T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKIN HALKALARDA TÜREVLER

Aykut OR

Danışman:
Prof. Dr. Kazım KAYA

Ocak, 2009
ÇANAKKALE

YAKIN HALKALARDA TÜREVLER

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Aykut OR

Danışman:

Prof. Dr. Kazım KAYA

Ocak, 2009

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

AYKUT OR, tarafından **PROF. DR. KAZIM KAYA** yönetiminde hazırlanan **“YAKIN HALKALARDA TÜREVLER”** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yönetici

Jüri Üyesi

Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi:…../…../……

Prof.Dr. Neşet AYDIN

Müdür V.

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyen ve bu tezin başlangıcından sonuna kadar bilgisini ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Kazım KAYA' ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Aykut OR

YAKIN HALKALARDA TÜREVLER

ÖZET

Bu tezde, türevin değişik özellikleri kullanılarak, yakın halkaların komütatifliği üzerine yapılan bazı makaleler incelenmiştir.

Bölüm 2’ de, Halka ve Yakın Halka ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

Bölüm 3’ de, Yakın Halkalarda türevin kullanıldığı bazı çalışmalar verilmiştir.

Bölüm 4’de, Asal yakın halkada (σ,τ)-türev, genelleştirilmiş türev, genelleştirilmiş (σ,τ)-türev hakkında bazı çalışmalar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Yakın Halka, Türev, Genelleştirilmiş Türev

DERIVATIONS ON NEAR RINGS

ABSTRACT

In this thesis, some articles about the commutativity of near rings use of different properties of derivations were studied.

In chapter 2, has been given general information related with rings and near rings.

In chapter 3, some studies have been given on near rings with derivation.

In chapter 4, some works have been investigated about generalized derivation, generalized (σ, τ)-derivation and (σ, τ)-derivation on prime near ring.

Key Words : Near rings, Derivation, Generalized Derivation

İÇERİK

Sayfa

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bir (N,+, .) halkasında, toplama işleminin değişmeli olması gerekmediğini ve dağılma özelliğinin tek yanlı olmasının yeterli olduğunu varsayarsak (N,+, .) sistemine bir yakın halka denir. Her halka bir yakın halkadır.

Bir N yakın halkasında,

(i) $[x,y] = xy - yx,\ \forall x,y \in N$

(ii) $(x,y) = x + y - x - y,\ \forall x,y \in N$

(iii) $(x \circ y) = xy + yx,\ \forall x,y \in N$

(iv) $[x, y]_{\sigma,\tau} = \sigma(x)y - y\tau(x),\ \forall x,y \in N$

ifadelerini düşünelim.

Birçok araştırmacı halkaların bazı özelliklerini incelerken türevden faydalanmış ve türevin değişik özelliklerini kullanarak halkaların komütatiftiliği üzerine farklı çalışmalar yapmışlardır.

Türev kullanılarak halkaların komütatifliği üzerine yapılan bu çalışmalar zamanla farklı araştırmacılar tarafından genelleştirilerek yakın halkaların komütatifliği üzerine de yapılmıştır.

Yakın halka ve halka ile ilgili genel tanım ve bilgilerin verildiği ikinci bölümden sonra üçüncü bölümde, yakın halkalarda türev kullanılarak yakın halkanın yapısı ve komütatifliği ile ilgili ilk çalışmalardan olan H.E.Bell ve Gordon Mason'un (1987) "Yakın Halkalarda Türevler" üzerine yapmış oldukları makale incelendi. Ayrıca, karakteristiği ikiden farklı bir N yakın halkası üzerinde tanımlı d, d_1, d_2 türevleri için,

(i) $d(N) \subseteq Z$

(ii) $d(x)d(y) = d(y)d(x),\ \forall x,y \in N$

(iii) $d_1(x)d_2(y) = d_2(x)d_1(y),\ \forall x,y \in N$

(iv) $[d(N), d(N)]_{\sigma,\tau} = \{0\}$

gibi özelliklerden birini içermesi durumunda verilen yakın halkanın komütatif halka olduğu ile ilgili bazı çalışmalar incelendi.

3. bölümde yapılan çalışmalarda d türevi yerine (σ, τ)-türev, genelleştirilmiş türev ve genelleştirilmiş (σ, τ)-türev alınarak yakın halkanın komütatif halka olduğu ile ilgili yapılan bazı çalışmalar 4. bölümde incelendi.

Bu tezde yakın halkalarda türevle ilgili yapılan farklı çalışmalar incelenerek, bu konu hakkında uzmanlaşılması amaçlanmıştır.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1 : Boş kümeden farklı bir R kümesi üzerinde, + : RxR $\rightarrow$R, (a,b)$\rightarrow$a + b ve · : RxR $\rightarrow$ R, (a,b) $\rightarrow$ ab işlemleri tanımlansın. Buna göre aşağıdaki koşullar sağlanırsa R kümesine bir *halka* denir.

(i) (R,+) bir değişmeli grup

(ii) a(bc) = (ab)c, $\forall$ a,b,c $\in$ R

(iii) a(b + c) = ab + ac , (a + b)c = ac + bc, $\forall$ a,b,c $\in$ R

Tanım 2.2 : R bir halka olsun. 0$\neq$ a$\in$ R için ab = 0 olacak biçimde . 0$\neq$ b$\in$ R varsa a elemanına *sol sıfır bölen* denir. ba = 0 olacak biçimde 0$\neq$ b $\in$ R varsa a elemanına *sağ sıfır bölen* denir. Hem sağ sıfır hem de sol sıfır bölen olan elemana *sıfır bölen* denir.

Tanım 2.3 : R bir halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir toplamsal alt grubu olsun. Eğer ar, ra$\in$ I, $\forall$ r$\in$ R, a$\in$ I ise I ya R nin bir *ideali* denir.

Tanım 2.4 : R bir halka, A, B ve P, R nin idealleri olsunlar. AB$\subseteq$P $\Rightarrow$ A$\subseteq$P veya B$\subseteq$P koşulu sağlanıyorsa, P ye *asal ideal* denir.

Teorem 2.5 : R bir halka ve P, R nin bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir

(i) P asal idealdir.

(ii) $\forall$ a,b$\in$ R için aRb$\subseteq$P ise a$\in$ P veya b$\in$ P dir.

(iii) $\forall$ a,b$\in$ R için (a)(b)$\subseteq$P ise a$\in$ P veya b$\in$ P dir.

(iv) U ve V, R halkasının iki sol(sağ) ideali olmak üzere UV$\subseteq$P ise U$\subseteq$P veya V$\subseteq$P dir.

Tanım 2.6 : Bir R halkasının (0) ideali asal ideal ise R ye *asal halka* denir.

Uyarı 2.7 : a,b $\in$ R için aRb = (0) $\Rightarrow$ a = 0 veya b = 0 koşulu sağlanıyorsa, R bir asal halkadır.

Tanım 2.8 : n$\in$ I^+ tamsayısı, na = 0, $\forall$ a$\in$ R olacak biçimde en küçük tamsayı ise n ye R nin *karakteristiği* denir ve charR = n ile gösterilir.

Tanım 2.9 : R bir halka olmak üzere Z = {a$\in$ R | ax = xa, $\forall$ x$\in$ R} kümesine R halkasının *merkezi* denir.

Teorem 2.10 : (Brauer's Trick) Bir grup iki öz alt grubun birleşimi olarak yazılamaz.

Teorem 2.11 : Bir R asal halkasında x, xy$\in$ Z ise x = 0 veya y$\in$ Z dir.

Gösterim 2.12 : x,y$\in$ R için [x,y] = xy – yx ve (x,y) = xy + yx diyelim.

Tanım 2.13 : d : R $\rightarrow$ R toplamsal bir dönüşüm olsun. Buna göre d(xy) = d(x)y + xd(y), $\forall$ x,y$\in$ R ise d ye R üzerinde bir *türev* denir.

Tanım 2.14 : a$\in$ R sabit bir eleman olmak üzere d_a : R $\rightarrow$ R dönüşümü, d_a(x) = [a,x], $\forall$ a$\in$ R olarak tanımlansın. d_a ya R halkasının a elemanı tarafından belirlenmiş *iç türevi* denir.

Tanım 2.15 : α ve β, R halkası üzerinde iki dönüşüm ve d:R$\rightarrow$R toplamsal bir dönüşüm olmak üzere d(xy) = d(x)α(y) + β(x)d(y), $\forall$ x,y $\in$ R ise d ye bir sağ *(α, β)–türev* denir.

d : R$\rightarrow$R toplamsal dönüşüm için d(xy) = α(x)d(y) + β(y)d(x), $\forall$ x,y$\in$ R ise d ye bir sol *(α, β)–türev* denir.

1 : R $\rightarrow$ R birim dönüşüm olmak üzere her türev bir (1,1) türevdir.

Tanım 2.16 : f : R $\rightarrow$ R toplamsal bir dönüşüm olsun. f(xy) = f(x)y + xd(y), $\forall$ x,y$\in$ R olacak biçimde bir d türevi varsa f ye, d türeviyle yapılan bir *genelleştirilmiş sağ türev* denir.

f(xy) = d(x)y + xf(y), $\forall$ x,y$\in$ R olacak biçimde bir d türevi varsa f ye, d türeviyle yapılan bir *genelleştirilmiş sol türev* denir.

Yakın halkalar ile ilgili bilgiler

Tanım 2.17 : Boş olmayan bir N kümesi üzerinde tanımlanan "+" ve "." ikili işlemleri aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, (N, +, .) sistemine bir *sol yakın-halka* denir.

(i) (N, +) değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

(ii) (N, .) bir yarı grup

(iii) $\forall$ x,y,z$\in$ N için x(y + z) = xy + xz

Eğer (iii) yerine $\forall$ x,y,z$\in$ N için (x + y)z = xz + yz alınırsa bu koşulları sağlayan (N, +, .) sistemine bir *sağ yakın-halka* denir.

Bundan sonra, aksi söylenmedikçe "yakın halka" ifadesi ile sol yakın halka anlaşılacaktır.

Tanım 2.18 : $\forall$ x$\in$ N için 0x = 0, iken x0 = 0 oluyorsa, N yakın halkasına *sıfır simetrik yakın halka* denir.

Tanım 2.19 : (N, +, .) bir yakın halka olsun. Buna göre, (N,+) değişmeli ise N ye *abelian yakın halka*, (N, .) birimli ise N ye *birimli yakın halka*, (N, .) değişmeli ise N ye *komütatif yakın halka* denir.

Tanım 2.20 : N, yakın halka ve I, (N,+) nın normal alt grubu olsun. Eğer I,

(i) IN $\subseteq$ I

(ii) $\forall$ n,m$\in$ N ve $\forall$ i$\in$ I için n(m + i) – nm $\in$ I koşullarını sağlıyorsa I ya N nin bir *ideali* denir. Eğer sadece (i) şartı sağlanıyorsa I ya N nin *sağ ideali*, sadece (ii) sağlanıyorsa I ya N nin *sol ideali* denir.

Tanım 2.21 : U, boş kümeden farklı N nin bir alt kümesi olsun. Eğer UN $\subseteq$ U ise U ya *yarı grup sağ ideal* denir. NU $\subseteq$ U ise U ya *yarı grup sol ideal* denir. Eğer U hem yarı grup sol ideal hem de yarı grup sağ ideal ise o zaman U ya *yarı grup ideal* denir.

Özellik 2.22 : N bir yakın halka ise aşağıdaki özellikler vardır.

(i) Her x$\in$ N için x0 = 0 dır.

(ii) Her x,y$\in$ N için x(–y) = –xy dir.

Tanım 2.23 : N bir yakın halka (M,+), (N,+) nın bir alt gubu olsun. Buna göre, $\forall\ m_1, m_2 \in$ M için $m_1\, m_2 \in$ M oluyorsa M ye N nin bir *alt yakın halkası* denir.

Tanım 2.24 : N bir yakın halka ve P, N nin bir ideali olsun. aNb $\subseteq$ P olacak biçimdeki $\forall$ a,b$\in$ N için a$\in$ P veya b$\in$ P oluyorsa, P ye N nin bir *3 asal ideali* denir.

Eğer N nin sıfır ideali 3-asal ise, N ye bir *3-asal yakın halka* denir.

Tanım 2.25 : N bir yakın halka, A ve B, N nin iki ideali olsun. N nin bir P ideali için $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa, P ye *0-asal ideal* denir.

Tanım 2.26 : N bir yakın halka olsun. $\forall a,b \in N$ için aNb = {0} olduğunda a = 0 veya b = 0 oluyorsa N yakın halkasına *asal yakın halka* denir.

Tanım 2.27 : N bir yakın halka olsun. $\forall x \in N$ için xNx = {0} olduğunda x = 0 oluyorsa N yakın halkasına *yarı asal yakın halka* denir.

Tanım 2.28 : $x \in N$ için (a + b)x = ax + bx ise x elemanına *distributive*, (a + b)x = bx + ax ise x elemanına *anti distributive* denir. N nin tüm elemanları distributive ise N ye *distributive yakın halka* denir.

Tanım 2.29 : Eğer N, (N,+) grubu ile üretilen distributive elemanların bulunduğu bir çarpımsal yarı grup kapsıyorsa, N ye *distributively generated yakın halka* denir.

Tanım 2.30 : N sol yakın halka ve d toplamsal dönüşüm olmak üzere, $\forall x,y \in N$ için d(xy) = xd(y) + d(x)y ise d ye bir *türev* denir.

Tanım 2.31 : N bir yakın halka d, N yakın halkasında keyfi türev olsun. $\forall x \in N$ için [x,d(x)] = 0 ise d türevine N yakın halkasında *commuting türev* denir.

Gösterim 2.32 : $x,y \in N$ için [x,y] = xy – yx gösterimine *çarpımsal komütatör* denir.

Gösterim 2.33 : $x,y \in N$ için (x,y) = x + y – x – y gösterimine *toplamsal komütatör* denir.

Gösterim 2.34 : $x,y \in N$ için xoy = xy + yx olarak kullanılacaktır.

Uyarı 2.35 : Halka da her bir toplamsal c komütatörü için d(c) = –c özelliği geçerlidir. Fakat yakın halkada bu özelliğin geçerli olması için xy + yx = yx + xy, $\forall x,y \in N$ olmalıdır.

Tanım 2.36 : Bir N yakın halkasında xy + yx = yx + xy, $\forall x,y \in N$ özelliği varsa N yakın halkasına *pseudo abelian* denir.

Önerme 2.37 : N pseudo abelian yakın halka ve d bir türev ise d[a,b] = [d(a),b] + [a,d(b)], $\forall a,b \in N$ dir.

Tanım 2.38 : S, N nin boş kümeden farklı ve N deki işlemlere göre kapalı bir alt kümesi, $d:N \to N$ bir türev olsun. Buna göre her $x,y \in S$ için d(xy) = d(x)d(y) ise d ye S üzerinde bir *homomorfizm* denir. Eğer her $x,y \in S$ için $d(xy) = d(y)d(x)$ ise d ye S üzerinde bir *anti-homomorfizm* denir.

Tanım 2.39 : N bir yakın halka olsun. $\forall a \in N$ ve $n \in Z$ için $na = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa N yakın halkasına *n-torsion free* yakın halka denir.

Tanım 2.40 : N bir yakın halka ve $0 \neq d: N \rightarrow N$ bir türev olsun. $d(x) = 0$ şartını sağlayan x elemanına *sabit eleman* denir.

Tanım 2.41 : N bir yakın halka olsun. Halkanın tüm elemanları ile toplamsal değişmeli olan elemanların kümesine *toplamsal merkez* denir ve $\xi(N)$ ile gösterilir. Öte yandan halkanın tüm elemanları ile çarpımsal değişmeli olan elemanların kümesine çarpımsal merkez denir ve Z ile gösterilir.

BÖLÜM 3
TÜREV

3.1. Yakın Halkalarda Türev

Lemma 3.1.1: N bir yakın halka, $d : N \to N$ keyfi bir türev olsun. Buna göre,

$$(ad(b) + d(a)b)\, c = ad(b)c + d(a)bc,\ \forall\, a,b,c \in N \text{ dir.}$$

İspat : $d((ab)c) = abd(c) + d(ab)c$

$$= abd(c) + (ad(b) + d(a)b)c, \forall\, a,b,c \in N \tag{3.1}$$

$$d(a(bc)) = ad(bc) + d(a)bc = abd(c) + ad\,(b)c + d(a)bc,\ \forall\, a,b,c \in N \tag{3.2}$$

O halde (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden $(ad(b) + d(a)b)c = ad(b)c + d(a)bc,\ \forall\, a,b,c \in N$ bulunur.

Lemma 3.1.2 : N bir yakın halka, $d : N \to N$ bir türev ve $u \in N$ sol sıfır bölen olmasın. Buna göre, $[u,d(u)] = 0$ ise her $x \in N$ için (x,u) sabittir.

İspat : $u(u + x) = u^2 + ux$ dir. Her iki taraftan türev alınırsa,

$$\begin{aligned} d(u(u + x)) &= ud(u + x) + d(u)(u + x) \\ &= u(d(u) + d(x)) + d(u)u + d(u)x \\ &= ud(u) + ud(x) + d(u)u + d(u)x \end{aligned} \tag{3.3}$$

olur. Öte yandan, $d(u^2 + ux) = d(u^2) + d(ux)$

$$= ud(u) + d(u)u + ud(x) + d(u)x \tag{3.4}$$

dir. (3.3) = (3.4) olduğundan $ud(x) + d(u)u = d(u)u + ud(x)$ bulunur. $d(u)u = ud(u)$ olduğundan $u(d(x) + d(u) – d(x) – d(u)) = 0$ olur. Dolayısıyla $ud(x,u) = 0$ dır. u sol sıfır bölen olmadığı için $d(x,u) = 0,\ \forall\, x \in N$ bulunur. Bundan dolayı, $\forall\, x \in N$ için (x,u) sabittir.

Teorem 3.1.3 : N sıfır bölensiz yakın halka olsun. Eğer N sıfırdan farklı commuting bir d türevi içeriyor ise bu takdirde $(N,+)$ abeliandır.

İspat: c keyfi toplamsal komütatör olsun. Buna göre, Lemma 3.1.2 den c sabittir. Üstelik keyfi $w \in N$ için wc de toplamsal komütatördür. Çünkü, $x,y \in N$ için $c = (x,y)$ olsun. Buna göre $wc = w(x,y) = w(x + y – x – y) = wx + wy – wx – wy = (wx,wy),\ \forall\, w \in N$ dir. Lemma 3.1.2 den wc de sabittir. Yani $d(wc) = 0$ olur. Dolayısıyla $0 = d(wc) = wd(c) + d(w)c = d(w)c$ bulunur. O halde $d(w)c = 0,\ \forall\, w \in N$ olur. $d \neq 0$ olduğundan $c = 0$ bulunur. Yani $0 = c = (x,y) = x + y – x – y$ dir. Bu nedenle $x + y = y + x,\ \forall\, x,y \in N$ elde edilir. O halde $(N,+)$ abeliandır.

Lemma 3.1.4 : N bir asal yakın halka olsun. Buna göre

(i) Eğer $z\in Z-\{0\}$ ise bu takdir de z sıfır bölen değildir.

(ii) Eğer $z + z \in Z$ olacak biçimde $z \in Z-\{0\}$ ise bu takdir de (N,+) abeliandır.

(iii) N yakın halka ve $0\neq d : N\rightarrow N$ bir türev olsun. Buna göre $xd(N) = \{0\}$ ise $x = 0$ ($d(N)x = \{0\}$ ise $x = 0$) dır.

(iv) N, 2-torsion free yakın halka ve $d : N \rightarrow N$ bir türev olsun. Buna göre $d^2 = 0$ ise $d = 0$ dır.

İspat (i) : $z \in Z-\{0\}$ ve $zx = 0$ olsun. Bu durumda, $\forall n\in N$ için soldan n ile çarpılırsa $nzx = 0$ olur. $z \in Z-\{0\}$ olduğundan $zNx = \{0\}$ dır. Öte yandan N asal yakın halka olduğu için $x = 0$ elde edilir. Yani z sıfır bölen değildir.

(ii) $z \in Z-\{0\}$, $z + z \in Z$ olacak biçimde bir eleman ve $x,y \in N$ olsun. Buna göre, $(x + y)(z + z) = (z + z)(x + y) = (z + z)x + (z + z)y$

$$= x(z + z) + y(z + z) = xz + xz + yz + yz = z(x + x + y + y) \quad (3.5)$$

dir. Öte yandan,

$$\begin{aligned}(x + y)(z + z) &= (x + y)z + (x + y)z\\ &= z(x + y) + z(x + y)\\ &= zx + zy + zx + zy = z(x + y + x + y) \quad (3.6)\end{aligned}$$

bulunur. O halde (3.5) = (3.6) olduğundan $z(x + x + y + y) = z(x + y + x + y)$ dir. Dolayısıyla, $z((x + x + y + y) - (x + y + x + y)) = 0$ olur. Üstelik N asal yakın halka ve $z \in Z-\{0\}$ olduğu için $x + x + y + y = x + y + x + y$ elde edilir. Buna göre $x + y = y + x$, $\forall x, y \in N$ elde edilir. O halde (N,+) abeliandır.

(iii) $xd(N) = \{0\}$ ve keyfi $r,s\in N$ olsun. Buna göre, $0 = xd(rs) = x(rd(s) + d(r)s) = xrd(s) + xd(r)s$ olur. $xd(N) = \{0\}$ olduğundan $xrd(s) = 0$, $\forall r,s \in N$ bulunur. N asal yakın halka olduğundan $x = 0$ veya $d(N) = \{0\}$ elde edilir. $d\neq 0$ olduğu için $x = 0$ bulunur.

Benzer biçimde $0 = d(s)x = rd(s)x + d(r)sx$ dır. $d(N)x = \{0\}$ olduğundan $rd(s)x = 0$ dır. Bu yüzden $d(r)sx = 0$ elde edilir. N nin asallığından $d(N) = \{0\}$ veya $x = 0$ olur. $d \neq 0$ olduğundan $x = 0$ bulunur.

(iv) Keyfi $x,y \in N$ için $0 = d^2(xy) = d(xd(y) + d(x)y) = xd^2(y) + d(x)d(y) + d^2(x)y + d(x)d(y) = 2d(x)d(y)$ dir. N yakın halkası 2-torsion free olduğu için $d(x)d(y)$

$= 0$, $\forall x, y \in N$ elde edilir. Yani $d(x)d(N) = \{0\}$, $\forall x \in N$ olur. O halde (iii) den $d(x) = 0$, $\forall x \in N$ dir. Dolayısıyla $d = 0$ bulunur.

Teorem 3.1.5 : N bir asal yakın halka, $0 \neq d: N \rightarrow N$ bir türev ve $d(N) \subseteq Z$ olsun. Buna göre,

(i) (N, +) abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : c keyfi bir sabit, x sabit olmasın. Buna göre, $d(xc) = xd(c) + d(x)c = d(x)c \in Z$ olur. $d(x)c \in Z$ ve $d(x) \in Z$ olduğundan $d(x) = 0$ veya $c \in Z$ bulunur. $d(x) \in Z - \{0\}$ olduğu için $c \in Z$ dir. Her c sabiti için $c + c$ sabit olduğundan Lemma 3.1.4 (ii) den c nin sıfırdan farklı bir sabit olması koşuluyla (N,+) abeliandır.

Varsayalım ki 0 tek sabit olsun. Lemma 3.1.2 den,
$\xi(N) = \{u \in N \mid u$ sıfır bölen değil$\}$ kümesi (N,+) nın toplamsal merkezindedir. Özel olarak, $x \neq 0$ ise $d(x) \in \xi(N)$ olduğu düşünülürse $\forall y \in N$ için $d(y) + d(x) - d(y) - d(x) = d(y,x) = 0$ elde edilir. Tek sabit 0 olduğundan $(y,x) = 0$ dır. Yani (N,+) abeliandır.

(ii) N, 2-torsion free olsun. N nin komütatif olduğunu görelim. Lemma 3.1.1 den $\forall a,b,c \in N$ için $d(ab)c = ad(b)c + d(a)bc$ dir. $d(ab) \in Z$ olduğu kullanılırsa $d(ab)c = cd(ab)$ olur. Yani $ad(b)c + d(a)bc = cad(b) + cd(a)b$ dir. (N,+) abelian olduğu için $cad(b) - ad(b)c = d(a)bc - cd(a)b$ dir. $d(N) \subset Z$ olduğundan $d(b)ca - d(b)ac = d(a)bc - d(a)cb$ dir. Dolayısıyla $d(b)[c,a] = d(a)[b,c]$, $\forall a,b,c \in N$ elde edilir.

Varsayalım ki N komütatif olmasın. $[b,c] \neq 0$ olacak biçimde $b,c \in N$ seçelim ve $x \in N$ için $a = d(x)$ alalım. Buna göre, $d(b)[c,d(x)] = d^2(x)[b,c]$, $\forall x \in N$ olur. $d(N) \subset Z$ hipotezinden $d(b)[c,d(x)] = 0$ dır. O halde $d^2(x)[b,c] = 0$, $\forall x \in N$ elde edilir. $d^2(x)$ merkezin elemanı ve merkezde sıfır bölen olmadığından $d^2(x) = 0$, $\forall x \in N$ olur. Lemma 3.1.4 (iv) den $d = 0$ bulunur. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde N bir komütatif halkadır.

Teorem 3.1.6 : N bir asal yakın halka, $0 \neq d: N \rightarrow N$ bir türev ve $\forall x,y \in N$ için $[d(x),d(y)] = 0$ olsun. Buna göre,

(i) (N, +) abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : Lemma 3.1.4 (ii) nin ispatındaki yöntem kullanılarak z ve z + z, d(N) nin elamanları ile değişmeli olduğu görülür. Bu yüzden her c toplamsal komütatörü için, zd(c) = 0 olur. Çünkü, Lemma 3.1.4 (ii) nin ispatında x yerine d(a) ve y yerine d(b), a,b $\in$ N alınırsa,

$$(d(a) + d(b))(z + z) = z(d(a) + d(a) + d(b) + d(b)) \tag{3.7}$$

$$(d(a) + d(b))(z + z) = z(d(a) + d(b) + d(a) + d(b)) \tag{3.8}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla bu iki eşitlikten zd(a) + zd(b) = zd(b) + zd(a), $\forall$ a,b $\in$ N olur. Yani zd(a,b) = 0, $\forall$ a,b $\in$ N dir. Öyleyse her c toplamsal komütatörü için zd(c) = 0 olur.

z = d(x), x $\in$ N alınırsa, d(x)d(c) = 0, $\forall$ x $\in$ N olur. Yani d(N)d(c) = {0} dır. Lemma 3.1.4 (iii) den, d(c) = 0 olur. w $\in$ N için wc de toplamsal komütatör olduğundan. 0 = d(wc) = wd(c) + d(w)c = d(w)c dir. Yani d(w)c = 0, $\forall$ x $\in$ N dir. Yine Lemma 3.1.4 (iii) den, c = 0 elde edilir. Öyleyse (N,+) abeliandır.

(ii) N, 2-torsion free olsun. Lemma 3.1.1 den $\forall$ x,y,z $\in$ N için,

$d(d(x)y)d(z) = d(x)d(y)d(z) + d^2(x)yd(z)$ olur. Buradan da

$$\begin{aligned} d^2(x)yd(z) &= -d(x)d(y)d(z) + d(d(x)y)d(z) \\ &= -d(z)d(x)d(y) + d(z)d(d(x)y) \\ &= d(z)(-d(x)d(y) + d(d(x)y)) \\ &= d(z)(-d(x)d(y) + d(x)d(y) + d^2(x)y) = d(z)d^2(x)y \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin ilk ve son kısmından $d^2(x)yd(z) = d^2(x)d(z)y$ olur. Öyleyse $d^2(x)(yd(z) - d(z)y) = 0$, $\forall$ x,y,z $\in$ N dir. y yerine yt, t $\in$ N alınırsa, $d^2(x)ytd(z) = d^2(x)d(z)yt$ ifdesinden $d^2(x)y(td(z) - d(z)t) = 0$, $\forall$ x,y,z,t$\in$ N elde edilir. Öyleyse $d^2(x)N[t,d(z)] = 0$, $\forall$ x,z,t $\in$ N olur. N asal olduğundan $d^2(x) = 0$ veya d(N) $\subseteq$ Z dir. Lemma 3.1.4 (iv) den $d^2(x) = 0$ olamaz çünkü, d $\neq$ 0 dır. O halde d(N) $\subseteq$ Z dir. Dolayısıyla Teorem 3.1.5 den, N bir komütatif halkadır.

Not 3.1.7 : N yakın halkası birimli bir N^* yakın halkası içine gömülebilir.

İspat : Z $\neq$ {0} ise M ={(x,z)|x $\in$ N, z $\in$ Z-{0}} kümesini alalım.

$$(x_1, z_1) \approx (x_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 z_2 = x_2 z_1$$

ile tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Çünkü,

(i) $(x_1, z_1) \in$ M için $(x_1, z_1) \approx (x_1, z_1) \Leftrightarrow x_1 z_1 = x_1 z_1$ olduğundan $\approx$ bağıntısı yansıma özelliğini sağlar.

(ii) $(x_1, z_1),(x_2, z_2) \in$ M için $(x_1, z_1) \approx (x_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 z_2 = x_2 z_1$

$$\Leftrightarrow x_2\, z_1 = x_1\, z_2$$

$$\Leftrightarrow (x_2, z_2) \approx (x_1, z_1) \qquad \text{olur.}$$

Dolayısıyla $\approx$ bağıntısı simetri özelliğini sağlar.

(iii) $(x_1, z_1),(x_2, z_2),(x_3, z_3) \in$ M için $(x_1, z_1) \approx (x_2, z_2)$ ve $(x_2, z_2) \approx (x_3, z_3)$ olsun. Bu durumda $x_1\, z_2 = x_2\, z_1$ ve $x_2\, z_3 = x_3\, z_2$ olur. $z_1 \in$ Z – {0} olduğu için ilk eşitlik $x_1\, z_2 = z_1\, x_2$ şeklinde yazılabilir. Bu son eşitliği sağdan z_3 ile çarparsak $x_1\, z_2\, z_3 = z_1\, x_2\, z_3$ ifadesi elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki $x_2\, z_3$ yerine $(x_2, z_2) \approx (x_3, z_3)$ olduğundan $x_3\, z_2$ yazılabilir. Dolayısıyla $x_1\, z_2\, z_3 = z_1\, x_3\, z_2$ bulunur. O halde $z_2(x_1\, z_3 - z_1\, x_3) = 0$ olur. Öte yandan $z_2 \in$ Z – {0} ve N asal yakın halka olduğu için $(x_1, z_1) \approx (x_3, z_3)$ elde edilir. Yani $\approx$ bağıntısı geçişme özelliğini sağlar. Sonuç olarak $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Bu denklik bağıntısına göre oluşan denklik sınıflarının kümesi, $N^* = \{<x,z>|\ (x,z) \in M\}$ olsun. N^* kümesi üzerinde tanımlanan

$$<x_1, z_1> + <x_2, z_2> = <x_1\, z_2 + x_2\, z_1,\ z_1\, z_2>$$

$$<x_1, z_1> . <x_2, z_2> = <x_1\, x_2,\ z_1\, z_2>$$

işlemlerine göre N^* birimli bir sol yakın halkadır.

(i) Toplama işleminin tanımından kapalılık özelliği sağlanır.

(ii) $<x_1, z_1>, <x_2, z_2>, <x_3, z_3> \in N^*$ olsun. Buna göre,

$$(<x_1, z_1> + <x_2, z_2>) + <x_3, z_3> = <x_1\, z_2 + x_2\, z_1,\ z_1\, z_2> + <x_3, z_3>$$

$$= <(x_1\, z_2 + x_2\, z_1)\, z_3 + x_3\, z_1\, z_2,\ z_1\, z_2\, z_3> \text{ olur. Öte yandan,}$$

$$<x_1, z_1> + (<x_2, z_2> + <x_3, z_3>) = <x_1, z_1> + <x_2\, z_3 + x_3\, z_2,\ z_2\, z_3>$$

$$= <(x_1\, z_2\, z_3 + (x_2\, z_3 + x_3\, z_2)\, z_1,\ z_1\, z_2\, z_3>$$

olur. $z_1, z_2, z_3 \in$ Z – {0} olduğu kullanılırsa,

$(<x_1, z_1> + <x_2, z_2>) + <x_3, z_3> = <x_1, z_1> + (<x_2, z_2> + <x_3, z_3>)$ elde edilir. Yani toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

(iii) z$\in$ Z olmak üzere <0,z> birim elemandır. Çünkü,

$$<x_1, z_1> + <x,z> = <x_1, z_1> \Leftrightarrow <x_1 z + x\, z_1,\ z_1 z> = <x_1, z_1>$$

$$\Leftrightarrow (x_1 z + x\, z_1,\ z_1 z) \approx (x_1, z_1)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 z + x z_1) z_1 = x_1 z_1 z$$

$$\Leftrightarrow z_1 (x_1 z + x z_1) = x_1 z_1 z$$

$$\Leftrightarrow z_1 x_1 z + z_1 x z_1 = x_1 z_1 z$$

$$\Leftrightarrow x_1 z_1 z_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

olur. O halde $\forall z \in Z$ için $< 0,z >$ toplamsal birimdir.

(iv) $< x_1, z_1 > \in N^*$ elemanının tersi, $<- x_1, z_1 >$ elemanıdır.

$$< x_1, z_1 > + <- x_1, z_1 > = < x_1 z_1 - x_1 z_1 ,\ z_1 z_1 > = < 0,\ z_1 z_1 > = < 0,z >$$

$$<- x_1, z_1 > + < x_1, z_1 > = <- x_1 z_1 + x_1 z_1 ,\ z_1 z_1 > = <0,\ z_1 z_1 > = < 0,z >$$

Dolayısıyla $(N^*,+)$ bir gruptur.

(v) $< x_1, z_1 >, < x_2, z_2 > \in N^*$ için $< x_1, z_1 > . < x_2, z_2 > = < x_1 x_2 ,\ z_1 z_2 >$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi kapalıdır.

(vi) $< x_1, z_1 >, < x_2, z_2 >, < x_3, z_3 > \in N^*$ için

$$< x_1, z_1 >.(< x_2, z_2 >.< x_3, z_3 >) = < x_1, z_1 >.< x_2 x_3, z_2 z_3 >$$

$$= < x_1 x_2 x_3, z_1 z_2 z_3 >$$

$$= < x_1 x_2, z_1 z_2 >.< x_3, z_3 >$$

$$= (< x_1, z_1 >.< x_2, z_2 >)< x_3, z_3 >$$

olur. O halde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır. Bundan dolayı $(N^*,.)$ bir yarı gruptur.

(vii) $< x_1, z_1 >, < x_2, z_2 >, < x_3, z_3 > \in N^*$ için

$$< x_1, z_1 >.(< x_2, z_2 > + < x_3, z_3 >) = < x_1, z_1 >.< x_2 z_3 + x_3 z_2 ,\ z_2 z_3 >$$

$$= < x_1 x_2 z_3 + x_1 x_3 z_2 , z_1 z_2 z_3 >$$

olur. Öte yandan,

$$< x_1, z_1 >.< x_2, z_2 > + < x_1, z_1 >.< x_3, z_3 > = < x_1 x_2 , z_1 z_2 > + < x_1 x_3, z_1 z_3 >$$

$$= < x_1 x_2 z_1 z_3 + x_1 x_3 z_1 z_2 ,\ z_1 z_2 z_1 z_3 >$$

elde edilir. Öte yandan,

$(x_1 x_2 z_3 + x_1 x_3 z_2 , z_1 z_2 z_3) \approx (x_1 x_2 z_1 z_3 + x_1 x_3 z_1 z_2 ,\ z_1 z_2 z_1 z_3)$ olduğu düşünülürse,

$< x_1 x_2 z_3 + x_1 x_3 z_2 , z_1 z_2 z_3 > = < x_1 x_2 z_1 z_3 + x_1 x_3 z_1 z_2 , z_1 z_2 z_1 z_3 >$ olur. Öyleyse, $< x_1 , z_1 >.(< x_2 , z_2 > + < x_3 , z_3 >) = < x_1 , z_1 >.< x_2 , z_2 > + < x_1 , z_1 >.< x_3 , z_3 >$ bulunur. Yani soldan dağılma özelliği sağlanır. Sonuç olarak N^* bir sol yakın halkadır.

Şimdi $z \in Z$ olmak üzere, $\varphi : N \rightarrow N^*$, $\varphi(x) = < xz,z >$ ile tanımlanan φ dönüşümünün bir monomorfizm olduğunu görelim.

(a) φ dönüşümü iyi tanımlıdır. Çünkü;

$x,y \in N$ için x = y olsun. Buna göre, x = y ifadesi soldan z, sağdan z_1 ile çarpılırsa, $zxz_1 = zyz_1$ olur. $z, z_1 \in Z$ olduğu için $xzz_1 = yz_1z \Rightarrow (xz,z) \approx (yz_1, z_1) \Rightarrow < xz,z > = < yz_1, z_1 >$ olur. Yani x = y ise $\varphi(x) = \varphi(y)$ elde edilmiş olur. Dolayısıyla φ dönüşümü iyi tanımlıdır.

(b) $\varphi(x) = \varphi(y)$ olsun. Buna göre, $z, z_1 \in Z$ için

$$< xz,z > = < yz_1, z_1 > \Rightarrow (xz,z) \approx (yz_1, z_1)$$
$$\Rightarrow xzz_1 = yz_1z$$

olur. O halde $0 = xzz_1 - yzz_1 = zz_1(x - y)$ bulunur. $zz_1 \in Z$ ve N asal yakın halka olduğundan x = y elde edilir. Yani φ dönüşümü bire-bir dir.

(c) $\forall x,y \in N$ için $\varphi(x + y) = <(x + y)z, z> = <z(x + y), z> = <zx + zy, z> = <xz + yz, z>$ dir. Öte yandan,

$\varphi(x) + \varphi(y) = < xz,z > + < yz_1, z_1 > = < xzz_1 + yzz_1, zz_1 >$ olur. Bu iki ifadeden, $(xz + yz, z) \approx (xzz_1 + yzz_1, zz_1)$ olduğu için $<xz + yz, z> = < xzz_1 + yzz_1, zz_1>$ yazılabilir. O halde $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ elde edilir. Yani φ dönüşümü toplama işlemini korur.

(d) $\forall x,y \in N$ için $\varphi(xy) = <(xy)z, z >$ dir. Öte yandan

$\varphi(x)\varphi(y) = < xz,z >.< yz_1, z_1 > = < xzyz_1, zz_1 >$ olur. Buna göre, $((xy)z, z) \approx (xzyz_1, zz_1)$ olduğu için $<xyz, z > = < xzyz_1, zz_1 >$ yazılabilir. O halde, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ elde edilir. Yani φ dönüşümü çarpma işlemini korur. Sonuç olarak φ dönüşümü bir monomorfizmidir.

O halde N, $\varphi : N \rightarrow N^*$, $\varphi(x) = < xz,z >$ şeklinde tanımlanan φ monomorfizmi ile, N^* yakın halkasının içine gömülmüş olur.

$(N^*, +, .)$ birimli bir sol yakın halkadır. Çünkü, $z \in Z-\{0\}$ olmak üzere, $<z,z> \in N^*$ birim elemandır. Çünkü,

$<x_1,z_1><z,z> = <x_1z,z_1z> = <x_1,z_1>$ dir.

Teorem 3.1.8 : N bir asal yakın halka, $d:N \rightarrow N$ bir türev ve $\forall x \in N$ için $x - d(x) \in Z$ olsun. Buna göre,

(i) (N,+) abeliandır.

(ii) Eğer d commuting bir türev ve N, 2-torsion free ise N bir yakın cisim içine gömülebilir.

İspat (i) : Tüm sabitler Z dedir. Çünkü, c sabit olsun $\forall x \in N$ için $x - d(x) \in Z$ olduğundan $c - d(c) \in Z$ dir. $d(c) = 0$ olduğundan $c \in Z$ dir. Böylece sıfırdan farklı bir sabit varsa, Teorem 3.1.5 deki tartışmalardan (N,+) abeliandır.

Bundan dolayı sıfırın tek sabit olduğunu varsayabiliriz. Buna göre Lemma 3.1.2, $u = x - d(x)$ elemanı gibi düşünerek uygulanırsa, $x - d(x) \in \xi(N)$ olur. Buradan da $\forall x \in N$ için $x - d(x) + x - d(x) = x + x - d(x) - d(x) = x + x - d(x+x) \in Z$ bulunur.

Eğer $x - d(x) \neq 0$ olduğu ispat edilirse bu taktirde Lemma 3.1.4 (ii) den (N,+) abeliandır.

O halde varsayalım ki $\forall x \in N$ için $x - d(x) = 0$ olsun. Bu taktirde $\forall x,y \in N$ için $xy = d(xy) = xd(y) + d(x)y = xy + xy \Rightarrow xy = 0$ olur. Fakat bu bir asal yakın halkada mümkün değildir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. Yani $x - d(x) \neq 0$ olacak biçimde $x \in N$ elemanı vardır. Dolayısıyla ilk kısma göre (N,+) abeliandır. Bundan dolayı (N,+) abeliandır.

(ii) $[x,d(x)] = 0$, $\forall x \in N$ ve N, 2-torsion free olsun. İlk kısımda $d(x) \neq x$ olacak biçimde $x \in N$ elemanı olduğunu göstermiştik. O halde, $0 \neq d(x) - x \in Z$ hipotezi düşünülürse, $Z \neq \{0\}$ dır.

$< x,z > \in N^*$ elemanının N^* da sağ tersinin olması için gerek ve yeter koşul

$< x,z ><y, z_1> = <z_2, z_2>$, $z_1, z_2 \in Z$ olacak biçimde $y \in N$ elemanının olmasıdır. Burada $<z_2, z_2>$ elemanı N^* halkasının birim elemanıdır. Buradan,

$< x,z > \in N^*$ sağ tersinir $\Leftrightarrow xy \in Z - \{0\}$ olacak biçimde $y \in N$ elemanının var olmasıdır sonucu bulunur.

Şimdi N^* yakın halkasının cisim olduğunu görelim.

d = 0 ise; her $x \in N$ için $x - d(x) \in Z$ hipotezinden, $x \in Z$ olur. Dolayısıyla $xy \in N - \{0\}$ olacak biçimde $y \in N$ elemanı yoktur. Yani $\forall x \in N$ için $< x,z > \in N^*$ tersinirdir. Bu ise N^* bir yakın cisim demektir.

Buna göre, $d \neq 0$ olduğunu varsayalım.

$< x,z > \in N^*$ elemanını alalım. $xt \in N - \{0\}$ olacak biçimde $t \in N$ elemanı olmasın. Buna göre, $\forall y \in N$ için $Z \ni x^2 y - d(x^2 y) = x^2 y - (x^2 d(y) + d(x^2)y)$

$$= x^2 y - x^2 d(y) - d(x^2)y$$

$$= x^2 y - x^2 d(y) - x^2 y$$

$$= -x^2 d(y) = x(-xd(y))$$

olur. Yani $x(-xd(y)) \in Z$, $\forall y \in N$ bulunur. Öte yandan $xt \in Z - \{0\}$ olacak biçimde $t \in N$ elemanın olmadığı düşünülürse, $x^2 d(N) = \{0\}$ elde edilir. Bu ise Lemma 3.1.4 (iii) den $x^2 = 0$ demektir.

Buradan, $0 = d(x^2) = xd(x) + d(x)x = 2xd(x)$ olur. N, 2-torsion free olduğundan $xd(x) = 0$ bulunur. O halde,

$$x(x - d(x)) = x^2 - xd(x) = d(x^2) - xd(x)$$

$$= xd(x) + d(x)x - xd(x) = 0$$

Yani $x(x - d(x)) = 0$ ve dolayısıyla $x - d(x) \in Z$ olduğundan $x = 0$ veya $x - d(x) = 0$ bulunur. $x \neq 0$ ise $x - d(x) = 0$ dır. Öte yandan, $xy \in Z - \{0\}$ olacak biçimde $y \in N$ elemanı yoksa $xyp \in Z - \{0\}$ olacak biçimde $p \in N$ yoktur. Çünkü, $xyp \in Z - \{0\}$ ise $xt \in Z - \{0\}$, $t = yp$ olurdu. Çelişki O halde $\forall y \in N$ için $0 = xy - d(xy) = xy - xd(y) - d(x)y = -xd(y)$ olur. Yani $xd(N) = \{0\}$ dır. N asal ve $d \neq 0$ olduğundan $x = 0$ bulunur. Dolayısıyla N halkasında,

"$xy \in Z - \{0\}$ olacak biçimde $y \in N$ olmasın"

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı x elemanı yoktur. Yani N^* ın her elemanı sağ tersinirdir. Bu ise N^* bir yakın cisim demektir.

Sonuç 3.1.9 : N, distributively generated asal yakın halka ve d, her $x \in N$ için $x - d(x) \in Z$ olacak biçimde bir türev olsun. Buna göre N bir komütatif halkadır.

İspat : Teorem 3.1.8 den (N,+) abeliandır. N, distributively generated yakın halka olduğundan bir halkadır. d = 0 ise $\forall x \in N$ için $x - d(x) \in Z$ olduğundan $x \in Z$ olur. Yani halka komütatiftir. $d \neq 0$ ise $\forall x \in N$ için $x - d(x) \in Z$ olduğundan

$(x - d(x))x = x(x - d(x)),\ \forall x \in N \Rightarrow d(x)x = xd(x),\ \forall x \in N$ olur. Posner (1957)'a göre N halkası komütatiftir.

Yakın Halkalarda Scp-Türevler

Tanım 3.1.10 : N sıfır bölensiz bir yakın halka olmak üzere, $\forall x, y \in N$ için, $[x,y] = [d(x),d(y)]$ olacak biçimdeki d türevine *scp-türev* denir.

Uyarı 3.1.11 : Halka komütatif ise her türev scp-türevdir.

Lemma 3.1.12 : d, N üzerinde bir scp-türev olsun. Buna göre, tüm sabitler Z dedir. Üstelik N, birimli ise (N, +) abeliandır.

İspat : c sabit olsun. Buna göre, d scp-türev olduğundan $\forall y \in N$ için $[c,y] = [d(c),d(y)] = [0,d(y)] = 0$ olur. Her $y \in N$ için $[c,y] = 0$ ise $c \in Z$ olur.

N birimli olsun. $1+1 \in Z$ dir. Çünkü, $d(1) = d(1.1) = 1.d(1) + d(1).1 = d(1) + d(1)$ dir. Yani $d(1) = 0$ bulunur. $d(1 + 1) = d(1) + d(1) = 0 + 0 \Rightarrow 1 + 1 \in Z$ dir. Buna göre,

$$0 = [1 + 1, x + y] = (1 + 1)(x + y) - (x + y)(1 + 1) = (1 + 1)(x + y) - (1 + 1)(x + y)$$
$$= (1 + 1)(x + y - x - y),\ \forall x,y \in N$$

olur. N sıfır bölensiz ve $1 + 1 \neq 0$ olduğundan $x + y = y + x$, $\forall x,y \in N$ elde edilir. O halde (N,+) abeliandır.

Teorem 3.1.13 : N de sağ kısaltma kuralı var ve $0 \neq d:N \to N$ bir scp-türev olsun. Buna göre, d commutingtir ve (N,+) abeliandır.

İspat : $\forall x \in N$ için,

$[x,xd(x)] = [d(x),d(xd(x))] = [d(x), xd^2(x) + d(x)^2]$

$[x,xd(x)] = x[x,d(x)] = x[d(x),d^2(x)]$

İfadeleri birbirine eşit olduğundan,$[d(x), xd^2(x) + d(x)^2] = x[d(x),d^2(x)]$ olur. O halde, Lemma 3.1.1 kullanılırsa, $d(x)xd^2(x) + d(x)^3 - (xd^2(x) + d(x)^2)d(x) = xd(x)d^2(x) - xd^2(x)d(x)$ bulunur.

$\Rightarrow d(x)xd^2(x) + d(x)^3 = xd(x)d^2(x) - xd^2(x)d(x) + xd^2(x)d(x) + d(x)^3$

$\Rightarrow d(x)xd^2(x) + d(x)^3 = xd(x)d^2(x) + d(x)^3$

$\Rightarrow d(x)xd^2(x) = xd(x)d^2(x)$ olur.

$d^2(x) = 0$ ise $d(d(x)) = 0$ olur. Yani d(x) sabittir. Dolayısıyla $d(x) \in Z$ olur. Bu ise $[x,d(x)] = 0$ demektir.

$d^2(x) \neq 0$ ise o zaman $xd(x)d^2(x) = d(x)xd^2(x)$ ifadesinde sağ kısaltma kuralı uygulanırsa $[x,d(x)] = 0$ bulunur. Yani d commuting olur. Bu ise Teorem 3.1.3 den (N,+) abelian demektir.

Teorem 3.1.14 : N sıfır bölensiz bir yakın halka ve $0 \neq d:N \to N$ commuting scp-türev olsun. Buna göre,

(i) N bir komütatif halkadır.

(ii) N, 0 ve 1 den başka idempotent eleman içermez.

İspat (i) : d, bir scp-türev olsun. Buna göre $\forall x,y \in N$ için,

$$[x,xy] = x[x,y] = x[d(x),d(y)] \tag{3.9}$$

$$[x,xy] = [d(x),d(xy)] = [d(x),xd(y) + d(x)y] \tag{3.10}$$

bulunur. (3.9) = (3.10) olduğundan $x[d(x),d(y)] = [d(x),xd(y) + d(x)y]$ olur. Burada Lemma 3.1.1 ve Teorem 3.1.3 den (N,+) nın abellian olduğu kullanılarak $\forall x,y \in N$ için, $x[d(x),d(y)] = [d(x), xd(y) + d(x)y]$

$$\begin{aligned}
&= d(x)(xd(y) + d(x)y) - (xd(y) + d(x)y)d(x) \\
&= d(x)xd(y) + d(x)^2y - xd(y)d(x) - d(x)yd(x) \\
&= d(x)xd(y) - xd(y)d(x) + d(x)^2y - d(x)yd(x) \\
&= x[d(x),d(y)] + d(x)[d(x),y], \ \forall x,y \in N \text{ olur. Dolayısıyla,}
\end{aligned}$$

$d(x)[d(x),y] = 0, \ \forall x,y \in N$ bulunur. N sıfır bölensiz ve $d \neq 0$ olduğundan $[d(x),y] = 0$ $\forall x,y \in N$ olur. Özel olarak y yerine d(y) alınırsa $[d(x),d(y)] = 0$ olur. d scp-türev olduğundan $[x,y] = 0, \ \forall x,y \in N$ elde edilir. O halde, N halkası komütatiftir.

(ii) N commuting scp-türev içeriyorsa, tüm idempotent elemanlar merkezdedir. Çünkü, e keyfi bir idempotent eleman olsun. $e^2 = e$ olduğundan her iki taraftan türev alınırsa $d(e) = d(e^2)$ olur. Dolayısıyla $d(e) = ed(e) + d(e)e$ olur. d commuting olduğundan $d(e) = 2ed(e)$ bulunur. Buradan $ed(e) = 2e^2d(e) = 2ed(e) \Rightarrow ed(e) = 0$ elde edilir. $d(e) = 2ed(e)$ olduğundan $d(e) = 0$ bulunur. Yani e sabittir. Lemma 3.1.12 den $e \in Z$ dir.

e idempotent eleman olsun. $e^2 = e \Rightarrow e^2x = ex \Rightarrow e^2x - ex = 0 \Rightarrow e(ex - x) = 0, \ \forall x \in N$ olur. N sıfır bölensiz olduğundan $e = 0$ veya $ex - x = 0, \ \forall x \in N$ olur. $ex = x, \ \forall x \in N$ ise e sol birimdir. $e \in Z$ olduğundan e birimdir. Yani $e = 1$ dir. O halde e idempotent ise $e = 0$ veya $e = 1$ bulunur.

Teorem 3.1.15 : N bir yakın halka A, N nin sıfırdan farklı sıfır bölensiz bir ideali ve $0 \neq d:N \rightarrow N$ bir türev olsun. Buna göre, $\forall x,y \in A$ için $[x,d(x)] = 0$ ve $[x,y] = [d(x),d(y)]$ ise N bir komütatif halkadır.

İspat : Lemma 3.1.2 den her $x \in N$ ve $a \in A$ için $(x,a) = x + a - x - a$ elemanı sabittir. A bir ideal olduğundan $\forall y \in N$ için $y(x,a) = (yx,ya)$ elemanı da sabittir. Buna göre, $0 = d(y(x,a)) = yd(x,a) + d(y)(x,a)$

$= d(y)(x,a), \ \forall y \in N$

olur. Yani $d(N)(x,a) = 0$ dır.

$x \in A$ olduğunu kabul edelim. A sıfır bölensiz ve $d(N) \neq \{0\}$ olduğundan $(x,a) = 0, \ \forall x,a \in A$ bulunur. Yani (A,+) abeliandır.

Keyfi $a \in A-\{0\}$ ve $x,y \in N$ için, $(ax,ay) = a(x,y) = ax + ay - ax - ay$ dir. (A,+) abelian olduğu için, $a(x,y) = 0$ olur. $a \neq 0$ ve A sıfır bölensiz olduğundan $(x,y) = 0$, $\forall x,y \in N$ elde edilir. Dolayısıyla (N,+) abeliandır.

Teorem 3.1.14 ün ispatındaki gibi düşünürsek $d(x)[d(x),y] = 0, \ \forall x,y \in A$ olduğu bulunmuştu. $[d(x),y] \in A$ ve A sıfır bölensiz olduğundan $d(x) = 0$ veya $[d(x),y] = 0$ olur. Yani $[d(x),y] = 0, \ \forall x,y \in A$ bulunur. Özel olarak $\forall x,y \in A$ için

$$0 = [d(x),yd(y)] = d(x)yd(y) - yd(y)d(x)$$
$$= yd(x)d(y) - yd(y)d(x)$$
$$= y[d(x),d(y)]$$

dir. $0 \neq y \in A$ ve A sıfır bölensiz olduğundan $\forall x,y \in A$ için $[d(x), d(y)] = 0$ olur. Yani $\forall x,y \in A$ için $0 = [d(x), d(y)] = [x,y]$ bulunur. Dolayısıyla $[x,y] = 0$ olur.

$a \in A-\{0\}$, $u,v \in N$ için x yerine au ve y yerine av alınırsa,

$$0 = [au,av] = auav - avau$$
$$= a^2uv - a^2vu$$
$$= a^2[u,v]$$

$a \neq 0$ ve A sıfır bölensiz olduğundan $[u,v] = 0, \ \forall u,v \in N$ elde edilir. O halde N bir komütatif halkadır.

Lemma 3.1.16 : N, scp-türev içeren birimli bir yakın halka olsun. Buna göre,

$$(zx + z)y = zxy + zy, \ \forall x,y,z \in N \text{ dir.}$$

İspat : $d(1) = d(1.1) = 1d(1) + d(1)1 \Rightarrow d(1) = 0$ ve $[x+1,y] = [d(x+1),d(y)] = [d(x) + d(1),d(y)] = [d(x),d(y)] = [x,y]$ olduğundan $(x + 1)y - y(x + 1) = xy - yx \Rightarrow (x+1)y - yx - y = xy - yx \Rightarrow$ Lemma 3.1.12 den (N,+) abelian olduğundan

$(x + 1)y = xy - yx + y + yx \Rightarrow (x + 1)y = xy + y \Rightarrow z(x + 1)y = z(xy + y) \Rightarrow$ $(zx + z)y = zxy + zy \quad \forall x,y,z \in N$ elde edilir.

Teorem 3.1.17 : N, aN = N, $\forall a \in N\text{-}\{0\}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir yakın halka olsun. Eğer N, bir scp-türev içeriyor ise bu taktirde N bir bölüm halkasıdır.

İspat : Üzerinde scp-türev tanımlı N yakın halkası sıfır bölensizdir. yN = N olduğu düşünülürse, $y \in N\text{-}\{0\}$ için ye = y olacak biçimde, $e \in N$ elemanı vardır. Yani e sağ birimdir. $ye = y \Rightarrow ye^2 = ye \Rightarrow y(e^2 - e) = 0$ dir. N sıfır bölensiz olduğundan $e^2 = e$ olur. Yani e idempotenttir.
$d(e) = d(e^2) = ed(e) + d(e)e$ ifadesi soldan e ile çarpılırsa, $ed(e) = e^2d(e) + ed(e)e \Rightarrow$ $ed(e)e = 0$ bulunur. N sıfır bölensiz olduğundan $d(e)e = 0 \Rightarrow d(e)ey = 0, \ \forall y \in N \Rightarrow$ $d(e)eN = \{0\} \Rightarrow d(e)N = \{0\} \Rightarrow d(e) = 0$ dır. Yani e sabittir. Lemma 3.1.12 den tüm sabitler Z de olduğundan $e \in Z$ dir. Dolayısıyla e birimdir. Lemma 3.1.12 ve Lemma 3.1.16 düşünülürse N bir halkadır. Dolayısıyla $\forall 0 \neq x \in N$ için xN = N olduğundan, xy = e olacak biçimde $y \in N$ vardır. $xy = e \Rightarrow yxy = ye \Rightarrow yxyx = yex \Rightarrow yxyx = yx \Rightarrow yx(yx - e) = 0 \Rightarrow yx = e$ olur. O halde N bir bölüm halkasıdır.

Teorem 3.1.18 : R asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali ve $d : R \rightarrow R$ bir türev olsun. Buna göre $\forall x,y \in U$ için $[x,y] = [d(x),d(y)]$ ise R bir komütatif halkadır.

İspat : d = 0 ise [x,y] = 0 olacağından R komütatiftir. Dolayısıyla $d \neq 0$ alabiliriz. Buna göre, $\forall x,y \in U$ için,

$$\begin{aligned}[x,xy] &= [d(x),d(xy)] = [d(x), xd(y) + d(x)y] = [d(x), xd(y)] + [d(x), d(x)y] \\ &= x[d(x),d(y)] + [d(x),x]d(y) + d(x)[d(x),y] + [d(x),d(x)]y\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$[x,xy] = x[d(x),d(y)] + [d(x),x]d(y) + d(x)[d(x),y] \tag{3.11}$$

elde edilmiş olur. Öte yandan,

$$[x,xy] = x[x,y] = x[d(x),d(y)], \ \forall x,y \in U \tag{3.12}$$

olur. (3.11) ve (3.12) eşitliklerinden,

$$[d(x),x]d(y) + d(x)[d(x),y] = 0,\ \forall\, x,y \in U \tag{3.13}$$

eşitliği elde edilir. (3.13) eşitliğinde y yerine yr alınırsa,

$0 = [d(x),x]d(yr) + d(x)[d(x),yr]$

$= [d(x),x]yd(r) + [d(x),x]d(y)r + d(x)[d(x),y]r + d(x)y[d(x),r]$

$= [d(x),x]yd(r) + \{ [d(x),x]d(y) + d(x)[d(x),y] \}r + d(x)y[d(x),r]$, $\forall\, x,y\in U$, $\forall\, r\in R$ olur. (3.13) eşitliği kullanılırsa,

$$[d(x),x]yd(r) + d(x)y[d(x),r] = 0,\ \forall\, x,y\in U,\ \forall\, r\in R \tag{3.14}$$

bulunur. (3.14) eşitliğinde r yerine d(x) alınırsa,
$0 = [d(x),x]yd^2(x) + d(x)y[d(x),d(x)] = [d(x),x]yd^2(x)$, $\forall\, x,y\in U$ bulunur. Dolayısıyla $[d(x),x]Ud^2(x) = \{0\}$, $\forall\, x\in U$ olur. U sağ ideal olduğundan $[d(x),x]URd^2(x)\subset [d(x),x]Ud^2(x) = \{0\} \Rightarrow [d(x),x]URd^2(x) = \{0\}$ olur. R asal halka olduğundan $[d(x),x]U = \{0\}$ veya $d^2(x) = 0$ bulunur.

Varsayalım ki $d^2(x) = 0$ olsun. Bu taktirde $\forall\, y\in U$ için,

$[x,yd(x)] = [d(x),d(yd(x))] = [d(x),yd^2(x) + d(y)d(x)]$

$= [d(x),d(y)d(x)]$

$= d(y)[d(x),d(x)] + [d(x),d(y)]d(x) = [x,y]d(x)$

olur. Öte yandan

$[x,yd(x)] = [x,y]d(x) + y[x,d(x)]$

dir. Bu iki eşitlikten $y[x,d(x)] = 0$, $\forall\, y\in U \Rightarrow U[x,d(x)] = \{0\}$ elde edilir. U sağ ideal olduğundan $UR[x,d(x)] = \{0\}$ olur. R asal halka olduğundan $U = \{0\}$ veya $[x,d(x)] = 0$ olur. $U\neq \{0\}$ olduğundan $[x,d(x)] = 0$ olur.

$[d(x),x]U = \{0\}$ ise (3.14) den $d(x)U[d(x),r] = \{0\}$ olur. Dolayısıyla $d(x)UR[d(x),r] = \{0\}$ olur. R asal halka olduğundan $d(x)U = \{0\}$ veya $[d(x),r] = 0$, $\forall\, r\in R \Rightarrow d(x)U = \{0\}$ veya $d(x)\in Z$ bulunur. $d(y)\in Z - \{0\}$ olacak biçimde $y\in U$ var olsun.

$d(x)U = \{0\}$ ise (3.13) den $[d(x),x]d(y) = 0$ olur. Bu da $d(y)\in Z$ ve $d(y)\neq 0$ olduğundan $[d(x),x] = 0$, $\forall\, x\in U$ olur. Dolayısıyla Bell ve Martindale (1987)' den R halkası komütatiftir. $d(x) \in Z$ iken R halkasının komütatif olduğu görüldü.

$\forall x \in U$ için $d^2(x) = 0$ veya $d(x)U = \{0\}$ iken R halkasının komütatifliğine bakılacak. Bunun için $K = \{x \in U \mid d(x)U = \{0\}\}$ ve $L = \{ x \in U \mid d^2(x) = 0\}$ kümelerini düşünelim. Brauer's Trick den U = K veya U = L olmalıdır. U = K olsa $d(U)U = \{0\}$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}[x,yz] &= [d(x),d(yz)] = [d(x),yd(z) + d(y)z] \\ &= [d(x),yd(z)] + [d(x),d(y)z] \\ &= [d(x),y]d(z) + y[d(x),d(z)] + [d(x),d(y)]z + d(y)[d(x),z]\end{aligned}$$

ve $[x,yz] = y[x,z] + [x,y]z$ ifadelerinden $yd(x)d(z) = 0$, $\forall x,y,z \in U$ olur. Dolayısıyla $U[d(x),d(z)] = \{0\} \Rightarrow U[x,z] = \{0\}$, $\forall x,z \in U \Rightarrow [x,z] = 0$, $\forall x,z \in U$ olur. Yani U komütatiftir. U komütatif olduğundan $[x,z] = 0$, $\forall x,z \in U$. Z yerine zr, $r \in R$ alınırsa, $0 = [x,zr] = [x,z]r + z[x,r] = z[x,r]$ olur. Yani $\forall x,z \in U$ ve $\forall r \in R$ için $z[x,r] = 0$ dır. Dolayısıyla $U[x,r] = \{0\} \Rightarrow [x,r] = 0$ olur. Bu son eşitlikte x yerine xy, $y \in R$ alınırsa, $0 = [xy,r] = x[y,r] + [x,r]y = x[y,r]$, $\forall x \in U$, $\forall y,r \in R \Rightarrow U[y,r] = \{0\}$, $\forall y,r \in R \Rightarrow$ $[y,r] = 0$, $\forall y,r \in R$ olur. Yani R halkası komütatiftir.

U = L olsa $\forall x \in U$ için $d^2(x) = 0 \Rightarrow d^2(U) = \{0\} \Rightarrow [x,d(x)] = 0$, $\forall x \in U$ olur. O halde Bell ve Martindale (1987)' den R halkası komütatiftir.

Teorem 3.1.19 : N asal yakın halka ve $\{0\} \neq A$, N nin birimli distributively generated yakın halka olan bir ideali olsun. $d:N \rightarrow N$, $[x,y] = [d(x),d(y)]$, $\forall x,y \in A$ olacak biçimde bir türev ise N bir komütatif halkadır.

İspat : $e \in A$ birim eleman olsun. Yani $\forall x \in A$ için $ex = x$ dir. Her iki taraftan türev alırsak $d(ex) = d(x) \Rightarrow ed(x) + d(e)x = d(x)$

$\Rightarrow$ e birim, $d(x) + d(e)x = d(x)$

$\Rightarrow d(e)x = 0$, $\forall x \in A \Rightarrow d(e)A = \{0\} \Rightarrow d(e) = 0$

Yani e sabittir. $0 = d(e) + d(e) = d(e+e)$ olduğundan e + e de sabittir. Lemma 3.1.12 den $e \in Z$, $e + e \in Z$ olur. Dolayısıyla Lemma 3.1.4 (ii) den (A,+) abeliandır.

Bundan dolayı $\forall a \in A$ ve $\forall x,y \in A$ için $a(x + y - x - y) = ax + ay - ax - ay = ax - ax + ay - ay = 0$ dır. Dolayısıyla $a(x,y) = 0$, $\forall a \in A$ ve $\forall x,y \in N \Rightarrow A(x,y) = \{0\}$, $\forall x,y \in N \Rightarrow (x,y) = 0$, $\forall x,y \in N$ olur. Yani (N,+) abeliandır.

$x,y \in N$ ve $a,b \in A$ için $(ax + ay)b \in A$ dır. A distributive olduğundan $(ax + ay)b = axb + ayb$ dir. $\forall x,y \in N$ ve $\forall a,b \in A$ için $a((x+y)b - (xb+yb)) = 0 \Rightarrow A((x + y)b - (xb + yb)) = \{0\} \Rightarrow (x + y)b - (xb + yb) = 0 \Rightarrow (x + y)b = (xb + yb)$, $\forall x,y \in N$ ve $\forall b \in A$ dır. Keyfi $z \in N$ için b yerine zb alınırsa,

$(x + y)zb = xzb + yzb \Rightarrow ((x + y)z - (xz + yz))b = 0$, $\forall x,y,z\in N$ ve $\forall b\in A$ $\Rightarrow ((x + y)z - (xz + yz))A = \{0\} \Rightarrow (x + y)z - (xz + yz) = 0$, $\forall x,y,z\in N \Rightarrow (x + y)z = xz + yz$, $\forall x,y,z\in N$ olur. Dolayısıyla N distributivedir. N yakın halkası toplamsal değişmeli ve distributive olduğundan bir halka olur. Teorem 3.1.18 den N bir komütaif halkadır.

Sonuç 3.1.20 : N birimli, distributively generated asal yakın halka olsun. N scp-türev içeriyor ise N bir komütatif halkadır.

İspat : N yakın halkası birimli ve scp-türev içerdiğinden Teorem 3.1.19 dan (N,+) abeliandır. Üstelik N distributively generated olduğu için N bir halka olur. Üstelik Teorem 3.1.18 den N bir komütatif halkadır.

Daif 1-Türevleri

Tanım 3.1.21 : N yakın halka olmak üzere, d türevi için $-xy + d(xy) = -yx + d(yx)$, $\forall x, y \in N$ ise d ye *Daif 1-türev* denir.

Lemma 3.1.22 : $d : N \rightarrow N$ bir türev olsun. Buna göre $d(xy) = d(x)y + xd(y)$, $\forall x,y\in N$ olur.

İspat : $\forall x,y\in N$ için,
$$\begin{aligned} d(x(y+y)) &= xd(y+y) + d(x)(y+y) \\ &= xd(y) + xd(y) + d(x)y + d(x)y \\ d(x(y+y)) &= d(xy+xy) = d(xy) + d(xy) \\ &= xd(y) + d(x)y + xd(y) + d(x)y \end{aligned}$$
olur. O halde bu iki eşitlikten $xd(y) + d(x)y = d(x)y + xd(y) \Rightarrow d(xy) = d(x)y + xd(y)$, $\forall x,y\in N$ bulunur.

Lemma 3.1.23 : N yakın halka ve $d:N\rightarrow N$ bir Daif 1-türev olsun. Buna göre,

(i) Her $c = [x,y]$ komütatörü için $d(c) = c$ dir.

(ii) $d(z)[x,y] = [x,y]d(z)$, $\forall x,y,z\in N$ dir.

İspat (i) : Daif 1-türev tanımından açıktır.

(ii) : d bir Daif 1-türev olduğu için $-[x,y]z + d([x,y]z) = -z[x,y] + d(z[x,y])$ dir. Eşitliğin sol tarafını Lemma 3.1.22 yi kullanarak sağ tarafını ise normal türev kullanarak açalım. Buna göre $-[x,y]z + d([x,y])z + [x,y]d(z) = -z[x,y] + zd([x,y]) + d(z)[x,y]$ dir. (i) den $[x,y]d(z) = d(z)[x,y]$, $\forall x,y,z\in N$ elde edilir.

Lemma 3.1.24 : N bir asal yakın halka ve $d:N \to N$ bir Daif 1-türev olsun. Buna göre,

(i) c bir komütatör ve uc = vc, $u,v \in N$ ise $cd(u-v) = 0$ dir.

(ii) c_1, c_2 komütatör ve $c_1c_2 = 0$ ise $c_1 = 0$ veya $c_2 = 0$ dır.

İspat (i) : c bir komütatör ve uc = vc ise $d(uc) = d(vc) \Rightarrow ud(c) + d(u)c = vd(c) + d(v)c$ olur. Lemma 3.1.23 (i) kullanılırsa $uc + d(u)c = vc + d(v)c \Rightarrow d(u)c = d(v)c$ bulunur. Lemma 3.1.23 (ii) den $cd(u) = cd(v)$ ve dolayısıyla $cd(u-v) = 0$ elde edilir.

(ii) $c_1c_2 = 0 = 0c_2$ dir. (i) den $c_2d(c_1) = 0$ olur. Yani $c_2c_1 = 0$ bulunur. Buna göre (i) kullanılırsa $\forall x \in N$ için,

$$
\begin{aligned}
x c_1c_2 = 0 = 0c_2 &\Rightarrow c_2d(xc_1) = 0 \\
&\Rightarrow c_2xd(c_1) + c_2 d(x)c_1 = 0 \\
&\Rightarrow \text{Lemma 3.1.23 (ii) den } c_2xd(c_1) + d(x)c_2 c_1 = 0 \\
&\Rightarrow c_2Nc_1 = \{0\} \Rightarrow c_2 = 0 \text{ veya } c_1 = 0 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Teorem 3.1.25 : N bir asal yakın halka ve $0 \neq d:N \to N$ bir Daif 1-türev olsun . Buna göre,

(i) (N,+) abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : $[x,xy] = x[x,y]$, $\forall x,y \in N$ dir. Lemma 3.1.23 (ii) den $d(z)[x,xy] = [x,xy]d(z)$ dir. $d(z)[x,xy] = d(z)x[x,y] = x[x,y]d(z) = xd(z)[x,y]$, $\forall x,y,z \in N$ bulunur. Lemma 3.1.24 (i) den $[x,y]d(d(z)x - xd(z)) = 0$, $\forall x,y,z \in N \Rightarrow [x,y][d(z),x] = 0$ olur. Lemma 3.1.24 (ii) den $x \in Z$ veya $[d(z),x] = 0$ dır. Dolayısıyla $d(N) \subseteq Z$ olur. Teorem3.1.5 den ispat tamamlanır.

Daif 2-Türevleri

Tanım 3.1.26 : N yakın halka olmak üzere, d türevi için $xy + d(xy) = yx + d(yx)$, $\forall x,y \in N$ ise d ye Daif 2-türev denir.

Her $x,y \in N$ için $xy + yx = yx + xy$ ise N yakın halkasına pseudo-abelian denir.

Lemma 3.1.27 : N psudo-abelian ve $d:N \to N$ bir Daif 2-türev olsun. Her c komütatörü ve $z \in N$ için $cz + d(c)z = 0$ ise $[d(z),c] = 0$ olur. Özel olarak z distributive veya (N birimli ve $[z,-1] = 0$) ise her c komütatörü ve $z \in N$ için $[d(z),c] = 0$ olur.

İspat : d, Daif 2-türev olduğu için $xz + d(xz) = zx + d(zx),\ \forall x,z \in N$ dir. x yerine [x,y] alınırsa, $[x,y]z + d([x,y]z) = z[x,y] + d(z[x,y]) \Rightarrow [x,y]z + d[x,y]z + [x,y]d(z) = z[x,y] + zd[x,y] + d(z)[x,y]$ olur. Hipotezden $[x,y]z + d[x,y]z = 0$ olduğu için $[x,y]d(z) = z([x,y] + d[x,y]) + d(z)[x,y]$ bulunur. d, Daif 2-türev olduğundan $[x,y]d(z) = d(z)[x,y],\ \forall x,y,z \in N$ dir. Yani her c komütatörü için $[d(z),c] = 0$ olur. Eğer z distributive ise benzer şekilde ispatlanabilir.
N birimli ve $[z,-1] = 0$ ise $0 = [z,-1] = z(-1) - (-1)z$ dir. Soldan c ile çarparsak, $0 = cz(-1) - c(-1)z = c(-z) - c(-z)$ olur. d, Daif 2-türev olduğundan $c(-z) + d(c)(-z) = 0$ bulunur. O halde her c komütatörü için $[d(-z),c] = 0$ olur. $0 = [d(-z),c] = [-d(z),c] = -d(z)c - c(-d(z)) = -d(z)c + cd(z)$ olur. Buradan $d(z)c - cd(z) = 0 \Rightarrow$ her c komütatörü için $[d(z),c] = 0$ olur.

Teorem 3.1.28 : N sıfır bölensiz yakın halka ve $d:N \rightarrow N$ sıfırdan farklı bir Daif 2-türev olsun. Buna göre N bir komütatif halkadır.

İspat : d bir Daif 2-türev olduğundan $\forall x,y \in N$ için $xy + d(xy) = yx + d(yx)$ dir. Buna göre $xy + d(xy) = yx + d(yx),\ \forall x,y \in N$ eşitliğine sağdan d(xy) nin soldan yx in toplamsal tersini eklersek $-yx + xy = d(yx) - d(xy)$ olur. Dolayısıyla,

$$-yx + xy = d[y,x],\ \forall x,y \in N \tag{3.15}$$

olur. x yerine yx alınırsa, $-y^2x + yxy = d[y,yx] = d(y[y,x]) \Rightarrow y(-yx + xy) = yd[y,x] + d(y)[y,x] \Rightarrow yd[y,x] = yd[y,x] + d(y)[y,x]$ dir. Dolayısıyla,

$$d(y)[y,x] = 0,\ \forall x,y \in N \tag{3.16}$$

bulunur. (3.16) eşitliğinde x yerine d(y) alınırsa ve N nin sıfır bölensiz olduğu kullanılırsa, $d(y)[y,d(y)] = 0,\ \forall y \in N$ olur. Yani d commutingtir. Teorem 3.1.3 den (N,+) abelian olur. Üstelik (3.16) eşitliğinden,

$$d(y) = 0 \text{ veya } y \in Z \tag{3.17}$$

dir. $d(y) \neq 0$ ise $y \in Z$ dir. Yani sabit olmayanlar Z dedir.

Öte yandan $d(y) = 0$ olsun. Buna göre (3.15) eşitliği düşünülürse her x sabiti için $-yx + xy = d[y,x] = d(yx - xy) = d(yx) - d(xy) = yd(x) + d(y)x - xd(y) - d(x)y = 0$ olur. Yani her x,y sabiti için $xy = yx$ olur. Öte yandan (3.17) eşitliğinden $d(y) \neq 0$ ise $y\in Z$ dir. O halde $S = \{x\in N \mid x \text{ sabit}\}$ dersek, $x,y\in S \Rightarrow xy = yx$ ve $x,y\in N - S \Rightarrow xy = yx$ olduğu bulunur. Yani N bir komütatif halkadır.

Lemma 3.1.29 : N, bir 3-asal yakın halka olsun. Buna göre, $xz\in Z$ veya $zx\in Z$ olacak biçimde $z\in Z\text{-}\{0\}$ ve $x\in N$ ise $x\in Z$ dir.

İspat : $xz\in Z$ olsun. Buna göre, $xzy = yxz$, $\forall y\in N$ dir. $z\in Z\text{-}\{0\}$ olduğundan $z(xy - yx) = 0$ olur. N, 3-asal yakın halka olduğundan $xy = yx$, $\forall y\in N$ dir. Yani $x\in Z$ dir.

Lemma 3.1.30 : N, bir 3-asal yakın halka ve $0\neq d : N \rightarrow N$ bir türev olsun. Buna göre,

(i) Sıfırdan farklı U yarı grup sağ ideali için $Ux = \{0\}$, $\forall x\in N$ ise $x = 0$ dır.

(ii) U sıfırdan farklı, yarı grup sağ ideal veya yarı grup sol ideal ise $d(U)\neq \{0\}$ dır.

(iii) U sıfırdan farklı yarı grup sağ ideal olsun. Buna göre$[x,U] = 0$, $x\in N$ ise $x\in Z$ dir.

İspat (i) U sıfırdan farklı bir yarı grup sağ ideal olsun. Buna göre $UNx\subset Ux$, $\forall x\in N$ dir. Hipotezden $UNx = \{0\}$ olur. N 3-asal olduğundan $U = \{0\}$ veya $x = 0$ dır. $U\neq \{0\}$ olduğundan $x = 0$ olur.

(ii) U yarı grup sağ ideal ve $d(U) = \{0\}$ olsun. Buna göre, $\forall u\in U$ ve$\forall x\in N$ için $ux\in U$ olur. O halde $0 = d(ux) = ud(x) + d(u)x = ud(x)$, $\forall u\in U$ olur. Yani $Ud(x) = \{0\}$ olur. (i) den $\forall x\in N$ için $d(x) = 0$ olur. Yani $d = 0$ dır. Bu ise $d\neq 0$ hipotezi ile çelişir. O halde N, 3-asal olduğundan $U = 0$ veya $d(x) = 0$ olur. $\forall x \in N$ için $d(x) = 0$ olsun. Bu durumda $d = 0$ dır. Bu da, $d\neq 0$ olması ile çelişir. O halde U sıfırdan farklı bir yarı grup sağ ideal veya yarı grup sol ideal ise $d(U)\neq \{0\}$ dır.

(iii) U yarı grup sağ ideal ve $[x,U] =\{0\}$ osun. Buna göre $\forall u\in U$ ve $\forall y\in N$ için $(uy)x = x(uy) = (xu)y = (ux)y = u(xy)$ olur. Dolayısyla $U(yx - xy) = \{0\}$,$\forall y\in N$ olur. (i) den $x\in Z$ elde edilir.

Lemma 3.1.31 : N, 3-asal yakın halka, U, N nin sıfırdan farklı bir yarı grup ideali ve $0\neq d:N\rightarrow N$ bir türev olsun. Buna göre,

(i) x,y$\in$ N ve xUy = {0}ise x = 0 veya y = 0 dır.

(ii) x$\in$ N ve d(U)x = {0} ise x = 0 dır.

(iii) x$\in$ N ve xd(U) = {0} ise x = 0 dır.

İspat (i) : U yarı grup ideal olduğu için UN$\subset$U dur. O halde soldan x, sağdan y ile çarpılırsa xUNy$\subset$xUy olur. xUy = {0} olduğu için xUNy = {0} olur. N, 3-asal olduğundan xU = {0} veya y = 0 dır. Lemma 3.1.30 (i) den x = 0 veya y = 0 bulunur.

(ii) d(U)x = {0} olsun. $\forall$ u$\in$ U ve $\forall$ y$\in$ N için, 0 = d(yu)x = (yd(u) + d(y)u)x = yd(u)x + d(y)ux = d(y)ux olur. Dolayısıyla d(y)Ux ={0}, $\forall$ y$\in$ N elde edilir. (i) den d(y) = 0, $\forall$ y$\in$ N veya x = 0 bulunur. $\forall$ y$\in$ N için d(y) = 0 olsa d = 0 olacağından d$\neq$0 olması ile çelişir. Bundan dolayı, x = 0 dır.

(iii) Önceki ispata benzer şekilde yapılır.

Örnek 3.1.32 : F bir cisim olmak üzere, R = M_2(F) asal halkası olsun. U = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$R ve d : R$\to$R d(w) = w$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $-$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$w, olarak verilen iç türev olsun. Buna göre, U = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$R = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in F \right\}$ = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b \in F \right\}$ dir.

$$d(U) = \{\ d(a) \mid a\in U\} = \left\{ a\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}a \mid a \in U \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid m,n \in F \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid m \in F \right\} \text{ elde edilir.}$$

Öte yandan x = y = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\forall$ w$\in$ U için, xwy = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, olur. Benzer biçimde xd(U) = d(U)x = {0} olur. Yani Lemma 3.1.31 de U nun tek yanlı ideal olması N nin halka olması durumunda dahi sonuç için yeterli olmaz.

Lemma 3.1.33 : N bir 3-asal yakın halka ve U$\neq$ {0} bir yarı grup sol ideal veya yarı grup sağ ideal olsun. Buna göre, U$\subseteq$Z ise N bir komütatif halkadır.

İspat : U, merkezde kapsandığı için U yu yarı grup sağ ideal varsayabiliriz. Lemma 3.1.30 (iii) den N komütatiftir. Dolayısıyla sağ distribütiftir.

Öte yandan Lemma 3.1.30 (i) den $U^2 \neq \{0\}$ dır. Çünkü, $U^2 = \{0\}$ olsa U = {0} olur. O halde $zw \neq 0$ olacak biçimde $z,w \in U$ vardır. Buna göre, zw + zw = $z(w + w) \in U \subseteq Z$ ifadesinden $z(w + w) \in Z$ demek Lemma 3.1.29 dan $w + w \in Z$ olur. O halde Lemma 3.1.29 dan $w \in Z - \{0\}$ ve $w + w \in Z$ demek (N,+) abelian demektir. Dolaysıyla N bir komütatif halkadır.

Teorem 3.1.34 : N bir 3-asal yakın halka, $U \neq \{0\}$ bir yarı grup sağ ideal veya yarı grup sol ideal olsun. Buna göre N, $d(U) \subseteq Z$ olacak biçimde $0 \neq d$ türevi içeriyorsa N bir komütatif halkadır.

İspat : $U \neq \{0\}$, $d(U) \subseteq Z$ olacak biçimdeki yarı grup sağ ideal veya yarı grup sol ideal olsun. Buna göre, $\forall u,v \in U$ için $d(uv) = ud(v) + d(u)v \in Z$ dir. O halde $(ud(v) + d(u)v)v = v(ud(v) + d(u)v)$, $\forall u,v \in U$ olur. Lemma 3.1.1 den $ud(v)v + d(u)v^2 = vud(v) + vd(u)v$ elde edilir. Öte yandan $d(U) \subseteq Z$ olduğu için $ud(v)v + d(u)v^2 = vud(v) + d(u)v^2$ olur. Dolayısıyla $ud(v)v = vud(v)$ $\forall u,v \in U$ elde edilir. Tekrar $d(U) \subseteq Z$ olduğu kullanılırsa,

$$d(v)(uv - vu) = 0, \ \forall u,v \in U \qquad (3.18)$$

olur. Lemma 3.1.4 (i) den $d(v) = 0$ veya $uv - vu = 0$, $\forall u \in U$ elde edilir. Yani,

$$d(v) = 0 \text{ veya } uv = vu, \ \forall u \in U \qquad (3.19)$$

Varsayalım ki, $v \in U$ ve $d(v) = 0$ olsun. Buna göre, $d(uv) = ud(v) + d(u)v = d(u)v$, $\forall u \in U$ olur. Yani $d(u)v \in Z$, $\forall u \in U$ olur. Dolayısıyla, $xd(u)v = d(u)vx$, $\forall u \in U$ ve $\forall x \in N$ dir. O halde, $d(U)(xv - vx) = \{0\}$, $\forall x \in N$ ve $\forall u \in U$ bulunur. $d(U) \subseteq Z$ ve N bir 3-asal yakın halka olduğundan, Lemma 3.1.4 (i) den $d(U) = \{0\}$ veya $(xv - vx) = 0$, $\forall x \in N$ olur. Lemma 3.1.30 (ii) den $v \in Z$ elde edilir. Yani,

$$v \in U \text{ ve } d(v) = 0 \text{ ise } v \in Z \qquad (3.20)$$

dir. $v \in U$ ve $d(v) \neq 0$ olsun. Bu durumda $uv = vu$, $\forall u \in U$ olur.

U yarı grup sağ ideal ise (3.19) ve (3.20) eşitlikleriyle birlikte Lemma 3.1.30 (iii) den $U \subseteq Z$ dir. O halde Lemma 3.1.33 ten de N bir komütatif halkadır.

U yarı grup sol ideal ise benzer biçimde N nin komütatif olduğu gösterilir.

$U \cap Z \neq \{0\}$ ise $0 \neq w \in Z$ ve $w \in U$ olacak biçimde w elemanı vardır. $\forall x \in N$ için $xwu = uxw = wux$ olur. Dolayısıyla, $w(ux - xu) = 0$, $\forall x \in N$ ve $\forall u \in U$ elde edilir. $w \neq 0$ olduğundan $u \in Z$ olur. O halde Lemma 3.1.33 ten N bir komütatif halkadır.

$U \cap Z = \{0\}$ ise (3.20) eşitliğinden $\forall u \in U - \{0\}$ için $d(u) \neq 0$ dır. Her u için $d(u^2) = ud(u) + d(u)u$ olur. $d(u) \subseteq Z$ olduğu için $d(u^2) = d(u)2u \in Z$ elde edilir. Lemma 3.1.29 dan $d(v) = 0$ veya $2u \in Z$ olur.

Kabul edelim ki $2u \neq 0$, $\forall u \in U - \{0\}$ olsun. Lemma 3.1.30 (i) den $\forall x \in N - \{0\}$ için $xu_x \neq 0$ olacak biçimde bir $u_x \in U$ vardır. $xu_x \in U$ olduğu için $2xu_x \in Z$ olur. $2xu_x = xu_x + xu_x = x(u_x + u_x) = x2u_x \in Z$ olur. Öte yandan, Lemma 3.1.29 dan $x \in Z$ veya $2u_x = 0$ bulunur. Hipotez kullanılırsa, $x \in Z$ bulunur. Dolayısıyla N bir komütatif halkadır.

Kabul edelim ki $2u = 0$ olacak biçimde $u \in U - \{0\}$ var olsun. Buna göre, $d(u^3) = d(u.u^2) = ud(u^2) + d(u)u^2 = u^2d(u) + ud(u)u + d(u)u^2$ dir. $d(N) \subseteq Z$ olduğu için $d(u^3) = 3u^2d(u) \in Z$ olur. Diğer yandan, $3u^2d(u) = u^2d(u) + 2uud(u)$ dur. Varsayımımızda $2u = 0$ olduğundan $u^2d(u) \in Z$ elde edilir. Dolayısıyla, $u^2 \in Z$ veya $d(u) = 0$ dır. $d(u) \neq 0$ olduğundan $u^2 \in Z$ dir. $u^2 \in U \cap Z = \{0\}$ dan $u^2 = 0$ elde edilir. Buna göre,

$\forall x \in N$ için $d(xu) = xd(u) + d(x)u \in Z$ olduğundan $(xd(u) + d(x)u)u = u(xd(u) + d(x)u)$ dir. Lemma 3.1.1 kullanılırsa, $xd(u)u + d(x)u^2 = u(xd(u) + d(x)u)$ olur. $u^2 = 0$ olduğundan $xd(u)u = u(xd(u) + d(x)u)$ bulunur. Son eşitliği soldan u ile çarparsak, $uxd(u)u = u^2(xd(u) + d(x)u)$ elde edilir. $u^2 = 0$ olduğundan, $uxd(u)u = 0$, $\forall x \in N$ elde edilir. N, 3-asal olduğundan $d(u)u = 0$ veya $u = 0$ bulunur. Yani $d(u)u = 0$ olur. $d(u)u = 0$ eşitliğini soldan x ile çarparsak $xd(u)u = 0$, $\forall x \in N$ dir. $d(N) \subseteq Z$ den, $d(u)xu = 0$, $\forall x \in N$ olur. N nin asallığından $d(u) = 0$ veya $u = 0$ elde edilir. $d(u) \neq 0$ olduğundan $u = 0$ olur. Bu da $u \in U - \{0\}$ olması ile çelişir. O halde $2u \neq 0$ olur. $2u \neq 0$ iken N nin komütatif halka olduğu belirtilmişti.

$[d(U),d(U)] = \{0\}$ Koşullu Yakın Halkalar

Lemma 3.1.35 : N bir 3 asal yakın haka, U sıfırdan farklı yarı grup ideal, $0 \neq d : N \rightarrow N$ bir türev ve $d^2(U) = 0$ olsun. Buna göre $d^2 = 0$ dır.

İspat : $\forall u,v \in U$ için,

$$
\begin{aligned}
0 = d^2(uv) &= d(d(uv)) = d(ud(v) + d(u)v) \\
&= d(ud(v)) + d(d(u)v)) \\
&= ud^2(v) + d(u)d(v) + d^2(u)v + d(u)d(v) \\
&= d(u)d(v) + d(u)d(v) \\
&= d(u)(d(v) + d(v)) = d(u)2d(v),\ \forall u,v \in U \text{ olur. Lemma 3.1.31 (ii)}
\end{aligned}
$$

den $2d(v) = 0$, $\forall v \in U$ elde edilir. Yani, $2d(U) = \{0\}$ olur. $y \in N$ ve $v \in U$ için,

$$
\begin{aligned}
0 = d^2(yv) &= d(yd(v) + d(y)v) \\
&= d(yd(v)) + d(d(y)v) \\
&= yd^2(v) + d(y)d(v) + d(y)d(v) + d^2(y)v \\
&= yd^2(v) + 2d(y)d(v) + d^2(y)v \text{ dir. } d^2(U) = 0 \text{ ve } 2d(U) = \{0\}
\end{aligned}
$$

olduğundan $d^2(y)v = 0$, $\forall v \in U$, $\forall y \in N$ bulunur. Buda $d^2(y)U = \{0\}$, $\forall y \in N$ demektir. O halde $d^2(y) = 0$ dır. Bu nedenle $d^2 = 0$ bulunur.

Lemma 3.1.36 : N bir 3-asal yakın halka, U, N nin sıfırdan farklı bir yarı grup ideali, $0 \neq d : N \rightarrow N$ bir türev ve $d^2(U) \neq \{0\}$ olsun. Buna göre $a \in N$ ve $[a,d(U)] = \{0\}$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : $C(a) = \{ x \in N \mid ax = xa\}$ olsun. $[a,d(U)] = \{0\}$ olduğu için $d(U) \subseteq C(a)$ olur. Böylece $y \in C(a)$ ve $u \in U$ için $d(yu), d(u) \in C(a)$ dır. Buna göre, $d(yu)a = ad(yu)$ ve dolayısıyla, $(yd(u) + d(y)u)a = a(yd(u) + d(y)u)$ olur. Buradan da, $yd(u)a + d(y)ua = ayd(u) + ad(y)u$ bulunur. $d(u) \in C(a)$ ve $y \in C(a)$ olduğundan $d(y)ua = ad(y)u$ bulunur. O halde,

$$d(C(a))U \subseteq C(a) \tag{3.21}$$

olur. $d^2(z) \neq 0$ olacak biçimde $z \in U$ seçelim ve $y = d(z)$ olsun. $y \in C(a)$ olduğu için (3.21) eşitliğinden $d(y)u \in C(a)$ ve $d(y)uv \in C(a)$, $\forall u,v \in U$ olur. Dolayısıyla $0 = [a, d(y)uv] = ad(y)uv - d(y)uva = d(y)uav - d(y)uva = d(y)u(av - va)$, $\forall u,v \in U$ olur. Yani $d(y)U(av - va) = 0$, $\forall v \in U$ dir. Lemma 3.1.31 (i) den a, U yu merkezler. Dolayısıyla Lemma 3.1.30 (iii) den $a \in Z$ elde edilir.

Teorem 3.1.37 : N, 3-asal yakın halka, U, N nin sıfırdan farklı bir yarı grup ideali, $d : N \to N$ bir türev, $d^2 \neq 0$ ve $[d(U),d(U)] = \{0\}$ olsun. Buna göre, N bir komütatif halkadır.

İspat : Lemma 3.1.35 den $d^2(U) \neq \{0\}$ dır. Lemma 3.1.36 dan $d(U) \subseteq Z$ dir. Dolayısıyla Teorem 3.1.34 den N bir komütatif halkadır.

Teorem 3.1.38 : N, 3-asal yakın halka, U, N nin sıfırdan farklı bir yarı grup ideali, $0 \neq d:N \to N$ bir türev ve $K = \{a \in N \mid [a,d(U)] = \{0\}\}$ olsun. Buna göre,

- **(i)** $a \in K$ ise $a \in Z$ veya $d(a) = 0$ dır.
- **(ii)** K, çarpma işlemi altında değişmeli yarı gruptur.
- **(iii)** $d(K) \subseteq Z$ dir.
- **(iv)** $d(a) \neq 0$ olacak biçimde $a \in K$ varsa (N,+) abeliandır.
- **(v)** Eğer K, sıfırdan farklı yarı grup sağ ideal veya yarı grup sol ideal kapsar ise N komütatif bir halkadır.

İspat :

(i) : $a \in K$ olsun. $u \in U$ için $[a,d(au)] = 0$ olduğundan $ad(au) = d(au)a$ olur. Yani $a(ad(u) + d(a)u) = (ad(u) + d(a)u)a$ dır. Dolayısıyla, $a^2d(u) + ad(a)u = ad(u)a + d(a)ua$ olur. $a \in K$ olduğundan $a^2d(u) + ad(a)u = a^2d(u) + d(a)ua$ elde edilir. Bundan dolayı $ad(a)u = d(a)ua$, $\forall u \in U$ olur. O halde a, d(a)U yarı grup sağ idealini merkezler.

$d(a)U \neq \{0\}$ ise Lemma 3.1.30 (iii) den $a \in Z$ elde edilir. Öte yandan,

$d(a)U = \{0\}$ ise Lemma 3.1.30 (i) den $d(a) = 0$ olur. Sonuç olarak $a \in K$ ise $a \in Z$ veya $d(a) = 0$ dır.

(ii) : $d(b) = 0$ olacak biçimde $a,b \in K$ olsun. Buna göre $bu \in U$ olduğu için $ad(bu) = d(bu)a$, $\forall u \in U$ dur. $d(b) = 0$ olduğundan ve Lemma 3.1.1 den $abd(u) = bd(u)a$, $\forall u \in U$ elde edilir. Öte yandan $b \in K$ olduğu için $d(U)(ab - ba) = \{0\}$ olur. Lemma 3.1.31 (ii) den $\forall a,b \in K$ için $ab = ba$ bulunur.

$d(b) \neq 0$ ise (i) den $b \in Z$ olduğu biliniyor.

(iii) : $0 \neq x \in d(K)$ ise $x = d(a)$, $a \in K$ olur. (i) den $x = d(a)$, ($a \in Z$ veya $d(a) = 0$) olur. $x \neq 0$ yani $d(a) \neq 0$ olduğundan $a \in Z$ bulunur. Bu ise $d(a) \in Z$ demektir. Dolayısıyla $x = d(a) \in Z$, yani $d(K) \subseteq Z$ elde edilir.

(iv) : $a \in K$ ve $d(a) \neq 0$ olsun. Buna göre (i) den $a \in Z$ olur. Dolayısıyla $d(a) \in Z$ dir. Öte yandan $a \in K$ ve $a \in Z$ ise $[a^2,d(U)] = a[a,d(U)] + [a,d(U)]a = \{0\}$ olduğundan $a^2 \in K$ dır. Dolayısıyla (iii) den $d(a^2) \in Z$ bulunur. Yani $Z \ni d(a^2) =$

$ad(a) + d(a)a = 2d(a)a = d(a)2a$ ve dolayısıyla $d(a)2a \in Z$ olur. O halde $d(a) \in Z$ ve $d(a)2a \in Z$ demek $d(a) \neq 0$ olduğu da düşünülürse Lemma 3.1.29 dan $2a \in Z$ demektir. Buna göre $a \in Z$, $a + a \in Z$ olduğu için Lemma 3.1.4 (ii) den $(N,+)$ abeliandır.

(v) : $0 \neq H \subset K$ olan H, yarı gup sağ ideal veya yarı grup sol ideal olsun. (iii) den $d(H) \subseteq Z$ olur. Teorem 3.1.34 den N bir komütatif halkadır.

Teorem 3.1.39 : N, 3-asal yakın halka, U, N nin sıfırdan farklı bir yarı grup ideali, $0 \neq d: N \to N$ bir türev olsun. Buna göre, $[d(U),d(U)] = 0$ ise $(N,+)$ abeliandır.

İspat : $[z,d(U)] = [z + z , d(U)] = \{0\}$ olacak biçimde $z \in N$ ve $u,v \in U$ için $c = v + u - v - u$ alınırsa $zd(c) = 0$ olur. Çünkü,

$$\begin{aligned}(z + z)d(u + v) &= (z + z)(d(u) + d(v)) \\ &= (z + z)d(u) + (z + z)d(v) \\ &= d(u)(z + z) + d(v)(z + z) \\ &= d(u)z + d(u)z + d(v)z + d(v)z \\ &= zd(u) + zd(u) + zd(v) + zd(v) \text{ olur. Öte yandan,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z + z)d(u + v) &= d(u + v)(z + z) \\ &= d(u + v)z + d(u + v)z \\ &= zd(u + v) + zd(u + v) \\ &= zd(u)+ zd(v) + zd(u) + zd(v) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Bu iki ifadenin eşitliğinden $zd(u) + zd(v) = zd(v) + zd(u)$ bulunur. Buradan da $zd(u) + zd(v) - zd(u) - zd(v) = 0$ olur. Yani $zd(u + v - u - v) = 0$ dır. Sonuç olarak $zd(c) = 0$ bulunur.

$r, s \in U$ ise $rs \in U$ dur. Üstelik, $rs + rs = r(s + s) \in U$ olur. $[d(U),d(U)] = 0$ olduğu için $zd(c) = 0$ ifadesinde z yerine $d(rs)$ alınırsa, $d(rs)d(u + v - u - v) = 0$ dan $d(U^2)d(c) = 0$ olur. Ayrıca $U^2 \neq 0$ yarı grup ideal olduğu için Lemma 3.1.31 (ii) den

$$d(c) = d(u + v - u - v) = 0, \; u + v \in U \text{ olacak biçimdeki } \forall u,v \in U \tag{3.22}$$

elde edilir. u yerine rx, v yerine ry, alınırsa ve (3.22) eşitliğinde yerine yazılırsa, $d(rx + ry - rx - ry) = 0$, $\forall r \in U$, $\forall x,y \in N$ bulunur. r yerine wr, $w \in U$ alınırsa,

$$\begin{aligned}0 = d(wrx + wry - wrx - wry) &= d(w(rx + ry - rx - ry)) \\ &= d(w)(rx + ry - rx - ry), \; \forall r,w \in U, \; \forall x,y \in N\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla d(U)(rx + ry – rx – ry) = 0, $\forall$ r$\in$ U, $\forall$ x,y$\in$ N olur. Lemma 3.1.31 (ii) den 0 = rx + ry – rx – ry = r(x + y – x – y), $\forall$ r $\in$ U, $\forall$ x,y $\in$ N elde edilir. Yani U(x + y – x – y) = {0}, $\forall$ x,y $\in$ N dir. O halde Lemma 3.1.30 (i) den x + y = y + x , $\forall$ x,y$\in$ N bulunur. Sonuç olarak (N,+) abeliandır.

Teorem 3.1.40 : N bir 3-asal yakın halka, U, N nin sıfırdan farklı bir yarı grup ideali, d:N$\rightarrow$N bir türev, d(uv) = d(vu), $\forall$ u,v$\in$ U ve $d^2 \neq 0$ olsun. Buna göre, N bir komütatif halkadır.

İspat : c$\in$ U elemanı bir sabit olsun. Yani d(c) = 0 dır. Buna göre, $\forall$ u$\in$ U için d(cu) = d(uc)$\Rightarrow$ cd(u) + d(c)u = ud(c) + d(u)c$\Rightarrow$cd(u) = d(u)c$\Rightarrow$[c,d(U)] = {0} olur. Dolayısıyla Lemma 3.1.35 ve Lemma 3.1.36 dan c$\in$ Z elde edilir.

Şimdi $\forall$ u,v$\in$ U için u(uv) – (uv)u = u[u,v]$\in$ U ve hipotezden d(u(uv) – (uv)u) = 0 olduğundan yani, d(u[u,v]) = 0 olduğundan u[u,v] sabit olur. Dolayısıyla u[u,v]$\in$ Z, $\forall$ u,v$\in$ U elde edilir.

u,v$\in$ U elemanları u[u,v]$\in$ Z – {0} olacak biçimde olsun. Buna göre,

u(u^2v) – (u^2v)u = u^2[u,v]

bir sabittir ve u^2[u,v]$\in$ Z dir. Lemma 3.1.29 a göre u$\in$ Z olur. Bu ise u[u,v]$\neq$0 ile çelişir.(Çünkü u[u,v]$\in$ Z, u(u[u,v])$\in$ Z ve u[u,v]$\neq$0 olduğu için u$\in$ Z olmalıdır.) O halde u[u,v] = 0, $\forall$ u,v$\in$ U olmalıdır. u$\neq$0 ise o zaman uU$\neq${0} bir yarı grup sağ idealdir. Öte yandan u[u,v] = 0 $\Rightarrow$u(uv – vu) = 0$\Rightarrow$u(uv) – u(vu) = 0 olduğundan $\forall$ uv$\in$ uU elemanı u tarafından merkezlenir. Yani u elemanı uU$\neq${0} sağ idealini merkezler. Bu ise Lemma 3.1.30 (iii) den u$\in$ Z demektir.Yani U$\subseteq$Z elde edilir. Dolayısıyla Lemma 3.1.33 den N komütatiftir.

Lemma 3.1.41 : N bir sağ yakın halka ve d:N$\rightarrow$N bir türev olsun. Buna göre,

c(yd(x) + d(x)y) = cyd(x) + cd(x)y, $\forall$ x,y,c$\in$ N dir.

İspat : Lemma 3.1.1 in ispatına benzer biçimde ispatlanır.

Lemma 3.1.42 : N bir asal sağ yakın halka, 0$\neq$d:N$\rightarrow$N bir türev ve A, N nin AN$\subseteq$A olacak biçimdeki sıfırdan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda, d(A) = {0} ise d = 0 dır.

İspat : Varsayalım ki $\forall$ a$\in$ A için d(a) = 0 olsun. Bu durumda, 0 = d(ax) = ad(x) + d(a)x = ad(x), $\forall$ x $\in$ N olur. a yerine ay, y $\in$ N alınırsa, ayd(x) = 0, $\forall$ y $\in$ N olur. Yani, aNd(x) = 0 dır. N asal yakın halka olduğundan a = 0 veya d(x) = 0, $\forall$ x $\in$ N elde edilir. Varsayımımızdan, d(x) = 0, $\forall$ x $\in$ N olur. O halde d = 0 bulunur.

Lemma 3.1.43 : N bir sağ yakın halka, $d:N \rightarrow N$ bir türev ve A, N nin sıfırdan farklı bir alt yakın halka olsun. Buna göre d, A üzerinde anti-homomorfizm ise A sıfır simetriktir.

İspat : $0a = 0$, $\forall a \in A$ ve d, anti-homomorfizm olduğundan $0 = d(0a) = d(a)d(0) = d(a)0$ bulunur. Yani $d(a)0 = 0$, $\forall a \in A$ olur. a yerine a0 alınırsa, $0 = d(a0)0 = (ad(0) + d(a)0)0 = a0 + d(a)0 \Rightarrow a0 = 0$, $\forall a \in A$ olur. Yani A sıfır simetriktir.

Lemma 3.1.44 : N bir sağ yakın halka, A, N nin bir alt yakın halkası ve d, bir türev olsun. Buna göre,

(i) d, A üzerinde bir homomorfizm ise bu taktir de,

$$d(y)xd(y) = yxd(y) = d(y)xy, \ \forall x,y \in A \tag{3.23}$$

(ii) d, A üzerinde anti homomorfizm ise bu taktirde,

$$d(y)xd(y) = d(y)yx = xyd(y), \ \forall x,y \in A \tag{3.24}$$

olur.

İspat (i) : d, A üzerinde bir homomorfizm olsun. Buna göre,

$$d(xy) = xd(y) + d(x)y = d(x)d(y), \ \forall x,y \in A \tag{3.25}$$

olur. (3.25) eşitliğinde x yerine yx alınırsa,

$$yxd(y) + d(yx)y = d(y)d(xy), \ \forall x,y \in A \tag{3.26}$$

elde edilir. d homomorfizm olduğundan Lemma 3.1.41 (i) kullanılacak olursa,

$$\begin{aligned} d(y)d(xy) &= d(y)(xd(y) + d(x)y) \\ &= d(y)xd(y) + d(y)d(x)y \\ &= d(y)xd(y) + d(yx)y \text{ dir.} \end{aligned}$$

Son eşitliği (3.26) da kullanırsak, $yxd(y) = d(y)xd(y)$, $\forall x,y \in A$ olur. Benzer şekilde (3.25) de y yerine yx alınırsa, $d(y)xy = d(y)xd(y)$, $\forall x,y \in A$ elde edilir.

(ii) d, A üzerinde bir anti-homomorfizm olduğu için,

$$d(xy) = xd(y) + d(x)y = d(y)d(x),\ \forall\, x,y\in A \qquad (3.27)$$

olur. (3.27) eşitliğinde y yerine xy alınırsa,

$$\begin{aligned} xd(xy) + d(x)xy &= d(xy)d(x) \\ &= xd(y)d(x) + d(x)yd(x) \\ &= xd(xy) + d(x)yd(x),\ \forall\, x,y\in A \end{aligned}$$ elde edilir. Sonuç olarak, $d(x)xy = d(x)yd(x),\ \forall\, x,y\in A$ bulunur. Her x,y için sağlandığından bu son eşitlik $d(y)yx = d(y)xd(y),\ \forall\, x,y\in A$ olarak yazılır. (3.27) de x yerine xy alınırsa, $d(y)xd(y) = xyd(y),\ \forall\, x,y\in A$ elde edilir.

Teorem 3.1.45 : N bir yarı asal sağ yakın halka ve d bir türev olsun. Buna göre,

(i) $d : N \to N$ bir endomorfizm ise d = 0 dır.

(ii) $d : N \to N$ bir anti-endomorfizm ise d = 0 dır.

İspat (i) : Lemma 3.1.44 (i) de A = N alalım. Buna göre,

$$yxd(y) = d(y)xd(y),\ \forall\, x,y\in N \qquad (3.28)$$

olur. (3.28) eşitliğinde x yerine d(x) alınır ve d nin bir endomorfizm olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} yd(x)d(y) &= d(y)d(x)d(y) \\ &= d(yx)d(y) \\ &= yd(x)d(y) + d(y)xd(y),\ \forall\, x,y\in N \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $d(y)xd(y) = 0,\ \forall\, x,y\in N$ olur. Yani $d(y)Nd(y) = 0,\ \forall\, y\in N$ dir. N yarı asal olduğundan $d(y) = 0,\ \forall\, y\in N$ bulunur. Buda d = 0 demektir.

(ii) Lemma 3.1.43 de A = N alınırsa, N sıfır simetrik olur. Lemma 3.1.44 (ii) de A = N uygularsak,

$$d(y)xd(y) = xyd(y),\ \forall\, x,y\in N \qquad (3.29)$$

olur. (3.29) eşitliğinde x yerine d(x) alınırsa, d(y)d(x)d(y) = d(x)yd(y) olur. d anti-homomorfizm olduğu için d(xy)d(y) = d(x)yd(y) bulunur. Son eşitlikte türev alınacak olursa, xd(y)d(y) + d(x)yd(y) = d(x)yd(y) eşitliği elde edilir. Buradan da $x(d(y))^2 = 0$, $\forall x,y \in N$ olarak ifade edilmiş olur. Özel olarak x yerine y alınırsa

$$y(d(y))^2 = 0, \ \forall y \in N \tag{3.30}$$

elde edilir. Öte yandan Lemma 3.1.44 (ii) den,

$$d(y)yx = xyd(y), \ \forall x,y \in N \tag{3.31}$$

dir. Sağdan d(y) ile çarpılır ve (3.30) eşitliği kullanılırsa $\forall x,y \in N$ için d(y)yxd(y) = 0, $\forall x,y \in N$ elde edilir. O halde bu son eşitliği sağdan y ile çarpar N nin yarı asallığı kullanılırsa, d(y)y = 0, $\forall y \in N$ bulunur. Bu (3.31) eşitliği ile birlikte düşünülürse xyd(y) = 0, $\forall x,y \in N$ olur. Öte yandan (3.29) eşitliğinden d(y)xd(y) = 0, $\forall x,y \in N$ elde edilir. Yani d(y)Nd(y) = 0, $\forall y \in N$ dir. N yarı asal olduğu için d(y) = 0 dır. Sonuç olarak d = 0 bulunur.

Teorem 3.1.46 : N bir sağ asal yakın halka, $d{:}N \to N$ bir türev ve A, N nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Buna göre,

(i) d, A da bir homomorfizm ise d = 0 dır.

(ii) d, A da bir anti-homomorfizm ise d = 0 dır.

İspat (i) : Lemma 3.1.44 (i) de,

$$d(y)xd(y) = d(y)xy, \ \forall x,y \in A \tag{3.32}$$

idi. (3.32) eşitliği sağdan d(z), $z \in A$ ile çarpılırsa; d(y)xd(y)d(z) = d(y)xyd(z) olur. d bir homomorfizm olduğundan d(y)xd(yz) = d(y)xyd(z) dir. d(y)x(yd(z) + d(y)z) = d(y)xyd(z) olur. Lemma 3.1.41 den d(y)xyd(z) + d(y)xd(y)z = d(y)xyd(z) elde edilir. O halde d(y)xd(y)z = 0, $\forall x,y,z \in A$ bulunur. x yerine xr, $r \in N$ alınırsa, d(y)xrd(y)z = 0 olur. N asal olduğundan,

$$d(y)x = 0, \ \forall x,y \in A \tag{3.33}$$

bulunur. y yerine yr, $r \in N$ alınırsa,

$$yd(r)x + d(y)rx = 0,\ \forall\, x,y \in A \text{ ve } \forall\, r \in N \tag{3.34}$$

olur. Soldan $d(z)$, $z \in A$ ile çarpılırsa, $0 = d(z)yd(r)x + d(z)d(y)rx$ olur. (3.33) eşitliğinden $d(zy)rx = 0$ elde edilir. Öte yandan, $0 = d(zy)rx = zd(y)rx + d(z)yrx = zd(y)rx$ olur. Yani $zd(y)rx = 0, \forall\, x,y,z \in A$ ve $\forall\, r \in N$ bulunur. O halde $zd(y)Nx = 0$ olur. N asal olduğu için $zd(y) = 0$, $\forall\, y,z \in A$ veya $x = 0$, $\forall\, x \in A$ olur. A sıfırdan farklı sağ ideal olduğundan $zd(y) = 0$, $\forall\, y,z \in A$ bulunur. Bu son eşitlikte z yerine zr, $r \in N$ alınırsa; $zNd(y) = 0$ olur. N asal olduğu için $z = 0$, $\forall\, z \in A$ veya $d(y) = 0$, $\forall\, y \in A$ elde edilir. A sıfırdan farklı bir sağ ideal olduğundan $d(y) = 0$, $\forall\, y \in A$ olur. O halde Lemma 3.1.42 den $d = 0$ bulunur.

(ii) Lemma 3.1.43 den A sıfır simetriktir. Lemma 3.1.44 (ii) den

$$d(y)xd(y) = xyd(y),\ \forall\, x,y \in A \tag{3.35}$$

$$d(y)xd(y) = d(y)yx,\ \forall\, x,y \in A \tag{3.36}$$

yazılır. (3.35) de x yerine $xd(y)$ alınır ve d nin bir homomorfizm olduğu kullanılırsa, $d(y)xd(y^2) = xd(y)yd(y)$ elde edilir. Öte yandan d türevi için $d(y)x(yd(y) + d(y)y) = xd(y)yd(y)$ yazılabilir. Lemma 3.1.41 kullanılırsa,

$$d(y)xyd(y) + d(y)xd(y)y = xd(y)yd(y),\ \forall\, x,y \in A \tag{3.37}$$

eşitliği elde edilir. (3.35) eşitliğinde x yerine xy alınırsa,

$$d(y)xyd(y) = xy^2 d(y),\ \forall\, x,y \in A \tag{3.38}$$

olur. (3.35) eşitliği sağdan y ile çarpılırsa,

$$d(y)xd(y)y = xyd(y)y,\ \forall\, x,y \in A \tag{3.39}$$

bulunur. (3.35) eşitliğinde x yerine y alınırsa; $d(y)yd(y) = y^2 d(y)$ bulunur. Soldan x ile çarpılırsa,

$$xd(y)yd(y) = xy^2d(y),\ \forall x,y\in A \tag{3.40}$$

ifadesi elde edilir. (3.38), (3.39), (3.40) eşitlikleri (3.37) eşitliğinde kullanılırsa, $xyd(y)y = 0$, $\forall x,y\in A$ olur. A sıfırdan farklı bir sağ ideal olduğundan $yd(y)y = 0$, $\forall y\in A$ olur. (3.39) eşitliğine göre $d(y)xd(y)y = 0$ olur. Bu eşitlik (3.36) eşitliğinde kullanılırsa,

$$d(y)yxy = 0,\ \forall x,y\in A \tag{3.41}$$

olur. x yerine $xd(y)$ alınırsa, $d(y)yxd(y)y = 0$, $\forall x,y\in A$ dır. A sıfırdan farklı sağ ideal olduğundan $d(y)yxNd(y)y = 0$ olur. Buradan $d(y)yx = 0$ veya $d(y)y = 0$ elde edilir. $d(y)y = 0$ olduğu için $d(y)yx = 0$ dır. (3.36) eşitliğinden $d(y)xd(y) = 0$, $\forall x,y\in A$ dır. A sıfırdan farklı bir sağ ideal olduğundan,

$$d(y)x = 0,\ \forall x,y\in A \tag{3.42}$$

bulunur. (3.42) eşitliğinde y yerine yn, $n\in N$ alınırsa $0 = d(yn)x = yd(n)x + d(y)nx$, $\forall x,y\in A$, $\forall n\in N$ olur. Soldan $d(z)$, $z\in A$ ile çarpılırsa $d(z)yd(n)x + d(z)d(y)nx = 0$, $\forall x,y,z\in A$ ve $\forall n\in N$ olur. (3.42) eşitliğine göre, ilk terim sıfırdır. Bu yüzden $d(z)d(y)nx = 0$ olur. N asal ve A sıfırdan farklı olduğundan $d(z)d(y) = 0$, $\forall y,z\in A$ dır. Dolayısıyla $0 = d(z)d(y) = d(yz) = yd(z) + d(y)z = yd(z)$ dir. O halde $yd(z) = 0$, $\forall y,z\in A$ bulunur. A sıfırdan faklı bir sağ ideal olduğundan $yNd(z) = 0$ olur. N asal olduğundan $y = 0$, $\forall y\in A$ veya $d(z) = 0$, $\forall z\in A$ bulunur. O halde $d(z) = 0$, $\forall z\in A$ olur. Lemma 3.1.42 den de $d = 0$ bulunur. Böylece Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

N bir sıfır simetrik sol yakın halka, A sıfırdan farklı bir ideal ve $d:N\rightarrow N$ bir türev olsun. $S\subset N$ için $V_N(S) = \{x \in N \mid xs = sx,\ \forall s\in S\}$ olsun. Buna göre aşağıdaki koşulları düşünelim.

(i) $d(A) \subseteq V_N(d(A))$

(ii) $a - d(a)\in V_N(A)$, $\forall a\in A$ ve $d(A) \subseteq A$

(iii) $a + d(a)\in V_N(A)$, $\forall a\in A$ ve $d(A) \subseteq A$

Lemma 3.1.47 : $a,b,c \in N$ ve a, $a + a \in V_N(\{b,c,b+c\})$ ise $a(b,c) = 0$ dır.

İspat : a, $a + a \in V_N(\{b,c,b+c\})$ olduğundan $ab = ba$, $ac = ca$, $a(b + c) = (b + c)a$, $(a + a)b = b(a + a)$, $(a + a)c = c(a + a)$ ve $(a + a)(b + c) = (b + c)(a + a)$ olur. O halde

$$
\begin{aligned}
ab + ab + ac + ac &= ba + ba + ca + ca \\
&= b(a + a) + c(a + a) \\
&= (a + a)b + (a + a)c \\
&= (a + a)(b + c) \\
&= (b+ c)(a + a) \\
&= (b + c)a + (b + c)a \\
&= a(b + c) + a(b + c) = ab + ac + ab + ac \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

O halde bu eşitliğin ilk ve son kısmından $ab + ac = ac + ab$ elde edilir. Yani $a(b + c - b - c) = 0$ olur. Dolayısıyla bu da $a(b,c) = 0$ demektir.

Lemma 3.1.48 : $u \in N$ sol sıfır bölen olmasın. Eğer $[u,d(u)] = 0$ veya $u \circ d(u) = 0$ ise $d(u,x) = 0$, $\forall x \in N$ olur.

İspat : Lemma 3.1.2 den $[u,d(u)] = 0$ iken $d(u,x) = 0$ dır. O halde $u \circ d(u) = 0$ iken bakalım. $x \in N$ için,

$$
\begin{aligned}
ud(u) + ud(x) + d(u)u + d(u)x &= d(u(u+x)) \\
&= d(u^2 + ux) \\
&= d(u^2) + d(ux) \\
&= ud(u) + d(u)u + ud(x) + d(u)x
\end{aligned}
$$

olur. Öte yandan $ud(u) + d(u)u = 0$ olduğu için

$ud(u) + ud(x) + d(u)u + d(u)x = ud(x) + d(u)x$ olur. Eşitliğin her iki tarafındaki $d(u)x$ ler birbirini götürür ve tekrar hipotez yani $ud(u) = -d(u)u$ kullanılacak olursa $u(d(u) + d(x) - d(u) - d(x)) = 0$ elde edilir. Yani $ud(u,x) = 0$ olur. u sol sıfır bölen olmadığı için $d(u,x) = 0$ elde edilir.

Lemma 3.1.49 : N bir asal yakın halka ve $A \neq \{0\}$, N nin bir ideali olsun. Buna göre,

(i) $(A,+)$ abelian ise $(N,+)$ abelian dır.

(ii) $(A,.)$ komütatif ise $(N,.)$ kömütatiftir

İspat (i) : $(A,+)$ abelian olduğu için $A(x,y) = 0$, $\forall x,y \in N$ dir. N asal yakın halka ve $A \neq \{0\}$ ideal olduğundan $(x,y) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $(N,+)$ abeliandır.

(ii) $a,b \in A$, $x,y \in N$ olsun. $(A,.)$ komütatif olduğu için $ab[x,y] = ab(xy - yx)$

$= abxy – abyx = baxy – byax = axby – axby = 0$ bulunur. Dolayısıyla $A^2[x,y] = 0$ dır. N asal ve $A^2 \neq \{0\}$ ideal olduğundan $[x,y] = 0$, $\forall x,y \in N$ elde edilmiş olur. Bundan dolayı (N,.) komütatiftir.

Lemma 3.1.50 : N bir asal yakın halka, $x \in N$ ve A, N nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre,

(i) $a \in A$, $0 \neq z \in V_N(A)$ ve $za = 0$ (veya $az = 0$) ise $a = 0$ dır.

(ii) $z + z \in V_N(A)$ olacak biçimde $0 \neq z \in V_N(A)$ ise (N,+) abeliandır.

(iii) $0 \neq z \in V_N(A)$ ve $zx \in V_N(A)$ ($xz \in V_N(A)$) ise $x \in V_N(A)$ dır.

(iv) $d(A) \neq \{0\}$ olsun. $xd(A) = \{0\}$ (veya $d(A)x = \{0\}$) ise $x = 0$ dır.

(v) N, 2-torsion free olsun. $d(A) \neq \{0\}$ ise $d^2(A) \neq \{0\}$ olur.

İspat : (i) : $za = 0$ ise $\forall b \in A$ için $bza = 0$ dır. $z \in V_N(A)$ olduğundan $zba = 0$, $\forall b \in A$ olur. Yani, $zAa = 0$ dır. Dolayısıyla Lemma 3.1.31 (i) den $z = 0$ veya $a = 0$ demektir. $z \neq 0$ olduğundan $a = 0$ bulunur.

(ii) $a,b \in A$ olsun. z ve $z + z \in V_N(A)$ olduğu için Lemma 3.1.47 den $z(a,b) = 0$ olur. Dolayısıyla (i) den $(a,b) = 0$ dır. Öyleyse (A,+) abeliandır. O halde Lemma 3.1.49 (i) den (N,+) abeliandır.

(iii) $zx \in V_N(A)$ olsun. Buna göre $z[x,b] = [zx,b] = 0$, $\forall b \in A$ olur. $[x,b] \in A$ olduğu için (i) den $[x,b] = 0$, $\forall b \in A$ olur. Öyleyse $x \in V_N(A)$ dır.

(iv) $d(a) \neq 0$ olacak biçimde $a \in A$ olsun. Eğer $xd(A) = 0$ ise buna göre, $\forall b \in A$ için $0 = xd(ba) = xbd(a) + xd(b)a = xbd(a)$ dır. Yani $xAd(a) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $d(a) = 0$ dır. $d(a) \neq 0$ olduğundan $x = 0$ olur.

(v) Varsayalım ki $d^2(A) = 0$ olsun, $\forall a,b \in A$ için $0 = d^2(ab) = d(d(ab)) = d(ad(b) + d(a)b) = ad^2(b) + d(a)d(b) + d(a)d(b) + d^2(a)b = 2d(a)d(b)$ dir. N, 2-torsion free olduğundan $d(a)d(b) = 0$, $\forall a,b \in A$ bulunur. Dolayısıyla $d(a)d(A) = 0$ dır. (iv) den $d(a) = 0$, $\forall a \in A$ olur. Öyleyse bu $d(A) \neq \{0\}$ olması ile çelişir. O halde $d^2(A) \neq \{0\}$ olur.

Teorem 3.1.51 : A, N nin sıfırdan farklı hiçbir sıfır bölenini içermeyen sıfırdan farklı bir ideal, $0 \neq d(A) \subseteq A$ ve d, A üzerinde semi-commuting bir türev olsun. Buna göre (N,+) abeliandır.

İspat : $a \in A$ ve $x \in N$ olsun. A hiçbir sıfır bölen içermediğinden a sıfır bölen değildir, d semi-commuting olduğu için Lemma 3.1.48 den $d(a,x) = 0$ dır. $d(b) \neq 0$ olacak biçimde $b \in A$ için $d(b)(a,x) = d(b(a,x))$ dir. Çünkü, $d(b(a,x)) = bd(a,x) +$

$d(b)(a,x) = d(ba,bx) = 0$ olur. Yani, $d(b)(a,x) = 0$ dır. O halde $d(A)(a,x) = 0$ dır. Lemma 3.1.50 (iv) den $(a,x) = 0$ olur. Dolayısıyla $(A,+)$ abeliandır. Lemma 3.1.49 (i) den $(N,+)$ abeliandır.

Teorem 3.1.52 : N bir asal yakın halka ve A, N nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre,

(i) $d(A) \neq 0$ ve $d(A) \subseteq V_N(d(A))$ ise $(N,+)$ abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ve $d(A) \subseteq V_N(d(A))$ ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : $a,b,c \in A$ olsun. $d(a)$ ve $d(a) + d(a) \in V_N(A)$ olduğu için Lemma 3.1.47 den, $d(a)d(b,c) = 0$, $\forall a,b,c \in A$ dır. $d(A)d(b,c) = 0$ dır. Lemma 3.1.50 (iv) den $d(b,c) = 0$ dolayısıyla $d(a)(b,c) = d(a(b,c)) = d(ab,ac) = 0$ dır. Tekrar Lemma 3.1.50 (iv) den $(b,c) = 0$ olur. O halde $(A,+)$ abeliandır. Lemma 3.1.49 (i) den $(N,+)$ abelian olduğu görülür.

(ii) N, 2-torsion free olsun. Lemma 3.1.49 (ii) ye göre $(A,.)$ nın komütatif olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 3.1.50 (v) den $d^2(a) \neq 0$ olacak biçimde $a \in A$ vardır. $b, c, x \in A$ keyfi elemanlar olsun. Buna göre, Lemma 3.1.1 düşünülürse,

$$d(d(a)x)d(c) = (d(a)d(x) + d^2(a)x)d(c)$$

$$= d(a)d(x)d(c) + d^2(a)xd(c)$$ olur. Buna göre bu son ifadeden

$d^2(a)xd(c) = d(c)\{-d(a)d(x) + d(d(a)x)\} \Rightarrow d^2(a)xd(c) = d(c)\{ -d(a)d(x) + d(a)d(x) + d^2(a)x\} \Rightarrow d^2(a)xd(c) = d(c)d^2(a)x$, $\forall x \in A$ bulunur. x yerine xb alınırsa, $d^2(a)xbd(c) = d(c)d^2(a)xb \Rightarrow d^2(a)xbd(c) = d^2(a)xd(c)b$, $\forall x,a,b,c \in A$ olur. Yani $d^2(a)A[b,d(c)] = \{0\}$ elde edilir. N yakın halka ve $A \neq \{0\}$ ideal olduğundan $[b,d(c)] = 0$, $\forall b,c \in A$ bulunur. Öte yandan, $[b, d^2(c)] = 0$ olduğuda kolayca görülür. O halde, $d(d(a)b)c = cd(d(a)b) \Rightarrow d(a)d(b)c + d^2(a)bc = cd(a)d(b) + cd^2(a)b$ olur. Yani,

$$d^2(a)bc = cd^2(a)ab \tag{3.43}$$

bulunur. c yerine cx alınırsa, $d^2(a)bcx = d^2(a)cxab$, $\forall x,a,b,c \in A$ olur. (3.43) eşitliği ve $d^2(a)xb = bd^2(a)x$ alınırsa $cd^2(a)bx = d^2(a)cxb \Rightarrow d^2(a)cbx = d^2(a)cxb \Rightarrow d^2(a)c[b,x] = 0$, $\forall x,a,b,c \in A \Rightarrow d^2(a)A[b,x] = \{0\}$, $\forall x,a,b \in A$ olur. $d^2(a) \neq 0$ olduğu için $[b,c] = 0$, $\forall b,c \in A$ bulunur. Yani $(A,.)$ komütatiftir. Bu ise Lemma 3.1.49 (ii) den $(N,.)$ komütatif halka demektir.

Teorem 3.1.53 : N bir asal yakın halka ve A, N nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre,

(i) $\forall a \in A$ için $a - d(a) \in V_N(A)$ ve $d(A) \subseteq A$ ise (N,+) abeliandır.

(ii) $\forall a \in A$ için $a + d(a) \in V_N(A)$ ve $d(A) \subseteq A$ ise (N,+) abeliandır.

İspat : $c \in A$ keyfi bir sabit olsun. Hipotezden $c \in V_N(A)$ dır. Yani A da ki her sabit $V_N(A)$ da dır. Eğer $c \neq 0$ ise Lemma 3.1.50 (ii) den (N,+) abeliandır.

Varsayalım ki tek sabit 0 olsun. O halde $d(A) \neq \{0\}$ dır. $\forall a \in A$ için $a - d(a) = 0$ olsun. O halde $ab = d(ab) = ad(b) + d(a)b = ab + ab$, $\forall a,b \in A$ olur. Bu ise $ab = 0$, $\forall a,b \in A$ demektir. Yani $A^2 = \{0\}$ bulunur. Ancak N asal olduğu için bu mümkün değildir. O halde, $c - d(c) \neq 0$ olacak bicimde $c \in A$ vardır.

Benzer biçimde $c + d(c) \neq 0$ olacak biçimde $c \in A$ olduğu da gösterilir.

Öte yandan $a - d(a) \in V_N(A)$, $\forall a \in A$ olduğundan $c - d(c) \in V_N(A)$ dır. Yani $c - d(c) \in Z(A)$ dır. Dolayısıyla $0 \neq u = c - d(c)$ elemanı A da sol sıfır bölen değildir. Şimdi Lemma 3.1.48 i, $u = c - d(c) \in V_N(A)$ elemanına uygulayalım. $c \in A$ ve $d(A) \subseteq A$ olduğu için $u = c - d(c) \in A$ olur. O halde $d(u) \in A$ dır. Yine $u \in Z$ olduğu için $[u,d(u)] = 0$ dır. O halde Lemma 3.1.48 e göre $d(u,x) = 0$, $\forall x \in A$ elde edilir. Yani (u,x), $\forall x \in A$ sabittir. Sabitler sadece sıfırdı. O halde $(u,x) = 0$, $\forall x \in A$ dan u, A nın toplamsal merkezindedir.

Öte yandan
$$\begin{aligned} u + u &= c - d(c) + c - d(c) \\ &= c + d(-c) + c - d(c) \\ &= c + c - d(c) + d(-c) \end{aligned}$$

olur. Yani $u + u = c + c - d(c + c) \in V_N(A)$ olur. Dolayısıyla u, $u + u \in V_N(A)$ elde edilir. Bu ise Lemma 3.1.50 (ii) den (N,+) abelian demektir.

[d_1(N), d_2(N)] = {0} Koşullu Yakın Halkalar

Lemma 3.1.54 : N bir yakın halka, $0 \neq d_1, d_2 : N \to N$ birer türev ve $\forall x,y \in N$ için $d_1(x)d_2(y) = -d_2(x)d_1(y)$ olsun. Buna göre, (N,+) abeliandır.

İspat : $x,y,u,v \in N$ için $y = u + v$ alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= d_1(x)d_2(u + v) + d_2(x)\, d_1(u + v) \\ &= d_1(x)d_2(u) + d_1(x)d_2(v) + d_2(x)d_1(u) + d_2(x)d_1(v) \\ &= d_1(x)d_2(u) + d_1(x)d_2(v) - d_1(x)d_2(u) - d_1(x)d_2(v) \\ &= d_1(x)d_2(u + v - u - v) \end{aligned}$$
elde edilir.

Lemma 3.1.4 (iii) den d_2(u + v – u – v) = 0 olur. u yerine wu , v yerine wv , w$\in$ N alınırsa 0 = d_2(wu + wv – wu – wv)

$$= d_2(w(u + v - u - v))$$

$$= w d_2(u + v - u - v) + d(w)(u + v - u - v)$$

olur. Dolayısıyla d(w)(u + v – u – v) = 0 olur. Tekrar Lemma 3.1.4 (iii) kullanılırsa u + v – u - v = 0, $\forall$ u,v$\in$ N bulunur. Yani (N,+) abeliandır.

Teorem 3.1.55 : N bir yakın halka, d_1, d_2:N$\rightarrow$N iki türev, $\forall$ x,y$\in$ N için $d_1(x)d_2(y) = d_2(x)d_1(y)$ ve 2N$\neq$ {0} olsun. Buna göre, $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : Kabul edelim ki $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olsun. Buna göre,

Lemma 3.1.54 den (N,+) abeliandır. $d_1(x)d_2(y) = -d_2(x)d_1(y)$ eşitliğinde x yerine uv alınır, Lemma 3.1.1 de kullanılırsa,

$$0 = d_1(uv)d_2(y) + d_2(uv)d_1(y)$$

$$= u d_1(v)d_2(y) + d_1(u)v d_2(y) + u d_2(v)d_1(y) + d_2(u)v d_1(y) \quad (3.44)$$

$$= u d_1(v)d_2(y) + u d_2(v)d_1(y) + d_1(u)v d_2(y) + d_2(u)v d_1(y)$$

$$= u(d_1(v)d_2(y) + d_2(v)d_1(y)) + d_1(u)v d_2(y) + d_2(u)v d_1(y)$$

elde edilir. $d_1(v)d_2(y) + d_2(v)d_1(y) = 0$ olduğu için

$$d_1(u)v d_2(y) + d_2(u)v d_1(y) = 0 \quad (3.45)$$

bulunur. (3.45) eşitliğinde y yerine yt alınırsa,

$$0 = d_1(u)v d_2(yt) + d_2(u)v d_1(yt)$$

$$= d_1(u)vy d_2(t) + d_1(u)v d_2(y)t + d_2(u)vy d_1(t) + d_2(u)v d_1(y)t \quad (3.46)$$

olur. (3.45) eşitliğinde v yerine vy gelmiş gibi düşünülürse, $d_1(u)vy d_2(t)$ + $d_2(u)vy d_1(t) = 0$ dır. O halde (3.46) eşitliğinden $d_1(u)v d_2(y)t + d_2(u)v d_1(y)t = 0$ bulunur. t yerine $d_1(t)$ alınırsa ,

$$d_1(u)v d_2(y)d_1(t) + d_2(u)v d_1(y)d_1(t) = 0 \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.45) eşitliğinde y yerine t ve çıkan ifadede v yerine v$d_1(y)$ alınırsa,

$$d_1(\mathrm{u})\mathrm{v}\,d_1(\mathrm{y})\,d_2(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{u})\mathrm{v}\,d_1(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t}) = 0 \tag{3.48}$$

olur. (3.47) eşitliğinde $d_2(\mathrm{u})\mathrm{v}\,d_1(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t})$ yerine $-d_1(\mathrm{u})\mathrm{v}\,d_1(\mathrm{y})\,d_2(\mathrm{t})$ yazılırsa,

$$0 = d_1(\mathrm{u})\mathrm{v}\,d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t}) - d_1(\mathrm{u})\mathrm{v}\,d_1(\mathrm{y})\,d_2(\mathrm{t})$$

$= d_1(\mathrm{u})\mathrm{v}(d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t}) - d_1(\mathrm{y})\,d_2(\mathrm{t}))$ olur. Hipotez kullanılrsa,

$d_1(\mathrm{u})\mathrm{v}(d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t})) = 0$, $\forall$ u,v,y,t $\in$ N bulunur.

O halde $d_1(\mathrm{u})\mathrm{N}(d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t})) = 0$, $\forall$ u,y,t $\in$ N olur. N asal olduğu için $d_1(\mathrm{u}) = 0$ veya $d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t}) = 0$ bulunur. $d_1 \neq 0$ olduğundan

$$d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{t}) = 0 \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.49) eşitliğinde y yerine yu alınırsa ,

$$0 = d_2(\mathrm{yu})\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{yu})\,d_1(\mathrm{t})$$

$$= \mathrm{y}\,d_2(\mathrm{u})\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\mathrm{u}\,d_1(\mathrm{t}) + \mathrm{y}\,d_2(\mathrm{u})\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\mathrm{u}\,d_1(\mathrm{t})$$

$= \mathrm{y}(d_2(\mathrm{u})\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{u})\,d_1(\mathrm{t})) + d_2(\mathrm{y})\mathrm{u}\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\mathrm{u}\,d_1(\mathrm{t})$ bulunur.

(3.49) eşitliğinden $d_2(\mathrm{u})\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{u})\,d_1(\mathrm{t}) = 0$ olduğu için,

$$d_2(\mathrm{y})\mathrm{u}\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\mathrm{u}\,d_1(\mathrm{t}) = 0 \tag{3.50}$$

olur. (3.49) eşitliğinde t yerine ut alınır, Lemma 3.1.1 ve (3.50) eşitliği kullanılırsa,

$$0 = d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{ut}) + d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{ut})$$

$$= d_2(\mathrm{y})\mathrm{u}\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{u})\mathrm{t} + d_2(\mathrm{y})\mathrm{u}\,d_1(\mathrm{t}) + d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{u})\mathrm{t}$$

$= d_2(\mathrm{y})\,d_1(\mathrm{u})(\mathrm{t} + \mathrm{t})$, $\forall$ u,y,t $\in$ N

bulunur. Yani, $d_2(\mathrm{N})\,d_1(\mathrm{u})(\mathrm{t} + \mathrm{t}) = 0$ olur. Lemma 3.1.4 (iii) den $\forall$ u,t$\in$ N için $d_1(\mathrm{u})(\mathrm{t} + \mathrm{t}) = 0$ dır. Tekrar Lemma 3.1.4 (iii) den (t + t) = 0, $\forall$ t$\in$ N elde edilir. Bu ise 2N$\neq$ {0} olması ile çelişir. O halde $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olur.

Teorem 3.1.56 : N, 3-asal yakın halka, d_1, d_2 türev ve 2N$\neq$ {0} olsun. Buna göre, $d_1 d_2$ türev $\Leftrightarrow$ $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : $d_1 d_2$ türev olsun. Buna göre, $\forall$ x,y$\in$ N için,

$d_1 d_2(xy) = x d_1 d_2(y) + d_1 d_2(x)y$ dir.

Öte yandan,

$d_1 d_2(xy) = d_1(d_2(xy)) = d_1(x d_2(y) + d_2(x)y)$

$= x d_1 d_2(y) + d_1(x) d_2(y) + d_2(x) d_1(y) + d_1 d_2(x)y$

olur. Bu iki ifadeyi eşitlersek, $d_1(x) d_2(y) + d_2(x) d_1(y) = 0$, $\forall$ x,y $\in$ N olur.

Teorem 3.1.55 den $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Tersine $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olsun. Bu durumda $d_1 d_2 = 0$ olacağından $d_1 d_2$ bir türevdir.

Teorem 3.1.57 : N, 3-asal yakın halka, d bir türev, a$\in$ N ve $d^2 \neq 0$ olsun. Buna göre d(x)a = ad(x), $\forall$ x$\in$ N ise a$\in$ Z(N) dir.

İspat : b $\in$ N olsun. Buna göre C(b) = { x $\in$ N | xb = bx} kümesini alalım. Buna göre d(C(a))N $\subseteq$ C(a) oluğunu görelim.

y $\in$ C(a) ve x $\in$ N için , varsayımdan dolayı yani ($d^2 \neq$ 0 ve d(x)a = ad(x)) d(yx),d(x)$\in$ d(N)$\subset$C(a) dır. y,d(x)$\in$ C(a) olduğu için yd(x)$\in$ C(a) olur. Lemma 3.1.1 den, yd(x)a + d(y)xa = (yd(x) + d(y)x)a = d(yx)a

= ad(yx) = ayd(x) + ad(y)x elde edilir.

d(x) ve yd(x)$\in$ C(a) olduğu için yd(x)a = ayd(x) dir. Buradan, d(y)xa = ad(y)x bulunur. Yani, d(C(a))N $\subset$ C(a) olur.

Sonuçta $d^2 \neq 0$ varsayımımızdan bazı z$\in$ N ler için $d^2(z) \neq 0$ dır. y = d(z) olsun. $\forall$ x $\in$ N seçelim. y$\in$ d(N) $\subset$ C(a) olduğundan d(y)x $\in$ C(a) olur. Özel olarak d(C(a))N $\subseteq$ C(a) olduğundan d(y)u ve d(y)uv$\in$ C(a), $\forall$ u,v$\in$ N dir.

O halde, [a,d(y)uv] = ad(y)uv – d(y)uva

= d(y)uav – d(y)uva

= d(y)u[a,v], $\forall$ u,v$\in$ N

bulunur. Dolayısıyla d(y)N[a,v] = 0 dır. N, 3-asal ve d$\neq$ 0 olduğundan [a,v] = 0, $\forall$ v$\in$ N elde edilir. Yani a$\in$ Z(N) dir.

Sonuç 3.1.58 : N, 3-asal yakın halka, d$\neq$ 0 bir türev ve a$\in$ N olsun. 2N$\neq$ {0} ve $\forall$ x$\in$ N için d(x)a = ad(x) ise a$\in$ Z(N) dir.

İspat : $d^2 = 0$ olsa, d^2 türev olur. Teorem 3.1.56 dan d = 0 olur. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $d^2 \neq 0$ dır. Dolayısıyla Teorem 3.1.57 den a$\in$ Z(N) olur.

Teorem 3.1.59 : N, 3-asal yakın halka, d_1, d_2 :N$\rightarrow$N türev ve $d_1^{\ 2} \neq 0 \neq d_2^{\ 2}$ olsun. Buna göre, $\forall$ x,y$\in$ N için d_1(x)d_2(y) = d_2(y)d_1(x) ise N bir komütatif halkadır.

İspat : Teorem 3.1.57 den d_1(N)$\subseteq$Z(N) dir.Yani, [N,d_1(N)] = {0} dır. Dolayısıyla Teorem 3.1.57 den N$\subseteq$Z(N) bulunur. Böylece N bir komütatif yakın halka olur. Yani, N sağ dağılma özelliğini sağlar. Çünkü, (x+y)z = z(x+y) = zx + zy = xz + yz dir. u,x,y $\in$ N olsun. Buna göre,

(u+u)(x+y) = (u+u)x + (u+u)y = ux + ux + uy + uy dir.

Öte yandan,

(u+u)(x+y) = u(x+y) + u(x+y) = ux + ux + uy + uy olur.

Her iki eşitlikten ux + uy = uy + ux bulunur. Yani u(x + y – x – y) = 0, $\forall$ x,y,u $\in$ N olur. N, 3-asal olduğundan, x + y – x – y = 0, $\forall$ x,y$\in$ N elde edilir. O halde (N,+) abeliandır. Dolayısıyla N bir komütatif halkadır.

Sonuç 3.1.60 : N, 3-asal yakın halka, d_1, d_2 :N$\rightarrow$N sıfırdan farklı iki türev olsun. Buna göre $\forall$ x,y$\in$ N için d_1(x)d_2(y) = d_2(y)d_1(x) ise N bir komütatif halkadır.

İspat : $d_1^{\ 2}$ = 0 ve $d_2^{\ 2}$ = 0 olsun. Bu durumda, Teorem 3.1.56 dan d_1 = d_2 = 0 bulunur. Dolayısıyla bu hipotez ile çelişir. O halde $d_1^{\ 2} \neq 0 \neq d_2^{\ 2}$ olur. Buna göre, Teorem 3.1.59 dan N bir komütatif halkadır

BÖLÜM 4
(σ,τ)–TÜREVLER

4.1. Asal Yakın Halkada (σ,τ)-Türev

Tanım 4.1.1: N bir yakın halka, d:N$\rightarrow$N toplamsal bir dönüşüm ve σ,τ : N$\rightarrow$ N otomorfizm olmak üzere her x,y$\in$ N için d(xy) = σ(x)d(y) + d(x)τ(y) olacak biçimdeki d dönüşümüne (σ,τ)-türev denir.

Tanım 4.1.2 : N bir yakın halka, d:N$\rightarrow$N toplamsal bir dönüşüm ve σ:N$\rightarrow$N bir otomorfizm olmak üzere her x,y$\in$ N için d(xy) = σ(x)d(y) + d(x)y, ise d ye bir σ-türev denir.

Gösterim 4.1.3 : N bir yakın halka, σ,τ :N$\rightarrow$N otomorfizm olmak üzere her x,y$\in$ N için $[x,y]_{\sigma,\tau}$ = σ(x)y – yτ(x) gösterimine (σ,τ)-komütatör denir.

Lemma 4.1.4 : d:N$\rightarrow$N toplamsal endomorfizmi bir (σ,τ)-türev olması için gerek ve yeter koşul d(xy) = d(x)τ(y) + σ(x)d(y), $\forall$ x,y$\in$ N olmasıdır.

İspat: d bir (σ,τ)-türev olsun. Buna göre, $\forall$ x,y$\in$ N için,

d(x(y+y)) = σ(x)d(y+y) + d(x)τ(y+y)

= σ(x)d(y) + σ(x)d(y) + d(x)τ(y) + d(x)τ(y)

d(xy+xy) = d(xy) + d(xy)

= σ(x)d(y) + d(x)τ(y) + σ(x)d(y) + d(x)τ(y)

olur. Bu iki eşitlikten σ(x)d(y) + d(x)τ(y) = d(x)τ(y) + σ(x)d(y) bulunur. Dolayısıyla, d(xy) = d(x)τ(y) + σ(x)d(y), $\forall$ x,y$\in$ N bulunur.

Tersine d(xy) = d(x)τ(y) + σ(x)d(y), $\forall$ x,y$\in$ N olsun.

d(x(y+y)) = d(x)τ(y + y) + σ(x)d(y+y)

= d(x)τ(y) + d(x)τ(y) + σ(x)d(y) + σ(x)d(y)

d(xy + xy) = d(xy) + d(xy)

= d(x)τ(y) + σ(x)d(y) + d(x)τ(y) + σ(x)d(y)

olur. Yukarda ki bu iki eşitlikten d(x)τ(y) + σ(x)d(y) = σ(x)d(y) + d(x)τ(y), $\forall$ x,y$\in$ N ifadesi elde edilir. Yani, d(xy) = σ(x)d(y) + d(x)τ(y), $\forall$ x,y$\in$ N olur.

Lemma 4.1.5 : d:N$\rightarrow$N bir (σ,τ)-türev olsun. Buna göre,

(i) (σ(x)d(y) + d(x) τ (y))z = σ (x)d(y)z + d(x) τ(y)z, $\forall$ x,y,z$\in$ N

(ii) (d(x) τ (y)+ σ (x)d(y))z = d(x) τ (y)z+σ(x)d(y)z, $\forall$ x,y,z$\in$ N

İspat (i) : $\forall$ x,y,z$\in$ N için,

$d((xy)z) = \sigma(x)\sigma(y)d(z) + d(xy)\tau(z)$

$\quad = \sigma(x)\sigma(y)d(z) + (\sigma(x)d(y) + d(x)\tau(y))\tau(z)$

$d(x(yz)) = \sigma(x)d(yz) + d(x)\tau(y)\tau(z)$

$\quad = \sigma(x)\sigma(y)d(z) + \sigma(x)d(y)\tau(z) + d(x)\tau(y)\tau(z)$

olur. Bu iki eşitlikten $(\sigma(x)d(y) + d(x)\tau(y))z = \sigma(x)d(y)z + d(x)\tau(y)z$, $\forall$ x,y,z$\in$ N bulunur.

(ii) Benzer biçimde gösterilir.

Lemma 4.1.6 : d:N$\to$N bir (σ,τ)-türev ve u$\in$ N sol sıfır bölen olmasın. Buna göre, $[u, d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ ise her x$\in$ N için (x,u) sabittir.

İspat: N sol yakın halka olduğundan soldan dağılma özelliği vardır. O halde, $u(u+x) = u^2 + ux$ dir. Her iki taraftan türev alınırsa, $d(u(u+x)) = d(u^2+ux)$ olur. Buradan, $\sigma(u)d(u) + \sigma(u)d(x) + d(u)\tau(u) + d(u)\tau(x) = \sigma(u)d(u) + d(u)\tau(u) + \sigma(u)d(x) + d(u)\tau(x)$ dir. Dolayısıyla $\sigma(u)d(x) + d(u)\tau(u) = d(u)\tau(u) + \sigma(u)d(x)$, $\forall$ u,x$\in$ N olur. Hipotezden $\sigma(u)(d(x,u)) = 0$, $\forall$ x$\in$ N dir. σ bir otomorfizm olduğu için u sıfır bölen olmadığından $\sigma(u)$ da sıfır bölen değildir. Bu yüzden d(x,u) = 0 olur. Dolayısıyla $\forall$ x$\in$ N için (x,u) sabittir.

Teorem 4.1.7 : N sıfır bölensiz bir yakın halka ve $0\neq d : N\to N$ bir (σ,τ)-commuting (σ,τ)-türev olsun. Buna göre, (N,+) abeliandır.

İspat: c keyfi toplamsal komütatör olsun. Lemma 4.1.6 dan c sabittir. Üstelik, keyfi x$\in$ N için xc de toplamsal komütatördür. Dolayısıyla xc de sabittir. Bu yüzden $0 = d(xc) = \sigma(x)d(c) + d(x)\tau(c)$ dir. d(c) = 0 olduğu için $d(x)\tau(c) = 0$, $\forall$ x$\in$ N ve her c toplamsal komütatörü. d $\neq$ 0 olduğundan $\tau(c) = 0$ ve dolayısıyla tüm c toplamsal komütatörleri için c = 0 dır. Yani (N,+) abeliandır.

Lemma 4.1.8 : N bir asal yakın halka olsun.

(i) d : N$\to$N bir (σ,τ)-türev olsun xd(N) = {0} (d(N)x = {0}) ise x = 0 dır.

(ii) N, 2-torsion free ve d, $d^2 = 0$ olacak biçimde bir (σ,τ)- türev ve $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ ise d = 0 dır.

(iii) $0\neq$ d:N$\to$N bir (σ,τ)-türev ve d(N)$\subset$Z olsun. Buna göre her sabit c$\in$ N elemanı merkezdedir.

İspat: (i) Hipotezden $\forall$ r$\in$ N için xd(r) = 0 dır. Bu ifade de r yerine yz alınırsa,

$0 = xd(yz) = x\sigma(y)d(z) + xd(y)\tau(z)$, $\forall y,z\in N$ olur. Hipotezden $x\sigma(y)d(z) = 0$ $\forall y,z\in N$ bulunur. σ bir otomorfizm olduğundan $xNd(N) = \{0\}$ dır. N asal yakın halka olduğundan $x = 0$ veya $d(N) = \{0\}$ dır. $d\neq 0$ olduğundan $x = 0$ dır.

Benzer şekilde $\forall r\in N$ için $d(r)x = 0$ olsun. Bu ifadede r yerine yz alınırsa,

$0 = d(yz)x = \sigma(y)d(z)x + d(y)\tau(z)x = 0$, $\forall y,z\in N$ olur. Hipotezden $d(y)\tau(z)x = 0$ dır. Yani, $d(N)Nx = \{0\}$ dır. N asal yakın halka olduğundan $x = 0$ veya $d(N) = \{0\}$ dır. $d \neq 0$ olduğundan $x = 0$ dır.

(ii) Keyfi $x,y\in N$ için

$$\begin{aligned} 0 = d^2(xy) &= d(d(xy)) \\ &= d(\sigma(x)d(y) + d(x)\tau(y)) \\ &= \sigma^2(x)d^2(y) + d\sigma(x)\tau d(y) + \sigma(d(x))d(\tau(y)) + d^2(x)\tau^2(y) \\ &= 2d(\sigma(x))d(\tau(y)) \end{aligned}$$

dir. N, 2-torsion free olduğu için $d(\sigma(x))d(\tau(y)) = 0$ dır. O halde $d(\tau(x))d(N) = \{0\}, \forall x,y\in N$ dir. σ bir otomorfizm olduğundan ve (i) den $d = 0$ bulunur.

(iii) $c\in N$ keyfi sabit ve $x\in N$ sabit olmayan eleman olsun. $d(xc) = \sigma(x)d(c) + d(x)\tau(c)$ dir. Hipotezden $d(x)\tau(c) = d(xc)\in Z$, $\forall x\in N$. O halde $d(x)\tau(c)y = yd(x)\tau(c)$, $\forall y\in N$ dir. $d(N)\subset Z$ olduğundan $d(x)\tau(c)y = d(x)y\tau(c)$, $\forall y\in N$ olur. Bu yüzden $0 = d(x)(\tau(c)y - y\tau(c))$ $\forall y\in N$ dir. $d(x)$ merkezin elemanı ve merkezde sıfır bölen olmadığından $\tau(c)\in Z$ olur. τ bir otomorfizm olduğundan $c\in Z$ elde edilir.

Teorem 4.1.9 : N bir asal yakın halka, $0\neq d:N\to N$ bir (σ,τ)-türev ve $d(N)\subseteq Z$ olsun. Buna göre,

(i) (N,+) abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ve $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : $d\neq 0$, $d(N) \subset Z$ olduğu için $z = d(x)\in Z-\{0\}$ olacak biçimde $0\neq x\in N$ vardır. Dolayısıyla Lemma 3.1.4 (ii) den (N,+) abeliandır.

(ii) N, 2-torsion free, $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ olsun. Buna göre, Lemma 4.1.5 (i) uygulanırsa,

$$d(xy)r = (\sigma(x)d(y) + d(x)\tau(y))r = \sigma(x)d(y)r + d(x)\tau(y)r,\ \forall x,y,r\in N \qquad (4.1)$$

bulunur. $d(N)\subseteq Z$ olduğu için $d(xy)\in N$ dir Yani, $d(xy)r = rd(xy)$, $\forall x,y,r\in N$ olur. O halde, $(\sigma(x)d(y) + d(x)\tau(y))r = r(\sigma(x)d(y) + d(x)\tau(y))$

$$= r\sigma(x)d(y) + rd(x)\tau(y), \quad \forall x,y,r\in N \tag{4.2}$$

bulunur. (4.1) ve (4.2) eşitlikleri ve (N,+) nın abelian olmasından,

$$\sigma(x)d(y)r - r\sigma(x)d(y) = rd(x)\tau(y) - d(x)\tau(y)r, \quad \forall x,y,r\in N \tag{4.3}$$

elde edilir. σ bir otomorfizm ve $d(N)\subseteq Z$ olduğu için (4.3) eşitliği, $d(y)\sigma(x)r - rd(y)\sigma(x) = d(x)r\tau(y) - d(x)\tau(y)r$, $\forall x,y,r\in N$ veya

$$d(y)(\sigma(x)r - r\sigma(x)) = d(x)(r\tau(y) - \tau(y)r), \quad \forall x,y,r\in N \tag{4.4}$$

olur. Varsayalım ki N komütatif olmasın ve $r\tau(y) - \tau(y)r \neq 0$ olacak biçimde $y,r\in N$ seçelim. $x = d(a)$, $a\in N$ olsun. Bu durumda $\sigma(x) = \sigma(d(a)) = d(\sigma(a))\in Z$ olur. Bunu (4.4) eşitliğinde yerine yazacak olursak,

$$d(y)(d(\sigma(a))r - rd(\sigma(a))) = d(d(\sigma(a)))(r\tau(y) - \tau(y)r)$$

olur. $d(\sigma(a))\in Z$ olduğundan, $\forall a\in N$ için $d^2(a)(r\tau(y) - \tau(y)r) = 0$ olur. Lemma 3.1.4 (i) den $d^2(a) = 0$, $\forall a\in N$ bulunur. Lemma 4.1.8 (ii) den $d = 0$ bulunur. Dolayısıyla bu da $d\neq 0$ ile çelişir. O halde N bir komütatif halkadır.

Teorem 4.1.10 : N bir asal yakın halka, $0\neq d : N\rightarrow N$ bir (σ,τ)-türev ve $\forall x,y\in N$ için $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ olsun. Buna göre,

(i) (N,+) abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ve $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : Hipotezden, $\forall x,y,z\in N$ için,

$d(x + x)d(y + z) = d(y + z)d(x + x)$ dir. Yani,

$d(x + x)d(y) + d(x + x)d(z) = d(y + z)d(x) + d(y + z)d(x)$ dir. Hipotezden,

$d(y)d(x + x) + d(z)d(x + x) = d(x)d(y + z) + d(x)d(y + z)$ olur. Buradan,

$d(y)d(x) + d(y)d(x) + d(z)d(x) + d(z)d(x) = d(x)d(y) + d(x)d(z) + d(x)d(y) + d(x)d(z)$, $\forall x,y,r\in N$ dir. Tekrar hipotez kullanılırsa, $d(y)d(x) + d(z)d(x) = d(x)d(z) + d(x)d(y)$, $\forall x,y,r\in N$ ifadesi elde edilir. Buradan $d(x)(d(y) + d(z) - d(y) - d(z)) = 0$, $\forall x,y,r\in N$ bulunur. Bu yüzden $d(x)d(y,z) = 0$, $\forall x,y,z\in N$ dir. Yani her c komütatörü için $d(x)d(c) = 0$, $\forall x \in N$ olur. Lemma 4.1.8 (i) den her c toplamsal komütatörü için $d(c) = 0$ olur. c toplamsal komütatör ve keyfi $x \in N$ için xc de toplamsal komütatördür. Her c toplamsal komütatörü için $d(c) = 0$ olduğundan $0 = d(xc) = (\sigma(x)d(c) + d(x)\tau(c))$ olur. Dolayısıyla her c komütatörü için $d(x)\tau(c) = 0$, $\forall x \in N$ elde edilir. Lemma 4.1.8 (i) den $\tau(c) = 0$ dır. τ bir otomorfizm olduğundan $c = 0$ dır. O halde $(N,+)$ abeliandır.

(ii) N, 2-torsion free $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ olsun. Lemma 4.1.4 ve Lemma 4.1.5 den, $\forall x,y,z \in N$ için,

$d(d(x)y)d(z) = (d^2(x)\tau(y) + \sigma(d(x))d(y))d(z) = d^2(x)\tau(y)d(z) + \sigma(d(x))d(y)d(z)$, bulunur. Öyleyse,

$$d^2(x)\tau(y)d(z) = d(d(x)y)d(z) - \sigma(d(x))d(y)d(z), \ \forall x,y,z \in N \tag{4.5}$$

$d(x)d(y) = d(y)d(x)$, $\forall x,y \in N$ olduğu için,

$$\begin{aligned} d(d(x)y)d(z) = d(z)d(d(x)y) &= d(z)(d^2(x)\tau(y) + \sigma(d(x))d(y)) \\ &= d(z)d^2(x)\tau(y) + d(z)\sigma(d(x))d(y) \\ &= d^2(x)d(z)\tau(y) + \sigma(d(x))d(y)d(z), \ \forall x,y,z \in N \end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitliği bulunur. (4.5) ve (4.6) eşitliklerinden $d^2(x)d(z)\tau(y) = d^2(x)\tau(y)d(z)$, $\forall x,y,z \in N$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$d^2(x)(\tau(y)d(z) - d(z)\tau(y)) = 0, \ \forall x,y,z \in N \tag{4.7}$$

olur. (4.7) eşitliğinde y yerine yr alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= d^2(x)(\tau(yr)d(z) - d(z)\tau(yr)) \\ &= d^2(x)(\tau(y)\tau(r)d(z) - d(z)\tau(y)\tau(r)), \ \forall x,y,z \in N \end{aligned} \tag{4.8}$$

bulunur. Dolyısıyla, $d^2(x)\tau(y)(\tau(r)d(z) - d(z)\tau(r))$, $\forall x,y,z,r \in N$ bulunur. τ bir otomorfizm ve N asal olduğundan $d^2(x) = 0$, $\forall x \in N$ veya $\tau(r)d(z) - d(z)\tau(r)$, $\forall z,r \in N$ olur. Lemma 4.1.8 (ii) den $d^2(x) = 0$ olmaz. Dolayısıyla $d(N) \subseteq Z$ dir. O halde Teorem 4.1.9 dan N bir komütatif halkadır.

Bundan sonra 4.2. Yakın halkalarda genelleştirilmiş türev kısmına kadar d bir türev olmak üzere (σ,τ)-türev, her $x,y \in N$ için $d(xy) = \tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y)$ olarak kullanılacaktır.

Lemma 4.1.11 : d bir (σ,τ)-türev ise o zaman her x,y$\in$ N için,

$d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ dir.

İspat: x,y$\in$ N için, $d(x(y+y)) = \tau(x)d(y + y) + d(x)\sigma(y + y)$

$= \tau(x)d(y)+\tau(x)d(y)+d(x)\sigma(y)+d(x)\sigma(y)$

dir. Ayrıca, $d(xy + xy) = d(xy) + d(xy)$

$= \tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y)$

olduğundan bu iki eşitlikten, $\tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ elde edilir. O halde, $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$, $\forall$ x,y$\in$ N dir.

Lemma 4.1.12: $d:N\rightarrow N$ bir (σ,τ)-türev ve a$\in$ N olsun. O zaman her x,y$\in$ N için, $(\tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y))\sigma(a) = \tau(x)d(y)\sigma(a) + d(x)\sigma(y)\sigma(a)$ dır.

İspat: x,y$\in$ N için $d((xy)a) = \tau(xy)d(a) + d(xy)\sigma(a)$

$= \tau(x)\tau(y)d(a) + (\tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y))\sigma(a)$

olur. Öte yandan, $d(x(ya)) = \tau(x)d(ya) + d(x)\sigma(ya)$

$= \tau(x)(\tau(y)d(a) + d(y)\sigma(a)) + d(x)\sigma(y)\sigma(a)$

$= \tau(x)\tau(y)d(a) + \tau(x)d(y)\sigma(a) + d(x)\sigma(y)\sigma(a)$

olur. Bu iki eşitlikten

$(\tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y))\sigma(a) = \tau(x)d(y)\sigma(a) + d(x)\sigma(y)\sigma(a)$, $\forall$ x,y$\in$ N bulunur.

Lemma 4.1.13 : N bir asal yakın halka, $0\neq d$, bir (σ,τ)-türev ve a$\in$ N olsun.

(i) $d(N)\sigma(a) = 0$ ise a = 0 dır.

(ii) $ad(N) = 0$ ise a = 0 dır.

İspat: (i) x,y$\in$ N için hipotezi ve Lemma 4.1.12 yi kullanarak

$0 = d(xy)\sigma(a) = (\tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y))\sigma(a)$

$= \tau(x)d(y)\sigma(a) + d(x)\sigma(y)\sigma(a) = d(x)\sigma(y)\sigma(a)$ yazabiliriz.

Bu eşitlikte σ nın otomorfizm olması ve N nin asallığı kullanılırsa, $d(x)N\sigma(a) = 0$ $\Rightarrow$ d(x) = 0 veya $\sigma(a) = 0 \Rightarrow \sigma(a) = 0 \Rightarrow$ a = 0 olur.

(ii) x,y$\in$ N için hipotezden, $0 = ad(xy) = a\tau(x)d(y) + ad(x)\sigma(y) \Rightarrow a\tau(x)d(y) = 0$, $\forall$ x,y$\in$ N olur. Yani aNd(y) = 0, $\forall$ y$\in$ N dir. N asal olduğundan a = 0 veya d(y) = 0 bulunur. $d\neq 0$ olduğundan a = 0 olur.

Lemma 4.1.14 : N 2-torsion free asal yakın halka, d:N$\rightarrow$N bir (σ,τ)-türev ve σd = dσ, τd = dτ olsun. Buna göre, d^2 = 0 ise d = 0 dır.

İspat: Keyfi x,y$\in$ N için

$$
\begin{aligned}
0 = d^2(xy) &= d(d(xy)) \\
&= d(\tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y)) \\
&= d(\tau(x)d(y)) + d(d(x)\sigma(y)) \\
&= \tau^2(x)d^2(y) + d(\tau(x))\sigma(d(y)) + \tau(d(x))d(\sigma(y)) + d^2(x)\sigma^2(y) \\
&= 2d(\tau(x))d(\sigma(y))
\end{aligned}
$$

olur. N 2-torsion free ve σ otomorfizm, olduğu kullanılırsa, d(τ(x))d(N) = {0}, $\forall$ x$\in$ N bulunur. O halde d(τ(x)) = 0, $\forall$ x$\in$ N olur. Yani d = 0 bulunur.

Teorem 4.1.15 : N bir yakın halka, d:N$\rightarrow$N sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olsun. Buna göre, u$\in$ N sıfır bölen değil ve $[d(u),u]_{\sigma,\tau}$ = 0 ise her x$\in$ N için (x,u) sabittir.

İspat: N de sol yakın halka olduğundan soldan dağılm özelliği kullanılırsa $u(u + x) = u^2 + ux$ yazılır. Her iki taraftan türev alınırsa, $d(u(u + x)) = d(u^2 + ux)$ dir

$$
\begin{aligned}
d(u(u + x)) &= \tau(u)d(u + x) + d(u)\sigma(u+ x) \\
&= \tau(u)d(u) + \tau(u)d(x) + d(u)\sigma(u) + d(u)\sigma(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(u^2 +ux) &= d(u^2) + d(ux) \\
&= \tau(u)d(u) + d(u)\sigma(u) + \tau(u)d(x) + d(u)\sigma(x)
\end{aligned}
$$

Bu iki eşitlikten $\tau(u)d(x) + d(u)\sigma(u) = d(u)\sigma(u) + \tau(u)d(x)$ olur. Hipotez kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
0 &= \tau(u)d(x) + d(u)\sigma(u) - \tau(u)d(x) - d(u)\sigma(u) \\
&= \tau(u)(d(x) + d(u) - d(x) - d(u)) \\
&= \tau(u)d(x,u)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan u sol sıfır bölen olmadığı için d(x,u) = 0 olur. O halde her x$\in$ N için (x,u) sabittir.

Teorem 4.1.16: N bir asal yakın halka, 0$\neq$d:N$\rightarrow$N bir (σ,τ)-türev ve σd = dσ, τd = dτ olsun. Buna göre,

(i) d(N)$\subseteq$Z ise (N,+) abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : $d(a)\neq 0$ olacak biçimde $a\in N$ olsun. Bu durumda, $d(a)\in Z-\{0\}$ ve $d(a) + d(a)\in Z-\{0\}$ olduğu kullanılırsa $x,y\in N$ için,

$(x + y)(d(a) + d(a)) = (x + y)d(a) + (x + y)d(a)$

$(d(a) + d(a))(x + y) = (d(a) + d(a))x + (d(a) + d(a))y$

olur. Bu iki eşitlikten $d(a)x + d(a)y = d(a)y + d(a)x$ bulunur. Dolayısıyla, $d(a)(x + y - x - y) = 0$, $\forall x,y\in N$ dir. Buradan $d(a)N(x,y) = \{0\}$ olur. N nin asallığından $d(a) = 0$ veya $(x,y) = 0$ dır. Hipotezden $d(a)\neq 0$ olduğundan her $x,y\in N$ için $(x,y) = 0$ yani $(N,+)$ abeliandır.

(ii) $b,c\in N$ için hipotezden $\sigma(c)d(ab) = d(ab)\sigma(c)$ dir. Buradan,

$\sigma(c)\tau(a)d(b) + \sigma(c)d(a)\sigma(b) = \tau(a)d(b)\sigma(c) + d(a)\sigma(b)\sigma(c)$ $\Rightarrow \sigma(c)\tau(a)d(b) + d(a)\sigma(c)\sigma(b) = \tau(a)d(b)\sigma(c) + d(a)\sigma(b)\sigma(c)$ olur. $(N,+)$ abelian ve $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ olduğundan her $a, b, c\in N$ için,

$d(b)[\tau(a),\sigma(c)] = d(a)\ \sigma([c,b])$ ifadesi elde edilir.

Varsayalım ki N komütatif olmasın. $[b,c]\neq 0$ olacak biçimde $b,c\in N$ seçelim ve $a = d(x)\in Z$ olsun. Bu durumda $d(b)[\tau(a),\sigma(c)] = d(a)\sigma([c,b])$ eşitliğinde sol taraf sıfır olur. Dolayısıyla sağ taraftan gelen $d^2(x)\sigma([c,b]) = 0$, $\forall x\in N$ olur. σ bir otomorfizm ve $[b,c]\neq 0$ olduğundan $d^2(x) = 0$, $\forall x\in N$ bulunur. Bu ise d nin sıfırdan farklı olması ile çelişir. Sonuç olarak N bir komütatif halkadır.

Teorem 4.1.17 : N bir asal yakın halka, $0\neq d:N\rightarrow N$ bir (σ,τ)-türev ve $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ olsun. Buna göre,

(i) $[d(N),d(N)] = \{0\}$ ise $(N,+)$ abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : Teorem 4.1.16 nın ispatındaki yöntem kullanılarak, z ve z + z, d(N) nin elemanları ile değişmelidirler. Dolayısıyla,

$$zd(x,y) = 0\ ,\ \forall x,y,z\in N \tag{4.9}$$

olur. $t\in N$ olmak üzere z yerine d(t) alınırsa $d(t)d(x,y) = 0$ elde edilir. σ otomorfizm olduğundan $\sigma(d(t)d(x,y)) = 0$ yani $\sigma(d(t))\sigma(d(x,y)) = 0$ dır. $\sigma d = d\sigma$ olduğu kullanılırsa her $t,x,y\in N$ için, $d(\sigma(t))\sigma(d(x,y)) = 0$ ve buradan da $d(N)\sigma(d(x,y)) = 0$ elde edilir. Lemma 4.1.13 (i) den $\sigma(d(x,y)) = 0$ dır. O halde her $x,y\in N$ için, $d(x,y) = 0$ olur. $w\in N$ için, $0 = d(wx,wy) = d(w(x,y)) = \tau(w)d(x,y) + d(w)\sigma(x,y)$

yazabiliriz. Buradan $d(w)\sigma(x,y) = 0$, $\forall w,x,y \in N$ olur. Yani $d(N)\sigma(x,y) = 0$, $\forall x,y \in N$ elde edilir. Lemma 4.1.13 (i) den $(x,y) = 0$, $\forall x,y \in N$ olur. Yani $(N,+)$ abeliandır.

(ii) N 2-torsion free ve $[d(N),d(N)] = \{0\}$ olsun. $x,y,z \in N$ için $d(\sigma(z))d(d(x)y) = d(d(x)y)d(\sigma(z)) \Rightarrow d(\sigma(z))\tau(d(x))d(y) + d(\sigma(z))d^2(x)\sigma(y) = \tau(d(x))d(y)d(\sigma(z)) + d^2(x)\sigma(y)\, d(\sigma(z))$ bulunur. O halde $d(\tau(x))d(\sigma(z)) = d(\sigma(z))\, d(\tau(x))$ olur. $[d(N),d(N)] = \{0\}$ ve $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ olduğu kullanılırsa, $d(\tau(x))d(\sigma(z))d(y)+d(\sigma(z))d^2(x)\sigma(y) = d(\tau(x))d(y)d(\sigma(z))+d^2(x)\sigma(y)d(\sigma(z))$ ve bu eşitlikten de her $x, y, z \in N$ için,

$$\begin{aligned} d(\tau(x))[d(\sigma(z)),d(y)] &= d^2(x)d(\sigma(z))\sigma(y) - d^2(x)\sigma(y)\sigma(d(z)) \\ &= d^2(x)\sigma[d(z),y] \end{aligned}$$

elde edilir. $[d(N),d(N)] = \{0\}$ olduğu için $[d(\sigma(z)),d(y)] = 0$ bulunur. Bu yüzden $d^2(x)\sigma[d(z),y] = 0$ olur. Yani,

$$d^2(x)\sigma(d(z))\sigma(y) = d^2(x)\sigma(y)\sigma(d(z)),\ \forall x,y,z \in N \tag{4.10}$$

eşitliği elde edilir. (4.10) da y yerine yt alınırsa $d^2(x)\sigma(y)\sigma(t)\sigma(d(z)) = d^2(x)\sigma(d(z))\sigma(y)\sigma(t) = d^2(x)\sigma(y)\sigma(d(z))\sigma(t) \Rightarrow d^2(x)\sigma(y)\sigma[t,d(z)] = 0$, $\forall t,x,y,z \in N \Rightarrow d^2(x)N\sigma[t,d(z)] = \{0\}$, $\forall t,x,z \in N \Rightarrow d^2(x) = 0$ veya $\sigma[t,d(z)] = 0$, $\forall t,x,z \in N \Rightarrow d^2(N) = \{0\}$ veya $d(N) \subset Z$ bulunur.

$d^2(N) = \{0\}$ ise Lemma 4.1.14 den $d = 0$ olur. Bu ise d nin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. O halde $d(N) \subset Z$ dir. Teorem 4.1.16 dan N komütatiftir.

Teorem 4.1.18 : N, 2-torsion free asal yakın halka, d_1 bir (σ,τ)-türev ve d_2 bir türev olsun. Buna göre $d_1 d_2(N) = \{0\}$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat: $x, y \in N$ için,

$$\begin{aligned} 0 = d_1 d_2(xy) &= d_1(x d_2(y) + d_2(x)y) = d_1(x d_2(y)) + d_1(d_2(x)y) \\ &= \tau(x)\, d_1 d_2(y) + d_1(x)\sigma(d_2(y)) + \tau(d_2(x))\, d_1(y) + d_1 d_2(x)\sigma(y) \\ &= d_1(x)\sigma(d_2(y)) + \tau(d_2(x))\, d_1(y) \text{ olur. Yani,} \end{aligned}$$

$$d_1(x)\sigma(d_2(y)) + \tau(d_2(x))\, d_1(y) = 0,\ \forall x, y \in N \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. (4.11) eşitliğin de x yerine $d_2(x)$ alınırsa her $x,y\in N$ için $d_1d_2(x)\sigma(d_2(y)) + \tau(d_2^{\,2}(x))d_1(y) = 0$ olur. Hipotezden $\tau(d_2^{\,2}(x))d_1(y) = 0$ yani $\tau(d_2^{\,2}(x))d_1(N) = \{0\}$, $\forall x\in N$ dir. Lemma 4.1.13 (ii) kullanılarak,

$d_1 = 0$ veya $\tau d_2^{\,2}(x) = 0$, $\forall x\in N$ bulunur. $\tau d_2^{\,2}(x) = 0$, $\forall x\in N$ ise $d_2^{\,2}(N) = \{0\}$ ve dolayısıyla $d_2 = 0$ olur. O halde, sonuç olarak $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir.

Teorem 4.1.19 : N 2-torsion free asal yakın halka, d_1 bir türev, d_2 bir (σ,τ)-türev ve $\tau d_2 = d_2\tau$, $\tau d_1 = d_1\tau$ olsun. Buna göre $d_1d_2(N) = \{0\}$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat: $x,y\in N$ için,

$0 = d_1d_2(xy) = d_1(d_2(xy)) = d_1(\tau(x)d_2(y) + d_2(x)\sigma(y))$

$= d_1(\tau(x)d_2(y)) + d_1(d_2(x)\sigma(y))$

$= \tau(x)d_1d_2(y) + d_1(\tau(x))d_2(y) + d_2(x)d_1(\sigma(y)) + d_1d_2(x)\sigma(y)$

$= d_1(\tau(x))d_2(y) + d_2(x)d_1(\sigma(y))$ bulunur. Yani,

$$d_1(\tau(x))d_2(y) + d_2(x)d_1(\sigma(y)) = 0,\ \forall x, y\in N \qquad (4.12)$$

eşitliği elde edilir. (4.12) eşitliğinde x yerine $d_2(x)$ alınırsa,

$d_1(\tau(d_2(x)))d_2(y) + d_2^{\,2}(x)d_1(\sigma(y)) = 0$, $\forall x, y\in N$

$\Rightarrow \tau(d_1(d_2(x)))d_2(y) + d_2^{\,2}(x)d_1(\sigma(y)) = 0$, $\forall x, y\in N$

$\Rightarrow d_2^{\,2}(x)d_1(\sigma(y)) = 0$, $\forall x, y\in N$

$\Rightarrow d_2^{\,2}(x)d_1(N) = \{0\}$, $\forall x\in N$

Lemma 3.1.4 (ii) den $d_2^{\,2}(x) = 0$ ise $d_2^{\,2} = 0$ veya $d_1 = 0$ olur. $d_2^{\,2} = 0$ ise Lemma 4.1.14 den $d_2 = 0$ olur. O halde $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ bulunmuş olur.

Teorem 4.1.20 : N bir asal yakın halka, $0\neq d:N\rightarrow N$ bir (σ,τ)-türev ve $a\in N$ olsun. Buna göre, $[d(N),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $d(a) = 0$ veya $a\in Z$ dir.

İspat : Her $x\in N$ için hipotezden $d(ax)\sigma(a) = \tau(a)d(ax)$ olduğu kullanılırsa,

$\tau(a)d(x)\sigma(a) + d(a)\sigma(x)\sigma(a) = \tau(a)\tau(a)d(x) + \tau(a)d(a)\sigma(x)$

$\tau(a)\tau(a)d(x) + d(a)\sigma(x)\sigma(a) = \tau(a)\tau(a)d(x) + d(a)\sigma(a)\sigma(x)$ olur ve buradan da,

$$d(a)\sigma([x,a]) = 0,\ \forall x \in N \tag{4.13}$$

eşitliği elde edilir. (4.13) eşitliğinde x yerine xy, $y \in N$ alınırsa,
$d(a)\sigma(x[y,a]) = 0,\ \forall x,y \in N \Rightarrow d(a)\sigma(x)\sigma([y,a]) = 0,\ \forall x,y \in N \Rightarrow d(a)N\sigma([y,a]) = 0,\ \forall y \in N \Rightarrow d(a) = 0$ veya $\sigma([y,a]) = 0,\ \forall y \in N \Rightarrow d(a) = 0$ veya $a \in Z$ dir.

Teorem 4.1.21 : N bir asal yakın halka, $d:N \to N$ bir (σ,τ)-türev ve $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ olsun. Buna göre,

(i) $[d(N),d(N)]_{\sigma,\tau} = \{0\}$ ise (N,+) abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : Teorem 4.1.20 de $a \in N$ için, $d(a) = 0$ veya $a \in Z$ olduğu bulunmuştu. a elemanı yerine d(x) alınırsa her $x \in N$ için $d^2(x) = 0$ veya $d(x) \in Z$ dir.

$A = \{x \in N : d^2(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in N : d(x) \in Z\}$ kümeleri N nin toplamsal altgruplarıdır ve $N = A \cup B$ dir. Brauer Trick'ten N iki öz altgrubunun birleşimi olarak yazılamayacağından N = A veya N = B olmak zorundadır. Yani $d^2(N) = \{0\}$ veya $d(N) \subset Z$ dir.

$d^2(N) = \{0\}$ ise Lemma 4.1.14 den d = 0 dır. Ancak bu sonuç hipotezimizle çelişir. O halde $d(N) \subset Z$ dir. Teorem 4.1.16 dan ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.22 : N, 3-asal yakın halka olsun. $0 \neq d_1$ bir (σ,τ)-türev ve d_2 bir türev olsun. Buna göre $d_1(x)\sigma(d_2(y)) = -\tau(d_2(x))d_1(y),\ \forall x,y \in N$ ise (N,+) abeliandır.

İspat : $u,v \in N$ olsun. $0 = d_1(x)\sigma(d_2(y)) + \tau(d_2(x))d_1(y),\ \forall x,y \in N$ eşitliğinde y yerine u + v alınırsa,

$$0 = d_1(x)\sigma(d_2(u+v)) + \tau(d_2(x))d_1(u+v)$$

$$= d_1(x)\sigma(d_2(u) + d_2(v)) + \tau(d_2(x))d_1(u) + \tau(d_2(x))d_1(v)$$ bulunur.

Hipotez kullanılırsa,

$$0 = d_1(x)\sigma(d_2(u)) + d_1(x)\sigma(d_2(v)) - d_1(x)\sigma(d_2(u)) - d_1(x)\sigma(d_2(v))$$

$$= d_1(x)(\sigma(d_2(u)) + \sigma(d_2(v)) - \sigma(d_2(u)) - \sigma(d_2(v)))$$

$$= d_1(x)\sigma(d_2(u,v))$$ olur. Yani,

$$d_1(x)\sigma(d_2(u,v)) = 0,\ \forall x,u,v \in N \tag{4.14}$$

ifadesi elde edilir. Lemma 4.1.13 (i) den d_2(u,v) = 0, $\forall$ u, v $\in$ N bulunur.

Keyfi w $\in$ N için d_2(wu,wv) dır. Dolayısıyla 0 = d_2(w(u,v)) = τ(w)d_2(u,v) + d_2(w)σ(u,v) bulunur. d_2(u,v) = 0 ve σ bir otomorfizm olduğundan d_2(w)(u,v) = 0, $\forall$ u,v,w$\in$ N elde edilir. Lemma 3.1.4 (iii) den (N,+) abeliandır.

Teorem 4.1.23 : N, 3-asal yakın halka ve 2N $\neq$ {0} olsun. Bir d_1 (σ,τ)-türevi ve bir d_2 türevi için, $d_1\tau = \tau d_1$, $d_1\sigma = \sigma d_1$ ve $d_2\tau = \tau d_2$, $d_2\sigma = \sigma d_2$ olsun. Buna göre, d_1(x)σ(d_2(y)) = – τ(d_2(x))d_1(y), $\forall$ x,y$\in$ N ise d_1= 0 veya d_2 = 0 olur.

İspat : $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman Lemma 4.1.22 den (N,+) abeliandır. Her u,v$\in$ N için hipotezde verilen eşitlikte x yerine uv alınırsa,

$$0 = d_1(uv)\sigma(d_2(y)) + \tau(d_2(uv))d_1(y)$$

$$= (\tau(u)d_1(v) + d_1(u)\sigma(v))\sigma(d_2(y)) + \tau(u d_2(v) + d_2(u)v)d_1(y)$$ elde edilir. Sağ dağılma kuralı kullanılarak,

$$0 = \tau(u)d_1(v)\sigma(d_2(y)) + d_1(u)\sigma(v)\sigma(d_2(y)) + \tau(u)\tau(d_2(v))d_1(y) + \tau(d_2(u))\tau(v)d_1(y)$$

$$= \tau(u)(d_1(v)\sigma(d_2(y)) + \tau(d_2(v))d_1(y)) + d_1(u)\sigma(v)\sigma(d_2(y)) + d_2(\tau(u))\tau(v)d_1(y)$$ ifadesi elde edilir. Hipotezden,

$$d_1(u)\sigma(v)\sigma(d_2(y)) + d_2(\tau(u))\tau(v)d_1(y) = 0,\ \forall\, u,v,y\in N \qquad (4.15)$$

olur. Bu eşitlikte y yerine yt, t$\in$ N alınırsa,

$$0 = d_1(u)\sigma(v)\sigma(d_2(yt)) + d_2(\tau(u))\tau(v)d_1(yt)$$

$$= d_1(u)\sigma(v)\sigma(y)\sigma(d_2(t)) + d_1(u)\sigma(v)\sigma(d_2(y))\sigma(t) + d_2(\tau(u))\tau(v)\ \tau(y)d_1(t) + d_2(\tau(u))\tau(v)d_1(y)\sigma(t)$$

$$= d_1(u)\sigma(vy)\sigma(d_2(t)) + d_2(\tau(u))\tau(vy)d_1(t) + d_1(u)\sigma(v)\sigma(d_2(y))\sigma(t) + d_2(\tau(u))\tau(v)d_1(y)\sigma(t)$$

bulunur. Tekrar (4.15) eşitliği kullanılırsa,

$$d_1(u)\sigma(v)\sigma\ d_2(y)\sigma(t) + d_2\ \tau(u)\tau(v)d_1(y)\sigma(t) = 0,\ \forall\, u,v,y\in N \qquad (4.16)$$

bulunur. (4.16) eşitliğinde t yerine d_1(t) alınırsa, $\forall$ u,v,y,t$\in$ N için

$$d_1(u)\sigma(v)\sigma\, d_2(y)\sigma\, d_1(t) + d_2\,\tau(u)\tau(v)d_1(y)\sigma\, d_1(t) = 0 \qquad (4.17)$$

bulunur. (4.17) eşitliğinde y yerine τ(y) alınırsa, $\forall$ u,v,y,t$\in$ N için

$$d_1(u)\sigma(v)\sigma\, d_2(\tau(y)\sigma\, d_1(t) + d_2\,\tau(u)\tau(v)d_1\,\tau(y)\sigma\, d_1(t) = 0 \qquad (4.18)$$

olur. (4.15) eşitliğinde v yerine vd_1(y) ve y yerine σ(t) alınırsa, $\forall$ u,v,y,t$\in$ N için

$$d_1(u)\sigma(v)\sigma\, d_1(y)\sigma\, d_2(\sigma(t) + d_2\,\tau(u)\tau(v)\tau\, d_1(y)d_1\,\sigma\,(t) = 0 \qquad (4.19)$$

bulunur. Öte yandan $d_1\tau = \tau\, d_1$, $d_1\sigma = \sigma\, d_1$ hipotezinden ve (4.19) eşitliğinde ki $d_2\,\tau(u)\tau(v)\tau(d_1(y))d_1(\sigma(t))$ ifadesi yerine (4.18) eşitliğinden $-d_1(u)\sigma(v)\sigma\, d_2(\tau(y))\sigma(d_1(t))$ ifadesi yazılacak olursa,

$d_1(u)\sigma(v)\{(d_1(\sigma(y))\sigma(d_2(\sigma(t)) - \sigma(d_2(\tau(y)))\sigma(d_1(t))\} = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$d_1(N)N\{\sigma\, d_1\,(y)d_2\,\sigma(t) - d_2\,\tau(y)d_1(t)\} = \{0\},\ \forall\, t,y\in N \qquad (4.20)$$

bulunur. N, 3-asal yakın halka ve $d_1 \neq 0$ olduğundan,

$d_1(y)d_2(\sigma(t)) - d_2(\tau(y))d_1(t) = 0$ olur. $d_2\sigma = \sigma\, d_2$ olduğundan ve hipotezden,

$$d_1(y)\sigma(\, d_2(t) + d_2(t)) = 0,\ \forall\, t,y\in N \qquad (4.21)$$

eşitliği elde edilir. Lemma 4.1.13 (i) ve $d_1 \neq 0$ olduğundan,

$d_2(t) + d_2(t) = 0$, $\forall$ t$\in$ N bulunur. t yerine st alınırsa

$0 = d_2(st) + d_2(st) = s\,d_2(t) + d_2(s)t + s\,d_2(t) + d_2(s)t$

$= s\,d_2(t) + s\,d_2(t) + d_2(s)t + d_2(s)t$ ((N,+) abelian)

$= s(d_2(t) + d_2(t)) + d_2(s)t + d_2(s)t$

$= d_2(s)(t + t),\ \forall s,t \in N$

elde edilir. Öyleyse, $d_2(N)(t + t) = \{0\},\ \forall t \in N$ dir. Lemma 3.1.4 (iii) den t + t = 0, $\forall t \in N$ elde edilir. Bu da 2N $\neq$ {0} hipotezi ile çelişir. O halde $d_1(x)\sigma(d_2(y)) = -\tau(d_2(x))d_1(y),\ \forall x, y \in N$ iken $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ bulunur.

Teorem 4.1.24 : N bir 3 asal yakın halka, $2N \neq 0$, d_1 bir (σ,τ)-türev, d_2 bir normal türev ve $d_1\tau = \tau d_1$, $d_1\sigma = \sigma d_1$ ve $d_2\tau = \tau d_2$, $d_2\sigma = \sigma d_2$ olsun. Buna göre $d_1 d_2 : N \to N$ bir (σ,τ)-türev ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat: $d_1 d_2 : N \to N$ bir (σ,τ)-türev olsun. Buna göre,

$d_1 d_2(xy) = \tau(x) d_1 d_2(y) + d_1 d_2(x)\sigma(y)$ dir. Öte yandan d_1 (σ,τ)-türev, d_2 türev olduğundan

$d_1 d_2(xy) = d_1(d_2(xy)) = d_1(x d_2(y) + d_2(x)y)$

$= \tau(x) d_1 d_2(y) + d_1(x)\sigma d_2(y) + \tau(d_2(x))d_1(y) + d_1 d_2(x)\sigma(y)$

olur. Bu iki eşitlikten $d_1(x)\sigma(d_2(y)) + \tau(d_2(x))d_1(y) = 0,\ \forall x,y \in N$ elde edilir. O halde Teorem 4.1.23 den $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ bulunur.

Teorem 4.1.25 : N bir 3-asal yakın halka, $0 \neq d : N \to N$ bir (σ,τ)-türev ve $d(xy) = d(yx),\ \forall x,y \in N$ olsun. Buna göre, N bir komütatif yakın halkadır.

İspat : $d(xy) = d(yx),\ \forall x,y \in N$ olduğundan,

$$\tau(x)d(y) + d(x)\sigma(y) = \tau(y)d(x) + d(y)\sigma(x)\ \ \forall x,y \in N \tag{4.22}$$

olur. Bu eşitlikte x yerine yx alınırsa,

$\tau(y)\tau(x)d(y) + d(yx)\sigma(y) = \tau(y)d(yx) + d(y)\sigma(y)\sigma(x)$ bulunur. Lemma 4.1.12 ve d(xy) = d(yx) kullanılarak

$\tau(y)\tau(x)d(y) + \tau(y)d(x)\sigma(y) + d(y)\sigma(x)\sigma(y)$

$= \tau(y)\tau(x)d(y) + \tau(y)d(x)\sigma(y) + d(y)\sigma(y)\sigma(x)$

eşitliği elde edilir. Öyleyse,

$$d(y)\sigma(x)\sigma(y) = d(y)\sigma(y)\sigma(x),\ \forall x,y \in N \tag{4.23}$$

bulunur. (4.23) eşitliğinde x yerine xz, $z \in N$ alınırsa,

$d(y)\sigma(x)\sigma(z)\sigma(y) = d(y)\sigma(y)\sigma(x)\sigma(z)$, $\forall x,y,z \in N$ elde edilir. Her x,y için sağlandığından,

$d(y)\sigma(x)\sigma(z)\sigma(y) = d(y)\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)$, $\forall x,y,z \in N$ olur. σ bir otomorfizm olduğundan

$0 = d(y)\sigma(x)(\sigma(z)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(z) = d(y)\sigma(x[z,y])$, $\forall x,y,z \in N$ bulunur. Dolayısıyla, $d(y)N\sigma([z,y]) = 0$, $\forall y,z \in N$ dir. N, 3-asal yakın halka olduğundan $d(y) = 0$ veya $\sigma([z,y]) = 0$, $\forall z \in N$ olur. Yani $d(y) = 0$ veya $y \in Z$ dir. d sıfırdan farklı olduğundan $\forall y \in N$ için $y \in Z$ elde edilir. Dolayısıyla N bir komütatif yakın halkadır.

Teorem 4.1.26 : N bir 3-asal, 2-torsion free yakın halka, $0 \neq d_1$ (σ,τ)-türev, $0 \neq d_2$ türev ve $d_1\tau = \tau d_1$, $d_1\sigma = \sigma d_1$ ve $d_2\tau = \tau d_2$, $d_2\sigma = \sigma d_2$ olsun. Buna göre, $\forall x,y \in N$ için $d_1(x)\sigma(d_2(y)) = \tau(d_2(y))d_1(x)$ ise N bir komütatif halkadır.

İspat : Hipotezden, $[d_1(x), d_2(y)]_{\sigma,\tau} = \{0\}$, $\forall x,y \in N$ olduğu için Teorem 4.1.20 den $d_1 d_2(N) = \{0\}$ veya $d_2(N) \subset Z$ olur. d_1 ve d_2 $\neq 0$ olduğu için $d_2(N) \subset Z$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.1.5 den N bir komütatif halkadır.

4.2 Yakın Halkada Genelleştirilmiş Türev

Tanım 4.2.1 : $f : N \to N$ toplamsal bir dönüşüm olsun. $f(xy) = f(x)y + xd(y)$, $\forall x,y \in N$ olacak biçimde bir d türevi varsa f ye, d türeviyle yapılan bir sağ genelleştirilmiş türev denir.

$f(xy) = d(x)y + xf(y)$, $\forall x,y \in N$ olacak biçimde bir d türevi varsa f ye, d türeviyle yapılan bir sol genelleştirilmiş türev denir.

f hem sağ hem de sol genelleştirilmiş türev ise f dönüşümüne genelleştirilmiş türev denir.

Lemma 4.2.2 : N bir yakın halka ve $f : N \to N$, d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olsun. Buna göre,

$(f(a)b + ad(b))c = f(a)bc + ad(b)c$, $\forall a,b,c \in N$ dir.

İspat: $f((ab)c) = f(ab)c + abd(c) = (f(a)b + ad(b))c + abd(c)$ dir. Öte yandan,

$$f(a(bc)) = f(a)bc + ad(bc) = f(a)bc + ad(b)c + abd(c) \text{ dir.}$$

Bu iki eşitlikten, $(f(a)b + ad(b))c = f(a)bc + ad(b)c$, $\forall\, a,b,c \in N$ olur.

Lemma 4.2.3 : N, 3-asal yakın halka ve f, sıfırdan farklı bir d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olsun. $d(f(N)) = \{0\}$ ise $f(d(N)) = \{0\}$ dır.

İspat: Varsayalım ki $d(f(x)) = 0$, $\forall\, x \in N$ olsun. Buna göre,

$$0 = d(f(xy)) = d(f(x)y + xd(y)) = f(x)d(y) + (df(x))y + d(x)d(y) + xd^2(y)$$
$$= f(x)d(y) + d(x)d(y) + xd^2(y) \text{ olur. Yani,}$$

$$f(x)d(y) + d(x)d(y) + xd^2(y) = 0,\ \forall\, x \in N \tag{4.24}$$

bulunur. Tekrar türev alınıp Lemma 3.1.22 kullanılırsa,

$$0 = f(x)d^2(y) + d(f(x))d(y) + d^2(x)d(y) + d(x)d^2(y) + d(x)d^2(y) + xd^3(y)$$

elde edilir. Bu eşitlikten de her $x,y \in N$ için,

$$f(x)d^2(y) + d^2(x)d(y) + d(x)d^2(y) + d(x)d^2(y) + xd^3(y) = 0 \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.24) eşitliğinde y yerine d(y) alınırsa, $f(x)d^2(y) + d(x)d^2(y) + xd^3(y) = 0$ olur. Dolayısıyla (4.25) eşitliğinden

$$d^2(x)d(y) + d(x)d^2(y) = 0 ,\ \forall\, x,y \in N \tag{4.26}$$

ifadesi elde edilir. (4.24) eşitliğinde x yerine d(x) alınırsa, $f(d(x))d(y) + d^2(x)d(y) + d(x)d^2(y) = 0$ olur. Burada (4.26) eşitliği kullanılırsa her $x,y \in N$ için, $f(d(x))d(y) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla Lemma 3.1.4 (iii) den $f(d(N)) =\{0\}$ elde edilir.

Teorem 4.2.4 : N 3-asal, 2-torsion free yakın halka olsun. N üzerinde $f(N) \subseteq Z$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir f genelleştirilmiş türevi var ise N bir komütatif halkadır.

İspat: $f \neq 0$ olduğu için $0 \neq f(x) \in Z$ olacak biçimde $x \in N$ vardır. $f(x) + f(x) = f(x + x) \in Z$ ve Lemma 3.1.4 (ii) den (N,+) abeliandır.

Varsayalım ki $d = 0$ olsun. Buna göre, $f(xy) = f(x)y + xd(y)$, $\forall\, x,y \in N \Rightarrow f(xy) = f(x)y \in Z$ olur. Yani, $f(x)yw = wf(x)y$, $\forall\, w \in N$ dir. O halde $f(x)(yw - wy) = 0$,

$\forall x,y,w \in N$ elde edilir. x elemanını $f(x) \neq 0$ olacak biçimde seçildiğinden Lemma 3.1.4 (i) den her $y,w \in N$ için $yw - wy = 0$ olur. Yani N bir komütatif halkadır.

Öte yandan $d \neq 0$ ve $c \in Z-\{0\}$ olsun. Buna göre, $f(xc) = f(x)c + xd(c) \in Z$ ve buradan da her $x,y \in N$ için, $(f(x)c + xd(c))y = y(f(x)c + xd(c))$ bulunur. Lemma 4.2.2 den, $f(x)cy + xd(c)y = yf(x)c + yxd(c)$ elde edilir. f(x) ve d(c) elemanlarının her ikisi de merkezde olduğundan $d(c)(xy - yx) = 0$, $\forall x,y \in N$ olur. $d(Z) \neq \{0\}$ olduğundan her $x,y \in N$ için $xy = yx$ dir. Yani N komütatiftir. Öyleyse,

$$(y + z)x = x(y + z) = xy + xz = yx + zx$$

olduğundan (N,+) abeliandır. O halde N bir komütatif halkadır.

Varsayalım ki $d \neq 0$ ve $d(Z) = \{0\}$ olsun. Özel olarak her $x \in N$ için $f(x) \in Z$ olduğundan $d(f(x)) = 0$ dır. $f(c) = 0$ olacak biçimde $c \in N$ alalım. O zaman $f(cx) = cd(x) \in Z$ dir. Dolayısıyla Lemma 4.2.3 den her $x,y \in N$ için $d(x)d(y) \in Z$ ve $d(y)d(x) \in Z$ olur. Bunlardan biri sıfır, diğeri de karesi sıfır olan merkezin elemanıdır. Çünkü, $d(x)d(y) = 0$ olsun. Bu durumda soldan d(y) sağdan d(x) ile çarpılırsa bu ifade $0 = d(y)d(x)d(y)d(x) = (d(y)d(x))^2$ olur. Benzer şekilde, $d(y)d(x) = 0$ olsun. Soldan d(x) sağdan d(y) ile çarpılırsa, $0 = d(x)d(y)d(x)d(y) = (d(x)d(y))^2$ dir. Merkezde sıfırdan farklı nilpotent eleman olmadığından her iki durumdada $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ bulunur. Teorem 3.1.6 dan N bir komütatif halkadır. Öte yandan d(x) sıfır bölen değildir. Dolayısıyla $d(x)d(x)d(y) = d(x)d(y)d(x) \Rightarrow d(x)(d(x)d(y) - d(y)d(x)) = 0 \Rightarrow d(x)d(y) = d(y)d(x)$ bulunur. Teorem 3.1.6 dan N bir komütatif halkadır.

Teorem 4.2.5 : N 3-asal yakın halka ve f, d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olsun. Buna göre

(i) $f^2 = 0$ ise $d^3 = 0$ dır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ise $d(Z) = \{0\}$ dır.

İspat (i): $0 = f^2(xy) = f(f(x)y + xd(y))$

$$= f^2(x)y + f(x)d(y) + f(x)d(y) + x\,d^2(y)$$

$$= f(x)d(y) + f(x)d(y) + x\,d^2(y) \text{ dir. Dolayısıyla,}$$

$$f(x)d(y) + f(x)d(y) + x\,d^2(y) = 0,\ \forall x,y \in N \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) ye tekrar f i uygularsak,

$$0 = f(f(x)d(y)) + f(f(x)d(y)) + f(x\,d^2(y))$$

$$= f^2(x)d(y) + f(x)d^2(y) + f^2(x)d(y) + f(x)d^2(y) + f(x)d^2(y) + xd^3(y) \text{ dir. Yani,}$$

$$f(x)d^2(y) + f(x)d^2(y) + f(x)d^2(y) + xd^3(y) = 0\ ,\ \forall\, x,y \in N \qquad (4.28)$$

olur. (4.27) eşitliğinde de y yerine d(y) alınırsa,

$$f(x)d^2(y) + f(x)d^2(y) + xd^3(y) = 0 \qquad (4.29)$$

olur. (4.28) ve (4.29) eşitliklerinden,

$$f(x)d^2(y) = 0,\ \forall\, x,y \in N \qquad (4.30)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla (4.29) eşitliğinden her $x,y \in N$ için $xd^3(y) = 0$ olur. x yerine xr, $r \in N$ alınırsa, $xrd^3(y) = 0,\ \forall\, x,y,r \in N$ bulunur. Dolayısıyla $xNd^3(y) = \{0\}$ olur. N, 3-asal olduğundan $d^3 = 0$ bulunur.

(ii) Varsayalım ki N, 2-torsion free ve $d(Z) \neq \{0\}$ olsun. $d(z) \neq 0$ olacak biçimde $z \in Z$ alalım. $x,y \in N$ için $f(N)x = \{0\}$ ise Lemma 4.2.2 kullanılarak

$0 = f(yz)x = (f(y)z + yd(z))x = f(y)zx + yd(z)x = yd(z)x$ bulunur. N, 3-asal olduğundan ve d(z) sıfır bölen olmadığından $x = 0$ dır. Yani $f(N)x = \{0\}$ ise $x = 0$ dır. (4.30) eşitliğinden her $x,y \in N$ için $f(x)d^2(y) = 0$ idi. O halde her $y \in N$ için $d^2(y) = 0$ ve buradan da $d^2 = 0$ elde edilir. Teorem 3.1.4 (iv) den $d = 0$ dır. Bu ise $d(Z) \neq \{0\}$ hipotezimizle çelişir. O halde $d(Z) = \{0\}$ olur.

Teorem 4.2.6 : N 3-asal, 2-torsion free birimli bir yakın halka ve f bir genelleştirilmiş türev olsun. Buna göre, $f^2 = 0$ ve $f(1) \in Z$ ise $f = 0$ olur.

İspat : $f(x) = f(1x) = f(1)x + 1d(x)$ dir. O halde

$$f(x) = cx + d(x),\ c \in Z \qquad (4.31)$$

bulunur. $c = 0$ ise $f = d$ olur. Hipotezden $d^2 = 0$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.1.4 (iv) den $d = 0$ bulunur. O halde $f = d = 0$ dır. Yani $f = 0$ bulunur.

$c \neq 0$ olsun. Bu durumda c sıfır bölen değildir. (4.30) eşitliğinden $d^2 = 0$ dır. Çünkü, (4.30) eşitliğinde x yerine birim alırsam, $f(1)d^2(y) = 0,\ \forall\, y \in N$, yani $cd^2(y) = 0,\ \forall\, y \in N$ elde edilir. c merkezde olduğundan sıfır bölen değildir. Dolayısıyla

$d^2 = 0$ dır. Teorem 3.1.4 (i) den $d = 0$ olur. O halde $f(x) = cx$ olur. X yerine cx alınırsa $c^2 x = 0$, $\forall x \in N$ bulunur. c^2 sıfır bölen olmadığından $N = \{0\}$ bulunur. Bu da çelişkidir. O halde $c = 0$ olur. Sonuç olarak $f = 0$ bulunur.

Teorem 4.2.7 : N, 3-asal, 2-torsion free yakın halka, f, N üzerinde $0 \neq d$ türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev ve $f(xy) = d(x)y + xf(y)$ olsun. Buna göre, her $x,y \in N$ için $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ ise N bir komütatif halkadır.

İspat: Gölbaşı (2006) dan (N,+) abelian ve $f(N) \subseteq Z$ veya $d(f(N)) = \{0\}$ dır. $f(N) \subseteq Z$ ise Teorem 4.2.4 den N bir komütatif halkadır.

$d(f(N)) = \{0\}$ ise Lemma 4.2.3 den $f(d(N)) = \{0\}$ dır. $f(d(x)d(y))$ yi iki yolla hesaplayabiliriz. f in tanımından,

$$f(d(x)d(y)) = f(d(x))d(y) + d(x)d^2(y) = d(x)d^2(y)$$

yazabiliriz. Öte yandan $f(xy) = d(x)y + xf(y)$ olduğu kullanılırsa

$$f(d(x)d(y)) = d^2(x)d(y) + d(x)f(d(y)) = d^2(x)d(y)$$

bulunur. Bu iki ifadeden her $x,y \in N$ için $d(x)d^2(y) = d^2(x)d(y)$ elde edilir. Ancak $d(f(N)) = \{0\}$ ise (4.26) eşitliğinden her $x,y \in N$ için $2d^2(x)d(y) = 0$ olur. Lemma 3.1.4 (iii) den $d^2 = 0$ dır. Teorem 3.1.4 (iv) den $d = 0$ olur. Bu ise $d \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $f(N) \subseteq Z$ olur. Yani N ibr komütatif halkadır.

4.3. Asal Yakın Halkada Genelleştirilmiş (σ,τ)-Türev

Tanım 4.3.1 : $\sigma,\tau : N \to N$ iki otomorfizm olsun. $f : N \to N$ dönüşümü için, $f(xy) = d(x)\tau(y) + \sigma(x)f(y)$, $\forall x,y \in N$ ise f ye genelleştirilmiş sol (σ,τ)-türev, $f(xy) = f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y)$, $\forall x,y \in N$ ise f ye genelleştirilmiş sağ (σ,τ)-türev denir.

f hem sağ hem de sol genelleştirilmiş (σ,τ)-türev ise f dönüşümüne genelleştirilmiş (σ,τ)-türev denir.

Lemma 4.3.2 :

(i) f, d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş sağ (σ,τ)-türev olsun. Buna göre, $f(xy) = \sigma(x)d(y) + f(x)\tau(y)$, $\forall x,y \in N$ dir.

(ii) f, d türevi ile belirlenen genelleştirilmiş sol (σ,τ)-türev olsun. Buna göre, $f(xy) = \sigma(x)f(y) + d(x)\tau(y)$, $\forall x,y \in N$ dir.

İspat (i): $f(x(y + y)) = f(x)\tau(y + y) + \sigma(x)d(y + y)$

$= f(x)\tau(y) + f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y) + \sigma(x)d(y)$ dir.

Öte yandan,

$$f(xy + xy) = f(xy) + f(xy)$$
$$= f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y) + f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y) \text{ dir.}$$

Bu iki ifadenin eşitliğinden,

$f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y) = \sigma(x)d(y) + f(x)\tau(y)$ elde edilir. Sonuç olarak $f(xy) = \sigma(x)d(y) + f(x)\tau(y)$, $\forall x,y\in N$ olarak bulunur.

(ii) Benzer şekilde,

$$f(x(y + y)) = \sigma(x)f(y + y) + d(x)\tau(y + y)$$
$$= \sigma(x)f(y) + \sigma(x)f(y) + d(x)\tau(y) + d(x)\tau(y) \text{ dir.}$$
$$f(xy + xy) = f(xy) + f(xy)$$
$$= \sigma(x)f(y) + d(x)\tau(y) + \sigma(x)f(y) + d(x)\tau(y)$$

Lemma 4.3.3 : f, d türevi ile belirlenen bir sağ genelleştirilmiş (σ,τ)-türev olsun. Buna göre,

(i) $(f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y))\tau(z) = f(x)\tau(y)\tau(z) + \sigma(x)d(y)\tau(z)$, $\forall x,y\in N$ olur.

(ii) f, d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türev olsun. Buna göre, $(d(x)\tau(y) + \sigma(x)f(y))\tau(z) = d(x)\tau(y)\tau(z) + \sigma(x) f(y)\tau(z)$, $\forall x,y\in N$ olur

(iii) f, d türevi ile belirlenen bir sol genelleştirilmiş (σ,τ)-türev olsun. Buna göre, $(d(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y)\tau(z) = d(x)\tau(y)\tau(z) + \sigma(x)d(y)\tau(z))$, $\forall x,y\in N$ olur.

İspat (i) : $\forall x,y,z\in N$ için,

$$f((xy)z) = f(xy)\tau(z) + \sigma(xy)d(z) \text{ olur.}$$
$$f(x(yz)) = f(x)\tau(yz) + \sigma(x)d(yz)$$
$$= f(x)\tau(yz) + \sigma(x)d(y)\tau(z) + \sigma(x)\sigma(y)d(z)$$

Bu iki eşitlikten $f(xy)\tau(z) = f(x)\tau(y)\tau(z) + \sigma(x)d(y)\tau(z)$, $\forall x,y,z\in N$ bulunur.

(ii) $\forall x,y,z\in N$ için,

$$f((xy)z) = f(xy)\tau(z) + \sigma(xy)d(z)$$
$$f(x(yz)) = d(x)\tau(yz) + \sigma(x)f(yz)$$

$= d(x)\tau(yz) + \sigma(x) f(y)\tau(z) + \sigma(x)\sigma(y) d(z)$ olur. Dolayısıyla bu iki eşitlikten $f(xy)\tau(z) = d(x)\tau(y)\tau(z) + \sigma(x) f(y)\tau(z)$, $\forall x,y,z\in N$ olarak bulunur.

(iii) $\forall x,y,z\in N$ için,

$$f((xy)z) = d(xy)\tau(z) + \sigma(xy)f(z)$$
$$f(x(yz)) = d(x)\tau(yz) + \sigma(x)f(yz)$$
$$= d(x)\tau(y)\tau(z) + \sigma(x)d(y)\tau(z) + \sigma(x)\sigma(y)f(z) \text{ olur.}$$

Bu iki eşitlikten $(d(x)\tau(y) + \sigma(x)f(y))\tau(z) = d(x)\tau(y)\tau(z) + \sigma(x)d(y)\tau(z)$ elde edilir.

Lemma 4.3.4 : N bir asal yakın halka, f, d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türev ve $a \in N$ olsun. Buna göre,

(i) $af(N) = \{0\}$ ise $a = 0$ dır.

(ii) $f(N)\tau(a) = \{0\}$ ise $a = 0$ dır.

İspat (i) : $\forall x,y\in N$ için $0 = af(xy) = a(f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y))$ dir. $af(N) = \{0\}$ olduğundan $a\sigma(x)d(y) = 0$ bulunur. Yani $aNd(N) = \{0\}$ olur. N asal yakın halka olduğu için $a = 0$ veya $d(N) = \{0\}$ dır. $d\neq 0$ olduğu için $a = 0$ bulunur.

(ii) Benzer yolla hesaplanır.

Teorem 4.3.5 : f, N üzerinde d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türev ve $f\sigma = \sigma f$ olsun. Buna göre N, 2-torsion free ve $f^2 = 0$ ise $f = 0$ dır.

İspat : Keyfi $x,y\in N$ için,

$$0 = f^2(xy) = f(f(xy))$$
$$= f(f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y))$$
$$= f^2(x)\tau^2(y) + \sigma(f(x))d(\tau(y)) + f(\sigma(x))\tau(d(y)) + \sigma^2(x)d^2(y)$$

olur. Hipotez kullanılacak olursa,

$$\sigma(f(x))d(\tau(y)) + f(\sigma(x))\tau(d(y)) + \sigma^2(x)d^2(y) = 0,\ \forall x,y\in N \quad (4.32)$$

bulunur. x yerine $\sigma^{-1}(f(x))$ alınır ve $f\sigma = \sigma f$ olduğu kullanılırsa, $f(\sigma(x))d^2(y) = 0$, $\forall x,y\in N$ bulunur. Lemma 4.3.4 (ii) den $d^2(N) = \{0\}$ olur. Bu ise Lemma 4.1.14 den $d = 0$ demektir. Buna göre $\forall x,y\in N$ için,

$f(xy) = f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y) = f(x)\tau(y)$ ve $f(xy) = d(x)\tau(y) + \sigma(x)f(y) = \sigma(x)f(y)$ olur. Öte yandan, $0 = f^2(xy) = f(f(xy)) = f(\sigma(x)f(y))$

$$= f(\sigma(x))\tau(f(y)) + \sigma^2(x)d(f(y))$$

bulunur. d = 0 olduğu için $\sigma^2(x)d(f(y)) = 0$ olduğundan $f(\sigma(x))\tau(f(y)) = 0$ olur. Lemma 4.3.4 (ii) den de f = 0 bulunur.

Teorem 4.3.6 : N bir asal yakın halka ve $0 \neq f : N \to N$, d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş (σ, τ)-türev olsun. Buna göre,

(i) $f(N) \subset Z$ ise (N,+) abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : $f(a) \neq 0$ olacak biçimde $a \in N$ olsun. $f(N) \subset Z$ olduğundan $f(a) \in Z-\{0\}$ olur. $f(a) + f(a) = f(a + a)$ ve $f(a + a) \in Z - \{0\}$ olduğu için $f(a) + f(a) \in Z - \{0\}$ olur. $\forall x,y \in N$ için, $(x + y)(f(a) + f(a)) = (f(a) + f(a))(x + y)$ olur. Yani, $(x + y)f(a) + (x + y)f(a) = (f(a) + f(a))x + (f(a) + f(a))y$ olur. $f(a) \in Z - \{0\}$ ve $f(a) + f(a) \in Z - \{0\}$ olduğundan $f(a)x + f(a)y + f(a)x + f(a)y = xf(a) + xf(a) + yf(a) + yf(a)$ ifadesi elde edilir. Tekrar $f(a) \in Z$ olduğu kullanılırsa, $f(a)x + f(a)y = f(a)y + f(a)x$ olur. Dolayısıyla $f(a)(x,y) = 0$, $\forall x,y \in N$ dir. Her $n \in N$ için n ile soldan çarpılır, $f(a) \in Z-\{0\}$ ve N asal yakın halka olduğu kullanılırsa $(x,y) = 0$, $\forall x,y \in N$ bulunur. O halde (N,+) abeliandır.

(ii) $f(N) \subseteq Z$ ve N, 2-torsion free olsun. $\forall x,y \in N$ için hipotezden $\tau(z)f(xy) = f(xy)\tau(z)$ yazılır. Lemma 4.3.3 (ii) den,

$\tau(z)d(x)\tau(y) + \tau(z)\sigma(x)f(y) = d(x)\tau(y)\tau(z) + \sigma(x)f(y)\tau(z)$ olur. Öte yandan $f(N) \subseteq Z$ ve (N,+) abelian olduğu kullanılırsa,

$$\tau(z)d(x)\tau(y) - d(x)\tau(y)\tau(z) = [\sigma(x), \tau(z)]f(y), \ \forall x,y,z \in N \qquad (4.33)$$

bulunur. z yerine $\tau^{-1}(f(z))$ alınırsa,

$f(z)d(x)\tau(y) - d(x)\tau(y)f(z) = \sigma(x)f(z)f(y) - f(z)\sigma(x)f(y)$, $\forall x,y,z \in N$ bulunur. $f(N) \subseteq Z$ olduğundan $f(z)[d(x),\tau(y)] = 0$, $\forall x,y,z \in N$ olur. Bu eşitlik soldan N nin keyfi bir elemanı ile çarpılır ve $f(z) \in Z$ olduğu kullanılırsa $f(z)N[d(x),\tau(y)] = 0$ $\forall x,y,z \in N$ elde edilir. Öte yandan N asal yakın halka olduğu için $f(N) = \{0\}$ veya $d(N) \subseteq Z$ olur. f sıfırdan farklı olduğu için de $d(N) \subseteq Z$ bulunur. O halde Teorem 4.1.16 dan N bir komütatif halka olur.

Teorem 4.3.7 : N bir asal yakın halka, f, d türevi ile belirlenen sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş (σ, τ)-türev ve $\tau f = f\tau$, $\sigma f = f\sigma$ olsun. Buna göre,

(i) $[f(N),f(N)] = \{0\}$ ise (N,+) abeliandır.

(ii) Üstelik N, 2-torsion free ise N bir komütatif halkadır.

İspat (i) : Teorem 4.3.6 nın ispatındaki yöntem kullanılarak $z\in N$ için z ve z + z, f(N) nin tüm elemanları ile değişmeli ise

$$zf(x,y) = 0,\ \forall x,y\in N \tag{4.34}$$

olur. (4.34) eşitliğinde z yerine f(t), $t\in N$ alınırsa, f(t)f(x,y) = 0 olur. Lemma 4.2.4 (ii) den f(x,y) = 0, $\forall x,y \in N$ elde edilir.

Keyfi $w \in N$ için x yerine wx ve y yerine wy alınırsa 0 = f(wx,wy) = f(w(x,y)) = $d(w)\tau(x,y) + \sigma(w)f(x,y)$ dir. Yani $d(w)\tau(x,y) = 0$, $\forall x,y \in N$ olur. w yerine wr alınır ve Lemma 4.3.3 (iii) kullanılırsa,

$0 = d(w)\tau(r)\tau(x,y) + \sigma(w)d(r)\tau(x,y)$ olur. $d(w)\tau(x,y) = 0$, $\forall x,y \in N$ olduğundan $d(w)\tau(r)\tau(x,y) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $d(w)N\tau(x,y) = \{0\}$, $\forall x,y,w \in N$ elde edilir. N asal yakın halka olduğundan d(w) = 0, $\forall w\in N$ veya $\tau(x,y) = 0$, $\forall x,y\in N$ olur. $d\neq 0$ olduğundan $\tau(x,y) = 0$, $\forall x,y\in N$ olur. Öte yandan τ bir otomorfizm olduğu için (x,y) = 0, $\forall x,y\in N$ elde edilir. O halde (N,+) abeliandır.

(ii) N, 2-torsion free olsun. [f(N),f(N)] = {0} olduğu için,

$f(\tau(z))f(f(x)y) = f(f(x)y)f(\tau(z))$, $\forall x,y,w \in N$ dir. f genelleştirilmiş bir türev ve Lemma 4.3.3 (ii) den,

$f(\tau(z))((d(f(x)\tau(y) + \sigma(f(x))f(y)) = (d(f(x)\tau(y) + \sigma(f(x))f(y))f(\tau(z)) \Rightarrow$
$f(\tau(z))d(f(x)\tau(y) + f(\tau(z))\sigma(f(x))f(y) = d(f(x)\tau(y)f(\tau(z)) + \sigma(f(x))f(y)f(\tau(z))$
olur. Öte yandan $\tau f = f\tau$, $\sigma f = f\sigma$ ve [f(N),f(N)] = {0} olduğunu kullanarak,
$f(\tau(z))d(f(x))\tau(y) + (f(\sigma(x))f(\tau(z))f(y) = d(f(x))\tau(y)f(\tau(z)) + (f(\sigma(x))f(\tau(z))f(y)$
ifadesini elde ederiz. Dolayısıyla,

$$f(\tau(z))d(f(x))\tau(y) = d(f(x))\tau(y)f(\tau(z)),\ \forall x,y,z\in N \tag{4.35}$$

eşitliği bulunmuş olur. (4.35) eşitliğinde y yerine yw alınırsa,
$f(\tau(z))d(f(x))\tau(y)\tau(w) = d(f(x))\tau(y)\tau(w)f(\tau(z))$, $\forall x,y,z,w\in N$ olur. Dolayısıyla

$d(f(x))\tau(y)f(\tau(z))\tau(w) = d(f(x))\tau(y)\tau(w)f(\tau(z))$, $\forall x,y,z,w\in N$ ifadesi elde edilir. Bundan dolayı,

$d(f(x))N[f(\tau(z)),\tau(w)] = \{0\}$, $\forall x,z,w\in N$ olur. N asal yakın halka olduğundan $d(f(x)) = 0$, $\forall x\in N$ veya $[f(\tau(z)),\tau(w)] = 0$, $\forall z,w\in N$ olur. Yani, $d(f(N) = \{0\}$ veya $f(N) \subset Z$ elde edilmiş olur.

$d(f(N) = \{0\}$ olsun. Buna göre,

$$0 = d(f(xy)) = d(d(x)\tau(y) + \sigma(x)f(y))$$
$$= d^2(x)\tau^2(y) + \sigma(d(x))d(\tau(y)) + d(\sigma(x))\tau(f(y)) + \sigma^2(x)d(f(y))$$

olur. Kabulümüzden dolayı,

$$d^2(x)\tau^2(y) + \sigma(d(x))d(\tau(y)) + d(\sigma(x))\tau(f(y)) = 0,\ \forall x,y\in N \qquad (4.36)$$

olur. (4.36) eşitliğinde y yerine $\tau^{-1}(y)$ alınırsa,

$$d^2(x)\ \tau(y) + \sigma(d(x))d(y) + d(\sigma(x))f(y) = 0,\ \forall x,y\in N \qquad (4.37)$$

bulunur. (4.37) eşitliğinde y yerine yz alınır ve tekrar (4.37) kullanılırsa,

$$0 = d^2(x)\ \tau(yz) + \sigma(d(x))d(yz) + d(\sigma(x))f(yz)$$
$$= d^2(x)\ \tau(yz) + \sigma(d(x))d(y)\tau(z) + \sigma(d(x))\sigma(y)d(z) + d(\sigma(x))f(y)\tau(z)$$
$$+ d(\sigma(x))\sigma(y)d(z)$$
$$= \left\{d^2(x)\tau(y) + \sigma(d(x))d(y) + d(\sigma(x))f(y)\right\}\tau(z) + \sigma(d(x))\sigma(y)d(z)$$
$$+ d(\sigma(x))\sigma(y)d(z) \text{ bulunur.}$$

Köşeli parantezin içi (4.38) eşitliğinden 0 olur. Dolayısıyla,

$2\sigma(d(x))\sigma(y)d(z) = 0$, $\forall x,y,z\in N$ elde edilir. N, 2-torsion free yakın halka olduğundan $\sigma(d(x))\sigma(y)d(z) = 0$, $\forall x,y,z\in N$ olur. Öte yandan σ bir otomorfizm olduğundan $\sigma(d(x)y)d(z) = 0$, $\forall x,y,z\in N$ bulunur. Dolayısıyla $d(N)Nd(N) = \{0\} \Rightarrow d(N) = \{0\}$ elde edilir. Bu ise d nin sıfırdan farklı olması ile çelişir. O halde $f(N)\subset Z$ bulunur. Sonuç olarak N bir komütatif halka olur.

KAYNAKLAR

Beidar K. I., Fong Y. ve Wang X. K., 1996. Posner and Herstein Theorems for Derivations of 3-Prime Near Rings. *Communications in Algebra*, 24 (5): 1581-1589.

Beidar K. I., Fong Y., Ke W. F. ve Liang S. Y., 1995. Near Ring Multiplications on Groups. *Comm. Algebra*., (23): 999-1015.

Bell H. E. ve Argaç. N., 2001. Derivations, Products of Derivations and Commutativity in Near- Rings. *Algebra Colloquium*, (8): 399-407.

Bell H. E. ve Daif M. N., 1992. Remarks On Derivations On Semiprime Rings. *Internat J. Math. Math. Sci*, 15 (1): 205-206.

Bell H. E. ve Daif M. N., 1995. On Derivations and Commutativity In Prime Rings. *Acta Math. Hungar*., (66): 337-343.

Bell H. E. ve Kappe L. C., 1989. Ring With Derivations Satisfy Certain Algebraic Conditions. *Acta Math. Hungar*., 3 (53): 339-346.

Bell H. E. ve Martindale W. S., 1987. Centralizing Mapping of Semiprime Rings *Canad. Math. Bull*., (30): 92-101.

Bell H. E. ve Mason G., 1987. On Derivations In Near Rings, Near Rings and Near Fields. *North Holland Math. Studies*, 137: 31-35.

Bell H. E. ve Mason G., 1992. On Derivations in Near Rings and Rings. *Math. J. Okayama Univ*. (34): 135-144.

Bell H. E. ve Rehman N. U., 2007. Genaralized Derivations with Commutativity and Anti-Commutativity Conditions. *Math. J. of Okayama Uni*., 49 (1): 139-147.

Bell H. E., 1971. Certain Near Rings are Rings. *J. London Math. Soc*., 4 (2): 264-270.

Bell H. E., 1997. On Derivations in Near-Rings, II. *Kluwer Academic Publishers Dordrecht*, (426): 191-197.

Bresar M., 1991. On The Distance of Composition of Two Derivations to The Generalized Derivations. *Glasgow Math. J.*, (33) : 89-93.

Bresar M., 1993. Commuting Traces of Biadditive Mappings, Commutativity Preserving Mappings and Lie Mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (335): 525-546.

Gölbaşı Ö. ve Aydın N., 2004. Results on Prime Near-Rings with (σ,τ)-Derivation. *Mathematical Journal of Okayama University*, (46): 1-7.

Gölbaşı Ö., 2005. On Prime Near Rings with Genaralized (σ,τ)-Derivation. *Kyugnpook Math. J.*, 45: 249-254

Gölbaşı Ö., 2006. Notes on Prime Near Rings with Genaralized Derivation. *Southeast Asian Bulletin of Math.*, 30 (1): 49-54.

Gölbaşı Ö., 2007. On a Theorem of Posner for 3-Prime Near Rings with (σ,τ)-Derivation. *Hacettepe Journal of Math. Statistics*, 30 (1): 43-47

Graves J. ve Malone J. J., 1973. Embedding Near Domains. *Bull. Austral. Math. Soc.*, (9): 33-42.

Groenewald N. J., 1991. Different Prime Ideals in Near Rings. *Comm. Algebra*, (19): 2667-2675.

Herstein I. N., 1978. A note on derivations. *Canad. Math. Bull.*, (21): 369-370.

Herstein I. N., 1979. A note on derivations II. *Canad. Math. Bull.*, (22): 509-511.

Hirano Y., Kaya A. ve Tominaga H., 1983. On a Theorem of Mayne. *Math. J. Okayama Univ.*, (25): 125-132.

Hongan M., 1990. On Near Rings With Derivation. *Math. J. Okayama Univ*, (32): 89-92

Hvala B., 1998. Generalized Derivations In Rings. *Comm. Algebra*, (26) : 1147-1166.

Kamal A. A. M., 2001. σ- derivations on Prime Near-Rings. *Tamkang J. Math.*, 32 (2): 89-93.

Kharchenko V. K., 1991. *Automorphisims and Derivations of Associative Rings*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Bostın-London. 404 p.

Ligh S., 1969. On Division Near Rings. *Canad. J. Math*., (21): 1366-1371.

Meldrum J. D. P., 1985. *Near-rings and Their Link with Groups,* (1st ed.). Pitman Advanced Pub. Program. 216 p.

Pilz G., 1983. *Near rings*, (2nd ed.). North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford. 470 p.

Posner, E. C., 1957. Derivations in Prime Rings. *Proc. Amer. Math. Soc*., (8): 1093-1100.

Wang X. K., 1994. Derivations in Prime Near Rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 121 (2): 361-366.

Wang, X. K., 1994. Derivations in Prime Near-Rings. *Proc. Amer. Math. Soc*, 121: 361-366.

Yaşam Öyküsü

5 Eylül 1983 tarihinde İzmir-Menemende doğmuştur. İlkokul eğitimini 1989-1994 yılları arasında İzmir'de Maltepe Köyü İlk Öğretim Okulunda, Ortaokul eğitimini 1994-1997 yılları arasında Menemen 9 Eylül Ortaokulunda, lise eğitimini 1997-2001 yılları arasında Menemen Süper Lisesinde hazırlık eğitimi ile birlikte tamamlamıştır. 2002 yılında kayıt yaptırdığı Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesinden 2006 yılında mezun olmuştur. 29 Aralık 2006 tarihinden buyana Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Çalışma alanları Cebir ve Sayılar Teorisi, Halkalar, Yakın Halkalar olarak sıralanır.