T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALEXANDROFF UZAYLAR ÜZERİNE

Cahide İrem ÖĞÜŞ

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **08.02.2010**

Tez Danışmanı:

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Cahide İrem ÖĞÜŞ tarafından **Doç. Dr. Erdal EKİCİ** yönetiminde hazırlanan **"ALEXANDROFF UZAYLAR ÜZERİNE "** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

Yönetici

Doç. Dr. Esin SOYDUGAN	Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi: 08.02.2010

Prof. Dr. Ahmet ERDEM

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2009/108 no'lu projeden desteklenmiştir.

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Cahide İrem Öğüş

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamda engin bilgileriyle bizi büyük bir özenle yetiştiren tez danışmanım Sn. Doç. Dr. Erdal EKİCİ' ye, bizlere matematiğin yanında hayatta yürüyeceğimiz doğru yolları da gösteren Sn. Prof. Dr. Kazım KAYA' ya , bizleri bugünlere getiren Sn. Prof. Dr. Neşet AYDIN'a, Sn. Doç. Dr. Yakup HACI'ya, Sn. Prof. Dr. Kazım GÜNER'e ve tüm bölüm hocalarıma çok teşekkür ederim.

Cahide İrem ÖĞÜŞ

ÖZET

ALEXANDROFF UZAYLAR ÜZERİNE

Cahide İrem ÖĞÜŞ
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Erdal EKİCİ
08.02.2010, 49

Bu tezin ana amacı genelleştirilmiş δ-Alexandroff topolojik uzayları ve karakterizasyonlarını sunmaktır. Bu bağlamda bir (X, τ) topolojik uzayında δ-açık kümelerin herhangi arakesiti g-açık ise (X, τ) topolojik uzayına genelleştirilmiş δ-Alexandroff uzay denir. Aynı zamanda genelleştirilmiş δ-Alexandroff uzayların çeşitli özellikleri, koruma teoremleri ve ilişkileri de araştırılmıştır.

Anahtar sözcükler : δ-g-açık küme, δ-g-kapalı küme, $T_{1/2}$-uzay, genelleştirilmiş kapalı küme, Alexandroff uzay.

ABSTRACT

ON ALEXANDROFF SPACES

Cahide İrem ÖĞÜŞ
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Science and Engineering
Chair for Mathematics Thesis of Master of Science
Advisor: Doç. Dr. Erdal EKİCİ
08.02.2010, 49

The main purpose of this thesis is to introduce generalized δ-Alexandroff topological spaces and characterizations of them. A topological space (X, τ) is called generalized δ-Alexandroff if any intersections of δ-open sets in the topological space is g-open in (X, τ). Also, several properties of generalized δ-Alexandroff topological spaces and preservation theorems and the relationships of generalized δ-Alexandroff topological spaces are investigated.

Keywords : δ-g-open set, δ-g-closed set, $T_{1/2}$-space, generalized closed set, Alexandroff space.

İÇERİK

BÖLÜM 1

GİRİŞ VE ÖNBİLGİLER

Alexandroff uzaylar çalışması topolojik uzaylarda özel bir öneme sahiptir. Bilindiği üzere açık kümelerin keyfi arakesitlerinin açık olduğu topolojik uzaylara Alexandroff uzaylar denilmektedir. (Alexandroff, 1937).

Alexandroff uzaylar dijital topoloji başta olmak üzere dijital line, Khalimsky line (Khalimsky, 1970; Khalimsky ve ark., 1990; Kovalevsky ve Kopperman , 1994), cebirsel topoloji dahil olmak üzere bir çok alanda çeşitli uygulama alanları bulmuştur.

Genelleştirilmiş kapalı küme kavramı Levine (1970)'e dayanmaktadır. Bilindiği üzere (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere O açık küme ve $A \subseteq O$ iken $cl(A) \subseteq O$ sağlanıyorsa A kümesine genelleştirilmiş kapalı küme ve tümleyeni genelleştirilmiş kapalı küme olan kümelere de genelleştirilmiş açık küme denir. (Levine, 1970).

1998'de Arenas ve ark. (1998) tarafından genelleştirilmiş Alexandroff uzaylar konusu çalışılmıştır. Bu makalede genelleştirilmiş Alexandroff uzaylar açık kümelerin keyfi arakesitlerinin genelleştirilmiş açık küme olduğu topolojik uzaylar olarak tanımlanmıştır.

1998'de Arenas ve ark. (1998)'ı genelleştirilmiş Alexandroff uzayların karakterizasyonlarını elde etmiş, genelleştirilmiş Alexandroff uzay olmanın bir topolojik özellik olduğunu ortaya koymuşlardır.

Öte yandan, Arenas ve ark. (1998)'ı genelleştirilmiş Alexandroff uzaylarda her noktanın minimal g-komşuluğuna sahip olduğunu ve bir topolojik uzayın T_1 ve Alexandroff olması için gerek ve yeter koşulun ayrık uzay olması gerektiğini göstermişlerdir.

Ayrıca, Arenas ve ark. (1998)'ı bir $T_{1/2}$-uzayda g-Alexandroff olma ile Alexandroff uzay olmanın denk olduğunu ispatlamışlardır. Üstelik g-Alexandroff uzayların kapalı alt uzaylarının da g-Alexandroff olduğunu göstermişlerdir. Üstelik bir çok ilişkilerde araştırılmıştır.

Bütün bunların yanında 1998 de Arenas ve ark. (1998) tarafından genelleştirilmiş Alexandroff uzayların yanında yarı-Alexandroff uzaylarda çalışılmıştır. Öyleki yarı-Alexandroff uzaylar açık kümelerin keyfi arakesitlerinin yarı-açık küme olduğu topolojik uzaylar olarak tanımlanmıştır. Bir çok özellikleride araştırılmıştır.

Bu tezdeki amacımız Alexandroff uzaylar üzerine bir çalışma yapmak olmuştur.

Bu bağlamda, tezin birinci bölümünde tez boyunca ihtiyaç duyacağımız ve kullanacağımız temel bilgi ve teoremleri sunduk.

Tezin ikinci bölümünde genelleştirilmiş Alexandroff uzayların özelliklerini ve ilişkilerini araştırdık.

Tezin üçüncü bölümünde yarı-Alexandroff uzayların özelliklerini ve ilişkilerini araştırdık.

Tezin dördüncü bölümünde, genelleştirilmiş δ-Alexandroff uzayları sunup karakterizasyonları üzerinde duruldu.

Bu bölümde bir (X, τ) topolojik uzayında δ-açık kümelerin herhangi arakesiti g-açık ise (X, τ) topolojik uzayına genelleştirilmiş δ-Alexandroff uzay olarak adlandırıldı.

Tezin beşinci bölümünde genelleştirilmiş δ-Alexandroff uzaylar ve fonksiyon ilişkileri araştırılmıştır. Koruma teoremleri genelleştirilmiş δ-Alexandroff uzaylar ve genelleştirilmiş Alexandroff uzaylar için araştırılmıştır.

Tezin son bölümünde, genelleştirilmiş δ-Alexandroff uzayların bir çok özellikleri ve ilişkileri üzerine araştırmalar yer almaktadır.

Bu tezde topolojik uzayları (X, τ) ve (Y, υ) ya da kısaca X ve Y ile göstereceğiz.

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin kapanışını cl(A) ve içini int(A) ile göstereceğiz.

Tanım 1.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. V açık küme olmak üzere $A \subseteq V$ iken $cl(A) \subseteq V$ sağlanıyorsa A kümesine genelleştirilmiş kapalı (g-kapalı) küme denir. (Levine, 1970)

Tanım 1.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer X\A g-kapalı ise A kümesine genelleştirilmiş açık (g-açık) küme denir. (Levine, 1970)

Teorem 1.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) A kümesi g-açıktır,

(2) F kümesi kapalı olmak üzere $F \subseteq A$ iken $F \subseteq int(A)$ olur.

(Levine, 1970)

Tanım 1.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ) topolojik uzayında açık kümelerin keyfi arakesitleri açık ise (X, τ) topolojik uzayına Alexandroff uzay denir. **(**Alexandroff, 1937)

Tanım 1.5. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere bir A alt kümesinin çekirdeğini $A^{\wedge}$ ile göstereceğiz ve A yı kapsayan tüm açık kümelerin arakesiti olarak tanımlanır (Maki,1986).

Tanım 1.6. Bir (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere (X, τ) uzayının bir A altkümesini alalım. Eğer

$A= A^{\wedge}$ ise A kümesine Λ-küme (Maki,1986) ve

$A=L\cap F$ olmak üzere burada L, Λ-küme ve F, kapalı ise A kümesi λ-küme (Arenas ve ark.,1997). olarak adlandırılır.

Tanım 1.7. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere (X, τ) topolojik uzayında her g-kapalı küme kapalı bir küme oluyor ise (X, τ) topolojik uzayına $T_{1/2}$-uzay denir. (Levine, 1970)

Tanım 1.8. Bir (X, τ) topolojik uzayında açık kümelerin herhangi arakesiti g-açık ise (X, τ) topolojik uzayına genelleştirilmiş Alexandroff (=g-Alexandroff) uzay denir. **(**Arenas ve ark.,1998)

Teorem 1.9. Bir (X, τ) $T_{1/2}$ topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) topolojik uzayı g-Alexandroff uzaydır,

(2) (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff uzaydır.

(Arenas ve ark.,1998)

Tanım 1.10. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere (X, τ) topolojik uzayında bir $x \in X$ noktası minimal açık komşuluğa sahipse bu x noktasına, A-noktası (Alexandroff noktası) denir. **(**Arenas ve ark.,1998)

Tanım 1.11. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. (X, τ) topolojik uzayında her x,y $\in$ X için $x\in cl(\{y\})$ iken $y\in cl(\{x\})$ ise bu uzaya simetrik topolojik uzay denir. (Levine, 1970)

Teorem 1.12. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. (X, τ) topolojik uzayı T_1-uzay ise (X, τ) topolojik uzayı simetriktir. (Levine, 1970)

Teorem 1.13. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. (X, τ) topolojik uzayı $T_{1/2}$-uzay ise (X, τ) topolojik uzayı T_0-uzaydır (Levine, 1970)

Tanım 1.14. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. (X, τ) topolojik uzayında her açık alt küme kapalı olduğunda (X, τ) uzayına bir ayrışım uzayı denir. (Nieminen,1977).

Tanım 1.15. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bir (X,τ) topolojik uzayında her x noktası ve x'in her açık komşuluğu U için cl($\{x\}$)$\subseteq$U ise (X, τ) topolojik uzayına bir R_0-uzay denir **(**Arenas ve ark.,1998).

Tanım 1.16. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. (X, τ) topolojik uzayında açık kümelerin kapanışları açık küme ise bu (X, τ) topolojik uzayına aşırı bağlantısız uzaydır denir. (Bourbaki, 1996).

Tanım 1.17. Bir (X, τ) topolojik uzayında hiçbir yerde yoğun olmayan kümeler kapalı ise (X, τ) topolojik uzayına nodec uzay olarak adlandırılır. **(**van Mill ve Mills,1980).

Tanım 1.18. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. (X,τ) topolojik uzayında $O \subset A \subset \mathrm{cl}O$ olacak şekilde bir O açık kümesi varsa A kümesine yarı-açık bir küme denir. (Levine, 1963).

Tanım 1.19. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $X \setminus A$ yarı-açık ise A kümesi yarı-kapalıdır denir. (Levine, 1963).

Teorem 1.20. (X, τ) bir topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) A yarı-açıktır,

(2) A$\subset$cl(int(A)) olur.

(Levine, 1963)

Tanım 1.21. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. (X, τ) topolojik uzayının A alt kümesi için int(A) kümesi A kümesinde kapalı ise A'ya ic-küme denir. (Ganster ve Reilly,1993).

Tanım 1.22. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere *f*:(X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. (X, τ) topolojik uzayının her kapalı alt kümesinin görüntüsü (Y, υ) topolojik uzayında g-kapalı ise *f*:(X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu g-kapalı olarak adlandırılır. **(**Malghan,1982).

Tanım 1.23. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere *f*:(X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. (X, τ) topolojik uzayının her açık alt kümesinin görüntüsü (Y, υ) topolojik uzayında g-açık ise *f*:(X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu g-açık olarak adlandırılır. **(**Malghan,1982).

Tanım 1.24. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere *f*:(X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. *f* : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu; eğer (Y, υ) topolojik uzayının her kapalı V kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesi (X, τ) topolojik uzayınıda g-kapalı ise g-süreklidir denir. (Balachandran ve ark.,1991).

Tanım 1.25. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere *f*:(X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. *f* : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu; eğer (Y, υ) topolojik uzayında her kapalı V kümesi için $f^{-1}(V)$ (X, τ) topolojik uzayında λ-kapalı ise λ-süreklidir denir. (Arenas ve ark.,1997).

Tanım 1.26. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere *f* : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bire-bir ve örten fonksiyonunu alalım. *f* : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu hem g-sürekli hem de g-açık ise *f* : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bire-bir ve örten fonksiyonuna bir g-homeomorfizma (genelleştirilmiş homeomorfizma) olarak adlandırılır. (Maki ve ark.,1991).

Teorem 1.27. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere *f* : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. Aşağıdakiler denktir:

(1) *f* : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) süreklidir,

(2) *f* : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) g-sürekli ve λ-süreklidir.

(Arenas ve ark.,1997).

Teorem 1.28. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu örten, sürekli, g-kapalı bir fonksiyon olsun. (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ise (Y, υ) topolojik uzayı g-Alexandroff'tur. **(**Arenas ve ark.,1998).

Tanım 1.29. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu için (Y, υ) topolojik uzayının her g-kapalı V kümesi için (X, τ) topolojik uzayında ki ters görüntüsü $f^{-1}(V)$ g-kapalı ise f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu gc-kararsız olarak adlandırılır. (Balachandran ve ark.,1991).

Tanım 1.30. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. Bire-bir ve örten f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu için f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu gc-kararsız ve tersi f^{-1} :(Y, υ) $\rightarrow$ (X, τ) gc-kararsız ise f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu gc-homeomorfizma olarak adlandırılır. (Maki ve ark.,1991).

Tanım 1.31. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu için (Y, υ) topolojik uzayının her açık kümesinin f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) altındaki ters görüntüsü (X, τ) topolojik uzayında ic-küme ise f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonuna ic-sürekli denir. (Ganster ve Reilly,1993).

Tanım 1.32. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bire-bir, örten fonksiyonunu alalım. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) ve f^{-1} :(Y, υ) $\rightarrow$ (X, τ) yarı-açık kümeleri korur ise f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonuna yarı-homeomorfizma denir. (Crossley ve Hildebrand,1972).

Tanım 1.33. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. f:(X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu için X topolojik uzayının her kapalı alt kümesinin görüntüsü Y'de yarı-kapalı ise f:(X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonuna yarı-kapalı denir. **(**Noiri,1973).

Teorem 1.34. (X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. A ,X'te g-kapalı ve f : X $\rightarrow$ Y sürekli ve kapalı bir dönüşüm ise f(A), Y'de g-kapalıdır. (Levine, 1970).

Teorem 1.35. (Arenas ve ark.,1998) Bir (X, τ) aşırı bağlantısız nodec uzay için aşağıdaki koşullar denktir:

(1) X, yarı-Alexandroff'tur.

(2) X, Alexandroff'tur.

Tanım 1.36. (X, τ) bir topolojik uzay ve A $\subset$ X olsun. A=int(cl(A)) ise A kümesine düzenli açık denir. (Stone, 1937).

Tanım 1.37. (X, τ) bir topolojik uzay ve A $\subset$ X olsun. A=cl(int(A)) ise A kümesine düzenli kapalı denir. (Stone, 1937).

Tanım 1.38. (X, τ) bir topolojik uzay ve A$\subseteq$X olsun. A'da bulunan tüm düzenli açık kümelerin birleşimine A'nın δ-iç'i denir ve δ-int(A) şeklinde gösterilir. (Velicko, 1968).

Tanım 1.39. (X, τ) bir topolojik uzay ve A $\subset$ X olsun. $\forall$ (x$\in$)G$\in \tau$ için int(cl(G)) $\cap$ A $\neq$ $\emptyset$ ise x noktasına A kümesinin bir δ-kapanış noktası denir. (Velicko, 1968).

Tanım 1.40. (X, τ) bir topolojik uzay ve A $\subset$ X olsun. A kümesinin tüm δ-kapanış noktalarının kümesine A'nın δ-kapanışı denir ve δ-cl(A) ile gösterilir. (Velicko, 1968).

Tanım 1.41. (X, τ) bir topolojik uzay ve A$\subseteq$X olsun. A= δ-int(A) ise A'ya δ-açık küme denir. (Velicko, 1968).

Tanım 1.42. (X, τ) bir topolojik uzay ve A$\subseteq$X olsun. A bir δ-açık küme ise X\A'ya δ-kapalı küme denir. (Velicko, 1968).

Tanım 1.43. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere (X, τ) topolojik uzayındaki tüm düzenli açık kümelerin ailesi τ topolojisinden daha kaba olan τ_s topolojisini üretir. $\tau= \tau_s$ ise (X, τ) topolojik uzayına uzayına yarı-düzenli topolojik uzay denir. (Stone, 1937.).

Tanım 1.44. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X'te aldığımız kapanışlar birbirinden farklı olan her farklı iki nokta ayrık komşuluklara sahipse (X, τ) topolojik uzayına R_1-uzay denir. (Davis,1961).

Tanım 1.45. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. U, X'te açık küme olmak üzere $A\subseteq U$ iken δ-cl(A) $\subseteq U$ ise A'ya δ-g-kapalı küme denir. (Dontchev ve Ganster,1996).

Tanım 1.46. *X* bir topolojik uzay olmak üzere *A* alt kümesini alalım. $X \setminus A$ kümesi δ-g-kapalı ise *A* kümesine δ-g-açık denir (Dontchev ve Ganster,1996).

Tanım 1.47. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X'in her δ-g-kapalı alt kümesi δ-kapalı ise uzaya $T_{3/4}$-uzay denir. (Dontchev ve Ganster,1996).

Teorem 1.48. (Dontchev ve Ganster,1996).

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere

(i) Her δ-kapalı küme δ-g-kapalıdır.

(ii) Her δ-g-kapalı küme g-kapalıdır.

Teorem 1.49. (X, τ) bir topolojik uzayı ve μ kapalı kümeler ailesi olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(1) $\tau=\mu$,

(2) X'in her alt kümesinin g-kapalı küme olmasıdır.

(Levine, 1970).

Teorem 1.50. (Arenas ve ark.,1998) “Yarı-Alexandroff uzay” olma özelliği bir topolojik özelliktir.

Teorem 1.51. (Arenas ve ark.,1998) Her Alexandroff uzay yarı-Alexandroff’tur.

Teorem 1.52. (Arenas ve ark.,1998)

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) topolojik uzayı yarı-Alexandroff uzaydır,

(2) Her Λ-kümesi yarı-açık kümedir

Teorem 1.53. (X, τ), (Y, υ) yarı-Alexandroff uzay ise $X\times Y$ de yarı-Alexandroff olur. **(**Arenas ve ark.,1998).

BÖLÜM 2

GENELLEŞTİRİLMİŞ ALEXANDROFF UZAYLAR

Tanım 2.1. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere açık kümelerin herhangi arakesiti g-açık ise (X, τ) topolojik uzayına genelleştirilmiş Alexandroff (g-Alexandroff) uzay denir. **(**Arenas ve ark.,1998).

Teorem 2.2. Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki koşullar denktir: **(**Arenas ve ark.,1998).

(1) X, g-Alexandroff'tur.

(2) g-açık kümelerin arakesitleri g-açıktır.

(3) Kapalı kümelerin birleşimleri g-kapalıdır.

(4) g-kapalı kümelerin birleşimleri g-kapalıdır.

Teorem 2.3. (Arenas ve ark.,1998)

g-Alexandroff uzay olma özelliği topolojik bir özelliktir.

Teorem 2.4. (Arenas ve ark.,1998)

Her Alexandroff uzay g-Alexandroff'tur.

Teorem 2.5. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) X uzayı g-Alexandroff uzaydır,

(2) X uzayı ayrık uzaydır.

İspat:

($\Rightarrow$):(X, d) uzayı g-Alexandroff uzay olsun. x$\in$ X alalım.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_d\left(x,\frac{1}{n}\right)=\{x\}$$

olduğunu biliyoruz.

X uzayı g-Alexandroff uzay olduğundan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_d\left(x,\frac{1}{n}\right)=\{x\}$$

g-açıktır. Dolayısıyla (X, d) ayrıktır.

($\Leftarrow$):(X, d) uzayı ayrık bir metrik uzay olsun. Ayrık uzayda açık kümelerin herhangi arakesiti açık ve böylece g-açık olduğundan X uzayı g-Alexandroff uzay olacaktır.

Teorem 2.6. (Arenas ve ark.,1998)

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) (X, τ) uzayı T_1 ve g-Alexandrofftur,

(2) (X, τ) uzayı ayrıktır.

Uyarı 2.7. Bir önceki teorem yukarıdaki sonuç kullanılarak da elde edilir.

Teorem 2.8. Bir (X, τ) topolojik uzayı tek komşuluğu X olan bir p noktasına sahipse bu uzay g-Alexandroff ’tur. **(**Arenas ve ark.,1998).

Teorem 2.9. (X, τ) ayrık olmayan topolojik uzay olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı g-Alexandroff uzaydır.

İspat:

(X, τ) ayrık olmayan topolojik uzay olsun. O halde $\tau=\{\emptyset,X\}$ olur. Yukarıdaki teoremi göz önünde bulundurarak X'te aldığımız bir p noktası için tek komşuluğun X olduğunu elde ederiz.

Dolayısıyla (X, τ) g-Alexandroff uzay olur.

Teorem 2.10. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $N\subset P(X)$ alalım. N ailesi $\forall\ x \in X$ için x'in minimal g-açık komşuluğunu da içerecek şekilde g-açık kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda N bir topoloji üretir.

İspat

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $N\subset P(X)$ alalım.N ailesi $\forall\ x \in X$ için x'in minimal g-açık komşuluğunu da içerecek şekilde g-açık kümelerin bir ailesi olsun.

(1) $X=\bigcup_{M\in N} M$ olduğu açıktır.

(2) $A_1,A_2\in N$ ve $x\in A_1\cap A_2$ olsun.

Bu durumda $x \in A_1$ ve $x \in A_2$ olacaktır. N ailesi $\forall\ x \in X$ için x'in minimal g-açık komşuluğunu da içerecek şekilde g-açık kümelerin bir ailesi olduğundan dolayı $M_x\subset A_1$ ve $M_x\subset A_2$ olacak biçimde M_x x'in minimal g-açık komşuluğu vardır.

Bu durumda $M_x\subset A_1\cap A_2$ olacaktır.

Böylece N ailesi bir topoloji üretir.

Teorem 2.11. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ bir fonksiyon olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu örten, sürekli ve g-kapalı bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ise (Y, υ) topolojik uzayı g-Alexandroff'tur. **(**Arenas ve ark.,1998).

Teorem 2.12. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu örten, sürekli ve kapalı bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ise (Y, υ) topolojik uzayı g-Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere her kapalı fonksiyon bir g-kapalı fonksiyon olduğundan yukarıdaki teoremden elde edilir.

Teorem 2.13. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu 1-1 ve örten, sürekli ve açık bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ise (Y, υ) topolojik uzayı g-Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ), (Y, υ) iki topolojik uzay ve f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) 1-1 ve örten bir fonksiyon olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu açık ise kapalı bir dönüşümdür. Dolayısıyla yukarıdaki teoremden elde edilir.

Teorem 2.14. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonunu alalım. (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ve f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu hem λ-sürekli hem de g-homeomorfizma ise (Y, υ) topolojik uzayı g-Alexandroff'tur. **(**Arenas ve ark.,1998).

Teorem 2.15. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonunu alalım. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu λ-sürekli ve bir homeomorfizma olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ise (Y, υ) topolojik uzayı g-Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere (X, τ) Alexandroff topolojik uzayı için f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu λ-sürekli ve homeomorfizma olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) homeomorfizma olduğundan tanım gereği bire-bir, örten, sürekli ve kapalıdır.

Her homeomorfizma aynı zamanda g-homeomorfizma olduğundan (Y, υ) topolojik uzayı g-Alexandroff'tur.

Teorem 2.16. (Arenas ve ark.,1998) (X, τ) g-Alexandroff uzayı için aşağıdaki koşullar sağlanır:

(1) $\forall x \in X$ noktası bir minimal g-komşuluğa sahiptir.

(2) Her kapalı tek nokta bir A-noktasıdır.

Teorem 2.17. (X, τ) topolojik uzayı $T_{1/2}$ ve g-Alexandroff uzay olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ noktası bir minimal açık komşuluğa sahiptir.

İspat

(X, τ) topolojik uzayı $T_{1/2}$ ve g-Alexandroff uzay olsun. Yukarıdaki teoremden $\forall\ x \in X$ için x minimal g-komşuluğa sahiptir. (X, τ) topolojik uzayı $T_{1/2}$-uzay olduğundan bu minimal g-komşuluk minimal açık komşuluk olmak zorundadır.

Teorem 2.18. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere (X, τ) T_1-uzay ise (X, τ) $T_{1/2}$ –uzaydır. (Levine, 1970).

Teorem 2.19. (X, τ), T_1-uzay olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) g-Alexandroff uzaydır.

(2) (X, τ) Alexandroff uzaydır.

İspat

(X, τ) topolojik uzayı T_1-uzay ise yukarıdaki teoremden aynı zamanda $T_{1/2}$ uzaydır. Dolayısıyla (X, τ) $T_{1/2}$ ve g-Alexandroff uzay olduğundan aynı zamanda Alexandroff uzay olur.

Tersine her Alexandroff uzay g-Alexandroff olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.20. Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) simetrik ve T_0-uzaydır,

(2) (X, τ) uzayı T_1-uzaydır.

(Levine, 1970)

Teorem 2.21. (X, τ) simetrik ve T_0-uzay olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) g-Alexandroff uzaydır.

(2) (X, τ) Alexandroff uzaydır.

İspat:

(X, τ) topolojik uzayı simetrik ve T_0-uzay olsun. Yukarıdaki teoremden (X, τ) topolojik uzayı T_1-uzay olur. Bu durumda ispat tamamlanır.

Teorem 2.22. (X, τ) simetrik topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler ifadeler denktir:

(1) (X, τ) T_1 ve g-Alexandroff uzaydır.

(2) (X, τ) T_0 ve Alexandroff uzaydır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ **(2)** (X, τ) topolojik uzayı simetrik, T_1 ve g-Alexandroff uzay olsun. Yukarıdaki teoremden (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff uzay olarak elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ **(1)** Her Alexandroff uzay g-Alexandroff'tur. (X, τ) simetrik uzay olduğundan her T_0-uzay T_1-uzaydır. Dolayısıyla (X, τ) topolojik uzayı T_1 uzaydır.

Teorem 2.23. (Arenas ve ark.,1998) Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler ifadeler denktir:

(1) (X, τ) R_0 ve g-Alexandroff uzaydır.

(2) (X, τ) ayrışım uzayıdır.

Teorem 2.24. (X, τ) bir T_1-topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler ifadeler denktir:

(1) (X, τ) R_0 ve Alexandroff uzaydır.

(2) (X, τ) ayrışım uzayıdır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ **(2)** (X, τ) topolojik uzayı T_1, R_0 ve Alexandroff uzay olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı T_1, R_0 ve g-Alexandroff uzay olacaktır.

(2) $\Rightarrow$ **(1)** Yukarıdaki teoremden istenen elde edilir.

Teorem 2.25. Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) uzayı T_1 ve g-Alexandroff uzaydır,

(2) (X, τ) uzayı ayrık uzaydır

(Arenas ve ark.,1998)

Teorem 2.26. (X, τ) topolojik uzayı T_1-uzay olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1) X, g-Alexandroff'tur.

(2) X, Alexandroff'tur.

(3) X, ayrık uzaydır.

İspat

(1) $\Rightarrow$ **(2)** (X, τ) T_1 ve g-Alexandroff uzay olsun. Bu durumda uzay T_1 uzay olduğundan (X, τ) Alexandroff olur.

(2) $\Rightarrow$ **(3)** (X, τ) T_1 ve Alexandroff olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı g-Alexandroff olur. Yukarıdaki teoremden (X, τ) topolojik uzayı ayrık bir topolojik uzay olur.

(3) $\Rightarrow$ **(1)** (X, τ) topolojik uzayı T_1 ve ayrık uzay olsun. Yukarıdaki teoremden (X, τ) topolojik uzayı g-Alexandroff olur.

Teorem 2.27. **(**X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) örten fonksiyonunu alalım. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu g-sürekli , λ-sürekli ve g-kapalı olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ise (Y, υ) topolojik uzayı g-Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonunu alalım. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu g-sürekli , λ-sürekli ve g-kapalı olsun.

f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu g-sürekli ve λ-sürekli olduğundan süreklidir. Bu durumda f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu sürekli ve g-kapalı olduğundan (Y, υ) topolojik uzayı g-Alexandroff olur.

Teorem 2.28. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ örten fonksiyonunu alalım. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu sürekli, g-kapalı bir fonksiyon ve (Y, υ) topolojik uzayı T_1-uzay olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ise (Y, υ) Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonunu alalım. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu sürekli, g-kapalı bir fonksiyon ve (Y, υ) topolojik uzayı T_1-uzay olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff olduğundan (Y, υ) g-Alexandroff ve böylece Alexandroff olur.

Teorem 2.29. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ örten fonksiyonunu alalım. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu sürekli, kapalı bir fonksiyon ve (Y, υ) simetrik T_0-uzay olsun. (X, τ) Alexandroff ise (Y, υ) Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonunu alalım. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu sürekli, kapalı bir fonksiyon ve (Y, υ) simetrik T_0-uzay olsun.

Simetrik T_0-uzaylar T_1-uzay olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 2.30. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu bir gc-homeomorfizma olmak üzere (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzayları T_1-uzay olsun. Bu durumda (X, τ) Alexandroff ise (Y, υ) Alexandroff'tur.

İspat:

$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonu bir gc-homeomorfizma olmak üzere (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzayları T_1-uzay olsun.

g-Alexandroff T_1-uzaylar Alexandroff olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 2.31. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer açık kümelerin ailesi ile kapalı kümelerin ailesi aynı ise (X, τ) g-Alexandroff'tur.

İspat:

Açık kümelerin ailesi ile kapalı kümelerin ailesi aynı olsun. Bu durumda X topolojik uzayının her alt kümesi g-kapalı küme olacaktır. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı g-Alexandroff olacaktır.

BÖLÜM 3

YARI-ALEXANDROFF UZAYLAR

Tanım 3.1. Bir (X, τ) topolojik uzayında açık kümelerin herhangi arakesiti yarı-açık ise (X, τ) topolojik uzayına yarı-Alexandroff uzay denir.

(Arenas ve ark.,1998)

Teorem 3.2. (X,d) bir metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) X uzayı yarı-Alexandroff uzaydır,

(2) X uzayı ayrık uzaydır.

İspat:

($\Rightarrow$):(X, d) uzayı yarı-Alexandroff uzay olsun. x∈ X alalım.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_d(x, \frac{1}{n}) = \{x\}$$

olduğunu biliyoruz.

X uzayı yarı-Alexandroff uzay olduğundan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_d(x, \frac{1}{n}) = \{x\}$$

yarı-açıktır. Dolayısıyla (X, d) ayrıktır.

($\Leftarrow$):(X, d) uzayı ayrık bir metrik uzay olsun. Ayrık uzayda açık kümelerin herhangi arakesiti açık ve böylece yarı-açık olduğundan X uzayı yarı-Alexandroff uzay olacaktır.

Teorem 3.3. (Arenas ve ark.,1998)

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:

(1) (X, τ), T_1 ve yarı-Alexandroff'tur.

(2) (X, τ) uzayı ayrıktır.

Uyarı 3.4. Bir önceki teorem yukarıdaki sonuç kullanılarak da elde edilir.

Teorem 3.5. (X, τ) topolojik uzayı aşırı bağlantısız nodec $T_{1/2}$ uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

(1) X, g-Alexandroff'tur.

(2) X, Alexandroff'tur.

(3) X, yarı Alexandroff'tur.

İspat

(X, τ) topolojik uzayı aşırı bağlantısız nodec $T_{1/2}$ uzay olsun.

(1) $\Rightarrow$ **(2)**: (X, τ) topolojik uzayı $T_{1/2}$ ve g-Alexandroff uzay olduğundan (X, τ) topolojik uzayı bir Alexandroff uzay olur.

(2) $\Rightarrow$ **(3)**: (X, τ) topolojik uzayı aşırı bağlantısız nodec uzay olduğundan ve Alexandroff uzay olduğundan (X, τ) topolojik uzayı bir yarı-Alexandroff uzay olur.

(3) $\Rightarrow$ **(1)**: (X, τ) topolojik uzayı aşırı bağlantısız nodec uzay olduğundan ve yarı-Alexandroff uzay olduğundan (X, τ) topolojik uzayı bir Alexandroff uzay olur. Buradan g-Alexandroff olur.

Teorem 3.6. (X, τ) topolojik uzayı aşırı bağlantısız nodec ve $T_{1/2}$ uzay olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı yarı-Alexandroff uzay ise $\forall\ x \in X$ için x minimal açık komşuluğa sahiptir.

İspat:

(X, τ) topolojik uzayı aşırı bağlantısız nodec ve $T_{1/2}$ uzay olsun. (X, τ) topolojik uzayı yarı-Alexandroff uzay olsun. Bu durumda uzay Alexandroff uzay olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 3.7. (X, τ) topolojik uzayı simetrik ve T_0-uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) (X, τ) yarı-Alexandroff uzaydır.

(2) (X, τ) ayrık uzaydır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ **(2)** (X, τ) topolojik uzayı simetrik ve T_0-uzay olsun. Bu durumda ise (X, τ) topolojik uzayı T_1 uzaydır. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı T_1 ve yarı-Alexandroff uzay olduğundan (X, τ) ayrık uzay olur.

(2) $\Rightarrow$ **(1)** (X, τ) ayrık uzay olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff uzay olduğundan yarı-Alexandroff uzay olur.

Teorem 3.8. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu örten, sürekli ve yarı-kapalı bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ise (Y, υ) topolojik uzayı yarı-Alexandroff'tur. **(**Arenas ve ark.,1998).

Teorem 3.9. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu örten, sürekli ve kapalı bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff ise (Y, υ) topolojik uzayı yarı-Alexandroff'tur.

İspat

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay ve f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere her kapalı dönüşüm bir yarı-kapalı fonksiyon olduğundan yukarıdaki teoremden elde edilir.

Teorem 3.10. (X, τ) topolojik uzayı Alexandroff uzay ve f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu ic-sürekli ve bir yarı-homeomorfizma ise (Y, υ) topolojik uzayı yarı-Alexandroff'tur.

(Arenas ve ark.,1998)

Teorem 3.11. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere ve : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu ic-sürekli ve bir homeomorfizma olsun. Bu durumda (X, τ) Alexandroff ise (Y, υ) yarı-Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere (X, τ) Alexandroff topolojik uzayı için f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu ic-sürekli ve bir homeomorfizma olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) homeomorfizma olduğundan tanım gereği bire-bir, örten, sürekli ve kapalıdır.

Her homeomorfizma aynı zamanda yarı-homeomorfizma olduğundan (Y, υ) topolojik uzayı yarı-Alexandroff'tur.

Teorem 3.12. (Arenas ve ark.,1998)

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu örten, sürekli ve yarı-kapalı bir fonksiyon olsun. Bu durumda X topolojik uzayı Alexandroff ise Y topolojik uzayı yarı-Alexandroff'tur.

Teorem 3.13. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere bir f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(1) f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) süreklidir,

(2) f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu yarı-sürekli ve ic-sürekli bir fonksiyondur.

(Ganster ve Reilly,1993)

Teorem 3.14. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) → (Y, υ) örten bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu sürekli, yarı-kapalı bir fonksiyon ve Y aşırı bağlantısız nodec uzay olsun. Bu durumda X Alexandroff ise Y Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu sürekli, yarı-kapalı bir fonksiyon ve Y aşırı bağlantısız nodec uzay olsun.

Bu durumda X Alexandroff olduğundan Y yarı-Alexandroff uzay olacaktır. (Y, υ) aşırı bağlantısız nodec uzay olduğundan yarı-Alexandroff uzayların aynı zamanda Alexandroff uzaylar olduğunu söyleyebiliriz.

Bu durumda (Y, υ) topolojik uzayı Alexandroff uzay olur.

Teorem 3.15. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) → (Y, υ) örten bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu yarı-sürekli, ic-sürekli ve yarı-kapalı bir fonksiyon olsun. Bu durumda X topolojik uzayı Alexandroff ise Y yarı-Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu yarı-sürekli, ic-sürekli ve yarı-kapalı bir fonksiyon olsun.

f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu yarı-sürekli ve ic-sürekli bir fonksiyon olduğundan sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla yukarıdaki teoremden Y uzayı yarı-Alexandroff uzay olur.

Teorem 3.16. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) → (Y, υ) bir fonksiyon olsun. (X, τ) uzayı Alexandroff , f : (X, τ) → (Y, υ) fonksiyonu ic-sürekli, yarı-homeomorfizma ise (Y, υ) topolojik uzayı yarı-Alexandroff'tur. **(**Arenas ve ark.,1998).

Teorem 3.17. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu ic-sürekli, yarı-homeomorfizma ve Y aşırı bağlantısız nodec $T_{1/2}$-uzay olsun. X Alexandroff ise Y g-Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bir fonksiyon olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu ic-sürekli, yarı-homeomorfizma ve Y aşırı bağlantısız nodec $T_{1/2}$-uzay olsun.

Bu durumda X topolojik uzayı Alexandroff ise Y topolojik uzayı yarı-Alexandroff'tur.

Y topolojik uzayı aşırı bağlantısız nodec $T_{1/2}$-uzay olduğundan Y topolojik uzayının g-Alexandroff olduğu elde edilir.

Teorem 3.18. X ve Y yarı-Alexandroff topolojik uzaylar ise X×Y uzayıda yarı-Alexandroff'tur. (Arenas ve ark.,1998)

Teorem 3.19. (X, τ), (Y, υ) ve X×Y topolojik uzayları aşırı bağlantısız nodec uzay olmak üzere X ve Y Alexandroff uzay ise X×Y de Alexandroff'tur.

İspat. (X, τ) ve (Y, υ) topolojik aşırı bağlantısız nodec ve Alexandroff uzaylar olsun. Bu durumda (X, τ) ve (Y, υ) topolojik uzayları yarı-Alexandroff topolojik uzaylar olacaktır. Bu durumda yukarıdaki teoremden istenen sonuç elde edilir.

BÖLÜM 4

g-δ-ALEXANDROFF UZAYLAR

Tanım 4.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. U, X'te açık küme olmak üzere $A \subseteq U$ iken δ-cl(A) $\subseteq U$ ise A'ya δ-g-kapalı küme denir. (Dontchev ve Ganster,1996).

Tanım 4.2. *X* bir topolojik uzay olmak üzere *A* alt kümesini alalım. $X \setminus A$ kümesi δ-g-kapalı ise *A* kümesine δ-g-açık denir

(Dontchev ve Ganster,1996).

Teorem 4.3. *X* bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) *A*, δ-g-açıktır,

(2) *F* kapalı ve $F \subset A$ olduğunda $F \subset$ δ-int(*A*) olmasıdır

(Dontchev ve Ganster,1996).

Tanım 4.4. Bir (X, τ) topolojik uzayında δ-açık kümelerin herhangi arakesiti g-açık ise (X, τ) topolojik uzayına genelleştirilmiş δ-Alexandroff (g-δ-Alexandroff) uzay denir.

Teorem 4.5. Her Alexandroff uzay g-δ-Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) bir Alexandroff topolojik uzay uzay olsun. $\{A_i : i \in I\}$ X'te δ-açık kümelerin bir ailesi ve A da bunların arakesiti olsun.

$$A=\bigcap_{i\in I} A_i$$

şeklindedir.

Bu durumda A açık bir küme ve dolayısıyla A g-açıktır.

Yani (X, τ) g-δ-Alexandroff'tur.

Uyarı 4.6. Aşağıdaki örnek her g-δ-Alexandroff uzayın Alexandroff uzay olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.7. (Arenas ve ark.,1998)

X reel ekseni ve üzerindeki topoloji elemanları $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$\left(\frac{-1}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

açık aralıkları ve ∅, X olsun.

X g-δ-Alexandroff'tur.

Öte yandan, {0} kümesi açık kümelerin arakesitidir ancak açık bir küme değildir.

Bu nedenle X Alexandroff uzay değildir. (Arenas ve ark.,1998).

Teorem 4.8. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki koşullar (X, τ) için denktir:

(1) X, g-δ-Alexandroff'tur.

(2) δ-g-açık kümelerin arakesitleri g-açıktır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ **(2)**: X topolojik uzayı g-δ-Alexandroff uzay olsun. $\{A_i : i \in I\}$, X topolojik uzayında δ-g-açık kümelerin bir ailesi ve A kümeside bunların arakesiti olsun. Yani

$$A=\bigcap_{i\in I} A_i$$

olsun. A kümesinin g-açık olduğunu göstermeliyiz. Bu yüzden $F \subseteq X$ kapalı bir küme ve $F \subseteq A$ olsun. Bu durumda $\forall i \in I$ için $F \subseteq A_i$ olacaktır.

Öyleyse A_i'ler δ-g-açık olduğundan ve $F \subseteq A_i$ olduğundan ve $\forall i \in I$ için

$$F \subseteq \delta\text{-}intA_i$$

olur.

$$B= \bigcap_{i\in I} \delta - intA_i$$

ise kabulden dolayı B g-açıktır.

B g-açık olduğundan, $F \subseteq intB$ olur.

$$intB \subseteq intA$$

olduğundan

$$F \subseteq intA$$

olur. O halde A g-açıktır.

Dolayısıyla δ-g-açık kümelerin arakesiti g-açıktır.

(2) $\Rightarrow$ **(1)**: δ-g-açık kümelerin arakesitleri g-açık olsun.

$\{B_i : i\in I\}$, X'te δ-açık kümelerin bir ailesi, B de bunların arakesiti olsun. Yani

$$B=\bigcap_{i\in I} B_i$$

olsun. $\forall i \in I$ için B_i kümeleri δ-açık kümeler olduğundan $\forall i \in I$ için B_i kümeleri δ-g-açıktır.

Kabulden dolayı arakesitleri de g-açıktır.

O halde X topolojik uzayı g-δ-Alexandroff'tur.

Teorem 4.9. (X, τ) bir topolojik uzayı olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:

(1) X, g-δ-Alexandroff'tur.

(2) δ-kapalı kümelerin birleşimleri g-kapalıdır.

İspat

(1) $\Rightarrow$ **(2)**:X topolojik uzayı g-δ-Alexandroff olsun. $\{C_i : i\in I\}$, X topolojik uzayında δ-kapalı kümelerin bir ailesi ve C kümeside bunların birleşimi olsun. Yani

$$C=\bigcup_{i\in I} C_i$$

olsun. Bu durumda

$$X\setminus C=X\setminus\bigcup_{i\in I} C_i$$

$$=\bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i)$$

dir.

$\forall i \in I$ için C_i'ler δ-kapalı olduğundan X\C_i'ler δ- açıktır.

(X, τ) topolojik uzayı g-δ-Alexandroff topolojik uzay olduğundan X\C kümesi g-açık olacaktır.

O halde C kümesi g-kapalıdır.

Yani δ-kapalı kümelerin birleşimleri g-kapalıdır.

(2)⇒ (1): δ-kapalı kümelerin birleşimleri g-kapalı olsun.

$\{A_i : i \in I\}$, X topolojik uzayında δ-açık kümelerin bir ailesi, A da bunların arakesiti olsun. Yani

$$A=\bigcap_{i\in I} A_i$$

dir. Bu durumda

$$X\setminus A = X\setminus \bigcap_{i\in I} A_i$$

$$=\bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i)$$

dir. $\forall i \in I$ için A_i'ler δ-açık olduğundan X\A_i'ler δ-kapalıdır.

Kabulden dolayı X\A g-kapalıdır. X\A g-kapalı ise A g-açıktır.

O halde δ-açık kümelerin herhangi arakesiti g-açıktır.

Yani, (X, τ) topolojik uzayı g-δ-Alexandroff uzay olur.

Teorem 4.10. (X, τ) bir topolojik uzayı olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:

(1) X, g-δ-Alexandroff'tur.

(2) δ-g-kapalı kümelerin birleşimleri g-kapalıdır.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ **(2)**: X bit g-δ-Alexandroff topolojik uzay olmak üzere $\{C_i : i\in I\}$ ailesi X topolojik uzayında δ-g-kapalı kümelerin bir ailesi C de bunların birleşimi olsun.

$$C=\bigcup_{i\in I} C_i$$

dir. Bu durumda

$$X\backslash C=X\backslash\bigcup_{i\in I} C_i$$

$$=\bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i)$$

dir.

$\forall i\in$ I için C_i'ler δ-g-kapalı olduğundan $X\backslash C_i$'ler δ-g-açıktır.

(X, τ) topolojik uzayu g-δ-Alexandroff olduğundan X\C g-açıktır.

O halde C, g-kapalıdır. Yani δ-g-kapalı kümelerin birleşimleri g-kapalıdır.

(2)$\Rightarrow$ **(1)**: δ-g-kapalı kümelerin birleşimleri g-kapalı olsun. $\{A_i : i\in I\}$, X topolojik uzayında δ-açık kümelerin bir ailesi, A da bunların arakesiti olsun. O halde

$$A=\bigcap_{i\in I} A_i$$

olur.

$$X \setminus A = X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$= \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

’dir.

$\forall i \in I$ için A_i’ler δ-açık olduğundan $X \setminus A_i$ ’ler δ-kapalıdır. Her δ-kapalı küme δ-g-kapalı olduğundan $X \setminus A_i$’ler δ-g-kapalı olur.

Kabulden dolayı $X \setminus A$ g- kapalıdır. Dolayısıyla A g-açıktır.

O halde (X, τ) bir g-δ-Alexandroff uzay olacaktır.

BÖLÜM 5

g-δ-ALEXANDROFF TOPOLOJİK UZAYLAR VE FONKSİYONLAR

Tanım 5.1. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay, f :(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere δ-açık kümelerin ters resmi δ-açık ise f :(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonuna δ-süreklidir denir (Noiri, 1980).

Tanım 5.2. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay, f :(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere açık kümelerin ters resmi δ-açık ise f :(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonuna süper süreklidir denir (Munshi ve Bassan, 1982).

Teorem 5.3. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay, f :(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) 1-1 ve örten fonksiyon olmak üzere kapalı ve süper sürekli olsun. (X, τ) uzayı g-δ-Alexandroff ise (Y, υ) uzayı g-δ-Alexandroff olur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay, f :(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) bir fonksiyon olmak üzere kapalı ve süper sürekli olsun.

X g-δ-Alexandroff topolojik uzay ve $\{V_i : i\in I\}$, Y'deki δ-kapalı kümelerin bir ailesi olsun. $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ olsun.

Varsayımdan dolayı

$$U=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i),$$

X'te g-kapalıdır.

$f^{-1}(V_i)$ δ-kapalı ve X uzayı g-δ-Alexandroff olduğundan

$$U=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$$

de g-kapalıdır.

(Levine,1970)’ye göre V= f(U), g-kapalıdır.

Bu nedenle Y topolojik uzayı g-δ-Alexandroff olarak elde edilir.

Teorem 5.4. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay, f :(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) bir 1-1 ve örten bir fonksiyon olmak üzere açık ve süper sürekli olsun. (X, τ) uzayı g-δ-Alexandroff ise (Y, υ) uzayı g-δ-Alexandroff olur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay, f :(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) bir 1-1 ve örten fonksiyon olmak üzere açık ve süper sürekli olsun.

Bu durumda f :(X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu kapalı dönüşüm olduğundan yukarıdaki teoremden istenen elde edilir.

Tanım 5.5. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. X’in her g-kapalı alt kümesinin görüntüsü Y’de g-kapalı ise f:(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu g-kapalı olarak adlandırılır. (Malghan, 1982)

Tanım 5.6. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. X’in her g-açık alt kümesinin görüntüsü Y’de g-açık ise f:(X, τ)$\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu g-açık olarak adlandırılır. (Malghan , 1982)

Teorem 5.7. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) örten, sürekli, g-kapalı bir fonksiyon olsun. X Alexandroff ise Y g-δ-Alexandroff’tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) örten, sürekli, g-kapalı bir fonksiyon olsun.

{ B_i :i∈ I}, Y topolojik uzayının δ-kapalı alt kümelerinin bir ailesi ve B de bunların birleşimi olsun.

$$B=\bigcup_{i\in I} B_i$$

şeklindedir.

f sürekli ve X Alexandroff olduğundan

$$A= f^{-1}(B)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

X topolojik uzayında kapalıdır.

f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) örten ve g-kapalı olduğundan

$$B=f(A)$$

Y topolojik uzayında g-kapalıdır.

Böylece Y topolojik uzayı g- δ-Alexandroff olur.

Teorem 5.8. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) 1-1 ,örten, sürekli, g- açık bir fonksiyon olsun. X Alexandroff ise Y g-δ-Alexandroff'tur.

İspat:

Yukarıdaki teoreme benzer olarak görülür.

Tanım 5.9. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f hem g-sürekli hem g-açık ise f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) bire-bir,örten fonksiyonu g-homeomorfizma (genelleştirilmiş homeomorfizma) olarak adlandırılır. (Maki ve ark.,1991).

Tanım 5.10. A’nın çekirdeği olan $A^{\wedge}$ kümesi A’nın tüm açık üst kümelerinin arakesitidir. (Maki,1986)

Tanım 5.11. Bir (X, τ) topolojik uzayının altkümesi eğer

$A = A^{\wedge}$ ise Λ-küme (Maki,1986)

ve

$A = L \cap F$, (L, Λ-küme ve F kapalı) ise λ-küme (Arenas ve ark.,1997) olarak adlandırılır.

Tanım 5.12. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu; eğer (Y, υ)’nın her kapalı V kümesi için $f^{-1}(V)$ (X, τ)’da g-kapalı ise g-süreklidir denir. (Balachandran ve ark.,1991).

Tanım 5.13. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu; eğer (Y, υ)’nın her kapalı V kümesi için $f^{-1}(V)$ (X, τ)’da λ-kapalı ise λ-süreklidir denir. (Arenas ve ark.,1997).

Teorem 5.14. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. Bir f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(1) f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu süreklidir,

(2) f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu g-sürekli ve λ-süreklidir.

(Arenas ve ark.,1997).

Teorem 5.15. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) örten, g-sürekli ve λ-sürekli, g- kapalı bir fonksiyon olsun. X Alexandroff ise Y g-δ-Alexandroff’tur.

İspat:

(X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) örten, g-sürekli ve λ-sürekli, g- kapalı bir fonksiyon olsun.

f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu g-sürekli ve λ-sürekli olduğundan süreklidir. Bu durumda istenen elde edilir.

Teorem 5.16. Bir f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(1) f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) süreklidir,

(2) f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) yarı-sürekli ve ic-sürekli bir fonksiyondur.

(Ganster ve Reilly,1993).

Teorem 5.17. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) örten, yarı-sürekli ve ic-sürekli, g- kapalı bir fonksiyon olsun. X Alexandroff ise Y g-δ-Alexandroff'tur.

İspat:

Yukarıdaki teoremden istenen elde edilir.

Tanım 5.18. (X, τ) ve (Y, υ) iki topolojik uzay olsun. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu için Y'nin her δ-g-kapalı V kümesi için X'teki ters görüntüsü $f^{-1}(V)$, δ-g-kapalı ise f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu δ-g-kararsız olarak adlandırılır. (Dontchev ve Ganster, 1996).

Teorem 5.19. (X, τ) bir topolojik uzay ve (Y, υ) topolojik uzayı bir ayrışım uzayı olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) 1-1, örten fonksiyonunu alalım. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu δ-g-kararsız ve f^{-1} δ-g-kararsız olmak üzere X topolojik uzayı g- δ-Alexandroff ise Y topolojik uzayıda g- δ-Alexandroff'tur.

İspat:

(X, τ) bir topolojik uzay ve (Y, υ) topolojik uzayı bir ayrışım uzayı olmak üzere f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) 1-1, örten fonksiyonunu alalım. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) fonksiyonu δ-g-kararsız ve f^{-1} δ-g-kararsız olsun.

{ V_i :i ∈ I} Y topolojik uzayının δ-g-kapalı alt kümelerinin bir ailesi ve V kümesi de birleşimi yani

$$V= \bigcup_{i\in I} V_i$$

olsun.

f : (X, τ) $\rightarrow$ (Y, υ) δ-g-kararsız ve X topolojik uzayı g-δ-Alexandroff olduğundan

$$U= f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$$

X'te g-kapalıdır. f : (X, τ) $\rightarrow$(Y, υ) örten ve f^{-1} fonksiyonu δ-g-kararsız olduğundan V=f(U), Y topolojik uzayında δ-g-kapalıdır.

Böylece V=f(U), Y'de g-kapalıdır.

Sonuç olarak Y g- δ-Alexandroff'tur.

Teorem 5.20. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. (X, τ) T_1-uzay ise (X, τ) $T_{3/4}$-uzaydır. (Dontchev ve Ganster,1996).

Teorem 5.21. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. (X, τ) $T_{3/4}$-uzay ise (X, τ) $T_{1/2}$-uzaydır. (Dontchev ve Ganster,1996).

Teorem 5.22. (X, τ) bir yarı-düzenli $T_{3/4}$ topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) (X, τ) g-δ-Alexandroff uzaydr,

(2) (X, τ) Alexandroff uzaydır.

İspat:

Yarı-düzenli $T_{3/4}$ uzaylar yarı-düzenli $T_{1/2}$-uzay olduğundan istenen elde edilir.

BÖLÜM 6

g-δ-ALEXANDROFF TOPOLOJİK UZAYLARIN ÖZELLİKLERİ

Teorem 6.1. Bir (X, τ) topolojik uzayı tek komşuluğu X olan bir x noktasına sahipse bu uzay g- δ-Alexandroff ’tur.

İspat:

Bir (X, τ) topolojik uzayı tek komşuluğu X olan bir x noktasına sahip olsun. Bu durumda Arenas ve ark.,(1998)’den (X, τ) topolojik uzayı g- Alexandroff ve buradan (X, τ) topolojik uzayı g- δ-Alexandroff ’tur.

Teorem 6.2. (Dontchev ve Ganster,1996). (X, τ) bir yarı-düzenli uzay ve A⊆X olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) A, δ-g-kapalıdır.

(2) A, g-kapalıdır.

Teorem 6.3. (X, τ) yarı-düzenli bir topolojik uzay olmak üzere eğer (X, τ) topolojik uzayı g-δ-Alexandroff uzay ise her x ∈ X noktası bir minimal δ-g-komşuluğa sahiptir.

İspat:

(X, τ) yarı-düzenli bir topolojik uzay olmak üzere (X, τ) topolojik uzayı g-δ-Alexandroff uzay olsun.

$\{A_i : i \in I\}$ ailesi x noktasının tüm δ-g-açık komşuluklarının bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i\in I} A_i$, x’in minimal δ-g-komşuluğu olur.

Teorem 6.4. (Dontchev ve Ganster,1996).

(X, τ) topolojik uzayı bir ayrışım uzayı olmak üzere Aşağıdakiler denktir:

(1) A, (X, τ) uzayında δ-g-kapalıdır,

(2) A, (X, τ) uzayında g-kapalıdır.

Teorem 6.5. Bir (X, τ) topolojik uzayı bir ayrışım uzayı olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) g-Alexandroff uzaydır.

(2) (X, τ) g-δ-Alexandroff uzaydır.

İspat

(X, τ) topolojik uzayı bir ayrışım uzayı olmak üzere g-kapalı kümeler δ-g-kapalı olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 6.6. (X, τ) yarı-düzenli bir uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) uzayı g-δ-Alexandroff uzaydır,

(2) (X, τ) uzayı g-Alexandroff uzaydır.

İspat:

($\Rightarrow$):(X, τ) bir yarı-düzenli g-δ-Alexandroff topolojik uzay olsun.

$\{A_i : i \in I\}$, X'te g-açık kümelerin bir ailesi, A da bunların arakesiti olsun.

$$A = \bigcap_{i \in I} A_i$$

dir.

X g-δ-Alexandroff olduğundan A g-açıktır.

Sonuç olarak (X, τ), g-Alexandroff uzay olur.

($\Leftarrow$): (X, τ) bir yarı-düzenli g-Alexandroff uzay olsun. {A_i:i∈ I}, X'te g-δ-açık kümelerin bir ailesi, A da bunların arakesiti olsun.

$$A=\bigcap_{i\in I} A_i$$

dir. (X, τ) g-Alexandroff olduğundan A g-açıktır. O halde A g-δ-açıktır.

Buradan, (X, τ) g-δ-Alexandroff olur.

Teorem 6.7. (Arenas ve ark.,1998)

Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler ifadeler denktir:

(1) (X, τ) R_0 ve g-Alexandroff uzaydır.

(2) (X, τ) ayrışım uzayıdır.

Teorem 6.8. Bir (X, τ) yarı-düzenli uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) uzayı R_0 ve g-Alexandroff uzaydır.

(2) (X, τ) uzayı R_0 ve g-δ-Alexandroff uzaydır,

(3) (X, τ) ayrışım uzayıdır.

İspat

(X, τ) topolojik uzayı bir yarı-düzenli uzayı olmak üzere g-kapalı kümeler δ-g-kapalı olacaktır.

Öte yandan (X, τ) topolojik uzayının R_0 ve g-Alexandroff uzay olması için gerek ve yeter koşulun (X, τ) topolojik uzayının ayrışım uzay olması istenenin elde edilmesini sağlar.

Teorem 6.9. (Dontchev ve Ganster,1996). (X, τ) bir yarı-düzenli $T_{1/2}$-uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) A, δ-g-kapalıdır,

(2) A, kapalıdır.

Teorem 6.10. (X, τ) uzayı bir yarı-düzenli $T_{1/2}$ uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) uzayı g-δ-Alexandroff uzaydır,

(2) (X, τ) uzayı Alexandroff uzaydır.

İspat:

(X, τ) bir yarı-düzenli $T_{1/2}$-topolojik uzay olmak üzere g-kapalı kümelerin kapalı olması isteneni sağlar.

Teorem 6.11. (X, τ) uzayı bir yarı-düzenli $T_{1/2}$ uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) uzayı g-δ-Alexandroff uzaydır,

(2) (X, τ) uzayı Alexandroff uzaydır,

(3) (X, τ) uzayı g-Alexandroff uzaydır.

İspat:

(X, τ) uzayı bir yarı-düzenli $T_{1/2}$-uzay olmak üzere yukarıdaki teoremden istenen elde edilir.

Teorem 6.12. (Dontchev ve Ganster,1996).

(X, τ) bir R_1 topolojik uzay ve A, X'in kompakt alt kümesi olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) A bir δ-g-kapalı kümedir.

(2) A bir g-kapalı kümedir.

Teorem 6.13. (X, τ) bir R_1 topolojik uzay ve her A alt kümesi kompakt alt küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) uzayı g-δ-Alexandroff uzaydır,

(2) (X, τ) uzayı g-Alexandroff uzaydır.

İspat:

(X, τ) bir R_1 topolojik uzay ve her A alt kümesi kompakt alt küme olmak üzere yukarıdaki teoremden elde edilir.

Teorem 6.14. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. (X, τ) bir ayrık topolojik uzay ise g- δ-Alexandroff uzaydır.

İspat:

(X,τ) bir ayrık bir topolojik uzay olsun. $\{A_i : i \in I\}$, X'in δ- açık altkümelerinin bir ailesi ve A da bunların arakesiti olsun.

$$A=\bigcap_{i\in I} A_i$$

dir. (X, τ) bir ayrık uzay olduğundan A açıktır dolayısıyla g-açıktır.

Buradan (X, τ) topolojik uzayı g- δ-Alexandroff olur.

KAYNAKLAR

Arenas F.G., Dontchev J. ve Ganster M.,1998. On Some Weaker Forms Of Alexandroff Spaces. *Arabian J. Sci. Eng.* 23(1A):79-89.

Alexandroff P., 1937.Diskrete Raume. *Mat.Sb.*2:501-518.

Arenas F.G.,*Alexandroff spaces*.preprint.

Arenas F.G.,Dontchev J.ve Ganster M., *On λ-sets and the dual of generalized continuity.*, Questions Answers Gen.Topology. 15(1) (1997):3-13

Balachandran K., Sundaram P., Maki H., On generally continuous maps in topological spaces. *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A, Math.*,12(1991):5-13

Balachandran K., Sundaram P. ve Maki H., Generally locally closed sets and glc-continuous functions.,*Indian J. Pure Appl. Math.*,27(3)(1996):235-244

Bourbaki N., 1996. General topology, *Part I, addison Wesley, Reading, Mass.*

Chattopadhyay C. ve Roy U.K., 1992. δ-sets, irresolvable and resolvable space. *Math.Slovaca,42.no.*3:371-378

Crossley S. G. ve Hildebrand S. K., 1972. Semitopological Properties. *Fund. Math.* 74:233-254

Davis A. S., 1961. Indexed systems of neigborhood for general topological spaces, *Amer. Math. Monthly*, 68: 886-893

Dontchev J., 1995. On submaximal spaces. *Tamkang J. Math.* 26 (3):253-260.

Dontchev J. ve Ganster M., 1996. On δ-generalized closed sets and $T_{3/4}$-spaces. *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A, Math. 17*: 15-31.

Ganster M.ve Reilly I.,1990.*A decomposition of continuity. Acta Math.Hungar*.56:299-301.

Ganster M. ve Reilly I., 1993. Another decomposition of continuity. *Annals of the New York Academy of Sciences. Vol. 704*:135-141.

Ganster M., Reilly I. ve Vamanamurthy M.K., 1992. Remarks on locally closed sets. *Math. Pannonica3(2):*107-113.

Hamlett T. R., Janković D. ve Konstadilaki Ch., On some properties weaker than S- closed, *Math. Japon* .to appear.

Khalimsky E. D., 1970. *Applications of connected ordered topological spaces in topology, Conference of Math. Departments of Povolsia.*

Khalimsky E. D., Kopperman R. and Meyer P. R., 1990. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets, *Topology Appl. 36*:1-17

Kovalevsky V. ve Kopperman R.1994. Some topology-based image processing algorithms, *Annals of the New York Academy of Sciences. 728*:174-182

Khalimsky, E.D., Kopperman R. Ve Meyer, P.R. 1990. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets, *Topology Appl.*, 36: 1-17.

Kovalevsky V.ve Kopperman R., 1994. Some topology-based image processing algorithms, *Annals of the New York Academy of Sciences,* 728: 174-182.

Levine N., 1963. Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces. *Amer Math. Monthly*. (70): 36-41.

Levine N., 1970. Generalized closed sets in topology, *Rend. Circ .Mat. Palermo.*

19(2):89-96

Maki H., 1986. Generalized Λ-sets and the associated closure operator, *The Special Issue in Commemoration of Prof. Kazusada IKEDA's Retirement. Fukuoka University*, 139-146.

Maki H., Sundaram P. ve Balachandran K., 1991. On generalized homeomorphisms in topological spaces, *Bull. Fukuoka Univ. Ed. Part III. 40*:13-21

Malghan S. R., 1982. Generalized closed maps, *J. Karnatak Univ. Sci. 27:*82-88

Munshi B.M. ve Bassan D.S., 1982. Super-continuous mappings, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 13: 229--236.

Neubrunnová A., 1975. On transfinite sequences of certain types of functions, *Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenianae Math. 30*:121-126

Nieminen T.,1977. On ultrapseudocompact and related spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AL. Math.*, 3:185-205

Noiri T., 1973. A generalization of closed mappings, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 54(8)*:412-415

Noiri T., 1980. On δ-continuous functions, *J. Korean Math. Soc.*, 16: 161-166.

Singal M. and Singal A., 1968. Almost continuous mappings, *Yokahama Math. J.*, 16: 63--73.

Steen L. A. ve Seebach J. A., *(Holt, Rinerhart and Winston, Inc., New York-Montreal-London, 1970). Jr., Counterexamples in topology.*

Stone M. H. 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology. *TAMS*, 41: 375-381.

Van Mill J. ve Mills C. F., 1980.*A boojum and other snarks, Nederl. Acad. Wetensch .Proc. Ser. A. 83*:419-424.

Veksler A. I., 1973. P'-points. P'-sets, P'-spaces:A new class of order-continuous measures and functionals, *Soviet Math. Dokl.*, *14*:1445-1450

Velicko N. V., 1968. H-closed topological spaces, *Amer. Math. Soc. Transl*, 78:103-118

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Cahide İrem ÖĞÜŞ

Doğum Yeri : Gökçeada

Doğum Tarihi : 26.04.1985

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce,Almanca

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar-SCI-Diğer

b) Bildiriler-Uluslar arası-Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

2004: Matematik ve Geometri Öğretmenliği Beylikdüzü Proje Dersanesi

2006: Matematik ve Geometri Öğretmenliği Mecidiyeköy Sınav Dersanesi

2007: Akbank Genel Müdürlüğü Merkezi Dış Ticaret Yönetici Yrd.4

2009: Lapseki İsmail Baykut İlköğretim Okulu Matematik Öğretmenliği

İLETİŞİM

E-posta Adresi : cahideirem@hotmail.com