1,\theta z}(\theta,z)\left[\int \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{B}}dr + e^{\lambda-\mu}\int \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}dr\right] = e^{\lambda-\mu} f_{2,z}(\theta,z) + f_{3,\theta}(\theta,z) \tag{4.13}$$

olur. (4.6g)'deki birinci denklemden

$$\frac{1}{2\sqrt{B}}\left(\frac{B'}{B} + \lambda'\right) f_1(\theta,z) - f_{1,\theta\theta}(\theta,z)\int \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}dr + f_{2,\theta}(\theta,z) = 0 \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) denkleminin *r*'ye göre türevi alınıp düzenleme yapıldığında, α ayırma sabiti olmak üzere,

$$\frac{f_{1,\theta\theta}(\theta,z)}{f_1(\theta,z)} = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{B}}\left(\lambda' + \frac{B'}{B}\right)\right]'}{\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}} = \alpha \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.6g)'deki ikinci denklemden ise

$$\frac{1}{2\sqrt{B}}\left(\frac{B'}{B} + \mu'\right) f(\theta,z) - f_{,zz}(\theta,z)\int \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{B}}dr + f_{2,z}(\theta,z) = 0 \tag{4.16}$$

bulunur. (4.16) denkleminin *r*'ye göre türevinin alınmasıyla

$$\frac{f_{,zz}(\theta,z)}{f(\theta,z)} = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{B}}\left(\mu' + \frac{B'}{B}\right)\right]'}{\frac{e^{-\mu}}{\sqrt{B}}} = \beta \tag{4.17}$$

olur. Burada β diğer bir ayırma sabitidir. (4.15) ve (4.17) denklemlerinin çözümleri α ve β'nın aldığı değerlere bağlı olarak *dokuz* farklı durumda incelenmelidir. Her bir durum kendi içinde ayrıca alt durumlara sahiptir.

Alt Durum (a1.i) $\alpha<0$, $\beta<0$ iken (4.15) ve (4.17) denklemlerinden sırasıyla

$$f_{1,\theta\theta}+\alpha^2 f_1=0, \qquad f_{1,zz}+\beta^2 f_1=0 \tag{4.18}$$

ve

$$\int\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}dr=-\frac{1}{2\alpha^2\sqrt{B}}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right),\ \int\frac{e^{-\mu}}{\sqrt{B}}dr=-\frac{1}{2\beta^2\sqrt{B}}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right) \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.18) denklemlerinin çözümünden

$$f_1(\theta,z)=\cos(\alpha\theta)\big(a_1\cos(\beta z)+a_2\sin(\beta z)\big)+\sin(\alpha\theta)\big(a_3\cos(\beta z)+a_4\sin(\beta z)\big) \tag{4.20}$$

bulunur. (4.19)'un ilk denkleminde (4.14) eşitliğini yazarsak

$$f_{2,\theta}(\theta,z)=0 \tag{4.21}$$

(4.19)'un ikinci denkleminde (4.16) eşitliği yazılması durumunda ise

$$f_{3,z}(\theta,z)=0 \tag{4.22}$$

sonuçları bulunur. (4.13) denklemi

$$S_1(r)=-\left\{\frac{1}{2\sqrt{B}}\left[\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\frac{1}{\beta^2}+e^{\lambda-\mu}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\frac{1}{\alpha^2}\right]\right\} \tag{4.23}$$

tanımı ve (4.21), (4.22) eşitlikleri kullanıldığında

$$f_{1,\theta z}(\theta,z)S_1(r)-e^{\lambda-\mu}f_{2,z}(z)-f_{3,\theta}(\theta)=0 \tag{4.24}$$

haline dönüşür. (4.24) denklemi için aşağıdaki olasılıklar mevcuttur.

(a1.i.1) $S_1(r)\neq 0$ ve $\mu\neq\lambda$ iken (4.24) denkleminin *r*'ye göre türevi alındığında

$$\frac{S_1'(r)}{(e^{\lambda-\mu})'}=\frac{f_{1,z}(z)}{f_{,\theta z}(\theta,z)}=\gamma\neq 0 \tag{4.25}$$

elde edilir. Buradan

$$\gamma f_{,\theta z}(\theta,z)-f_{1,z}(z)=0 \tag{4.26}$$

olur. (4.20) çözümü (4.26)'da kullanıldığında $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ ve $f_2(z)=c_1=sabit$ bulunur. Bunun (4.24)'de yerine yazılmasıyla $f_3(\theta)=c_2=sabit$ elde edilir. Bu işlemlerin sonucu olarak (4.7), (4.11), (4.12) denklemlerinden sırasıyla

$$\xi^1=0,\quad \xi^2=c_1,\quad \xi^3=c_2$$

elde edilir. Bu CC vektör alanları aşağıdaki şekilde ifade edilirler:

$$\vec{\xi}_{(1)}\equiv\vec{X}_{(1)}=\partial_\theta,\ \vec{\xi}_{(2)}\equiv\vec{X}_{(2)}=\partial_z,\ \vec{\xi}_{(3)}=h_1(t)\partial_t \tag{4.27}$$

Burada $h_1(t)$, *t*'ye bağlı keyfi fonksiyondur.

(a1.i.2) $S_1(r)=0$ ve $\mu \neq \lambda$ iken:

$$\vec{\xi}_{(1)}=\partial_\theta,\ \vec{\xi}_{(2)}=\partial_z \tag{4.28}$$

$$\vec{\xi}_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cos(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\sin(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\cos(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(4)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cos(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\sin(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_\theta+\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\cos(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(5)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\sin(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_r+\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\cos(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\sin(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(6)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\sin(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_r+\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\cos(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_\theta+\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\sin(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(7)}=f_2(t)\partial_t$$

Burada $f_2(t)$, *t*'ye bağlı keyfi fonksiyon olup yukarıdaki vektör alanlarının Lie Cebrine ait sıfır olmayan komütatörler

$$[\vec{\xi}_{(1)},\vec{\xi}_{(3)}]=-\alpha\vec{\xi}_{(5)},\qquad [\vec{\xi}_{(1)},\vec{\xi}_{(4)}]=-\alpha\vec{\xi}_{(6)},\qquad [\vec{\xi}_{(1)},\vec{\xi}_{(5)}]=\alpha\vec{\xi}_{(3)}$$

$$[\vec{\xi}_{(1)},\vec{\xi}_{(6)}]=\alpha\vec{\xi}_{(4)},\qquad [\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(3)}]=-\beta\vec{\xi}_{(4)},\qquad [\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(4)}]=\beta\vec{\xi}_{(3)}$$

$$[\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(5)}]=-\beta\vec{\xi}_{(6)},\qquad [\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(6)}]=\beta\vec{\xi}_{(5)}$$

şeklinde elde edilir.

Alt Durum (a1.ii) α<0, β>0 iken

$$S_2(r)=\frac{1}{2\sqrt{B}}\left[\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\frac{1}{\beta^2}-e^{\lambda-\mu}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\frac{1}{\alpha^2}\right] \tag{4.29}$$

tanımı kullanılarak aşağıdaki olasılıklar ele alınacaktır.

(a1.ii.2) $S_2(r)=0$ ve $\mu\neq\lambda$ olması durumunda aşağıdaki CC vektör alanlar bulunur:

$$\vec{\xi}_{(1)}=\partial_\theta,\qquad \vec{\xi}_{(2)}=\partial_z \tag{4.30}$$

$$\vec{\xi}_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cos(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\sin(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_\theta+\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\cos(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(4)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cos(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\sin(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_\theta+\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\cos(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(5)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\sin(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_r+\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\cos(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\sin(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(6)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\sin(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_r+\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\cos(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\sin(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(7)}=f_3(t)\partial_t$$

Burada $f_3(t)$, *t*'ye bağlı keyfi fonksiyondur.

Alt Durum (a1.iii) $\alpha<0,\ \beta=0$ iken

$$\vec{\xi}_{(1)}=\partial_\theta,\ \vec{\xi}_{(2)}=\partial_z,\ \vec{\xi}_{(3)}=z\partial_z,\ \vec{\xi}_{(4)}=f_4(t)\partial_t \tag{4.31}$$

CC vektör alanları elde edilir. Bu vektör alanlarının Lie Cebrine ait sıfır olmayan tek komütatör

$$[\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(3)}]=\vec{\xi}_{(2)}$$

dir.

Alt Durum (a1.iv): $\alpha>0,\ \beta<0$ iken

$$S_3(r)=\frac{1}{2\sqrt{B}}\left[-\frac{1}{\beta^2}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)+\frac{1}{\alpha^2}e^{\lambda-\mu}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\right] \tag{4.32}$$

tanımını kullanalım. $S_3(r)=0$ ve $\mu\neq\lambda$ olması durumunda bulunan CC vektör alanlar:

$$\vec{\xi}_{(1)}=\partial_\theta,\ \vec{\xi}_{(2)}=\partial_z \tag{4.33}$$

$$\vec{\xi}_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cosh(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\sinh(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\cosh(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(4)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cosh(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\sinh(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_\theta+\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\cosh(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(5)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\sinh(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\cosh(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\sinh(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(6)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\sinh(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\cosh(\alpha\theta)\sin(\beta z)\partial_\theta+\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\sinh(\alpha\theta)\cos(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(7)}=f_5(t)\partial_t$$

şeklindedir. Burada $f_5(t)$, t'ye bağlı keyfi fonksiyondur.

Alt Durum (a1.v) $\alpha>0,\ \beta>0$ iken

$$S_4(r)=\frac{1}{2\sqrt{B}}\left[\frac{1}{\beta^2}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)+\frac{1}{\alpha^2}e^{\lambda-\mu}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\right] \tag{4.34}$$

tanımını kullanalım. $S_4(r)=0$ ve $\mu\neq\lambda$ ise CC vektör alanlar

$$\vec{\xi}_{(1)}=\partial_\theta,\ \vec{\xi}_{(2)}=\partial_z \tag{4.35}$$

$$\vec{\xi}_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cosh(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\sinh(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\cosh(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(4)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cosh(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\sinh(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\cosh(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(5)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\sinh(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\cosh(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\sinh(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(6)}=\frac{1}{\sqrt{B}}\left[\sinh(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_r-\frac{1}{2\alpha}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right)\cosh(\alpha\theta)\sinh(\beta z)\partial_\theta-\frac{1}{2\beta}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right)\sinh(\alpha\theta)\cosh(\beta z)\partial_z\right]$$

$$\vec{\xi}_{(7)}=f_6(t)\partial_t$$

şeklinde bulunur. Burada $f_6(t)$, t'ye bağlı keyfi fonksiyondur.

Alt Durum (a1.vi) $\alpha>0$, $\beta=0$ iken aşağıdaki tanım kullanılmaktadır.

$$S_5(r)=\int\frac{e^{-\mu}}{\sqrt{B}}dr+\frac{1}{2\alpha^2\sqrt{B}}e^{\lambda-\mu}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right) \tag{4.36}$$

$S_5(r)\neq 0$ ve $\mu=\lambda$ iken aşağıdaki CC vektör alanlar elde edilmektedir:

$$\vec{\xi}_{(1)}=\partial_\theta,\ \vec{\xi}_{(2)}=\partial_z\ ,\vec{\xi}_{(3)}=z\partial_\theta-\theta\partial_z,\ \vec{\xi}_{(4)}=f_7(t)\partial_t \tag{4.37}$$

$f_7(t)$, t'ye bağlı keyfi fonksiyon olmak üzere bu vektör alanların Lie Cebrine ait sıfır olmayan komütatörler şu şekildedir:

$[\vec{\xi}_{(1)},\vec{\xi}_{(3)}]=-\vec{\xi}_{(2)}$, $[\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(3)}]=\vec{\xi}_{(1)}$

Alt Durum (a1.vii) $\alpha=0$, $\beta<0$ iken

$$S_6(r)=e^{\lambda-\mu}\int\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}dr-\frac{1}{2\beta^2\sqrt{B}}\left(\mu'+\frac{B'}{B}\right) \tag{4.38}$$

olmak üzere $S_6(r)\neq 0$ ve $\mu=\lambda$ iken aşağıdaki CC vektör alanlar elde edilmektedir:

$$\vec{\xi}_{(1)}=\partial_\theta,\ \vec{\xi}_{(2)}=\partial_z,\ \vec{\xi}_{(3)}=z\partial_\theta-\theta\partial_z,\ \vec{\xi}_{(4)}=f_8(t)\partial_t \tag{4.39}$$

Burada $f_8(t)$, t'ye bağlı keyfi fonksiyondur.

Alt Durum (a1.viii) $\alpha=0$, $\beta>0$ iken

$$S_7(r)=e^{\lambda-\mu}\int\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}dr+\frac{1}{2\beta^2\sqrt{B}}\left(\lambda'+\frac{B'}{B}\right) \tag{4.40}$$

tanımı dikkate alındığında elde edilen CC vektör alanlar Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Alt Durum (a1.ix) $\alpha=0$, $\beta=0$ iken

$$S_8(r)=e^{\lambda-\mu}\int\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}dr+\int\frac{e^{-\mu}}{\sqrt{B}}dr \tag{4.41}$$

tanımı kullanıldığında iki durum mümkündür.

(a1.ix.1) $\mu=\lambda$ olması durumunda bulunan CC vektör alanlar:

$\vec{\xi}_{(1)}=\partial_\theta$, $\vec{\xi}_{(2)}=\partial_z$

$$\vec{\xi}_{(3)} = \frac{1}{2\sqrt{B}}\theta\partial_r + \left(-\int\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}dr + k_1\left(\frac{z^2}{2}-\frac{\theta^2}{2}\right)\right)\partial_\theta - k_1 z^2\partial_z$$

$$\vec{\xi}_{(4)} = \frac{1}{2\sqrt{B}}\partial_r + k_1 z\theta\partial_\theta - \left(\int\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{B}}dr + k_1\left(\frac{z^2}{2}+\frac{\theta^2}{2}\right)\right)\partial_z \qquad (4.42)$$

$$\vec{\xi}_{(5)} = \frac{1}{2\sqrt{B}}\partial_r + k_1\partial_\theta - k_1\partial_z\,,\ \vec{\xi}_{(6)} = z\partial_\theta - \theta\partial_z\,,\ \vec{\xi}_{(7)} = f_9(t)\partial_t$$

Burada $f_9(t)$, t'ye bağlı keyfi fonksiyon ve k_1 sıfırdan farklı bir sabittir.

(a1.ix.2) $\mu \neq \lambda$ olması durumunda çözüm:

$$\vec{\xi}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{B}}\partial_r - k_1\theta\partial_\theta - k_2 z\partial_z\,,\ \vec{\xi}_{(2)} = \partial_\theta\,,\ \vec{\xi}_{(3)} = \partial_z\,,\ \vec{\xi}_{(4)} = f_{10}(t)\partial_t \qquad (4.43)$$

Burada $f_{10}(t)$, t'ye bağlı keyfi fonksiyon ve k_2 sıfırdan farklı bir sabittir.

Çizelge 4.2. Statik silindirik simetrik uzay-zamanın $A,D,E=0;\ B,C,F\neq 0$ olan ($a1$) durumunun bazı alt durumlarında elde edilen CC vektör alanları

Durum	**a1.i.3**	**a1.ii.3**	**a1.iv.3**	**a1.v.3**
Kısıtlama Denklemleri	$S_1(r)=0$, $\mu=\lambda$	$S_2(r)=0$, $\mu=\lambda$	$S_3(r)=0$, $\mu=\lambda$	$S_4(r)=0$, $\mu=\lambda$
CC	(4.28) ile verilen CC vektör alanlar + $\vec{\xi}_{(8)} = z\partial_\theta - \theta\partial_z$	(4.30) ile verilen CC vektör alanlar + $\vec{\xi}_{(8)} = z\partial_\theta - \theta\partial_z$	(4.33) ile verilen CC vektör alanlar + $\vec{\xi}_{(8)} = z\partial_\theta - \theta\partial_z$	(4.35) ile verilen CC vektör alanlar + $\vec{\xi}_{(8)} = z\partial_\theta - \theta\partial_z$
Durum	**a1.ii.1**	**a1.iv.1**	**a1.v.1**	**a1.vi.1**
Kısıtlama Denklemleri	$S_2(r)\neq 0$, $\mu\neq\lambda$	$S_3(r)\neq 0$, $\mu\neq\lambda$	$S_4(r)\neq 0$, $\mu\neq\lambda$	$S_5(r)\neq 0$, $\mu\neq\lambda$
CC	(4.27)	(4.27)	(4.27)	(4.27)
Durum	**a1.vii.1**	**a1.vii.3**	**a1.viii.1**	**a1.viii.2**
Kısıtlama Denklemleri	$S_6(r)\neq 0$, $\mu\neq\lambda$	$S_6(r)=0$	$S_7(r)\neq 0$, $\mu\neq\lambda$	$S_7(r)\neq 0$, $\mu=\lambda$
CC	(4.27)	(4.27)	(4.27)	(4.37)

Durum (a4): $A,B,C=0;\ D,E,F\neq 0$

Bu durumda $\upsilon=\upsilon(r),\ \lambda=\lambda(r),\ \mu=\mu(r)$ olup $2\upsilon''+\upsilon'^2=0$, $2\lambda''+\lambda'^2=0$, $2\mu''+\mu'^2=0$ kısıtlama denklemlerinden $\nu=2\ln(c_1r+c_2)$, $\lambda=2\ln(c_3r+c_4)$ ve $\mu=2\ln(c_5r+c_6)$ bulunur.

CC denklemleri aşağıdaki 18 denkleme indirgenmektedir:

$$\xi^0=\xi^0(t,\theta,z)\,,\quad \xi^1=\xi^1(r)\,,\quad \xi^2=\xi^2(t,\theta,z)\,,\quad \xi^3=\xi^3(t,\theta,z)$$

$$\xi^0{}_{,\theta}(E-F)=0\,,\qquad \xi^0{}_{,z}(F-e^{\mu-\lambda}D)=0\,,\ \xi^2{}_{,t}(E-F)=0$$

$$\xi^2{}_{,z}(E-e^{\mu-\lambda}D)=0\,,\quad \xi^3{}_{,t}(D-e^{\lambda-\mu}F)=0\,,\quad \xi^3{}_{,\theta}(D-e^{\lambda-\mu}E)=0$$
$$\xi^2_{,t}-e^{\upsilon-\lambda}\xi^0_{,\theta}=0\,,\quad \xi^3_{,t}-e^{\upsilon-\mu}\xi^0_{,z}=0\,,\quad \xi^3_{,\theta}+e^{\lambda-\mu}\xi^2_{,z}=0 \tag{4.44}$$
$$F\xi^3_{,t}+e^{\upsilon-\lambda}D\xi^0_{,z}=0\,,\quad D\xi^2_{,z}+E\xi^3_{,\theta}=0\,,\quad E\xi^0_{,\theta}-e^{\lambda-\upsilon}F\xi^2_{,t}=0$$
$$D'\xi^1+2D\xi^2_{,\theta}=0\,,\quad E'\xi^1+2E\xi^3_{,z}=0\,,\quad F'\xi^1+2F\xi^3_{,z}=0$$
$$(D'+\upsilon'D-\lambda'D)\xi^1+2D\xi^0_{,t}=0\,,\ (E'+\upsilon'E-\mu'E)\xi^1+2E\xi^0_{,t}=0$$
$$(F'+\lambda'F-\mu'F)\xi^1+2F\xi^2_{,\theta}=0$$

Bu denklem sisteminden elde edilen CC vektör alan bileşenleri μ, υ ve λ'nın aldığı değerlere bağlı olarak 3 farklı durumda incelenmelidir.

Alt Durum (a4.i) $\upsilon\neq\mu\neq\lambda$ iken aşağıdaki CC vektör alanlar elde edilmektedir:

$$\vec{\xi}_{(1)}=\partial_t\,,\ \vec{\xi}_{(2)}=\partial_\theta\,,\ \vec{\xi}_{(3)}=\partial_z\,,\ \vec{\xi}_{(4)}=-t\partial_t+\frac{2D}{D'}\partial_r-\theta\partial_\theta-z\partial_z \tag{4.45}$$

Bu vektör alanlar için, Lie Cebrine ait sıfır olmayan komütatörler şu şekildedir:

$$[\vec{\xi}_{(1)},\vec{\xi}_{(4)}]=-\vec{\xi}_{(1)}\,,\ [\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(4)}]=-\vec{\xi}_{(2)}\,,\ [\vec{\xi}_{(3)},\vec{\xi}_{(4)}]=-\vec{\xi}_{(3)}$$

Alt Durum (a4.ii) $\mu=\lambda$, $\lambda\neq\upsilon$, $\mu\neq\upsilon$. Bu alt durumda (4.45) ile verilen CC vektör alanlarına ilave olarak

$$\vec{\xi}_{(5)}=z\partial_\theta+\theta\partial_z \tag{4.46}$$

vektör alanı elde edilmektedir.

Alt Durum (a4.iii) Kısıtlama olarak $\mu=\upsilon$, $\lambda\neq\upsilon$ ve $\mu\neq\lambda$ bulunmaktadır. Bu alt durum için elde edilen CC vektör alanlar, (4.45)'deki CC vektör alanları ve

$$\vec{\xi}_{(5)}=z\partial_t+t\partial_z \tag{4.47}$$

vektör alanını içermektedir.

Durum (b1) $A,B,D,E=0;\ C,F\neq 0$

Bu durumda $\upsilon=sbt.,\lambda=\lambda(r),\ \mu=\mu(r)$, $2\lambda''+\lambda'^2=0$ dır ve CC denklemleri aşağıdaki 7 denkleme indirgenir:

$$\xi^0=\xi^0(t)\,,\quad \xi^1=\xi^1(r,\theta)\,,\ \xi^2=\xi^2(r,\theta)\,,\ \xi^3=\xi^3(z)$$
$$\xi^1{}_{,\theta}(F-e^{\mu}C)=0\,,\quad \xi^2{}_{,r}(F-e^{\mu}C)=0\,,$$
$$C'\xi^1+2C\xi^1_{,r}=0\,,\quad F\xi^2_{,r}+e^{\mu-\lambda}C\xi^1_{,\theta}=0\,, \tag{4.48}$$
$$(C'+C\mu')\xi^1+2C\xi^3_{,z}=0\,,\quad (F'+\lambda'F-\mu'F)\xi^1+2F\xi^2_{,\theta}=0\,,$$

$$F'\xi^1 + 2F\xi^3_{,z} = 0\,.$$

Bu denklem sisteminin çözümünde iki alt durum mevcuttur:

Alt Durum (b1.i) $F \neq e^{\mu}C$ olması durumunda elde edilen vektör alanları (4.27) ile aynıdır.

Alt Durum (b1.ii) $F = e^{\mu}C$ ve $C = e^{-\mu}$ olduğunda elde edilen CC vektör alanı;

$$\vec{\xi} = f_{11}(t)\partial_t + e^{\mu/2}g_1(\theta)\partial_r + \left[\left(-\int e^{\frac{\mu}{2}-\lambda}dr\right)g_{1,\theta} + g_2(\theta)\right]\partial_\theta + a_4\partial_z \tag{4.49}$$

Burada $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$ ve $f_{11}(t)$ argümanlarının keyfi fonksiyonlarıdır; a_4 ise sabit bir parametredir. Ayrıca;

$$g_{1,\theta\theta} - \alpha^2 g_1 = 0\,, \qquad \left[e^{\mu/2}(\lambda-\mu)'\right]' = 2\alpha^2 e^{-\lambda+\mu/2}$$

denklemleri sağlanmalıdır. Böylece; bu denklemlerin çözümünden

$\alpha^2 > 0$ için $g_1 = a_1\cosh(\alpha\theta) + a_2\sinh(\alpha\theta)$, $g_2 = a_0$

$\alpha^2 < 0$ için $f_1 = a_1\cos(\alpha\theta) + a_2\sin(\alpha\theta)$, $g_2 = a_0$

$\alpha = 0$ için $g_1 = a_1\theta + a_2$, $\dfrac{e^{\mu/2}}{2}(\lambda-\mu)' = \gamma$ =sabit olmak üzere

$$g_2 = -\gamma\left(a_1\frac{\theta^2}{2} + a_2\theta\right) + a_3$$

bulunur.

Durum (c1): $A, B, C, D, E = 0;\ F \neq 0$

Bu durumda $\upsilon = sbt., \lambda = \lambda(r),\ \mu = \mu(r)$, $2\lambda'' + \lambda'^2 = 0$, $2\mu'' + \mu'^2 = 0$ kısıtlama denklemlerinden $\lambda = 2\ln(c_1 r + c_2)$ ve $\mu = 2\ln(c_3 r + c_4)$ bulunur. c_1, c_2, c_3, c_4 integral sabitleridir. CC denklemleri ise aşağıdaki 3 denkleme indirgenmektedir.

$$F'\xi^1 + 2F\xi^3_{,z} = 0\,, \qquad \xi^3_{,\theta} + e^{\lambda-\mu}\xi^2_{,z} = 0\,, \tag{4.50}$$

$$(F' + \lambda'F - \mu'F)\xi^1 + 2F\xi^2_{,\theta} = 0$$

Bu denklem sisteminin çözümünden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Alt Durum (c1.i) $\lambda \neq \mu$ iken $a \neq c$, $b \neq d$, $ad \neq bc$ olmak üzere

$$\vec{\xi}_{(1)} = \partial_z\,,\ \vec{\xi}_{(2)} = \partial_\theta\,,\ \vec{\xi}_{(3)} = -2\frac{(ar+b)(cr+d)}{ad-bc}\partial_r + \theta\partial_\theta\,,\ \vec{\xi}_{(4)} = F_1(r,t)\partial_t \tag{4.51}$$

Burada $F_1(r,t)$, t ve r'ye bağlı keyfi fonksiyondur.

Alt Durum (c1.ii) $\lambda = \mu$ olduğunda $a = c$, $b = d$ ve $F = -a^2$ bulunur.

$$\vec{\xi}_{(1)} = \partial_z,\ \vec{\xi}_{(2)} = \partial_\theta,\ \vec{\xi}_{(3)} = z\partial_\theta - \theta\partial_z,\ \vec{\xi}_{(4)} = F_2(r,t)\partial_t,\ \vec{\xi}_{(5)} = F_3(r,t)\partial_r \tag{4.52}$$

Burada $F_2(r,t)$ ve $F_3(r,t)$, t ve r'ye bağlı keyfi fonksiyonlardır.

Durum (c4): $B, C, D, E, F = 0;\ A \neq 0$

Bu durumda $\mu = \lambda = sbt., \upsilon = \upsilon(r)$, $2\upsilon'' + \upsilon'^2 = 0$ dır ve CC denklemleri aşağıdaki 3 denkleme indirgenir:

$$\begin{aligned} & A'\xi^1 + 2A\xi^1_{,r} = 0, \\ & A(\xi^1_{,t} - e^{\upsilon}\xi^0_{,r}) = 0, \\ & (A' + A\upsilon')\xi^1 + 2A\xi^0_{,t} = 0 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Bu denklem sisteminin çözülmesiyle aşağıdaki alt durumlar ortaya çıkmaktadır:

Alt Durum (c4.i) $\alpha^2 > 0$ ve $\alpha^2 \int \frac{e^{-\upsilon}}{\sqrt{A}} dr = -\frac{1}{2\sqrt{A}}\left(\upsilon' + \frac{A'}{A}\right)$ ise aşağıdaki CC vektör alanı,

$$\begin{aligned} \vec{\xi} = & \left(\alpha\left[a_1 \sinh(\alpha t) + a_2 \cosh(\alpha t)\right]\int \frac{e^{-\upsilon}}{\sqrt{A}} dr + a_3\right)\partial_t + \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\left[a_1 \cosh(\alpha t) + a_2 \sinh(\alpha t)\right]\right)\partial_r \\ & + F_4(\theta, z)\partial_\theta + F_5(\theta, z)\partial_z \end{aligned} \tag{4.54}$$

bulunur. Burada $F_4(\theta, z)$ ve $F_5(\theta, z)$ argümanlarının keyfi fonksiyonları olan integrasyon fonksiyonlarıdır.

Alt Durum (c4.ii) $\alpha^2 < 0$ ve $\alpha^2 \int \frac{e^{-\upsilon}}{\sqrt{A}} dr = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left(\upsilon' + \frac{A'}{A}\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \vec{\xi} = & \left(-\alpha\left[a_1 \sin(\alpha t) - a_2 \cos(\alpha t)\right]\int \frac{e^{-\upsilon}}{\sqrt{A}} dr + a_3\right)\partial_t + \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\left[a_1 \cos(\alpha t) + a_2 \sin(\alpha t)\right]\right)\partial_r \\ & + F_6(\theta, z)\partial_\theta + F_7(\theta, z)\partial_z \end{aligned} \tag{4.55}$$

CC vektör alanı elde edilir. Burada $F_6(\theta, z)$ ve $F_7(\theta, z)$, θ ve z'ye bağlı integrasyon fonksiyonlarıdır.

Alt Durum (c4.iii) $k = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left(\upsilon' + \frac{A'}{A}\right) = sabit$ olduğunda bulunan CC vektör alanı $F_8(\theta, z)$ ve $F_9(\theta, z)$ integrasyon fonksiyonları olmak üzere,

$$\vec{\xi} = \left(-k\left(a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 t\right) + a_1 \int \frac{e^{-\upsilon}}{\sqrt{A}} dr + a_3\right)\partial_t + F_8(\theta, z)\partial_\theta + F_9(\theta, z)\partial_z \tag{4.56}$$

şeklini alır.

Alt Durum (c4.iiia) $k=0$ ise $A=e^{-\upsilon}$ yani $2\upsilon''+\upsilon'^2=-4e^{-\upsilon}$ olmaktadır. Bu alt durumda

$$\vec{\xi}=\left(a_1\int e^{-\frac{\upsilon}{2}}dr+a_3\right)\partial_t+e^{-\frac{\upsilon}{2}}(a_1t+a_2)\partial_r+F_{10}(\theta,z)\partial_\theta+F_{11}(\theta,z)\partial_z \quad (4.57)$$

CC vektör alanı ortaya çıkmaktadır. $F_{10}(\theta,z)$ ve $F_{11}(\theta,z)$ ise integrasyon fonksiyonlarıdır.

Çizelge 4.3. Statik silindirik simetrik uzay-zamanın diğer durumlardan dönüşüm yoluyla elde edilebilen durumların CC vektör alanları

Durum	**a2**	**a3**	**b2**	**b3**
Kısıtlama Denklemleri	$B,D,F=0$ $A,C,E\neq 0$	$C,E,F=0$ $A,B,D\neq 0$	$A,C,D,E=0$ $B,F\neq 0$	$B,C,E,F=0$ $A,D\neq 0$
CC	(a1)'de elde edilen CC'lerden $\nu\to\lambda$, $B\to A$, $F\to E$ dönüşümleri ile bulunur.	(a1)'de elde edilen CC'lerden $\nu\to\mu$, $C\to A$, $F\to D$ dönüşümleri ile bulunur.	(b1)'de elde edilen CC'lerden $\lambda\to\mu$, $C\to B$ dönüşümleri ile bulunur.	(b1)'de elde edilen CC'lerden $F\to D$, $C\to A$ dönüşümleri ile bulunur.
Durum	**b4**	**b5**	**b6**	**c2**
Kısıtlama Denklemleri	$A,C,E,F=0$ $B,D\neq 0$	$A,B,D,F=0$ $C,E\neq 0$	$B,C,D,F=0$ $A,E\neq 0$	$A,B,C,D,F=0$ $E\neq 0$
CC	(b1)'de elde edilen CC'lerden $\lambda\to\nu$, $F\to D$, $C\to B$ dönüşümleri ile bulunur.	(b1)'de elde edilen CC'lerden $\lambda\to\nu$, $F\to E$ dönüşümleri ile bulunur.	(b1)'de elde edilen CC'lerden $\lambda\to\mu$, $F\to E$, $C\to A$ dönüşümleri ile bulunur.	(c1)'de elde edilen CC'lerden $\lambda\to\nu$, $F\to E$ dönüşümleri ile bulunur.
Durum	**c3**	**c5**	**c6**	
Kısıtlama Denklemleri	$A,B,C,E,F=0$ $D\neq 0$	$A,C,D,E,F=0$ $B\neq 0$	$A,B,D,E,F=0$ $C\neq 0$	
CC	(c1)'de elde edilen CC'lerden $\mu\to\nu$, $F\to D$ dönüşümleri ile bulunur.	(c4)'de elde edilen CC'lerden $\nu\to\lambda$, $A\to B$ dönüşümleri ile bulunur.	(c4)'de elde edilen CC'lerden $\nu\to\mu$, $A\to C$ dönüşümleri ile bulunur.	

4.1.2. Madde Simetrileri

Genel şekli (4.1) ile verilen Statik Silindirik Simetrik uzay-zaman için T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = e^{\nu}(B + C + e^{-\mu}F)$$
$$T_{11} = -e^{-\mu}(F + E) - e^{-\lambda}D \qquad (4.58)$$
$$T_{22} = -e^{\lambda}(A + C + e^{-\mu}E)$$
$$T_{33} = -e^{\mu}(A + B + e^{-\lambda}D)$$

şeklindedir. Burada; *A,B,C,D,E* ve *F* fonksiyonları için (4.4)'de verilen tanımlar kullanılmıştır. Bölüm 4.1'de 16 olası durum ve bunların alt durumlarının CC vektör alanları elde edilmiş olmasına rağmen bazı durumların diğer durumlardan dönüşümlerle elde edilebileceği görülmüştür. Aşağıda sadece bir dönüşümle diğerlerinden bulunamayan durumların CC vektör alanlarının MC vektör alanı olma koşulları irdelenmiştir. Diğer durumlardan farklı MC vektör alanı elde edilen durumların çözümleri alt durumlarda verilmiş, başka bir alt durum ile aynı MC vektör alanına sahip durumlara ait vektör alanları ise Çizelge 4.4'de sunulmuştur.

Durum (a1): $A, D, E = 0;\ B, C, F \neq 0$

Bu durumda; sıfır olmayan enerji-momentum tensör bileşenleri,

$$T_{00} = e^{\nu}(B + C + e^{-\mu}F)\,,\ T_{11} = -e^{-\mu}F\,,\ T_{22} = -e^{\lambda}C\,,\ T_{33} = -e^{\mu}B \qquad (4.59)$$

olur. 4.1 bölümünde elde edilen CC vektör alanlarındaki aynı alt durum isimleri kullanılarak MC vektör alanı olma koşulları incelenecektir.

Alt Durum (a1.i.1): Bu alt durumda, (4.59) enerji-momentum tensörü bileşenleri ve (4.27) CC vektör alanları (3.1) madde kollinasyon denkleminde kullanılırsa

$$\dot{f}_1(t)\left(B + C + e^{-\mu}F\right) = 0 \qquad (4.60)$$

elde edilir. Bu nedenle (4.27)'de verilen diğer vektör alanlarının MC vektör alanı olması yanında $\vec{\xi}_{(8)}$ CC vektör alanının da MC vektör alanı olması için (4.60)'dan $f_1(t) = sbt$ veya $F = -e^{\mu}(B + C)$ olması gerektiği sonucu çıkar.

Alt Durum (a1.i.2): (4.59) enerji-momentum tensörü bileşenleri ve (4.28) CC vektör alanları (3.1) madde kollinasyon denkleminde kullanılırsa

$$\mu' - \frac{F'}{F} + \frac{B'}{B} = 0 \Rightarrow\ F = b_2 B e^{\mu} \qquad (4.61a)$$

$$4\alpha^2 \frac{F}{C} e^{-\lambda-\mu} - \lambda' \frac{B'}{B} - 3\frac{B'^2}{B^2} + 2\lambda'' + 2\frac{B''}{B} = 0 \qquad (4.61b)$$

$$4\beta^2 \frac{F}{B} e^{-2\mu} - \mu' \frac{B'}{B} - 3\frac{B'^2}{B^2} + 2\mu'' + 2\frac{B''}{B} = 0 \qquad (4.61c)$$

$$\frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} = 0 \qquad (4.61d)$$

$$\left(\mu' + \frac{B'}{B}\right) e^{\mu} B\alpha^2 + \left(\lambda' + \frac{B'}{B}\right) e^{\lambda} \beta^2 C = 0 \qquad (4.61e)$$

$$\dot{f}_2(t)\left(B + C + e^{-\mu} F\right) = 0 \qquad (4.61f)$$

$$B' + C' - e^{-\mu}\left(\mu' F - F'\right) = 0 \qquad (4.61g)$$

bulunur. (4.61e) denkleminin $B = C$ olmak koşulu ile $S_1(r) = 0$ kısıtlama denklemlerine özdeş olduğu görülmektedir. Bu denklem sisteminden $F \neq -e^{\mu}(B + C)$ olmak üzere

$$B = C = b_0\,,\ f_2(t) = b_2\,,\ F = b_2 B e^{\mu}\,,\ e^{\mu}\alpha^2 + e^{\lambda}\beta^2 = b_3 \qquad (4.62)$$

$$\lambda'' e^{\lambda} = -2\alpha^2\,,\ \mu'' e^{\mu} = -2\beta^2 \qquad (4.63)$$

elde edilir. Burada b_0, b_1, b_2 ve b_3 keyfi sabitlerdir. (4.63) ile verilen lineer olmayan denklemlere çözüm bulunabilirse yeni bir uzay-zaman elde edilecektir.

(a1.i.3) alt durumunda (yani $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $S_1(r) = 0$ ve $\lambda = \mu$ iken) (4.28) ile verilen CC vektör alanlarına ilaveten (4.29) CC vektör alanı mevcuttur. Bu vektör alanlar için (4.61a)-(4.61g) MC denklemlerinden başka $Be^{\mu} - Ce^{\lambda} = 0$ eşitliği ortaya çıkmaktadır.

Alt Durum (a1.ii.2): Bu alt duruma ait (4.30) ile verilen CC vektör alanları ve (4.59) enerji-momentum tensörü bileşenleri (3.1) MC denkleminde kullanılırsa (4.61a), (4.61b), (4.61d) ve (4.61g) denklemlerine ilave olarak

$$\mu' B + B' = 0 \qquad (4.64a)$$

$$(B + C + e^{-\mu} F)\,\dot{f}_3(t) = 0 \qquad (4.64b)$$

$$e^{2\mu} C \xi^1_{,z} + F \xi^3_{,r} = 0 \qquad (4.64c)$$

$$e^{\mu} B \xi^2_{,z} + e^{\lambda} C \xi^3_{,\theta} = 0 \qquad (4.64d)$$

denklemleri de bulunur. Bu denklem sisteminden

$$B = C = e^{-\mu}\,,\ f_3(t) = b_1\,,\ F = 1 \qquad (4.65)$$

$$\lambda'' = -2\alpha^2 e^{-\lambda-\mu} \qquad (4.66)$$

bulunur.

Alt Durum (a1.iii): Bu alt duruma ait (4.31) ile verilen CC vektör alanları ve (4.59) enerji-momentum tensörü bileşenleri (3.1) MC denkleminde kullanılırsa

$$Ba_3 = 0 \tag{4.67}$$

$$(B + C + e^{-\mu} F)\,\dot{f}_4(t) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$a_3 = 0\,,\;\; f_4(t) = sabit \tag{4.68}$$

çözümüne ulaşılır.

Alt Durum (a1.vi.2): Bu alt duruma ait (4.37) ile verilen CC vektör alanları ve (4.59) enerji-momentum tensörü bileşenleri (3.1) MC denkleminde kullanılırsa

$$(B - C)a_3 = 0 \tag{4.70a}$$

$$(B + C + e^{-\mu} F)\,\dot{f}_7(t) = 0 \tag{4.70b}$$

bulunur. Buradan $B \neq C$ olduğunda

$$a_3 = 0\,,\;\; f_7(t) = sabit \tag{4.71a}$$

veya $B = C$ iken $a_3 \neq 0$ olmak üzere

$$F = -e^{\mu}(B + C) \tag{4.71b}$$

çözümleri elde edilir.

Alt Durum (a1.vii.1): Bu alt duruma ait Çizelge 4.2'de verilen CC vektör alanları ve (4.59) enerji-momentum tensörü bileşenleri (3.1) MC denkleminde kullanılırsa

$$(B + C + e^{-\mu} F)\,\dot{f}_8(t) = 0 \tag{4.72}$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$f_8(t) = sabit \;\text{ veya }\; F = -e^{\mu}(B + C) \tag{4.73}$$

olasılıkları ortaya çıkar.

Alt Durum (a1.ix.1): Bu alt duruma ait (4.42) ile verilen CC vektör alanları ve (4.59) enerji-momentum tensörü bileşenleri, (3.1) MC denkleminde dikkate alındığında

$$a_2 = 0$$

$$(2e^{\mu} C - F)a_1 = 0$$

$$(a_1\theta + a_3)\left(\mu' - \frac{F'}{F} - \frac{B'}{B}\right) = 0$$

$$\left(\mu' + \frac{C'}{C}\right)(a_1\theta + a_3) + 4\sqrt{B}k_1 a_1\theta = 0$$

$$a_4 B + a_1 k_1 z C + C a_4 = 0 \tag{4.74}$$

$$\left(\mu' + \frac{B'}{B}\right)(a_1\theta + a_3) + 4\sqrt{B}\,2a_1 k_1 z = 0$$

$$B' + C' + e^{-\mu}\left(F' - \mu' F\right) = 0$$

$$(B + C + e^{-\mu} F)\,\dot{f}_{10}(t) = 0$$

denklemleri bulunur. Bu denklem sisteminden

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \text{ ve } f_{10}(t) = sabit \tag{4.75}$$

veya

$$a_1 = a_2 = 0 \text{ veya } F = -e^{\mu}(B + C) \text{ ve } f_{10}(t) = sabit \tag{4.76}$$

çözümleri elde edilmektedir.

Alt Durum (a1.ix.2): Bu alt duruma ait (4.43) ile verilen CC vektör alanları ve (4.59) enerji-momentum tensörü bileşenleri (3.1) MC denkleminde kullanılırsa

$$\left(\mu' - \frac{F'}{F} + \frac{B'}{B}\right)a_1 = 0$$

$$\left(\lambda' + \frac{C'}{C} - 2\sqrt{B}k_1\right)a_1 = 0 \tag{4.77}$$

$$\left(\mu' + \frac{B'}{B} - 2\sqrt{B}k_2\right)a_1 = 0$$

$$\left(B' + C' + e^{-\mu}\left(F' - \mu' F\right)\right)a_1 + 2\sqrt{B}(B + C + e^{-\mu}F)\,\dot{f}_{11}(t) = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklem sisteminin çözümünden

$$a_1 = 0 \text{ ve } f_{11}(t) = sabit \tag{4.78}$$

veya $a_1 \neq 0$ olmak üzere

$$f_{11}(t) = c_1 t + c_2,$$

$$F = c_3 e^{\mu} B,\; C = c_4 e^{2k_1\int\sqrt{B}dr - \lambda},\; B = c_5 e^{2k_2\int\sqrt{B}dr - \mu} \tag{4.79a}$$

$$\left(B' + C' + e^{-\mu}\left(F' - \mu' F\right)\right)a_1 + 2\sqrt{B}(B + C + e^{-\mu}F)c_1 = 0 \tag{4.79b}$$

elde edilir.

Çizelge 4.4. Statik silindirik simetrik uzay-zamanın diğer durumlardan elde edilebilen MC vektör alanları

Durum	**a1.i.3**	**a1.ii.1**	**a1.ii.3**	**a1.iv.1**
MC	a1.i.2 ile aynı	a1.i.1 ile aynı	a1.ii.2 ile aynı	a1.i.1 ile aynı
Durum	**a1.iv.2**	**a1.iv.3**	**a1.v.1**	**a1.v.2**
MC	a1.i.2 ile aynı	a1.i.2 ile aynı	a1.i.1 ile aynı	a1.i.2 ile aynı
Durum	**a1.v.3**	**a1.vi.1**	**a1.vii.2**	
MC	a1.i.2 ile aynı	a1.i.1 ile aynı	a1.vi.2 ile aynı	

Durum (a4): $A, B, C = 0;\ D, E, F \neq 0$

Bu durumda; sıfır olmayan enerji-momentum tensör bileşenleri,

$$T_{00} = e^{\nu-\mu} F\ ,\ T_{11} = -e^{-\mu}(F+E) - e^{-\lambda} D\ ,\ T_{22} = -e^{\lambda-\mu} E\ ,\ T_{33} = -e^{\mu-\lambda} D \tag{4.80}$$

olur. Bu durumda elde edilen CC vektör alanları 3 farklı alt durumda incelendiğinden bunların MC vektör alanı olma koşulları da aynı alt durumlarda incelenmiştir.

Alt Durum (a4.i): Bu alt duruma ait (4.45) ile verilen CC vektör alanları ve (4.80) enerji-momentum tensörü bileşenleri (3.1) MC denkleminde kullanılırsa

$$\left[\left(\mu' - \frac{F'}{F}\right)\frac{D}{D'} + 2\right]a_4 = 0\ ,\ \left[\left((\mu' - \lambda') + \frac{D'}{D}\right)\frac{D}{D'} - 2\right]a_4 = 0$$

$$\left[\left((\mu' - \lambda') - \frac{E'}{E}\right)\frac{D}{D'} + 2\right]a_4 = 0 \tag{4.81}$$

$$\left[e^{-\mu}(\mu'(F+E) - F' - E') + e^{-\lambda}(\lambda' D - D')\right]a_4 - 2(e^{-\mu}(F+E) + e^{-\lambda}D)\left(\frac{DD''}{D'} - D'\right)a_4 = 0$$

bulunur. Buradan

$$a_4 = 0 \tag{4.82}$$

çözümü veya

$$D = e^{\mu-\lambda},\ E = e^{3\mu-3\lambda}\ ,\ F = e^{3\mu-2\lambda} \tag{4.83}$$

kısıtlama denklemleri elde edilir.

Alt Durum (a4.ii): Bu alt duruma ait (4.45) ve (4.46) ile verilen CC vektör alanları ve (4.80) enerji-momentum tensörü bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

$$(e^{\mu-\lambda} D + e^{\lambda-\mu} E)a_5 = 0\ ,\ \left[\left(-\mu' + \frac{\dot{F}}{F}\right)\frac{D}{\dot{D}} - 1\right]a_4 = 0$$

$$\left(\left[\lambda' - \mu' - \frac{\dot{D}}{D}\right]\frac{D}{\dot{D}} + 1\right)a_4 = 0\ ,\ \left[\left(\mu' - \lambda' - \frac{\dot{E}}{E}\right)\frac{D}{\dot{D}} + 1\right]a_4 = 0 \tag{4.84}$$

$$\left[\left(\mu' - \frac{(F+E)^{\cdot}}{F+E}\right)e^{-\mu} + \left(\lambda' - \frac{\dot{D}}{D}\right)e^{-\lambda} + 2\left((F+E)e^{-\mu} + De^{-\lambda}\right)\left(-\frac{\dot{D}}{D} + \frac{\ddot{D}}{\dot{D}}\right)\right]a_4 = 0$$

bulunur. Bu diferansiyel denklemlerin çözümü ancak

$$a_4 = a_5 = 0 \tag{4.85}$$

iken mümkündür.

Alt Durum (a4.iii): Bu alt duruma ait (4.45) ve (4.47) ile verilen CC vektör alanları ve (4.80) enerji-momentum tensörü bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

$$a_4 = a_6 = 0 \tag{4.86}$$

elde edilir.

Çizelge 4.5. Bazı durumlarda MC denklemlerinden elde edilen MC vektör alanı olma koşulları

Durum	Kısıtlamalar	Sıfır Olmayan EMT Bileşenleri	CC	MC olma koşulları
b1	$A,B,D,E=0$; $C,F\neq 0$	$T_{00}=e^{\nu}(C+e^{-\mu}F)$, $T_{11}=-e^{-\mu}F$, $T_{22}=-e^{\lambda}C$	–	–
b1.i	”	”	4.27	$h_1(t)=sbt$
b1.ii	”	”	4.49	$a_1=0$, $f_{11}(t)=sbt$
c1	$A,B,C,D,E=0$; $F\neq 0$	$A,B,C,D,E=0$; $F\neq 0$	–	–
c1.i	”	”	4.51	$a_1=0$, $F_1(r,t)=sbt$
c1.ii	”	”	4.38	$F_2(r,t)=sbt$, $F_3(r,t)=sbt$
c4	$B,C,D,E,F=0$; $A\neq 0$	$T_{22}=-e^{\lambda}A$, $T_{33}=-e^{\mu}A$	–	–
c4.i	”	”	4.54	$a_1=a_2=0$, $F_4(\theta,z)=sbt$, $F_5(\theta,z)=sbt$
c4.ii	”	”	4.55	$a_1=a_2=0$, $F_6(\theta,z)=sbt$, $F_7(\theta,z)=sbt$
c4.iii	”	”	4.56	$F_8(\theta,z)=sbt$, $F_9(\theta,z)=sbt$
c4.iiia	”	”	4.47	$F_{10}(\theta,z)=sbt$, $F_{11}(\theta,z)=sbt$

Statik silindirik simetrik uzay-zamanın yukarıda hesaplanan CC vektör alanları ve MC vektör alanları arasındaki ilişkiler aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.6. Statik silindirik simetrik uzay-zamanın madde ve eğrilik simetrileri arasındaki ilişkiler

Durum	**CC**	**CC sayısı**	**MC**	**MC sayısı**
a1.i.1	(4.27)	∞	(4.60)	$3-\infty$
a1.i.2	(4.28)	∞	(4.62)	7
a1.i.3	Çizelge 4.2	∞	(4.62)	8
a1.ii.1	(4.27)	∞	(4.60)	3
a1.ii.2	(4.30)	∞	(4.65)	7
a1.ii.3	Çizelge 4.2	∞	(4.65)	8
a1.iii	(4.31)	∞	(4.68) – (4.69)	$3-\infty$
a1.iv.1	(4.27)	∞	(4.60)	3
a1.iv.2	(4.33)	∞	(4.62)	7
a1.iv.3	Çizelge 4.2	∞	(4.62)	8
a1.v.1	(4.27)	∞	(4.60)	3
a1.v.2	(4.35)	∞	(4.62)	7
a1.v.3	Çizelge 4.2	∞	(4.62)	8
a1.vi.1	(4.27)	∞	(4.60)	3
a1.vi.2	(4.37)	∞	(4.71)	3
a1.vii.1	(4.27)	∞	(4.73)	3
a1.vii.2	(4.39)	∞	(4.71)	3
a1.vii.3	(4.27)	∞	(4.60)	3
a1.viii.1	(4.27)	∞	(4.60)	3
a1.viii.2	(4.37)	∞	(4.71a) – (4.71b)	$3-\infty$
a1.ix.1	(4.42)	∞	(4.75) – (4.76)	3 – 5
a1.ix.2	(4.43)	∞	(4.78) – (4.79)	$3-\infty$
a4.i	(4.45)	4	(4.82) – (4.83)	$3-\infty$
a4.ii	(4.45)+(4.46)	5	(4.85)	3
a4.iii	(4.45)+(4.47)	5	(4.86)	3
b1.i	(4.27)	∞	(4.89)	$2-\infty$
b1.ii	(4.49)	∞	(4.90)	4
c1.i	(4.51)	∞	(4.92)	3
c1.ii	(4.52)	∞	(4.93) – (4.94)	4 – 5
c4.i	(4.54)	∞	(4.96)	3
c4.ii	(4.55)	∞	(4.97)	3
c4.iii	(4.56)	∞	(4.98)	5
c4.iiia	(4.57)	∞	(4.99)	5

Buradan sonraki bölümlerde Bianchi tip uzay-zamanların öncelikle eğrilik ranklarına göre sınıflaması yapılacak ve sonra bu uzay-zamanlara ait CC denklemleri kullanılarak CC vektör alanları hesaplanacaktır. Daha sonra, bu vektör alanlarının aynı zamanda MC vektör alanı olması için gerekli koşullar elde edilecektir.

Bianchi tip uzay-zamanlar dokuz farklı tipe ayrılırlar. Bu Bianchi tiplerine ait uzay-zamanlar dikkate alınarak eğrilik rankı sınıflandırmaları ve CC vektör alanlarının bulunması, bulunan CC vektör alanlarının MC denklemlerinde yerine konularak incelenmesi aşağıdaki bölümlerde yapılacaktır.

4.2. Bianchi Tip II Uzay-Zaman

Bianchi tip II uzay zaman metriği; $A = A(t),\ B = B(t),\ C = C(t)$ olmak üzere

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dx^2 + B^2 (dy - xdz)^2 + C^2 dz^2 \tag{5.1}$$

ile verilmektedir (Kramer ve ark., 1980). Bu uzay zamanlar aşağıdaki uzaysal KV alanlarına izin vermektedir:

$$\vec{X}_{(1)} = \partial_y\,,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_z\,,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_x + z\partial_y \tag{5.2}$$

Bu KV alanlar için komitasyon bağıntıları

$$[\vec{\xi}_{(1)},\vec{\xi}_{(2)}] = 0\,,\ [\vec{\xi}_{(1)},\vec{\xi}_{(3)}] = 0\,,\ [\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(3)}] = \vec{\xi}_{(1)}$$

şeklindedir. Bianchi tip II metriğine ait R_{abcd} Riemann eğrilik tensör bileşenleri

$$\begin{aligned}
&R_{1212} = A^2B^2F_6(t)\,,\ R_{1213} = -xA^2B^2F_6(t)\,,\ R_{1234} = \frac{B^2}{2}F_4(t)\\
&R_{1313} = A^2C^2F_7(t) + x^2A^2B^2F_6(t)\,,\ R_{1324} = \frac{B^2}{2}\left(F_4(t) + F_5(t)\right)\\
&R_{1334} = -\frac{x}{2}B^2\left[2F_4(t) + F_5(t)\right],\ R_{1414} = -F_1(t)\,,\ R_{1423} = \frac{B^2}{2}F_5(t)\\
&R_{2323} = B^2C^2F_8(t)\,, R_{2424} = -F_2(t)\,,\\
&R_{2434} = xF_2(t)\,,\ R_{3434} = x^2F_2(t) + F_3(t)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

olarak bulunur. Burada $F_1(t),...,F_8(t)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır.

$$F_1(t) \equiv A\ddot{A}\,, \qquad F_2(t) \equiv B\ddot{B}\,,$$

$$F_3(t) \equiv C\ddot{C}\,, \qquad F_4(t) \equiv \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\,,$$

$$F_5(t) \equiv \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{B}}{B}, \qquad F_6(t) \equiv \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{B^2}{4A^2C^2}, \tag{5.4}$$

$$F_7(t) \equiv \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{3}{4}\frac{B^2}{A^2C^2}, \qquad F_8(t) \equiv \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{B^2}{4A^2C^2}$$

Bianchi Tip II için R_{abcd} Riemann eğrilik tensörünün 6×6 matris formu aşağıdaki gibidir:

$$R_{AB}=\begin{pmatrix} A^2B^2F6 & -xA^2B^2F6 & 0 & 0 & 0 & \frac{B^2F4}{2} \\ -xA^2B^2F6 & A^2C^2F7+x^2A^2B^2F6 & 0 & 0 & 0 & -\frac{xB^2}{2}(2F4+F5) \\ 0 & 0 & -F1 & \frac{B^2F5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B^2F5}{2} & B^2C^2F8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -F2 & xF2 \\ \frac{B^2F4}{2} & -\frac{xB^2}{2}(2F4+F5) & 0 & 0 & xF2 & -(x^2F2+F3) \end{pmatrix}$$

Çizelge 5.1. Bianchi Tip II uzay-zamanı için eğrilik rankının üç ve üç'den küçük olabildiği durumlar

rank=1	a1	$F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0$
	a2	$F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0$
	a3	$F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0$
	a4	$F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0$
	a5	$F_2 \neq 0$
	a6	$F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0$
rank=2	b1	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0)$
	b2	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b3	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	b4	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$
	b5	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b6	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b7	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	b8	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$
	b9	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b10	$(F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	b11	$(F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$
	b12	$(F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b13	$(F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$
	b14	$(F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b15	$(F_2 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
rank=3	c1	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c2	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	c3	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$
	c4	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c5	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	c6	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$

	c7	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c8	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$
	c9	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c10	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c11	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	c12	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_1 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$
	c13	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c14	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee \mathrm{F8} \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$
	c15	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee \mathrm{F8} \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c16	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (\mathrm{F2} \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c17	$(F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0)$
	c18	$(F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c19	$(F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c20	$(F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$

Yukarıdaki durumlarda $F_1(t),...,F_8(t)$ fonksiyonları göz önüne alındığında rankın 3 olduğu *iki* ve 1 olduğu *bir* durum mümkün olmaktadır:

(a2) Rank=1 : $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_8 = 0,\ F_7 \neq 0;$

(c2)-(i) Rank=3 : $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 0,\ F_6 \neq 0,\ F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0;$

(ii) Rank=3 : $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_7 = 0,\ F_6 \neq 0,\ F_8 \neq 0.$

4.2.1. Eğrilik Simetrileri

Bu bölümde; yukarıda verilen eğrilik rankı durumlarına göre Bianchi tip II uzay-zamanının CC denklemleri belirlenip çözümleri bulunmaya çalışılacaktır.

Durum (a2): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_8 = 0,\ F_7 \neq 0.$

Bu kısıtlama denklemlerinden $A = B = C = c_1 t + c_2$ elde edilmektedir. Bu durumda (5.1) denkleminden elde edilen CC denklemleri aşağıdaki altı denkleme indirgenir:

$$\xi^0 = \xi^0(y,z,t),\ \xi^1 = \xi^1(x,z),\ \xi^2 = \xi^2(x,y,z,t),\ \xi^3 = \xi^3(x,z)$$

$$\xi^0\left(\frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{F}_7}{2F_7}\right) + \xi^3{}_{,z} = 0,\ C^2\xi^2{}_{,x} + xA^2\xi^1{}_{,z} = 0$$

$$x\left[\xi^0\left(\frac{2\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_7}{F_7}\right) + \xi^3{}_{,z}\right] + \xi^1 - x\xi^2{}_{,y} - \xi^2{}_{,z} + 2x\xi^1{}_{,x} = 0 \tag{5.6}$$

$$\xi^0\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_7}{2F_7}\right) + \xi^1{}_{,x} = 0,\ C^2\xi^3{}_{,x} + A^2\xi^1{}_{,z} = 0,\ x\xi^0{}_{,y} + \xi^0{}_{,z} = 0$$

Bu denklem sisteminin çözümünden ξ^a CC vektör alanları

$$\vec{\xi}_{(1)} = \partial_y \quad \vec{\xi}_{(2)} = \partial_z \qquad \vec{\xi}_{(3)} = \partial_x + z\partial_y$$

$$\vec{\xi}_{(4)} = -z\partial_x + \frac{1}{2}(x^2 - z^2)\partial_y + x\partial_z \tag{5.7}$$

$$\vec{\xi}_{(5)} = -x\partial_x - 2y\partial_y - z\partial_z + 2\frac{F_7A^2}{(F_7A^2)^{\dot{}}}\partial_t \quad ,\ F_7(t) \neq kA^{-2}$$

$$\vec{\xi}_{(6)} = f_1(t)\partial_y$$

şeklinde bulunur. Burada; $a_1,...,a_6$ sabitleri keyfi parametreler ve $f_1(t)$, t'ye bağlı keyfi fonksiyondur. (5.7)'de bulunan CC vektör alanlarının Lie Cebrine ait sıfır olmayan komütatörler:

$$[\vec{\xi}_{(1)},\vec{\xi}_{(5)}] = -2\vec{\xi}_{(1)},\ [\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(3)}] = \vec{\xi}_{(1)},\ [\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(4)}] = -\vec{\xi}_{(3)},\ [\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(5)}] = -\vec{\xi}_{(2)},$$

$$[\vec{\xi}_{(3)},\vec{\xi}_{(4)}] = \vec{\xi}_{(2)},\ [\vec{\xi}_{(3)},\vec{\xi}_{(5)}] = -\vec{\xi}_{(3)},\ [\vec{\xi}_{(5)},\vec{\xi}_{(6)}] = \left(\frac{F_7C^2}{(F_7C^2)^{\dot{}}}\dot{f}_1(t) - f_1(t)\right)2\vec{\xi}_{(1)}$$

Durum (c2.i): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 0,\ F_6 \neq 0,\ F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0.$

Bu kısıtlama denklemlerinden $A = B = C = c_1 t + c_2$ elde edilmektedir. Bu durumda (5.1) denkleminden elde edilen CC denklemleri aşağıdaki dokuz denkleme indirgenir:

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(x),\ \xi^2 = \xi^2(y),\ \xi^3 = \xi^3(z)$$

$$\xi^0\left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{F}_6}{2F_6}\right) + \xi^2{}_{,y} = 0,\ \xi^0\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_6}{2F_6}\right) + \xi^1{}_{,x} = 0$$

$$x\left[\xi^0\left(2\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{F}_6}{F_6}\right) + 2\xi^2{}_{,y}\right] - x\xi^2{}_{,y} + \xi^1 + x\xi^3{}_{,z} = 0$$

$$2xB^2F_6\xi^1+2\xi^0CF_7\dot{C}+\xi^0C^2\dot{F}_7+\xi^0x^2B^2\dot{F}_6+2\xi^3{}_{,z}C^2F_7+2\xi^3{}_{,z}x^2B^2F_6=0$$

$$(F_6-F_7)\left(\xi^1+2\xi^0x\frac{\dot{A}}{A}+\xi^0x-x\xi^2{}_{,y}+2x\xi^1+x\xi^3{}_{,z}\right)=0 \tag{5.8}$$

$$x\left[\xi^0\left(2\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{F}_8}{F_8}\right)+2\xi^2{}_{,y}\right]-x\xi^2{}_{,y}+\xi^1+x\xi^3{}_{,z}=0$$

$$\xi^1+x\xi^0\left(\frac{2\dot{B}}{B}+\frac{\dot{F}_8}{F_8}\right)+\xi^0\frac{\dot{F}_8}{F_8}\frac{C^2}{B^2}+2x\xi^3{}_{,z}+2\xi^3{}_{,z}\frac{C^2}{B^2}=0$$

$$\xi^0\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{F}_7}{2F_7}\right)+\xi^1{}_{,x}=0\,,\ \xi^0\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{F}_8}{2F_8}\right)+\xi^2{}_{,y}=0$$

Bu denklem sisteminin çözümü

$$\xi^0=0\,,\ \ \xi^1=0\,,\ \xi^2=a_1\,,\ \xi^3=a_2 \tag{5.9}$$

şeklinde bulunur.

Durum (c2.ii): $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_7=0,\ F_6\neq 0,\ F_8\neq 0$

Bu durumda (3) denkleminden elde edilen CC denklemleri aşağıdaki sekiz denkleme indirgenir:

$$\xi^0=\xi^0(t)\,,\ \xi^1=\xi^1(x)\,,\ \xi^2=\xi^2(y)\,,\ \xi^3=\xi^3(z)$$

$$\xi^0\left(\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{F}_6}{2F_6}\right)+\xi^2{}_{,y}=0\,,\ \xi^0\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{F}_6}{2F_6}\right)+\xi^1{}_{,x}=0$$

$$x\left[\xi^0\left(\frac{2\dot{B}}{B}+\frac{\dot{F}_6}{F_6}\right)+2\xi^2{}_{,y}\right]-x\xi^2{}_{,y}+\xi^1+x\xi^3{}_{,z}=0$$

$$2\xi^1+\xi^0x\frac{\dot{F}_6}{F_6}+2\xi^3{}_{,z}x=0\,,\ \xi^0\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{F}_8}{2F_8}\right)+\xi^2{}_{,y}=0$$

$$\xi^1+x\xi^0\left(\frac{2\dot{B}}{B}+\frac{\dot{F}_8}{F_8}\right)+\xi^0\frac{\dot{F}_8}{F_8}\frac{C^2}{B^2}+2x\xi^3{}_{,z}+2\xi^3{}_{,z}\frac{C^2}{B^2}=0 \tag{5.10}$$

$$\xi^1+2\xi^0x\frac{\dot{A}}{A}+\xi^0x-x\xi^2{}_{,y}+2x\xi^1+x\xi^3{}_{,z}=0$$

$$x\left[\xi^0\left(\frac{2\dot{B}}{B}+\frac{\dot{F}_8}{F_8}\right)+2\xi^2{}_{,y}\right]-x\xi^2{}_{,y}+\xi^1+x\xi^3{}_{,z}=0$$

Bu denklem sisteminden bulunan CC vektör alanlar (5.9)'da verilenlerle aynıdır.

4.2.2. Madde Simetrileri

Genel şekli (5.1) ile verilen Bianchi Tip II uzay-zaman için T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -(F_6 + F_7 + F_8),\; T_{11} = A^2\left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_3}{C^2} + F_7\right)$$

$$T_{22} = B^2\left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_3}{C^2} + F_8\right),\; T_{23} = xT_{22} \tag{5.11}$$

$$T_{33} = C^2\left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_2}{B^2} + F_6\right) + x^2 T_{22}$$

şeklindedir. Burada; $F_i(t)$ fonksiyonları için (5.3)'de verilen tanımlar kullanılmıştır. Bianchi Tip II uzay-zaman için incelenebilecek tüm CC vektör alanı durumları için MC simetrileri aşağıda incelenmiştir.

Durum (a2): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_8 = 0,\; F_7 \neq 0.$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -F_7,\; T_{11} = A^2 F_7 \tag{5.12}$$

şeklindedir. Bu bileşenler ve (5.7) ile verilen vektör alanları (3.1) MC denkleminde kullanılırsa

$$\dot{f}_1(t)F_7 = 0\;,\; a_3 A^2 F_7 = 0\,,\; A^2 F_7 a_1 x = 0 \tag{5.13}$$

bulunur. Bu eşitliklerinden

$$f_1(t) = sbt = c_1 \;\text{ ve }\; a_1 = a_3 = 0 \tag{5.14}$$

elde edilir. Sonuç olarak; a_1 ve a_3 keyfi parametresinden ve $f_1(t)$ keyfi fonksiyonundan elde edilen vektör alanlarının CC vektör alanı olduğu halde MC vektör alanı olmadığı yorumu yapılabilir. Böylece CC vektör alanları dikkate alınarak elde edilen MC vektör alanları

$$\xi^0 = 0\,,\; \xi^1 = a_4\,,\; \xi^2 = a_4 z + a_6 + c_1\,,\; \xi^3 = a_5 \tag{5.15}$$

olur.

Durum (c2.i): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 0,\; F_6 \neq 0,\; F_7 \neq 0,\; F_8 \neq 0.$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -(F_6 + F_7 + F_8),\; T_{11} = A^2 F_7$$

$$T_{22} = B^2 F_8\,,\; T_{23} = xB^2 F_8 \tag{5.16}$$

$$T_{33} = C^2 F_6 + x^2 B^2 F_8$$

şeklindedir. Bu bileşenler ve (5.9) ile verilen vektör alanları (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla elde edilen denklemlerin tamamı özdeş olarak sıfıra eşittir. Buradan (c2.i) durumunda elde edilen tüm CC vektör alanlarının aynı zamanda MC vektör alanı oldukları anlamı çıkartılır.

Durum (c2.ii): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_7 = 0,\ F_6 \neq 0,\ F_8 \neq 0.$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -(F_6 + F_8),\ T_{22} = B^2 F_8,\ T_{23} = xB^2 F_8,\ T_{33} = C^2 F_6 + x^2 B^2 F_8 \tag{5.17}$$

şeklindedir. Bu bileşenler ve (5.9) ile verilen vektör alanlarının (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla durum (c2.i)'de olduğu gibi tamamı özdeş olarak sıfıra eşit denklemler elde edilir.

Bianchi Tip II uzay-zamanın yukarıda hesaplanan CC vektör alanları ve MC vektör alanları arasındaki ilişkiler aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.2. Bianchi tip II uzay-zamanın madde ve eğrilik simetrileri arasındaki ilişkiler

Durum	CC	CC sayısı	MC	MC sayısı
a2	(5.7)	∞	(5.15)	4
c2.i	(5.9)	2	5.9	2
c2.ii	(5.9)	2	5.9	2

4.3. Bianchi Tip I, III, V ve VI Uzay-Zamanlar

Bianchi tip I, III, V ve VI için uzay zaman metriği

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dx^2 + B^2 e^{-2qx} dy^2 + C^2 e^{-2hx} dz^2 \tag{5.18}$$

ile verilmektedir (Kramer ve ark., 1980). Burada $A = A(t),\ B = B(t),\ C = C(t)$ dir. Bu metrikte h=0 olması durumunda Bianchi tip III, h=1 olması halinde ise Bianchi tip V, h=q durumunda ise Bianchi tip I metrikleri elde edilebilmektedir. Burada en genel hal olan Bianchi tip VI incelenecektir. (5.18) metriğine ait R_{abcd} Riemann eğrilik tensör bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\begin{aligned} &R_{1212} = e^{-2qx} F_4(t),\ R_{1224} = e^{-2qx} F_5(t),\ R_{1313} = e^{-2hx} F_6(t) \\ &R_{1334} = e^{-2hx} F_7(t),\ R_{1414} = F_1(t), \\ &R_{2323} = e^{-2x(q+h)} F_8(t),\ R_{2424} = e^{-2qx} F_2(t),\ R_{3434} = e^{-2hx} F_3(t) \end{aligned} \tag{5.19}$$

Burada $F_1(t),...,F_8(t)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} &F_1(t) = -A\ddot{A},\ F_2(t) = -B\ddot{B},\ F_3(t) = -C\ddot{C},\ F_4(t) = A^2B^2\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{q^2}{A^2}\right), \\ &F_5(t) = qB^2\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right),\ F_6(t) = A^2C^2\left(\frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{h^2}{A^2}\right), \\ &F_7(t) = hC^2\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{C}}{C}\right),\ F_8(t) = B^2C^2\left(\frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{hq}{A^2}\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

olarak tanımlanmıştır. Bianchi Tip I, III, V ve VI için R_{abcd} Riemann eğrilik tensörünün 6×6 matris formu aşağıdaki gibidir:

$$R_{AB} = \begin{pmatrix} e^{-2qx}F_4(t) & 0 & 0 & 0 & e^{-2qx}F_5(t) & 0 \\ 0 & e^{-2hx}F_6(t) & 0 & 0 & 0 & e^{-2hx}F_7(t) \\ 0 & 0 & F_1(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2x(q+h)}F_8(t) & 0 & 0 \\ e^{-2qx}F_5(t) & 0 & 0 & 0 & e^{-2qx}F_2(t) & 0 \\ 0 & e^{-2hx}F_7(t) & 0 & 0 & 0 & e^{-2hx}F_3(t) \end{pmatrix}$$

R_{abcd} Riemann eğrilik tensörünün 6×6 matris formundaki rankının üç'den küçük olabildiği durumlar aşağıdaki çizelgede verilmektedir.

Çizelge 5.3. Bianchi Tip VI uzay-zaman için eğrilik rankının üç ve üç'den küçük olabildiği durumlar

rank=1	a1	$F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0$
	a2	$F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0$
	a3	$F_1 \neq 0$
	a4	$F_8 \neq 0$
	a5	$F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0$
	a6	$F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0$
rank=2	b1	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0)$
	b2	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge F_1 \neq 0$
	b3	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge F_8 \neq 0$
	b4	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$
	b5	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	b6	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge F_1 \neq 0$
	b7	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge F_8 \neq 0$
	b8	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$
	b9	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	b10	$F_1 \neq 0 \wedge F_8 \neq 0$
	b11	$F_1 \neq 0 \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$
	b12	$F_1 \neq 0 \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	b13	$F_8 \neq 0 \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$
	b14	$F_8 \neq 0 \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	b15	$(F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
Rank=3	c1	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge F_1 \neq 0$
	c2	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge F_8 \neq 0$
	c3	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$
	c4	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	c5	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge F_1 \neq 0 \wedge F_8 \neq 0$
	c6	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge F_1 \neq 0 \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$

	c7	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge F_1 \neq 0 \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	c8	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge F_8 \neq 0 \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$
	c9	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge F_8 \neq 0 \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	c10	$(F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	c11	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge F_1 \neq 0 \wedge F_8 \neq 0$
	c12	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge F_1 \neq 0 \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$
	c13	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge F_1 \neq 0 \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	c14	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge F_8 \neq 0 \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$
	c15	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge F_8 \neq 0 \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	c16	$(F_6 \neq 0 \vee F_7 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	c17	$F_1 \neq 0 \wedge F_8 \neq 0 \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0)$
	c18	$F_1 \neq 0 \wedge F_8 \neq 0 \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	c19	$F_1 \neq 0 \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$
	c20	$F_8 \neq 0 \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_2 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_3 \neq 0)$

Yukarıdaki durumlarda $F_i(t)\,(i=1,...,8)$ değerleri göz önüne alındığında matrisinin rankının 1 olduğu *iki*, rankın 2 olduğu *altı* ve 3 olduğu *sekiz* durum mümkündür:

(a1) Rank=1: $F_4 \neq 0$

(a2) Rank=1: $F_3 \neq 0,\; F_6 \neq 0,\; F_7 \neq 0$

(b1) Rank=2 : $F_4 \neq 0,\; F_6 \neq 0$

(b2) Rank=2 : $F_4 \neq 0,\; F_5 \neq 0$

(b3) Rank=2 : $F_6 \neq 0,\; F_8 \neq 0$

(b4) Rank=2 : $F_4 \neq 0,\; F_8 \neq 0$

(b5) Rank=2 : $F_2 \neq 0,\; F_4 \neq 0,\; F_5 \neq 0,\; F_8 \neq 0$ ve $\dfrac{F_4}{F_5} = \dfrac{F_5}{F_2}$

(b6) Rank=2 : $F_3 \neq 0,\; F_6 \neq 0,\; F_7 \neq 0,\; F_8 \neq 0$ ve $\dfrac{F_6}{F_7} = \dfrac{F_7}{F_3}$

(c1) Rank=3 : $F_4 \neq 0,\; F_6 \neq 0,\; F_8 \neq 0$

(c2) Rank=3 : $F_2 \neq 0,\; F_4 \neq 0,\; F_5 \neq 0,\; F_6 \neq 0$

(c3) Rank=3 : $F_3 \neq 0,\; F_4 \neq 0,\; F_6 \neq 0,\; F_7 \neq 0$

(c4) Rank=3 : $F_1 \neq 0,\; F_4 \neq 0,\; F_5 \neq 0$

(c5) Rank=3 : $F_2 \neq 0,\ F_4 \neq 0,\ F_5 \neq 0,\ F_8 \neq 0$ ve $\dfrac{F_4}{F_5} \neq \dfrac{F_5}{F_2}$

(c6) Rank=3 : $F_2 \neq 0,\ F_5 \neq 0,\ F_8 \neq 0$

(c7) Rank=3 : $F_3 \neq 0,\ F_6 \neq 0,\ F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0$ ve $\dfrac{F_6}{F_7} \neq \dfrac{F_7}{F_3}$

(c8) Rank=3 : $F_3 \neq 0,\ F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0$

4.3.1. Eğrilik Simetrileri

Bu bölümde; yukarıda verilen eğrilik rankı durumlarına göre Bianchi 1,3,5 ve 6 uzay-zamanların CC denklemleri belirlenip çözümleri bulunmaya çalışılacaktır.

Durum (a1): $F_1 = F_2 = F_3 = F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = 0,\ F_4 \neq 0$

Bu durumda (3.7) denkleminden elde edilen CC denklemleri aşağıdaki üç denkleme indirgenir:

$$\xi^0 = \xi^0(t)\,,\ \xi^1 = \xi^1(x)\,,\ \xi^2 = \xi^2(y)\,,\quad \xi^3 = \xi^3(z,t)$$

$$2qF_4\xi^1 - F_4'\xi^0 - 2F_4\xi^2_{,y} = 0\,, \tag{5.22}$$

$$\xi^1_{,x} - \xi^0_{,t} = 0\,,\ F_4'\xi^0 + 2F_4\xi^1_{,x} = 0$$

Bu denklem sisteminin çözümü

$$\xi^0 = 0\,,\ \xi^1 = a_1\,,\ \xi^2 = a_1 qy + a_2\,,\ \xi^3 = \xi^3(z,t) \tag{5.23}$$

şeklinde bulunur.

Durum (a2): $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F_8 = 0,\ F_3 \neq 0,\ F_6 \neq 0,\ F_7 \neq 0$

Bu durumda (3.7) denkleminden elde edilen CC denklemleri aşağıdaki beş denkleme indirgenir:

$$\left(\frac{F_7'}{F_7} - \frac{F_6'}{F_6}\right)\xi^0 = 0\,,\ \left(\frac{F_3'}{F_3} - \frac{F_6'}{F_6}\right)\xi^0 = 0 \tag{5.24}$$

$$\xi^1_{,x} - \xi^0_{,t} = 0\,,\ \frac{F_6'}{F_6}\xi^0 + 2\xi^1_{,x} = 0\,,\ 2h\xi^1 - \frac{F_6'}{F_6}\xi^0 - 2\xi^3_{,z} = 0$$

Bu denklem sisteminin çözümü:

$$\xi^0 = 0\,,\ \xi^1 = a_1\,,\ \xi^2 = \xi^2(y)\,,\ \xi^3 = a_1 hz + a_2 \tag{5.25}$$

olarak bulunur.

Durum (b1): $F_1 = F_2 = F_3 = F_5 = F_7 = F_8 = 0,\ F_4 \neq 0,\ F_6 \neq 0$

Bu durumda (3.7) denkleminden elde edilen CC denklemleri aşağıdaki beş denkleme indirgenir:

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(x),\ \xi^2 = \xi^2(y),\quad \xi^3 = \xi^3(z)$$

$$2qF_4\xi^1 - F_4'\xi^0 - 2F_4\xi^2_{,y} = 0$$

$$\xi^1_{,x} - \xi^0_{,t} = 0,\ 2hF_6\xi^1 - F_6'\xi^0 - 2F_6\xi^3_{,z} = 0 \tag{5.26}$$

$$F_4'\xi^0 + 2F_4\xi^1_{,x} = 0,\ F_6'\xi^0 + 2F_6\xi^1_{,x} = 0$$

Bu denklem sisteminin çözümü $a_4 - a_5 = (q-h)a_2$ olmak üzere

(i) $q \neq h$ için

$$\xi^0 = a_1,\ \xi^1 = a_2,\ \xi^2 = a_3 y + a_4,\ \xi^3 = a_5 z + a_6 \tag{5.27}$$

(ii) $q = h$ için

$$\xi^0 = a_1 t + a_3,\ \xi^1 = a_1 x + a_2,\qquad \xi^2 = a_4 y + a_5,\ \xi^3 = a_4 z + a_6 \tag{5.28}$$

şeklinde bulunur.

Durum (b2): $F_1 = F_2 = F_3 = F_6 = F_7 = F_8 = 0,\ F_4 \neq 0,\ F_5 \neq 0.$

Bu durumda (3.7) denkleminden elde edilen CC denklemleri aşağıdaki beş denkleme indirgenir:

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(x),\ \xi^2 = \xi^2(y),\quad \xi^3 = \xi^3(z)$$

$$q\xi^1 - \frac{F_4'}{2F_4}\xi^0 - \xi^2_{,y} = 0,\ \xi^1_{,x} - \xi^0_{,t} = 0$$

$$\frac{F_4'}{F_4}\xi^0 + 2\xi^1_{,x} = 0\quad \frac{F_5'}{F_5}\xi^0 + \xi^1_{,x} + \xi^0_{,t} = 0\quad 2q\xi^1 - \frac{F_5'}{F_5}\xi^0 + \xi^0_{,t} - 2\xi^2_{,y} - \xi^1_{,x} = 0 \tag{5.29}$$

Bu denklem sisteminin çözümü:

$$\xi^0 = 0,\ \xi^1 = a_1,\ \xi^2 = a_1 q y + a_2,\ \xi^3 = \xi^3(z) \tag{5.30}$$

şeklinde bulunur.

Durum (b3): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_7 = 0,\ F_6 \neq 0,\ F_8 \neq 0$

Bu durumda (3.7) denkleminden elde edilen CC denklemleri aşağıdaki yedi denkleme indirgenir:

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(x,y),\qquad \xi^2 = \xi^2(x,y),\ \xi^3 = \xi^3(z)$$

$$\frac{F_6'}{2F_6}\xi^0 + \xi^3_{,z} - h\xi^1 = 0\,,\ (A^2F_8 - B^2F_6)\xi^1_{,y} = 0\,,$$

$$(A^2F_8 - B^2F_6)\xi^2_{,x} = 0\,,\ \frac{F_8'}{2F_8}\xi^0 + \xi^3_{,z} - h\xi^1 = 0\,, \tag{5.31}$$

$$\frac{F_6'}{2F_6}\xi^0 + \xi^1_{,x} = 0\,,\ F_8\xi^2_{,x} + F_6e^{2qx}\xi^1_{,y} = 0\,,$$

$$\frac{F_8'}{2F_8}\xi^0 + \xi^2_{,y} - q\xi^1 = 0$$

Bu denklem sisteminin çözümü:

$$\xi^0 = 0\,,\ \xi^1 = a_1\,,\ \xi^2 = a_1qy + a_2\,,\ \ \xi^3 = a_1hz + a_3 \tag{5.32}$$

şeklinde bulunur.

Durum (c5): $F_1 = F_3 = F_6 = F_7 = 0, F_2 \neq 0,\ F_4 \neq 0,\ F_5 \neq 0,\ F_8 \neq 0$ ve $\dfrac{F_4}{F_5} \neq \dfrac{F_5}{F_2}$

Bu durumda (3.7) denkleminden elde edilen CC denklemleri (b5) durumdakilerden $\dfrac{F_4}{F_5} \neq \dfrac{F_5}{F_2}$ farkıyla aynıdır. Bu denklem sisteminin çözümü:

$F_4 \neq F_5$ iken (b3) durumuyla aynı çözüme sahiptir.

$F_4 = F_5$ iken $F_8 = a_6$ ve $a_1(2q - h) + a_3q = 0$ kısıtlama denklemleri altında

$$\xi^0 = 0\,,\ \xi^1 = \frac{a_1 + a_3}{h - q}\,,\ \xi^2 = a_1y + a_2\,,\ \ \xi^3 = a_3z + a_4 \tag{5.33}$$

şeklinde bulunur.

Çizelge 5.4. Bianchi Tip I, III, V, VI uzay-zamanlar için CC vektör alanları diğer durumlara eşit olan durumlar

Durum	**b4**	**b5**	**b6**	**c1**
Kısıtlama Denklemleri	$F_4 \neq 0,\ F_8 \neq 0$	$F_2 \neq 0,\ F_4 \neq 0,$ $F_5 \neq 0,\ F_8 \neq 0,$ $\frac{F_4}{F_5} = \frac{F_5}{F_2}$	$F_3 \neq 0,\ F_6 \neq 0,$ $F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0,$ $\frac{F_6}{F_7} = \frac{F_7}{F_3}$	$F_4 \neq 0,\ F_6 \neq 0,$ $F_8 \neq 0$
CC	b3 durumu ile aynı	b3 durumu ile aynı	b3 durumu ile aynı	b3 durumu ile aynı
Durum	**c2**	**c3**	**c4**	**c6**
Kısıtlama Denklemleri	$F_2 \neq 0,\ F_4 \neq 0,$ $F_5 \neq 0,\ F_6 \neq 0$	$F_3 \neq 0,\ F_4 \neq 0,$ $F_6 \neq 0,\ F_7 \neq 0$	$F_1 \neq 0,\ F_4 \neq 0,$ $F_5 \neq 0$	$F_2 \neq 0,\ F_5 \neq 0,$ $F_8 \neq 0$
CC	b3 durumu ile aynı	b3 durumu ile aynı	b2 durumu ile aynı	b3 durumu ile aynı
Durum	**c7**	**c8**		
Kısıtlama Denklemleri	$F_3 \neq 0,\ F_6 \neq 0,$ $F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0$ $\frac{F_6}{F_7} \neq \frac{F_7}{F_3}$	$F_3 \neq 0,\ F_7 \neq 0,$ $F_8 \neq 0$		
CC	b3 durumu ile aynı	b3 durumu ile aynı		

4.3.2. Madde Simetrileri

Bu bölümde (5.2.1) bölümünde elde edilen CC vektör alanlarının MC vektör alanı olup olmadıkları incelenmiştir.

Genel şekli (5.12) ile verilen Bianchi Tip I,III,V ve VI uzay-zamanlar için T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(\frac{F_4}{A^2B^2} + \frac{F_5}{A^2C^2} + \frac{F_6}{B^2C^2} \right),\ T_{11} = A^2\left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_3}{C^2} + \frac{F_6}{B^2C^2} \right)$$

$$T_{22} = e^{-2qx}B^2\left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_2}{B^2} + \frac{F_5}{A^2C^2} \right),\ T_{01} = \frac{F_7}{B^2} + \frac{F_8}{C^2} \tag{5.33}$$

$$T_{33} = e^{2hx}C^2\left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_2}{B^2} + \frac{F_4}{A^2B^2} \right)$$

olarak bulunmaktadır. Burada; $F_i(t)$, $(i = 1,...,8)$ fonksiyonları için (5.19)'da verilen tanımlar kullanılmıştır.

Durum (a1): $F_1 = F_2 = F_3 = F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = 0,\ F_4 \neq 0$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\frac{F_4}{A^2B^2},\ T_{33} = e^{2hx}\frac{C^2}{A^2B^2}F_4 \tag{5.34}$$

olur. (5.22) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

$$ha_1 - f_{,z} = 0,\quad f_{,t} = 0 \tag{5.35}$$

bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü;

$$f(z,t) = a_1hz + a_3 \tag{5.36}$$

şeklindedir. Böylece CC vektör alanları dikkate alınarak elde edilen MC vektör alanları

$$\xi^0 = 0,\ \xi^1 = a_1,\ \xi^2 = a_1qy + a_2,\ \xi^3 = a_1hz + a_3 \tag{5.37}$$

olur.

Durum (a2): $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F_8 = 0,\ F_3 \neq 0,\ F_6 \neq 0,\ F_7 \neq 0$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\frac{F_6}{B^2C^2},\ T_{01} = \frac{F_7}{B^2},\ T_{11} = A^2\left(\frac{F_3}{C^2} + \frac{F_6}{B^2C^2} \right) \tag{5.38}$$

olarak bulunur. (5.25) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla elde edilen denklemlerin tamamı özdeş olarak sıfıra eşittir. Buradan (a2) durumunda elde edilen tüm CC vektör alanlarının aynı zamanda MC vektör alanı oldukları anlamı elde edilir.

Durum (b1): $F_1 = F_2 = F_3 = F_5 = F_7 = F_8 = 0,\ F_4 \neq 0,\ F_6 \neq 0$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(\frac{F_4}{A^2B^2} + \frac{F_6}{B^2C^2}\right),\ T_{11} = A^2\frac{F_6}{B^2C^2},\ T_{33} = e^{2hx}C^2\frac{F_4}{A^2B^2} \tag{5.39}$$

olarak bulunur. (5.26) ve (5.27) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla sırasıyla

(i) $q \neq h$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_6}{2F_6} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C}\right)a_1 = 0 \\
&\left(\frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{F}_4}{2F_4} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A}\right)a_1 - a_5 = 0 \\
&\left(\frac{F_4}{A^2}\left(-\frac{\dot{F}_4}{2F_4} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{A}}{A}\right) + \frac{F_6}{C^2}\left(-\frac{\dot{F}_6}{2F_6} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\right)a_1 = 0
\end{aligned} \tag{5.40}$$

(ii) $q = h$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_6}{2F_6} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C}\right)(a_1t + a_3) + a_1 = 0 \\
&\left(\frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{F}_4}{2F_4} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A}\right)(a_1t + a_3) + a_4 + h(a_1x + a_2) = 0 \\
&\left(\frac{F_4}{A^2}\left(-\frac{\dot{F}_4}{2F_4} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{A}}{A}\right) + \frac{F_6}{C^2}\left(-\frac{\dot{F}_6}{2F_6} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\right)(a_1t + a_3) - \left(\frac{F_4}{A^2} + \frac{F_6}{C^2}\right)a_1 = 0
\end{aligned} \tag{5.41}$$

elde edilir. (i) durumu için

$$a_1 = a_5 = 0 \tag{5.42}$$

(ii) durumu için

$$a_1 = a_3 = 0,\ a_4 + ha_2 = 0 \tag{5.43}$$

elde edilir. Böylece CC vektör alanları dikkate alınarak elde edilen MC vektör alanları (i) durumu için

$$\xi^0 = 0,\ \xi^1 = a_1,\ \xi^2 = a_1qy + a_2,\ \xi^3 = a_1hz + a_3 \tag{5.44}$$

(ii) durumu için

$$\xi^0 = 0,\ \xi^1 = a_2,\ \xi^2 = -ha_2y + a_5,\ \xi^3 = -ha_2z + a_6 \tag{5.45}$$

olur.

Durum (b2): $F_1 = F_2 = F_3 = F_6 = F_7 = F_8 = 0,\ F_4 \neq 0,\ F_5 \neq 0.$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(\frac{F_4}{A^2B^2} + \frac{F_5}{A^2C^2}\right),\ T_{22} = e^{-2qx}B^2\frac{F_5}{A^2C^2}\ ,\ T_{33} = e^{2hx}C^2\frac{F_4}{A^2B^2} \tag{5.46}$$

olarak bulunur. (5.30) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

$$ha_1 + f_{,z} = 0 \tag{5.47}$$

bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü ile

$$f(z) = -ha_1 z + a_3 \tag{5.48}$$

elde edilir. Böylece CC vektör alanları dikkate alınarak elde edilen MC vektör alanları

$$\xi^0 = 0\ ,\ \xi^1 = a_1,\ \xi^2 = a_1 qy + a_2\ ,\ \xi^3 = -a_1 hz + a_3 \tag{5.49}$$

olur.

Durum (b3): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_7 = 0,\ F_6 \neq 0,\ F_8 \neq 0$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\frac{F_6}{B^2C^2}\ ,\ T_{11} = A^2\frac{F_6}{B^2C^2}\ ,\ T_{01} = \frac{F_8}{C^2} \tag{5.50}$$

olarak bulunur. (5.32) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla elde edilen denklemlerin tamamı özdeş olarak sıfıra eşittir. Buradan (b3) durumunda elde edilen tüm CC vektör alanlarının aynı zamanda MC vektör alanı oldukları anlamı elde edilir.

Durum (b5): $F_1 = F_3 = F_6 = F_7 = 0,\ F_2 \neq 0,\ F_4 \neq 0,\ F_5 \neq 0,\ F_8 \neq 0$ ve $\dfrac{F_4}{F_5} = \dfrac{F_5}{F_2}$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(\frac{F_4}{A^2B^2} + \frac{F_5}{A^2C^2}\right),\ T_{11} = A^2\left(\frac{F_2}{B^2}\right),\ T_{01} = \frac{F_8}{C^2}$$

$$T_{22} = e^{-2qx}B^2\left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_5}{A^2C^2}\right),\ T_{33} = e^{2hx}C^2\left(\frac{F_4}{A^2B^2}\right) \tag{5.51}$$

olarak bulunur. (5.29) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

$$ha_1 = 0 \tag{5.52}$$

elde edilir. Böylece CC vektör alanları dikkate alınarak elde edilen MC vektör alanları

$$\xi^0 = 0 \, , \; \xi^1 = 0 \, , \; \xi^2 = a_2 \, , \; \xi^3 = a_3 \tag{5.53}$$

olur.

Durum (c2): $F_1 = F_3 = F_7 = F_8 = 0,\; F_2 \neq 0,\; F_4 \neq 0,\; F_5 \neq 0,\; F_6 \neq 0.$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(\frac{F_4}{A^2 B^2} + \frac{F_5}{A^2 C^2} + \frac{F_6}{B^2 C^2} \right),\; T_{11} = A^2 \left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_6}{B^2 C^2} \right)$$

$$T_{22} = e^{-2qx} B^2 \left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_5}{A^2 C^2} \right),\; T_{33} = e^{2hx} C^2 \left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_4}{A^2 B^2} \right) \tag{5.54}$$

olarak bulunur. Çizelge 5.4'de verilen CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

$$\left(F_2 + \frac{F_4}{A^2} \right) a_1 h = 0 \tag{5.55}$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$a_1 = 0 \tag{5.56a}$$

veya

$$F_4 = -A^2 F_2 \Leftrightarrow \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{q^2}{A^2} = 0 \tag{5.56b}$$

olmalıdır. $a_1 = 0$ iken ele alınan CC vektör alanlarından sadece 2 tanesi MC vektör alanı olabilir. $h = 0$ olması durumunda ise Bianchi tip III uzay-zaman elde edilmiş olur.

Durum (c4): $F_2 = F_3 = F_6 = F_7 = F_8 = 0,\; F_1 \neq 0,\; F_4 \neq 0,\; F_5 \neq 0$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(\frac{F_4}{A^2 B^2} + \frac{F_5}{A^2 C^2} \right),\; T_{22} = e^{-2qx} B^2 \left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_5}{A^2 C^2} \right),\; T_{33} = e^{2hx} C^2 \left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_4}{A^2 B^2} \right) \tag{5.57}$$

olarak bulunur. Çizelge 5.4'de verilen CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

$$\left(F_1 + \frac{F_4}{B^2} \right) (ha_1 + f_{,z}) = 0 \tag{5.58}$$

bulunur. Buradan

$$f = -a_1 hz + a_3 \tag{5.59}$$

veya

$$F_4 = -B^2 F_1 \Leftrightarrow \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{q^2}{A^2} = 0 \tag{5.60}$$

sonuçları elde edilir. Böylece CC vektör alanları dikkate alınarak elde edilen MC vektör alanları ilk şart için (5.49) ile aynı olurken ikinci kısıtlama denkleminin çözülebilmesi durumunda yeni MC vektör alanları bulunabilir.

Durum (c5): $F_1 = F_3 = F_6 = F_7 = 0, F_2 \neq 0,\ F_4 \neq 0,\ F_5 \neq 0,\ F_8 \neq 0$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(\frac{F_4}{A^2B^2} + \frac{F_5}{A^2C^2}\right),\ T_{11} = A^2\frac{F_2}{B^2},\ T_{01} = \frac{F_8}{C^2}$$

$$T_{22} = e^{-2qx}B^2\left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_5}{A^2C^2}\right),\ T_{33} = e^{2hx}C^2\left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_4}{A^2B^2}\right) \tag{5.61}$$

olarak bulunur. (5.33) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

$F_4 \neq F_5$ iken (c2)'deki (5.55) kısıtlama denklemi elde edilir.

$F_4 = F_5$ iken ise

$$\left(F_2 + \frac{F_4}{A^2}\right)a_3 = 0 \tag{5.62}$$

denklemi ve buradan da

$$a_3 = 0 \text{ veya } F_4 = -A^2F_2 \Leftrightarrow \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{q^2}{A^2} = 0,\ A\dot{A}\frac{\dot{B}}{B} = q^2 + q\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right) \tag{5.63}$$

kısıtlama denklemleri elde edilir.

Çizelge 5.5. Bianchi Tip I, III, V, VI uzay-zamanlar için MC vektör alanları diğer durumlardan dönüşüm yoluyla elde edilebilen durumlar

Durum	**b4**	**b6**	**c1**
T_{ab}	$T_{00}=-\frac{F_4}{A^2B^2}$, $T_{01}=\frac{F_8}{C^2}$, $T_{33}=e^{2hx}C^2\frac{F_4}{A^2B^2}$	$T_{00}=-\frac{F_6}{B^2C^2}$ $T_{11}=A^2\left(\frac{F_3}{C^2}+\frac{F_6}{B^2C^2}\right)$ $T_{01}=\frac{F_7}{B^2}+\frac{F_8}{C^2}$	$T_{00}=-\left(\frac{F_4}{A^2B^2}+\frac{F_6}{B^2C^2}\right)$ $T_{11}=A^2\frac{F_6}{B^2C^2}$ $T_{01}=\frac{F_8}{C^2}$ $T_{33}=e^{2hx}C^2\frac{F_4}{A^2B^2}$
MC	b3 durumu ile aynı	b3 durumu ile aynı	b5 durumu ile aynı
Durum	**c3**	**c6**	**c7**
T_{ab}	$T_{00}=-\left(\frac{F_4}{A^2B^2}+\frac{F_6}{B^2C^2}\right)$ $T_{11}=A^2\left(\frac{F_3}{C^2}+\frac{F_6}{B^2C^2}\right)$ $T_{01}=\frac{F_7}{B^2}$ $T_{33}=e^{2hx}C^2\frac{F_4}{A^2B^2}$	$T_{00}=-\frac{F_5}{A^2C^2}$ $T_{11}=A^2\frac{F_2}{B^2}$ $T_{01}=\frac{F_8}{C^2}$ $T_{22}=e^{-2qx}B^2\left(\frac{F_2}{B^2}+\frac{F_5}{A^2C^2}\right)$ $T_{33}=e^{2hx}C^2\frac{F_2}{B^2}$	$T_{00}=-\frac{F_6}{B^2C^2}$ $T_{11}=A^2\left(\frac{F_3}{C^2}+\frac{F_6}{B^2C^2}\right)$ $T_{01}=\frac{F_7}{B^2}+\frac{F_8}{C^2}$
MC	b5 durumu ile aynı	b5 durumu ile aynı	b3 durumu ile aynı
Durum	**c8**		
T_{ab}	$T_{11}=A^2\frac{F_3}{C^2}$ $T_{01}=\frac{F_7}{B^2}+\frac{F_8}{C^2}$		
MC	b3 durumu ile aynı		

Bianchi Tip I, III, V, VI uzay-zamanlarının yukarıda hesaplanan CC vektör alanları ve MC vektör alanları arasındaki ilişkiler Çizelge 5.6'da verilmiştir.

Çizelge 5.6. Bianchi tip VI uzay-zamanın madde ve eğrilik simetrileri arasındaki ilişkiler

Durum	**CC**	**CC sayısı**	**MC**	**MC sayısı**
a1	(5.23)	∞	(5.37)	3
a2	(5.25)	∞	(5.25)	∞
b1	(5.27) – (5.28)	6	(5.44) – (5.45)	3 - 4
b2	(5.30)	∞	(5.49)	3
b3	(5.32)	3	(5.32)	3
b4	(5.32)	3	(5.32)	3
b5	(5.32)	3	(5.53)	2
b6	(5.32)	3	(5.32)	3
c1	(5.32)	3	(5.32)	3
c2	(5.32)	3	(5.56)	2 – 3
c3	(5.32)	3	(5.53)	2
c4	(5.30)	∞	(5.59)	3
c5	(5.33)	4	(5.63)	3
c6	(5.32)	4	(5.53)	2
c7	(5.32)	4	(5.32)	3
c8	(5.32)	4	(5.32)	3

4.4. Bianchi Tip IV Uzay-Zaman

Bianchi tip IV için uzay zaman metriği

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dx^2 + B^2 e^{2x} dy^2 + C^2 e^{2x} (xdy + dz)^2 \qquad (5.64)$$

ile verilmektedir (Kramer ve ark., 1980). Bu metriğe ait R_{abcd} Rieman eğrilik tensör bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$R_{1212} = \frac{e^{2x}}{4} F_7 ,\ R_{1213} = -\frac{e^{2x}}{4}(xF_7 - 4B^2) ,\ R_{1224} = e^{2x} F_4$$

$$R_{1234} = -\frac{e^{2x}}{2}(2x+1)F_4 ,\ R_{1313} = \frac{e^{2x}}{4}(x^2 F_7 - F_9 - 8xB^2)$$

$$R_{1324} = \frac{e^{2x}}{2}(F_4(2x+1) - F_5) ,\ R_{1334} = \frac{e^{2x}}{2}\left(2F_6 - xF_5 + 2x(x-1)F_4\right) \qquad (5.65)$$

$$R_{1414} = -F_1 ,\ R_{1423} = \frac{e^{2x}}{2} F_5 ,\ R_{2323} = \frac{e^{4x}}{4} F_8 ,\ R_{2424} = -e^{2x} F_2$$

$$R_{2434} = xe^{2x} F_2 ,\ R_{3434} = -e^{2x}(F_3 + x^2 F_2)$$

Burada $F_1(t),...,F_8(t)$ fonksiyonları

$$F_1 = A\ddot{A} ,\ F_2 = B\ddot{B} ,\ F_3 = C\ddot{C}$$

$$F_4 = \frac{B}{A}\left(\dot{B}A - \dot{A}B\right),\ F_5 = \frac{B}{C}\left(B\dot{C} - C\dot{B}\right),\ F_6 = \frac{C}{A}\left(A\dot{C} - C\dot{A}\right)$$

$$F_7 = 4A^2B^2\left(-\frac{1}{A^2} + \frac{B^2}{4A^2C^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}\right) \qquad (5.66)$$

$$F_8 = 4C^2B^2\left(-\frac{1}{A^2} + \frac{B^2}{4A^2C^2} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC}\right)$$

$$F_9 = 4A^2C^2\left(\frac{1}{A^2} + \frac{3B^2}{4A^2C^2} - \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC}\right)$$

olarak tanımlanmıştır.

Bianchi Tip IV için R_{abcd} Riemann eğrilik tensörünün 6×6 matris formu aşağıdaki gibidir:

$$R_{AB} = \begin{pmatrix} F_7 & xF_7 - 4B^2 & 0 & 0 & F_4 & F_4 \\ xF_7 - 4B^2 & x^2F_7 - F_9 - 8xB^2 & 0 & 0 & F_4(2x+1) - F_5 & 2F_6 - xF_5 + 2x(x-1)F_4 \\ 0 & 0 & F_1 & F_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_5 & F_8 & 0 & 0 \\ F_4 & F_4(2x+1) - F_5 & 0 & 0 & F_2 & F_2 \\ F_4 & 2F_6 - xF_5 + 2x(x-1)F_4 & 0 & 0 & F_2 & F_3 + x^2F_2 \end{pmatrix}$$

Çizelge 5.7. Bianchi Tip IV uzay-zamanı için eğrilik rankının üç ve üç'den küçük olabildiği durumlar

rank=2	a1	$F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F_8=0 \wedge F_7 \neq 0 \wedge F_9 \neq 0$
	a2	$F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F_7=F_8=0 \wedge F_9 \neq 0$
	a3	$F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F_8=F_9=0 \wedge F_7 \neq 0$
	a4	$F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F_7=F_8=F_9=0$
rank=3	b1	$(F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F_8=0)$
	b2	$(F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=0)$
	b3	$(F_1 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge F_1F_8 = F_5F_5$
	b4	$F_2 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=0)$
	b5	$F_2 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_6 \neq 0 \wedge$ $(F_1=F_2=F_4=F_5=F_8=0)$

Yukarıdaki durumlarda F değerleri göz önüne alındığında matrisinin rankının rankın 2 olduğu *iki* ve 3 olduğu *iki* durum mümkündür:

(a2) Rank=2: $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F_7=F_8=0;\ F_9 \neq 0,$

(a4) Rank=2: $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F_7=F_8=F_9=0,$

(b1) Rank=2: $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F_9=0; F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0,$

(b2) Rank=3: $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=0; F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0,\ F_9 \neq 0.$

4.4.1. Eğrilik Simetrileri

Bu bölümde; yukarıda verilen eğrilik rankı durumlarına göre Bianchi tip IV uzay-zamanının CC denklemleri belirlenip çözümleri bulunmaya çalışılacaktır.

Durum (a2): $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F_7=F_8=0; F_9 \neq 0.$

Bu durumda CC denklemleri aşağıdaki dört denkleme indirgenir:

$$
\begin{aligned}
&2\xi^1 + \xi^2_{,y} + \xi^3_{,z} = 0 \\
&\xi^1 + 2x\xi^1_{,x} = 0 \\
&-4\xi^1 - 8x\xi^1 + 5A^2\xi^2_{,z} - 8x\xi^3_{,z} = 0 \qquad (5.67) \\
&-x\xi^1 + \frac{C^2}{B^2}(2\xi^1_{,x} - \xi^2_{,y} + \xi^3_{,z}) + (x + x^2)(\xi^2_{,y} - \xi^3_{,z}) + 2x\xi^2_{,z} = 0
\end{aligned}
$$

Bu denklem sisteminin çözümünden CC vektör alanları

$$\vec{\xi}_{(1)} = \partial_y, \ \vec{\xi}_{(2)} = \partial_z, \ \vec{\xi}_{(3)} = f_1(t)\partial_t \tag{5.68}$$

şeklinde bulunur. Burada; $f_1(t)$, t'ye bağlı keyfi fonksiyondur. Lie Cebrine ait tüm komütatörler sıfırdır.

Durum (a4): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 = 0$.

Bu durumda CC denklemleri aşağıdaki beş denkleme indirgenir:

$$\begin{aligned}
&2\xi^1 + \xi^2_{,y} + \xi^3_{,z} = 0 \\
&\xi^1 + 2x\xi^1_{,x} = 0 \\
&4B^2\xi^1 + F_9'\xi^0 + 2F_9\xi^1_{,x} + 8xB^2\xi^1_{,x} = 0 \\
&(16x + 2F_9B^2 + 8)\xi^1 + B^2F_9'\xi^0 - 10A^2\xi^2_{,z} + (16x + 2F_9B^2)\xi^3_{,z} = 0 \\
&x\xi^1 - (x + x^2)(\xi^3_{,z} - \xi^2_{,y}) + \frac{C^2}{B^2}(\xi^2_{,y} - 2\xi^1_{,x} - \xi^3_{,z}) - (2x + \frac{F_9}{4B^2})\xi^2_{,z} = 0
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden CC vektör alanları

$$\vec{\xi}_{(1)} = \partial_y, \ \vec{\xi}_{(2)} = \partial_z \tag{5.70}$$

şeklinde bulunur.

Durum (b1): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_9 = 0; F_7 \neq 0, \ F_8 \neq 0$.

Bu durumda elde edilen CC vektör alanları (5.70) ile aynıdır.

Durum (b2): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = 0, F_7 \neq 0; \ F_8 \neq 0, \ F_9 \neq 0$.

Bu durumda elde edilen CC vektör alanları (5.70) ile aynıdır.

4.4.2. Madde Simetrileri

Genel şekli (5.64) ile verilen Bianchi Tip IV uzay-zaman için T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$\begin{aligned}
&T_{00} = -\frac{1}{4}\left(\frac{F_7}{A^2C^2} + \frac{F_8}{B^2C^2} + \frac{F_9}{A^2B^2}\right), \ T_{11} = A^2\left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_3}{C^2} + \frac{F_8}{4B^2C^2}\right) \\
&T_{01} = \frac{F_4}{C^2} - \frac{F_6}{B^2}, \ T_{22} = e^{2x}B^2\left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_3}{C^2} + \frac{F_7}{4A^2C^2} + x\frac{C^2}{A^2B^2}\right) + xT_{23} \\
&T_{23} = xT_{33} + e^{2x}\frac{C^2}{A^2}, \ T_{33} = e^{2x}C^2\left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_2}{B^2} + \frac{F_9}{4A^2B^2}\right)
\end{aligned} \tag{5.71}$$

şeklindedir. Burada; $F_1(t),...,F_8(t)$ fonksiyonları için (5.66)'da verilen tanımlar kullanılmıştır. Aşağıda Bianchi tip IV uzay-zamanı için önceki bölümde elde edilen CC vektör alanlarının MC vektör alanı olabilmesi koşulları incelenmiştir.

Durum (a2): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = 0; F_9 \neq 0.$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\frac{1}{4}\frac{F_9}{A^2B^2},\; T_{22} = e^{2x}x\frac{C^2}{A^2} + x\left(xe^{2x}C^2 \frac{F_9}{4A^2B^2} + e^{2x}\frac{C^2}{A^2}\right)$$

$$T_{23} = xe^{2x}C^2 \frac{F_9}{4A^2B^2} + e^{2x}\frac{C^2}{A^2},\; T_{33} = e^{2x}C^2\frac{F_9}{4A^2B^2} \tag{5.72}$$

olarak bulunur. (5.68) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

$$\left(-\frac{\dot{F}_9}{2F_9} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right) f_1 = -\dot{f}_1 \tag{5.73a}$$

$$\left(\frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{F}_9}{2F_9} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right) f_1 = 0 \tag{5.73b}$$

bulunur. Bu denklemlerden

$$f_1(t) = 0 \tag{5.74}$$

veya

$$f_1(t) = \frac{c_1}{C},\; F_9 = c_2\frac{A^2B^2}{C^2} \tag{5.75}$$

çözümleri elde edilir. Böylece CC vektör alanları dikkate alınarak elde edilen MC vektör alan bileşenleri

$$\xi^0 = 0,\; \xi^1 = 0,\; \xi^2 = a_1,\; \xi^3 = a_2 \tag{5.76}$$

veya

$$\xi^0 = \frac{c_1}{C},\; \xi^1 = 0,\; \xi^2 = a_1,\; \xi^3 = a_2 \tag{5.77}$$

olur.

Durum (a4): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 = 0.$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{22} = 2xe^{2x}\frac{C^2}{A^2},\; T_{23} = e^{2x}\frac{C^2}{A^2} \tag{5.78}$$

olarak bulunur. (5.70) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla elde edilen denklemlerin tamamı özdeş olarak sıfıra eşittir. Buradan (5.70) CC vektör alanlarının aynı zamanda MC vektör alanı oldukları sonucu çıkmaktadır.

Çizelge 5.8. Bianchi Tip IV uzay-zamanı için MC vektör alanları diğer durumlara eşit olan durumlar

Durum	b1	b2
T_{ab}	$T_{00}=-\frac{1}{4}\left(\frac{F_7}{A^2C^2}+\frac{F_8}{B^2C^2}\right)$ $T_{11}=A^2\frac{F_8}{4B^2C^2}$ $T_{22}=e^{2x}\left(B^2\frac{F_7}{4A^2C^2}+2x\frac{C^2}{A^2}\right)$ $T_{23}=e^{2x}\frac{C^2}{A^2}$	$T_{00}=-\frac{1}{4}\left(\frac{F_7}{A^2C^2}+\frac{F_8}{B^2C^2}+\frac{F_9}{A^2B^2}\right)$ $T_{11}=A^2\frac{F_8}{4B^2C^2}$ $T_{22}=e^{2x}B^2\frac{F_7}{4A^2C^2}+2xe^{2x}\frac{C^2}{A^2}+x^2e^{2x}C^2\frac{F_9}{4A^2B^2}$ $T_{23}=xe^{2x}C^2\frac{F_9}{4A^2B^2}+e^{2x}\frac{C^2}{A^2}$ $T_{33}=e^{2x}C^2\frac{F_9}{4A^2B^2}$
MC	a4 durumu ile aynı	a4 durumu ile aynı

Bianchi Tip IV uzay-zamanlarının yukarıda hesaplanan CC vektör alanları ve MC vektör alanları arasındaki ilişkiler aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.9. Bianchi tip IV uzay-zamanın madde ve eğrilik simetrileri arasındaki ilişkiler

Durum	CC	CC sayısı	MC	MC sayısı
a2	(5.68)	∞	(5.76) – (5.77)	2
a4	(5.70)	2	(5.70)	2
b1	(5.70)	2	(5.70)	2
b2	(5.70)	2	(5.70)	2

4.5. Bianchi Tip VIII ve IX Uzay-Zamanlar

Bianchi tip VIII ve IX uzay zaman metriği

$$ds^2 = -dt^2 + A^2\left[dx - h(y)dz\right]^2 + B^2 dy^2 + C^2 f^2(y)dz^2 \tag{5.79}$$

ile verilmektedir (Kramer ve ark., 1980). Burada $A = A(t),\ B = B(t),\ C = C(t)$ ve

$$f(y) = \begin{cases} \sinh y \\ \sin y \end{cases},\ h(y) = \begin{cases} -\cosh y \\ \cos y \end{cases},\quad \delta = -\frac{f''}{f} = \begin{cases} -1, BVIII \\ 1, BIX \end{cases} \tag{5.80}$$

dir. Bu metriğe ait R_{abcd} Riemann eğrilik tensör bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\begin{aligned}
&R_{1212} = B^2 A^2 F_6(t),\qquad R_{1223} = hA^2 B^2 F_6(t),\ R_{1234} = -\frac{h'}{2} A^2 F_4(t) \\
&R_{1313} = f^2 A^2 C^2 F_7(t),\ R_{1324} = \frac{h'}{2} A^2 F_5(t),\qquad R_{1414} = -F_1(t) \\
&R_{1423} = \frac{h'}{2} A^2\left(F_5(t) - F_4(t)\right),\ R_{1434} = hF_1(t) \\
&R_{2323} = h^2 A^2 B^2 F_6(t) + f^2 C^2 B^2 F_8(t) \\
&R_{2334} = ff'C^2\left[F_5(t) + F_4(t)\right] - \frac{hh'}{2} A^2\left[F_5(t) - 2F_4(t)\right] \\
&R_{2424} = -F_2(t),\ R_{3434} = -h^2 F_1(t) - f^2 F_3(t)
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Burada $F_1(t),...,F_8(t)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}
&F_1(t) = A\ddot{A},\ F_2(t) = B\ddot{B},\ F_3(t) = C\ddot{C}, \\
&F_4(t) = \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right),\ F_5(t) = \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A}\right), \\
&F_6(t) = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{A^2}{4B^2C^2},\ F_7(t) = \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{A^2}{4B^2C^2},\ F_8(t) = \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{3}{4}\frac{A^2}{B^2C^2} + \frac{\delta}{B^2}
\end{aligned} \tag{5.82}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Bianchi Tip VIII ve IX uzay-zamanları için R_{abcd} Riemann eğrilik tensörünün 6×6 matris formu aşağıdaki gibidir:

$A^2C^2F_6$	0	0	$hA^2C^2F_6$	0	$-\frac{h'C^2}{2}F_4$
0	$f^2C^2B^2F_7$	0	0	$\frac{h'C^2}{2}F_5$	0
0	0	$-F_1$	$\frac{h'C^2}{2}(F_5-F_4)$	0	hF_1
$hA^2C^2F_6$	0	$\frac{h'C^2}{2}(F_5-F_4)$	$h^2A^2C^2F_6+f^2A^2B^2F_8$	0	$ff'B^2(F_5+F_4)-\frac{hh'}{2}C^2(F_5-2F_4)$
0	$\frac{h'C^2}{2}F_5$	0	0	$-F_2$	0
$-\frac{h'C^2}{2}F_4$	0	hF_1	$ff'B^2(F_5+F_4)-\frac{hh'}{2}C^2(F_5-2F_4)$	0	$-h^2F_1-f^2F_3$

Çizelge 5.10. Bianchi Tip VIII-IX uzay-zamanlar için eğrilik rankının üç ve üç'den küçük olabildiği durumlar

rank=1	a1	$F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0$
	a2	$F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0$
	a3	$F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0$
	a4	$F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0$
	a5	$F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0$
	a6	$F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0$
rank=2	b1	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b2	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b3	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	b4	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b5	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b6	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b7	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	b8	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b9	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b10	$(F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	b11	$(F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b12	$(F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b13	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b14	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	b15	$(F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
rank=3	c1	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c2	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	c3	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c4	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c5	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$

	c6	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c7	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c8	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c9	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c10	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c11	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0)$
	c12	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c13	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c14	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c15	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c16	$(F_7 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c17	$(F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c18	$(F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c19	$(F_1 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$
	c20	$(F_6 \neq 0 \vee F_4 \neq 0 \vee F_5 \neq 0 \vee F_8 \neq 0) \wedge (F_2 \neq 0 \vee F_5 \neq 0) \wedge (F_4 \neq 0 \vee F_1 \neq 0 \vee F_3 \neq 0 \vee F_5 \neq 0)$

Yukarıdaki durumlarda $F_1(t),...,F_8(t)$ fonksiyonları göz önüne alındığında rankın 3 olduğu *iki* ve 1 olduğu *bir* durum mümkündür:

(a4) Rank=1 : $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_7 = 0$, $F_8 \neq 0$;

(c2-a) Rank=3 : $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 0$, $F_6 = F_7 \neq 0, F_8 \neq 0$;

(c2-b) Rank=3 : $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_8 = 0$, $F_6 = F_7 \neq 0$.

4.5.1. Eğrilik Simetrileri

Bu bölümde; yukarıda verilen eğrilik rankı durumlarına göre Bianchi tip VIII-IX uzay-zamanlarının CC denklemleri belirlenip çözümleri bulunmaya çalışılacaktır.

Durum (a4): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_7 = 0$, $F_8 \neq 0$.

Bu kısıtlama denklemlerinden $A = c_1 t + c_2$, $B = c_3 t + c_4$ ve $C = c_5 t + c_6$ elde edilmektedir. Ayrıca sabitler arasında $c_1 c_4 = c_2 c_3$, $c_3 c_6 = c_4 c_5$ ve $c_1 c_6 = c_2 c_5$ bağıntıları da bulunmaktadır.

Bu durumda CC denklemleri aşağıdaki 5 denkleme indirgenir:

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(x,y,z),\ \xi^2 = \xi^2(y,z),\ \xi^3 = \xi^3(y,z)$$

$$f^2 B^2 \xi^1_{,y} + hA^2 \xi^2_{,z} = 0,\ A^2 \xi^2_{,z} + f^2 B^2 \xi^3_{,y} = 0,$$

$$\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_8}{2F_8}\right)\xi^0 + \xi^2_{,y} = 0,\ \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{F}_8}{2F_8}\right)\xi_0 + \frac{f'}{f}\xi^2 + \xi^3_{,z} = 0 \tag{5.83}$$

$$\left(\frac{2\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_8}{F_8}\right)\xi^0 + 2\xi^2_{,y} + \frac{h'}{h}\xi^2 - \xi^1_{,x} - \frac{1}{h}\xi^1_{,z} + \xi^3_{,z} = 0.$$

Bu denklem sisteminin çözümü $B^2 = k^2 A^2$ olmak üzere;

$$\xi^0 = 0,\ \xi^1 = \frac{\delta}{kf} g_1(z)_{,z} + a_3,\ \xi^2 = g_1(z),\ \xi^3 = -\frac{f'}{f}\int g_1(z)dz + a_4 \tag{5.84}$$

$$g_1(z) = \begin{cases} a_1 \cos(kz) + a_2 \sin(kz), & k^2 > 0 \\ a_1 \cosh(|k|z) + a_2 \sinh(|k|z), & k^2 < 0 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Burada; $a_1,...,a_4$ sabitleri keyfi parametrelerdir. Bu parametrelerin seçimi ile CC vektör alanları elde edilmektedir. Her bir parametre için ortaya çıkan vektör alan aşağıda verilmektedir:

$$\vec{\xi}_{(1)} = \partial_x$$

$$\vec{\xi}_{(2)} = \partial_z$$

$k^2 > 0$:

$$\vec{\xi}_{(3)} = -\frac{\delta}{f}\sin(kz)\partial_x + \cos(kz)\partial_y - \frac{f'}{kf}\sin(kz)\partial_z$$

$$\vec{\xi}_{(4)} = \frac{\delta}{f}\cos(kz)\partial_x + \sin(kz)\partial_y + \frac{f'}{kf}\cos(kz)\partial_z \tag{5.85}$$

$k^2 < 0$:

$$\vec{\xi}_{(3)} = \frac{\delta|k|}{fk}\sinh(|k|z)\partial_x + \cosh(|k|z)\partial_y - \frac{f'}{|k|f}\sinh(|k|z)\partial_z \tag{5.86}$$

$$\vec{\xi}_{(4)} = \frac{\delta|k|}{fk}\cosh(|k|z)\partial_x + \sinh(|k|z)\partial_y - \frac{f'}{|k|f}\cosh(|k|z)\partial_z$$

şeklinde bulunur. Bu vektör alanlar için Lie Cebrine ait sıfır olmayan komütatörler:

$[\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(3)}] = -\vec{\xi}_{(4)}$, $[\vec{\xi}_{(2)},\vec{\xi}_{(4)}] = \vec{\xi}_{(3)}$

olur.

Durum (c2-a): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = 0$; $F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0$.

Bu kısıtlama denklemlerinden $A = c_1 t + c_2$, $B = c_3 t + c_4$ ve $C = c_5 t + c_6$ elde edilmektedir. Ayrıca sabitler arasında $c_1 c_4 = c_2 c_3$, $c_3 c_6 = c_4 c_5$ ve $c_1 c_6 = c_2 c_5$ bağıntıları da bulunmaktadır. Bu durumda CC denklemleri aşağıdaki *onaltı* denkleme indirgenir:

$$\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(x,y,z),\ \xi^2 = \xi^2(x,y,z),\ \xi^3 = \xi^3(x,y,z)$$

$$(F_7 - F_8)\xi^2_{,x} = 0,\ (F_7 - F_8)\xi^3_{,x} = 0,\ \left(\frac{2\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_8}{2F_8}\right)\xi_0 + 2\xi^2_{,y} = 0,$$

$$\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_7}{2F_7}\right)\xi_0 + \xi^2_{,y} = 0,\ \left(\frac{\dot{X}}{X} + \frac{\dot{F}_7}{2F_7}\right)\xi^0 - h\xi^3_{,x} + \xi^1_{,x} - = 0$$

$$\xi^1_{,y} - h\xi^3_{,y} + \frac{A^2}{X^2}\xi^2_{,x} = 0,\ \xi^1_{,y} - h\xi^3_{,y} + \frac{A^2 F_8}{X^2 F_7}\xi^2_{,x} = 0$$

$$(F_7 - F_8)\left(\xi^1_{,y} + \frac{hA^2}{f^2 B^2}\xi^2_{,z}\right) = 0$$

$$(F_7 - F_8)\left[\left(\frac{2\dot{A}}{A} + \frac{\dot{F}_7}{F_7}\right)\xi^0 - \xi^1_{,x} - \frac{1}{h}\xi^1_{,z} + \frac{h'}{h}\xi^2 + 2\xi^2_{,y} + \xi^3_{,z}\right] = 0$$

$$\left(\frac{2\dot{X}}{X} + \frac{\dot{F}_7}{F_7}\right)\xi^0 + \xi^1_{,x} - \frac{1}{h}\xi^1_{,z} + \frac{h'}{h}\xi^2 - \left(\frac{f^2 B^2}{hX^2} + h\right)\xi^3_{,x} + \xi^3_{,z} = 0$$

$$h\xi^1_{,y} - \frac{A^2}{X^2}\xi^2_{,z} - \left(\frac{f^2 B^2}{X^2} + h^2\right)\xi^3_{,y} = 0$$

$$-h\xi^1_{,y} + \left(\frac{f^2 B^2}{X^2} + h^2\right)\xi^3_{,y} + \frac{A^2}{X^2}\xi^2_{,z} + \left(h - \frac{A^2 F_8}{X^2 F_7}\right)\xi^2_{,x} = 0 \tag{5.87}$$

$$\left(ff' + \frac{hh'X^2}{B^2}\right)\xi^2 + \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{F}_7}{2F_7}\right)\left(f^2 + \frac{h^2 X^2}{B^2}\right)\xi^0 + \left(f^2 + \frac{h^2 X^2}{B^2}\right)\xi^3_{,z} - \frac{hX^2}{B^2}\xi^1_{,z} = 0$$

$$\left(\frac{2\dot{X}}{X}+\frac{\dot{F}_7}{F_7}\right)\xi^0+\xi^1_{,x}-h\xi^3_{,x}+\frac{h'}{h}\xi^2-\frac{f^2B^2F_8}{hX^2F_7}\xi^3_{,x}+\xi^3_{,z}-\frac{1}{h}\xi^1_{,z}=0$$

$$(F_7-F_8)\xi^2_{,x}-\frac{F_8}{h}\xi^2_{,z}+\frac{X^2}{A^2}F_7\xi^1_{,y}-\left(\frac{f^2B^2F_8}{h^2}+X^2F_7\right)\frac{h}{A^2}\xi^3_{,y}=0$$

$$\left(\frac{h'}{h}+\frac{ff'B^2F_8}{h^2X^2F_7}\right)\xi^2\left[\left(\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{F}_8}{2F_8}\right)\frac{f^2B^2F_8}{h^2X^2F_7}+\left(\frac{\dot{X}}{X}+\frac{\dot{F}_7}{2F_7}\right)\right]\xi^0-\frac{1}{h}\xi^1_{,z}+\left(1+\frac{f^2B^2F_8}{h^2X^2F_7}\right)\xi^3_{,z}=0$$

Bu denklem sisteminin çözümü $B^2=k^2A^2$ olmak üzere;

$$\xi^0=0\,,\ \xi^1=-\frac{\delta}{k^2f}g_1(z)_{,z}+a_3\,,\ \xi^2=g_1(z)\quad,\ \xi^3=\frac{f'}{k^2f}g_1(z)_{,z}+a_4 \tag{5.88}$$

$$g_1(z)=\begin{cases}a_1\cos(kz)+a_2\sin(kz), & k^2>0\\ a_1\cosh(|k|z)+a_2\sinh(|k|z), & k^2<0\end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Durum (c2-b): $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_8=0$; $F_6\neq 0,\ F_7\neq 0$.

Bu kısıtlama denklemlerinden $A=c_1t+c_2$, $B=c_3t+c_4$ ve $C=c_5t+c_6$ elde edilmektedir. Ayrıca sabitler arasında $c_1c_4=c_2c_3$, $c_3c_6=c_4c_5$ ve $c_1c_6=c_2c_5$ bağıntıları da bulunmaktadır. Bu durumda (3.7) denkleminden elde edilen CC denklemleri aşağıdaki dokuz denkleme indirgenir:

$$\xi^0=\xi^0(t)\,,\ \xi^1=\xi^1(x,y,z)\,,\ \xi^2=\xi^2(y,z)\,,\ \xi^3=\xi^3(y,z)$$

$$\xi^1_{,y}-h\xi^3_{,y}=0\,,\left(\frac{\dot{X}}{X}+\frac{F_7'}{2F_7}\right)\xi^0+\xi^1_{,x}=0\,,\left(\frac{\dot{X}}{X}+\frac{F_7'}{2F_7}\right)\xi^0+\xi^2_{,y}=0\,,$$

$$hA^2\xi^2_{,z}+B^2f^2\xi^1_{,y}=0\,,\quad\left(\frac{2\dot{X}}{X}+\frac{F_7'}{F_7}\right)\xi^0+\xi^1_{,x}-\frac{1}{h}\xi^1_{,z}+\frac{h'}{h}\xi^2+\xi^3_{,z}=0$$

$$\left(\frac{2\dot{X}}{X}+\frac{F_7'}{F_7}\right)\xi^0-\xi^1_{,x}-\frac{1}{h}\xi^1_{,z}+\frac{h'}{h}\xi^2+2\xi^2_{,y}+\xi^3_{,z}=0 \tag{5.89}$$

$$\left(\frac{\dot{X}}{X}+\frac{F_7'}{2F_7}\right)\xi^0-\frac{1}{h}\xi^1_{,z}+\frac{h'}{h}\xi^2+\xi^3_{,z}=0$$

$$\xi^1_{,y}-\frac{A^2}{hX^2}\xi^2_{,z}-\left(\frac{B^2f^2}{X^2h}+h\right)\xi^3_{,y}=0$$

$$\left(B^2 f^2 + X^2 h^2\right)\left[\left(\frac{\dot{X}}{X} + \frac{F_7'}{2F_7}\right)\xi^0 + \left(\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h}\right)\xi^2 + \xi^3_{,z}\right] - hX^2\xi^1_{,z} = 0$$

Bu denklem sisteminin çözümü; (a4) durumundaki (5.84)-(5.86) çözümleri ile aynıdır.

4.5.2. Madde Simetrileri

Genel şekli (5.79) ile verilen Bianchi Tip VIII ve IX uzay-zamanlar için T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(F_6 + F_7 + F_8\right),\ T_{02} = \frac{f'}{f}\left(F_4 + F_5\right)$$

$$T_{11} = A^2\left(\frac{F_2}{B^2} + \frac{F_3}{C^2} + F_8\right),\ T_{13} = hT_{11} \tag{5.90}$$

$$T_{22} = B^2\left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_3}{C^2} + F_7\right),\ T_{33} = f^2C^2\left(\frac{F_1}{A^2} + \frac{F_2}{B^2} + F_6\right) + h^2T_{11}$$

şeklindedir. Burada; $F_i(t)$ $(i = 1,...,8)$ fonksiyonları için (5.82)'de verilen tanımlar kullanılmıştır. Aşağıda bulunan CC vektör alanlarının MC vektör alanı olabilmesi koşulları incelenmiştir.

Durum (a4): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_7 = 0$, $F_8 \neq 0$.

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -F_8,\ T_{11} = A^2F_8,\ T_{13} = hA^2F_8,\ T_{33} = h^2A^2F_8 \tag{5.91}$$

olarak bulunur. (5.84) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

(i) $k^2 > 0$ iken

$$\left(a_1\sin(kz) - a_2\cos(kz)\right)\left(f_{,yy}f - f_{,y}^2\right) = 0 \tag{5.92}$$

$$\left(a_1\cos(kz) + a_2\sin(kz)\right)\left(h_{,y}f^2 - fk - hf_{,y}f\right) = 0$$

bulunur. Bu denklemlerden $k \neq -1$ olduğunda

$$a_1 = a_2 = 0 \tag{5.93}$$

sonucu elde edilir.

(ii) $k^2 < 0$ iken

$$\left(a_1\sinh(kz) + a_2\cosh(kz)\right)\left(f_{,yy}f - f_{,y}^2\right) = 0 \tag{5.94}$$

$$\left(a_1 \cosh(kz) + a_2 \sinh(kz)\right)\left(h_{,y} f^2 + fk - hf_{,y} f\right) = 0$$

bulunur. Bu denklemlerden $k \neq 1$ olmak üzere (5.93) sonucu bulunur.

Durum (c2-a): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = 0$; $F_7 \neq 0,\ F_8 \neq 0$.

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(F_7 + F_8\right),\ T_{11} = A^2 F_8,\ T_{13} = hA^2 F_8 \tag{5.95}$$

$$T_{22} = B^2 F_7,\ T_{33} = h^2 A^2 F_8$$

olarak bulunur. (5.88) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla (a4) durumdaki sonuçlar elde edilir.

Durum (c2-b): $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_8 = 0$, $F_6 \neq 0,\ F_7 \neq 0$

Bu durumda sıfırdan farklı T_{ab} enerji-momentum tensör bileşenleri

$$T_{00} = -\left(F_6 + F_7\right),\ T_{22} = B^2 F_7,\ T_{33} = f^2 C^2 F_6 \tag{5.96}$$

olarak bulunur. (5.90) CC vektör alanlarının ve yukarıdaki enerji-momentum tensör bileşenlerinin (3.1) MC denkleminde kullanılmasıyla

(i) $k^2 > 0$ iken

$$k\left(a_1 \sin(kz) - a_2 \cos(kz)\right) = 0 \tag{5.97}$$

$$f_{,y}\left(a_1 \cos(kz) + a_2 \sin(kz)\right) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece; bu eşitliklerin sağlanması için

$$a_1 = a_2 = 0 \tag{5.98}$$

olmalıdır.

(ii) $k^2 < 0$ iken MC denklemlerinden

$$a_1 \sinh(kz) + a_2 \cosh(kz) = 0 \tag{5.99}$$

denklemi ortaya çıkar. Bu nedenle

$$a_1 = a_2 = 0 \tag{5.100}$$

olur.

Çizelge 5.11. Bianchi tip VIII-IX uzay-zamanlarının madde ve eğrilik simetrileri arasındaki ilişkiler

Durum	**CC**	**CC sayısı**	**MC**	**MC sayısı**
a4	(5.84)	4	(5.96)	2
c2-a	(5.88)	4	(5.96)	2
c2-b	(5.90)	4	(5.101) – (5.103)	2 - 4

BÖLÜM 5
SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ilk bölümünde tezin amacının anlatıldığı bir giriş yapılmış, ardından ikinci bölümde tezde kullanılan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde tezin temel kavramları olan madde ve eğrilik simetrileri kısaca anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, statik silindirik simetrik uzay-zaman için eğrilik rankının 3 ve daha küçük olabildiği onaltı farklı durumda ortaya çıkan CC denklemleri yazılarak bu diferansiyel denklemlerin çözümleri yapılmıştır. Bu durumlardan (a1) durumunun çözümü adım adım gösterilmiş, diğer durumlarda ise CC denklemleri ve çözümleri verilmiştir. Bazı durumlarda, diğer durumlarda bulunan CC vektör alanlarına ilave olarak gelen vektör alanları bulunduğundan bu durumlar Çizelge 4.2'de diğer durumlardan dönüşüm yoluyla elde edilebilenler ise Çizelge 4.3'de verilmiştir. Bu bölümde bulunan CC vektör alanları literatürdeki sonuçları doğruladığı gibi bazı yeni sonuçlar da elde edilmiştir. Her bir durum için sıfırdan farklı enerji-momentum tensörünün bileşenleri hesaplanarak, bulunan CC vektör alanları ile (3.1) MC denkleminde yerine yazılmış ve bu vektör alanlarının aynı zamanda MC vektör alanı olabilmeleri için gerekli kısıtlama denklemleri bulunmuştur. Birbiriyle aynı kısıtlama denklemleri ve bunlara ait durumlar Çizelge 4.4'de belirtilmiştir. (a1.i.1), (a1.ii.2), (a1.iii), (a1.vi.2), (a1.vii.1), (a1.ix.1) durumlarında ve (a1.ix.2) durumunun ilk kısmında elde edilen CC vektör alanları keyfi fonksiyonlar içermesine rağmen bu vektör alanlarının aynı zamanda MC vektör alanı olabilmesi için bu fonksiyonların birer sabit fonksiyon olmaları gerektiği MC denklemleri çözülerek elde edilmiştir. Diğer durumlarda ortaya çıkan kısıtlama denklemleri her durum için ayrı ayrı hesaplanmıştır.

Bianchi tip Uzay-zamanlardan ilk olarak Bianchi tip II uzay-zamanın eğrilik rankına göre inceleme yapılmış ve eğrilik rankının 3 ve daha küçük olabildiği üç durum için CC denklemleri belirlenmiş ve çözümleri bulunmuştur. Eğrilik rankının 1 olduğu durumda CC vektör alanlarının MC vektör alanı olabilmesi için bir kısıtlama ifadesi bulunurken rankın 3 olduğu iki durumda elde edilen CC vektör alanları enerji momentum tensörleriyle (3.1) denkleminde yerine yazıldığında tüm denklemler özdeş olarak sıfıra eşit bulunmuştur. Buradan (c2.i) ve (c2.ii) durumlarındaki CC vektör alanların aynı zamanda MC vektör alanı oldukları sonucu çıkartılmıştır.

Bianchi tip I, III, V ve VI için aynı inceleme 4.3 bölümünde yapılmıştır. Eğrilik rankının 3 ve daha küçük olabildiği onaltı farklı durum için CC denklemleri elde edilmiş ve çözümleri yapılmıştır. Bu durumlardan sadece altı tanesi farklı CC vektör alanları verdiğinden bunlar alt durumlarda ifade edilmiş, başka bir alt durumla aynı CC vektör alanını veren durumlar ise Çizelge 5.3'de listelenmiştir. (a2), (b3), (b4), (b6), (c7) ve (c8) durumlarında elde edilen CC vektör alanları ve enerji momentum tensörleri (3.1) MC denkleminde kullanıldığında tamamı özdeş olarak sıfıra eşit denklemler elde edilmiştir. Buradan da bu durumdaki CC vektör alanlarının aynı zamanda MC vektör alanı oldukları anlaşılmıştır.

4.4 bölümünde Bianchi tip IV'ün eğrilik rankının 3 ve daha küçük olabildiği dört durum için CC denklemleri elde edilmiş ve çözümleri yapılarak CC vektör alanları bulunmuştur. Bu dört durumdan üç tanesi (a4, b1 ve b2) aynı vektör alanlarını verirken bir durum farklı bir vektör alanı vermiştir. Benzer şekilde bu vektör alanlarının (3.1) MC denkleminde yazılmasıyla elde edilen kısıtlama denklemleri de farklı enerji momentum tensör bileşenleri kullanılmasına rağmen yine üç durumda aynı, diğer durumda farklı olmuştur.

Bianchi tip VIII ve IX'a ait inceleme 4.5 bölümünde yapılmıştır. Eğrilik rankının 3 ve daha küçük olabildiği üç farklı durum için CC denklemleri bulunmuş ve çözümleri hesaplanarak CC vektör alanları elde edilmiştir. Bu vektör alanlarının ve karşılık gelen enerji-momentum tensör bileşenlerinin MC denkleminde kullanılmasıyla her durumun MC vektör alanı olabilmesi için gerekli şartlar belirlenmiştir.

CC ve MC denklemleri hesaplanan uzay zamanların madde ve eğrilik simetrileri arasındaki ilişkiler Çizelge 4.6, Çizelge 5.2, Çizelge 5.6, Çizelge 5.9 ve Çizelge 5.11'de verilmiştir.

KAYNAKLAR

Banerjee A.K. ve Santos N.O., 1984. Specially Homogeneous Cosmological Models, *General Relativity and Gravitation*, 16: 217-224.

Banerjee A.K. ve Duttachoudhury S. B. ve Sanyal A. K., 1986. Bianchi type II Cosmological Model with Viscous Fluid, *General Relativity and Gravitation*, 18: 461-477.

Camci U. ve Barnes A., 2002. Ricci Collineations in Friedman-Robertson-Walker Spacetimes, *Classical and Quantum Gravity*, 19: 393-404.

Camci U. ve Sharif M., 2003. Matter Collineations of Spacetime Homogeneous Gödel Type Metrics, *Classical and Quantum Gravity*, 20: 2169-2179.

Camci U. ve Sharif M., 2003. Matter Collineations in Kantowski-Sacks, Bianchi Types I and III Spacetimes, *General Relativity and Gravitation*, 35: 97-109.

Camci U. ve SAHİN E., 2006. Matter Collination Classification of Bianchi type II Spacetime, *General Relativity and Gravitation*, 38: 1331-1346.

Carot J., da Costa J. ve VZ, E.G.L.R., 1994. Matter Collineations : The Inverse Symmetry Inheritance, *Journal of Mathematical Physics*, 35: 4832-4838.

Coley A.A. ve Tupper B.O.J., 1989. Special Conformal Killing Vector Space-times and Symmetry Inheritance, *Journal of Mathematical Physics*, 30: 2616-2625.

Davis W. R., Green L. H. ve Norris L. K., 1976. Relativistic Matter Fields Admitting Ricci Collineations and Related Conservation Laws, *Nouvo Cimento* B34: 256-280.

Duggal K.L. ve Sharma R., 1986. Conformal Collineations and Anisotropic Fluids in General Relativity, *Journal of Mathematical Physics*, 27: 2511-2513.

Ellis G. F. R. ve MacCallum M. A. H., 1969. A Class of Homogeneous Cosmological Models, *Communications in Mathematical Physics*, 12: 108.

Hall G.S., Roy I. ve Vaz E.G.L.R., 1996. Ricci and Matter Collineations in Space-Time, *General Relativity and Gravitation*, 28: 299-310.

Hughston L. P. ve Tod K. P., 1990. An Introduction to General Relativity, *Cambridge University Press*, Cambridge.

Katzin G., Levine J. ve Davis W.R., 1969. Curvature Collineations : A Fundamental Symmetry Property of the Space-Times of General Relativity Defined by The Vanishing Lie Derivatives of The Riemann Curvature Tensor, *Journal of Mathematical Physics*, 10: 617.

Kramer D., Stephani H., Herlt E. ve MacCallum M., 1980. Exact Solutions of Einstein's Field Equations, *Cambridge Univercity Press*, Cambridge.

Landau L.D. ve Lifshıtz E.M., 1975. *Classical Theory of Fields*, Pergamon Press.

Maartens R., Mason D.P. ve Tsamparlis M., 1986. Kinematic and Dynamic Properties of Conformal Killing Vectors in Izotropic Fluids, *Journal of Mathematical Physics*, 27: 2987-2994.

Mason D. P. ve Maartens R., 1987. Kinematics and Dynamics of Conformal Collineations in Relativity, *Journal of Mathematical Physics*, 28: 2182-2186.

Petrov A. Z., 1969. *Einstein Spaces*, Pergamon Press.

Ryan M.P. ve Shepley L.C., *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, 1975. Princeton Univ.Press

Sharif M.. 2001. Matter Collineations of Some Static Spherically Symmetric Spacetimes, *Astrophysics and Space Science* , 278: 447-455.

Sharif M., 2004. Symmetries of the Energy-Momentum Tensor of Cylindrically Symmetric Static Space-Times, *Journal of Mathematical Physics*, 45: 1532-1560.

Sharif M., 2003. Symmetries of the Energy-Momentum Tensor of Spherically Symmetric Lorentzian Manifolds, *Journal of Mathematical Physics*, 44: 5141-5158.

Sharif M. ve Aziz S., 2003. Classification of Spherically Symmetric Static Spacetimes According to Their Matter Collineations, *General Relativity and Gravitation*, 35:1093-1106.

Sharif M., 2003. Symmetries of the Energy-Momentum Tensor , *Journal of Mathematical Physics*, 45, 4193-4195.

Singh T. ve Agrawal A.K., 1992., Bianchi Type-II, VIII and IX in Certain New Theories of Gravitation, *Astrophysics and Space Science*, 191: 61-88.

Stephani H., 1982. *General Relativty*, Cambridge University Press, Cambridge, s.16.

Tariq N. ve Tupper B. O. J., 1992. Conformal Symmetry Inheritance with Cosmological Constant, *Journal of Mathematical Physics*, 33: 4002-4007.

Tsamparlis M. ve Apostolopoulos S., 2004. Ricci and Matter Collineations of Locally Rotationally Symmetric Space-Times, *General Relativity and Gravitation*, 36, 47-69.

Yavuz İ. ve Camci U., 1996. Ricci Collineations of the Bianchi Type –II, VIII, IX Space-Times, *General Relativity and Gravitation*, 28: 691-700.

Pirani Felix A. E., 1957. Invariant formulation of gravitational radiation theory. *Physical Review* 105 (3): 1089–1099. doi:10.1103/PhysRev.105.1089.

Petrov A.Z., 1954. Classification of spaces defined by gravitational fields. *Uch. Zapiski Kazan Gos. Univ.* 144: 55. English translation

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Necdet YÜCEL

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 23.10.1970

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: ÇOMÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (1998)

Yüksek Lisans Öğrenimi: - ÇOMÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD (2001)

- ÇOMÜ, FBE, Bilgisayar Mühendisliği ABD (2003)

Bildiği Yabancı Dil: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

Uluslararası Bildiriler:

- Curvature Collinations of Some Spherically Symmetric Spacetimes, M. Başer, U. Camcı, **N. Yücel**, Y. Küçükakça, 24. Uluslararası Fizik Kongresi, 2007
- Bianchi Tip II Uzay Zamanının Eğrilik Simetrileri, **N. Yücel**, U. Camcı, Y. Küçükakça, 25. Uluslararası Fizik Kongresi, 2008
- Bianchi Tip Uzay Zamanların Madde ve Eğrilik Simetrileri Arasındaki İlişkiler, **N. Yücel**, U. Camcı, Y. Küçükakça, 26. Uluslararası Fizik Kongresi, 2009

Katıldığı Projeler:

- Bazı Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri (COMU A.F. 1999/04) Yardımcı Araştırmacı, 1999
- Genel Relativistik Madde Alanlarının Kollinasyon Sınıflaması (COMU A.F. 1999/05) Yardımcı Araştırmacı, 1999
- Bilgi Sistemlerinde Bulanık ve Belirsiz Sorguların İşletilmesi (COMU A.F. 2000/23) Yardımcı Araştırmacı, 2000
- Uzay-Zamanların Eğrilik Simetrilerinin ve Bunların Diğer Geometrik Simetriler ile İlişkilerinin Belirlenmesi (TÜBİTAK, 106T669) Yardımcı Araştırmacı, 2009
- Ulusal IPv6 Protokol Altyapısı Tasarımı ve Geçişi Projesi (TÜBİTAK, 108G102) Yürütücü, 2009 Şubat - sürüyor

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurum ve Yıl:

- MEB, Matematik Öğretmeni (1998 - 1999)
- ÇOMÜ, Bilgisayar Mühendisliği, Araştırma Görevlisi (1999 - 2005)
- ÇOMÜ, Bilgisayar Mühendisliği, Öğretim Görevlisi (2005 - Bugün)

İLETİŞİM

E-posta adresi: nyucel@comu.edu.tr