İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK,
FUZZY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ve
CORE TEOREMLERİ ÜZERİNE

Cemal BELEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2007

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK, FUZZY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ve CORE TEOREMLERİ ÜZERİNE

Cemal BELEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2007

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf AMİROV
Üye : Yrd. Doç. Dr. Anar ADİLOĞLU
Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2007

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Hasan Hüseyin BAŞIBÜYÜK

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK, FUZZY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ve CORE TEOREMLERİ ÜZERİNE

Cemal BELEN
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiş ve kısaca istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmıştır. Daha sonra iki katlı dizilerin istatistiksel yakınsaklığı, istatistiksel yakınsaklığın istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilmeden elde edildiği Tauberian teoremleri ve $\mu-$istatistiksel yakınsak fonksiyon dizileri ele alınmıştır.

İkinci bölümde, Fridy tarafından verilen istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel cluster noktaları kavramları $\mathbb{R}^N$ uzayında incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, Knopp çekirdeği, istatistiksel çekirdek, $A-$istatistiksel çekirdek, Banach çekirdeği, $\sigma-$çekirdek ve $I-$çekirdek kavramları tanıtılıp bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, sayı dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve lacunary istatistiksel limit noktaları ve iki katlı dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığı ele alınmıştır.

Beşinci bölümde, genel olarak, istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli toplanabilme arasındaki içerme bağıntıları verilerek bu bağıntılarla ilgili teoremler ispatlanmıştır.

Son bölümde ise fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel alt ve üst limit kavramları ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matris dönüşümü, Yoğunluk, İstatistiksel yakınsaklık, Tauberian teoremi, İstatistiksel limit noktası, Bir dizinin çekirdeği, Fuzzy sayı dizisi

SUMMARY

MSc Thesis

ON STATISTICAL CONVERGENCE, STATISTICAL CONVERGENCE OF SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS and CORE THEOREMS

Cemal BELEN
Cumhuriyet University
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics
Advisor: Asoc. Proff. Dr. Mustafa YILDIRIM

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, fundamental definitions and theorems, and the concept of statistical convergence have been given shortly. Later, statistical convergence of double sequences, Tauberian theorems which follows from statistical summability $(C,1)$ and $\mu-$statistically convergent function sequences have been considered.

In the second chapter, the concepts of statistical limit points and statistical cluster points, introduced by Fridy, have been examined in $\mathbb{R}^N$ space.

In the third chapter, the concepts of Knopp core, statistical core, $A-$statistical core , Banach core, $\sigma-$core and $I-$core have been investigated and the relations between these concepts have been examined.

In the fourth chapter, Lacunary statistical convergence, lacunary statistical limit points for single sequences and lacunary statistical convergence of multiple sequences have been considered.

In the fifth chapter, in general, inclusion relations between statistical convergence and strong summability have been given and theorems concerned with these relations have been proved.

In the last chapter, the concepts of statistical limit points and statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers have been considered.

Key Words: Matrix transformation, Density, Statistical convergence, Tauberian theorem, Statistical limit point, Core of a sequence, Sequence of fuzzy numbers

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmam boyunca bana her açıdan yardımcı olan saygı değer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM'a teşekkür borçluyum.

Cemal BELEN

GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık ilk defa Polonya'da Wroclaw Üniversitesinde bir konferansta Steinhaus (1949) tarafından verilmiştir. Daha sonra Fast (1951) tarafından çalışılmıştır. Bir çok bilim adamı tarafından ele alınan istatistiksel yakınsaklık, özellikle reel ve fonksiyonel analizde, toplanabilme teorisinde, ölçüm teorisinde ve olasılık teorisinde önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda bu alanlardaki önemli çalışmalar Connor, Fridy, Khan, Kolk, Maddox, Miller, Moricz, Orhan, Pehlivan tarafından yapılmıştır ve hızlı bir şekilde devam etmektedir.

Bir dizinin çekirdeği kavramı ilk kez Knopp (1930) tarafından verilmiş ve daha sonra özellikle Cooke (1950), Shcherbakov (1977), Maddox (1979), Das (1987), Choudhary (1988) tarafından yapılan çalışmalara bağlı olarak gelişim göstermiştir. Ayrıca bir dizinin istatistiksel çekirdeği, $A-$istatistiksel çekirdeği, Banach çekirdeği, $\sigma-$çekirdeği ve $I-$ çekirdeği kavramları Fridy, Orhan, Demirci, Loone ve Yardımcı tarafından ele alınmıştır.

Son yıllarda, Pringsheim (1900) tarafından verilen iki katlı dizilerin yakınsaklığı kavramının istatistiksel yakınsaklık ve çekirdek teoremleri üzerine genişlemeleri görülmektedir. Bu genişlemeler, Mursaleen ve Edely (2003), Moricz (2003), Savaş ve Patterson (2006) tarafından yapılan çalışmalarda ön plana çıkmaktadır.

Fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı, istatistiksel limit noktaları, istatistiksel alt ve üst limitleri gibi kavramları oldukça günceldir ve istatistiksel yakınsaklığın tüm alt alanları üzerinde hızlı bir gelişim göstermektedir.

Hazırlanan bu yüksek lisans tezinde bütün bu kavramların incelenip derlenmesi amaçlanmıştır.

I. BÖLÜM

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda, çalışmanın önemli bölümlerinde sık sık kullanılacak olan bazı dizi uzayları ve bu dizi uzayları arasında tanımlı matris dönüşümleri ile ilgili tanımlar ve teoremler verilecektir.

Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Tanım 1.1.1: Kompleks ya da reel terimli tüm dizilerin uzayını s, sınırlı diziler uzayını ℓ_∞, yakınsak diziler uzayını c, sıfıra yakınsak diziler uzayını c_0 ile göstereceğiz. Yani

$$\begin{aligned} m &= \ell_\infty := \{x = (x_n) \mid \; sup_n \mid x_n \mid \; < \infty \} \\ c &: = \{x = (x_n) \mid \; lim_n x_n = m, mevcut \} \\ c_0 &: = \{x = (x_n) \mid \; lim_n x_n = 0 \} \end{aligned}$$

dir. c, c_0 ve ℓ_∞ uzayları $\| \; x \; \|_\infty = sup_n \; \mid x_n \mid$ normuyla birlikte birer Banach uzayıdırlar.

Bir matris dönüşümünün, c_0, c, ℓ_∞ gibi dizi uzayları üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüm belirlemesi için gerekli ve yeterli koşullar bilinmekte olup, bunlar bu kısımda ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 1.1.2: $A = (a_{nk})$, $(n, k = 0, 1, 2, ...)$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Verilen bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$y_n := A_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{1.1.1}$$

yakınsak ise $Ax = (A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer X ve Y, tüm diziler uzayı s nin iki alt cümlesi olmak üzere her $x \in X$ için $(A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcut ve $(A_n(x)) \in Y$ ise A matrisi X den Y ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. Eğer $A_n(x) \to x_0$ $(n \to \infty)$ ise (x_n) dizisine x_0 değerine $A-$toplanabilirdir (veya $A-$limitlenebilirdir) denir ve bu durum $A - limx = x_0$ ile gösterilir. Toplamı veya limiti koruyan matrislerin sınıfı ise (X, Y, p) ile gösterilir.

Eğer $A \in (c, c)$ ise A ya konservatif, $A \in (c, c; p)$ ise A ya regüler matris denir.

(1.1.1) serisi her n için yakınsak olacağından matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır. Şimdi toplanabilme teorisinde büyük öneme sahip bir matris örneği verelim.

Örnek 1.1.3: Bir $x = (x_n)$ dizisini, onun aritmetik ortalaması olan

$$\sigma_n = \frac{x_0 + x_1 + ... + x_n}{n+1}$$

dizisine dönüştüren operatöre Cesàro operatörü denir ve $(C, 1)$ veya C_1 ile gösterilir. Açıkça bu operatöre karşılık gelen matris

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ile verilir.

Teorem 1.1.4: $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k \mid a_{nk} \mid < \infty$ olmasıdır (Maddox 1970, sh.174).

Teorem 1.1.5: (Kojima-Schur) $A \in (c, c)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

(i) $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k \mid a_{nk} \mid < \infty$

(ii) $lim_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p$ (her sabit p çin)

özelliklerinin gerçeklenmesidir (Maddox 1970, sh.166).

Teorem 1.1.6:(Silverman-Teoplitz) $A \in (c, c; p)$ olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\| A \|_\infty := sup_n \sum_k \mid a_{nk} \mid < \infty$

(ii) $lim_n a_{nk} = 0$ (her sabit k için)

(iii) $lim_n \sum_k a_{nk} = 1$

koşullarının gerçeklenmesidir (Maddox 1970, sh.165).

Teorem 1.1.7 :(Schur Teoremi) $A \in (\ell_\infty, c)$ olması için gerek ve yeter şart, $\sum_k |a_{nk}|$ serisinin n ye göre düzgün yakınsak ve

$$\text{Her } k \text{ için } lim_n a_{nk} = \alpha_k \text{ mevcut}$$

olmasıdır (Maddox, 1970, sh 169).

Tanım 1.1.8 Eğer A ve B iki regüler matris ve (x_k), bir dizi olmak üzere

$$x_n^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \ , \quad x_n^{''} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k \quad (\text{ her } n \text{ için })$$

tanımlı olsun. Eğer $x_n^{'} - x_n^{''} \to 0$ $(n \to \infty)$ ise, A ve B matrislerine (x_k) dizilerinin verilen bir sınıfı üzerinde mutlak denk matrisler denir (Cooke, 1950, sh 169)

Tanım 1.1.9 : $A = (a_{nk}), n, k = 0, 1, 2, ...$ kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Bu durumda

$$c_A := \{ \ x \in s \ : \ Ax \in c \ \}$$

cümlesine A matrisinin yakınsaklık alanı (veya toplanabilirlik alanı) denir.

Tanım 1.1.10: Eğer $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ve her n için $a_{nn} \neq 0$ ise bu durumda $A = (a_{nk})$ ya bir normal matris (veya üçgensel matris) denir.

Tanım 1.1.11: $A \in B(c)$ olsun. Bu durumda $a_k := lim_n \ a_{nk}$ (her sabit k için) olmak üzere $a_k = 0$ ise A ya çarpımsal matris ,

$$\chi(A) := lim \sum_k a_{nk} - \sum_k a_k$$

sayısına A nın karakteristiği denir. $\chi(A) \neq 0$ ise A ya co-regüler matris ve $\chi(A) = 0$ ise A ya co-null matris denir.

Tanım 1.1.12: Eğer bir A matrisinin her bir satırında sıfırdan farklı sonlu tane terim varsa A matrisine satır-sonlu matris denir.

Tanım 1.1.13: Eğer A regüler ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} | \ a_{nk} \ | = 1$$

ise bu durumda $A = (a_{nk})$ matrisine hemen hemen pozitiftir denir (Simmons, 1969).

Tanım 1.1.14: Eğer $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $x, y \in A$ iken $\alpha x + (1 - \alpha) \, y \in A$ ise bir E vektör uzayının A alt kümesine konvekstir denir.

Tanım 1.1.15: X bir vektör uzayı olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ ve her $\alpha \geq 0$ için $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ özellikleri gerçekleniyor ise f fonksiyoneline alt lineer fonksiyonel denir.

Tanım 1.1.16: A bir E vektör uzayının boş olmayan alt kümesi olsun. A yı içeren E nin bütün alt vektör uzaylarının arakesitine A nın lineer hull'u denir.

Böylece A nın F lineer hull'u A yı içeren E nin bir alt vektör uzayıdır. Açıkça F, A yı içeren E nin en küçük alt uzayıdır. Yani eğer G, $A \subseteq G$ olan bir vektör uzayı ise $F \subseteq G$ dir.

Lemma 1.1.17: Bir E vektör uzayının boş olmayan A alt kümesinin lineer hull'ü, A nın elemanlarının bütün sonlu lineer kombinasyonlarının kümesidir (Brown, 1970 sh 95)

Tanım 1.1.18: A bir E normlu uzayının bir boş olmayan alt kümesi olsun. A yı içeren E nin bütün kapalı alt vektör uzaylarının arakesitine A nın kapalı lineer hull'ü denir.

A nın kapalı F lineer hull'ü açıkça E nin bir alt vektör uzayıdır, ve E nin kapalı bir alt kümesidir. (Çünkü kapalı kümelerin herhangi bir ailesinin kesişimi kapalıdır.) (Brown, 1970 sh 96)

Açıkça F, E nin en küçük kapalı alt uzayıdır.(Eğer G, $A \subseteq G$ ve E nin kapalı alt vektör uzayı ise $F \subseteq G$ dir.)

Lemma 1.1.19: Bir normlu E uzayının bir boş olmayan kapalı lineer hull'ü A nın lineer hull'ünün kapanışıdır. (Brown, 1970 sh 96)

Tanım 1.1.20 (Banach Limitleri): D, $D(x_0, x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$, $D^2(x_0, x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots), \cdots$ şeklinde tanımlı *shift operatör* olsun. $m_0 = \{s \in m : Dst - s \in c_0\}$ diyelim. Şimdi m yi reel terimli sınırlı diziler uzayı olarak gözönüne alalım ve E, m nin $e = (1, 1, 1, \cdots) \in E$ ve $x \in E$, $Dx \in E$ olacak şekilde alt vektör uzayı olsun. $\pounds_E$, her $x \in E$ için

$$\begin{aligned} x \geq 0 \Rightarrow \quad & L(x) \geq 0 \\ L(e) = 1 & \\ L(Dx) = \quad & L(x) \end{aligned}$$

olacak şekilde bütün $L : E \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonellerin cümlesi olsun. Eğer $\pounds = \pounds_m$ dersek bir $L \in \pounds$ fonksiyoneline Banach limiti denir.

Tanım 1.1.21: Sınırlı reel bir (x_n) dizisi verildiğinde her L Banach limiti için $L(x_n) = x_0$ oluyorsa, (x_n) dizisine hemen hemen yakınsaktır denir ve x_0 sayısına bu dizinin F*-limiti* adı verilir (Lorentz, 1948). Hemen hemen yakınsak diziler uzayını F ile göstereceğiz. (x_n) dizisinin x_0 sayısına hemen hemen yakınsak olması, $F - limx = x_0$ veya $f - limx = x_0$ şeklinde gösterilir.

$x = (x_n)$ sınırlı bir dizi, p pozitif bir tamsayı ve $n_1, n_2, \cdots, n_p$ tamsayıların keyfi bir alt cümlesi olmak üzere q yu m üzerinde

$$q(x) := \inf_{n_1, n_2, \cdots, n_p} \lim_k \sup \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{n_i+k} \tag{1.1.2}$$

olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $q(x)$ fonksiyoneli m üzerinde altlineerdir (Petersen 1966, sh 56). Hahn-Banach Teoremi gereğince m üzerinde $L(x) \leq q(x)$ olacak şekilde bir L lineer fonksiyoneli vardır. Böylece $\pounds \neq \phi$ dir.

ϕ, E üzerinde bir altlineer fonksiyonel olsun. $\{E, \phi\}$ ile, E üzerinde her $x \in E$ için $L(x) \leq q(x)$ olacak şekildeki bütün L lineer fonksiyonellerinin cümlesini gösterelim. L lineer olduğundan bu özellik

$$-\phi(x) \leq L(x) \leq \phi(x)$$

olması ile eşdeğerdir.

Teorem 1.1.22: Bir $x = (x_n)$ sınırlı dizisinin hemen hemen yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart $-q(-x_n) = q(x_n)$ olmasıdır (Petersen 1966, sh 60).

Şimdi bu teoremi daha basit bir şekle dönüştüren ve kompleks terimli sınırlı dizilere de uygulanabilir hale getiren bir teoremi ifade edeceğiz.

Teorem 1.1.23: Bir $x = (x_n)$ sınırlı dizisinin hemen hemen yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+k-1}}{k} = s$$

olmasıdır (Petersen 1966, sh 60; Lorentz, 1948).

Yakınsak her dizi hemen hemen yakınsaktır, ancak bunun karşıtı doğru değildir.

Bu özellik her Banach limiti için gerçekleneceğinden $((-1)^n)$ dizisi sıfıra hemen hemen yakınsaktır. Fakat bu dizinin yakınsak olmadığı açıktır.

Tanım 1.1.24: Bir A matrisi bütün hemen hemen yakınsak dizileri yakınsak diziler içine dönüştürüyorsa ve $limAx = F - limx$ ise A matrisine kuvvetli regüler matris denir (Lorentz, 1948).

Teorem 1.1.25: Bir regüler $A = (a_{nk})$ matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0$$

olmasıdır (Lorentz, 1948).

Tanım 1.1.26: Her $x \in c$ için $F - limAx = limx$ ise; yani $A \in (c, F; p)$ ise A matrisine hemen hemen regüler matris denir (King, 1966).

Teorem 1.1.27: A matrisinin hemen hemen regüler olması için gerek ve yeter şart,

(i) $\|A\| = \sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$

(ii) $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum\limits_{j=n}^{n+p-1} a_{jk} = 0, (n$'ye göre düzgün olarak, $k = 0, 1, \cdots)$, yani $f - lima_{jk} = 0$ (her k için) ve

(iii) $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum\limits_{j=n}^{n+p-1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{jk} = 1, (n'$ye göre düzgün), yani $f - lim \sum\limits_k a_{jk} = 1$

olmasıdır (King, 1966).

Tanım 1.1.28: Eğer A hemen hemen yakınsak diziler uzayı olan F yi kendi içine dönüştürüyor ve $f - limAx = f - limx$ oluyorsa A matrisine F*-regülerdir* denir (Duran, 1972).

Teorem 1.1.29: A nın F-regüler olması için gerek ve yeter şart,

(i) $\sup\limits_n \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \|A\| < +\infty$

(ii) $F - \lim\limits_n \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$

(iii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $F - \lim\limits_n a_{nk} = 0$ mevcut

(iv) $\lim\limits_p \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p+1} |\sum(a_{n+i,k-1} - a_{n+i,k})| = 0$, ($n$ ye göre düzgün)

olmasıdır (Duran,1972).

Tanım 1.1.30: Eğer $A \in (\ell_\infty, F)$ ise A ya hemen hemen Schur matrisi denir.

Teorem 1.1.31: $A \in (\ell_\infty, F)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\|A\| = \sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$

(ii) Her n için $F - lima_{nk} = \alpha_k$ mevcut

(iii) $\lim\limits_p \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{p+1} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{n+i,k} - \alpha_k \right| = 0$ (n ye göre düzgün)

olmasıdır (Duran, 1972).

Tanım 1.1.32: Kompleks terimli matris dizisini $\mathcal{B}$ ile gösterelim ve bir $x = (x_k)$ dizisine karşılık her n ve $i \geq 0$ için $B_n^i(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{nk}(i)x_k$ mevcut olsun. $\mathcal{B}x = \left(B_n^i(x)\right)_{i,n=0}^{\infty}$ olmak üzere eğer i ye göre düzgün olarak $\lim\limits_n B_n^i(x) = s$ ise, x dizisi s değerine $(\mathcal{B})$ metodu ile toplanabilirdir denir ve bu durum $x \to s\,(\mathcal{B})$ şeklinde belirtilir.

Tanım 1.1.33: $x \to s$ olması, $x \to s^{'}$ $(\mathcal{B})$ olmasını gerektirirse $(\mathcal{B})$ metoduna konservatif ve ayrıca $s = s^{'}$ ise $(\mathcal{B})$ metoduna regülerdir denir (Stieglitz, 1973).

$\mathcal{B}$ metodunun konservatif olması için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 1.1.34: $\mathcal{B}$ metodunun konservatif olması için gerek ve yeter şart her n ve i için

(i) $\sum\limits_{k} |b_{nk}(i)| < \infty$ ve

(ii) $\sup\limits_{i \geq 0, n \geq m} \sum\limits_{k} |b_{nk}(i)| < \infty$

(iii) En az bir $b_k \in \mathbb{C}$ için $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k} b_{nk}(i) = b_k$ (i ye göre düzgün)

(iv) En az bir $b \in \mathbb{C}$ için $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k} b_{nk}(i) = b$ (i ye göre düzgün)

olmasıdır (Stieglitz, 1973).

Bu teoreme ek olarak eğer $b_k = 0$ ve $b = 1$ ise $(\mathcal{B})$ metodu regülerdir.

Uyarı: Her n ve her i için

$$\sum_{k} |b_{nk}(i)| \leq K$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı varsa ve her n için i ye göre düzgün olarak

$$\sum_{k} |b_{nk}(i)| < \infty$$

oluyorsa

$$\sup_{n,i} \sum_{k} |b_{nk}(i)| = \|\mathcal{B}\| < \infty$$

yazılır.

Lemma 1.1.35: $\|\mathcal{B}\| < \infty$ ve $\lim\limits_{n} \sup\limits_{i} |b_{nk}(i)| = 0$ olsun. Bu durumda

$$\limsup_{n} \sup_{i} \sum_{k} b_{nk}(i) y_k = \limsup_{n} \sup_{i} \sum_{k} |b_{nk}(i)|$$

olacak şekilde $\|y\| \leq 1$ olan $y \in \ell_{\infty}$ vardır (Das, 1987).

1.2 Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt cümlesinin kardinal sayısı $|A|$ ile gösterilsin, yani $|A| = cardA$ olsun.

Tanım 1.2.1:(Yoğunluk) $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $A_n := \{k \leq n : k \in A\} = A \cap \{1, 2, \cdots, n\}$ olsun. Eğer

$$\delta(A) := \lim_n \frac{|A_n|}{n}$$

limiti mevcut ise $\delta(A)$ sayısına A cümlesinin yoğunluğu denir (Niven ve Zuckerman, 1980, sh247).

Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

$$\chi_A(k) := \begin{cases} 1, & k \in A \\ 0, & k \in \mathbb{N} - A \end{cases}$$

A nın karakteristik fonksiyonu olmak üzere,

$$\delta(A) := \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(k)$$

mevcut ise A kümesi $\delta(A)$ doğal yoğunluğuna sahiptir denir.

$$\begin{array}{cccc} \delta: & P(\mathbb{N}) & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \rightarrow & \delta(A) = \lim_n \frac{|A_n|}{n} \end{array}$$

yoğunluk fonksiyonunun sağladığı özellikler kısaca şu şekilde verilebilir: $A, B \in P(\mathbb{N})$ için;

1) $\delta(\mathbb{N} - A) = 1 - \delta(A)$ dır.

2) $\delta(\mathbb{N}) = 1$ ve $\delta(\emptyset) = 0$ dır.

3) $A \subseteq B$ ise $\delta(A) \leq \delta(B)$ dir.

4) $A \sim B$ ise (yani $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ sonlu ise) $\delta(A) = \delta(B)$ dir.

5) A sonlu küme ise $\delta(A) = 0$ dır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk defa Fast (1951) tarafından verildi. Ve daha sonra çeşitli yazarlar tarafından genişletildi. Bunun öncülüğünü ise Fridy, Orhan ve Connor yapmıştır.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtalım ve bu kısımdaki teoremleri ispatsız olarak ifade edelim.

Tanım 1.2.2: $x = (x_k)$ reel yada kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{1.2.1}$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S)$ ile gösterilir.

Eğer $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir (Fast,1951). Bu tanımdaki (1.2.1) gösterimi $\delta(\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ şeklinde de ifade edilebilir.

Örnek 1.2.2: $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \ k = m^2 \ (m = 1, 2, ...) \\ 0 & , \ k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n : x_k \neq 0\}$$

olduğundan; her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Böylece $st - \lim x = 0$ olur.

Örnek 1.2.3:

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \ k = m^2 \ (m = 1, 2, ...) \\ 2 & , \ k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x = 2$ dir.

Burada istatistiksel yakınsaklık ile ordinary (Cauchy) yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olabileceği sorusu akla gelebilir. Cauchy anlamındaki yakınsaklığın, istatistiksel yakınsaklığı gerektireceği açıktır. Fakat yukarıdaki örneklerden de görüleceği gibi tersi doğru değildir.

Tanım 1.2.4: $A \subseteq N$ ve $\delta(A) = 0$ olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k \geq N$ ve her $k \notin A$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa , $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen her k için yakınsaktır denir (Buck, 1953).

Bu tanım ise istatistiksel yakınsaklık tanımından başka birşey değildir.

Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi, $K \subseteq \mathbb{N}$, $\delta(K) = 1$ olmak üzere her $k \in K$ için bir p özelliğine sahip ise bu durumda x dizisi hemen her k için p özelliğine sahiptir denir ve bu durum kısaca h.h.k. ile gösterilir.

Teorem 1.2.5: $st - \lim x = L_1$ ve $st - \lim y = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

(i) $st - \lim(x + y) = L_1 + L_2$

(ii) $st - \lim(\alpha x) = \alpha L_1$

dir (Fast,1951).

İlk kez 1985 de Fridy tarafından bir dizinin istatistiksel Cauchy dizisi tanımı verildi ve daha sonra istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel Cauchy dizilerin cümlesinin denk olduğu gösterildi.

Tanım 1.2.6: Her $\varepsilon > 0$ ve h.h.k. için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy, 1985).

Teorem 1.2.7: Aşağıdaki önermeler denktir.

(i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

(ii) x istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) h.h.k. için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi vardır (Fridy, 1985).

Teorem 1.2.8: $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $x = y + z$ olacak şekilde L sayısına yakınsak olan bir y dizisi ve istatistiksel sıfır z dizisi vardır (Connor, 1988).

Teorem 1.2.8 istatistiksel yakınsaklığın ayrışım teoremi olarak bilinir.

Sonuç 1.2.9: Bir x dizisi bir L noktasına istatistiksel yakınsak ise aynı noktaya Cauchy anlamında yakınsayan bir alt dizi içerir (Connor, 1988).

Aşağıda, Teorem 1.2.10 ve Teorem 1.2.11, istatistiksel yakınsaklık ile klasik toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri belirtmektedir.

Teorem 1.2.10: $st - limx = L$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq K$ ise $C_1 - limx = L$ dir. Yani sınırlı, istatistiksel yakınsak her dizinin aritmetik ortalaması da yakınsaktır (Schoenberg, 1959).

$x = (1, 0, 1, 0, ...)$ şeklinde tanımlanan bir dizinin aritmetik ortalaması $1/2$ ye yakınsaktır. Fakat dizinin kendisi istatistiksel yakınsak değildir. O halde teoremin karşıtı doğru değildir.

Teorem 1.2.11: Hiç bir toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez (Yani $A \in (st, c; p)$ olacak şekilde hiç bir matris yoktur) (Fridy, 1985).

Matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kesin bir sonuç elde etmek için matrislerin aşağıdaki sınıfını tanıtacağız.

Negatif olmayan alt üçgensel $A = (a_{nk})$ matrisi

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$

(ii) $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ olduğunda $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k} a_{nk} = 0$

koşullarını gerçeklerse, A matrisi τ sınıfına aittir denir. τ sınıfına ait her bir A matrisi negatif olmayan terimli olduğundan (i) ve (ii) koşulları A matrisinin regülerliğini garanti eder. Buna göre ilgili karakterizasyonu verebiliriz.

Teorem 1.2.12: Sınırlı bir x dizisi için $st - limx = L$ olması için gerek ve yeter şart her $A \in \tau$ için $A - limx = L$ olmasıdır (Fridy ve Miller, 1991).

Tanım 1.2.13: $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir denir.

Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin cümlesi w_p ile gösterilir. O halde $p > 0$ için

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C} \text{ için } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p \to 0, \ \ (n \to \infty) \right\}$$

dir.

Teorem 1.2.14: $p \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

(i) Bir dizi bir L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

(ii) Sınırlı bir dizi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir (Connor, 1988).

Sonuç 1.2.15: Sınırlı diziler üzerinde kuvvetli p-Cesàro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık denktir, yani $p > 0$ için $w_p \cap \ell_\infty = st \cap \ell_\infty$

Sonuç 1.2.16: Kompleks terimli bir x dizisi bir L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilir veya L sayısına istatistiksel yakınsak ise x, L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir (Connor, 1988).

Sonuç 1.2.17: x reel terimli bir dizi olsun. Bu durumda $\liminf_n x_n = L$ ve $C_1 - \lim x = L$ ise $x_n \to L(S)$ dir (Connor, 1988).

Teorem 1.2.18: $p > 0$ olsun. $A \in (\ell_\infty \cap w_p, c)$ olması için gerek ve yeter şart

$A \in (c,c)$ ve sıfır yoğunluğa sahip her E cümlesi için

$$\sum_{k \in E} |a_{nk} - a_k| \to 0, \quad (n \to \infty)$$

olmasıdır (Maddox, 1974).

Şimdi ise, $st_b = st \cap \ell_\infty$ istatistiksel yakınsak dizilerin bazı topolojik özelliklerinin ele alındığı iki teoremi ifade edelim.

Teorem 1.2.19: st_b uzayı ℓ_∞ normlu lineer uzayının kapalı bir alt lineer uzayıdır (Salat, 1980).

Teorem 1.2.20: st_b cümlesi ℓ_∞ içinde hiç bir yerde yoğun değildir (Salat, 1980).

1.3 İki Katlı Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda $x = (x_{jk})$ iki katlı dizisi için istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi tanımları verilecek ve bazı ilgili sonuçlar ispatlanacaktır.

Bir $x = (x_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$ iki katlı dizisi verildiğinde eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı $j, k \geq N$ iken $|x_{jk} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde varsa bu durumda $x = (x_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$ iki katlı dizisine Pringsheim anlamında yakınsaktır denir ve L ye de x in Pringsheim limiti denir (Pringsheim, 1900).

Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı tüm $p \geq j \geq N$, $q \geq k \geq N$ değerlerinde $|x_{pq} - x_{jk}| < \varepsilon$ olacak şekilde varsa bu durumda $x = (x_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Eğer her j ve k için $|x_{jk}| < M$, yani

$$\|x\|_{(\infty,2)} = \sup_{j,k} |x_{j,k}| < \infty \tag{1.3.1}$$

ise bu durumda x dizisine sınırlıdır denir. Tüm sınırlı iki katlı dizilerin kümesini ℓ_∞^2 ile göstereceğiz.

Not edelim ki, tek katlı dizilerin aksine, yakınsak bir iki katlı dizinin sınırlı olması gerekmemektedir.

$K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pozitif tamsayıların iki boyutlu bir kümesi ve $K(n,m)$ ise $i \leq n$ ve $j \leq m$ koşulunu sağlayan K ya ait tüm (i,j) ikililerinin sayısı olsun. Bu durumda doğal yoğunluğun iki boyutlu benzeri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Eğer, $(K(n,m)/nm)$ dizisinin Pringsheim anlamında limiti mevcut ise bu durumda, K kümesi iki katlı doğal yoğunluğa sahiptir denir ve

$$\underset{n,m}{lim}\frac{K(n,m)}{nm}=\delta_2(K)$$

ile tanımlanır. Örneğin, $K=\left\{\left(i^2,j^2\right):i,j\in\mathbb{N}\right\}$ kümesini alalım. Bu durumda

$$\delta_2(K)=\underset{n,m}{lim}\frac{K(n,m)}{nm}\leq\underset{n,m}{lim}\frac{\sqrt{n}\sqrt{m}}{nm}=0$$

olur. Yani K kümesinin iki katlı doğal yoğunluğu sıfırdır. $\{(i,2j):i,j\in\mathbb{N}\}$ kümesinin ise iki katlı doğal yoğunluğu 1/2 dir.

Eğer $n=m$ alınırsa, Cristopher (1956) tarafından ele alınan iki boyutlu doğal yoğunluğu elde ederiz.

$x=(x_{jk})$ iki katlı dizisi için istatistiksel yakınsaklığın iki katlı benzeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.3.1: Reel bir $x=(x_{jk})$ iki katlı dizisi verildiğinde eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\{(j,k),j\leq n \text{ ve } k\leq m:|x_{jk}-\ell|\geq\varepsilon\}$$

kümesinin iki katlı doğal yoğunluğu sıfıra eşit oluyorsa bu durumda x dizisi, ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st_2-lim_{j,k}x_{jk}=\ell$ şeklinde gösterilir. Tüm istatistiksel yakınsak iki katlı dizilerin kümesi ise st_2 ile gösterilecektir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Uyarı 1.3.2: **(a)** Eğer x yakınsak bir iki katlı dizi ise o zaman x aynı sayıya istatistiksel yakınsaktır. Gerçekten, eğer x yakınsaksa bu durumda sadece sonlu sayıda sınırlı (sınırsız) satırlar ve/veya sütunlar olduğundan, s_1 ve s_2 sonlu sayılar olmak üzere

$$K(n,m)\leq s_1n+s_2m$$

dir. Bu ise x dizisinin istatistiksel yakınsak olmasını gerektirir.

(b) Eğer x dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsak ise bu durumda ℓ tektir.

(c) Eğer x dizisi istatistiksel yakınsak ise bu durumda x in yakınsak olması gerekmez. Ayrıca sınırlı olması da gerekli değildir.

Örneğin, $x=(x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk}=\begin{cases} jk, & j \text{ ve } k \text{ kare ise}\\ 1, & \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, her $\varepsilon > 0$ için $|\{(j,k) : |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \sqrt{j}\sqrt{k}$ olduğundan $st_2 - lim x_{jk} = 1$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Fakat x ne yakınsak ne de sınırlı bir dizidir.

İki katlı diziler için, tek katlı diziler için benzeri Salát (1980) tarafından ispatlanan sonuçların benzerlerini ispatlayalım.

Teorem 1.3.3: Reel bir $x = (x_{jk})$ iki katlı dizisinin bir ℓ sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta_2(K) = 1$ ve

$$\lim_{\substack{j,k\to\infty \\ (j,k)\in K}} x_{jk} = \ell$$

olacak şekilde bir $K = \{(j,k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $j,k = 1,2,...$ alt kümesinin olmasıdır (Mursaleen ve Edely, 2003).

İspat: x, ℓ ye istatistiksel yakınsak olsun.

$$K_r = \left\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - \ell| \geq \frac{1}{r}\right\}$$

ve

$$M_r = \left\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - \ell| < \frac{1}{r}\right\}, r = 1,2,...$$

diyelim. Bu durumda $\delta_2(K_r) = 0$ ve

(1) $\quad M_1 \supset M_2 \supset ... \supset M_i \supset M_{i+1} \supset ...$

(2) $\quad \delta_2(M_r) = 1$

dir. Şimdi, $(j,k) \in M_r$ için (x_{jk}) nın ℓ ye yakınsak olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki (x_{jk}), ℓ ye yakınsak olmasın. Buna göre sonsuz çokluktaki terim için

$$|x_{jk} - \ell| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.

$$M_\varepsilon = \{(j,k) : |x_{jk} - \ell| < \varepsilon\} \text{ ve } \varepsilon > \frac{1}{r} \quad (r = 1,2,...)$$

diyelim. Bu durumda

(3) $\delta_2(M_\varepsilon) = 0$

(1) den $M_r \subset M_\varepsilon$ dur. Dolayısıyla $\delta_2(M_r) = 0$ olur ki bu (2) ile çelişir. O halde (x_{jk}), ℓ ye yakınsaktır.

Tersine, kabul edelim ki $\delta_2(K) = 1$ ve $\lim_{j,k} x_{jk} = \ell$ olacak şekilde bir $K = \{(j,k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümesi vardır. Yani her $\varepsilon > 0$ için tüm $j,k \geq N$ değerlerinde $|x_{jk} - \ell| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer

$$K_\varepsilon = \{(j,k) : |x_{jk} - \ell| \geq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(j_{N+1}, k_{N+1}), (j_{N+2}, k_{N+2}), ...\}$$

dersek

$$\delta_2(K_\varepsilon) \leq 1 - 1 = 0$$

olur. O halde x, ℓ ye istatistiksel yakınsaktır.■

Uyarı 1.3.4: Eğer $st_2 - \lim_{j,k} x_{jk} = \ell$ ise bu durumda $\lim_{j,k} y_{jk} = \ell$ ve $\delta_2\{(j,k) : x_{jk} = y_{jk}\} = 1$, yani hemen her k için $x_{jk} = y_{jk}$ olacak şekilde bir $y = (y_{jk})$ dizisi vardır.

Teorem 1.3.5: $st_2 \cap \ell_\infty^2$ uzayı, ℓ_∞^2 normlu uzayının bir kapalı altuzayıdır (Mursaleen ve Edely, 2003).

İspat: $x^{(nm)} \in st_2 \cap \ell_\infty^2$ ve $x^{(nm)} \to x \in \ell_\infty^2$ olsun. $x^{(nm)} \in st_2 \cap \ell_\infty^2$ olduğundan

$$st_2 - \lim_{j,k} x_{jk}^{(nm)} = a_{nm} \quad (n, m = 1, 2, ...)$$

olacak şekilde a_{nm} reel sayıları vardır. $x^{(nm)} \to x$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı her $p \geq n \geq N$, $q \geq m \geq N$ değerlerinde

$$\left| x^{(pq)} - x^{(nm)} \right| < \varepsilon/3 \tag{1.3.2}$$

olacak şekilde vardır. Burada $|.|$, bir vektör uzayındaki normu gösterir. Teorem 1.3.3 den $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin $\delta_2(K_1) = \delta_2(K_2) = 1$ ve

$$(1) \ \lim_{j,k} x_{jk_{(j,k)\in K_1}}^{(nm)} = a_{nm}$$

$$(2) \ \lim_{j,k} x_{jk_{(j,k)\in K_2}}^{(nm)} = a_{pq}$$

olacak şekilde K_1 ve K_2 alt kümeleri vardır.

$\delta_2(K_1 \cap K_2) = 1$ olduğundan $K_1 \cap K_2$ sonsuzdur.

$(k_1, k_2) \in K_1 \cap K_2$ alalım. (1) ve (2) den

$$\left| x_{k_1,k_2}^{(pq)} - a_{pq} \right| < \varepsilon/3 \tag{1.3.3}$$

ve

$$\left|x_{k_1,k_2}^{(nm)} - a_{nm}\right| < \varepsilon/3 \tag{1.3.4}$$

tür. Böylece herbir $p \geq n \geq N$ ve $q \geq m \geq N$ için (1.3.2)-(1.3.4) ten

$$\begin{aligned} |a_{pq} - a_{nm}| &\leq \left|a_{pq} - x_{k_1,k_2}^{(pq)}\right| + \left|x_{k_1,k_2}^{(pq)} - x_{k_1,k_2}^{(nm)}\right| + \left|x_{k_1,k_2}^{(nm)} - a_{nm}\right| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Buna göre (a_{nm}) bir Cauchy dizisidir ve böylece yakınsaktır.

$$(3)\ \lim_{n,m} a_{nm} = a$$

olsun. x in a ya istatistiksel yakınsak olduğunu göstermemiz gerekir. $x^{(nm)} \to x$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $N_1(\varepsilon)$, tüm $j, k \geq N_1(\varepsilon)$ değerleri için

$$\left|x_{jk}^{(nm)} - x_{jk}\right| < \varepsilon/3$$

olacak şekilde vardır. Ayrıca (3) ten, her $\varepsilon > 0$ için bir $N_2(\varepsilon)$, tüm $j, k \geq N_2(\varepsilon)$ değerleri için

$$|a_{jk} - a| < \varepsilon/3$$

olacak şekilde vardır.

Yine, $x^{(nm)}$, a_{nm} ye istatistiksel yakınsak olduğundan $\delta_2(K) = 1$ olan bir $K = \{(j,k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi ve her $\varepsilon > 0$ için bir $N_3(\varepsilon)$, tüm $j, k \geq N_3(\varepsilon)$, $(j,k) \in K$ için

$$\left|x_{jk}^{(nm)} - a_{nm}\right| < \varepsilon/3$$

olacak şekilde vardır. $max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\} = N_4(\varepsilon)$ olsun. Bu durumda verilen bir $\varepsilon > 0$ ve tüm $j, k \geq N_4(\varepsilon)$, $(j,k) \in K$ için

$$|x_{jk} - a| \leq \left|x_{jk}^{(nm)} - x_{jk}\right| + \left|x_{jk}^{(nm)} - a_{nm}\right| + |a_{jk} - a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece x, a ya istatistiksel yakınsak yani $x \in st_2 \cap \ell_\infty^2$ dir.

O halde $st_2 \cap \ell_\infty^2$, ℓ_∞^2 nin kapalı bir alt uzayıdır.■

Teorem 1.3.6: $st_2 \cap \ell_\infty^2$ uzayı ℓ_∞^2 de hiçbir yerde yoğun değildir (Mursaleen ve Edely, 2003).

İspat: Keyfi bir S normlu uzayının S den farklı olan her kapalı alt uzayı S de hiçbir yerde yoğun olduğundan, Neubrum ve diğ. (1968) Teorem 2.2 ye göre yalnızca $st_2 \cap \ell_\infty^2 \neq \ell_\infty^2$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & j \text{ ve } k \text{ çift} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. x in istatistiksel yakınsak olmadığı fakat sınırlı olduğu açıktır. Dolayısıyla $st_2 \cap \ell_\infty^2 \neq \ell_\infty^2$ dir.■

Fridy (1985) tek katlı istatistiksel Cauchy dizilerini tanımlamıştı. Bu kısımda iki katlı istatistiksel Cauchy dizileri tanımlanıp bazı benzer sonuçlar ispatlanacaktır.

Tanım 1.3.7: Reel bir $x = (x_{jk})$ iki katlı dizisi verildiğinde, eğer her $\varepsilon > 0$ için $N = N(\varepsilon)$ ve $M = M(\varepsilon)$ sayıları tüm $j, p \geq N$, $k, q \geq M$ için

$$\{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{pq}| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırolacak şekilde varsa bu durumda x dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Teorem 1.3.8: Reel bir $x = (x_{jk})$ iki katlı dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, x in istatistiksel Cauchy olmasıdır (Mursaleen ve Edely, 2003).

İspat: x dizisi bir ℓ sayısına istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - \ell| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. $|x_{NM} - \ell| \geq \varepsilon$ olacak şekilde N ve M sayıları seçelim. Şimdi ise,

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{NM}| \geq \varepsilon\}, \\ B_\varepsilon &= \{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - \ell| \geq \varepsilon\} \\ C_\varepsilon &= \{(j,k), j = N \leq n, k = M \leq m : |x_{NM} - \ell| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $A_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon \cup C_\varepsilon$ olur ki buradan $\delta_2(A_\varepsilon) \leq \delta_2(B_\varepsilon) + \delta_2(C_\varepsilon) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla x, istatistiksel Cauchy'dir.

Tersine, x, istatistiksel Cauchy olsun fakat istatistiksel yakınsak olmasın. Bu durumda A_ε kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olacak şekilde N ve M vardır. Dolayısıyla

$$E_\varepsilon = \{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{NM}| < \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu 1 dir. Özel olarak eğer $|x_{jk}-\ell|<\varepsilon/2$ ise

$$(*) \quad |x_{jk}-x_{NM}| \leq 2\,|x_{jk}-\ell| < \varepsilon$$

yazabiliriz. x, istatistiksel yakınsak olmadığından B_ε kümesinin doğal yoğunluğu 1 dir. Yani

$$\{(j,k)\,, j\leq n, k\leq m : |x_{jk}-\ell|<\varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. Böylece $(*)$ dan

$$\{(j,k)\,, j\leq n, k\leq m : |x_{jk}-x_{NM}|<\varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani A_ε kümesinin yoğunluğu 1 olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla x istatistiksel yakınsaktır.■

Teorem 1.3.2 ve Teorem 1.3.8 den, Fridy'nin (1985) sonucunun iki katlı diziler için istatistiksel benzeri aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 1.3.9: Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) x, ℓ ye istatistiksel yakınsaktır.

(b) x, istatistiksel Cauchy'dir.

(c) $\lim\limits_{j,k} y_{jk}=\ell$ olacak şekilde x in bir y altdizisi vardır (Mursaleen ve Edely, 2003).

Moricz (2003) Teorem 1.3.8 i (x_{jk}) iki katlı bir reel veya kompleks sayılar dizisi olduğu durum için ispatlamıştır.

Teorem 1.3.10: Bir (x_{jk}) iki katlı dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul istatistiksel Cauchy olmasıdır (Moricz, 2003).

İspat: *Gereklilik.* Alışılmış yakınsaklıkta olduğu gibi (x_{jk}) istatistiksel yakınsak iken, (x_{jk}) nın istatistiksel Cauchy olduğunu göstermek kolaydır.

Yeterlilik. Kabul edelim ki (x_{jk}) istatistiksel Cauchy olsun. (x_{jk}) nın istatistiksel yakınsak olduğunu ispatlayalım. $(\varepsilon_p : p=1,2,...)$ sıfıra yakınsak kesin azalan bir dizi olsun. (x_{jk}) istatistiksel Cauchy olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\left|\left\{j\leq n \text{ ve } k\leq m : \left|x_{jk}-x_{N_pM_p}\right|\geq\varepsilon_p\right\}\right|=0 \tag{1.3.5}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların kesin artan (N_p) ve (M_p) dizileri vardır. Açık olarak pozitif tamsayıların her bir (p,q) , $p \neq q$ ikilisi için

$$\left|x_{j_{pq}k_{pq}} - x_{N_pM_p}\right| < \varepsilon_p \text{ ve } \left|x_{j_{pq}k_{pq}} - x_{N_qM_q}\right| < \varepsilon_q$$

olacak şekilde $(j_{pq}, k_{pq}) \in \mathbb{N}^2$ ikilisi seçebiliriz. Bu durumda

$$\left|x_{N_pM_p} - x_{N_qM_q}\right| < \varepsilon_p + \varepsilon_q \to 0, (p,q \to \infty)$$

dır. Yani alışılmış anlamdaki $\left(x_{N_pM_p} : p = 1, 2, ...\right)$ dizisi Cauchy yakınsaklık kriterini gerçekler. Böylece $\left(x_{N_pM_p}\right)$ dizisi alışılmış anlamda bir sonlu limite sahiptir. Bu limite ξ diyelim. Sonuç olarak verilen keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_{p_0} < \varepsilon/2$ ve $p \geq p_0$ olmak üzere

$$\left|x_{N_pM_p} - \xi\right| < \varepsilon/2$$

olacak şekilde $p_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (1.3.5) den

$$|x_{jk} - \xi| \leq \left|x_{jk} - x_{N_{p_0}M_{p_0}}\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Böylece

$$\frac{1}{nm}\left|\{j \leq n \text{ ve } k \leq m : |x_{jk} - \xi| \geq \varepsilon\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{nm}\left|\left\{j \leq n \text{ ve } k \leq m : \left|x_{jk} - x_{N_{p_0}M_{p_0}}\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{nm}\left|\left\{j \leq n \text{ ve } k \leq m : \left|x_{jk} - x_{N_{p_0}M_{p_0}}\right| \geq \varepsilon_{p_0}\right\}\right| \to 0 \ , \quad (m,n \to \infty)$$

elde edilir.■

Ayrıca Moricz (2003), Connor'ın (1988) tek katlı diziler için verdiği ayrışım teoremini, Teorem 1.2.8, iki katlı dizilere genişletmiştir.

Teorem 1.3.11: Bir (x_{jk}) iki katlı dizisinin bir ξ sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$x_{jk} = u_{jk} + v_{jk} \tag{1.3.6}$$

$$\lim_{j,k\to\infty} u_{jk} = \xi \tag{1.3.7}$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \left|\{j \le n \text{ ve } k \le m : v_{jk} \ne 0\}\right| = 0 \tag{1.3.8}$$

olacak şekilde (u_{jk}) ve (v_{jk}) dizilerinin mevcut olmasıdır. Ayrıca eğer (x_{jk}) sınırlı ise bu durumda (u_{jk}) ve (v_{jk}) dizileride sınırlıdır.

İspat: *Gereklilik.* İstatististiksel yakınsaklıktan,

$$2N_p \le N_{p+1}, p = 1, 2, ... \tag{1.3.9}$$

ve $n, m \ge N_p$ ise

$$\frac{1}{nm} \left|\left\{j \le n \text{ ve } k \le m : |x_{jk} - \xi| > 2^{-p}\right\}\right| < 2^{-2p} \tag{1.3.10}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların bir $(N_p : p = 1, 2, ...)$ dizisini seçebiliriz.

u_{jk} dizisini şu şekilde tanımlayalım: Eğer $min\,(j,k) < N_1$ ise $u_{jk} := x_{jk}$ olsun. Herhangi p ve q pozitif tamsayıları için $N_p \le j < N_{p+1}$ ve $N_q \le k < N_{q+1}$ iken

$$u_{jk} := \begin{cases} x_{jk}, & |x_{jk} - \xi| < 2^{-min(p,q)} \text{ ise} \\ \xi, & |x_{jk} - \xi| \ge 2^{-min(p,q)} \text{ ise} \end{cases} \tag{1.3.11}$$

olsun. Sonuç olarak, $v_{jk} := x_{jk} - u_{jk}$ alınırsa (1.3.6) koşulu gerçeklenir. Şimdi (1.3.7) koşulunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $p > p_0$ için $2^{-p_0} < \varepsilon$ olacak şekilde ε seçelim. (1.3.11) den eğer $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, $N_p \le min\,(j,k) < N_{p+1}$, $p \ge p_0$ ise bu durumda

$$|u_{jk} - \xi| := \begin{cases} x_{jk} - \xi, & |x_{jk} - \xi| < 2^{-p} \text{ ise} \\ 0, & |x_{jk} - \xi| \ge 2^{-p} \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Herhangi bir durumda $j, k \ge N_{p_0}$ iken

$$|u_{jk} - \xi| < \varepsilon$$

olur. Böylece, (u_{jk}) dizisi ξ ye Pringsheim anlamında yakınsaktır.

Son olarak (1.3.8) i ispatlayalım. $min\,(j,k) < N_1$ ise $v_{jk} = 0$ olduğundan bazı $p, q \ge 1$ değerleri için

$$N_p \le m < N_{p+1} \text{ ve } N_q \le n < N_{q+1} \tag{1.3.12}$$

olduğunu kabul edebiliriz.

$r := min\,(p,q)$ olsun. (1.3.11) tanımından

$$\{j \leq m \text{ ve } k \leq n : v_{jk} \neq 0\}$$

$$= \{N_r \leq j \leq m \text{ ve } N_r \leq k \leq n : |x_{jk} - \xi| \geq 2^{-r}\}$$

$$\cup \bigcup_{s=1}^{r-1}[\{N_s \leq j \leq m \text{ ve } N_s \leq k < N_{s+1} : |x_{jk} - \xi| \geq 2^{-s}\}$$

$$\cup \{N_s \leq j < N_{s+1} \text{ ve } N_s \leq k \leq n : |x_{jk} - \xi| \geq 2^{-s}\}]$$

olur. (1.3.9) ve (1.3.10) kullanılırsa $r := min\,(p,q) \to \infty$ veya denk olarak $n, m \to \infty$ için

$$\tfrac{1}{nm}\,|\{j \leq n \text{ ve } k \leq m : v_{jk} \neq 0\}|$$

$$\leq 2^{-2r} + \sum_{s=1}^{r-1}[\tfrac{N_{s+1}}{n+1}2^{-2s} + \tfrac{N_{s+1}}{m+1}2^{-2s}]$$

$$\leq 2^{-2r} + [\tfrac{N_r}{n+1} + \tfrac{N_r}{m+1}]\sum_{s=1}^{r-1}2^{-2s-(r-1-s)}$$

$$< 2^{-2r} + 2^{-r+1} \to 0$$

elde edilir. Bu ise (1.3.7) yi ispatlar.

Yeterlilik. (1.3.7) den

$$st - lim v_{jk} = 0 \tag{1.3.13}$$

dır. Böylece (1.3.6) ve (1.3.13) den toplamsallık özelliği ile dizinin istatistiksel yakınsaklığı elde edilir. ■

Aşağıdaki tanım ve teoremler (x_{jk}) nın iki katlı bir reel dizi olduğu durum için verilmiştir.

Tanım 1.3.12: $x = (x_{jk})$ iki katlı bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n,m}\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}x_{jk} = \ell$$

oluyorsa bu durumda x dizisi ℓ sayısına Cesàro toplanabilirdir denir.

Tüm Cesàro toplanabilir iki katlı dizilerin uzayı $(C,1,1)$ ile gösterilecektir.

Benzer şekilde tek katlı dizilerdeki gibi aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1.3.13: $x = (x_{jk})$ iki katlı bir dizi ve p, pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |x_{jk} - \ell|^p = 0$$

oluyorsa bu durumda x dizisi ℓ sayısına kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir denir.

Tüm kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı ω_p^2 ile gösterilecektir.

Uyarı 1.3.14: **(i)** Eğer $0 < p \leq q < \infty$ ise bu durumda (Hölder eşitsizliğinden) $\omega_q^2 \subseteq \omega_p^2$ dir. Ayrıca

$$\omega_p^2 \cap \ell_\infty^2 = \omega_1^2 \cap \ell_\infty^2 \subseteq (C,1,1) \cap \ell_\infty^2$$

dir.

(ii) Eğer x yakınsak fakat sınırsız ise bu durumda x istatistiksel yakınsaktır fakat x in Cesàro toplanabilir veya kuvvetli Cesàro toplanabilir olması gerekmez.

Örnek 1.3.15: $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} k, & j = 1, \text{ her } k \text{ için} \\ j, & k = 1, \text{ her } j \text{ için} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $lim_{j,k} x_{jk} = 0$, fakat

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_{jk} = \lim_{n,m} \frac{1}{nm} \frac{1}{2} \left(m^2 + n^2 + m + n - 2\right)$$

dir. Bu limit sonlu olmadığından x Cesàro toplanabilir değildir. Ayrıca x kuvvetli Cesàro toplanabilir değildir. Fakat

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \left|(j,k) : |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\right| = \lim_{n,m} \frac{m+n-1}{nm} = 0$$

olduğundan x sıfıra istatistiksel yakınsaktır.

(iii) Eğer x sınırlı yakınsak bir iki katlı dizi ise aynı zamanda $(C,1,1)$, ω_p^2 ve st_2 dir.

Aşağıdaki sonuç, Connor (1988) Teorem 1.2.14 ün bir benzeridir.

Teorem 1.3.16: $x = (x_{jk})$ iki katlı bir dizi ve p, pozitif bir reel sayı olsun. Bu durumda

(a) Eğer x dizisi ℓ sayısına kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir ise x, ℓ ye istatistiksel yakınsaktır.

(b) $\omega_p^2 \cap \ell_\infty^2 = st_2 \cap \ell_\infty^2$ dir (Mursaleen ve Edely, 2003).

İspat: **(a)** $K_\varepsilon(p) = \{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - \ell|^p \geq \varepsilon\}$ olsun. x dizisi ℓ sayısına kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir olduğundan

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \quad \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|x_{jk}-\ell|^p &= \frac{1}{nm}\left\{\sum_{(j,k)\in K_\varepsilon(p)}|x_{jk}-\ell|^p + \sum_{(j,k)\notin K_\varepsilon(p)}|x_{jk}-\ell|^p\right\} \\ &\geq \frac{1}{nm}\left|\{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk}-\ell|^p \geq \varepsilon\}\right|\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla x, ℓ ye istatistiksel yakınsaktır.

(b) $I_\varepsilon(p) = \left\{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - \ell| \geq (\varepsilon/2)^{1/p}\right\}$ ve $M = \|x\|_{(\infty,2)} + |\ell|$ olsun. x, sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizi olduğundan her $n, m \geq N$ için

$$\frac{1}{nm}\left|\left\{(j,k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - \ell| \geq (\varepsilon/2)^{1/p}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ seçebiliriz. Buna göre her $n, m \geq N$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|x_{jk}-\ell|^p &= \frac{1}{nm}\left\{\sum_{(j,k)\in I_\varepsilon(p)}|x_{jk}-\ell|^p + \sum_{(j,k)\notin I_\varepsilon(p)}|x_{jk}-\ell|^p\right\} \\ &< \frac{1}{nm}\left\{|I_\varepsilon(p)|\,M^p + (nm - |I_\varepsilon(p)|)\,\tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &< \frac{1}{nm}\left(\frac{nm\varepsilon}{2M^p}M^p + nm\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece x dizisi ℓ sayısına kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir.■

Uyarı 1.3.17: Sınırlı bir x dizisi istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda $(C,1,1)$ toplanabilirdir. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 1.3.18: $x = (x_{jk})$ dizisi her k için $x_{jk} = (-1)^j$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\lim_{n,m}\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}x_{jk} = 0$$

fakat açık olarak x istatistiksel yakınsak değildir.

1.4 Tauberian Teoremleri

A herhangi bir toplanabilme (limitleme) metodu olsun. Bir dizi üzerinde, dizinin $A-$toplanabilirliğinin dizinin yakınsaklığını gerektirdiği herhangi bir ek koşula Tauberian koşulu denir. Bu koşulun geçerliliğini gösteren teoreme de Tauberian teoremi denir.

Bu kısımda, ilk olarak istatistiksel yakınsaklıkla ilgili, önemli bazı Tauberian teoremlerini ifade edelim. Burada $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ olarak alınacaktır.

Teorem 1.4.1: Eğer $limCx = L$ ve $\Delta x_k = O(1/k)$ ise bu durumda $limx = L$ dir (Hardy, 1910).

Teorem 1.4.2: Eğer x, $st - limx_k = L$ ve $\Delta x_k = O(1/k)$ olacak şekilde bir dizi ise $limx_k = L$ dir (Fridy, 1985)

Teorem 1.4.3: Eğer r_k, $\{kr_k\}$ sınırsız (yani $r_k \neq O(1/k)$) olacak şekilde pozitif sayıların azalan bir dizisi ise $st - limx_k = 0$ ve $\Delta x_k = O(r_k)$ olacak şekilde bir x dizisi vardır, fakat x yakınsak değildir (Fridy, 1985).

Teorem 1.4.4: $lim\inf_i \dfrac{k(i+1)}{k(i)} > 1$ olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\{(k_i)\}_{i=1}^{\infty}$ ve $x = (x_k)$ bir boşluk dizisi (yani $i = 1, 2, \ldots$ için $k \neq k\,(i)$ ise $\Delta x_k = 0$) olsun. Eğer $x_k \to L(S)$ ise $x_k \to L$ dir (Fridy, 1985).

Sonuç 1.4.5: $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p-cesàro toplanabilir veya L ye istatistiksel yakınsak ve $\Delta x_k = O(\frac{1}{k})$ ise $x = (x_k)$ dizisi L ye yakınsaktır (Connor, 1988)

Lemma 1.4.6: Eğer x dizisi $\Delta x_k = O(1/k)$ koşulunu sağlıyorsa bu durumda $(\Delta Cx)_n = O(1/n)$ dir (Fridy ve Khan, 2000).

Teorem 1.4.7: Eğer x dizisi $st - limCx = L$ ve $\Delta x_k = O(1/k)$ koşullarını sağlıyorsa bu durumda $limx = L$ dir (Fridy ve Khan, 2000).

Teorem 1.4.8: Eğer x dizisi $st - limx = L$ ve bazı $c > 0$ ve her k için $k\Delta x_{k+1} \geq -c$ koşullarını sağlıyorsa bu durumda $limx = L$ dir (Fridy ve Khan, 2000).

Fridy ve Khan (2000), Hardy'nin (1910) ve Landau'nun (1910) Tauberian teoremlerini istatistiksel yakınsaklık durumuna genişlettiler.

(x_k) reel yada kompleks sayılar dizisi olsun ve onun aritmetik ortalaması

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k, (n = 0, 1, 2, ...)$$

ile verilsin. Bu kısımda,

$$st - lim\sigma_n = L \tag{1.4.1}$$

iken

$$st - limx_k = L \tag{1.4.2}$$

elde edebilmek için gerekli ve yeterli koşullar verilecektir (Burada L sonlu bir sayıdır). Eğer (x_k) bir reel sayı dizisi ise o zaman bu koşullar tek taraflı Tauberian koşullarıdır. Eğer (x_k) bir kompleks sayı dizisi ise bu durumda da koşullar iki taraflı Tauberian koşulları olacaktır. Özel olarak (x_k) dizisi reel, istatistiksel yavaş azalan (artan) veya kompleks , istatistiksel yavaş salınımlı (tanımları aşağıda verildi) ise koşullar yine gerçeklenir. Eğer $st - lim\sigma_n = L$ ise bu durumda (x_k) dizisi L ye istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilirdir.

Schoenberg (1959), eğer bir (x_k) dizisi sınırlı ise bu durumda

$$st - limx_k = L \Rightarrow st - lim\sigma_n = L$$

olduğunu ispatladı.

Burada ilk olarak ters gerektirmenin gerçekleneceği koşullar bulunmaya çalışılacaktır. İlk önce reel sayılar dizisi için tek taraflı Tauberian koşullarını formülüze edelim.

Teorem 1.4.9. (x_k) reel sayıların sonlu bir limit değerine istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilir bir dizisi olsun. Bu durumda (x_k) dizisinin aynı limit değerine istatistiksel yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart aşağıdaki iki koşulun geçeklenmesidir: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \le N : \frac{1}{\lambda_n - n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} (x_k - x_n) \le -\varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{1.4.3}$$

ve

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \le N : \frac{1}{n - \lambda_n} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} (x_n - x_k) \le -\varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{1.4.4}$$

Burada λ_n ile, $\lambda_n := [\lambda n]$ sembolüne sahip λn çarpımının tam kısmı (integral kısmı) gösterilmektedir (Moricz, 2002).

Uyarı 1. Teorem 1.4.9 un ispatından (aşağıda) daha fazlasının doğru olduğu çıkar: Eğer (1.4.2) ve (1.4.1) (denk olarak (1.4.3)-(1.4.4)) koşulları gerçeklenirse bu durumda her $\lambda > 1$ için

$$st - lim \frac{1}{\lambda_n - n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} (x_k - x_n) = 0 \tag{1.4.5}$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$st - lim \frac{1}{n - \lambda_n} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} (x_n - x_k) = 0 \tag{1.4.6}$$

dır.

Uyarı 2. Teorem 1.4.9 un ispatı biraz değiştirilebilir, böylece eğer (1.4.3) ve (1.4.4) koşulları aşağıdaki koşullarla yer değiştirilirse Teorem 1.4.9 geçerli kalır. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\underset{\lambda>1}{inf} \; \underset{N\to\infty}{limsup} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \frac{1}{\lambda_n - n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} (x_k - x_n) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{1.4.3$'$}$$

ve

$$\underset{0<\lambda<1}{inf} \; \underset{N\to\infty}{limsup} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \frac{1}{n - \lambda_n} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} (x_n - x_k) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{1.4.4$'$}$$

Schmidt'e (1925) göre, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\underset{\lambda>1}{inf} \; \underset{N\to\infty}{limsup} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \underset{n<k\leq\lambda_n}{min} (x_k - x_n) \leq -\varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{1.4.7}$$

ve

$$\underset{0<\lambda<1}{inf} \; \underset{N\to\infty}{limsup} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \underset{\lambda_n<k\leq n}{min} (x_n - x_k) \leq -\varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{1.4.8}$$

oluyorsa bu durumda (x_k) dizisine istatistiksel yavaş azalan dizi denir.

Uyarı 3. (1.4.7) ve (1.4.8) koşullarının denk olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için, sabit $\varepsilon > 0$ alalım ve $\lambda > 1$ için

$$I(\lambda) := \underset{N\to\infty}{limsup} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \underset{n<k\leq\lambda_n}{min} (x_k - x_n) \leq -\varepsilon \right\} \right|$$

ve $0 < \lambda < 1$ için

$$I(\lambda) := \underset{N\to\infty}{limsup} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \underset{\lambda_n<k\leq n}{min} (x_n - x_k) \leq -\varepsilon \right\} \right|$$

tanımlayalım. $0 < \lambda < 1$ için $I(\lambda)$ nın azalan ve $\lambda > 1$ için artan olduğu açıktır. Buna göre (1.4.7) de $inf_{\lambda>1}$, $lim_{\lambda\to1+0}$ ile ve (1.4.8) de $inf_{0<\lambda<1}$, $lim_{\lambda\to1-0}$ ile yer değiştirilebilir.

İlk önce $\lambda > 1$ için $I(1/\lambda) \leq I(\lambda)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten, doğal sayıların bir $\{N_p : p = 1, 2, ...\}$ artan dizisi için

$$I(1/\lambda) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{N_p + 1} \left| \left\{ n \leq N_p : \min_{[k/\lambda]<n\leq k} (x_k - x_n) \leq -\varepsilon \right\} \right|,$$

ve her $\lambda > 1$, k ve n için

$$[k/\lambda] < n < k \Rightarrow n < k \leq [\lambda n]$$

dir. Böylece özel olarak $I(1-0) \leq I(1+0)$ elde edilir.

İkinci olarak, eğer $1 < \lambda_1 < \lambda$ ise $\lambda_1 := (1+\lambda)/2$ olsun. Bu durumda $I(\lambda_1) \leq I(1/\lambda)$ olduğunu gösterelim. Bu kez yukarıdakinden farklı olarak $\{N_p\}$ artan dizisi için

$$I(\lambda_1) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{N_p + 1} \left| \left\{ n \leq N_p : \min_{n<k\leq[\lambda_1 n]} (x_k - x_n) \leq -\varepsilon \right\} \right|$$

elde ederiz ve her bir $1 < \lambda_1 < \lambda$, k ve n için

$$n < k \leq [\lambda_1 n] \Rightarrow [k/\lambda] < n < k$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned} I(\lambda_1) &\leq \limsup_{p\to\infty} \tfrac{1}{N_p+1} \left| \left\{ n \leq N_p : \min_{[k/\lambda]<n\leq k} (x_k - x_n) \leq -\varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \lambda_1 I(1/\lambda) \end{aligned}$$

olur. Özel olarak, $I(1+0) \leq I(1-0)$ elde edilir. Böylece $I(1-0) = I(1+0)$ sonucuna ulaşırız. Bu ise (1.4.7) ve (1.4.8) koşullarının denkliğinin ispatını tamamlar.

Açık olarak, (1.4.3) ve (1.4.4) koşulları sırasıyla (1.4.7) ve (1.4.8) koşullarından elde edilir. Böylece Teorem 1.4.9 aşağıdakini gerektirir.

Sonuç 1.4.10: (x_k) reel sayıların istatistiksel yavaş azalan bir dizisi olsun. Bu durumda

$$st - lim\sigma_n = L \Rightarrow st - limx_k = L \tag{1.4.9}$$

dır (Moricz, 2002).

Landau'nun (1910) klasik tek taraflı Tauberian koşulu gerçeklendiğinde (1.4.7) koşulunun gerçeklendiği kontrol edilebilir. Gerçekten, pozitif bir H sabiti yeterince büyük her k için ($k > N_1$ diyelim)

$$k\left(x_k - x_{k-1}\right) \geq -H \tag{1.4.10}$$

olacak şekilde mevcut olsun. Bu durumda verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\lambda := e^{\varepsilon/H}$ seçelim. $N_1 < n < k \leq \lambda_n$ için (1.4.10) dan

$$x_k - x_n = \sum_{\ell=n+1}^{k} \left(x_\ell - x_{\ell-1}\right) \geq -\sum_{\ell=n+1}^{k} \frac{H}{\ell} \geq -Hln\lambda = -\varepsilon$$

elde ederiz. Böylece $N > N_1$ için

$$\left\{N_1 \leq n \leq N : \underset{n<k\leq\lambda_n}{min} \left(x_k - x_n\right) \leq -\varepsilon\right\}$$

kümesi boştur. Dolayısıyla (1.4.7) koşulu gerçeklenir.

Uyarı 4. Fridy ve Khan (2000), eğer (1.4.10) koşulu gerçeklenirse bu durumda (1.4.9) gerektirmesinin sağlandığını, ayrıca

$$st - limx_k = L \Rightarrow limx_k = L \tag{1.4.11}$$

olduğunu gösterdi.

Uyarı 5. Bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\underset{\lambda>1}{inf}\ \underset{N\to\infty}{limsup} \frac{1}{N+1} \left|\left\{n \leq N : \underset{n<k\leq\lambda_n}{max} \left(x_k - x_n\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{1.4.7$'$}$$

veya denk olarak (uyarı 3 ten)

$$\underset{0<\lambda<1}{inf}\ \underset{N\to\infty}{limsup} \frac{1}{N+1} \left|\left\{n \leq N : \underset{\lambda_n<k\leq n}{max} \left(x_n - x_k\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{1.4.8$'$}$$

oluyorsa bu durumda x dizisinin istatistiksel yavaş artan bir dizi olduğunu söyleyebiliriz.

Uyarı 6. $(1.4.3^{'})$ ve $(1.4.4^{'})$ koşulları açık olarak sırasıyla $(1.4.7^{'})$ ve $(1.4.8^{'})$ koşullarından elde edilir. O yüzden, "azalan" terimi "artan" terimi ile değiştirildiğinde Sonuç 1.4.10 geçerli kalır. Ayrıca yeterince büyük her k için

$$k\left(x_k - x_{k-1}\right) \leq H$$

olacak şekilde pozitif bir H sayısı varsa o zaman $(1.4.7^{'})$ koşulu gerçeklenir ((1.4.10) dan).

Şimdi kompleks sayı dizileri için iki taraflı Tauberian koşullarını formülüze edelim.

Teorem 1.4.11: (x_k) kompleks sayıların sonlu bir limit değerine istatistiksel $(C,1)$ toplanabilir bir dizisi olsun. Bu durumda (x_k) dizisinin aynı limit değerine istatistiksel yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart aşağıdaki iki koşulun gerçeklenmesidir: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\left|\left\{n \le N : \left|\frac{1}{\lambda_n - n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}(x_k - x_n)\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0 \qquad (1.4.12)$$

veya

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\left|\left\{n \le N : \left|\frac{1}{n - \lambda_n}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}(x_n - x_k)\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0 \qquad (1.4.13)$$

olmasıdır (Moricz, 2002).

Üstelik, (1.4.1) ve (1.4.2) koşulları gerçeklenirse bu durumda her $\lambda > 1$ için (1.4.5) i ve $0 < \lambda < 1$ için (1.4.6) yı elde ederiz.

Teorem 1.4.9 da olduğu gibi Teorem 1.4.11 den de benzer sonuçlar çıkarılabilir. Hardy (1910) tanımına göre, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\left|\left\{n \le N : \max_{n<k\le\lambda_n} |x_k - x_n| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0 \qquad (1.4.14)$$

veya denk olarak (uyarı 3 ten)

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\left|\left\{n \le N : \max_{\lambda_n<k\le n} |x_n - x_k| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0 \qquad (1.4.15)$$

oluyorsa bu durumda (x_k) kompleks dizisine istatistiksel yavaş salınımlıdır denir.

(1.4.12) ve (1.4.13) koşullarının (1.4.14) ve (1.4.15) koşullarından çıktığı açıktır. Böylece aşağıdaki sonuç Teorem 1.4.11 in bir sonucudur.

Sonuç 2. (x_k) kompleks sayıların istatistiksel yavaş salınımlı bir dizisi olsun. Bu durumda (1.4.9) gerektirmesi sağlanır.

Yeterince büyük tüm k değerleri için eğer

$$k\,|x_k - x_{k-1}| \le H$$

olacak şekilde bir H sabiti varsa o zaman (1.4.14) koşulu gerçeklenir ((1.4.10) dan). Bu Hardy'nin (1910) klasik iki taraflı Tauberian koşuludur.

İspatlara geçmeden önce, ilk olarak üç tane lemma verelim. Bunlardan birincisi istatistiksel limit bağıntısının toplamsal ve homojen olduğunu ifade eden bilinen bir lemmadır.

Lemma 1.4.12: Eğer

$$st - lim x_k = L_1 \text{ ve } \; st - lim y_k = L_2$$

ise bu durumda

$$st - lim(x_k + y_k) = L_1 + L_2,$$

ve eğer c bir sabit ise bu durumda

$$st - lim(cx_k) = cL_1$$

dir.

Sıradaki lemmanın Teorem 1.4.9 un ve Teorem 1.4.11 in ispatlarında önemli bir rolü vardır.

Lemma 1.4.13: Eğer bir (x_k) dizisi sonlu bir L sayısına istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilir ise bu durumda her bir $\lambda > 0$ için

$$\lambda_n := [\lambda n] \text{ olmak üzere } \; st - lim \sigma_{\lambda_n} = L \tag{1.4.16}$$

dir (Moricz, 2002).

İspat. $\lambda > 1$ *durumu.* Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \leq N : |\sigma_{\lambda_n} - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{n \leq \lambda_N : |\sigma_n - L| \geq \varepsilon\}$$

olduğu açıktır. $\lambda N + \lambda \geq \lambda_N + 1$ ve de $1/(N+1) \leq \lambda/(\lambda_N + 1)$ olduğundan

$$\frac{1}{N+1} |\{n \leq N : |\sigma_{\lambda_n} - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{\lambda}{\lambda_N + 1} |\{n \leq \lambda_N : |\sigma_n - L| \geq \varepsilon\}|$$

olur. Böylece (1.4.16) elde edilir.

$0 < \lambda < 1$ *durumu.* σ_m dizisinin $(\sigma_{\lambda_n} : n = 0, 1, 2, ...)$ dizisi ile aynı terimlerinin $1 + \lambda^{-1}$ den daha fazla sayıda olamayacağını iddia ediyoruz. Gerçekten, herhangi k ve l tamsayıları için

$$m = \lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_{k+l-1} = \lambda_{k+l}$$

veya denk olarak

$$m \leq \lambda k < \lambda(k+1) < ... < \lambda(k+l-1) < m+1 \leq \lambda(k+l)$$

dir. Bu durumda $m \leq \lambda k$ olduğundan

$$m + \lambda(l-1) \leq \lambda(k+l-1) < m+1$$

ve buradan $\lambda(l-1) < 1$, yani $l < 1 + \lambda^{-1}$ elde edilir. Buna göre,

$$(\lambda_N + 1) / (N+1) \leq 2\lambda$$

olacak şekildeki yeterince büyük N için

$$\frac{1}{N+1} \left| \{ n \leq N : |\sigma_{\lambda_n} - L| \geq \varepsilon \} \right| \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{\lambda_N + 1}{N+1} \frac{1}{\lambda_N + 1} \left| \{ n \leq \lambda_N : |\sigma_n - L| \geq \varepsilon \} \right|$$

olur. Bu durumda da (1.4.16) elde edilir.

Lemma 1.4.14: Eğer bir (x_k) dizisi sonlu bir L sayısına istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilir ise bu durumda her bir $\lambda > 1$ için

$$st - lim \frac{1}{\lambda_n - n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} x_k = 0 \qquad (1.4.17)$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$st - lim \frac{1}{n - \lambda_n} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} x_k = 0 \qquad (1.4.18)$$

dir (Moricz, 2002).

İspat. $\lambda > 1$ *durumu.* σ_n nin tanımına bağlı olarak, $\lambda > 1$ ve $\lambda_n > n$ olmak üzere n yeterince büyük ise bu durumda,

$$\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} x_k = (\lambda_n + 1)\sigma_{\lambda_n} - (n+1)\sigma_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n - n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} x_k &= \frac{1}{n-\lambda_n} \left[(\lambda_n + 1)\sigma_{\lambda_n} - (n+1)\sigma_n + (\lambda_n + 1)\sigma_n - (\lambda_n + 1)\sigma_n \right] \\
&= \frac{1}{n-\lambda_n} \left[(\lambda_n + 1)(\sigma_{\lambda_n} - \sigma_n) + \sigma_n(\lambda_n - n) \right] \\
&= \sigma_n + \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - n} (\sigma_{\lambda_n} - \sigma_n)
\end{aligned} \qquad (1.4.19)$$

dir. Buna göre (1.4.17) eşitliği, (1.4.1) den, Lemma 1.4.12 ve Lemma 1.4.13 ten ve yeterince büyük n değeri için

$$\frac{\lambda_n+1}{\lambda_n-n} \leq \frac{2\lambda}{\lambda-1} \tag{1.4.20}$$

olmasından çıkar.

$0<\lambda<1$ *durumu.* $0<\lambda<1$ ve $\lambda_n<n$ olmak üzere yeterince büyük n için

$$\frac{1}{n-\lambda_n}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} x_k = \sigma_n + \frac{\lambda_n+1}{n-\lambda_n}\left(\sigma_n-\sigma_{\lambda_n}\right) \tag{1.4.21}$$

eşitliğinden ve yeterince büyük n için

$$\frac{\lambda_n+1}{n-\lambda_n} \leq \frac{2\lambda}{1-\lambda} \tag{1.4.22}$$

eşitsizliğinden çıkar.

Teorem 1.4.9' un İspatı. *Gereklilik.* (1.4.1) ve (1.4.2) nin gerçeklendiğini kabul edelim. Lemma 1.4.12 ve Lemma1.4.14 ü uygulayarak her $\lambda>1$ için (1.4.5) ve her $0<\lambda<1$ için (1.4.6) elde edilir.

Yeterlilik. (1.4.1), (1.4.3) ve (1.4.4) ün gerçeklendiğini kabul edelim. (1.4.2) yi ispatlamak için

$$st-lim\,(x_n-\sigma_n)=0 \tag{1.4.23}$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. İlk önce $\lambda>1$ durumunu ele alalım. (1.4.19) dan

$$x_n-\sigma_n = \frac{\lambda_n+1}{\lambda_n-n}\left(\sigma_{\lambda_n}-\sigma_n\right) - \frac{1}{\lambda_n-n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}\left(x_k-x_n\right) \tag{1.4.24}$$

elde ederiz. Böylece herhangi $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}\{n\leq N: x_n-\sigma_n\geq\varepsilon\} \quad \subseteq \quad & \left\{n\leq N: \tfrac{\lambda_n+1}{\lambda_n-n}\left(\sigma_{\lambda_n}-\sigma_n\right)\geq\tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \\ \cup \quad & \left\{n\leq N: \tfrac{1}{\lambda_n-n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}\left(x_k-x_n\right)\leq-\tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

dir. Verilen herhangi bir $\delta>0$ için, (1.4.3) ten

$$\underset{N\to\infty}{limsup}\frac{1}{N+1}\left|\left\{n\leq N: \frac{1}{\lambda_n-n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}\left(x_k-x_n\right)\leq-\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\leq\delta \tag{1.4.26}$$

olacak şekilde $\lambda > 1$ vardır. Diğer taraftan, Lemma 1.4.12 ve Lemma 1.4.13 , (1.4.20) den

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \le N : \left| \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - n} (\sigma_{\lambda_n} - \sigma_n) \right| \ge \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| = 0 \tag{1.4.27}$$

elde ederiz. (1.4.25)-(1.4.27) birleştirilirse

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \{ n \le N : x_n - \sigma_n \ge \varepsilon \} \right| \le \delta$$

olur. Bu her $\delta > 0$ için doğrudur. Sonuç olarak her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \{ n \le N : x_n - \sigma_n \ge \varepsilon \} \right| = 0 \tag{1.4.28}$$

elde edilir.

Şimdi ise $0 < \lambda < 1$ durumunu ele alalım. (1.4.21) den

$$x_n - \sigma_n = \frac{\lambda_n + 1}{n - \lambda_n} (\sigma_n - \sigma_{\lambda_n}) - \frac{1}{n - \lambda_n} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} (x_n - x_k) \tag{1.4.29}$$

dır. Böylece herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \{ n \le N : x_n - \sigma_n \ge \varepsilon \} \quad \subseteq \quad & \left\{ n \le N : \tfrac{\lambda_n+1}{n-\lambda_n} (\sigma_n - \sigma_{\lambda_n}) \le -\tfrac{\varepsilon}{2} \right\} \\ \cup \quad & \left\{ n \le N : \tfrac{1}{n-\lambda_n} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} (x_n - x_k) \le -\tfrac{\varepsilon}{2} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki benzer düşünceyi kullanarak, Lemma 1.4.12 ve Lemma 1.4.13, (1.4.4) ve (1.4.22) den

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \{ n \le N : x_n - \sigma_n \le -\varepsilon \} \right| = 0 \tag{1.4.30}$$

sonucuna ulaşırız. (1.4.28) ve (1.4.30) birleştirilirse her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \{ n \le N : |x_n - \sigma_n| \ge \varepsilon \} \right| = 0$$

elde edilir. Bu ise (1.4.9) u ispatlar. Böylece Lemma1.4.12 ile (1.4.1) ve (1.4.23) den (1.4.2) yi elde ederiz.■

Teorem 1.4.11'in İspatı. *Gereklilik.* Eğer (1.4.1) ve (1.4.2) aynı anda gerçeklenirse bu durumda Lemma 1.4.12 her $\lambda > 1$ için (1.4.5) i, her $0 < \lambda < 1$ için (1.4.6) yı verir.

Yeterlilik. (1.4.1) koşulunun ve (1.4.12) ve (1.4.13) den birinin gerçeklendiğini kabul edelim. (1.4.2) yi ispatlamak için yine (1.4.23) ü ispatlamak yeterlidir.

Herhangi $\varepsilon > 0$ verilsin. $\lambda > 1$ durumunda, (1.4.24) den

$$\begin{aligned}\{n \leq N : |x_n - \sigma_n| \geq \varepsilon\} \quad &\subseteq \left\{n \leq N : \tfrac{\lambda_n+1}{\lambda_n-n} \left|(\sigma_{\lambda_n} - \sigma_n)\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\cup \left\{n \leq N : \tfrac{1}{\lambda_n-n} \left|\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} (x_k - x_n)\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\end{aligned} \tag{1.4.31}$$

dır. $0 < \lambda < 1$ durumunda ise (1.4.29) dan

$$\begin{aligned}\{n \leq N : |x_n - \sigma_n| \geq \varepsilon\} \quad &\subseteq \left\{n \leq N : \tfrac{\lambda_n+1}{n-\lambda_n} \left|(\sigma_n - \sigma_{\lambda_n})\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\cup \left\{n \leq N : \tfrac{1}{n-\lambda_n} \left|\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} (x_n - x_k)\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\end{aligned} \tag{1.4.32}$$

elde ederiz. $\delta > 0$ verilsin. (1.4.12) den

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left|\left\{n \leq N : \frac{1}{\lambda_n - n} \left|\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} (x_k - x_n)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \leq \delta$$

olacak şekilde $\lambda > 1$, veya (1.4.13) ten

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left|\left\{n \leq N : \frac{1}{n - \lambda_n} \left|\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} (x_n - x_k)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \leq \delta$$

olacak şekilde $0 < \lambda < 1$ vardır. (1.4.31), (1.4.32), Lemma 1.4.12 ve Lemma 1.4.13 den, her iki durumda da

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left|\{n \leq N : |x_n - \sigma_n| \geq \varepsilon\}\right| \leq \delta$$

elde ederiz. Buradan

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left|\{n \leq N : |x_n - \sigma_n| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olması çıkar. Bu ise (1.4.23) ü ispatlar. Lemma 1.4.12 ile (1.4.1) ve (1.4.23) ten (1.4.2) elde edilir.■

1.5 $\mu-$İstatistiksel Yakınsak Fonksiyon Dizileri

Bu kısımda $\mu-$yoğunluklu yakınsaklık ve reel sayıların bir D alt kümesi üzerinde tanımlı fonksiyon dizilerinin $\mu-$istatistiksel yakınsaklığı ele alınacaktır. Burada μ,

sonlu toplamsal bir ölçüm olacaktır. Ayrıca $\mu-$istatistiksel düzgün ve $\mu-$istatistiksel noktasal yakınsaklık üzerinde durulacak ve
$\mu-$istatistiksel düzgün yakınsaklığın, düzgün yakınsaklığın temel özelliklerine sahip olduğu görülecektir.

Connor (1990), asimtotik yoğunluğu bir sonlu toplamsal küme fonksiyonu ile yer değiştirerek istatistiksel yakınsaklık kavramının bir genişlemesini verdi. Bu kısımda μ, doğal sayıların bir Γ cismi üzerinde tanımlı, $[0,1]$ aralığında değerler alan ve

$$|A| < \infty \text{ ise } \mu(A) = 0,\ A \subset B \text{ ve } \mu(B) = 0 \text{ ise } \mu(A) = 0 \text{ ve } \mu(\mathbb{N}) = 1$$

özelliklerini sağlayan sonlu toplamsal bir küme fonksiyonu olacaktır. Bu kriterleri sağlayan bir küme fonksiyonu ölçüm olarak adlandırılacaktır. Connor (1990; 1992) tarafından aşağıdaki tanımlar verilmiştir:

(i) Bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde eğer $(x - L)\,\chi_A$ bir sıfır dizisi ise ve $\mu(A) = 1$ olacak şekilde bir $A \in \Gamma$ varsa bu durumda x dizisi L sayısına $\mu-$yoğunluğuna göre yakınsaktır denir.

(ii) Bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\mu(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa bu durumda x dizisi L sayısına $\mu-$istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum, $st_\mu - limx = L$ ile gösterilir.

Eğer $T = (t_{nk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu ise bu durumda T aşağıdaki gibi bir ölçüm üretmek için kullanılabilir: Her bir $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\mu_n(A) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}\chi_A(k)$$

şeklinde tanımlansın ve

$$\Gamma := \left\{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0 \text{ veya } \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 1\right\}$$

olsun. $\mu_T : \Gamma \to [0,1]$ dönüşümünü

$$\mu_T(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}\chi_A(k)$$

ile tanımlayalım. Bu durumda μ_T ve Γ, yukarıdaki tanımın gerektirmelerini sağlar. Eğer T Cesàro matrisi ise bu durumda μ_T-istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa denktir.

Connor (1990) tarafından (i) nin (ii) yi gerektirdiği fakat tersinin sağlanmadığı biliniyor. Eğer μ sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahipse, yani; sıfır ölçümlü kümelerin bir $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ ailesi verildiğinde, eğer her $i \in \mathbb{N}$ için $|A_i \vartriangle B_i| < \infty$, $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \Gamma$ ve $\mu(B) = 0$ olacak şekilde bir $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ ailesi varsa, bu durumda bu iki tanım denk olur. Şimdi ise $\mu-$istatistiksel düzgün ve $\mu-$istatistiksel noktasal yakınsaklık tanımlarını verelim ve $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsaklığın, düzgün yakınsaklığın (bilinen anlamda) temel özelliklerine sahip olduğunu gözlemleyelim.

$D \subset \mathbb{R}$ ve (f_n) , D üzerinde reel bir fonksiyon dizisi olsun.

Tanım 1.5.1: (f_n) fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna $\mu-$yoğunluğuna göre noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D$ için, $\mu(K_x) = 1$ olan bir $K_x \in \Gamma$ kümesi ve bir $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in K_x$ sayısı her $n \geq n_0$ ve $n \in K_x$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $f_n \overset{D}{\rightarrow} f$ $(\mu - \textit{yoğunluklu})$ gösterimini kullanacağız (Duman ve Orhan, 2001).

Tanım 1.5.2: (f_n) fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna $\mu-$yoğunluğuna göre düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için, $\mu(K) = 1$ olan bir $K \in \Gamma$ kümesi ve bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in K$ sayısı her $n \geq n_0$, $n \in K$ ve her $x \in D$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde vardır (Duman ve Orhan,2001).

Bu durumda $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - \textit{yoğunluklu})$ gösterimini kullanacağız.

Tanım 1.5.3: (f_n) fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna $\mu-$istatistiksel yakınsaktır $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D$ için $\mu(\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ dır (Duman ve Orhan, 2001).

Bu durumda $f_n \overset{D}{\rightarrow} f$ $(\mu - \textit{istatistiksel})$ gösterimini kullanacağız.

Tanım 1.5.4: D üzerindeki sınırlı fonksiyonların bir (f_n) dizisi bir f fonksiyonuna $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $st_\mu - lim \|f_n - f\|_B = 0$ dır (Duman ve Orhan, 2001).

Burada $\|.\|_B$ normu, D üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonların $B(D)$ uzayı üzerindeki bilinen supremum normudur. Bu durumda da

$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - istatistiksel)$ gösterimini kullanacağız.

$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - istatistiksel)$ olması için gerek ve yeter koşulun $st_\mu - lim\left(sup_{x\in D}\left|f_n(x) - f(x)\right|\right) = 0$ olduğu gözlemlenebilir.

Ordinary anlamda olduğu gibi, Tanım 1.5.1 deki özellik, Tanım 1.5.3 ü ve sınırlı fonksiyonlar için Tanım 1.5.2 deki özellik, Tanım 1.5.4 ü gerektirir. Eğer μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahipse bu durumda Tanım 1.5.1 ile Tanım 1.5.3 ve Tanım 1.5.2 ile Tanım 1.5.4 denktir.

Bir sonraki teorem, iyi bilinen bir teoremin $\mu-$istatistiksel benzeridir.

Teorem 1.5.5: Tüm f_n fonksiyonları D üzerinde sürekli olsun. Eğer $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - yoğunluklu)$ ise bu durumda f fonksiyonu D üzerinde süreklidir (Duman ve Orhan, 2001).

İspat: $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - yoğunluklu)$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için ölçümü 1 olan bir $K \in \Gamma$ kümesi ve bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in K$ sayısı vardır öyleki her $x \in D$ ve her $n \geq n_0$ ve $n \in K$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ tür. $x_0 \in D$ olsun. f_{n_0}, x_0 da sürekli olduğundan $|x - x_0| < \delta$ iken her $x \in D$ için $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Her $x \in D$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

elde edilir. $x_0 \in D$ keyfi olduğundan f, D üzerinde süreklidir.$\blacksquare$

Sonuç 1.5.6: Tüm f_n fonksiyonları $\mathbb{R}$ nin kompakt bir D alt kümesi üzerinde sürekli ve μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm olsun. Eğer $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - istatistiksel)$ ise bu durumda f fonksiyonu D üzerinde süreklidir.

Aşağıdaki örnek Teorem 1.5.5 in ve Sonuç 1.5.6 nın terslerinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 1.5.7: $\mu(K) = 1$ olsun. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \notin K \\ \frac{2nx}{1+n^2x^2}, & n \in K \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - yoğunluklu)$ dir. Dolayısıyla $f_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - istatistiksel)$ olur. Tüm f_n lerin ve f nin $[0,1]$ de sürekli olmasına rağmen,

$$c_n = \max_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad \text{ve} \quad st_\mu - lim c_n = 1 \neq 0$$

olduğundan Tanım 1.5.4 e göre (f_n) in $\mu-$istatistiksel yakınsaklığı düzgün değildir.

Aşağıdaki sonuç Dini'nin teoreminin bir benzeridir.

Teorem 1.5.8: μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm, D, $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi ve (f_n), D üzerinde sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Kabul edelim ki f fonksiyonu D üzerinde sürekli ve $f_n \overset{D}{\to} f$ $(\mu - \textit{istatistiksel})$ olsun. Ayrıca (f_n), D üzerinde monoton azalan; yani her $x \in D$ için $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ olsun. Bu durumda $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - \textit{istatistiksel})$ dir (Duman ve Orhan, 2001).

İspat: $g_n(x) := f_n(x) - f(x)$ diyelim. Hipotezden her bir g_n sürekli ve $g_n \overset{D}{\to} 0$ $(\mu - \textit{istatistiksel})$ dır. Ayrıca g_n, D üzerinde monoton azalan bir dizidir. $g_n \overset{D}{\to} 0$ $(\mu - \textit{istatistiksel})$ olduğundan ve sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip olduğundan $g_n \overset{D}{\to} 0$ $(\mu - \textit{yoğunluklu})$ dır. Böylece her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D$ için, $\mu(K_x) = 1$ olan bir $K_x \in \Gamma$ kümesi ve bir $n(x) := n(\varepsilon, x) \in K_x$ sayısı vardır öyleki her $n \ge n(x)$ ve $n \in K_x$ için $0 \le g_n(x) < \varepsilon/2$ dir. $g_n(x)$, $x \in D$ de sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için, x i içeren bir $J(x)$ açık kümesi vardır öyleki her $t \in J(x)$ için $\left|g_{n(x)}(t) - g_{n(x)}(x)\right| < \varepsilon/2$ dir. O halde verilen bir $\varepsilon > 0$ için, monotonluktan dolayı, her $t \in J(x)$, $n \ge n(x)$ ve $n \in K_x$ için

$$\begin{aligned} 0 &\le g_n(t) \le g_{n(x)}(t) = g_{n(x)}(t) - g_{n(x)}(x) + g_{n(x)}(x) \\ &\le \left|g_{n(x)}(t) - g_{n(x)}(x)\right| + g_{n(x)}(x) \end{aligned}$$

olur. $D \subset \bigcup_{x \in D} J(x)$ ve D kompakt olduğundan Heine-Borel teoreminden D nin, $D \subset J(x_1) \cup J(x_2) \cup ... \cup J(x_m)$ olacak şekilde bir sonlu alt örtüsü vardır. $K := K_{x_1} \cap K_{x_2} \cap ... \cap K_{x_m}$ ve $N = \max\{n(x_1), n(x_2), ..., n(x_m)\}$ olsun. $\mu(K) = 1$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda her $t \in D, n \ge N$ ve $n \in K$ için $0 \le g_n(t) < \varepsilon$ dur. Dolayısıyla $g_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$ $(\mu - \textit{yoğunluklu})$ olur. Sonuç olarak $g_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$ $(\mu - \textit{istatistiksel})$ elde edilir.■

Aşağıdaki teorem $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsaklık için Cauchy kriteridir.

Teorem 1.5.9: μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm olsun. Bu durumda (f_n) fonksiyon dizisinin D üzerinde $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ için

$$\mu\left(\{n : \|f_n - f\|_B < \varepsilon\}\right) = \mathbf{1} \tag{1.5.1}$$

olacak şekilde bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ nin var olmasıdır (Duman ve Orhan, 2001).

Not: (1.5.1) özelliğini sağlayan (f_n) fonksiyon dizisine D üzerinde $\mu-$istatistiksel düzgün Cauchy'dir denir.

İspat: Kabul edelim ki (f_n) fonksiyon dizisi D üzerinde $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsaktır. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda $\mu\left(\{n : \|f_n - f\|_B < \varepsilon/2\}\right) = 1$ dir.

$$\left\|f_{n(\varepsilon)} - f\right\|_B < \varepsilon/2$$

olacak şekilde bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. Üçgen eşitsizliğinden

$$\mu\left(\left\{n : \left\|f_n - f_{n(\varepsilon)}\right\|_B < \varepsilon\right\}\right) = 1$$

dir. ε keyfi olduğundan (f_n), D üzerinde $\mu-$istatistiksel düzgün Cauchy'dir.

Tersine, kabul edelim ki (f_n), D üzerinde $\mu-$istatistiksel düzgün Cauchy'dir. $x \in D$ sabit olsun. (1.5.1) den her $\varepsilon > 0$ için bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı

$$\mu\left(\left\{n : \left|f_n(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)\right| < \varepsilon\right\}\right) = 1$$

olacak şekilde vardır. Böylece $\{f_n(x)\}$, $\mu-$Cauchy'dir. Dolayısıyla Connor (1992) Önerme 3 ten $\{f_n(x)\}$, $\{f(x)\}$ e $\mu-$istatistiksel yakınsaktır. Şimdi bu yakınsaklığın düzgün olduğunu gösterelim. μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip olduğundan (1.5.1) den ölçümü 1 olan bir $K \in \Gamma$ kümesi vardır öyleki her $n \geq n(\varepsilon)$ ve $n \in K$ için $\left\|f_n - f_{n(\varepsilon)}\right\|_B < \varepsilon/2$ dir. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için ölçümü 1 olan bir $K \in \Gamma$ kümesi ve bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki $n, m \geq n(\varepsilon)$ ve $n, m \in K$ ve her $x \in D$ için

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{1.5.2}$$

dir. n yi sabitleyip (1.5.2) de m üzerinden limit operatörü uygulanırsa, her $\varepsilon > 0$ için $\mu(K) = 1$ olan $K \in \Gamma$ nın ve $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısının her $n \geq n(\varepsilon)$ ve her $x \in D$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde var olduğu sonucuna ulaşırız. Bu durumda $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - yo\breve{g}unluklu)$ ve sonuç olarak $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - istatistiksel)$ olur.■

$\mu-$istatistiksel düzgün yakınsaklığı kullanarak bazı uygulamalar verilebilir. Buna göre, kısaca aşağıdaki teoremleri verelim ve ispatları çıkaralım.

Teorem 1.5.10: μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm olsun. Eğer bir (f_n) fonksiyon dizisi $[a,b]$ aralığı üzerinde bir f fonksiyonuna $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak ise ve her bir f_n, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir ise bu durumda f fonksiyonu da $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilirdir ve

$$st_\mu - lim\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b st_\mu - lim f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

eşitliği geçerlidir (Duman ve Orhan, 2001).

Teorem 1.5.11: μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm olsun. Kabul edelim ki (f_n), her bir f_n için $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli türeve sahip bir fonksiyon dizisidir. Eğer $f_n \overset{[a,b]}{\to} f$ $(\mu - istatistiksel)$ ve $f_n^{'} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$ $(\mu - istatistiksel)$ ise bu durumda $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ $(\mu - istatistiksel)$ dir. Burada f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyondur ve $f^{'} = g$ dir (Duman ve Orhan, 2001).

$\mu-$istatistiksel yakınsaklığı koruyan fonksiyon dizileri.

Bu kısımda ilk olarak Kolk'un (1999) düzgün yakınsaklığı koruyan fonksiyon dizilerini ele aldığı çalışmasına değinilecektir.

S, $\mathbb{R}$ nin kapalı bir alt kümesi ve $\mathcal{F} = (f_k)$, $f_k : S \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun. $S-$değerli bir (t_k) dizisi için $\mathcal{F}(x) = (f_k(t_k))$ diyelim.

Tanım 1.5.12: S deki her bir $x = (t_k)$ dönüşüm dizisi için eğer $\mathcal{F}(x)$ dönüşüm dizisi yakınsak ise bu durumda $\mathcal{F} = (f_k)$ dönüşüm dizisine $S \subset \mathbb{R}$ üzerinde yakınsaklığı koruyandır (veya konservatif) denir. Eğer $\mathcal{F}$, konservatif ise ve S deki tüm yakınsak dizilerin limitlerini koruyorsa $\mathcal{F} = (f_k)$ dönüşüm dizisine regülerdir denir.

Örneğin, $f_k(t) = kt/(k+1)$ dizisi açık olarak yakınsaklığı koruyandır ve regülerdir. Fakat, $g_k(t) = e^{-kt}$ olmak üzere $G = (g_k)$ dizisi $[0,2]$ kapalı aralığı üzerinde konservatif değildir. Çünkü, $t_k = \left(1 + (-1)^k\right)/\sqrt{k}$ olmak üzere $x = (t_k)$ yakınsak dizisi için

$$g_k(t_k) = \begin{cases} 1, & k \text{ çift} \\ e^{-2\sqrt{k}}, & k \text{ tek} \end{cases}$$

ve $lim_k e^{-2\sqrt{k}} = 0$ olduğundan $G(x)$ dönüşüm dizisi ıraksaktır.

Teorem 1.5.13: $\mathcal{F} = (f_k)$, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki ifade denktir.

(i) $\mathcal{F}$, $[a,b]$ üzerinde konservatiftir.

(ii) $\mathcal{F}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaktır.

Sonuç 1.5.14: $\mathcal{F} = (f_k)$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki ifade denktir.

(i) $\mathcal{F}, \mathbb{R}$ üzerinde konservatiftir.

(ii) $\mathcal{F}$, her bir $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaktır.

Teorem 1.5.15: $\mathcal{F}$, $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki ifade denktir.

(i) $\mathcal{F}$, $[a,b]$ üzerinde regülerdir.

(ii) $\mathcal{F}$, $[a,b]$ aralığında $f(t) = t$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Sonuç 1.5.16: $\mathcal{F} = (f_k)$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki ifade denktir.

(i) $\mathcal{F}, \mathbb{R}$ üzerinde regülerdir.

(ii) $\mathcal{F}$, her bir $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde $f(t) = t$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Örneğin,

$$f_{1,k}(t) = \begin{cases} 1, & t = k \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere süreksiz fonksiyonların $f_{1,k}$ dizisi her bir $[a,b]$ aralığı üzerinde $f_1(t) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla $\mathcal{F}_1 = (f_{1,k})$ konservatiftir, fakat regüler değildir. Bu örnek gösterir ki Teorem 1.5.13 ve Teorem 1.5.15 deki f_k fonksiyonları genel olarak süreksiz olabilir.

$\mathcal{F}_1$, $\mathbb{R}$ nin tamamında düzgün yakınsak olmadığından Sonuç 1.5.14 (ii) deki " her bir $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde düzgün olarak " ifadesi " $\mathbb{R}$ nin tamamında düzgün olarak " ifadesi ile yer değiştirilemez.

Aşağıda Kolk'dan (1999) esinlenerek, benzer olarak $\mu-$istatistiksel yakınsaklığı koruyan fonksiyon dizileri tanımlanacaktır. Ayrıca buradaki düşünceler $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak fonksiyon dizilerinin $\mu-$istatistiksel limit fonksiyonlarının sürekliliğinin bir dizisel karakterizasyonunu verecektir.

Tanım 1.5.17: $D \subset \mathbb{R}$ ve (f_n), D üzerinde reel fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer D deki her bir $x = (x_n)$, $\mu-$istatistiksel yakınsak dizisi için $\{f_n(x_n)\}$ dönüşüm dizisi de $\mu-$istatistiksel yakınsak ise o zaman (f_n) fonksiyon dizisine D üzerinde $\mu-$istatistiksel yakınsaklığı koruyan dizi (veya $\mu-$istatistiksel konservatif

) denir. Eğer (f_n), $\mu-$istatistiksel konservatif ise ve D deki tüm $\mu-$istatistiksel yakınsak dizilerin limitlerini koruyorsa bu durumda (f_n) fonksiyon dizisine D üzerinde $\mu-$istatistiksel regülerdir denir (Duman ve Orhan, 2001).

Bu tanıma göre eğer (f_n) fonksiyon dizisi D üzerinde konservatif ise o zaman (f_n), D üzerinde $\mu-$istatistiksel konservatiftir. Fakat aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi bu sonucun tersi doğru değildir.

Örnek 1.5.18: $K \in \Gamma$, $\mathbb{N} \backslash K$ sonsuz ve $\mu(K) = 1$ olacak şekilde bir küme olsun. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & n \in K \\ 1, & n \notin K \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Kabul edelim ki, (x_n) $[0,1]$ de $st_\mu - lim x_n = L$ olacak şekilde bir dizidir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\mu(\{n : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}) = \mu(\mathbb{N} \backslash K) = 0$$

dır. Dolayısıyla $st_\mu - lim f_n(x_n) = 0$ olur. Böylece (f_n), $[0,1]$ üzerinde $\mu-$istatistiksel konservatiftir fakat (f_n) nin $[0,1]$ de konservatif olmadığı gözlemlenebilir.

Teorem 1.5.19: μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm ve (f_k) bir $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda (f_k) nın $[a,b]$ üzerinde $\mu-$istatistiksel konservatif olması için gerek ve yeter koşul, (f_k) nın $[a,b]$ üzerindeki sürekli bir f fonksiyonuna $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak olmasıdır (Duman ve Orhan, 2001).

İspat: *Gereklilik.* Kabul edelim ki (f_k), $[a,b]$ üzerinde $\mu-$istatistiksel konservatiftir. Her $t \in [a,b]$ için $(v_k) = (t, t, ...)$ dizisini seçelim. $st_\mu - lim v_k = t$ olduğundan $st_\mu - lim f_k(v_k)$ mevcuttur. Dolayısıyla her $t \in [a,b]$ için $st_\mu - lim f_k(t) = f(t)$ olur. f nin $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğunu iddia ediyoruz. Bunu ispatlamak için f nin bir $t_0 \in [a,b]$ noktasında sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda $[a,b]$ de $lim u_k = t_0$ olacak şekilde bir (u_k) dizisi vardır fakat $lim f(u_k)$ mevcuttur ve $lim f(u_k) \neq f(t_0)$ dır. (f_k), $[a,b]$ üzerinde f ye $\mu-$istatistiksel noktasal yakınsak olduğundan ve μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip olduğundan $[a,b]$ üzerinde $f_k \to f$ $(\mu - yoğunluklu)$ dir. Dolayısıyla her bir f için $\{f_k(u_j) - f(u_j)\} \to 0$ $(\mu - yoğunluklu)$ dır. Connor (1992) Sonuç 9 da, " Eğer μ, toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm ve (x^r), $\mu-$yoğunluğa göre yakınsak dizilerin sayılabilir bir kolleksiyonu ise bu durumda her r için $lim_n x^r_{\lambda(n)}$ mevcut ve $\mu(\{\lambda(n) : n \in \mathbb{N}\}) = 1$ olacak şekilde bir $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dönüşümü mevcuttur " olduğunu ispatladı. Buna göre bir $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dönüşümü mevcuttur öyleki $\mu(\{\lambda(k) : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve her j için

$$\underset{k}{lim}\left[f_{\lambda(k)}(u_j) - f(u_j)\right] = 0$$

dır. Şimdi ise Bartle (1964; sayfa 192) "köşegen yöntemi"nden

$$\mu(\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}) = 1 \text{ ve } lim_k\left[f_{n(k)}(u_k) - f(u_k)\right] = 0$$

olacak şekilde bir (n_k) indis dizisi seçebiliriz. Bir $x = (t_i)$ dizisini

$$t_i = \begin{cases} t_0, & i = n_k \text{ ve } i \text{ tek} \\ u_k, & i = n_k \text{ ve } i \text{ çift} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $t_i \to t_0\,(\mu - yoğunluklu)$ olur ki bu $st_\mu - limt_i = t_0$ olmasını gerektirir. Fakat $i = n_k$ ve i tek ise o zaman $limf_{n_k}(t_0) = f(t_0)$ olur ve $i = n_k$ ve i çift ise

$$limf_{n_k}(u_k) = lim\left[f_{n_k}(u_k) - f(u_k)\right] + limf(u_k) \neq f(t_0)$$

olur. Dolayısıyla $\{f_i(t_i)\}$, iki farklı limit değerine yakınsayan pozitif ölçümlü iki ayrık alt diziye sahip olduğundan $\mu-$yoğunluklu yakınsak dizi değildir. Böylece $\{f_i(t_i)\}$ dizisi $\mu-$istatistiksel yakınsak değildir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde f, $[a, b]$ üzerinde süreklidir. Geriye (f_k) nın $[a, b]$ üzerinde f ye $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak olduğunu göstermek kalıyor. Kabul edelim ki (f_k), $[a, b]$ üzerinde $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak değildir. Bu durumda (f_k), $[a, b]$ üzerinde $\mu-$yoğunluklu düzgün yakınsak değildir. Dolayısıyla $\mu(\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ olan keyfi bir (n_k) indis dizisi için bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $t_k \in [a, b]$ sayıları $|f_{n_k}(t_k) - f(t_k)| \geq 2\varepsilon_0$ $(k \in \mathbb{N})$ olacak şekilde vardır. $x = (t_k)$ sınırlı dizisi yakınsak bir (t_{k_i}) alt dizisi içerir. $st_\mu - limt_{k_i} = \alpha$ olsun. f nin sürekliliğinden $limf(t_{k_i}) = f(\alpha)$ dır. Böylece $|f(t_{k_i}) - f(\alpha)| < \varepsilon_0$ $(i \geq i_0)$ olacak şekilde bir i_0 indisi vardır. Aynı i ler için

$$|fn_{k_k}(t_{k_i}) - f(\alpha)| \geq |fn_{k_k}(t_{k_i}) - f(t_{k_i})| - |f(t_{k_i}) - f(\alpha)| \geq \varepsilon_0 \qquad (4.1)$$

dır.

$$u_j = \begin{cases} \alpha, & j = n_{k_i} \text{ ve } j \text{ tek} \\ t_{k_i}, & j = n_{k_i} \text{ ve } j \text{ çift} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

tanımlarsak $u_j \to \alpha\,(\mu - yo\breve{g}unluklu)$ olur. Dolayısıyla $st_\mu - limu_j = \alpha$ olur. Fakat $j = n_{k_i}$ ve j tek ise $limf_{n_{k_i}}(\alpha) = f(\alpha)$ ve $j = n_{k_i}$ ve j çift ise $limf_{n_{k_i}}(t_{k_i}) \neq f(\alpha)$ olur. O halde $\{f_j(t_j)\}$, iki farklı limit değerine yakınsayan pozitif ölçümlü iki ayrık alt diziye sahip olduğundan $\mu-$yoğunluklu yakınsak değildir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde, (f_k), $[a,b]$ üzerinde f ye $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak olmalıdır.

Yeterlilik. $[a,b]$ üzerinde, $f_n \rightrightarrows f\,(\mu - istatistiksel)$ ve f nin sürekli olduğunu kabul edelim. $x = (x_n)$, $[a,b]$ de $\mu-$istatistiksel yakınsak bir dizi ve $st_\mu - limx_n = x_0$ olsun. μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip olduğundan $x_n \to x_0$ $(\mu - yo\breve{g}unluklu)$ dır. Böylece $lim_k x_{n_k} = x_0$ ve $\mu(\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ olacak şekilde bir (n_k) indis dizisi vardır. f nin x_0 daki sürekliliğinden $\lim\limits_k f(x_{n_k}) = f(x_0)$ dır. Dolayısıyla $f(x_n) \to f(x_0)\,(\mu - yo\breve{g}unluklu)$ dır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda ölçümü 1 olan bir $K_1 \in \Gamma$ kümesi ve bir $n_1 \in K_1$ sayısı her $n \geq n_1$ ve $n \in K_1$ için $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ olacak şekilde vardır. μ nün sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip olmasından dolayı $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsaklık $\mu-$yoğunluklu düzgün yakınsaklığa denktir. Böylece ölçümü 1 olan bir $K_2 \in \Gamma$ kümesi ve bir $n_2 \in K_2$ sayısı her $t \in [a,b]$, $n \geq n_2$, $n \in K_2$ için $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2$ olacak şekilde vardır. $N = max\{n_1, n_2\}$ ve $K := K_1 \cap K_2$ olsun. $\mu(K) = 1$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $t = x_n$ alarak, her $n \geq N$, $n \in K$ için

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu, $f_n(x_n) \to f(x_0)\,(\mu - yo\breve{g}unluklu)$ olduğunu gösterir. Yani, $f_n(x_n) \to f(x_0)$ $(\mu - istatistiksel)$ dır. Böylece ispat tamamlanır.$\blacksquare$

Teorem 1.5.19, kapalı bir aralık üzerinde $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak fonksiyon dizilerinin $\mu-$istatistiksel limit fonksiyonlarının sürekliliği için aşağıdaki gerekli ve yeterli koşulu içerir.

Teorem 1.5.20: μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm ve (f_k), bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde bir f fonksiyonuna $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak fonksiyon dizisi olsun. $\mu-$istatistiksel limit fonksiyonu olan f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşul, (f_k) nın $[a,b]$ üzerinde $\mu-$istatistiksel konservatif olmasıdır (Duman ve Orhan, 2001).

Şimdi, fonksiyon dizilerinin $\mu-$istatistiksel regülerliğini çalışalım. Eğer (f_k), $[a,b]$ üzerinde $\mu-$istatistiksel regüler ise bu durumda açık olarak her $t \in [a,b]$ için $st_\mu - lim f_k(t) = t$ dir. Böylece Teorem 1.5.19 da $f(t) = t$ alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.5.21: μ, sıfır ölçümlü kümeler için toplamsallık özelliğine sahip bir ölçüm ve (f_k), $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde bir fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda (f_k) nın $[a,b]$ üzerinde $\mu-$istatistiksel regüler olması için gerek ve yeter koşul, (f_k) nın $[a,b]$ üzerinde $f(t) = t$ şeklinde tanımlı bir f fonksiyonuna $\mu-$istatistiksel düzgün yakınsak olmasıdır (Duman ve Orhan, 2001).

II. BÖLÜM

İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI

2.1 İstatistiksel Limit Noktaları

Bu kısımda bir sayı dizisinin limit noktalarının veya cluster noktalarının istatistiksel benzeri tanımlanıp ilgili teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.1.1: Eğer bir x dizisinin L ye yakınsayan bir alt dizisi varsa L ye x in bir limit noktası veya cluster noktası denir ve x in tüm limit noktalarının cümlesi L_x ile gösterilir.

Tanım 2.1.2: Eğer $\left\{x_{k(j)}\right\}$, x in bir alt dizisi ve $K = \{k(j) : j \in \mathbb{N}\}$ ise bu durumda $\left\{x_{k(j)}\right\}$ yi $\{x\}_K$ şeklinde yazacağız. Eğer $\delta(K) = 0$ ise $\{x\}_K$ ya sıfır yoğunluklu bir alt dizi veya ince (thin) alt dizi denir.

Eğer $\delta(K) \neq 0$ ise $\{x\}_K$ ya bir ince olmayan (nonthin) altdizi denir (Fridy, 1993).

Şimdi de istatistiksel limit noktası tanımını verelim.

Tanım 2.1.3: x in λ ya yakınsayan bir ince olmayan alt dizisi varsa λ sayısına x sayı dizisinin istatistiksel limit noktası denir (Fridy, 1993).

Herhangi bir x dizisi için Λ_x ile x in tüm istastistiksel limit noktalarının cümlesini göstereceğiz.

Örnek 2.1.4: $x_k = \begin{cases} 1 & \text{, k kare ise} \\ 0 & \text{, diğer durumlarda} \end{cases}$ olsun. Bu durumda $L_x = \{0,1\}$ dır ve ayrıca Örnek 1.2.2 den $\Lambda_x = \{0\}$ dır.

Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x \subseteq L_x$ olacağı açıktır. Λ_x ve L_x birbirinden çok farklı olabilir. Aşağıdaki örnek, verilen x dizisi için $\Lambda_x = \phi$ ve $L_x = \mathbb{R}$ olduğunu göstermektedir.

Örnek 2.1.5: $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ görüntüsü bütün rasyonel sayılar kümesi olan bir dizi olsun ve

$$x_k = \begin{cases} r_k & \text{, eğer } k = n^2, n = 1, 2, ... \\ k & \text{, diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Karelerin kümesi sıfır yoğunluğa sahip olduğundan $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ olacak şekilde bir ince olmayan alt dizi yoktur. Böylece $\Lambda_x = \phi$ dir.

$\overline{Q} = \mathbb{R}$ olduğundan $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ $\mathbb{R}$ de yoğundur. Bu yüzden $L_x = \mathbb{R}$ dir (Fridy, 1993).

Bir x dizisinin bir L limit noktası " L merkezli her açık aralık , x in sonsuz çoklukta terimini içerir" ifadesi ile karakterize edilebilir. Bu ifadenin bir istatistiksel benzeri Fridy (1993) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.1.6: Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ kümesi sıfır yoğunluğa sahip değilse, yani

$$\delta \{k \in \mathbb{N} : |x_k - \lambda| < \varepsilon\} \neq 0$$

ise bu durumda γ sayısına x sayı dizisinin istatistiksel değme (cluster) noktası denir (Fridy, 1993).

Verilen bir x dizisi için Γ_x ile x in bütün istatistiksel değme noktalarının kümesini gösterelim. Herhangi bir x dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır.

Önerme 2.1.7: Her x için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ dir (Fridy, 1993).

Aşağıdaki örnek Λ_x ve Γ_x in eşit olmadığına ilişkindir.

Örnek 2.1.8: Bir x dizisini $k = 2^{p-1}(2q+1)$ olmak üzere $x_k = \dfrac{1}{p}$ olarak tanımlayalım. Yani $(p-1)$, k nın asal çarpanlara ayrımındaki 2 nin kuvvetidir. Şimdi bu dizinin terimlerini açık olarak ifade edelim:

$$\begin{array}{llll}
k = 1 & \text{için} & p = 1; & q = 0 \\
k = 2 & \text{için} & p = 2; & q = 0 \\
k = 3 & \text{için} & p = 1; & q = 1 \\
k = 4 & \text{için} & p = 3; & q = 0 \\
k = 5 & \text{için} & p = 1; & q = 2 \\
k = 6 & \text{için} & p = 2; & q = 1 \\
k = 7 & \text{için} & p = 1; & q = 3 \\
k = 8 & \text{için} & p = 4; & q = 0 \\
k = 9 & \text{için} & p = 1; & q = 4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

olmalıdır. Böylece x dizisi

$$x = (x_k) = (1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/2, 1, 1/4, 1, 1/2, \cdots)$$

olacaktır. Buna göre

$$\begin{array}{lll} p=1 \quad \text{için} \quad \delta\{k: x_k=1\} & = & \delta\{k=2n-1: n\in\mathbb{N}\}=2^{-1} \\ p=2 \quad \text{için} \quad \delta\{k: x_k=1/2\} & = & \delta\{k=4n-2: n\in\mathbb{N}\}=2^{-2} \\ \vdots & & \end{array}$$

olur. O halde herbir p için $\delta\left\{k: x_k=\frac{1}{p}\right\}=2^{-p}>0$ olacağından $\frac{1}{p}\in\Lambda_x$ dir. Benzer yöntemle

$$\delta\left\{k: |x_k|<\frac{1}{p}\right\}=\delta\left\{k: 0<x_k<\frac{1}{p}\right\}=2^{-p}$$

olduğu görülebilir. Böylece $0\in\Gamma_x$ dir ve $\Gamma_x=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{p}\right\}_{p=1}^{\infty}$ elde ederiz. Göstereceğizki $0\notin\Lambda_x$ dir; yani eğer $\{x\}_K$ sıfır limitine sahip bir alt dizi ise $\delta(K)=0$ olduğunu göstermeliyiz. Herbir p için şunu yazabiliriz,

$$\begin{aligned} |K_n| &= \left|\left\{k\in K_n: x_k\geq\frac{1}{p}\right\}\right|+\left|\left\{k\in K_n: x_k<\frac{1}{p}\right\}\right| \\ &\leq O(1)+\left|\left\{k\in K_n: x_k<\frac{1}{p}\right\}\right|\leq O(1)+\frac{n}{2^p} \end{aligned}$$

dir. Böylece $\delta(K)\leq 2^{-p}$ ve p keyfi olduğundan $\delta(K)=0$ olur.■

Eğer x istatistiksel yakınsak dizi (yani $st-\lim x=\lambda$) ise Λ_x ve Γ_x in her ikisinin de tek bir $\{\lambda\}$ kümesine eşit olduğu açıktır.

Bu iddianın tersi doğru değildir. Bunu görmek için

$$x_k=\left\{1+(-1)^k\right\}k=\begin{cases} 2k, & k=2n \\ 0, & k=2n-1 \end{cases},n\in\mathbb{N}$$

alınırsa, $\Lambda_x=\Gamma_x=\{0\}$ olmasına rağmen, her $\varepsilon>0$ için

$$\delta\{k: |x_k|\geq\varepsilon\}=\frac{1}{2}\neq 0$$

olduğundan x dizisi 0 a istatistiksel yakınsak değildir.

Aşağıdaki örnek Γ_x bir aralık ve $\Lambda_x=\phi$ olacak şekilde bir x in olduğunu gösterir.

Örnek 2.1.9: $x=\left\{0,0,1,0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1,\cdots\right\}$ alalım. Bu dizi $[0,1]$ de düzgün dağılımlıdır, yani $L_x=[0,1]$ dir ve aynı zamanda $[0,1]$ aralığının d uzunluklu her alt aralığında (x_k) nın yoğunluğu d nin kendisidir. Bu nedenle $[0,1]$ deki her γ için

$$\delta\{k\in\mathbb{N}: x_k\in(\gamma-\varepsilon,\gamma+\varepsilon)\}\geq\varepsilon>0$$

dir. Buradan $\Gamma_x = [0,1]$ dir. Diğer taraftan eğer $\lambda \in [0,1]$ ve $\{x\}_K$ λ ya yakınsak bir alt dizi ise bu takdirde $\delta\{K\} = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddiayı ispat etmek için $\varepsilon > 0$ alalım. Herbir n için

$$\begin{aligned} |K_n| &\leq |\{k \in K_n : |x_k - \lambda| < \varepsilon\}| + |\{k \in K_n : |x_k - \lambda| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq 2.\varepsilon n + O(1) \end{aligned}$$

olduğunu not edelim. Sonuç olarak $\delta\{k(j)\} \leq 2\varepsilon$ ve ε keyfi olduğundan $\delta\{k(j)\} = 0$ elde ederiz. Ve böylece $\Lambda_x = \phi$ dir.■

Örnek 2.1.8 den Λ_x in kapalı bir nokta kümesi olmayabileceği görülür. Sonraki sonuçta Γ_x in L_x gibi daima kapalı bir küme olduğu ifade edilmektedir.

Önerme 2.1.10: Herhangi bir x sayı dizisi için istatistiksel cluster noktalarının Γ_x kümesi, bir kapalı kümedir (Fridy, 1993).

Teorem 2.1.11: Eğer x ve y hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde iki dizi ise bu durumda $\Lambda_x = \Lambda_y$ ve $\Gamma_x = \Gamma_y$ dir (Fridy, 1993).

Teorem 2.1.12: Eğer x bir sayı dizisi ise $L_y = \Gamma_x$ ve hemen her k için $y_k = x_k$ olacak şekilde bir y dizisi vardır. Üstelik y nin görüntüsü x in görüntüsünün bir alt kümesidir (Fridy, 1993).

Uyarı : Teorem 2.1.12 nin sonucunda Γ_x yerine Λ_x yazmak doğru değildir. Çünkü Λ_x kapalı olması gerekmezken L_y her zaman kapalıdır. (Örnek 2.1.8 deki gibi)

Reel sayılar sisteminin tamlığına denk olan bir çok bilinen teorem vardır. İstatistiksel limitler ile bilinen anlamdaki limitleri yerdeğiştirmekle, böyle bir teorem dizilerle ilişkilendirildiği zaman, teoremin bir istatistiksel benzeri veriebilir. Örneğin Teorem 1.2.7 de, bir sayı dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun onun istatistiksel Cauchy dizisi olması gerektiği belirtildi. En küçük üst sınır aksiyomunun ($\mathbb{R}$ de) bir dizisel versiyonu, Monoton Dizi Teoremidir: Eğer x (reel) sayı dizisi azalmayan ve üstten sınırlı ise x yakınsaktır. Aşağıda Teorem 1.2.7 nin bir sonucu olan Monoton Dizi Teoreminin istatistiksel bir benzeri verilmiştir.

Önerme 2.1.13: Kabul edelim ki x bir sayı dizisi ve $M := \{k \in \mathbb{N} : x_k \leq x_{k+1}\}$ olsun. Eğer $\delta\{M\} = 1$ ve x, M üzerinde sınırlı ise bu durumda x istatistiksel yakınsaktır (Fridy, 1993).

$\mathbb{R}$ nin diğer bir tamlık sonucu; sınırlı bir x dizisi için $L_x \neq \phi$ olduğunu iddia eden Bolzano-Weierstrass teoremidir.

Örnek 2.1.9 da sınırlı bir x dizisi için $\Lambda_x = \phi$ olabileceği görüldü. Fakat istatistiksel değme noktalarını kullanarak Bolzano-Weierstrass teoreminin bir istatistiksel benzeri aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.1.14: Eğer x sayı dizisi, bir sınırlı ince olmayan alt diziye sahip ise bu taktirde x in bir istatistiksel değme noktası vardır (Fridy, 1993).

Sonuç 2.1.15: Eğer x sınırlı bir sayı dizisi ise bu durumda x bir istatistiksel değme noktasına sahiptir (Fridy, 1993).

Sonraki sonuç Heine-Borel örtme teoreminin bir istatistiksel benzeridir. Eğer x sınırlı bir sayı dizisi ise $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup L_x$ kompakt kümesini $\overline{X}$ ile gösterelim. Eğer $\{J_n\}$, $\overline{X}$ yi örten açık kümelerin bir örtüsü ise $\{J_n\}$ nin bir sonlu alt örtüsü de $\overline{X}$ yi örter. Bu sonucun bir istatistiksel benzer formu için Γ_x ile L_x i yerdeğiştirelim ve

$$X := \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \Gamma_x$$

kümesini x in istatistiksel kapanışı olarak tanımlayalım. X in kapalı bir küme olması gerekmez. Gerçekten X kapalı olması için gerek ve yeter şart, x in bilinen $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup L_x$ kapanışının X e eşit olmasıdır.

Teorem 2.1.16: Eğer x sınırlı bir sayı dizisi ise bu durumda x dizisi $\{x_k : k \in \mathbb{N} \sim K\} \cup \Gamma_x$ kompakt küme olacak şekilde bir $\{x\}_K$ ince alt dizisine sahiptir (Fridy, 1993).

2.2 $\mathbb{R}^N$ de istatistiksel cluster noktaları

$\mathbb{R}^N$, $||.||$ normuyla birlikte bir $N-$boyutlu uzay olsun. $x = (x_k)$, $x_k \in \mathbb{R}^N$, $k \in N$, dizisini ve $\zeta \in \mathbb{R}^N$ noktasını alalım.

Tanım 2.2.1: Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta \{k : \|x_k - \zeta\| \geq \varepsilon\} = 0$$

oluyorsa x dizisi ζ noktasına istatistiksel yakınsaktır denir (Pehlivan ve diğ., 2004).

Tanım 2.2.2: Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta \{k : \|x_k - \zeta\| < \varepsilon\} \neq 0$$

ise ζ noktasına x dizisinin bir istatistiksel cluster noktası denir (Pehlivan ve diğ., 2004).

Açıktır ki bu durumda

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : \|x_k - \zeta\| < \varepsilon\}\right| > 0$$

dır.

Γ_x ile x dizisinin bütün istatistiksel cluster noktalarının kümesini göstereceğiz.

Kapalı bir A kümesinin bir ζ noktasına olan uzaklığı

$$\rho(\zeta, A) = \min_{y\in A} ||y - \zeta||$$

olmak üzere A kümesinin bir ε-komşuluğunu

$$S_\varepsilon(A) = \left\{y \in \mathbb{R}^N : \rho(\zeta, A) < \varepsilon\right\}$$

ile gösterelim.

Önerme 2.2.3: $A \subset \mathbb{R}^N$ kompakt bir küme, x, $\mathbb{R}^N$ de bir dizi ve $A\cap\, \Gamma_x = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\{k : x_k \in A\}$ kümesinin yoğunluğu sıfırdır; yani $\delta\{k : x_k \in A\} = 0$ dır (Pehlivan ve diğ., 2004).

İspat. Koşula göre her $\zeta \in A$ için $\zeta \notin \Gamma_x$ dir. Bu durumda $\delta\left\{k : \|x_k - \zeta\| < \varepsilon\right\} = 0$ olacak şekilde bir $\varepsilon = \varepsilon(\zeta) > 0$ sayısı vardır.

$$S_\varepsilon(\zeta) = \{y \in \mathbb{R}^N : ||y - \zeta|| < \varepsilon\}$$

diyelim. $S_\varepsilon(\zeta)$, $\zeta \in A$ açık kümeleri A nın bir açık örtüsünü oluşturur. A kompakt bir küme olduğundan A nın sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu örtü $S_i = S_\varepsilon(\zeta_i)$, $i = 1, 2, ..., p$ olsun. Açıktırki bu durumda her i için $A \subset \cup S_i$ ve $\delta\{k : ||x_k - \zeta_i|| < \varepsilon_i\} = 0$ dır. Buradan

$$|\{k < n : x_k \in A\}| \leq \sum_{i=1}^{p} |\{k < n : ||x_k - \zeta_i|| < \varepsilon_i\}|$$

ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \in A\}| \leq \sum_{i=1}^{p} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : ||x_k - \zeta_i|| < \varepsilon_i\}| = 0$$

dır. Bu ise $\delta\{k : x_k \in A\} = 0$ olması demektir.■

Not edelimki, A açık veya sınırsız bir küme olduğunda Önerme 2.2.3 doğru olmayabilir. Gerçekten; $x = (0, 1, 0, 2, 0, 3, ...)$ dizisi için $\Gamma_x = \{0\}$ dır. Bu durumda sınırsız ve kapalı $A = [1, \infty)$ kümesi için $A \cap \Gamma_x = \emptyset$ tur. Fakat $\delta\{k : x_k \in A\} = 1/2$ dir. Eğer $x_k = (1/k)$ dizisini alırsak $\Gamma_x = \{0\}$ dır. Bu durumda da sınırlı ve açık $A = (0, 1)$ kümesi için $A \cap \Gamma_x = \emptyset$ olmasına rağmen $\delta\{k : x_k \in A\} = 1 \neq 0$ dır.

Teorem 2.2.4: Eğer x dizisi sınırlı ince olmayan bir alt diziye sahipse, bu durumda Γ_x boş kümeden farklı kapalı bir kümedir (Pehlivan ve diğ., 2004).

İspat. $\{x\}_K$, x dizisinin sınırlı ince olmayan bir alt dizisi olsun. Bu durumda $\delta(K) \neq 0$ dır ve her $k \in K$ için $x_k \in A$ olacak şekilde kompakt bir A kümesi vardır. Eğer $\Gamma_x = \emptyset$ ise $A \cap \Gamma_x = \emptyset$ tur. Buna göre Önerme 2.2.3 den $\delta\{k : x_k \in A\} = 0$ olur. Fakat

$$|\{k < n : k \in K\}| \leq |\{k \leq n : x_k \in A\}|$$

olduğundan $\delta(K) = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Γ_x in boş kümeden farklı olduğunu ispatladık. Aynı zamanda kapalı olduğunu göstermek zor değildir.■

Şimdi reel sayı dizileri için Fridy ve Orhan (1997) tarafından tanıtılan istatistiksel sınırlı dizilerin tanımını verelim.

Tanım 2.2.5: Bir x dizisi için, $\delta\{k : x_k \notin B\} = 0$ olacak şekilde kompakt bir B kümesi varsa x dizisine istatistiksel sınırlı dizi denir (Pehlivan ve diğ., 2004).

Tanıma göre x istatistiksel sınırlı dizi ise $\delta\{k : x_k \in B\} = 1$ olmalıdır. Ayrıca her sınırlı dizinin istatistiksel sınırlı olması açıktır.

Sonuç 2.2.6: Eğer x, istatistiksel sınırlı bir dizi ise bu durumda Γ_x boş kümeden farklı kompakt bir kümedir (Pehlivan ve diğ., 2004).

İspat. B kompakt bir küme ve $\delta\{k : x_k \notin B\} = 0$ olsun. Dolayısıyla $\delta\{k : x_k \in B\} = 1 > 0$ dır. Diğer bir ifadeyle B kümesi x dizisinin ince olmayan bir alt dizisini içerir ve böylece Teorem 2.2.4 den Γ_x in boş kümeden farklı ve kapalı olduğu çıkar.

Şimdi $\Gamma_x \subset B$ olduğunu gösterelim. Dolayısıyla Γ_x in sınırlı ve böylece kompakt olduğunu göstermiş oluruz. Aksine $\zeta \in \Gamma_x$ fakat $\zeta \notin B$ olsun. B nin kompaktlığından ζ *nin* bir ε-komşuluğu ile B nin arakesiti boş küme olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$\{k : \|x_k - \zeta\| < \varepsilon\} \subset \{k : x_k \notin B\}$$

ve dolayısıyla $\delta\{k : \|x_k - \zeta\| < \varepsilon\} = 0$ dır. Bu ise $\zeta \in \Gamma_x$ olması ile çelişir.■

Teorem 2.2.7: x istatistiksel sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\{k : \rho(\Gamma_x, x_k) \geq \varepsilon\}$kümesinin yoğunlugu sıfırdır. Yani

$$\delta\{k : \rho(\Gamma_x, x_k) \geq \varepsilon\} = 0 \tag{2.2.1}$$

dır (Pehlivan ve diğ., 2004).

İspat. B kompakt bir küme ve $\delta\{k : x_k \notin B\} = 0$ olsun. Sonuç 2.2.6 dan $\Gamma_x \neq \emptyset$ ve $\Gamma_x \subset B$ dir.

Kabul edelimki (2.2.1) gerçeklenmesin. O halde

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : \rho(\Gamma_x, x_k) \geq \varepsilon\}| > 0$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. $S_\varepsilon(\Gamma_x) = \{y : \rho(\Gamma_x, y) < \varepsilon\}$ kümesini tanımlayalım ve $A = B \backslash S_\varepsilon(\Gamma_x)$ diyelim.

A kümesinin kompaktlığı ve x in ince olmayan bir alt dizisini içerdiği açıktır. Bu durumda Önerme 2.2.3 den $A \cap \Gamma_x \neq \varnothing$; yani A nın bir istatistiksel cluster noktası vardır. Bu ise bir çelişkidir.■

Uyarı: x dizisinin sınırlı olmaması durumunda Teorem 2.2.7 doğru olmayabilir. Örneğin; $x = \{1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, ...\}$ dizisi için $\Gamma_x = \{0\}$ dır. Fakat

$$\delta\{k : \rho(\Gamma_x, x_k) \geq \varepsilon\} = 1/2 > 0$$

dır.

Şimdi Teorem 2.1.12 nin genelleştirilmiş bir biçimini ifade edeceğiz. Bu teorem ve onun ispatı $N-$boyutlu duruma genişletilebilir.

Teorem 2.2.8. Bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Bu durumda

(i) $Ly = \Gamma_x$;

(ii) $h.h.k$ için $y_k = x_k$

olacak şekilde bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Pehlivan ve diğ., 2004).

Γ-istatistiksel yakınsaklık

$C \subset \mathbb{R}^N$ aşağıdaki özelliği sağlayan kapalı bir küme olsun.

$$\delta\{k : \rho(C, x_k) \geq \varepsilon\} = 0\ ,\ \text{(her } \varepsilon > 0 \text{ için)} \tag{2.2.2}$$

Eğer her $C' \subset C$, $C \backslash C' \neq \emptyset$ kapalı kümesi için

$$\delta\{k : \rho(C', x_k) \geq \varepsilon'\} \neq 0$$

olacak şekilde bir $\varepsilon' > 0$ sayısı varsa o zaman C kümesine (2.2.2) yi gerçekleyen minimal kapalı kümedir diyeceğiz.

Tanım 2.2.9: Eğer boş kümeden farklı C kümesi (2.2.2) yi gerçekleyen minimal kapalı küme ise bu durumda x dizisi C kümesine Γ-istatistiksel yakınsaktır denir (Pehlivan ve diğ., 2004).

Aşağıdaki sonuçlar tanımdan hemen çıkan sonuçlardır.

Önerme 2.2.10: Eğer x dizisi $\Gamma-$istatistiksel yakınsak ise bu durumda limit kümesi tektir (Pehlivan ve diğ., 2004).

Önerme 2.2.11: Eğer Önerme 2.2.10 daki limit kümesi tek bir noktadan oluşuyorsa bu durumda dizi o noktaya istatistiksel yakınsaktır (Pehlivan ve diğ., 2004).

Şimdi şöyle bir problemi ele alalım: Bir x dizisi hangi koşullar altında $\Gamma-$istatistiksel yakınsaktır? Yani bütün kapalı C kümeleri arasında ne zaman bir minimal kapalı küme vardır? Bir x dizisinin $\Gamma-$istatistiksel yakınsak olması gerekmediğini belirtelim ve şimdi bu gerçeği açıklayalım.

(2.2.2) yi gerçekleyen bütün kapalı kümelerin bir sistemi C_α olsun. Bu sistem boş kümeden farklıdır. Örneğin; $C = \mathbb{R}^N$ alınırsa koşul gerçeklenir. Şimdi $C = \cap_\alpha C_\alpha$ arakesitini ele alalım. Bu küme (2.2.2) yi gerçekleyen bir minimal küme midir? Bu genel olarak doğru değildir. Ayrıca $C = \emptyset$ olabilir. Örneğin; $x = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$ dizisi için $C_\alpha = (-\infty, -\alpha] \cup [\alpha; \infty)$, $(\alpha > 0)$ alabiliriz. Bu durumda $C = \emptyset$ tur.

Bir sonraki sonuç x istatistiksel sınırlı oldugunda $C = \cap_\alpha C_\alpha = \Gamma_x$ ve buna göre de $C \neq \emptyset$ olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.2.12: Eğer x istatistiksel sınırlı dizi ise bu durumda x dizisi Γ_x kümesine $\Gamma-$istatistiksel yakınsaktır (Pehlivan ve diğ., 2004).

İspat. Teorem 2.2.7 den Γ_x in boş kümeden farklı kompakt bir küme olduğunu ve bu küme için (2.2.2) koşulunun gerçeklendiğini görebiliriz. Kabul edelimki Γ_x minimal olmasın. $C \subset \Gamma_x$ ve $\Gamma_x \backslash C \neq \emptyset$ olacak şekilde (2.2.2) yi gerçekleyen bir C kapalı kümesi bulunsun. O halde $\zeta \notin C$ olacak şekilde bir $\zeta \in \Gamma_x$ noktası vardır ve bu durumda $S_\varepsilon(\zeta) \cap S_\varepsilon(C) = \emptyset$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulabiliriz. $\zeta \in \Gamma_x$

olduğundan Tanım 2.2.2 den

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \in S_\varepsilon(\zeta)\}| > 0$$

dır. Böylece $\{k : x_k \in S_\varepsilon(\zeta)\} \subset \{k : x_k \notin S_\varepsilon(C)\}$ olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin S_\varepsilon(\zeta)\}| > 0$$

elde ederiz. Bu ise (2.2.2) ile çelişir.■

x dizisi C kümesine Γ-istatistiksel yakınsak olsun. Teorem 2.2.12 ye göre eğer bu dizi istatistiksel sınırlı ise $C = \Gamma_x$ dir. Şimdi ise istatistiksel sınırlı olmayan dizileri ele alalım. Böyle bir dizi aynı zamanda Γ-istatistiksel yakınsak olabilir. Örneğin; Örnek 2.2.8 deki diziyi alırsak bu dizi istatistiksel sınırlı değildir fakat $C = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesine $\Gamma-$istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.2.12 nin ispatından aşağıdaki sonucu hemen çıkarabiliriz.

Sonuç 2.2.13: Γ_x, x dizisinin istatistiksel cluster nuktalarının kümesi olsun (x dizisi genel olarak istatistiksel sınırlı değildir). Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta\{k : \rho(\Gamma_x, x_k) \geq \varepsilon\} = 0$ ise x dizisi Γ_x kümesine $\Gamma-$istatistiksel yakınsaktır (Pehlivan ve diğ., 2004).

Bir sonraki sonuç eğer x dizisi $\Gamma-$istatistiksel yakınsak ise bu durumda limit kümesinin sadece Γ_x olabileceğini göstermektedir.

Teorem 2.2.14: Eğer x dizisi C kümesine $\Gamma-$istatistiksel yakınsak ise $C = \Gamma_x$ dir (Pehlivan ve diğ., 2004).

İspat. İlk önce $\Gamma_x \subset C$ olduğunu gösterelim. $\zeta \in \Gamma_x$ fakat $\zeta \notin C$ olsun. C kümesi kapalı olduğundan $\varepsilon > 0$ için $S_\varepsilon(\zeta) \cap S_\varepsilon(C) = \emptyset$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Bu durumda $\{k : x_k \notin S_\varepsilon(C)\} \supset \{k : x_k \in S_\varepsilon(\zeta)\}$ olduğundan (2.2.2) den $\delta\{k : x_k \in S_\varepsilon(\zeta)\} = 0$ olur. Bu ise $\zeta \in \Gamma_x$ olması ile çelişir.

Şimdi $C \subset \Gamma_x$ olduğunu gösterelim. Kabul edelimki bu doğru olmasın, yani $\zeta \in C$ fakat $\zeta \notin \Gamma_x$ olsun. Buna göre Tanım 2.2.2 den her $\varepsilon \leq \varepsilon'$ için $\delta\{k : x_k \in S_\varepsilon(\zeta)\} = 0$ olacak şekilde bir $\varepsilon' > 0$ sayısı vardır.

Burada iki durumu ele alacağız.

1) ζ , C nin bir izole noktası olsun. Bu durumda

$$S_\varepsilon(\zeta) \cap S_\varepsilon(C \backslash \{\zeta\}) = \emptyset$$

olacak şekilde bir $\varepsilon \leq \varepsilon'$ sayısı vardır. Dolayısıyla

$$S_\varepsilon(C) = S_\varepsilon(\zeta) \cup S_\varepsilon(C \backslash \{\zeta\})$$

ve böylece

$$|\{k \leq n : x_k \notin S_\varepsilon(C, \{\zeta\})\}| = |\{k \leq n : x_k \in S_\varepsilon(\zeta)\}| + |\{k \leq n : x_k \notin S_\varepsilon(C)\}|$$

eşitliği sağlanır. Böylece (2.2.2) yi kullanarak yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta\{k \leq n : x_k \notin S_\varepsilon(C \backslash \{\zeta\})\} = 0$ elde ederiz. Bu ise $C \backslash \{\zeta\}$ kümesinin (2.2.2) yi sağlaması, yani C nin bir minimal küme olmaması anlamına gelir. Bu bir çelişkidir.

2) Kabul edelimki ζ, C nin bir limit noktasıdır. Bu durumda $\zeta_m \to \zeta$ ve $j \neq i$ için $\zeta_j \neq \zeta_i$ olacak şekilde bir $\zeta_m \in C$ dizisi vardır.

Bir $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda en az bir $\zeta' = \zeta_m$ ve $\delta > 0$ sayısı vardır öyleki $\left\|\zeta - \zeta'\right\| = 2\delta$ ve $4\delta < \varepsilon$ koşulları sağlanır. $S_\delta(C) \subset S_\varepsilon(C \backslash S_\delta(\zeta))$ olduğunu iddia ediyoruz.

$x \in S_\delta(C)$, $x' \in C$ ve $\|x - x'\| < \delta$ olsun.

a) Eğer $x' \notin S_\delta(\zeta)$ ise bu durumda $x' \in C \backslash S_\delta(\zeta)$ dir. Böylece $x \in S_\delta(C \backslash S_\delta(\zeta)) \subset S_\varepsilon(C \backslash S_\delta(\zeta))$ elde edilir.

b) $x' \in S_\delta(\zeta)$, yani $\|x' - \zeta\| < \delta$ olsun. Bu durumda

$$\left\|x - \zeta'\right\| < \left\|x - x'\right\| + \left\|x' - \zeta\right\| + \left\|\zeta - \zeta'\right\| < 4\delta < \varepsilon$$

olur. Fakat $\left\|\zeta' - \zeta\right\| = 2\delta$ ve de $\zeta' \in C \backslash S_\delta(\zeta)$ dir. Dolayısıyla $x \in S_\varepsilon(C \backslash S_\delta(\zeta))$ elde ederiz.

Böylece $S_\delta(C) \subset S_\varepsilon(C \backslash S_\delta(\zeta))$ içermesini ispatlamış oluruz. Bundan dolayı

$$|\{k \leq n : x_k \notin S_\varepsilon(C \backslash S_\delta(\zeta))\}| \leq |\{k \leq n : x_k \notin S_\delta(C)\}|$$

ve bu eşitsizlikten $\delta\{k \leq n : x_k \notin S_\varepsilon(C \backslash S_\delta(\zeta))\} = 0$ elde edilir. O halde C kümesi (2.2.2) yi gerçekleyen minimal küme değildir. Bu ise bir çelişkidir.■

Sonuç 2.2.15: x dizisi $\Gamma-$istatistiksel yakınsaktır $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $\delta\{k : \rho(\Gamma_x, x_k) \geq \varepsilon\} = 0$ dır (Pehlivan ve diğ., 2004).

III. BÖLÜM

ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

Bu bölümde ilk olarak bir dizinin çekirdeği kavramı tanıtılıp sınırlı ve sınırsız diziler için çekirdek teoremleri ispatsız olarak verilecektir. Daha sonra ise Knopp çekirdeği, istatistiksel çekirdek, $A-$istatistiksel çekirdek, Banach çekirdeği, $\sigma-$çekirdek ve $I-$çekirdek kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.

3.1 Bir Dizinin Çekirdeği

İlk kez Knopp tarafından tanımlanan bir dizinin çekirdeği kavramını açıklayabilmek için gerekli bazı tanım ve gösterimleri verelim.

(x_n) kompleks terimli bir dizi olmak üzere $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...$ noktalarını içeren, kompleks düzlemin en küçük kapalı konveks bölgesi R_n ile gösterilsin.

Bu durumda R_n söz konusu noktaların konveks örtüsü olup,

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \dots$$

dir.

Lemma 3.1.1: $R = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} R_i$ bölgesi $x = (x_n)$ in limit noktalarının cümlesi olan L_x i içerir (Cooke 1950, sh 137).

Tanım 3.1.2: Zorunlu olarak konveks ve kapalı olan $R = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} R_k$ cümlesine (x_n) dizisinin çekirdeği denir (Cooke 1950, sh 137).

Eğer R bir tek nokta içeriyorsa $x = (x_n)$ dizisi yakınsaktır. $R = \phi$ ise (x_n) dizisine belirgin olarak ıraksaktır denir ve bu durum $x_n \sim \infty$ şeklinde gösterilir. (Cooke 1950, sh 137)

Eğer A reel bir regüler matris ise, yakınsak bir (x_n) dizisinin A-dönüşümü olan $(x_n^{'})$ dizisinin $R^{'}$ çekirdeği, (x_n) dizisinin R çekirdeği ile özdeştir. Her iki R ve $R^{'}$ çekirdeği (x_n) dizisinin limiti olan tek noktadan ibarettir.

Eğer A negatif olmayan regüler bir matris ise, A nın uygulandığı her bir (z_n) dizisinin R çekirdeği, bu dizinin A-dönüşümü olan $(z_n^{'})$ nün $R^{'}$ çekirdeğini içerir.

Teorem 3.1.3: Eğer $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve onun dönüşüm dizisi $x_n^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ olsun. $x = (x_n)$ dizisinin çekirdeği $v_x = (a, b)$ ve

$(x_n^{'}) = (A_n(x))$ dönüşüm dizisinin çekirdeği $v_{x'} = (a^{'}, b^{'})$ ise $v_{x'} \subset v_x$ dir (Cooke 1950, sh 138).

Knopp'un kompleks dizilerin çekirdeğine ilişkin alternatif bir tanımı şöyledir:

Tanım 3.1.4: Her L doğrusu düzlemi iki yarı düzleme böler. Eğer bir S nokta cümlesi, tamamen bir yarı düzlem içinde bulunuyorsa (S nin bazı veya bütün noktaları L doğrusu üzerinde bulunabilir), bu L doğrusuna S için bir bariyer doğru denir.

Eğer S bariyer doğrulara sahip değilse S nin çekirdeği bütün düzlemdir. S nin bir bariyer doğrusu varsa, S nin limit noktalarının cümlesi olan L_x i içeren bütün yarı düzlemlerin arakesiti S nin çekirdeğidir.

Bu iki tanım denktir.

Teorem 3.1.5:(Knopp Çekirdek Teoremi) Eğer $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir regüler matris ise, (z_n) kompleks dizisinin R çekirdeği $z_n^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k$ nın $R^{'}$ çekirdeğini içerir (Cooke 1950, sh 140).

Bu bilgilerin ışığı altında şunu söyleyebiliriz;

(i) Eğer iki dizi aynı yığılma noktaları cümlesine sahipse, bunlar aynı çekirdeğe sahiptir (İkinci tanımdan).

(ii) İki dizinin çekirdekleri aynı olduğu halde yığılma noktaları cümleleri farklı olabilir. Örneğin;

$$\{1, 0, 1, 0, ...\} \quad ve \quad \{1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, ...\}$$

her ikisinin de çekirdeği $[0, 1]$ aralığıdır.

Bu sonuç şu soruyu doğurur; eğer iki dizi aynı çekirdeğe sahip ise bunların yığılma noktaları cümleleri hakkında ne söylenebilir? Cevap, çekirdeğin 1. ya da 2. tanımını düşünmemize bağlı olarak iki yolla verilebilir.

Sonuç 3.1.6: İki dizinin aynı çekirdeğe sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart, bunlardan birinin yığılma noktaları cümlesini içeren her bir yarı düzlemin, diğerinin yığılma noktaları cümlesini de içermesidir (Cooke 1950, sh 140).

Sonuç 3.1.7: İki dizinin aynı çekirdeğe sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart, bunlardan birinin yığılma noktaları cümlesini içeren konveks bölgenin diğerinin yığılma noktaları cümlesini içermesidir (Cooke 1950, sh 141).

Bu kısımda Knopp tarafından tanımlanan bir x dizisinin çekirdeği, $\mathcal{K}-core\{x\}$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.1.8 Eğer (x_n) ve $\left(x_n^{'}\right)$ $\underset{n}{lim}\left|x_n - x_n^{'}\right| = 0$ olacak şekilde iki dizi ise bu durumda (x_n) ve $\left(x_n^{'}\right)$ dizilerinin R ve $R^{'}$ çekirdekleri çakışıktır (Cooke 1950, sh 144).

Teorem 3.1.9: A bir regüler matris olsun. Bir sınırlı (x_n) dizisinin çekirdeğinin, bu dizinin $A-$dönüşümü olan (σ_n) nin çekirdeğini içermesi için gerek ve yeter şart,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| = 1 \qquad (3.1.1)$$

olmasıdır (Cooke 1950, sh 149).

Teorem 3.1.10. Herhangi bir sınırlı (x_n) dizisinin $A-$dönüşümünün çekirdeğinin (x_n) dizisinin çekirdeği tarafından içerilmesi için gerek ve yeter şart, bütün sınırlı diziler için regüler (a_{nk}) matrisinin negatif olmayan bir (b_{nk}) matrisine mutlak denk olmasıdır (Cooke, 1950, sh 153).

Şimdi ise reel terimli matrisler ve reel terimli sınırlı dizileri gözönüne alalım. $G, H : m \to \mathbb{R}$ fonksiyonelleri verildiğinde, eğer her $x \in m$ için $G(x) \leq H(x)$ ise $G < H$ yazacağız.

$L = \limsup x_n$ olmak üzere $L(Ax)$ i bazen $L_A(x)$ şeklinde göstereceğiz.

Lemma 3.1.11: Eğer $A = (a_{nk})$, her $k \in \mathbb{N}$ için $lim_n a_{nk} = 0$ olacak şekilde $\sum_{k\in\mathbb{N}}|a_{nk}| < \infty$ şartını gerçekleyen bir matris ise bu durumda

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk}y_k = \limsup_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{N}}|a_{nk}|$$

ve $\|y\| \leq 1$ olacak şekilde, sınırlı bir $y = (y_n)$ dizisi vardır (Simmons, 1969).

Teorem 3.1.12: $LA \leq L$ olması için gerek ve yeter şart, (3.1.1) in gerçeklenmesidir (Maddox, 1979).

$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. Her $x \in m$ için $\sum\limits_k a_{nk}x_k$ tanımlı (sonlu) olması için gerek ve yeter şart her n için

$$\sum_k |a_{nk}| < \infty \qquad (3.1.2)$$

olmasıdır. Buna göre

$$(x_k) \to (A_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_k a_{nk}x_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (3.1.3)$$

dönüşümünün, m den s nin içine tanımlı bir dönüşüm olması için gerek ve yeter şart, her $n \in \mathbb{N}$ için (3.1.2) nin gerçeklenmesidir.

Tanım 3.1.13: $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi (3.1.2) yi gerçekliyorsa ve

$$\underset{n \in N}{sup} \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

ise A matrisine bir m-matrisi denir (Simmons, 1969).

A bir m-matrisi ve $x \in m$ olmak üzere aşağıdaki alt lineer fonksiyonelleri gözönüne alalım.

$$LA(x) = \limsup_n \sum_k a_{nk} x_k$$

$$Q(x) = \limsup_n \sup_j \sum_k a_{nk} x_{k+j}$$

L ve Q dönüşümleri altlineer olup $LA \leq Q$ dur (Simmons, 1969).

Teorem 3.1.14: Aşağıdakiler denktir.

1) A regüler ve hemen hemen pozitiftir.

2) $Q \leq L$

3) $LA \leq L$ (Simmons, 1969)

Tanım 3.1.15: Şimdi m üzerinde aşağıdaki altlineer fonksiyonelleri tanımlayalım.

$$\begin{array}{llll}
\ell(x) & := \liminf x_k \ , & y(x) & := \liminf \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \\
L(x) & := \limsup x_k \ , & Y(x) & := \limsup \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \\
S(x) & := \sup x_k \ , & bs & := \{z = (z_n) \in m : \sup_n \left| \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \right| < \infty\} \\
p(x) & := \limsup |x_k| \quad , & Z(x) & := \limsup \dfrac{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|}{k} \\
\|x\| & := \sup |x_k| \quad , & w(x) & := \inf \{L(x + z) : z \in bs\} \\
t(x) & := \liminf |x_k| \quad , & &
\end{array}$$

Teorem 3.1.16: m üzerinde

$$\ell \leq y \leq Y \leq w \leq L \leq s \leq \|.\| , \qquad w \leq p \leq \|.\|$$

dur (Maddox, 1979).

Teorem 3.1.17: B, hemen hemen pozitif regüler herhangi bir matris olsun. Bu durumda $LA \leq \ell B$ olacak şekilde A matrisi yoktur (Maddox, 1979).

Teorem 3.1.18: $LA \leq \ell B$ olması için gerek ve yeter şart B nın Schur matrisi ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

olmasıdır (Kuttner ve Maddox, 1983).

Teorem 3.1.18: $SA \leq S$ olması için gerek ve yeter şart her n, k için $a_{nk} \geq 0$ ve her n için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ olmasıdır (Kuttner ve Maddox, 1983).

Sınırlı reel x dizisinin çekirdeği

$$[\liminf x, \limsup x]$$

kapalı aralığıdır. Knopp çekirdek teoremi

$$\limsup Ax \leq \limsup x$$

olacak şekildeki reel regüler matrislerin karakterizasyonuna bir örnektir. Bu son eşitsizlik ise

$$\mathcal{K} - core\,\{Ax\} \subset \mathcal{K} - core\,\{x\}$$

olması demektir.

Tanım 3.1.19 (Banach Çekirdeği): x reel sınırlı diziler uzayı m nin bir elemanı olduğunda x in Banach çekirdeği ($\mathcal{B} - core\,\{x\}$)

$$[-q(-x), q(x)]$$

kapalı aralığı olarak tanımlanır (Das, 1987).

Burada $q(x)$, (1.1.2) de tanımlanan fonksiyoneldir. $q(x) \leq limsupx$ olduğundan

$$\mathcal{B} - core\,\{x\} \subset \mathcal{K} - core\,\{x\}$$

dir (Das, 1973; Devi, 1976).

Tanım 3.1.20: τ, reel terimli regüler matrislerin cümlesi olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \to 1$$

olacak şekilde $A \in \tau$ matrislerinin cümlesini τ^{+} ile gösterelim.

$$\lim_{n} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0$$

olacak şekilde $A \in \tau^+$ matrislerinin cümlesini de τ^* ile göstereceğiz (Das, 1973).

Teorem 3.1.21: E, m nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda

$$\{E, L_A\} \subset \pounds_E = \{E, q\} \qquad (A \in \tau^*)$$

dır (Das, 1973).

Teorem 3.1.22: E, m nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda

$$\{m_0, L_A\} \subset \pounds_{m_0} = \{m_0, q\} \qquad \left(A \in \tau^+\right)$$

dır (Das, 1973).

Sonuç 3.1.23: $A \in \tau^* \Rightarrow \forall x \in m$ için $L_A(x) \leq q(x)$ dır (Das, 1973).

Daha önce reel terimli sınırlı bir dizinin $A-$ dönüşüm dizisinin Knopp çekirdeğinin

$$[\liminf Ax, \limsup Ax]$$

kapalı aralığı ve Banach çekirdeğinin de

$$[-q(-x), q(x)]$$

kapalı aralığı olduğu söylendi. Sonuç 3.1.23 ün hipotezleri altında

$$\limsup Ax \leq q(x)$$

ve

$$-q(-x) \leq \liminf Ax \leq \limsup Ax \leq q(x)$$

olup

$$\mathcal{K} - core\,\{Ax\} \subset \mathcal{B} - core\,\{x\}$$

elde edilmiş olunur.

Tanım 3.1.24: Şimdi m üzerinde

$$\ell^*(x) = \lim_n \inf \sup_i \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} x_r \tag{3.1.4}$$

$$L^*(x) = \lim_n \inf \sup_i \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} x_r \tag{3.1.5}$$

altlineer fonksiyonellerini tanımlayalım.

Teorem 3.1.25: $L^*A \leq L^*$ olması için gerek ve yeter şart A nın $F-$regüler ve

$$\lim_n \sup_i \sum_k \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} |a_{rk}| = 1$$

olmasıdır (Orhan, 1988).

Teorem 3.1.26: $LA \leq L^*$ olması için gerek ve yeter şart, A nın kuvvetli regüler olması ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$ olmasıdır (Orhan, 1990).

Teorem 3.1.27. Her sınırlı x dizisi için $q(x) = L^*(x)$ dir (Das ve Mishra, 1981).

Teorem 3.1.28: $B = (b_{nk})$ bir normal matris olsun. $B^{-1} = (b_{nk}^{-1})$ ile onun iki taraflı tersini gösterelim. $A = (a_{nk})$ herhangi bir matris olsun. Bx sınırlı olduğunda Ax mevcut ve sınırlı ve

$$L(Ax) \leq L(Bx)$$

sağlanır. Bunun için gerekli ve yeterli şartlar,

(i) $C = AB^{-1}$ mevcut

(ii) C regüler

(iii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| \to 1 \ (n \to \infty)$

(iv) Her sabit n için $\sum\limits_{k=0}^{J} \left| \sum\limits_{j=J+1}^{\infty} a_{nj} b_{jk}^{-1} \right| \to 0 \ (J \to \infty$

olmasıdır (Choudhary, 1988).

Tanım 3.1.29: $C_n(x)$, $\{x_k\}_{k\geq n}$ nin kapalı konveks hull'u olmak üzere kompleks sayıların bir $x = (x_n)$ dizisinin Knopp çekirdeği

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(x)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{K}-core\,\{x\}$ ile gösterilir. $\mathcal{K}-core\,\{x\}$ zorunlu olarak kapalı ve konveks bir cümledir (Shcherbakov, 1977).

Eğer x sınırlı ise, bu durumda ,

$$B_x^*(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq \limsup_n |x_n - z|\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{K} - core\,\{x\} = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} B_x^*(z)$$

olduğu Shcherbakov (1977) tarafından gösterildi .

Teorem 3.1.30: Her sınırlı x dizisi için $A = (a_{nk})$ kompleks elemanlarının sonsuz bir matrisi için

$$\mathcal{K} - core\,\{Ax\} \subseteq \mathcal{K} - core\,\{x\}$$

olması için gerek ve yeter şart, A nın regüler olması ve

$$\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < 1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Natarajan, 1990)

Tanım 3.1.31: Eğer $x = \{x_n\}$, $x_n \in B$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,$C_n(x)$, $\{x_k\}_{k \geq n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ nin kapalı konveks hull'u olmak üzere x in çekirdeği

$$\mathcal{K} - core\,\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(x)$$

şeklinde tanımlanır (Natarajan, 1990).

Uyarı 3.1.32: Eğer $x = \{x_n\}$, bir B Banach uzayında sınırlı bir dizi ise, bu durumda $\{C_n(x)\}_n$; B deki kapalı ve konveks alt kümelerin sınırlı yuvarlarının azalan bir dizisidir ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(x) \neq \phi$ dir. Böylece bir Banach uzayındaki herhangi sınırlı bir dizinin boş olmayan bir çekirdeği vardır.

Teorem 3.1.33: Eğer $x = \{x_n\}$, $x_n \in B$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ sınırlı ise, bu durumda

$$B_x^*(z) := \{w \in B : \|w - z\| \leq \limsup_n \|x_n - z\|\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{K} - core\,\{x\} \subseteq \bigcap_{z \in B} B_x^*(z)$$

dir (Li, 1998).

Teorem 3.1.34: H, bir Hilbert uzayı olsun. Eğer $x = \{x_n\}$, $x_n \in H$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ sınırlı ise, bu durumda

$$B_x^*(z) := \{w \in H : \|w - z\| \leq \limsup_n \|x_n - z\|\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{K} - core\,\{x\} = \bigcap_{z \in H} B_x^*(z)$$

dir (Li, 1998).

3.2 İstatistiksel Çekirdek

Bir x reel sayı dizisi için

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : \delta\{k : x_k > b\} \neq 0\}$$

$$A_x := \{a \in \mathbb{R} : \delta\{k : x_k < a\} \neq 0\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $\delta(K) \neq 0$ ın anlamı , $\delta(K) > 0$ veya K doğal yoğunluğa sahip değildir anlamındadır.

Tanım 3.2.1: Eğer x bir reel sayı dizisi ise x in istatistiksel üst limiti

$$st - \limsup x := \begin{cases} \sup B_x & , B_x \neq \phi \\ -\infty & , B_x = \phi \end{cases}$$

ile verilir. Benzer şekilde x in istatistiksel alt limiti

$$st - \liminf x := \begin{cases} \inf A_x & , A_x \neq \phi \\ +\infty & , A_x = \phi \end{cases}$$

ile tanımlanır (Fridy ve Orhan, 1997).

Örnek 3.2.2: x dizisi

$$x_k := \begin{cases} k & , k \text{ bir tek kare ise} \\ 2 & , k \text{ bir çift kare ise} \\ 1 & , k \text{ bir tek, kare olmayan ise} \\ 0 & , k \text{ bir çift,kare olmayan ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Açık olarak x üstten sınırsızdır ve böylece $B_x = (-\infty, 1)$ ve $st - \limsup x = 1$ dir. x, 0 a ve 1 e yakınsayan pozitif yoğunluklu farklı iki alt diziye sahip olduğundan x istatistiksel yakınsak değildir.

x in istatistiksel cluster noktalarının kümesi $\{0, 1\}$ ve $st - \liminf x$ bu kümenin en küçük elemanı iken $st - \limsup x$ en büyük elemanına eşittir.

Teorem 3.2.3: Eğer $\beta = st - \limsup x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k : x_k > \beta - \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta\{k : x_k > \beta + \varepsilon\} = 0 \tag{3.2.1}$$

dir. Tersine (3.2.1) her ε pozitif sayısı için sağlanırsa, $\beta = st - \limsup x$ dir (Fridy ve Orhan, 1997).

$st - \liminf x$ için benzer teorem aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 3.2.4: Eğer $\alpha = st - \liminf x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k : x_k < \alpha + \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta\{k : x_k < \alpha - \varepsilon\} = 0 \tag{3.2.2}$$

dir. Tersine (3.2.2) her ε pozitif sayısı için sağlanırsa, $\alpha = st - \liminf x$ dir (Fridy ve Orhan, 1997).

Bölüm 2.1 deki istatistiksel cluster noktalarının tanımından Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4, $st - \limsup x$ in ve $st - \liminf x$ in x in istatistiksel cluster noktalarının en büyüğü ve en küçüğü olduğunu ifade eder.

Teorem 3.2.5: Herhangi bir x dizisi için $st - \liminf x \leq st - \limsup x$ dir (Fridy ve Orhan, 1997).

Teorem 3.2.5 ve yukarıdaki tanımdan her x dizisi için

$$\liminf x \leq st - \liminf x \leq st - \limsup x \leq \limsup x \tag{3.2.3}$$

olduğu açıktır.

Tanım 3.2.6: Eğer $\delta\{k : |x_k| > B\} = 0$ olacak şekilde bir B sayısı varsa x reel sayı dizisine istatistiksel sınırlıdır denir.

Teorem 3.2.7: İstatistiksel sınırlı x dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$st - \liminf x = st - \limsup x$$

olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1997).

Bir sınırlı x dizisinin çekirdeği x in limit noktalarının kümesinin kapalı konveks hull'u olduğundan Knopp'un çekirdeğinin doğal bir benzerini vermek için istatistiksel cluster noktaları ile limit noktalarını yerdeğiştirebiliriz.

Tanım 3.2.8: Eğer x istatistiksel sınırlı ise x in istatistiksel çekirdeği $[st - \liminf x, st - \limsup x]$ kapalı aralığıdır. x in istatistiksel sınırlı olmaması durumunda, $st - core\{x\}$, $[st - \liminf x, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ veya $(-\infty, st - \limsup x]$ den birine göre tanımlanır (Fridy ve Orhan, 1997).

$st - core\{x\}$ ile x in istatistiksel çekirdeği ve $\mathcal{K} - core\{x\}$ ile genel Knopp çekirdeği gösterilecektir. Herhangi bir x reel sayısı dizisi için

$$st - core\{x\} \subseteq \mathcal{K} - core\{x\}$$

olduğu (3.2.3) den açıktır.

Sınırlı diziler üzerinde kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklığın denk olduğu Connor (1988) tarafından gösterilmişti.

Ayrıca, $A \in (w_p \cap \ell_\infty, c)$ dir $\Leftrightarrow A \in \tau^*$ dır, yani A regüler ve $\delta(E) = 0$ olacak şekildeki her $E \subseteq N$ için $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$ dır (Maddox, 1974).

Lemma 3.2.9: Kabul edelim ki A matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\forall x \in \ell_\infty \text{ için } \limsup Ax \leq st - \limsup x$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$A \in \tau^* \text{ ve } \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1997).

Teorem 3.2.10 (İstatistiksel Çekirdek Teoremi): Eğer A matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ ise bu durumda

$$\mathcal{K} - core\{Ax\} \subseteq st - core\{x\} \quad (\forall x \in \ell_\infty)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$A \in \tau^* \text{ ve } \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

olmasıdır.(Fridy ve Orhan, 1997).

Teorem 3.2.11: Eğer x dizisi üstten sınırlı ise ve $\beta := st - \limsup x$ sayısına C_1-toplanabilir ise x, β ya istatistiksel yakınsaktır (Fridy ve Orhan, 1997).

Sonuç 3.2.12: Eğer x alttan sınırlı bir dizi ve $\alpha := st - \liminf x$ sayısına C_1-toplanabilir ise x, α ya istatistiksel yakınsaktır ($st - \lim x = \alpha$ dır) (Fridy ve Orhan, 1997).

Herhangi bir x dizisi için x in istatistiksel çekirdeği aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

Tanım 3.2.13: Herhangi bir x kompleks dizisi için, $\mathcal{H}(x)$ ile h.h.k. için x_k yı içeren bütün kapalı-yarı düzlemlerin kolleksiyonunu gösterelim. Bu durumda x in istatistiksel çekirdeği

$$st-core\{x\}=\bigcap_{H\in\mathcal{H}(x)} H$$

ile tanımlanır.(Fridy ve Orhan, 1997).

Lemma 3.2.14: x sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizi ve her $z\in\mathbb{C}$ için

$$B_x(z):=\{z\in\mathbb{C}:|w-z|\leq st-\limsup|x_k-z|\}$$

olsun. Bu durumda

$$st-core\{x\}=\bigcap_{z\in\mathbb{C}} B_x(z)$$

dir (Fridy ve Orhan, 1997).

Uyarı: Yukarıdaki Lemma 3.2.14 de $st-core\{x\}$ için x in istatistiksel sınırlı olması şartı kaldırılamaz.

Örnek 3.2.15: Eğer $(x_k)=(k)$ ise x istatistiksel cluster noktasına sahip değildir ve $st-core\{x\}=\phi$ tur. Fakat her $z\in\mathbb{C}$ için, h.h.k. için x_k yı içeren sonlu yarıçaplı disk yoktur, böylece $st-\limsup|x_k-z|=\infty$ ve $B_x(z)$, tüm $\mathbb{C}$ düzlemidir, bu yüzden $\bigcap_{z\in\mathbb{C}} B_x(z)=\mathbb{C}$ dir (Fridy ve Orhan, 1997).

Teorem 3.2.16: Eğer A matrisi için $\sup_n\sum_k|a_{nk}|<\infty$ ise bu durumda her $x\in\ell_\infty$ için $\mathcal{K}-core\{Ax\}\subseteq st-core\{x\}$ olması için gerek ve yeter koşul

(i) $A\in\tau^*$, yani A regüler ve $\delta(E)=0$ olduğunda $\lim_n\sum_{k\in E}|a_{nk}|=0$ dır.

(ii) $\lim_n\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|=1$ dir (Fridy ve Orhan, 1997).

Yukarıda söylendiği gibi her dizi için $st-core\{x\}\subseteq K-core\{x\}$ dir. Buna göre Teorem 3.2.16 dan dolayı orjinal Knopp Teoremi'nin bir istatistiksel benzerini verebiliriz.

Sonuç 3.2.17: Eğer A matrisi için $\sup_n\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$ ve Teorem 3.2.16 nın (i) ve (ii) şartları sağlanırsa bu durumda her $x\in\ell_\infty$ için

$$st-core\{Ax\}\subseteq st-core\{x\}$$

elde edilir (Fridy ve Orhan, 1997).

Not: Sonuç 3.2.17 nin karşıtı doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.2.18: A matrisi h.h.k. için $(Ax)_n = x_n$ olacak şeklinde tanımlayalım. Teorem 2.1.11 ile Ax in istatistiksel cluster noktaları ile x in istatistiksel cluster noktaları aynıdır. Böylece

$$st - core\{Ax\} = st - core\{x\}$$

dir.

$$a_{nk} := \begin{cases} 1 & , \text{ eğer } k = n \text{ ve } n \text{ bir kare değil ise} \\ 1 & , \text{ eğer } k \leq n \text{ ve } n \text{ bir kare} \\ 0 & , \text{ diğer yerlerde} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$(Ax)_n = \begin{cases} x_n & , \text{eğer } n \text{ kare değil ise} \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & , \text{eğer } n \text{ bir kare ise} \end{cases}$$

olacaktır. Buradan $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \infty$ olur. Yani A, (ii) yi sağlamaz. İlave olarak $\delta(E) = 0$ olduğundan $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$ da sağlanmaz.

Şimdi de iki matris dönüşümünün çekirdeğinin karşılaştırmasını verelim. Choudhary (1988) tarafından Knopp'un çekirdek teoremi iki matris dönüşümüne

$$\mathcal{K} - core\{Ax\} \subseteq \mathcal{K} - core\{Bx\}$$

şeklinde genişletildi. Burada $B = \mathbf{I}$ alınırsa Knopp'un teoremi elde edilir. Aşağıdaki teorem, bu teoremin bir istatistiksel benzeridir.

Teorem 3.2.19: B bir normal matris olsun ve $B^{-1} = [b_{nk}^{-1}]$ ile onun üçgensel tersini gösterelim. $Bx \in \ell_\infty$ olduğunda, keyfi bir A matrisi için Ax mevcut ve sınırlı ve

$$\mathcal{K} - core\{Ax\} \subseteq st - core\{Bx\}$$

sağlanır. Bunun için gerekli ve yeterli şartlar,

(i) $C := AB^{-1}$ mevcut;

(ii) $C \in \tau^*$;

(iii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| = 1$;

(iv) Her sabit n için $\lim_{v} \sum_{k=0}^{v} \left| \sum_{j=v+1}^{\infty} a_{nj} b_{jk}^{-1} \right| = 0$ dır (Fridy veOrhan, 1997).

Yukarıdaki gibi $st-core\{Ax\} \subseteq st-core\{Bx\}$ gerçeğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.20: Eğer A ve B matrisleri Teorem 3.2.19 un $(i) - (iv)$ şartlarını sağlarsa bu durumda $Bx \in \ell_\infty$ olacak şekildeki her x için

$$st - core\{Ax\} \subseteq st - core\{Bx\}$$

dir (Fridy ve Orhan, 1997).

3.3 Bir Dizinin A-istatistiksel Çekirdeği

İstatistiksel yakınsaklık; C_1 Cesàro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir A matrisi alınarak genelleştirilmiştir (Freedman ve Sember, 1981).

Eğer $\lim_n (A\chi_K)_n = \lim_n \sum_{k\in K} a_{nk}$ limiti mevcutsa bu durumda bir $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi $A-$yoğunluğa sahiptir denir.

Bir $x = (x_k)$ sayı dizisi verildiğinde eğer $K(\varepsilon) = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin $A-$yoğunluğu sıfır ise x dizisi L sayısına $A-$istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st_A - limx = L$ ile gösterilir (Freedman ve Sember, 1981; Connor, 1989).

Kısım 2.1 de ele alınan istatistiksel limit ve cluster noktaları kavramlarının $A-$istatistiksel benzerleri şu şekilde ifade edilebilir:

Eğer bir x dizisinin λ sayısına yakınsayan $\delta_A(K) \neq 0$ olacak şekilde bir $A-$ince olmayan $\{x\}_K$ alt dizisi varsa λ sayısına x dizisinin bir $A-$istatistiksel limit noktası denir. x dizisinin bütün $A-$istatistiksel limit noktalarının cümlesi ise $\Lambda_A(x)$ ile gösterilir (Connor ve Kline, 1996).

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N}: |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ kümesinin $A-$yoğunluğu sıfırdan farklı olacak şekilde bir γ sayısı varsa bu durumda γ sayısına x dizisinin bir $A-$istatistiksel cluster noktası denir. x in tüm $A-$istatistiksel cluster noktalarının kümesi ise $\Gamma_A(x)$ ile gösterilir (Connor ve Kline, 1996).

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere bir $x = (x_k)$ sayı dizisi için

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \delta_A \{k : x_k > b\} \neq 0\}$$

ve

$$A_x = \{a \in \mathbb{R} : \delta_A \{k : x_k < a\} \neq 0\}$$

kümeleri tanımlansın. Burada, $\delta_A(K) \neq 0$ ifadesi, $\delta_A(K) > 0$ veya K nın A-yoğunluğa sahip olmadığı anlamındadır.

Tanım 3.3.1: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve x bir sayı dizisi olsun. Bu durumda x in A-istatistiksel üst limiti

$$st_A - \limsup x := \begin{cases} \sup B_x & , B_x \neq \emptyset \\ -\infty & , B_x = \emptyset \end{cases}$$

ile, x in $A-$istatistiksel alt limiti ise

$$st_A - \liminf x := \begin{cases} \inf A_x & , A_x \neq \emptyset \\ +\infty & , A_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Demirci, 2000).

Tanım 3.3.2: Eğer $\delta_A \{k : |x_k| > B\} = 0$ olacak şekilde bir B sayısı varsa x sayı dizisine A-istatistiksel sınırlıdır denir (Demirci, 2000).

Eğer Tanım 3.3.1 ve Tanım 3.3.2 de $A = C_1$ alınırsa bu durumda Tanım 3.2.1 i ve Tanım 3.2.7 yi elde ederiz.

Örneğin,

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{n}{2(n+1)} & , k = n^2 + 1 \\ 1 - \frac{n}{2(n+1)} & , k = n^2 + 2 \\ 0 & , \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ile tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini ve

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & , k = n^2 + 1 \\ 2 & , k = n^2 + 2 \\ k & , k = n^2 \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile $x = (x_k)$ dizisini tanımlayalım.

$A = (a_{nk})$ nın negatif olmayan regüler bir matris olduğu açıktır. x dizisi üstten sınırsız olmasına rağmen, $\delta_A \{k : |x_k| > 2\} = 0$ olduğundan A-istatistiksel sınırlıdır.

Eğer $D := \{k = n^2 : n = 1, 2, \ldots\}$, $E := \{k = n^2 + 1 : n = 1, 2, \ldots\}$ ve $F := \{k = n^2 + 2 : n = 1, 2, \ldots\}$ yazarsak $\delta(D) = 0$, $\delta(E) = 0$, $\delta(F) = 0$, $\delta(E \cup F) = 0$,

$\delta(D \cup E \cup F) = 0$ elde ederiz. Ayrıca $\delta_A(D) = 0$, $\delta_A(E) = \frac{1}{2}$, $\delta_A(F) = \frac{1}{2}$, $\delta_A(E \cup F) = 1$, $\delta_A(D \cup E \cup F) = 1$ dir. Böylece $B_x = (-\infty, 2)$, $A_x = (0, +\infty)$, $st_A - \limsup x = 2$ ve $st_A - \liminf x = 0$ olur. x, A-istatistiksel yakınsak değildir. Çünkü x in sırasıyla 0 a ve 2 ye yakınsayan ve A-yoğunluğu pozitif olan iki tane ayrık alt dizisi vardır (Kolk, 1993, Teorem 5.1.2). x in A-istatistiksel cluster noktalarının kümesi $\Gamma_A(x)$ $:= \{0, 2\}$ ve $st_A - \liminf x$ bu kümenin en küçük elemanı iken $st_A - \limsup x$ en büyük elemanına eşittir.

Teorem 3.3.3: Eğer $\beta = st_A - \limsup x$ sonlu ise, her pozitif ε sayısı için

$$\delta_A \{k : x_k > \beta - \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta_A \{k : x_k > \beta + \varepsilon\} = 0 \qquad (3.3.1)$$

olur. Karşıtı olarak, eğer her pozitif ε sayısı için (3.3.1) sağlanırsa, $\beta = st_A - \limsup x$ olur (Demirci, 2000).

$st_A - \liminf x$ için benzer ifade aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.3.4: Eğer $\alpha = st_A - \liminf x$ sonlu ise, her pozitif ε sayısı için

$$\delta_A \{k : x_k < \alpha + \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta_A \{k : x_k < \alpha - \varepsilon\} = 0 \qquad (3.3.2)$$

olur. Karşıtı olarak, eğer her pozitif ε sayısı için (3.3.2) sağlanırsa, $\alpha = st_A - \liminf x$ olur (Demirci, 2000).

Teorem 3.3.5: Herhangi bir x reel sayı dizisi için

$$st_A - \liminf x \leq st_A - \limsup x$$

olur (Demirci, 2000).

Teorem 3.3.6: A-istatistiksel sınırlı x dizisinin A-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$st_A - \liminf x = st_A - \limsup x$$

olmasıdır (Demirci, 2000).

Teorem3.3.7: Eğer x sayı dizisi sınırlı ve $L := st_A - \limsup x$ değerine A-toplanabilir ise, bu durumda x, L ye A-istatistiksel yakınsaktır (Demirci, 2000).

Sonuç 3.3.8: Eğer x sayı dizisi sınırlı ve $L := st_A - \liminf x$ değerine A-toplanabilir ise, bu durumda x, L ye A-istatistiksel yakınsaktır (Demirci, 2000).

$A-$**istatistiksel Çekirdek**

Eğer x ve y dizileri

$$\delta_A\{k \in \mathbb{N} : x_k = y_k\} = 1$$

olacak şekilde diziler ise bu durumda "$A - h.h.k.$ için $x_k = y_k$ " dır denir.

Tanım 3.3.9: x kompleks bir dizi ve $A - h.h..k.$ için x_k yı içeren bütün kapalı yarı-düzlemlerin kümesi $H_A(x)$ olsun. Yani

$$H_A(x) := \{H : H \text{ kapalı yarı düzlemdir ve } \delta_A\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin H\} = 0\}$$

olsun. Bu durumda x in A-istatistiksel çekirdeği

$$st_A - core\{x\} := \bigcap_{H \in H_A(x)} H$$

ile verilir.

Dikkat edilmelidir ki $\mathcal{K} - core\{x\}$ in tanımında kapalı konveks hull $C_n(x)$ in $\{x_k\}_{k \geq n}$ yi içeren bütün kapalı yarı-düzlemlerin kesişimi olduğuna dikkat edelim. $st_A - core\{x\}$ tanımında ise A-yoğunluklu keyfi bir alt dizisiyle $\{x_k\}_{k \geq n}$ yi yer değiştirdik. Bu yüzden her x için $st_A - core\{x\} \subseteq \mathcal{K} - core\{x\}$ olur. Herhangi bir A-istatistiksel sınırlı x reel dizisi için

$$st_A - core\{x\} = [st_A - \liminf x, st_A - \limsup x]$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.3.10: x, A-istatistiksel sınırlı bir dizi olsun ve her bir $z \in \mathbb{C}$ için

$$B_x(z) := \left\{ w \in C : |w - z| \leq st_A - \limsup_k |x_k - z| \right\}$$

olsun. Bu durumda

$$st_A - core\{x\} = \bigcap_{z \in C} B_x(z).$$

(Demirci, 2000).

Eğer x; A-istatistiksel sınırlı değilse Teorem 3.3.10 un zorunlu olarak geçerli olmadığına dikkat edelim. Örnek olarak,

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \ k = n^2 \\ 0 & , \ diğer\ durumda \end{cases}$$

ile tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini düşünelim.

$A = (a_{nk})$ nın negatif olmayan regüler matris toplanabilme metodu olduğu açıktır. Eğer her k için $x_k = k$ ise bu durumda x in A-istatistiksel cluster noktası yoktur ve $st_A - core\{x\} = \emptyset$ olur. Fakat herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ için hiçbir sonlu yarıçap diski $A - h.h.k.$ için x_k yı içermez, böylece $st_A - \limsup_k |x_k - z| = \infty$ olur ve $B_x(z)$ tüm $\mathbb{C}$ düzlemidir. Böylece

$$\emptyset = st_A - core\{x\} \neq \bigcap_{z \in C} B_x(z) = C.$$

olur.

Teorem 3.3.11: Eğer T matrisi

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| < \infty,$$

şartını sağlarsa her $x \in \ell_\infty$ için $\mathcal{K} - core\{Tx\} \subseteq st_A - core\{x\}$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

(i) $T \in \tau_A^*$ yani T regülerdir ve $\delta_A(E) = 0$ iken $\lim_n \sum_{k \in E} |t_{nk}| = 0$ dır.

(ii) $\lim_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| = 1$ dir (Demirci, 2000).

$st_A - core\{x\} \subseteq K - core\{x\}$ olduğundan aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 3.3.12: Eğer T matrisi $\sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| < \infty$ eşitsizliğini ve Teorem 3.3.11 in (i) ve (ii) nolu eşitsizliklerini sağlarsa her $x \in \ell_\infty$ için

$$st_A - core\{Tx\} \subseteq st_A - core\{x\}$$

olur (Demirci, 2000).

3.4 $I-$Üst ve $I-$Alt Limit, $I-$Çekirdek

İlk önce kümelerde ideal ve süzgeç tanımlarını hatırlayalım.

Tanım 3.4.1: $X \neq \varnothing$ olsun. X in alt kümelerinin bir $S \subset 2^X$ sınıfı toplamsal ve kalıtsal ise S ye X de bir ideal denir. Yani S aşağıdaki koşulları gerçekler:

(i) $\varnothing \in S$

(ii) $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S$

(iii) $A \in S,\ B \subseteq A \Rightarrow B \in S$ (Kuratowski, 1958, sh.34)

Eğer $X \notin S$ ise S ye aşikar olmayan ideal denir.

Tanım 3.4.2: $X \neq \varnothing$ olsun. Eğer X in alt kümelerinin boş kümeden farklı bir $F \subseteq 2^X$ sınıfı aşağıdaki koşulları sağlıyor ise F *ye* X de bir süzgeç denir.

(i) $\varnothing \notin F$

(ii) $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

(iii) $A \in F$, $A \subseteq B \Rightarrow B \in F$ (Nagata, 1974, sh.44)

Aşağıdaki önerme bir ideal ile bir süzgeç arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Önerme 3.4.3. $X \neq \varnothing$ ve S, X de aşikar olmayan bir ideal olsun. Bu durumda

$$F(S) = \{M \subseteq X : \exists\ A \in S \text{ için } M = X \setminus A\}$$

kümesi X üzerinde bir süzgeçtir ($F(S)$ yi S ile üretilen süzgeç olarak adlandıracağız) (Kostyrko ve diğ., 2000).

Tanım 3.4.4. S, X de aşikar olmayan bir ideal olsun. Eğer her $x \in X$ için $\{x\} \in S$ oluyorsa S ye bir admissible (kabul edilebilir) ideal denir (Kostyrko ve diğ., 2000).

Tanım 3.4.5: I, $\mathbb{N}$ de aşikar olmayan bir ideal olsun. Bu durumda

(i) Reel bir $x = (x_n)$ dizisi ve bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı verildiğinde eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $A(\varepsilon) = \{n : |x_n - L| \geq \varepsilon\} \in I$ oluyorsa bu durumda x dizisi L ye $I-$yakınsaktır denir ve $I - \lim x = L$ ile gösterilir (Kostyrko ve diğ.).

(ii) Bir $\xi \in \mathbb{R}$ noktası ve bir $x = (x_n)$ dizisi verildiğinde eğer $\lim_k x_{m_k} = \xi$ ve $M \notin I$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ varsa ξ ye $x = (x_n)$ dizisinin bir $I-$limit noktası denir (Kostyrko ve diğ., 2000).

(iii) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\{k : |x_k - \xi| < \varepsilon\} \notin I$ oluyorsa, bu durumda ξ ye $x = (x_k)$ dizisinin bir $I-$cluster noktası denir (Kostyrko ve diğ., 2000).

Not edelim ki, eğer I admissible bir ideal ise x in $I-$cluster noktaları kümesi $\mathbb{R}$ de bir kapalı nokta kümesidir (Kostyrko ve diğ., 2000).

Bu kısım boyunca I ideali admissible ideal olarak alınacaktır.

I-üst ve I-alt limit.

Bu kısımda bir reel sayı dizisi için $I-$üst limit ve $I-$alt limit kavramları çalışılacaktır.

Bir reel $x = (x_k)$ dizisi için B_x ve A_x kümeleri

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : \{k : x_k > b\} \notin I\} \quad \text{ve} \quad A_x = \{a \in \mathbb{R} : \{k : x_k < a\} \notin I\}$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım 3.4.6: I bir admissible ideal ve x bir reel sayı dizisi olsun. Bu durumda x dizisinin $I-$üst limiti

$$I-\limsup x := \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \varnothing \text{ ise} \\ -\infty, & B_x = \varnothing \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır. Ayrıca x in I-alt limiti

$$I-\liminf x := \begin{cases} \inf A_x, & A_x \neq \varnothing \text{ ise} \\ +\infty, & A_x = \varnothing \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır (Demirci, 2001).

Not edelimki, Tanım 3.4.6 da $I=\{K\subseteq\mathbb{N}:\delta_A(K)=0\}$, $I=\{K\subseteq\mathbb{N}:\delta(K)=0\}$ ve

$I=\{K\in\Gamma:\mu(K)=0\}$ şeklinde alınırsa bu durumda sırasıyla Demirci (2000) Tanım 1 e, Fridy ve Orhan (1997) Tanım 1 e ve Connor'ın (1999) $\mu-$istatistiksel üst ve alt limit tanımlarına ulaşılır. Bu gözlemlere dayanarak en küçük üst sınır kavramı ile ispatlanabilir aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.4.7: Eğer $\beta = I-\limsup x$ sonlu ise, bu durumda her $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\{k : x_k > \beta-\varepsilon\} \notin I \text{ ve } \{k : x_k > \beta-\varepsilon\} \in I \tag{3.4.1}$$

dır. Tersine eğer her $\varepsilon>0$ sayısı için (3.4.1) gerçeklenirse bu durumda $\beta = I-\limsup x$ dir (Demirci, 2001).

$I-\liminf x$ için benzer ifade aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.4.8: Eğer $\alpha = I-\liminf x$ sonlu ise bu durumda her pozitif ε sayısı için

$$\{k : x_k > \alpha+\varepsilon\} \notin I \text{ ve } \{k : x_k > \alpha-\varepsilon\} \in I \tag{3.4.2}$$

dır. Tersine eğer her $\varepsilon>0$ sayısı için (3.4.2) gerçeklenirse bu durumda $\alpha = I-\liminf x$ dir (Demirci, 2001).

Tanım 3.4.5 te I-cluster noktası tanımını göz önüne alırsak, Teorem 3.4.7 ve 3.4.8 den $I-\limsup x$ in ve $I-\liminf x$ in, x in en büyük ve en küçük I-cluster noktaları olduğu söylenebilir.

Teorem 3.4.9: Herhangi x reel sayı dizisi için

$$I - \liminf x \leq I - \limsup x$$

dir (Demirci, 2001).

İspat. İlk olarak $I - \limsup x = -\infty$ olduğu durumu ele alalım. Bu durumda $B_x = \varnothing$ olduğundan her $b \in \mathbb{R}$ için $\{k : x_k > b\} \in I$ dır. Böylece $\{k : x_k \leq b\} \in F(I)$ olur. Dolayısıyla her $a \in \mathbb{R}$ için $\{k : x_k \leq a\} \notin I$ dır. Yani $I - \liminf x = -\infty$ dur.

$I - \limsup x = +\infty$ olması durumu ispat gerektirmez.

Şimdi $\beta = I - \limsup x$ sonlu olduğunu kabul edelim ve $\alpha := I - \liminf x$ diyelim. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\beta + \varepsilon \in A_x$ olduğunu göstereceğiz. Böylece $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ olacaktır. $\beta = \sup B_x$ olduğundan Teorem 3.4.7 ye göre $\{k : x_k > \beta + \varepsilon\} \in I$ dır. Buradan ise $\{k : x_k \leq \beta + \varepsilon\} \in F(I)$ elde edilir. $\left\{k : x_k \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subseteq \{k : x_k \leq \beta + \varepsilon\}$ ve $F(I)$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir süzgeç olduğundan $\{k : x_k < \beta + \varepsilon\} \in F(I)$ olur. Yani, $\{k : x_k < \beta + \varepsilon\} \notin I$ dır. Böylece $\beta + \varepsilon \in A_x$ dir. $\alpha = \inf A_x$ tanımından $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ sonucuna ulaşırız. ε keyfi olduğundan $\alpha \leq \beta$ olduğu ispatlanır.■

Teorem 3.4.9 ve Tanım 3.4.6 dan herhangi x reel sayı dizisi için

$$\liminf x \leq I - \liminf x \leq I - \limsup x \leq \limsup x$$

olduğu açıktır.

Bir x dizisinin $I-$limit noktası Tanım 3.4.5 (ii) de, x in indisleri I ya ait olmayan alt dizisinin limiti olarak tanımlandı. Fakat $I - \limsup x$ in, x in en büyük $I-$limit noktasına eşit olduğunu söyleyemeyiz. Bu Fridy ve Orhan (1997) Örnek 1 de $I = \{K \subseteq \mathbb{N} : \delta(K) = 0\}$ iken görülebilir.

Tanım 3.4.10: $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $\{k : |x_k| > B\} \in I$ olacak şekilde bir B sayısı varsa bu durumda $x = (x_k)$ dizisine $I-$sınırlıdır denir (Demirci, 2001).

Not edelimki, $I-$sınırlılık $I - \limsup$ ve $I - \liminf$ değerlerinin sonlu olmasını gerektirir. Dolayısıyla Teorem 3.4.7 ve 3.4.8 deki (3.4.1) ve (3.4.2) özellikleri gerçeklenir.

Teorem 3.4.11: $I-$sınırlı x dizisinin $I-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart $I - \liminf x = I - \limsup x$ olmasıdır (Demirci, 2001).

İspat. $\alpha := I - \liminf x$ ve $\beta := I - \limsup x$ diyelim. İlk olarak, $I - \lim x = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \in I$ olduğundan $\{k : x_k > L + \varepsilon\} \in I$ olur. Böylece $\beta \leq L$ elde ederiz. Diğer taraftan $\{k : x_k < L - \varepsilon\} \in I$ olduğundan $L \leq \alpha$ elde edilir. Bu sonuçlar Teorem 3.4.9 ile birleştirilirse $\alpha = \beta$ sonucuna ulaşırız.

Şimdi $\alpha = \beta$ olduğunu kabul edelim ve $L := \alpha$ diyelim. Eğer $\varepsilon > 0$ ise bu durumda Teorem 3.4.7 ve 3.4.8 deki (3.4.1) ve (3.4.2), $\left\{k : x_k > L + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I$ ve $\left\{k : x_k < L - \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in I$ olmasını gerektirir. Böylece $I - \lim x = L$ elde edilir.■

$I-$çekirdek.

Fridy ve Orhan (1997) bir reel sayı dizisinin istatistiksel çekirdeği kavramını verdi ve istatistiksel çekirdek teoremini ispatladı. Bu sonuçlar Fridy ve Orhan (1997) çalışmasında kompleks durumlara genişletilmiştir. Fridy ve Orhan'ın (1997) benzer tekniğini kullanarak $I-$çekirdek kavramını vereceğiz ve A bir toplanabilme matrisi, x sınırlı kompleks dizi iken $I - core\{Ax\} \subseteq I - core\{x\}$ olması için gerekli koşullar elde edilecektir. Bu kısımda x, y ve z birer kompleks sayı dizisi olacak ve $A = (a_{nk})$ ise, $x = (x_k)$ kompleks sayı dizisinin n.ci terimi $(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ şeklinde verilen Ax dizisine dönüştüren kompleks girişli sonsuz bir matrisi belirtecektir.

Sıradaki tanım bir dizinin $I-$çekirdeğinin Fridy ve Orhan (1997) tarafından verilenin $I-$benzeridir.

Not edelimki, eğer x ve y $\{k \in \mathbb{N} : x_k = y_k\} \notin I$ olacak şekilde diziler ise bu durumda "$I - hemen\ her$ k için $x_k = y_k$" dır diyeceğiz.

Tanım 3.4.12: I, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal olsun. Herhangi bir x kompleks dizisi için $\mathcal{H}_I(x)$ ile, $I - h.h.k$ için x_k yı içeren bütün kapalı yarı düzlemlerin topluluğunu gösterelim. Yani

$$\mathcal{H}_I(x) := \{H : H \text{ kapalı yarı düzlem ve } \{k \in \mathbb{N} : x_k \notin H\} \in I\}$$

olsun. Bu durumda x dizisinin $I-$çekirdeği

$$I - core\{x\} := \bigcap_{H \in \mathcal{H}_I(x)} H$$

şeklinde tanımlanır. Her x için $I - core\{x\} \subseteq \mathcal{K} - core\{x\}$ olduğu açıktır. Ayrıca herhangi $I-$sınırlı x reel sayı dizisi için

$$I - core\{x\} = [I - \liminf x, I - \limsup x]$$

kapalı aralığıdır (Demirci, 2001).

Şimdiki teorem Fridy ve Orhan (1997) tarafından verilen Lemma 3.2.14 ün $I-$benzeridir.

Teorem 3.4.13: I, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal olsun ve x in bir $I-$sınırlı dizi olduğunu kabul edelim. Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$B_x(z) := \left\{ w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq I - \limsup_k |x_k - z| \right\}$$

diyelim. Bu durumda

$$I - core\{x\} := \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$$

dir (Demirci, 2001).

İspat. $I - \limsup x$ tanımından ve Teorem 3.4.7 den $B_x(z)$ diskinin $I - hemen$ her k için x_k yı içeren z merkezli bütün kapalı disklerin arakesitine eşit olduğunu söyleyebiliriz. İlk olarak $w \notin \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$ olduğunu kabul edelim. Böylece en az bir z^* için $w \notin B_x(z^*)$ dir. H düzlemi, $B_x(z^*)$ diskini içeren yarı düzlem olsun ve H ın sınır doğrusu w yı ve z^* ı içeren doğruya dik ve $B_x(z^*)$ ın çembersel sınırına teğet olsun. $B_x(z^*) \subset H$ olduğundan ve $B_x(z^*)$, $I - hemen$ her k için x_k yı içerdiğinden $H \in \mathcal{H}_I(x)$ dir. $w \notin H$ olduğundan $w \notin \bigcap_{H \in \mathcal{H}_I(x)} H$ dır. Dolayısıyla $I - core\{x\} \subseteq \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$ olur.

Tersine, $w \notin \bigcap_{H \in \mathcal{H}_I(x)} H$ olsun. H ise $w \notin H$ olacak şekilde $\mathcal{H}_I(x)$ de bir düzlem olsun. L, H nın sınırına dik olan, w dan geçen bir doğru, p, w ve H arasında L nin orta noktası, ve z ise $z \in H$ olacak şekilde L nin bir noktası olsun. $B(z) := \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| \leq |p - z|\}$ diskini göz önüne alalım. x, $I-$sınırlı ve $I - hemen$ her k için $x_k \in H$ olduğundan p den yeterince uzak z seçebiliriz. Böylece $|p - z| = I - \limsup_k |x_k - z|$ olur. Dolayısıyla $B(z)$ diski $B_x(z)$ disklerinden biridir ve $w \notin B(z)$ olduğundan $w \notin B_x(z)$ dir. Böylece $\bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z) \subseteq I - core\{x\}$ elde edilir. ■

Not edelimki Teorem 3.4.13, x, $I-$sınırlı olmadığı zaman geçerli değildir. Bunu Fridy ve Orhan (1997) tarafından verilen uyarıda $I = \{K \subseteq \mathbb{N} : \delta(K) = 0\}$ iken görebiliriz.

Şimdi, her sınırlı x dizisi için Ax in çekirdeğinin x in $I-$çekirdeği tarafından içerildiğinde, A matrisi üzerindeki gerekli koşulları verelim.

Teorem 3.4.14: I, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal olsun. Eğer A matrisi $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ koşulunu ve

(i) A regüler ve $E \in I$ iken $\lim_n \sum_{k \in I} |a_{nk}| = 0$

(ii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$

koşullarını gerçekliyorsa, bu durumda her $x \in \ell^{\infty}$ için $\mathcal{K} - core\{Ax\} \subseteq I - core\{x\}$ dir (Demirci, 2001).

İspat. (i) ve (ii) sağlansın ve $w \in \mathcal{K} - core\{Ax\}$ olsun. Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} |w - z| &\leq \limsup_n |z - (Ax)_n| \\ &= \limsup_n \left| z - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \\ &= \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (z - x_k) + z \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right) \right| \\ &\leq \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (z - x_k) \right| + \limsup_n |z| \left| 1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right| \\ &= \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (z - x_k) \right| \end{aligned}$$

dir. $r = I - \limsup_n |x_n - z|$ diyelim. $\varepsilon > 0$ olsun ve $E := \{k : |z_k - L| > r + \varepsilon\}$ tanımlayalım. Bu durumda $E \in I$ dır ve

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (z - x_k) \right| &= \left| \sum_{k \in I} a_{nk} (z - x_k) + \sum_{k \notin I} a_{nk} (z - x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k \in I} |a_{nk}| |z - x_k| + \sum_{k \notin I} |a_{nk}| |z - x_k| \\ &\leq \sup_k |z - x_k| \sum_{k \in I} |a_{nk}| + (r + \varepsilon) \sum_{k \notin I} |a_{nk}| \end{aligned}$$

olur. Buna göre (i) ve (ii) den $\lim \sup_n = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (z - x_k) \right| \leq r + \varepsilon$ elde edilir. ε keyfi olduğundan $|w - z| \leq r$ dir. Dolayısıyla $w \notin B_x(z)$ olup, Teorem 3.4.13 den $w \in I - core\{x\}$ elde edilir. ■

$I - core\{x\} \subseteq \mathcal{K} - core\{x\}$ olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4.15: Eğer A matrisi, $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ koşulunu ve Teorem 3.4.14 ün (i) ve (ii) koşullarını gerçeklerse bu durumda her $x \in \ell^{\infty}$ için

$$I - core\{Ax\} \subseteq I - core\{x\}$$

dir (Demirci, 2001).

Not edelimki Sonuç 3.4.15 in tersi doğru değildir. Bu, Fridy ve Orhan (1997) tarafından verilen örnekte $I = \{K \subseteq \mathbb{N} : \delta(K) = 0\}$ iken görülebilir.

3.5 Sınırlı Dizilerin Banach ve İstatistiksel Çekirdekleri

Teorem 3.5.1: $x \in \ell^\infty$ ve A kuvvetli regüler bir matris olsun. Bu durumda $\mathcal{K}-core\{Ax\} \subseteq \mathcal{B}-core\{x\}$ olması için gerek ve yeter koşul, bütün sınırlı diziler için A nın negatif olmayan kuvvetli regüler bir B matrisine mutlak denk olmasıdır (Orhan ve Yardımcı, 2004).

İspat. *Yeterlilik.* A matrisi, negatif olmayan kuvvetli regüler bir B matrisine mutlak denk olduğundan

$$\lim_n \{(Ax)_n - (Bx)_n\} = 0 \text{ (Her } x \in \ell^\infty \text{ için)} \tag{3.5.1}$$

dir. Cooke (1950) Teorem 3.1.10 dan

$$\mathcal{K}-core\{Ax\} \subseteq \mathcal{K}-core\{x\} \quad \text{(Her } x \in \ell^\infty \text{ için)} \tag{3.5.2}$$

dir. B negatif olmayan kuvvetli regüler bir matris olduğundan Orhan (1990) Teorem 3.1.26 dan her $x \in \ell^\infty$ için

$$\mathcal{K}-core\{Bx\} \subseteq \mathcal{B}-core\{x\} \tag{3.5.3}$$

dir. (3.5.1) geçerli olduğundan Teorem 3.1.8 den (Cooke,1950)

$$\mathcal{K}-core\{Ax\} = \mathcal{K}-core\{Bx\} \tag{3.5.4}$$

dir. Böylece (3.5.3) ve (3.5.4) den $\mathcal{K}-core\{Ax\} \subseteq \mathcal{B}-core\{x\}$ elde edilir.

Gereklilik. $x \in \ell^\infty$ ve A negatif olmayan kuvvetli regüler bir matris olsun. Hipotezden

$$\mathcal{K}-core\{Ax\} \subseteq \mathcal{B}-core\{x\} \subseteq \mathcal{K}-core\{x\} \tag{3.5.5}$$

dir. Şimdi öyle bir negatif olmayan regüler bir B matrisi vardır ki A ve B, ℓ^∞ üzerinde mutlak denktir (Cooke,1950, Teorem 3.1.10). Böylece Teorem 3.1.8 den (Cooke,1950)

$$\lim_n \sum_k |b_{nk} - a_{nk}| = 0 \tag{3.5.6}$$

olur. Geriye

$$\lim_n \sum_k |b_{nk} - b_{n,k+1}| = 0 \tag{3.5.7}$$

olduğunu göstermek kalıyor. Bunun için, önce

$$\begin{aligned}\sum_k |b_{nk} - b_{n,k+1}| &\leq \sum_k |b_{nk} - a_{nk}| + \sum_k |a_{n,k+1} - b_{n,k+1}| \\ &+ \sum_k |a_{nk} - a_{n,k+1}| \\ &= c_n^1 + c_n^2 + c_n^3\end{aligned}$$

diyelim. (3.5.6) dan $c_n^1 \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ dır. A nın kuvvetli regülerliğinden $c_n^3 \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ ve mutlak denklikten

$$c_n^2 = \sum_k |a_{n,k+1} - b_{n,k+1}| \leq \sum_k |a_{nk} - b_{nk}| \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$$

olur. Böylece (3.5.7) gerçeklenir. Bu ise teoremi ispatlar.■

Banach ve İstatistiksel Çekirdekler

Bu kısımda esas olarak, her sınırlı diziyi $\mathcal{B}-$çekirdeği orjinal dizinin istatisiksel çekirdeğinin alt kümesi olan dizilere dönüştüren matrisleri karakterize edeceğiz. Son sonuç Choudhary'nin (1988) Tx in Banach çekirdeği, Hx in istatistiksel çekirdeğinde içerilen T ve H matrisleri üzerindeki koşulları veren sonucundan elde edilecektir.

Not edelim ki istatistiksel yakınsaklık ve hemen hemen yakınsaklık karşılaştırılamaz (Miller ve Orhan 2001).

$st(b)$ ile tüm sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini gösterelim. Kolk (1993) tarafından

"$T \in (st(b), F; p) \Leftrightarrow T \in (c, F; p)$ ve her sıfır yoğunluklu K için $T^{[K]} \in (\ell^\infty, F)$ dir" olduğu ispatlandı. Burada $T^{[K]} = (d_{nk})$, $d_{nk} = \begin{cases} t_{nk} & , \quad k \in K \text{ ise} \\ 0 & , \quad \textit{diğer} \end{cases}$ ile verilir.

Teorem 1.1.27 ve Teorem 1.1.29 dan (King, 1966; Duran,1972) bu teorem aşağıdakine denktir.

Önerme 3.5.2: $T \in (st(b), F; p) \Leftrightarrow$

(i) $\sup_n \sum_k |t_{nk}| < \infty$

(ii) Her k için $F-\underset{n}{lim}t_{nk}=0$

(veya n ye göre düzgün olarak $\underset{p}{lim}\frac{1}{p}\sum\limits_{j=n}^{n+p-1}t_{jk}=0$)

(iii) $F-\underset{n}{lim}\sum\limits_{k}t_{nk}=1$

(veya n ye göre düzgün olarak $\underset{p}{lim}\frac{1}{p}\sum\limits_{j=n}^{n+p-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}t_{jk}=1$)

(iV) Her sıfır yoğunluklu K için n ye göre düzgün olarak

$\underset{r}{lim}\sum\limits_{k\in K}\left|\frac{1}{r+1}\sum\limits_{i=1}^{r}t_{n+i,k}\right|=0$

(Orhan ve Yardımcı, 2004).

Teorem 3.5.3:$T:\ell^{\infty}\rightarrow\ell^{\infty}$ ve $\beta(x)=st-limsupx$ olsun. Bu durumda her $x\in\ell^{\infty}$ için

$$L^{*}(Tx)\leq\beta(x) \tag{3.5.8}$$

olması için gerek ve yeter koşul

(a) $T\in(st(b),F;p)$

(b) n ye göre düzgün olarak $\underset{r}{lim}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{r+1}\sum\limits_{i=1}^{r}t_{n+i,k}\right|=1$

olmasıdır (Orhan ve Yardımcı, 2004).

İspat. (3.5.8) geçerli olsun ve bir $x\in\ell^{\infty}$ alalım. Bu durumda $Tx\in\ell^{\infty}$ dur. Ayrıca (3.5.8) den

$$-\beta(-x)\leq-L^{*}(-Tx)\leq L^{*}(Tx)\leq\beta(x)$$

dir. Eğer $x\in st(b)$ ise bu durumda $\beta(x)=-\beta(-x)$ dir. Dolayısıyla T, $st(b)$ yi F içine dönüştürür ve $F-limTx=st-limx$ olur. Bu (a) yı ispatlar. (b) yi ispatlamak için ilk önce Önerme 3.5.2 nin Lemma 1.1.35 i (Das,1987) gerektirdiği gözlemlenebilir. Böylece bu lemmadan öyle bir sınırlı x dizisi vardır ki, $\|x\|_{\infty}=\underset{k}{sup}|x_k|\leq1$ ve $b_{nk}(i)=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{r=i}^{i+n}t_{rk}$ olmak üzere

$$lim_n sup\underset{i}{sup}\sum_{k}b_{nk}(i)\,x_k=lim_n sup\underset{i}{sup}\sum_{k}|b_{nk}(i)| \tag{3.5.9}$$

dır. Böylece Önerme 3.5.2 den

$$
\begin{aligned}
1 &= lim_n inf \sup_i \sum_k b_{nk}(i) &\leq& \; lim_n inf \sup_i \sum_k |b_{nk}(i)| \\
&& \leq& \; lim_n sup \sup_i \sum_k |b_{nk}(i)| \\
&& =& \; lim_n sup \sup_i \sum_k b_{nk}(i)\, x_k \;, \text{ (3.5.9) dan} \\
&& \leq& \; \beta(x) \qquad , \text{ hipotezden} \\
&& \leq& \; \|x\|_\infty \leq 1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise (b) yi ispatlar.

Tersine (a) ve (b) nin geçerli olduğunu kabul edelim ve $x \in \ell^\infty$ olsun. Bu durumda $Tx \in \ell^\infty$ dur ve $\beta(x)$ sonludur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $E := \{k : x_k > \beta(x) + \varepsilon\}$ tanımlayalım. O halde $\delta(E) = 0$ dır ve eğer $k \notin E$ ise o zaman $x_k \leq \beta(x) + \varepsilon$ olur. Herhangi z reel sayısı için $z^+ := max\{z, 0\}$ ve $z^- := max\{-z, 0\}$ olsun. Böylece

$$|z| = z^+ + z^- \;, \quad z = z^+ - z^- \text{ ve } |z| - z = 2z^-$$

olur.

$$b_{rk}(i) := \frac{1}{r+1}\sum_{n=i}^{i+r} t_{nk},$$

$$(b_{rk}(i))^+ := \frac{1}{r+1}\sum_{n=i}^{i+r} t_{nk}^+,$$

$$(b_{rk}(i))^- := \frac{1}{r+1}\sum_{n=i}^{i+r} t_{nk}^-$$

alınırsa bu durumda sabit bir pozitif m tamsayısı için

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r+1}\sum_{n=i}^{i+r}(Tx)_n &= \sum_{k<m} b_{rk}(i)\, x_k + \sum_{k\geq m} b_{rk}(i)\, x_k \\
&= \sum_{k<m} b_{rk}(i)\, x_k + \sum_{\substack{k\geq m \\ k\in E}} (b_{rk}(i))^+ x_k \\
&+ \sum_{\substack{k\geq m \\ k\notin E}} (b_{rk}(i))^+ x_k - \sum_{k\geq m} (b_{rk}(i))^- x_k \\
&\leq \|x\|_\infty \sum_{k<m} |b_{rk}(i)| + (\beta(x) + \varepsilon) \sum_{k\geq m} |b_{rk}(i)| \\
&+ \|x\|_\infty \sum_{k\geq m} |b_{rk}(i)| + \|x\|_\infty \sum_{k\geq m} (|b_{rk}(i)| - b_{rk}(i))
\end{aligned}
$$

bulunur. Eğer $lim_r sup \sup_i$ operatörü uygulanırsa ve Önerme 3.5.2 göz önüne alınırsa

$$L^*(Tx) \leq \beta(x) + \varepsilon$$

elde edilir. Böylece, ε keyfi olduğundan (3.5.8) gerçeklenir.■

Benzer şekilde $\alpha(x) \leq \ell^{*}(Tx)$ olduğu gösterilebilir. Böylece aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Teorem 3.5.4: $T : \ell^{\infty} \to \ell^{\infty}$ olsun. Bu durumda

$\forall\ x \in \ell^{\infty}$ için $\mathcal{B}{-}core\{Tx\} \subseteq st{-}core\{x\} \Leftrightarrow$ Teorem 3.5.3 deki (a) ve (b) koşulları gerçeklenir (Orhan ve Yardımcı, 2004).

Teorem 3.5.5: H sıfırdan farklı köşegenlere sahip üçgensel bir matris olsun (Yani H normal matris olsun) ve onun üçgensel tersini H^{-1} ile gösterelim. Keyfi bir T matrisi için , $Hx \in \ell^{\infty}$ olduğunda Tx mevcut ve sınırlı olur ve

$$\mathcal{B}{-}core\{Tx\} \subseteq st{-}core\{Hx\} \tag{10}$$

gerçeklenir. Bunun için gerekli ve yeter şartlar

(i) $C := TH^{-1}$ mevcuttur

(ii) $C \in (st(b), f, p)$

(iii) $\lim\limits_{r} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \dfrac{1}{r+1} \sum\limits_{i=1}^{r} c_{n+i,k} \right| = 1$

(iv) Her sabit n için $\lim\limits_{v} \sum\limits_{k=1}^{v} \left| \sum\limits_{j=v+1}^{\infty} t_{nj} h_{jk}^{-1} \right| = 0$

olmasıdır (Orhan ve Yardımcı, 2004).

İspat. *Gereklilik:* $Hx \in \ell^{\infty}$ iken her n için $(Tx)_n$ mevcut ise bu durumda Teorem 3.1.28 den (Choudhary,1988) (i) ve (iv) gerçeklenir. Aynı lemmadan $y = Hx$ olmak üzere $Tx = Cy$ dir. Hipotezden $Tx \in \ell^{\infty}$, yani $Cy \in \ell^{\infty}$ dur. Böylece (3.5.10) dan $\mathcal{B}{-}core\{Cy\} \subseteq st{-}core\{y\}$ dir. O halde Teorem 3.5.4 den (ii) ve (iii) elde edilir.

Yeterlilik. (i) -(iv) koşulları Teorem 3.1.28 in koşullarını gerektirir. Böylece aynı teoremden $Cy \in \ell^{\infty}$ dur. Buradan $Tx \in \ell^{\infty}$ olur. Teorem 3.5.4 den $\mathcal{B}{-}core\{Cy\} \subseteq st{-}core\{y\}$ ve $y = Hx$, $Tx = Cy$ olduğundan $\mathcal{B}{-}core\{Tx\} \subseteq st{-}core\{Hx\}$ elde edilir.

3.6 Sınırlı Diziler için $\sigma-$Çekirdek ve $I-$Çekirdek

I, $\mathbb{N}$ de admissible bir ideal olsun. Eğer I ya ait olan karşılıklı ayrık kümelerin her sayılabilir $\{A_1, A_2, ...\}$ sistemi için $A_j \bigtriangleup B_j$ $(j = 1, 2, ...)$ simetrik farkları sonlu ve $B = \cup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$ olacak şekilde $B_j \subseteq \mathbb{N}$ kümeleri varsa bu durumda I ideali toplamsallık özelliğini gerçekliyor denir (Kostyrko ve diğ., 2000).

Bu kısımda I ideali toplamsallık özelliğine sahip olacaktır.

ℓ^{∞} ve c, sırasıyla reel sınırlı ve yakınsak dizilerin uzayını göstersin. σ ise pozitif tamsayılardan kendi içine bir dönüşüm olsun. ℓ^{∞} üzerindeki sürekli lineer bir φ fonksiyoneline invaryant ortalama veya $\sigma-$ortalama denir ancak ve ancak

(1) $x = (x_n)$ dizisi verildiğinde her n için $x_n \geq 0$ iken $\varphi(x) \geq 0$

(2) $e = (1, 1, , ...)$ için $\varphi(e) = 1$

(3) Her $x \in \ell^{\infty}$ için $\varphi\left(x_{\sigma(n)}\right) = \varphi(x)$

Bu kısım boyunca her $n > 0, j \geq 1$ için $\sigma^j(n) \neq n$ olduğu kabul edilecektir. σ dönüşümlerinin belirli türleri için, her φ invaryant ortalaması c uzayı üzerindeki limit fonksiyoneline genişler. Yani her $x \in c$ için $\varphi(x) = limx$ olur. Sonuç olarak, tüm invaryant ortalamaları eşit olan sınırlı dizilerin kümesi V_σ olmak üzere, $c \subset V_\sigma$ dır. Schaefer (1972) tarafından

$$V_\sigma = \left\{x \in \ell^{\infty} : n \text{ ye göre düzgün olarak } \underset{p}{lim} t_{pn}(x) = s,\ s = \sigma - limx\right\}$$

olduğu bilinmektedir. Burada $p \geq 0$, $n > 0$ ve

$$t_{pn}(x) = \frac{x_n + x_{\sigma(n)} + x_{\sigma^2(n)} + ... + x_{\sigma^p(n)}}{p+1}$$

dir.

$$V : \ell^{\infty} \to \mathbb{R}, V(x) = \underset{p}{lim}\ supsupt_{pn}(x)$$

şeklinde tanımlansın. x dizisinin $\sigma-$çekirdeği

$$\sigma{-}core\{x\} := [-V(-x), V(x)]$$

kapalı aralığı olarak tanımlanır (Loone, 1975).

Eğer $\sigma(n) = n + 1$ ise bu durumda $\sigma-$yakınsaklık ve hemen hemen yakınsaklık çakışır (Lorentz, 1948). Bu durumda $\sigma{-}core\{x\}$, $\mathcal{B}{-}core\{x\}$ ile aynıdır (Das, 1987; Loone, 1948; Orhan, 1990).

Not edelim ki eğer x, $I-$sınırlı reel bir dizi ise o zaman $I{-}core\{x\} = [I - liminfx, I - limsupx]$ olduğu biliniyor (Demirci, 2001).

Kısım 3.5.4 de Fridy ve Orhan'ın (1997) tekniği kullanılarak, bir kompleks dizinin $I-$çekirdeği kavramı verildi ve sınırlı bir kompleks x dizisi ve A toplanabilme matrisi iken $I{-}core\{Ax\} \subseteq I - core\{x\}$ olması için gerekli ve yeterli koşullar belirtildi (Demirci, 2001).

Scheafer (1972), (c, V_σ, p) ve (ℓ^∞, V_σ) matris sınıflarını karakterize etti.

F_I ve $F_I(b)$ ile tüm $I-$yakınsak dizilerin ve tüm $I-$yakınsak sınırlı dizilerin kümesi gösterilecektir.

Not edelimki eğer I toplamsallık özelliğine sahipse bu durumda Kolk'un (1993) düşüncesi kullanılarak $(F_I \cap X, Y)$ matris sınıfını karakterize etmek için gerekli ve yeterli şartlar elde edilebilir. Burada X, e yi içeren kısım-kapalı dizi uzayı ve Y herhangi bir dizi uzayıdır. İspat Kolk'un (1993) ispatına benzerdir.

Eğer $X = \ell^\infty$ ve $Y = V_\sigma$ alınırsa bu durumda $(F_I(b), V_\sigma; p)$ sınıfının matrislerini karakterize etmek için gerekli ve yeterli şartlar elde edilir. Buna göre

$T \in (F_I(b), V_\sigma; p) \Leftrightarrow T \in (c, V_\sigma, p)$ ve her $K \in I$ için $T^{|K|} \in (\ell^\infty, V_\sigma)$ dır. Burada $T^{|K|} = (d_{nk})\,,\ d_{nk} = \begin{cases} t_{nk}, & k \in K \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$ şeklinde tanımlanır.

Kolaylık için, T matrisinin t_{nk} elemanı $t(n,k)$ şeklinde gösterilsin.

Schaefer (1972) den bu aşağıdakine denktir.

Önerme 3.6.1: $T \in (F_I(b), V_\sigma; p) \Leftrightarrow$

(i) $\sup\limits_n \sum\limits_k |t(n,k)| < \infty$

(ii) Her k için $\sigma - \lim\limits_n t(n,k) = 0$ (veya n ye göre düzgün olarak $\lim\limits_p \frac{1}{p+1}\sum\limits_{j=0}^{p} t\left(\sigma^j(n), k\right) = 0$)

(iii) $\sigma - \lim\limits_n \sum\limits_k t(n,k) = 1$ (veya n ye göre düzgün olarak

$\lim\limits_p \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p+1}\sum\limits_{j=0}^{p} t\left(\sigma^j(n), k\right) = 1$)

(iV) Her $K \in I$ için n ye göre düzgün olarak

$\lim\limits_p \sum\limits_{k\in K} \left|\frac{1}{p+1}\sum\limits_{j=0}^{p} t\left(\sigma^j(n), k\right)\right| = 0$ (Demirci ve Yardımcı, 2004).

Teorem 3.6.2: $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ ve $\gamma(x) := I - \lim\sup x$ olsun. Bu durumda

$$\text{Her } x \in \ell^\infty \text{ için } V(Tx) \le \gamma(x) \tag{3.6.1}$$

olması için gerek ve yeter koşul

(a) $T \in (F_I(b), V_\sigma; p)$

(b) n ye göre düzgün olarak $\lim\limits_p \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{p+1}\sum\limits_{j=0}^{p} t\left(\sigma^j(n), k\right)\right| = 1$

olmasıdır (Demirci ve Yardımcı, 2004).

İspat. (3.6.1) geçerli olsun ve bir $x \in \ell^{\infty}$ alalım. Bu durumda $Tx \in \ell^{\infty}$ dur. Ayrıca (3.6.1) den

$$-\gamma(-x) \leq -V(-Tx) \leq V(Tx) \leq \gamma(x)$$

dir. Eğer $x \in F_I(b)$ ise bu durumda bu durumda $\gamma(x) = -\gamma(-x)$ dir. Dolayısıyla T, $F_I(b)$ yi V_σ içine dönüştürür ve $\sigma - limTx = I - limx$ olur. Bu ise (a) yı ispatlar.

Şimdi ise

$$t(p,n,k) := \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p} t\left(\sigma^j(n), k\right)$$

diyelim. $\underset{p}{lim} \sum_{k=1}^{\infty} |t(p,n,k)| = 1$ olduğunu göstereceğiz. Önerme 3.6.1 in (iii) koşulundan

$$\underset{p}{\underline{lim}} \underset{n}{sup} \sum_{k=1}^{\infty} |t(p,n,k)| \geq \underset{p}{\underline{lim}} \sum_{k=1}^{\infty} t(p,n,k) \to 1, \quad (p \to \infty \text{ için})$$

olur. Dolayısıyla

$$\underset{p}{\underline{lim}} \underset{n}{sup} \sum_{k=1}^{\infty} |t(p,n,k)| \geq 1$$

dir. Lemma 3.1.11 e (Simmons,1969) göre öyle bir $x \in \ell^{\infty}$ dizisi vardır ki $\|x\|_{\infty} \leq 1$ ve

$$\underset{p}{\overline{lim}} \underset{n}{sup} \sum_{k=1}^{\infty} t(p,n,k)\, x_k = \underset{p}{\overline{lim}} \underset{n}{sup} \sum_{k=1}^{\infty} |t(p,n,k)| \tag{3.6.2}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
1 \quad \leq \quad \underset{p}{\underline{lim}} \underset{n}{sup} \sum_{k=1}^{\infty} |t(p,n,k)| \quad & \leq \quad \underset{p}{\overline{lim}} \underset{n}{sup} \sum_{k=1}^{\infty} |t(p,n,k)| \\
& = \quad \underset{p}{\overline{lim}} \underset{n}{sup} \sum_{k=1}^{\infty} t(p,n,k)\, x_k \\
& = \quad lim_n sup \underset{i}{sup} \sum_{k} b_{nk}(i)\, x_k \ , \text{ (3.6.2) den} \\
& \leq \quad \gamma(x) \qquad , \quad \text{hipotezden} \\
& \leq \quad \|x\|_{\infty} \leq 1
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (b) gösterilmiş olunur.

Tersine (a) ve (b) nin geçerli olduğunu kabul edelim ve $x \in \ell^{\infty}$ olsun. Bu durumda $Tx \in \ell^{\infty}$ dur ve $\gamma(x)$ sonludur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $E_1 := \{k : x_k > \gamma(x) + \varepsilon\}$ tanımlayalım. Dolayısıyla $E_1 \in I$ dır ve eğer $k \in E_2 = \mathbb{N} \setminus E_1$ ise o zaman $x_k \leq$

$\gamma(x)+\varepsilon$ olur. Herhangi z reel sayısı için $z^{+} := max\{z,0\}$ ve $z^{-} := max\{-z,0\}$ olsun. Böylece

$$|z| = z^{+} + z^{-}\ ,\quad z = z^{+} - z^{-} \text{ ve } |z| - z = 2z^{-}$$

olur.

$$t^{+}(p,n,k) := \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p} t^{+}\left(\sigma^{j}(n),k\right)$$

$$t^{-}(p,n,k) := \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p} t^{-}\left(\sigma^{j}(n),k\right)$$

olsun. Buna göre sabit bir pozitif m tamsayısı için

$$\begin{aligned}
t_{pn}(x) &= \sum_{k<m} t(p,n,k)\,x_k + \sum_{k\geq m} t(p,n,k)\,x_k \\
&= \sum_{k<m} t(p,n,k)\,x_k + \sum_{k\geq m} t^{+}(p,n,k)\,x_k - \sum_{k\geq m} t^{-}(p,n,k)\,x_k \\
&= \sum_{k<m} t(p,n,k)\,x_k + \sum_{\substack{k\geq m\\ k\notin E_1}} t^{+}(p,n,k)\,x_k + \sum_{\substack{k\geq m\\ k\notin E_2}} t^{+}(p,n,k)\,x_k \\
&- \sum_{k\geq m} t^{-}(p,n,k)\,x_k \\
&= \|x\|_{\infty} \sum_{k<m} |t(p,n,k)| + (\gamma(x)+\varepsilon) \sum_{k\geq m} |t(p,n,k)| \\
&+ \sum_{k\geq m} \left(|t(p,n,k)| - t(p,n,k)\right)
\end{aligned}$$

Önerme 3.6.1 ve (b) den

$$V(Tx) \leq \gamma(x) + \varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan (3.6.1) gerçeklenir. Böylece ispat tamamlanır.■

Benzer şekilde $\alpha(x) := I - liminf x \leq -V(-Tx)$ olduğu gösterilebilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.6.3: $T : \ell^{\infty} \to \ell^{\infty}$ olsun. Bu durumda

$\forall\ x \in \ell^{\infty}$ için $\sigma - core\{Tx\} \subseteq I - core\{x\} \Leftrightarrow$ Teorem 3.6.2 deki (a) ve (b) koşulları gerçeklenir (Demirci ve Yardımcı, 2004).

Eğer $\sigma(n) = n+1$ alırsak bu durumda $V_{\sigma} = F$ elde ederiz. Burada F, tüm hemen hemen yakınsak dizilerin uzayıdır.

$I = I_{C_1}$ olması durumunda $F_I(b) = st(b)$ olur. Böylece Teorem 3.6.3 ten aşağıdaki sonuç çıkar.

Sonuç 3.6.4: $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ olsun. Bu durumda

$\forall\, x \in \ell^\infty$ için $\sigma-core\,\{Tx\} \subseteq I-core\,\{x\} \Leftrightarrow$

(i) $T \in (F_I(b), V_\sigma; p)$,

(ii) n ye göre düzgün olarak $\lim\limits_p \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{p+1} \sum\limits_{j=0}^{p} t(n+j,k) \right| = 1$

Teorem 3.6.5: H sıfırdan farklı köşegenlere sahip üçgensel bir matris olsun ve onun üçgensel tersini H^{-1} ile gösterelim. Keyfi bir T matrisi için, $Hx \in \ell^\infty$ olduğunda Tx mevcut ve sınırlı olur ve

$$\sigma-core\,\{Tx\} \subseteq I-core\,\{Hx\} \tag{3.6.3}$$

gerçeklenir. Bunun için gerekli ve yeter şartlar

(i) $C := TH^{-1}$ mevcuttur.

(ii) $C \in (F_I(b), V_\sigma; p)$

(iii) $\lim\limits_p \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{p+1} \sum\limits_{j=0}^{p} c\left(\sigma^j(n), k\right) \right| = 1$

(iv) Her sabit n için $\lim\limits_v \sum\limits_{k=0}^{v} \left| \sum\limits_{j=v+1}^{\infty} t(n,j)\, h_{jk}^{-1} \right| = 0$

olmasıdır (Demirci ve Yardımcı, 2004).

İspat. *Gereklilik:* $Hx \in \ell^\infty$ iken her n için $(Tx)_n$ mevcut ise bu durumda Teorem 3.1.28 den (Choudhary,1988) (i) ve (iv) gerçeklenir. Aynı lemmadan $y = Hx$ olmak üzere $Tx = Cy$ dir. Hipotezden $Tx \in \ell^\infty$, yani $Cy \in \ell^\infty$ dur. Böylece (3.6.3) den $\sigma-core\,\{Cy\} \subseteq I-core\,\{y\}$ dir. O halde Teorem 3.6.3 den (ii) ve (iii) elde edilir.

Yeterlilik. (i) -(iv) koşulları Teorem 3.1.28 in koşullarını gerektirir. Böylece aynı teoremden $Cy \in \ell^\infty$ dur. Buradan $Tx \in \ell^\infty$ olur. Teorem 3.6.3 den $\sigma-core\,\{Cy\} \subseteq I-core\,\{y\}$ ve $y = Hx$, $Tx = Cy$ olduğundan $\sigma-core\,\{Tx\} \subseteq I-core\,\{Hx\}$ elde edilir.■

3.7 Çekirdek Eşitliği Sonuçları

$T = (t_{nk})$ bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ sayılar dizisi olsun. Tx ile n.ci terimi $(Tx)_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k$ ile verilen dönüşüm dizisini gösterelim.

Knopp (1930) bir dizinin çekirdeği kavramını verdi ve bilinen çekirdek teoremini ispatladı. Allen (1944) her sınırlı dizinin çekirdeğini invaryant bırakan regüler matrisleri karakterize etti. Fridy ve Orhan (1997) benzer bir kavramı, bir dizinin istatistiksel çekirdeği kavramını verdi. Bu düşünce keyfi bir μ yoğunluğuna bağlı olarak Connor (1999) tarafından genişletildi. Bu kısımın ana sonucu; μ ve ν keyfi yoğunluklar olmak üzere her reel değerli sınırlı x dizisi ve negatif olmayan reel girişli T matrisi için x in $\mu-$istatistiksel çekirdeğinin Tx in $\nu-$istatistiksel çekirdeğine eşit olması için gerekli ve yeterli şartları vermektedir.

Eğer bir x dizisinin "hemen hemen tüm" değerleri bir L sayısına yakın ise o zaman x dizisi L ye $\mu-$istatistiksel yakınsaktır. Burada "hemen hemen tüm" ifadesi bir toplamsal sonlu μ küme fonksiyonu kullanılarak tanımlanır. Bu kısımdaki çalışmamız; μ, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir cismi üzerinde tanımlı ve $[0,1]$ aralığında değerler alan bir küme fonksiyonu olmak üzere $\mu-$istatistiksel yakınsakla ilgili olacaktır. Burada μ fonksiyonu

(i) $|E| < \infty$ ise $\mu(E) = 0$,

(ii) $\mu(\mathbb{N}) = 1$,

(iii) $E \subset F$ ve $\mu(F) = 0$ ise $\mu(E) = 0$

özeliklerine sahiptir. Burada böyle bir küme fonksiyonunu yukarıdaki kriteri sağlayan bir yoğunluk olarak adlandıracağız. $x = (x_k)$ reel değerli bir dizi ve L bir reel sayı olsun. Connor'a (1990, 1999) göre, eğer her $\varepsilon > 0$ için $\mu(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ oluyorsa bu durumda x dizisi L sayısına $\mu-$istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_\mu - \lim x = L$ biçiminde gösterilir. Bütün $\mu-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ise st_μ ile gösterilecektir.

Negatif olmayan regüler bir $T = (t_{nk})$ matrisi aşağıdaki gibi bir yoğunluk üretmek için kullanılabilir. Eğer $T = (t_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $E \subseteq \mathbb{N}$ ise o zaman μ_T yi limit mevcut iken

$$\mu_T\ (E) = \underset{n}{lim} \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \chi_E(k) = lim\,(T\chi_E)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada χ_E, E nin karakteristik fonksiyonudur. Eğer T, C_1 Cesàro matrisi ise bu durumda $E \subseteq \mathbb{N}$ için $\mu_T\ (E)$, E nin asimtotik yoğunluğudur. Özel olarak eğer $|B|$ kümenin kardinalitesini gösterirse bu durumda $\delta(E) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in E\}|$ olmak üzere $\mu_T\ = \delta$ olur.

Not edelimki, eğer T birim matris ise o zaman μ_T $-$istatistiksel yakınsaklık bilinen anlamdaki yakınsaklığa dönüşür. Ayrıca regüler matrislerle üretilmeyen yoğunluklar da vardır (Connor, 1990; Freedman ve Sember, 1981).

Tanım 3.7.1: x reel değerli bir dizi, L reel bir sayı ve μ bir yoğunluk olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\mu(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| < \varepsilon\}) \neq 0$ ise o zaman L ye x in bir $\mu-$istatistiksel cluster noktası denir.

Not edelim ki , $\mu(E) \neq 0$ ise ya $\mu(E) > 0$ yada $\mu(E)$ tanımlı değil anlamındadır. $\mu-$istatistiksel üst limit $(st_\mu - \lim supx)$ ve $\mu-$istatistiksel alt limit $(st_\mu - \lim infx)$ x in $\mu-$istatistiksel cluster noktalarının sırasıyla en büyüğü ve en küçüğüdür.

Eğer $\beta := st_\mu - \lim supx$ sonlu ise bu durumda her her $\varepsilon > 0$ için

$$\mu(\{k \in \mathbb{N} : x_k > \beta - \varepsilon\}) \neq 0 \text{ ve } \mu(\{k \in \mathbb{N} : x_k > \beta + \varepsilon\}) = 0 \tag{3.7.1}$$

dır. Tersine eğer (3.7.1) her $\varepsilon > 0$ için sağlanırsa bu durumda $\beta = st_\mu - \lim supx$ dir. Benzer ifadeler $st_\mu - \lim infx$ için de elde edilebilir (Connor, 1999). Ayrıca

$$\lim infx \leq st_\mu - \lim infx \leq st_\mu - \lim supx \leq \lim supx$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 3.7.2: Bir x dizisi için eğer $\mu(\{k \in \mathbb{N} : |x_k| \leq H\}) = 1$ olacak şekilde pozitif bir H sayısı varsa bu durumda x e $\mu-$istatistiksel sınırlıdır denir.

Eğer x dizisi $\mu-$istatistiksel sınırlı ise bu durumda x in L sayısına $\mu-$istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $st_\mu - \lim infx = st_\mu - \lim supx$ olmasıdır.

$x \in \ell_\infty$un Knopp çekirdeği $\mathcal{K}-core\{x\}$ ile gösterilen $[liminfx, limsupx]$ kapalı aralığıdır.

Buna göre reel değerli $\mu-$istatistiksel sınırlı bir dizinin $\mu-$istatistiksel çekirdeği

$$[st_\mu - \lim infx, st_\mu - \lim supx]$$

kapalı aralığıdır ve $st_\mu - core\{x\}$ ile gösterilir (Connor,1999; Fridy ve Orhan, 1997). Fridy ve Orhan ℓ_∞u kendine dönüştüren ve her $x \in \ell_\infty$ için $\mathcal{K}-core\{Tx\} \subseteq st - core\{x\}$ özelliğine sahip bir T matrisi için gerekli ve yeterli şartları verdi.

Connor (1999), Fridy ve Orhan'ın sonucunu istatistiksel çekirdek ile $\mu-$istatistiksel çekirdeği yer değiştirerek genişletti. Özel olarak eğer $T = (t_{nk})$, ℓ_∞u kendi içine dönüştürüyorsa bu durumda $st-core\{Tx\} \subseteq st-core\{x\}$ olması için gerekli ve yeterli koşul,

(1) T regüler,

(2) $\mu(E)=0$ için $\lim\limits_{n}\sum\limits_{k\in E}|t_{nk}|=0$ ve

(3) $\lim\limits_{n}\sum\limits_{k}|t_{nk}|=1$

olmasıdır.

Yukarıdaki sonuçlara benzer olarak, bu kısmın ana sonuçları, x ve Tx in çekirdek eşitlikleriyle ilgilidir. Allen (1944), verilen bir regüler $T=(t_{nk})$ matrisi ve her sınırlı x dizisi için $\mathcal{K}-core\{Tx\}=\mathcal{K}-core\{x\}$ olması için gerekli ve yeterli şartları

(i) $lim_n\sum\limits_{k}|t_{nk}|=1$

(ii) (p_i) indislerinin her sonsuz dizisi için 1 sayısı, $\left(\sum\limits_{i}t_{n,p_i}\right)$ dizisinin bir limit noktasıdır şeklinde verdi.

Bu kısımdaki birinci sonuç Allen'in sonucunun kısmen bir genişlemesidir. Buna rağmen, reel değerli sınırlı dizilerin çekirdekleri kapalı aralıklar olduğundan, çekirdek eşitliği üst limitlerle aynıdır.

Teorem 3.7.3: $T=(t_{nk})$, ℓ_∞ u kendi içine dönüştüren negatif olmayan bir matris olsun. Bu durumda μ ve ν yoğunlukları verildiğinde,

$$\text{Her } x\in\ell_\infty \text{için } st_\mu - limsupx = st_\nu - limsupTx \qquad (3.7.2)$$

olması için gerekli ve yeterli şart

(a) $T: st_\mu \to st_\nu$ ve her $x\in st_\mu \cap \ell_\infty$ için $st_\mu - limx = st_\nu - limTx$ dir.

(b) $\mu(E)\neq 0$ olması $st_\nu - limsup(T\chi_E)=1$ olmasını gerektirir (Connor ve diğ., 2006).

İspat. *Gereklilik.* (a) nın gerekliliği; eğer x, st_μ de sınırlı bir dizi ise bu durumda $st_\mu - limsupx = st_\mu - liminfx$ ve de hipotezden $st_\nu - limsupTx = st_\nu - liminfTx$ olmasından çıkar. Buradan $st_\nu - limTx$ in mevcut olduğu sonucuna ulaşırız. Böylece herhangi keyfi sınırlı $x\in st_\mu$ dizisi için

$$st_\mu - limx = st_\nu - limTx$$

dir. Yukarıdakine benzer olarak, eğer $E\subseteq\mathbb{N}$ ve $\mu(E)\neq 0$ ise bu durumda

$$1 = st_\mu - limsup\chi_E = st_\nu - limsup(T\chi_E)$$

elde edilir. Bu ise (b) yi ispatlar. Dikkat edelim ki ispatın bu kısmında T nin negatif olmayan bir matris olduğunu kabul etmek gerekli değildir.

Yeterlilik. $x \in \ell_\infty$, $st_\mu - limsupx = l$ olsun ve $\delta > 0$ verilsin.

$$\nu\left(\left\{n : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k > l - \delta\right\}\right) \neq 0 \tag{3.7.3}$$

ve

$$\nu\left(\left\{n : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k \leq l + \delta\right\}\right) = 1 \tag{3.7.4}$$

olduğunu göstermemiz gerekiyor. ε_1 ve $\delta_1 (1 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1 (l + \|x\|) < \delta$ olacak şekilde δ_1 seçelim. $\chi_{\mathbb{N}} = (1, 1, 1, ...) \in st_\mu$ olduğundan $st_\mu - lim\chi_{\mathbb{N}} = 1$ dir. Böylece (a) dan $st_\nu - lim \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_{nk} = 1$ elde ederiz.

$$R_1 := \left\{n : \left|\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} - 1\right| < \frac{\varepsilon_1}{2}\right\}$$

kümesini tanımlayalım. $\nu\left(\left\{n : \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} t_{nk} - 1\right| \geq \varepsilon_1/2\right\}\right) = 0$ olduğundan $\nu(R_1) = 1$ dir. Şimdi $E(\delta_1) = \{k : x_k > l - \delta_1\}$ olsun. $st_\mu - limsupx = l$ olduğundan $\mu(E(\delta_1)) \neq 0$ dır ve (b) den $st_\nu - limsupT\chi E(\delta_1) = 1$ dir. Eğer

$$R_2 := \left\{n : \sum_{k \in E(\delta_1)} t_{nk} > 1 - \frac{\varepsilon_1}{2}\right\}$$

ise bu durumda $st_\nu - limsupT\chi E(\delta_1) = 1$ olmasından dolayı $\nu(R_2) \neq 0$ dır. Şimdi $R := R_1 \cap R_2$ diyelim. Eğer $\nu(R_1 \cap R_2) = 0$ ise o zaman $\nu(R_1) = 1$ olduğundan $R_2 = (R_1 \cap R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$, $\nu - null$ dür. O halde $\nu(R) \neq 0$ dır. Ayrıca eğer $n \in R$ ise,

$$1 - \frac{\varepsilon_1}{2} < \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} < 1 + \frac{\varepsilon_1}{2} \text{ ve } 1 - \frac{\varepsilon_1}{2} < \sum_{k \in E(\delta_1)} t_{nk}$$

dir. Böylece $n \in R$ için $\sum\limits_{k \in E(\delta_1)} t_{nk} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_{nk} < 1 + \varepsilon_1/2$ iken

$$1 - \frac{\varepsilon_1}{2} < \sum_{k \in E(\delta_1)} t_{nk} + \sum_{k \in E(\delta_1)^c} t_{nk} < 1 + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

olur. Buradan da $n \in R$ için $\left|\sum\limits_{k \in E(\delta_1)^c} t_{nk}\right| < \varepsilon_1$ elde edilir. Buna göre $n \in R$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k &= \sum_{k\in E(\delta_1)} t_{nk}x_k + \sum_{k\in E(\delta_1)^c} t_{nk}x_k \\ &> (l-\delta_1)(1-\varepsilon_1) - \|x\|\,\varepsilon_1 \\ &= l - [\,\delta_1(1-\varepsilon_1) + \varepsilon_1(l+\|x\|)] > l-\delta\end{aligned}$$

geçerlidir. Dolayısıyla

$$R \subseteq \left\{ n : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k > l-\delta \right\}$$

dır. Sonuç olarak $\left\{ n : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k > l-\delta \right\}$ kümesi $\nu - null$ değildir ($\nu(R) \neq 0$ olduğundan). Böylece (3.7.3) ispatlanmış olur.

Şimdi (3.7.4) ü gösterelim. $\varepsilon_1 > 0$ ve $\varepsilon_1(l+\|x\|) + \delta_1(1+\varepsilon_1) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ seçelim. Yukarıdaki gibi $R_1 := \left\{ n : \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} - 1 \right| < \varepsilon_1/2 \right\}$ olsun ve

$$G(\delta_1) = \{k : x_k \leq l+\delta_1\}$$

kümesini tanımlayalım. $\mu(G(\delta_1)) = 1$ dir ve böylece $\mu(G(\delta_1)^c) = 0$ olur. $R_3 := \left\{ n : \sum_{k\in G(\delta_1)} t_{nk} > 1-\varepsilon_1/2 \right\}$ diyelim. $st_\mu - lim\chi_{G(\delta_1)} = 1$ olduğundan $\nu(R_3) = 1$ dir. Böylece $R_4 := R_1 \cap R_3$ kümesinin $\nu-$yoğunluğu 1 dir. Ayrıca $n \in R_4$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k &= \sum_{k\in G(\delta_1)} t_{nk}x_k + \sum_{k\in G(\delta_1)^c} t_{nk}x_k \\ &\leq (l+\delta_1)(1+\varepsilon_1) + \|x\|\,\varepsilon_1, \text{ (b) den} \\ &= l + \delta_1(1+\varepsilon_1) + \varepsilon_1(l+\|x\|) \\ &< l+\delta\end{aligned}$$

dır.

$$R_4 \subseteq \left\{ n : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k \leq l+\delta \right\} \text{ ve } \nu(R_4) = 1$$

olduğundan $\nu\left(\left\{ n : \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k \leq l+\delta \right\}\right) = 1$ elde ederiz. δ keyfi olduğundan $st_\nu - limsupTx = l$ sonucuna ulaşırız. Böylece teoremin ispatı bitmiş olur.■

Eğer ν birim matris ile üretilen yoğunluk ise o zaman aşağıdaki sonucu alırız.

Sonuç 3.7.4:

$$\text{Her } x \in \ell_\infty \text{için } st_\mu - limsupx = limsupTx \tag{3.7.5}$$

olması için gerekli ve yeterli şart

(a) T regülerdir.

(b) $\mu(F) = 0$ ise $lim_n \sum_{k\in F} t_{nk} = 0$ dır.

(c) $\mu(E) \neq 0$ ise $limsup_n \sum_{k\in E} t_{nk} = 1$ dir (Connor ve diğ., 2006).

Sonuç 3.7.4 deki birinci koşulun, Teorem 3.7.3 (a) koşulunun direk olarak bir benzeri olmadığına dikkat edelim. Buna rağmen T, ℓ_∞u kendisine dönüştüren bir matris olduğunda, sınırlı diziler için $st_\mu - limx = limTx$ olması için gerekli ve yeterli koşul T nin regüler olması ve $\mu(F) = 0$ iken

$$lim_n \sum_{k\in F} |t_{nk}| = 0$$

olmasıdır (Connor,1999 ve Kolk, 1993 deki matrisler ile üretilen yoğunluklar için gösterilmiştir). Böylece Teorem 3.7.3 ün ilk koşulu Sonuç 3.7.4 ün ilk iki koşuluna denktir. Not edelim ki, Teorem 3.7.3 deki gibi (a), (b) ve (c) nin gerekliliği T nin negatif olmayan bir matris olmasına bağlı değildir.

Eğer μ yoğunluğu birim matris ile üretilirse bu durumda

$$st_\mu - limsupx = limsupx$$

olur ve bir $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin sıfır yoğunluklu olması için gerek ve yeter şart sonlu olmasıdır. Böylece Sonuç 3.7.4 den Allen'in (1944) yukarıda belirtilen bir teoreminin bir benzeri elde edilir.

Sonuç 3.7.4, (3.7.5) deki çekirdek eşitliğinin açık bir karakterizasyonunu vermesine rağmen ispatsız olarak vereceğimiz bir sonraki teoremden, μ doğal δ yoğunluğu olduğunda böyle bir matrisin olmadığını görebiliriz. Çünkü (b) ve (c) şıkları herhangi bir regüler matris için (negatif olmayan olması gerekmeyen) aynı anda gerçeklenemez. Not edelimki, $\delta(E)$, $\mathbb{N}$ nin tüm alt kümeleri için mevcut olmayabilir. Dolayısıyla bazen

$$\overline{\delta}(E) = limsup_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

üst asimtotik yoğunluğunu kullanmak daha uygundur.

Teorem 3.7.5: Kabul edelim ki T regüler bir matris ve $\overline{\delta}(E) > 0$ iken $limsupT\chi_E = 1$ olsun. Bu durumda $\delta(F) = 0$ ve $limsupT\chi_F = 1$ olacak şekilde bir $F \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır (Connor ve diğ., 2006).

Uyarı. Yukarıda ele alındığı gibi, sınırlı dizileri sınırlı dizilere dönüştüren ve çekirdeği invaryant bırakan herhangi bir matris regüler olmalıdır ve (b) ve (c) koşullarını sağlamalıdır. Dolayısıyla sınırlı dizileri kendisine dönüştüren ve her $x \in \ell^{\infty}$ için $limsupTx = st_{\mu}{-}limsupx$ özelliğine sahip hiçbir matrisin olmadığı sonucuna ulaşırız. Bu durum bir dizinin çekirdeği ile istatistiksel çekirdeği arasındaki farkı ortaya koyar. Yine bu durum, st_{μ} den st_{ν} ye çekirdeği koruyan bir matris için farklı μ ve ν yoğunluklarının bulunup bulunmadığı problemine indirgenir.

IV. BÖLÜM

LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

4.1 Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda Lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanacak ve bazı ilgili teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 4.1.1: Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = \{k_r\}$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \to \infty$ için $h_r := k_r - k_{r-1} \to \infty$ ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizisi denir (Freedman ve diğ.,1978).

$\theta = \{k_r\} = \{2^r\}, \ (r > 0)$ veya $\{k_r\} = \{r!\}$ dizilerinin birer lacunary dizisi oldukları açıktır.

Burada $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi ile oluşturulan aralıklar $I_r := (k_{r-1}, k_r]$ ve $q_r := \dfrac{k_r}{k_{r-1}}$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.1.2: $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0 \tag{5.1.1}$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsak veya S_θ-yakınsaktır denir. Bu durum $S_\theta - lim x = L$ veya $x_k \to L\,(S_\theta)$ sembolleriyle gösterilir (Fridy ve Orhan, 1993).

$K(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin karakateristik fonksiyonu $\chi_{K(\varepsilon)}$ ve C_θ matrisi

$$C_\theta\,[r,k] = \begin{cases} \frac{1}{h_r} & , \ k \in I_r \\ 0 & , \ k \notin I_r \end{cases}$$

ile tanımlanmak üzere,

$$\frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \chi_{K(\varepsilon)}(k)$$

olduğundan, (5.1.1) deki limit, $lim\,(C_\theta \chi_K)_r = 0$ şeklinde verilebilir.

Tanım 4.1.3: Herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, x dizisi L sayısına N_θ anlamında yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \to L\,(N_\theta)$ ile gösterilir. Ayrıca

$$N_\theta := \left\{ x = (x_k) : \underset{r}{lim} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

dır (Freedman ve diğ.,1978).

Tanım 1.2.13 te $p = 1$ alınırsa,

$$|\sigma_1| := \left\{ x : \exists L \text{ için } \underset{n}{lim} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

sınıfı elde edilir.

Teorem 4.1.4: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda

(i) $\quad x_k \to L\,(N_\theta)$ ise $x_k \to L\,(S_\theta)$

(ii) $\quad x \in \ell_\infty$ ve $x_k \to L\,(S_\theta)$ ise $x_k \to L\,(N_\theta)$

(iii) $\quad S_\theta \cap \ell_\infty = N_\theta \cap \ell_\infty$

dır (Fridy ve Orhan, 1993).

Lemma 4.1.5: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda $St \subseteq S_\theta$ olması gerek ve yeter şart $liminf_r q_r > 1$ olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1993).

Lemma 4.1.6: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda $S_\theta \subseteq St$ olması gerek ve yeter şart $limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1993).

Teorem 4.1.7: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda $St = S_\theta$ olması gerek ve yeter şart $1 < liminf_r q_r \leq limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1993).

$K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(K) := lim\,(C_\theta \chi_K)_r = \underset{r}{lim} \frac{|K \cap I_r|}{h_r}$$

tanımlayalım. Bu durumda δ nın bir yoğunluk fonksiyonu olduğu açıktır.

Önerme 4.1.8: Bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi sonlu bir $liminf$ değerine veya sonlu bir $limsup$ değerine C_θ-toplanabilir ise $x = (x_k)$ dizisi aynı değere S_θ-yakınsaktır (Fridy ve Orhan, 1993).

Bir θ lacunary dizisi için S_θ-limitinin bir tek olduğu açıktır. Fakat farklı θ lar için S_θ-limitinin farklı olduğunu görmek için aşağıdaki örneği göz önüne alacağız.

Örnek 4.1.9: $x=(x_i)$ dizisini

$$x_i=\begin{cases} 0 & , \ i=1 \\ 0 & , \ (2n-1)!<i\leq(2n)! \quad (n=1,2,\ldots) \\ 1 & , \ (2n)!<i\leq(2n+1)! \end{cases}$$

ile tanımlayalım. $\theta=\{(2r)!\}$ lacunary dizisi için

$$\frac{1}{h_{r+1}}\left|\{k\in I_{r+1}:|x_i|\geq\varepsilon\}\right|=\begin{cases} 0 & , \ \varepsilon>1 \\ \dfrac{(2r+1)!-(2r)!}{(2\,(r+1))!-(2r)!} & , \ 0<\varepsilon\leq 1 \end{cases}$$

olup $x_i\rightarrow 0(S_\theta)$ dır. Şimdi de $\theta^{'}=\{(2r+1)!\}$ lacunary dizisi için

$$\frac{1}{h_{r+1}}\left|\{k\in I_{r+1}:|x_i|\geq\varepsilon\}\right|=\begin{cases} 0 & , \ \varepsilon>1 \\ \dfrac{(2r)!-(2r-1)!}{(2r+1)!-(2r-1)!} & , \ 0<\varepsilon\leq 1 \end{cases}$$

olup $x_i\rightarrow 1(S_\theta)$ dır (Freedman ve diğ., 1978).

Aşağıdaki teorem $x\in st$ olduğunda bu durumun söz konusu olamayacağını gösterir.

Teorem 4.1.10: $x\in st\cap S_\theta$ ise $S_\theta-\underset{r}{lim}x=st-\underset{r}{lim}x$ olmalıdır (Fridy ve Orhan, 1993).

Tanım 4.1.11: $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. $\{k_r\}\subseteq\{k_r'\}$ olacak şekilde $\theta'=\{k_r'\}$ lacunary dizisine θ nın bir lacunary incelmesi denir (Freedman ve diğ.,1978).

Toerem 4.1.12: θ', θ nın bir lacunary incelmesi olsun. Bu durumda $x_k\rightarrow L(S_{\theta'})$ ise $x_k\rightarrow L(S_\theta)$ dır (Fridy ve Orhan, 1993).

Uyarı: Teorem 4.1.12 de dizilerden biri diğerinin bir lacunary incelmesi olduğunda, iki lacunary metod arasında bir içerme kuruldu. Bu kısım başında verilen örnek, S_θ ile S_θ' nün karşılaştırılamaz olduğunu gösterir. Keyfi iki lacunary metod arasındaki içermenin genel bir tanımlaması açık bir problem olarak bırakılmıştır.

Tanım 4.1.13: $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her r için $k'_{(r)}\in I_r$ ve $\underset{r}{lim}x_{k'_{(r)}}=L$ ve her $\varepsilon>0$ için

$$\underset{r}{lim}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|x_k-x_{k'_{(r)}}\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olacak şekilde x dizisinin bir $\left\{x_{k'_{(r)}}\right\}$ alt dizisi varsa x dizisine S_θ-Cauchy dizisi denir (Fridy ve Orhan, 1993).

Teorem 4.1.14: x dizisinin S_θ-yakınsak olması için gerek ve yeter şart S_θ-Cauchy dizisi olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1993).

Sonuç 4.1.15: S_θ-yakınsak bir dizi, yakınsak bir altdiziye sahiptir.

Bu sonuç bizi aşağıdaki Tauberian teoremine götürür.

Teorem 4.1.16: $x_k \to L\left(S_\theta\right)$ ve $(r \to \infty)$ için $max\left\{|\Delta x_i| : i \in I_r\right\} = o\left(\frac{1}{h_r}\right)$ olsun. Bu durumda $\underset{k}{lim} x_k = L$ dir (Fridy ve Orhan, 1993).

Teorem 4.1.17: x, sınırlı bir dizi ve $x_k \to L\left(S_\theta\right)$ olsun. Bu durumda $(C_1 x) \to L$ dir (Fridy ve Orhan, 1993).

Teorem 4.1.18: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda hiç bir A matris metodu S_θ-toplanabilmeyi içermez (Fridy ve Orhan, 1993)

4.2 Lacunary İstatistiksel Limit Noktaları ve Lacunary İstatistiksel Çekirdek

Kısım 3.3 deki tanımlarda A matrisi yerine

$$C_\theta = (c_{nk}) := \begin{cases} \frac{1}{h_r}, & k \in I_r \\ 0, & k \notin I_r. \end{cases}$$

ve C_1 Cesaro matrisleri alınırsa $\Lambda_{C_1}(x), \Gamma_{C_\theta}(x)$ ve $\Lambda_{C_\theta}(x)$ yerine sırasıyla $\Lambda(x), \Gamma(x)$ ve $\Lambda_\theta(x)$ yazılabilir.

Bu kısımda bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisinin üzerindeki belirli kısıtlamalar altında $\Lambda_\theta(x) \subset \Lambda(x)$, $\Lambda(x) \subset \Lambda_\theta(x)$, $\Gamma_\theta(x) \subset \Gamma(x)$ ve $\Gamma(x) \subset \Gamma_\theta(x)$ içermeleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca θ' , θ nın bir lacunary incelmesi olmak üzere $\Gamma_\theta(x) \subset \Gamma_{\theta'}(x)$ ve $\Lambda_\theta(x) \subset \Lambda_{\theta'}(x)$ içermeleri de ele alınacaktır.

Önerme 4.2.1: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda

(i) $\liminf\limits_r q_r > 1 \Rightarrow \Lambda_\theta(x) \subset \Lambda(x)$,

(ii) $\limsup\limits_r q_r < \infty \Rightarrow \Lambda(x) \subset \Lambda_\theta(x)$ (Demirci 2002).

İspat. Fridy ve Orhan (1993) tarafından kullanılan tekniği kullanalım.

(i) $\liminf\limits_r q_r > 1$ olsun. Bu durumda yeterince büyük r için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu ise

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$$

olmasını gerektirir. Eğer$\lambda \in \Lambda_\theta(x)$ ise bu durumda $\delta_\theta(K) \neq 0$ ve $\lim\limits_j x_{k(j)} = \lambda$ olacak şekilde bir $K = \{k(j)\}$ kümesi vardır. Dolayısıyla yeterince büyük r için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_r}\left|\{k(j)\le k_r : j\in N\}\right| &\ge \frac{1}{k_r}\left|\{k(j)\in I_r : j\in N\}\right| \\
&\ge \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1}{h_r}\left|\{k(j)\in I_r : j\in N\}\right|.
\end{aligned}$$

Böylece $\delta_\theta(K)\neq 0$ olduğundan $\delta(K)\neq 0$ dır. Bu ise (i) yi ispatlar.

(ii) $\limsup_r q_r<\infty$ ise bu durumda her r için $q_r<H$ olacak şekilde bir $H>1$ sayısı vardır. Dolayısıyla her r için $\frac{h_r}{k_{r-1}}=q_r-1\le H-1$ dir. $\lambda\in\Lambda(x)$ olduğunu varsayalım. Buna göre $\delta(K)\neq 0$ ve $lim_j x_{k(j)}=\lambda$ olacak şekilde bir $K=\{k(j)\}$ kümesi vardır. $N_r:=|\{k\in I_r : k\in K\}|=|K\cap I_r|$ ve $t_r:=N_r/h_r$ diyelim. Bu durumda $k_{r-1}<n\le k_r$ eşitsizliğini gerçekleyen herhangi n tamsayısı için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_r}\left|\{k\le n : k\in K\}\right| &\le \frac{1}{k_{r-1}}\left|\{k\le k_r : k\in K\}\right| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}}\{N_1+N_2+\cdots+N_r\} \\
&= \frac{1}{k_{r-1}}\{h_1t_1+h_2t_2+\cdots+h_rt_r\} \\
&\le \frac{1}{\sum_{i=1}^{r-1}h_i}\sum_{i=1}^{r-1}h_it_i+\frac{h_r}{k_{r-1}}t_r. \\
&\le \frac{1}{\sum_{i=1}^{r-1}h_i}\sum_{i=1}^{r-1}h_it_i+(H-1)t_r.
\end{aligned}$$

Şimdi $\lim_r t_r\neq 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksi halde $t_r\to 0$, $(r\to\infty)$ olurdu. θ bir lacunary dizi olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim t nin regüler bir ağırlıklı ortalama dönüşümüdür. Böylece $r\to\infty$ için bu terim sıfıra yaklaşmalıdır. O halde $\delta(K)=0$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir.■

Önerme 4.2.1 e göre aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Teorem 4.2.2: $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $1<\liminf_r q_r\le\limsup_r q_r<\infty$ ise bu durumda $\Lambda(x)=\Lambda_\theta(x)$ dir (Demirci 2002).

Önerme 4.2.3: $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda

(i) $\liminf_r q_r>1\Rightarrow\Gamma_\theta(x)\subset\Gamma(x)$

(ii) $\limsup_r q_r<\infty\Rightarrow\Gamma(x)\subset\Gamma_\theta(x)$

(iii) $1<\liminf_r q_r\le\limsup_r q_r<\infty\Rightarrow\Gamma(x)=\Gamma_\theta(x)$ (Demirci 2002).

Önerme 4.2.1 de olduğu gibi benzer ispat Önerme 4.2.3 için de yapılabilir.

Teorem 4.2.4: Eğer $\theta' = \{k'_r\}$, θ nın bir lacunary incelmesi ise bu durumda $\Gamma_\theta(x) \subset \Gamma_{\theta'}(x)$ ve $\Lambda_\theta(x) \subset \Lambda_{\theta'}(x)$ dir (Demirci 2002).

İspat. Fridy ve Orhan'ın (1993) kullandığı ispatı ele alalım.

$\gamma \in \Gamma_\theta(x)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}| \neq 0 \tag{4.2.1}$$

dır. Fridy ve Orhan (1993) Teorem 7 deki notasyon kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \gamma| < \in\}| &= \frac{1}{h_r} \sum_{I_r^* \subseteq I_r} h_j^* \tfrac{1}{h_j^*} |\{k \in I_r^* : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{h_r} \sum_{I_r^* \subseteq I_r} h_j^* (C_{\theta'} \chi_E)_j \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

dir. Burada χ_E , $E := \left\{k \in I_j^* : |x_k - \gamma| < \varepsilon\right\}$ kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

Şimdi $\lim_j (C_{\theta'} \chi_E)_j \neq 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksi halde $\lim_j (C_{\theta'} \chi_E)_j = 0$ olur. (4.2.2) eşitliği $C_{\theta'} \chi_E$ nin regüler bir ağırlıklı ortalama dönüşümü olduğundan $r \to \infty$ için (4.2.2) sıfıra yaklaşır. Bu ise (4.2.1) ile çelişir. Benzer düşünce ile $\Lambda_\theta(x) \subset \Lambda_{\theta'}(x)$ olduğu gösterilebilir.

Lacunary İstatistiksel Çekirdek.

Fridy ve Orhan (1997) bir reel sayı dizisi için istatistiksel üst ve alt limit kavramlarını verdi (Kısım 3.2) Benzer şekilde C_1 yerine negatif olmayan regüler bir A matrisi kullanılarak kısım 3.3 de $A-$istatistiksel üst limit ($st_A - limsup$) ve $A-$istatistiksel alt limit ($st_A - liminf$) ve $A-$istatistiksel çekirdek kavramları verildi.

$A = C_\theta$ iken aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 4.2.5: $x = (x_k)$ lacunary istatistiksel sınırlı bir dizi ve her $z \in \mathbb{C}$ için

$$B_x^\theta(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq st_\theta - limsup_k |x_k - z|\}$$

olsun. Bu durumda

$$st_\theta - core\{x\} = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x^\theta(z)$$

dır.

Teorem 4.1.12 den açıktır ki her sınırlı kompleks x dizisi için θ' , θ nın bir lacunary incelmesi olmak üzere

$$st_\theta - limsup\,|x| \leq st_{\theta'} - limsup\,|x|$$

dir. Dolayısıyla buradan her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} B_x^\theta(z) &= \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq st_\theta - limsup_k\,|x_k - z|\} \\ &\subseteq \left\{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq st_{\theta'} - limsup_k\,|x_k - z|\right\} = B_x^{\theta'}(z) \end{aligned}$$

olduğu çıkar. Böylece Lemma 4.2.5 den

$$\bigcap_{z\in\mathbb{C}} B_x^\theta(z) \subseteq \bigcap_{z\in\mathbb{C}} B_x^{\theta'}(z)\,,$$

yani $st_\theta - core\,\{x\} \subseteq st_{\theta'} - core\,\{x\}$ elde edilir.

Sonuç 4.2.6: Eğer θ' , θ nın bir lacunary incelmesi ise bu durumda her sınırlı kompleks x dizisi için $st_\theta - core\,\{x\} \subseteq st_{\theta'} - core\,\{x\}$ dir.

Sıradaki sonuçları Lemma 4.1.5 ve Lemma 4.1.6 dan yararlanarak her sınırlı kompleks x dizisi için verebiliriz.

Lemma 4.2.7: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $liminf_r q_r > 1$ ise bu durumda her sınırlı kompleks x dizisi için $st_\theta - core\,\{x\} \subseteq st - core\,\{x\}$ dir.

Lemma 4.2.8: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $limsup_r q_r < \infty$ ise bu durumda her sınırlı kompleks x dizisi için $st - core\,\{x\} \subseteq st_\theta - core\,\{x\}$ dir.

Lemma 4.2.7 ve Lemma 4.2.8 birleştirilirse aşağıdaki elde edilir.

Teorem 4.2.9: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $1 < liminf_r q_r < limsup_r q_r < \infty$ ise bu durumda her sınırlı kompleks x dizisi için

$$st_\theta - core\,\{x\} = st - core\,\{x\}$$

dir.

4.3 İki Katlı Dizilerin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 4.3.1: Eğer her j ve k için $|x_{j,k}| < M$ olacak şekilde pozitif bir M sayısı varsa, yani

$$\|x\|_{(\infty,2)} = \sup_{j,k} |x_{j,k}| < \infty$$

ise bu durumda $x=(x_{j,k})$ iki katlı dizisine sınırlıdır denir (Savaş ve Patterson, 2006). Tüm sınırlı iki katlı dizilerin kümesi ℓ''_∞ ile gösterilsin.

Tanım 4.3.2: İki katlı $\theta_{r,s}=\{(k_r,l_s)\}$ dizisi verildiğinde eğer

$$k_0=0,\ h_r=k_r-k_{r-1}\to\infty,\ r\to\infty$$

ve

$$l_0=0,\ \overline{h}_s=l_s-l_{s-1}\to\infty,\ s\to\infty$$

olacak şekilde tamsayıların artan dizileri varsa bu durumda $\theta_{r,s}$ dizisine iki katlı lacunary denir (Savaş ve Patterson, 2006).

Gösterimler: İki katlı lacaunary diziler için, $k_{r,s}=k_rl_s$, $h_{r,s}=h_r\overline{h}_s$, $I_{r,s}=\{(k,l):k_{r-1}<k\le k_r \text{ ve } l_{s-1}<l\le l_s\}$ ve $q_r=\frac{k_r}{k_{r-1}}$, $\overline{q}_s=\frac{l_s}{l_{s-1}}$ olmak üzere $q_{r,s}=q_r\overline{q_s}$ gösterimleri kullanılacaktır.

Tanım 4.3.3: İki katlı bir x dizisi için eğer

$$P-\lim_{m,n}\frac{1}{mn}\sum_{k,l=1}^{m,n}|x_{k,l}-L|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa bu durumda x dizisine iki katlı Cesàro toplanabilirdir denir (Savaş ve Patterson, 2006). $\sigma_{1,1}$ ile tüm iki katlı Cesàro toplanabilir dizilerin kümesini gösterelim.

Tanım 4.3.4: $\theta_{r,s}$ iki katlı bir lacunary dizi ve x iki katlı bir dizi olsun. Eğer

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{h_{r,s}}\sum_{(k,l)\in I_{r,s}}|x_{k,l}-L|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa bu durumda x dizisi L ye $N_{\theta_{r,s}}-P-$yakınsaktır denir ve

$$N_{\theta_{r,s}}=\left\{x:\exists\ L \text{ için } P-\lim_{r,s}\frac{1}{h_{r,s}}\sum_{(k,l)\in I_{r,s}}|x_{k,l}-L|=0\right\}$$

şeklinde gösterilir (Savaş ve Patterson, 2006).

Tanım 4.3.5: $\theta_{r,s}$ iki katlı bir lacunary dizi ve x iki katlı bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{h_{r,s}}|\{(k,l)\in I_{r,s}:|x_{k,l}-L|\ge\varepsilon\}|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa bu durumda x dizisi L ye $S_{\theta_{r,s}}-P-$yakınsaktır denir (Savaş ve Patterson, 2006).

Aşağıdaki teorem Fridy ve Orhan'ın (1993) verdiği teoremin (Teorem 4.1.4) iki boyutlu benzeridir.

Teorem 4.3.6: $\theta_{r,s}$ iki katlı bir lacunary dizi olsun. Bu durumda

a) $x_{k,l} \overset{P}{\to} L\left(N_{\theta_{r,s}}\right)$ ise $x_{k,l} \overset{P}{\to} L\left(S_{\theta_{r,s}}\right)$ dir.

b) $N_{\theta_{r,s}}$, $S_{\theta_{r,s}}$ nin öz alt kümesidir.

c) $x \in \ell_\infty''$ ve $x_{k,l} \overset{P}{\to} L\left(S_{\theta_{r,s}}\right)$ ise $x_{k,l} \overset{P}{\to} L\left(N_{\theta_{r,s}}\right)$ dir.

d) $S_{\theta_{r,s}} \cap \ell_\infty'' = N_{\theta_{r,s}} \cap \ell_\infty''$ (Savaş ve Patterson, 2006).

İspat: (a)

$$\begin{aligned}\sum_{(k,l)\in I_{r,s}} |x_{k,l}-L| &\geq \sum_{\substack{(k,l)\in I_{r,s}\\ |x_{k,l}-L|\geq\varepsilon}} |x_{k,l}-L| \\ &\geq \varepsilon \left|\{(k,l)\in I_{r,s} : |x_{k,l}-L|\geq\varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

ve

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{h_{r,s}}\sum_{(k,l)\in I_{r,s}}|x_{k,l}-L|=0$$

olduğundan

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{h_{r,s}}\left|\{(k,l)\in I_{r,s} : |x_{k,l}-L|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

dır.

(b) x dizisini şu şekilde tanımlayalım: $I_{r,s}$ aralığındaki ilk $\left[\sqrt[3]{h_{r,s}}\right]$ tamsayılarında $x_{k,l}$, $1,2,...,\left[\sqrt[3]{h_{r,s}}\right]$ ve diğer yerlerde $x_{k,l}=0$ olsun. $x_{k,l}$ dizisini şu şekilde göstere-biliriz:

$$x_{k,l} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & \left[\sqrt[3]{h_{r,s}}\right] & 0 & ... \\ 1 & 2 & 3 & ... & \left[\sqrt[3]{h_{r,s}}\right] & 0 & ... \\ ... & & & & ... & ... & \\ 1 & 2 & 3 & ... & \left[\sqrt[3]{h_{r,s}}\right] & 0 & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ ... & & & & ... & & ... \end{pmatrix}$$

x in sınırsız bir iki katlı dizi olduğu açıktır ve her $\varepsilon>0$ için

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{h_{r,s}}\left|\{(k,l)\in I_{r,s} : |x_{k,l}-L|\geq\varepsilon\}\right| = P-\lim_{r,s}\frac{\left[\sqrt[3]{h_{r,s}}\right]}{h_{r,s}}=0$$

dır. Böylece $x_{k,l} \overset{P}{\to} 0\left(S_{\theta_{r,s}}\right)$ olur. Ayrıca

$$P-\lim_{r,s}\frac{1}{h_{r,s}}\sum_{(k,l)\in I_{r,s}}|x_{k,l}| = P-\lim_{r,s}\frac{\left[\sqrt[3]{h_{r,s}}\right]\left(\left[\sqrt[3]{h_{r,s}}\right]\left(\left[\sqrt[3]{h_{r,s}}\right]+1\right)\right)}{2h_{r,s}}=\frac{1}{2}$$

olduğundan $x_{k,l} \overset{P}{\nrightarrow} 0\left(N_{\theta_{r,s}}\right)$ dır. Bu (b) yi ispatlar.

(C) $x \in \ell''_{\infty}$ olsun. Bu durumda her k,l için $|x_{k,l}-L| \leq M$ dir. Ayrıca verilen $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r ve s değerleri için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_{r,s}} \sum_{(k,l)\in I_{r,s}} |x_{k,l}-L| &= \frac{1}{h_{r,s}} \sum_{\substack{(k,l)\in I_{r,s} \\ |x_{k,l}-L|\geq\varepsilon}} |x_{k,l}-L| \\
&+ \frac{1}{h_{r,s}} \sum_{\substack{(k,l)\in I_{r,s} \\ |x_{k,l}-L|<\varepsilon}} |x_{k,l}-L| \\
&\leq \frac{M}{h_{r,s}} \left|\{(k,l)\in I_{r,s} : |x_{k,l}-L| \geq \varepsilon\}\right| + \frac{1}{h_{r,s}}\varepsilon h_{r,s}
\end{aligned}$$

olur. Böylece $x \in \ell''_{\infty}$ ve $x_{k,l} \overset{P}{\rightarrow} L\left(S_{\theta_{r,s}}\right)$ iken $x_{k,l} \overset{P}{\rightarrow} L\left(N_{\theta_{r,s}}\right)$ dir.

(d) $S_{\theta_{r,s}} \cap \ell''_{\infty} = N_{\theta_{r,s}} \cap \ell''_{\infty}$ eşitliği direkt olarak (a), (b) ve (c) den çıkar.

Teorem 4.3.7: $\theta_{r,s}$ herhangi bir iki katlı lacunary dizi olsun. Bu durumda $st_2 - limx = L$ iken $S_{\theta_{r,s}} - limx = L$ olması için gerek ve yeter koşul $liminf q_r > 1$ ve $liminf \overline{q}_s > 1$ olmasıdır (Savaş ve Patterson, 2006).

İspat: *Yeterlilik.* $liminf q_r > 1$ ve $liminf \overline{q}_s > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $q_r > 1+\delta$ ve $\overline{q}_s > 1+\delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Bu ise $\frac{h_r}{q_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ ve $\frac{\overline{h}_s}{\overline{q}_s} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ olmasını gerektirir. Eğer $x_{k,l} \rightarrow L\,(st_2)$ ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r ve s için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_{rs}} \quad & \left|\{k \leq k_r \text{ ve } l \leq l_s : |x_{k,l}-L| \geq \varepsilon\}\right| \\
& \geq \left|\{(k,l)\in I_{r,s} : |x_{k,l}-L| \geq \varepsilon\}\right| \\
& = \frac{h_{rs}}{k_{rs}} \frac{1}{h_{rs}} \left|\{(k,l)\in I_{r,s} : |x_{k,l}-L| \geq \varepsilon\}\right| \\
& \geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^2 \frac{1}{h_{rs}} \left|\{(k,l)\in I_{r,s} : |x_{k,l}-L| \geq \varepsilon\}\right|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $S_{\theta_{r,s}} - limx = L$ olur.

Gereklilik. Kabul edelim ki $liminf q_r = 1$ veya $liminf \overline{q}_s = 1$ dir. Genelliği bozmadan $liminf q_r = 1$ olduğunu kabul edelim (Freedman ve diğ., 1978, syf.510). Bu; θ_r lacunary dizisinin $\alpha_j \geq \alpha_{j-1}+2$ olmak üzere $\frac{k_{\alpha_j}}{k_{\alpha_j-1}} < 1+\frac{1}{j}$ ve $\frac{k_{\alpha_j-1}}{k_{\alpha_{j-1}}} > j$ olacak şekilde bir $\left\{k_{\alpha_j}\right\}$ alt dizisinin var olmasını gerektirir.

$$x_{k,l} := \begin{cases} 1, & k \in I_{\alpha_j} \text{ ve } l \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan x dizisinin sınırlı olduğu açıktır. Freedman ve diğ. (1978, syf.510) a göre satırlar N_{θ_r} ye ait değildir fakat her bir satır x gibi $|\sigma_1|$ e aittir. O halde Teorem 4.3.6 (c) den x, S_{θ_r} ye ait değildir. Ayrıca her bir satır st_1 e aittir. O halde $st_1 \nsubseteq S_{\theta_r}$ olur. İki katlı $\theta_{r,s}$ lacunary dizileri çarpımsal olduğundan $st_2 \nsubseteq S_{\theta_{r,s}}$ olur. Bu bir çelişkidir.■

Teorem 4.3.8: $\theta_{r,s}$ herhangi bir iki katlı lacunary dizi olsun. Bu durumda $S_{\theta_{r,s}} - limx = L$ iken $st_2 - limx = L$ olması için gerek ve yeter koşul $limsup_r q_r < \infty$ ve $limsup_s \overline{q}_s < \infty$ olmasıdır (Savaş ve Patterson, 2006).

İspat: *Yeterlilik.* $limsup_r q_r < \infty$ ve $limsup_s \overline{q}_s < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda tüm r ve s değerleri için $q_r < H$ ve $\overline{q}_s < H$ olacak şekilde bir $H > 0$ vardır. $x_{k,l} \xrightarrow{P} L\left(S_{\theta_{r,s}}\right)$ olduğunu kabul edelim ve

$$N_{r,s} := \left|\{(k,l) \in I_{r,s} : |x_{k,l} - L| \geq \varepsilon\}\right|$$

olsun. Bu durumda, verilen bir $\varepsilon > 0$ ve tüm $r, s > r_0$ iç in $\frac{N_{r,s}}{h_{r,s}} < \varepsilon$ olacak şekilde $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$M := max\left\{N_{r,s} : 1 \leq r \leq r_0 \text{ ve } 1 \leq s \leq r_0\right\}$$

diyelim. n ve m yi ise $k_{r-1} < m \leq k_r$ ve $l_{s-1} < n \leq l_s$ olacak şekilde seçelim. Böylece aşağıdaki elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{mn}\left|\{k \leq m \text{ ve } l \leq n : |x_{k,l} - L| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\leq \tfrac{1}{k_{r-1}l_{s-1}}\left|\{k \leq k_r \text{ ve } l \leq l_s : |x_{k,l} - L| \geq \varepsilon\}\right| \\
&= \tfrac{1}{k_{r-1}l_{s-1}}\left\{\sum_{i,j=1}^{r_0,r_0} N_{i,j} + \sum_{i,j=r_0+1,r_0+1}^{r,s} N_{i,j}\right\} \\
&\leq \tfrac{Mr_o^2}{k_{r-1}l_{s-1}} + \tfrac{1}{k_{r-1}l_{s-1}}\left\{\sum_{i,j=r_0+1,r_0+1}^{r,s} N_{i,j}\right\} \\
&\leq \tfrac{Mr_o^2}{k_{r-1}l_{s-1}} + \tfrac{1}{k_{r-1}l_{s-1}}\left\{\sum_{i,j=r_0+1,r_0+1}^{r,s} \tfrac{N_{i,j}h_{i,j}}{h_{i,j}}\right\} \\
&\leq \tfrac{Mr_o^2}{k_{r-1}l_{s-1}} + \tfrac{1}{k_{r-1}l_{s-1}}\left(\sup_{i,j\geq r_0,r_0} \tfrac{N_{i,j}}{h_{i,j}}\right)\left\{\sum_{i,j=r_0+1,r_0+1}^{r,s} h_{i,j}\right\} \\
&\leq \tfrac{Mr_o^2}{k_{r-1}l_{s-1}} + \tfrac{\varepsilon}{k_{r-1}l_{s-1}}\left\{\sum_{i,j=r_0+1,r_0+1}^{r,s} h_{i,j}\right\} \\
&= \tfrac{Mr_o^2}{k_{r-1}l_{s-1}} + \tfrac{\varepsilon}{k_{r-1}l_{s-1}}\left\{(k_r - k_{r_0})(l_s - l_{s_0})\right\} \\
&< \tfrac{Mr_o^2}{k_{r-1}l_{s-1}} + \varepsilon\tfrac{k_r}{k_{r-1}}\tfrac{l_s}{l_{s-1}}
\end{aligned}$$

dir. Böylece $st_2 - limx = L$ elde edilir.

Bu teoremin tersinin ispatı Teorem 4.3.7 dekine benzer bir şekilde elde edilebilir.■

Teorem 4.3.7 ve Teorem 4.3.8 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.3.9: $\theta_{r,s}$ iki katlı bir lacunary dizi olsun. Bu durumda $st_2 = S_{\theta_{r,s}}$ olması için gerek ve yeter koşul $1 < lim_r inf q_r \leq lim_r sup q_r < \infty$ ve $1 < lim_s inf \overline{q}_s \leq lim_s sup \overline{q}_s < \infty$ olmasıdır (Savaş ve Patterson, 2006).

Teorem 4.3.10: Eğer $x \in st_2 \cap S_{\theta_{r,s}}$ ise bu durumda $S_{\theta_{r,s}} - limx = st_2 - limx$ dir (Savaş ve Patterson, 2006).

İspat: $L \neq L'$ olmak üzere $st_2 - limx = L$ ve $S_{\theta_{r,s}} - limx = L'$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon < \frac{1}{2}|L - L'|$ için

$P - \lim_{m,n} \frac{1}{mn} |\{k < m \text{ ve } l < n : |x_{k,l} - L'| \geq \varepsilon\}| = 1$ dir.

Şimdi ise, $\frac{1}{mn} |\{k < m \text{ ve } l < n : |x_{k,l} - L'| \geq \varepsilon\}|$ ifadesinin $k_p l_v$ inci terimini göz önüne alalım.

$$\frac{1}{k_p l_v} \left| \left\{ (k,l) \in \bigcup_{r,s=1,1}^{p,v} I_{r,s} : |x_{k,l} - L'| \geq \varepsilon \right\} \right|$$
$$= \frac{1}{k_p l_v} \sum_{r,s=1,1}^{p,v} |\{(k,l) \in I_{r,s} : |x_{k,l} - L'| \geq \varepsilon\}| \quad = \quad \frac{1}{\sum_{r,s=1,1}^{p,v} h_{r,s}} \sum_{r,s=1,1}^{p,v} h_{r,s} t_{r,s}$$

dir. Burada $t_{r,s} = \frac{1}{h_{r,s}} |\{(k,l) \in I_{r,s} : |x_{k,l} - L'| \geq \varepsilon\}|$, $x_{k,l} \xrightarrow{P} L' \left(S_{\theta_{r,s}}\right)$ olduğundan Pringsheim anlamında bir sıfır dizisidir. Buna göre eşitlikteki son ifade, Pringsheim sıfır dizilerinden, Pringsheim sıfır dizileri içine dört boyutlu bir matris dönüşümünün tüm koşullarını sağlar (Hamilton, 1938). Böylece Pringsheim anlamında sıfıra yaklaşır. Ayrıca

$$\frac{1}{mn} \left| \left\{ k < m \text{ ve } l < n : \left| x_{k,l} - L' \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

ifadesinin Pringsheim anlamında 1 e yaklaşmayan bir iki katlı dizisidir. Bu çelişki $L = L'$ olmasını gerektirir.■

Teorem 4.3.11: $S_{\theta_{r,s}} \cap \ell''_{\infty}$ uzayı, ℓ''_{∞} normlu uzayının kapalı bir alt uzayıdır (Savaş ve Patterson, 2006).

İspat: $x^{m,n} = \left(x_{j,k}^{m,n}\right) \in S_{\theta_{r,s}} \cap \ell''_{\infty}$ ve $x^{m,n} \to x \in \ell''_{\infty}$ olsun. $x^{m,n} \in S_{\theta_{r,s}} \cap \ell''_{\infty}$ olduğundan reel bir $L_{m,n}$ sayısı $m,n = 1,2,...$ için $S_{\theta_{r,s}} - \lim_{j,k} x_{j,k}^{m,n} = L_{m,n}$ olacak şekilde vardır. Pozitif bir $P-$azalan, $P-$yakınsak $\{\varepsilon_{m,n}\}$ iki katlı dizisini alalım. Bu durumda her $m,n = 1,2,...$ için bir $N_{m,n}$ pozitif tamsayısı $m,n \geq N_{m,n}$ iken $\|x - x^{m,n}\|_{\infty} \leq \varepsilon_{m,n}/4$ olacak şekilde vardır. Genelliği bozmadan, $N_{m,n} = mn$ olduğunu varsayalım. Sabit m,n için

$$\frac{1}{h_{r_{m,n}}} \left| \left\{ (j,k) \in I_{r_{m,n}} : \left| x_{j,k}^{m,n} - L_{m,n} \right| \geq \frac{\varepsilon_{m,n}}{4} \right\} \right| < \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{h_{r_{m,n}}} \left| \left\{ (j,k) \in I_{r_{m,n}} : \left| x_{j,k}^{m+1,n+1} - L_{m+1,n+1} \right| \geq \frac{\varepsilon_{m+1,n+1}}{4} \right\} \right| < \frac{1}{4}$$

olacak şekilde vardır. Bu ise

$$\left\{(j,k)\in I_{r_{m,n}}:\left|x_{j,k}^{m,n}-L_{m,n}\right|\geq\tfrac{\varepsilon_{m,n}}{4}\right\}$$
$$\cap\left\{(j,k)\in I_{r_{m,n}}:\left|x_{j,k}^{m+1,n+1}-L_{m+1,n+1}\right|\geq\tfrac{\varepsilon_{m+1,n+1}}{4}\right\}\neq\varnothing$$

olmasını gerektirir. Bu arakesitten bir (k_1,k_2) seçersek aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
|L_{m,n}-L_{m+1,n+1}| &\leq \left|x_{k_1,k_2}^{m,n}-L_{m,n}\right|+\left|x_{k_1,k_2}^{m+1,n+1}-L_{m+1,n+1}\right| \\
&+ \left|x_{k_1,k_2}^{m,n}-x_{k_1,k_2}^{m+1,n+1}\right| \\
&\leq \left|x_{k_1,k_2}^{m,n}-L_{m,n}\right|+\left|x_{k_1,k_2}^{m+1,n+1}-L_{m+1,n+1}\right| \\
&+ \left\|x-x^{m,n}\right\|_{\infty}+\left\|x-x^{m+1,n+1}\right\|_{\infty} \\
(\varepsilon_{m,n},\ P-\text{azalan}), &\leq \tfrac{\varepsilon_{m,n}}{4}+\tfrac{\varepsilon_{m+1,n+1}}{4}+\tfrac{\varepsilon_{m,n}}{4}+\tfrac{\varepsilon_{m+1,n+1}}{4}\leq\varepsilon_{m,n}
\end{aligned}$$

Böylece iki katlı $\{L_{m,n}\}$ dizisi $P-$yakınsaktır. $P-\underset{m,n}{lim}L_{m,n}=L$ olsun. $x\xrightarrow{P}L\left(S_{\theta_{r,s}}\right)$ olduğunu göstermemiz gerekir. Herhangi bir $\varepsilon>0$ için $\varepsilon_{m,n}<\varepsilon/4$, $\left\|x-x^{m,n}\right\|_{\infty}<\varepsilon/4$ ve $|L_{m,n}-L|<\varepsilon/4$ olacak şekilde (m,n) vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{h_{r,s}} & \left|\left\{(j,k)\in I_{r,s}:|x_{j,k}-L|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
& \leq \tfrac{1}{h_{r,s}}\left|\left\{(j,k)\in I_{r,s}:|x^{m,n}-L_{m,n}|+\left\|x-x^{m,n}\right\|_{\infty}\right.\right. \\
& \left.\left.+\ |L_{m,n}-L|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
& \leq \tfrac{1}{h_{r,s}}\left|\left\{(j,k)\in I_{r,s}:|x^{m,n}-L_{m,n}|+\tfrac{\varepsilon}{4}+\tfrac{\varepsilon}{4}\geq\varepsilon\right\}\right| \\
& = \tfrac{1}{h_{r,s}}\left|\left\{(j,k)\in I_{r,s}:|x^{m,n}-L_{m,n}|\geq\tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\right|
\end{aligned}$$

olur. Son ifade r ve s sonsuzluğa yaklaştığında sıfıra yaklaşır. Böylece $x\xrightarrow{P}L\left(S_{\theta_{r,s}}\right)$, yani $x\in S_{\theta_{r,s}}\cap\ell_{\infty}''$ olur. Bu ispatı tamamlar.■

V. BÖLÜM

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE TOPLANABİLME

5.1 İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Toplanabilirliği

Bu kısımda, st_A tüm $A-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ve st_A^0, tüm $A-$istatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi olmak üzere $(st_A \cap X, Y)$ ve $\left(st_A^0 \cap X, Y\right)$ matris sınıfları karakterize edilecektir. Burada X bir kısım-kapalı dizi uzayı ve Y keyfi bir dizi uzayı olacaktır. Eğer $X \in \{s, m\}$ ve $Y \in \{c, c_0\}$ ise bu durumda buradaki sonuçlar Schoenberg (1959), Fridy (1985), Connor (1988) ve Maddox'a (1974) ait bazı sonuçları içerecektir.

$k_i < k_{i+1}$ özelliğindeki $\mathbb{N}$ nin sonlu veya sonsuz bir $\{k_i\}$ alt kümesine bir indis kümesi denir. Buna göre sonsuz bir $\{k_i\}$ indis kümesi, $(k_i) = (k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ indislerinin bir dizisidir. φ, tüm sonlu dizilerin uzayı olsun.

Bir $x = (x_k)$ dizisinin $n.ci$ kısmı

$$x^{[n]} = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...)$$

şeklinde tanımlanır.

$K = \{k_i\}$ keyfi bir indis kümesi ve

$$y_k = \begin{cases} x_k, & k \in K \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere $x^{[K]} = (y_k)$ dizisi x in $K-kısmı$ olarak adlandırılır. X bir dizi uzayı olmak üzere eğer her $x \in X$ için ve her K indis kümesi için $x^{[K]} \in X$ oluyorsa bu durumda X uzayına kısım-kapalı dizi uzayı denir. Benzer şekilde bir $altdizisel-kapalı$ dizi uzayı kavramı tanımlanır. Örneğin, s, m, c_o, φ ve ℓ^p uzayları kısım-kapalı uzaylardır. c ve w^p uzayları ise altdizisel-kapalı uzaylardır fakat kısım-kapalı uzaylar değildirler.

Silverman-Teoplitz teoremine göre bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerekli ve yeterli koşulların

(R_1) Her k için $lim_n a_{nk} = 0$

(R_2) $lim_n \sum_k a_{nk} = 1$

(R_3) $sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

olduğunu biliyoruz (Stieglitz, 1977). Eğer A matrisi $(R_2), (R_3)$ ve

(R_4) $lim_n sup_k |a_{nk}| = 0$

koşullarını gerçeklerse A ya düzgün regülerdir denir. Örneğin, C_1 Cesàro matrisi düzgün regülerdir.

Sabit bir $p > 0$ için eğer

$$\underset{n}{lim} \sum_k a_{nk} |x_k - l|^p = 0$$

olacak şekilde bir l sayısı varsa bu durumda $x = (x_k)$ dizisi l ye kuvvetli $A-$toplanabilirdir denir (Maddox, 1967).

Tüm kuvvetli $A-$toplanabilir dizilerin kümesi w_A^p ile gösterilir. Böylece, $w_p = w_{C_1}^p$ dir.

Sabit bir $K = \{k_i\}$ indis kümesi için, $A^{[K]}$ ile A matrisinin $K - sütun$ kısmı gösterilecektir. Böylece

$$d_{nk} = \begin{cases} a_{nk}, & k \in K \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer yer} \end{cases}$$

olmak üzere $A^{[K]} = (d_{nk})$ dır.

$K = \{k_i\}$ bir indis kümesi ve φ^K, K nın karakteristik dizisi, yani $\varphi^K = \left(\varphi_j^K\right)$

$$\varphi_j^K = \begin{cases} 1, & j \in K \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olsun. Eğer φ^K, C_1-toplanabilir ise bu durumda

$$lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^K$$

limitine K nın asimtotik yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Negatif olmayan regüler bir A matrisi için Freedman ve Sember (1981), $A\varphi^K \in c$ olması durumunda K nın

$$\delta_A(K) = \underset{n}{lim} A_n \varphi^K$$

$A-$yoğunluğuna sahip olduğunu tanımladı. Buna göre,

$$\delta_A(K) = \underset{n}{lim} \sum_{k \in K} a_{nk} = \underset{n}{lim} \sum_i a_{n,k_i}$$

dir.

Agnew (1946) aşağıdaki teoremi ispatlamıştır: "Eğer bir $A = (a_{nk})$ matrisi (R_4) koşulunu ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$ koşulunu gerçeklerse bu durumda 0 ların ve 1 lerin sıfıra $A-$toplanabilir olan ıraksak bir dizisi vardır." Veya denk olarak; eğer A matrisi Agnew'in teoreminin koşullarını gerçeklerse bu durumda $\delta_A(K) = 0$ olacak şekilde sonsuz bir K indis kümesi vardır.

Düzgün regüler bir A matrisi ve sonsuz bir $K = \{k_i\}$ indis kümesi için, A nın (a_{n,k_i}) alt matrisi açık olarak Agnew'in teoreminin koşullarını gerçekler. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.1.1: Eğer A düzgün regüler bir matris ise bu durumda her sonsuz indis kümesi $\delta_A(K) = 0$ olacak şekilde bir sonsuz K alt kümesi içerir (Kolk, 1993).

Teorem 5.1.2: Bir $x = (x_k)$ dizisinin bir x_0 noktasına $A-$istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart sonsuz bir $K = \{k_i\}$ indis kümesinin ve böylece x_0 a yakınsak bir (x_{k_i}) alt dizisinin $\delta_A(\mathbb{N} \backslash K) = 0$ olacak şekilde var olmasıdır (Kolk, 1993).

Bir altdizisel-kapalı Y dizi uzayı için aşağıdaki teorem, $A-$yoğunluk anlamında (s, Y) matris sınıfını karakterize etmektedir.

Teorem 5.1.3: $Y \neq s$ bir altdizisel-kapalı dizi uzayı olsun. Eğer A matrisi düzgün regüler ise bir $B = (b_{nk})$ matrisi için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $B \in (s, Y)$

(ii) $\delta_A(K) = 0$ olan her K indis kümesi için $B^{[K]} \in (s, Y)$

(iii) $Be^k \in Y \ (k \in \mathbb{N})$ dir ve

$$b_{nk} = 0 \quad (k > k_0, \ n \in \mathbb{N}) \tag{5.1.1}$$

olacak şekilde bir k_0 sayısı vardır (Kolk, 1993).

İspat: (i) nin gerçeklendiğini kabul edelim ve bir K indis kümesi ve bir $x = (x_k)$ dizisi seçelim. x dizisinin $y = x^{[K]}$ $K-$kısmı s ye ait olduğundan ve $By \in Y$ olduğundan $B^{[K]}x \in Y$ olduğunu ve

$$B_n^{[K]}x = B_n y \quad (n \in \mathbb{N})$$

olduğunu alırız. Böylece (ii) gerçeklenir.

Şimdi (ii) nin gerçeklendiğini kabul edelim. Bu durumda k tek noktasından oluşan K kümesi için $\delta_A(K) = 0$ olduğu gerçeğini kullanarak

$$Be^k = B^{[K]}e^k \in Y \quad (k \in \mathbb{N})$$

elde ederiz. (5.1.1) i ispatlamak için ilk önce B nin satır-sonlu olması gerektiğini gösterelim. Aksi halde

$$b_{n_0,k_i} \neq 0 \quad (i \in \mathbb{N})$$

olacak şekilde bir n_0 indisi ve bir sonsuz $K = \{k_i\}$ indis kümesi mevcut olmalıdır. Teorem 5.1.1 den $\delta_A(K) = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $x = (x_k)$,

$$x_{k_i} = \frac{1}{b_{n_0,k_i}} \quad (i \in \mathbb{N})$$

olacak şekilde bir dizi ise bu durumda

$$B_{n_0}^{[K]}x = \sum_i b_{n_0,k_i}x_{k_i} = \sum_i 1 = \infty$$

olur ve böylece $B^{[K]}x$ mevcut değildir. Bu ise $B^{[K]} \in (s, Y)$ olması ile çelişir. Buna göre B satır-sonludur.

Eğer (5.1.1) in gerçeklenmediğini kabul edersek bu durumda

$$b_{n_i,k_i} \neq 0, \quad b_{n_i,k} = 0 \quad (k > k_i, i \in \mathbb{N})$$

olacak şekilde $K = \{k_i\}$ ve $N = \{n_i\}$ indis kümeleri vardır. Tekrar Teorem 5.1.1 den $\delta_A(K) = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $z = (z_k) \in s \backslash Y$ seçelim ve

$$x_{k_1} = \frac{z_1}{b_{n_1,k_1}}$$

ve

$$x_{k_i} = (b_{n_i,k_i})^{-1}\left(z_{k_i} - \sum_{j=1}^{i-1} b_{n_i,k_j}x_{k_j}\right) \quad (i > 1)$$

olmak üzere $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Bu durumda

$$B_{n_i}^{[K]}x = z_i \quad (i \in \mathbb{N})$$

olur. Böylece $\left(B_{n_i}^{[K]}x\right) \notin Y$ dir ve Y altdizisel-kapalı olduğundan (ii) nin aksine $B^{[K]}x \notin Y$ dir. Sonuç olarak (ii), (iii) yi gerektirir.

Son olarak eğer (iii) gerçeklenirse bu durumda herhangi bir $x \in s$ olduğundan

$$Bx = B\left(\sum_{k=1}^{k_0} x_k e^k\right) = \sum_{k=1}^{k_0} x_k Be^k \in Y$$

olur. Dolayısıyla (i) gerçeklenir. Böylece ispat tamamlanır.■

Aşağıdaki teorem X uzayı üzerindeki belirli kısıtlamalar altında $(st_A \cap X, Y)$ matrislerinin sınıfını karakterize etmektedir.

Teorem 5.1.4: X, e yi içeren bir kısım-kapalı dizi uzayı ve Y herhangi bir dizi uzayı olsun. Bu durumda $B \in (st_A \cap X, Y)$ olması için gerek ve yeter koşul $B \in (c \cap X, Y)$ ve

$$B^{[K]} \in (X, Y) \quad (\delta_A(K) = 0) \tag{5.1.2}$$

olmasıdır (Kolk, 1993).

İspat: $B \in (st_A \cap X, Y)$ olsun. $c \subset st_A$ olduğundan $B \in (c \cap X, Y)$ dir. Şimdi $\mathbb{N}$ nin $\delta_A(K) = 0$ olan bir K alt kümesini göz önüne alalım ve $x \in X$ olsun. Bu durumda x in $K-$kısmı sıfıra $A-$istatistiksel yakınsaktır. Ayrıca, X kısım-kapalı olduğundan, $y \in X$ dir. Böylece $y \in st_A \cap X$ ve buradan da $By \in Y$ olur. $B_n^{[K]}x = B_n y \quad (n \in \mathbb{N})$ eşitliğinden $B^{[K]}x \in Y$ dir. Böylece $\delta_A(K) = 0$ olan her K indis kümesi için $B^{[K]} \in (X, Y)$ olur. Yani (5.1.2) gerçeklenir.

Tersi için, $x \in st_A \cap X$ ve $st_A - lim x_k = x_0$ olsun. $Be \in Y$ olduğundan $x_0 = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $x \in c$ ise bu durumda $B \in (c \cap X, Y)$ olmasından direkt olarak $Bx \in Y$ dir. Fakat eğer $x \in st_A \backslash c$ ise bu durumda Teorem 5.1.2 den $\delta_A(K) = 0$ olan bir K indis kümesi vardır öyleki $z = (z_k)$ x in $\mathbb{N}\backslash K-$kısmı olmak üzere $lim_k z_k = 0$ dır. $z \in X$ olduğundan $Bz \in Y$ dir. Böylece $B^{[K]}x \in Y$ ve

$$Bx = Bz + B^{[K]}x$$

olduğundan dolayı $Bx \in Y$ elde ederiz.■

Teorem 5.1.4 benzer olarak st_A^0 uzayı içinde ispatlanabilir.

Teorem 5.1.5: X bir kısım-kapalı dizi uzayı ve Y keyfi bir dizi uzayı olsun. Bu durumda $B \in \left(st_A^0 \cap X, Y\right)$ olması için gerek ve yeter koşul $B \in (c_0 \cap X, Y)$ olması ve (5.1.2) nin gerçeklenmesidir (Kolk, 1993).

Önceki teoreme daynarak, eğer A düzgün regüler ise bu durumda (st_A, Y) ve $\left(st_A^0, Y\right)$ matris sınıflarının (s, Y) sınıfı ile çakıştığını gösterelim.

Teorem 5.1.6: $Y \neq s$ bir altdizisel-kapalı dizi uzayı olsun. Eğer A matrisi düzgün regüler ise bu durumda $(st_A, Y) = \left(st_A^0, Y\right) = (s, Y)$ dir (Kolk, 1993).

İspat: $(s, Y) \subset (st_A, Y) \subset \left(st_A^0, Y\right)$ olduğundan $\left(st_A^0, Y\right) \subset (s, Y)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Eğer $B \in \left(st_A^0, Y\right)$ ise bu durumda Teorem 5.1.5 den ($X = s$ durumunda) $\delta_A(K) = 0$ olan her K indis kümesi için $B^{[K]} \in (s, Y)$ dir. Böylece Teorem 5.1.3 den $B \in (s, Y)$ olduğu çıkar.■

Teorem 5.1.3 de (i) ve (ii) koşullarının denkliğinden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.7: Teorem 5.1.6 nın kabulleriyle birlikte $B \in \left(st_A^0, Y\right)$ (veya denk olarak $B \in (st_A, Y)$) olması için gerek ve yeter koşul B nin Y ye ait olan en fazla sonlu sayıda sıfırdan farklı sütunlara sahip olmasıdır (Kolk, 1993).

$Y = c$ durumunda bu sonuç Fridy'nin (1985) teoreminin bir genişlemesini verir.

Sonuç 5.1.8: Eğer A düzgün regüler ise bu durumda tüm $A-$istatistiksel yakınsak dizileri onların $A-$istatistiksel limitlerine toplayan bir B matrisi yoktur (Kolk, 1993).

$X = m$ için Teorem 5.1.4 uygulandığında,

$B \in (st_A \cap m, Y)$ olması için gerek ve yeter koşul $B \in (c, Y)$ ve

$$B^{[K]} \in (m, Y) \tag{5.1.3}$$

olmasıdır.

Teorem 5.1.5 den ise; $B \in \left(st_A^0 \cap m, Y\right)$ dir $\Leftrightarrow B \in (c_0, Y)$ dir ve (5.1.3) gerçeklenir.

Burada çok önemli olan durumlar $Y = c$ ve $Y = c_0$ durumlarıdır. Bilinen (m, c) ve (m, c_0) matris karakterizasyonlarını kullanarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 5.1.9: $B \in (st_A \cap m, Y)$ olması için gerek ve yeter koşul $B \in (c, c)$ ve

$$\lim_n \sum_{k \in K} |b_{nk} - b_k| = 0 \quad \left(\delta_A(K) = 0,\ b_k = \lim_k b_{nk}\right) \tag{5.1.4}$$

olmasıdır (Kolk, 1993).

Sonuç 5.1.10: $B \in \left(st_A^0 \cap m, Y\right)$ olması için gerek ve yeter koşul $B \in (c_0, c_0)$ ve

$$\lim_n \sum_{k \in K} |b_{nk}| = 0 \quad (\delta_A(K) = 0) \tag{5.1.5}$$

olmasıdır (Kolk, 1993).

Connor (1988) ve Kolk (1991) tarafından her $p > 0$ için $st_A \cap m = w_A^p \cap m$ olduğu ispatlandı. Böylece Sonuç 5.1.9 dan Teorem 1.2.18 in (Maddox,1974) aşağıdaki genişlemesi doğrudur:

$B \in \left(w_A^p \cap m, Y\right)$ dir $\Leftrightarrow B \in (c, c)$ dir ve (5.1.4) gerçeklenir.

$A = C_1$ durumunda Sonuç 5.1.10 , Connor (1988) Teorem 3.7 nin benzer bir biçimi olur. Ayrıca regüler bir B matrisi için (5.1.4) koşulu (5.1.5) e indirgenir. Eğer ilave olarak, B negatif olmayan bir matris ise o zaman aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 5.1.11: B negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda $B \in (st_A \cap m, c)$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta_A(K) = 0$ iken $\delta_B(K) = 0$ olmasıdır (Kolk, 1993).

Diğer bir ifadeyle bir önceki sonuç, "negatif olmayan regüler bir B matrisinin $A-$istatistiksel sınırlı dizileri limitleyebilmesi için gerek ve yeter koşul B nin 0 ların ve 1 lerin tüm $A-$istatistiksel sıfır dizilerini sıfır dizilere toplamasıdır" şeklinde yorumlanabilir. Özel olarak $B = A$ durumunda Sonuç 5.1.11 aşağıdaki sonuca genişler

Sonuç 5.1.12: Negatif olmayan regüler bir A matrisi, tüm $A-$istatistiksel sınırlı dizileri onların $A-$istatistiksel limitlerine toplar (Kolk, 1993).

5.2 İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Toplanabilme Arasındaki İçerme Bağıntıları

Toplanabilmenin klasik teorisinde matris metotları önemli bir rol oynar. $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks sayıların sonsuz bir matrisi ve $x = (x_k)$ bir sayı dizisi olsun. $a_{nk} \geq 0$ olmak üzere tüm regüler $A = (a_{nk})$ matrislerinin kümesini τ^+ ile gösterelim. Örneğin C_1 Cesàro matrisi negatif olmayandır ve regülerdir. Yani $C_1 \in \tau^+$ dır. Benzer bir metot şu şekilde verilebilir.

Örnek 5.2.1: Lacunary Yakınsaklık (Freedman ve diğ. 1978). $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} x_i = l$$

oluyorsa bu durumda $x = (x_k)$ dizisi l ye lacunary yakınsaktır. Eğer

$$a_{ri}^{\theta} = \begin{cases} 1/h_r, & i \in I_r \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere $A_\theta = \left(a_{ri}^{\theta}\right)$ matrisi göz önüne alınırsa bu durumda $A_\theta-$toplanabilme, lacunary yakınsaklıktır. $A_\theta \in \tau^{+}$ olduğu açıktır.

Toplanabilmenin matrissel olmayan bilinen bir örneği hemen hemen yakınsaklıktır. Bu yakınsaklık Banach limitleri ile tanımlanır. Lorentz (1948), bir $x = (x_k)$ dizisinin bir l sayısına hemen hemen yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$i \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k+i} = l \tag{5.2.1}$$

olduğunu ispatladı. Eğer $B_i^1 = \left(b_{nk}^1(i)\right)$ matrisleri

$$b_{nk}^1(i) = \begin{cases} 1/n, & 1+i \leq k \leq n+i \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, (5.2.1) i

$$i \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_n \sum_k b_{nk}^1(i) = l$$

formunda yazabiliriz.

Genel olarak, sonsuz matrislerin keyfi bir $\mathcal{B} = (B_i)$, $B_i = (b_{nk}(i))$ dizisi için eğer

$$i \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_n \sum_k b_{nk}(i)\, x_k = l$$

oluyorsa o zaman $x = (x_k)$ dizisi l ye $\mathcal{B}-$toplanabilirdir denir ve bu durum $\mathcal{B}-limx = l$ biçiminde gösterilir (Stieglitz, 1973).

Böyle bir metoda bazen toplanabilmenin dizisel bir metodu denir. Bizim buradaki gösterimlerimizde hemen hemen yakınsaklık, $\mathcal{B}_1 = \left(B_i^1\right)$ olmak üzere, $\mathcal{B}_1-$toplanabilme ile çakışır.

Toplanabilmenin matris metotlarına benzer olarak, kısım 1.1 den eğer her $x = (x_k)$ yakınsak dizisi $\mathcal{B}-$toplanabilir ve $\mathcal{B}-limx = lim_k x_k$ ise bu durumda dizisel olan $\mathcal{B}$ toplanabilme metodu regülerdir denir. Ve benzer şekilde $\mathcal{B} = (B_i)$ metodunun regüler olması için gerekli ve yeterli koşullar

(R_1) Her $k \in \mathbb{N}$ için i ye göre düzgün olarak $lim_n b_{nk}(i) = 0$

(R_2) i ye göre düzgün olarak $lim_n \sum_k b_{nk}(i) = 1$

(R_3) $\sum_k |b_{nk}(i)| < \infty \quad (n, i \in \mathbb{N}), \ \exists\, N \ sup_{i\in\mathbb{N}, n>N} \sum_k |b_{nk}(i)| < \infty$

ile verilir (Teorem 1.1.36). $b_{nk}(i) \geq 0$ olmak üzere tüm regüler dizisel $\mathcal{B}$ metotlarının kümesini $\mathcal{R}^+$ ile göstereceğiz. Sabit bir $\mathcal{B} = (A)$ dizisi için $\mathcal{B}$ metodu , A metoduna indirgendiğinden $\tau^+ \subset \mathcal{R}^+$ olduğunu söyleyebiliriz.

$K = \{k_i\}$ bir indis kümesi olsun. Dizisel bir $\mathcal{B} \in \mathcal{R}^+$ metodu için $\delta_{\mathcal{B}}(K)$ yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 5.2.2: Bir K indis kümesinin karakteristik dizisi d ye $\mathcal{B}-$toplanabilir ise, yani

$$i \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_n \sum_{k\in K} b_{nk}(i) = d$$

ise bu durumda K indis kümesi d ye eşit olan $\delta_{\mathcal{B}}(K)$, $\mathcal{B}-$yoğunluğuna sahiptir denir (Kolk, 1998).

Özel olarak $\mathcal{B} = (C_1)$ durumunda $\delta_{\mathcal{B}}$ yoğunluğuna asimtotik yoğunluk denir. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ için $\delta_{\mathcal{B}}$, düzgün yoğunluğa indirgenir (Freedman ve Sember, 1981). $\mathcal{B} = (A)$, $A \in \tau^+$ durumunda $\mathcal{B}-$yoğunluk δ_A, $A-$yoğunluğudur.

Her yoğunluğa karşılık istatistiksel yakınsaklık tanımlanır (Connor, 1990). Dolayısıyla $\mathcal{B}-$yoğunluğu kullanarak reel veya kompleks sayıların bir K cismi üzerinde Banach uzayı olan X uzayı üzerinde $\mathcal{B}-$istatistiksel yakınsaklığı tanımlayabiliriz.

Tanım 5.2.3: $\mathcal{B} \in \mathcal{R}^+$ ve $x = (x_k)$ bir $X-$değerli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_{\mathcal{B}}(\{k : \|x_k - l\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise bu durumda x dizisi bir $l \in X$ elemanına $\mathcal{B}-$istatistiksel yakınsaktır denir ve kısaca $st(\mathcal{B}, X) - limx = l$ şeklinde gösterilir (Kolk, 1998).

$st(\mathcal{B}, X)$ sembolü ile tüm $\mathcal{B}-$istatistiksel yakınsak $X-$değerli dizilerin uzayını göstereceğiz. X de sıfıra yakınsak $\mathcal{B}-$istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı ise $st_0(\mathcal{B}, X)$ ile gösterilecektir. $\mathcal{B} = (A)$, $A \in \tau^+$ durumunda $st(\mathcal{B}, X)$ ve $st_0(\mathcal{B}, X)$ yerine sırasıyla $st(A, X)$ ve $st_0(A, X)$ yazılır.

Tanım 5.2.3 ün , $\mathcal{B} = (C_1)$ için istatistiksel yakınsaklığı (Fast,1951; Maddox, 1988), $\mathcal{B} = (A)$ için $A-$istatistiksel yakınsaklığı (Connor, 1989; Kolk, 1991), $\mathcal{B} = (A_\theta)$

için lacunary istatistiksel yakınsaklığı (Fridy ve Orhan, 1993; Pehlivan ve Fisher, 1995), $\mathcal{B} = (B_1)$ için düzgün istatistiksel yakınsaklığı (Pehlivan, 1994) verdiğini görmek zor değildir.

(R_1) e göre herhangi bir sonlu indis kümesinin $\mathcal{B}-$yoğunluğu sıfır olduğundan, X deki her yakınsak dizi $\mathcal{B}-$istatistiksel yakınsaktır. Yani tüm $X-$değerli dizilerin uzayı $c(X)$ olmak üzere

$$c(X) \subset st(\mathcal{B}, X)$$

dir. Bu içerme kesin bir içermedir. Eğer A düzgün regüler matris, yani $A \in \tau^+$ ve

(T_4) $lim_n sup_k |a_{nk}| = 0$

ise

$$c(X) \subsetneqq st(A, X) \tag{5.2.2}$$

olduğunu gösterebiliriz. Yukarıdaki özelliğe sahip tüm matrislerin kümesini $\mathcal{U}\tau^+$ ile göstereceğiz.

Lemma 5.2.4: $A \in \mathcal{U}\tau^+$ olsun. Her sonsuz K indis kümesi $\delta_A\left(K'\right) = 0$ olacak şekilde bir sonsuz K' alt kümesi içerir. Ayrıca (5.2.2) keyfi bir X Banach uzayı için gerçeklenir (Kolk, 1998).

İspat: Agnew (1946) aşağıdaki teoremi ispatlamıştır: " Eğer $A = (a_{nk})$, (T_4) koşulunu ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$ koşulunu gerçeklerse bu durumda 0 ların ve 1 lerin sıfıra $A-$toplanabilir olan ıraksak bir dizisi vardır." Eğer $A \in \mathcal{U}\tau^+$ ve $K = \{k_i\}$ sonsuz bir indis kümesi ise bu durumda (a_{n,k_i}) matrisi açık olarak Agnew'in teoreminin kabullerini gerçekler. Dolayısıyla $\alpha_i = 0$ veya $\alpha_i = 1$ olacak şekilde ıraksak bir (α_i) dizisi vardır öyleki

$$\lim_n \sum_i a_{n,k_i} \alpha_i = 0$$

dır. Böylece $K' = \{k_i : \alpha_i = 1\}$ kümesi K nın $\delta_A\left(K'\right) = 0$ olacak şekilde bir sonsuz alt kümesidir.

Öte yandan, $\|z_0\| = 1$ olan sabit bir $z_0 \in X$ elemanı için $z = (\alpha_i z_0)$ X de ıraksak bir dizidir fakat eğer $K_\varepsilon = \{i : \|\alpha_i z_0\| \geq \varepsilon\}$ ise bu durumda $0 < \varepsilon \leq 1$ için $K_\varepsilon = K'$ ve diğer durumlarda $K_\varepsilon = \varnothing$ olduğundan $st(A, X) - limz = 0$ dır. Sonuç olarak (5.2.2) gerçeklenir. ■

Tanım 5.2.5:(Modülüs fonksiyonu) Eğer $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu

(a) $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

(b) Her $u, t \geq 0$ için $f(t+u) \leq f(t) + f(u)$

(c) f artan

(d) f, $t = 0$ da sağdan süreklidir.

koşullarını gerçeklerse bu durumda f ye bir modülüs fonksiyonu denir.

(b) ve (d) den f nin $[0, \infty)$ da heryerde sürekli olduğu çıkar. Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin; $f(t) = t^p$ $(0 < p \leq 1)$ fonksiyonu sınırsız, $f(t) = t/(1+t)$ fonksiyonu sınırlıdır.

Maddox (1986) klasik toplanabilme kavramının aşağıdaki gibi bir genelleştirmesini verdi:

Verilen bir $x = (x_k)$ dizisi ve bir f modülüs fonksiyonu için eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|x_k - l|) = 0$$

ise bu durumda x dizisi f modülüs fonksiyonuna göre l ye kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir.

Maddox (1988) tarafından, her f modülüs fonksiyonu için $w(f) \subset st$ olduğu ve $st \subset w(f)$ olması için gerekli ve yeterli koşulun f nin sınırlı olması olduğu gösterildi. Burada $w(f)$, f ye göre kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin uzayını göstermektedir. Maddox'un teoremlerinin bazı
genelleştirmeleri Connor (1989), Kolk (1991), Nuray ve Savaş (1994), Pehlivan (1994), Bilgin (1994) ve Pehlivan ve Fisher (1995) çalışmalarında bulunabilir. Biz bu sonuçları $st(\mathcal{B}, X)$ ve $w^p(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X)$ gibi daha genel $X-$değerli dizilerin uzaylarına genişleteceğiz. Burada X bir Banach uzayı, $\mathcal{B} = (B_i)$ regüler dizisel bir matris ve $\mathcal{F} = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisidir. Ayrıca burada bir uygulama olarak Pehlivan ve Fisher'in (1995) iki teoremi düzeltilecektir.

Ruckle (1978), Maddox (1986) ve diğer yazarlar yeni dizi uzayları kurmak için modülüs fonksiyonlarını kullandılar ve bazı dizi uzayları bir $\mathcal{F} = (f_k)$ modülüs fonksiyonlar dizisine göre tanımlandı. Bu tanımlamalarda $\mathcal{F}$ nin aşağıdaki özellikleri önemlidir:

(M_1) $\inf_k f_k(t) > 0 \quad (t > 0)$

(M_2) $\lim_{t \to 0^+} \sup_k f_k(t) = 0$

(M_3) $\underset{t}{sup}\,\underset{k}{sup} f_k(t) = M < \infty$

Bir X Banach uzayı için, $w(X)$ ile tüm $X-$değerli dizilerin uzayını, $c_0(X)$ ile X deki tüm sıfıra yakınsak dizilerin uzayını gösterelim ve

$$c_0(\mathcal{F}, X) = \{x = (x_k) \in w(X) : lim_k f_k(\|x_k\|) = 0\}$$

olsun. $X = K$ durumunda $c_0(X)$ ve $c_0(\mathcal{F}, X)$ yerine sırasıyla c_0 ve $c_0(\mathcal{F})$ yazacağız.

Aşağıda Kolk (1991, 1993) tarafından verilen bazı tanımları ve teoremleri hatırlayalım.

Tanım 5.2.6: Eğer

$$\lim_n \sum_k a_{nk} \|x_k - x_0\|^p = 0$$

ise, bir $x = (x_k) \in w(X)$ dizisine kuvvetli olarak $p > 0$ indisi ile $x_0 \in X$ elemanına A-toplanabilirdir denir. X deki tüm kuvvetli olarak A-toplanabilir dizilerinin kümesi $w_A^p(X)$ ile gösterilir.

Tanım 5.2.7: X bir Banach uzayı, $\mathcal{F} = (f_k)$ bir modülüs fonksiyonlar dizisi, $x \in w(X)$ ve$A \in \mathcal{U}\tau^+$ olsun. Eğer en az bir $l \in X$ için

$$\underset{n}{lim} \sum_k a_{nk} \left[f_k(\|x_k - l\|)\right]^p = 0$$

oluyorsa bu durumda x dizisi bir l ye kuvvetli $w_A^p(\mathcal{F}, X)-$toplanabilirdir denir ve bu durum $w_A^p(\mathcal{F}) - lim x_k = l$ ile gösterilir.

Teorem 5.2.8: X bir Banach uzayı ve $\mathcal{F} = (f_k)$ bir modülüs fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda

$$w_A^p(\mathcal{F}) - lim x_k = l \Rightarrow st_A - lim x_k = l$$

olması için gerek ve yeter şart (M_1) in gerçeklenmesidir (Kolk, 1991)

Lemma 5.2.9:**(a)** (M_1) in gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul en az bir $t_0 > 0$ için $inf_k f_k(t_0) > 0$ olmasıdır.

(b) (M_2) nin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul en az bir $t_0 > 0$ için $sup_k f_k(t_0) < \infty$ olmasıdır (Kolk, 1993).

Teorem 5.2.10: $c_0(X) \subset c_0(\mathcal{F}, X)$ içermesinin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul (M_2) nin gerçeklenmesidir (Kolk, 1993).

Aşağıdaki lemma ters kapsam için bir gerekli ve yeterli koşul vermektedir.

Lemma 5.2.11: $c_0(\mathcal{F}, X) \subset c_0(X)$ olması için gerekli ve yeterli koşul (M_1) in gerçeklenmesidir (Kolk, 1998).

İspat: $(x_k) \in c_0(\mathcal{F}, X)$ ve $(x_k) \in c_0(X)$ olması, $(\|x_k\|) \in c_0(\mathcal{F})$ ve $(\|x_k\|) \in c_0$ olmasına denk olduğundan Kolk (1993) Teorem 5 den istenilen elde edilir. ■

Aşağıdaki tanım ve teoremler Pehlivan ve Fisher'e (1995) aittir.

Tanım 5.2.12: $\mathcal{F} = (f_k)$ bir modülüs fonksiyonlar dizisi, X bir Banach uzayı ve $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda $N_\theta(X)$ ve $N_\theta(X, \mathcal{F})$ uzayları

$$N_\theta(X) = \left\{ x = (x_k) \in X : \exists l \in X \text{ için, } \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \|x_k - l\| = 0 \right\}$$

$$N_\theta(X, \mathcal{F}) = \left\{ x = (x_k) \in X : \exists l \in X \text{ için, } \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} f_k(\|x_k - l\|) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.2.13: $\mathcal{F} = (f_k)$ bir modülüs fonksiyonlar dizisi ve X bir Banach uzayı olsun. Bu durumda $N_\theta(X, \mathcal{F}) \subset S_\theta(X)$ olması için gerek ve yeter koşul, $inf_k f_k(t) > 0$ $(t > 0)$ olmasıdır (Pehlivan ve Fisher, 1995).

Teorem 5.2.14: $\mathcal{F} = (f_k)$ bir modülüs fonksiyonlar dizisi ve X bir Banach uzayı olsun. Bu durumda $S_\theta(X) \subset N_\theta(X, \mathcal{F})$ olması için gerek ve yeter koşul, $sup_k f_k(t) < \infty$ olmasıdır (Pehlivan ve Fisher, 1995).

Klasik kuvvetli toplanabilme kavramının ve kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olarak, Maddox (1979) ve Mursaleen (1979) tarafından kuvvetli $\mathcal{B}-$toplanabilme kavramı verildi:

Eğer

$$i \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_n \sum_k b_{nk}(i) |x_k - l| = 0$$

oluyorsa bu durumda $x = (x_k)$ dizisi bir l sayısına kuvvetli $\mathcal{B}-$toplanabilirdir denir.

Kolk (1997) tarafından kuvvetli $\mathcal{B}-$toplanabilmenin bir $\mathcal{F} = (f_k)$ modülüs fonksiyonlar dizisine göre aşağıdaki genelleştirilmesi verildi:

Tanım 5.2.15: $p>0$, X bir Banach uzayı, $\mathcal{F} = (f_k)$ bir modülüs fonksiyonlar dizisi ve $\mathcal{B}$, $b_{nk}(i) \geq 0$ olan dizisel bir toplanabilme metodu olsun. Bir $x = (x_k) \in$

$w(X)$ dizisi için eğer

$$i \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_n \sum_k b_{nk}(i)\left[f_k\left(\|x_k - l\|\right)\right]^p = 0$$

oluyorsa bu durumda x dizisi bir $l \in X$ elemanına kuvvetli $(\mathcal{B}, p, \mathcal{F})$ $-$toplanabilirdir denir ve bu durum kısaca $w^p(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X) - limx = l$ şeklinde gösterilir.

$w^p(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X)$ ile tüm kuvvetli $(\mathcal{B}, p, \mathcal{F})$ $-$toplanabilir dizilerin uzayını göstereceğiz.

Tanım 5.2.15 in kayda değer özel bir durumu aşağıdaki örnekte verilmektedir.

Örnek 5.2.16: $w^p(\mathcal{B}, f, X)$ **uzayı.** X bir Banach uzayı, $\mathcal{B}$, dizisel bir toplanabilme metodu ve $p = (p_k)$, $sup_k p_k = H < \infty$ olacak şekilde pozitif bir dizi olsun. Bir f modülüs fonksiyonu için $w^p(\mathcal{B}, f, X)$ ile, $l \in X$ için

$$i \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_n \sum_k b_{nk}(i)\left[f\left(\|x_k - l\|\right)\right]^{p_k} = 0$$

olacak şekildeki $x = (x_k) \in w(X)$ dizilerinin uzayını gösterelim. Bu durumda $w^p(\mathcal{B}, f, X) - limx = l$ yazılır.

Eğer $q = max\{1, H\}$ ise bu durumda $p_k/q \leq 1$ dir ve

$$f_k^p(t) = [f(t)]^{p_k/q}$$

eşitliği açık olarak her $k \in \mathbb{N}$ için bir modülüs fonksiyonu tanımlar. Böylece $\mathcal{F}^p = \left(f_k^p\right)$ için

$$\left[f_k^p\left(\|x_k - l\|\right)\right]^q = \left[f^{p_k/q}\left(\|x_k - l\|\right)\right]^q = \left[f\left(\|x_k - l\|\right)\right]^{p_k}$$

olduğundan

$$w^p(\mathcal{B}, f, X) = w^q(\mathcal{B}, \mathcal{F}^p, X) \tag{5.2.3}$$

bulunur.

$w^p(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X) \subset st(\mathcal{B}, X)$ **içermesi.**

X bir Banach uzayı olsun. $X-$değerli bir $y = (y_k)$ dizisi ve skaler bir (a_k) dizisi için $a.y = (a_k y_k)$ diyelim. Eğer K bir indis kümesi ise bu durumda $y^{[K]}$ ile $\chi(K)\, y$ dizisini gösterelim. Böylece

$$y_k^{[K]} = \begin{cases} y_k, & k \in K \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere $y^{[K]} = \left(y_k^{[K]}\right)$dır.

Teorem 5.2.17: $\mathcal{B} \in \mathcal{R}^+$ ve $\mathcal{F} = (f_k)$ bir modülüs fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer sonsuz bir K indis kümesi için

$$\underset{k\in K}{inf} f_k(t) > 0 \ \ (t > 0) \tag{5.2.4}$$

ise bu durumda $w^p(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X) - limy^{[K]} = 0$ iken $st(\mathcal{B}, X) - limy^{[K]} = 0$ dır (Kolk, 1998).

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. (5.2.4) den $f_k(\varepsilon) > s \ \ (k \in K)$ olacak şekilde bir $s > 0$ sayısı vardır.

$$L_\varepsilon = \left\{k : \left\|y_k^{[K]}\right\| \geq \varepsilon\right\} = \{k \in K : \|y_k\| \geq \varepsilon\}$$

şeklinde gösterilirse, $f_k\left(\left\|y_k^{[K]}\right\|\right) \geq f_k(\varepsilon) > s$ olduğundan, her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma_n(i) = \sum_k b_{nk}(i)\left[f_k\left(\left\|y_k^{[K]}\right\|\right)\right]^p \geq s^p \sum_{k\in L_\varepsilon} b_{nk}(i)$$

elde edilir. Buradan da

$$\sum_{k\in L_\varepsilon} b_{nk}(i) \leq s^{-p}\sigma_n(i) \ \ (i, n \in \mathbb{N})$$

olur. Böylece $w^p(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X) - limy^{[K]} = 0$, yani i ye göre düzgün olarak $lim_n \sigma_n(i) = 0$ ise bu durumda

$$\delta_A(L_\varepsilon) = \underset{n}{lim}\underset{i}{sup}\sum_{k\in L_\varepsilon} b_{nk}(i) = 0$$

elde edilir. O halde $st(\mathcal{B}, X) - limy^{[K]} = 0$ dır.■

$K = \mathbb{N}$ için (5.2.4) koşulu (M_1) e denktir. Buna göre Teorem 5.2.17 de $y = x_k - l$ alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.2.18: $\mathcal{B} \in \mathcal{R}^+$ olsun ve $\mathcal{F} = (f_k)$, (M_1) i gerçeklesin. Bu durumda

$$w^p(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X) - limx = l \Rightarrow st(\mathcal{B}, X) - limx = l \tag{5.2.5}$$

dir (Kolk, 1998).

$\mathcal{B}$ ve $\mathcal{F}$ dizilerinin somut tanımları ile ilgili olarak çeşitli özel durumlar vardır. Eğer f bir modülüs fonksiyonu ve $p = (p_k)$ pozitif tamsayıların sınırlı bir dizisi ise bu durumda $\mathcal{F}^p$ modülüs fonksiyonlar dizisi (M_2) koşulunu gerçekler (Örnek

5.2.16). Dolayısyla (5.2.3) den Bilgin (1994) Teorem 1 in aşağıdaki genelleştirmesini verebiliriz.

Sonuç 5.2.19: $\mathcal{B} \in \mathcal{R}^+$ ve $0 < p_k \leq sup_k p_k = H < \infty$ olsun. Herhangi bir f modülüs fonksiyonu için

$$w^p(\mathcal{B}, f, X) - limx = l \Rightarrow st(\mathcal{B}, X) - limx = l$$

dir (Kolk, 1998).

$p_k = 1$ durumunda Sonuç 5.2.19 daha önceden Pehlivan (1994) $(\mathcal{B} = \mathcal{B}_1)$, Connor (1989) $(\mathcal{B} = (A))$ ve Maddox (1988) $(\mathcal{B} = (C_1))$ tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 5.2.19 da $\mathcal{B} = (A)$, $A \in \tau^+$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.20: $A \in \tau^+$ olsun. Eğer $\mathcal{F}$, (M_1) i gerçeklerse bu durumda

$$w^p(A, \mathcal{F}, X) - limx = l \Rightarrow st(A, X) - limx = l \tag{5.2.6}$$

dir (Kolk, 1998).

$A = (A_\theta)$ için Sonuç 3.4 Pehlivan ve Fisher'in sonucuna genelleşir (Teorem 5.2.13 de yeterlilik).

(5.2.6) dan $w_0^p(A, \mathcal{F}, X) \subset st_0(A, X)$ olduğu çıkar. Eğer $A = I$ birim matris ise bu içerme $c_0(\mathcal{F}, X) \subset c_0(X)$ içermesine indirgenir ve böylece (M_1) Lemma 5.2.11 den dolayı gerçeklenir. Böylece $I \in \tau^+$ ile τ^+ matris sınıfı için Teorem 5.2.8 i yeniden ispatlamış oluruz.

Sonuç 5.2.21: Her $A \in \tau^+$ için (5.2.6) gerektirmesinin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul (M_1) in gerçeklenmesidir (Kolk, 1998).

Sonuç 5.2.20 ve Sonuç 5.2.21 doğal bir soruyu ortaya çıkarır: Keyfi bir $A \in \tau^+$ için (5.2.6) nın gerçeklenmesi için (M_1) koşulu gerekli midir? Eğer A düzgün regüler ise bu durumda cevabın olumsuz olduğunu ispatlayalım.

Teorem 5.2.22: $A \in \mathcal{U}\tau^+$ olsun. Modülüs fonksiyonlarının $inf_k f_k(t) = 0$ $(t > 0)$ olan bir $\mathcal{F} = (f_k)$ dizisi (5.2.6) doğru olacak şekilde vardır (Kolk, 1998).

İspat: $A \in \mathcal{U}\tau^+$ olduğundan Lemma 5.2.4 ten $\delta_A(K) = 0$ olacak şekilde sonsuz bir $K = \{k_i\}$ indis kümesi vardır. $i \in K$ için $f_{k_i}(t) = i^{-1}t$ ve $k \in \mathbb{N} \backslash K$ için $f_k(t) = t$ şeklinde tanımlanırsa

$$\inf_k f_k(t) = \lim_i f_{k_i}(t) = \lim_i i^{-1} t = 0$$

olur. Eğer $w^p(A,\mathcal{F},X)-limx=l$ ise bu durumda $y=(x_k-l)\in w_0^p(A,\mathcal{F},X)$ dir. $\delta_A(K)=0$ olduğundan $st(A,X)-limy^{[K]}=0$ dır.

$$\inf_{k\in\mathbb{N}\setminus K} f_k(t)>0 \ \ (t>0)$$

olduğundan ve $y^{[K]}$ açık olarak $w_0^p(A,\mathcal{F},X)$ e ait olduğundan Teorem 5.2.17 ye göre $st(A,X)-limy^{[\mathbb{N}\setminus K]}=0$ dır. Böylece

$$y=y^{[K]}+y^{[\mathbb{N}\setminus K]}\in st_0(A,X)$$

olur. Bu ise $st(A,X)-limx=l$ olmasını gerektirir. ■

Uyarı: Pehlivan ve Fisher (1995, Teorem 5.2.13), $A=A_\theta$, $p=1$ durumunda (M_1) koşulunun (5.2.6) gerektirmesi için gerekli ve yeterli koşul olduğunu iddia etmektedir. $A_\theta\in\mathcal{U}\tau^+$ olduğundan Teorem 5.2.22 bu teoremin kısmen doğru olmadığını gösterir. Eğer $A=A_\theta$ ise (M_1) koşulu (5.2.6) için gerekli değildir.

(5.2.6) gerektirmesi için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki teoremde verilmektedir (Kolk, 1998).

Teorem 5.2.23: $A\in\mathcal{U}\tau^+$ olsun ve kabul edelimki $\mathcal{F}=(f_k)$ noktasal yakınsaktır. Bu durumda (5.2.6) gerektirmesinin doğru olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_k f_k(t)>0 \quad (t>0) \tag{5.2.7}$$

olmasıdır (Kolk, 1998).

İspat: $\varepsilon>0$ olsun. Eğer (5.2.7) gerçeklenirse bu durumda $f_k(\varepsilon)\geq s \ \ (k\geq r)$ olacak şekilde $s>0$ ve $r\in\mathbb{N}$ sayıları bulabiliriz. Teorem 5.2.17 nin ispatındaki gibi, $L_\varepsilon=\{k:\|x_k-l\|\geq\varepsilon\}$ olmak üzere

$$\sum_{k\in L_\varepsilon,k\geq r} a_{nk}\leq s^{-p}\sum_{k\geq r}a_{nk}\left[f_k(\|x_k-l\|)\right]^p \tag{5.2.8}$$

dir. Eğer $w^p(A,\mathcal{F},X)-limx=l$ ise bu durumda (T_1) den (5.2.8) eşitsizliği $n\to\infty$ için $\delta_A(L_\varepsilon)=0$ olmasını gerektirir. Yani $st(A,X)-limx=l$ dir.

Tersine, eğer (5.2.7) doğru değilse bu durumda en az bir $t_0>0$ için $lim_k f_k(t_0)=0$ dır. $A\in\mathcal{U}\tau^+$ olduğundan Lemma 5.2.4 den $\delta_A(K)=0$ olacak şekilde sonsuz bir $K=\{k_i\}$ indis kümesi vardır. $x=(x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \in K \text{ ise} \\ t_0 z, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $z \in X$, $\|z\| = 1$ dir. Bu durumda $lim_k \left[f_k\left(\|x_k\|\right)\right]^p = 0$ dır ve A nın regülerliğinden $w^p\left(A, \mathcal{F}, X\right) - limx = 0$ olur. Fakat $0 < \varepsilon \leq t_0$ için, (T_2) den ve $\delta_A\left(K\right) = 0$ olduğundan

$$\delta_A\left(\{k : \|x_k\| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_n \sum_k a_{nk} - \delta_A\left(K\right) = 1$$

bulunur. Böylece (5.2.6) nın aksine $st\left(A, X\right) - limx \neq 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir.■

$st\left(\mathcal{B}, X\right) \subset w^p\left(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X\right)$ **içermesi.**

İlk teorem bahsedilen içerme için yeterli koşulları vermektedir.

Teorem 5.2.24: $\mathcal{B} \in \mathcal{R}^+$ olsun. Eğer $\mathcal{F} = (f_k)$, (M_2) yi ve (M_3) ü gerçeklerse bu durumda

$$st\left(\mathcal{B}, X\right) - limx = l \Rightarrow w^p\left(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X\right) - limx = l \qquad (5.2.9)$$

dir (Kolk, 1998).

İspat: $st\left(\mathcal{B}, X\right) - limx = l$, $h\left(t\right) = sup_k f_k\left(t\right)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ seçelim. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma_n\left(i\right) = \sum_k b_{nk}(i)\left[f_k\left(\|x_k - l\|\right)\right]^p$$

toplamını $L_\varepsilon = \{k : \|x_k - l\| \geq \varepsilon\}$ ve $\{k : \|x_k - l\| < \varepsilon\}$ üzerinden sırasıyla $\sum_1$ ve $\sum_2$ şeklinde iki toplama ayıralım. Bu durumda (M_3) den

$$\sum_1 \leq M^p \sup_i \sum_{k \in L_\varepsilon} b_{nk}(i) \qquad (5.2.10)$$

ve f_k ların artan olmasından dolayı

$$\sum_2 \leq \left[h\left(\varepsilon\right)\right]^p \sup_i \sum_k b_{nk}(i)$$

dir. Böylece (R_2) kullanılarak

$$\lim_n \sigma_n\left(i\right) \leq M^p \delta_{\mathcal{B}}\left(L_\varepsilon\right) + \left[h\left(\varepsilon\right)\right]^p$$

elde edilir ki $\delta_{\mathcal{B}}\left(L_\varepsilon\right) = 0$ olduğundan ve (M_2) den i ye göre düzgün olarak $lim_n \sigma_n\left(i\right) = 0$ elde edilir. Yani $w^p\left(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X\right) - limx = l$ dir. ■

Eğer (5.2.9) yalnızca $X-$değerli sınırlı ve $\|x\| \leq N$ olan $x = (x_k)$ dizileri için incelenirse bu durumda

$$f_k(\|x_k - l\|) \leq f_k(N + \|l\|) \leq h(N + \|l\|)$$

olur. Sonuç olarak (5.2.10), M nin yerine $h(N + \|l\|)$ geldiğinde (M_3) kabulü olmadan da gerçeklenir. O halde aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 5.2.25: $\mathcal{B} \in \mathcal{R}^+$ ve $x = (x_k)$, X de sınırlı bir dizi olsun. Eğer (M_2) gerçeklenirse bu durumda (5.2.9) gerektirmesi doğrudur (Kolk, 1998).

f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < p_k \leq sup_k p_k = H < \infty$ olsun. Bu durumda $\mathcal{F}^{\ p}$ modülüs fonksiyonlar dizisinin (M_2) yi gerçeklemesi için gerek ve yeter koşul f nin sınırlı olmasıdır. Ayrıca (5.2.3) ü kullanarak Teorem 5.2.24 ve Teorem 5.2.25 den şu sonuca ulaşırız.

Sonuç 5.2.26: f bir modülüs fonksiyonu ve $p = (p_k)$, $sup_k p_k = H < \infty$ olacak şekilde bir dizi olsun.

(i) Eğer f modülüs fonksiyonu sınırlı ve $inf_k p_k > 0$ ise bu durumda

$$st(\mathcal{B}, X) - limx = l \Rightarrow w^p(\mathcal{B}, f, X) - limx = l$$

dir.

(ii) Eğer $x = (x_k)$, X de sınırlı bir dizi ise bu durumda

$$w^p(\mathcal{B}, f, X) - limx = l \Rightarrow st(\mathcal{B}, X) - limx = l$$

dir (Kolk, 1998).

Sonuç 5.2.26 nın bazı özel durumları, Bilgin (1994) ($\mathcal{B} = (C_1)$), Pehlivan (1994) ($\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, p_k = 1$) ve Connor (1989) ($\mathcal{B} = (A), p_k = 1$) tarafından ele alınmıştır.

$\ell_\infty(X)$, tüm $X-$değerli sınırlı dizilerin uzayını göstersin. Teorem 5.2.11, 5.2.24 ve 5.2.25 birleştirildiğinde aşağıdaki elde edilir.

Teorem 5.2.27: $p > 0$, $\mathcal{B} \in \mathcal{R}^+$ ve $\mathcal{F} = (f_k)$ bir modülüs fonksiyonlar dizisi olsun. Herhangi bir X Banach uzayı için

(i) Eğer $(M_1), (M_2)$ ve (M_3) gerçeklenirse $st(\mathcal{B}, X) = w^p(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X)$ dir.

(ii) Eğer (M_1) ve (M_2) gerçeklenirse $st(\mathcal{B}, X) \cap \ell_\infty(X) = w^p(\mathcal{B}, \mathcal{F}, X) \cap \ell_\infty(X)$ dir (Kolk, 1998).

$A = (a_{nk}) \in \mathcal{U}\tau^{+}$ olduğunu kabul edelim ve $\mathcal{F} = (f_k)$ modülüs fonksiyonlar dizisi (M_2) yi gerçeklesin. Teorem 5.2.24 den (M_3) koşulu

$$st\,(A,X) - limx = l \Rightarrow w^p\,(A,f,X) - limx = l \tag{5.2.11}$$

gerektirmesi için yeterlidir. (M_3) ün genel olarak (5.2.11) gerektirmesi için gerekli olmadığını görmek zor değildir. Gerçekten Teorem 5.2.24 ün küçük bir modifikasyonu, eğer (M_3) yerine sabit r için

$$\underset{t}{sup}\underset{k\geq r}{sup} f_k\,(t) < \infty$$

alındığında (5.2.11) in (ve ayrıca (5.2.9) un) gerçeklendiğini gösterir. Böylece, örneğin $f_1\,(t) = t$ ve $k \geq 2$ için $f_k\,(t) = t/\,(1+t)$ alınırsa (5.2.11) in gerçeklendiğini fakat (M_3) ün gerçeklenmediğini alırız.

Uyarı 5.2.28: Pehlivan ve Fisher (1995, Teorem 5.2.14), (M_3) ün $p = 1, A = A_\theta$ ve $\mathcal{F}$, (M_2) yi gerçeklediğinde (5.2.11) gerektirmesi için gerekli ve yeterli koşul olduğunu iddia etmektedir. Buradaki düşünceler (M_3) ün gerekli olamayabileceğini göstermektedir. Pehlivan ve Fisher'in ispatı doğru değildir. Eğer $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ise bu durumda $sup_t sup_k f_k\,(t) = \infty$ olmasından genel olarak $sup_t sup_r f_{k_r}\,(t) = \infty$ olması çıkmaz.

Aşağıda, (5.2.11) gerektirmesinin, düzgün regüler satır-sonlu A matrisleri için daha kesin bir karakterizasyonunu verelim.

Teorem 5.2.29: $A \in \mathcal{U}\tau^{+}$ satır-sonlu bir matris olsun ve kabul edelim ki $\mathcal{F} = (f_k)$ modülüs fonksiyonlar dizisi (M_2) yi gerçekler.

(a) Eğer $\mathcal{F}$ azalmayan ise bu durumda (5.2.11) doğrudur $\Leftrightarrow$ (M_3) gerçeklenir.

(b) Eğer $\mathcal{F}$ noktasal yakınsak ise bu durumda (M_3), (5.2.11) i gerektirir ve (5.2.11)

$$\underset{t}{sup}\underset{k}{lim} f_k\,(t) < \infty \tag{5.2.12}$$

olmasını gerektirir (Kolk, 1998).

İspat: Teorem 5.2.24 den (5.2.11) $\Rightarrow$ (M_3) gerektirmesi (a) ve (b) durumlarının her ikisi içinde doğrudur.

(5.2.11) in gerçeklendiğini kabul edelim. Satır-sonlu ve düzgün regüler bir A matrisi için açık olarak

$$lim_n a_{n,k_n} = 0$$

dır. Burada a_{n,k_n}, A nın $n.ci$ satırının sıfırdan farklı son elemanıdır (yeterince büyük n için). Ayrıca, (M_2) den en az bir $t_0 > 0$ için $sup_k f_k(t_0) < \infty$ olur ve böylece, Kolk (1993)Lemma 5.2.9 (b) den, her $t > 0$ için $sup_k f_k(t) < \infty$ dur. Buna göre, eğer $\mathcal{F} = (f_k)$ azalmayan ise o zaman $\mathcal{F}$ noktasal yakınsaktır ve (M_3), (5.2.12) ye indirgenir. Sonuç olarak, eğer $\mathcal{F}$ (M_3) ü gerçeklemeyen azalmayan bir dizi veya (5.2.12) yi gerçeklemeyen noktasal yakınsak bir dizi ise

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{k} f_k(t) = \infty$$

elde ederiz. Dolayısıyla Lemma 5.2.4 kullanılarak her iki durumdada $\{n(i)\}$, $K = \{k(i)\}$ $\left(k(i) = k_{n(i)}\right)$ ve $0 < t_1 < t_2 < ... < t_i < t_{i+1} < ...$ sayıları bulabiliriz öyleki $\delta_A(K) = 0$ ve

$$f_{k(i)}(t_i) \geq \left(1/a_{n(i),k(i)}\right)^{1/p} \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{5.2.13}$$

dir. Bu durumda $x = (x_k)$ dizisi, $z \in X$, $\|z\| = 1$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} t_i z, & k = k(i) \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

X de sıfıra $A-$istatistiksel yakınsaktır. Dolayısıyla (5.2.11) den

$$\lim_n \sum_k a_{nk} \left[f_k(\|x_k\|)\right]^p = 0 \tag{5.2.14}$$

dır. Fakat (5.2.13), (5.2.14) ün aksine

$$a_{n(i),k(i)} \left[f_{k(i)}(\|x_k\|)\right]^p \geq 1 \quad (i \in \mathbb{N})$$

olmasını gerektirir. O halde (5.2.13) gerçeklenmelidir.■

Teorem 5.2.23 ve Teorem 5.2.29 dan aşağıdaki sonuç çıkar.

Sonuç 5.2.30: Kabul edelim ki $A \in \mathcal{U}\tau^+$ satır-sonlu bir matris olsun ve kabul edelim ki $\mathcal{F} = (f_k)$ modülüs fonksiyonlar dizisi (M_2) yi gerçekler.

(a) Eğer $\mathcal{F}$ azalmayan ise bu durumda

$$st(A, X) = w^p(A, \mathcal{F}, X) \tag{5.2.15}$$

dir.

(b) Eğer $\mathcal{F}$ noktasal yakınsak ise bu durumda (5.2.7) ve (M_2), (5.2.15) i gerektirir ve (5.2.15), (5.2.7) yi ve (5.2.12) yi gerektirir (Kolk, 1998).

Sabit bir $\mathcal{F}=(f)$ dizisi için (5.2.7) ve (M_2) koşulları açık olarak gerçeklenir fakat (M_3) koşulu f nin sınırlılığına bağlıdır. Dolayısıyla Sonuç 5.2.30 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.31: $A \in \mathcal{U}\tau^+$ satır-sonlu bir matris ve f bir modülüs fonksiyonu olsun. Herhangi bir X Banach uzayı için

$$st\,(A,X) = w^p\,(A,f,X) \tag{5.2.16}$$

olması için gerekli ve yeterli koşul f nin sınırlı olmasıdır (Kolk, 1998).

Lacunary yakınsaklığın A_θ matrisi satır sonlu olduğundan ve $A_\theta \in \mathcal{U}\tau^+$ olduğundan Sonuç 5.2.30 ve Sonuç 5.2.31, Pehlivan ve Fisher'in (1995) sonucunun doğrulanmış versiyonunu verir.

Sonuç 5.2.32: θ bir lacunary dizi ve $\mathcal{F} = (f_k)$ modülüs fonksiyonlarının (M_2) yi gerçekleyen azalmayan bir dizisi olsun. Herhangi bir X Banach uzayı için ve $A = A_\theta$ için (5.2.15) eşitliğinin gerçeklenmesi için gerekli ve yeterli koşul (5.2.7) ve (M_3) ün gerçeklenmesidir. $f_k = f$ ve $A = A_\theta$ için (5.2.16) eşitsizliğinin doğru olması için gerekli ve yeterli koşul f modülüs fonksiyonunun sınırlı olmasıdır (Kolk, 1998).

Uyarı 5.2.33: Eğer X deki norm, X deki bir yarı-norm ile yer değiştirilirse tüm düşüncelerimizin yine geçerli olacağını not edebiliriz. Böylece, $\mathcal{B}-$istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $(\mathcal{B},p,\mathcal{F})$-toplanabilme aşağıdaki gibi tanımlanırsa, tüm önermelerimiz lokal konveks X uzayı için de doğru olacaktır. X bir lokal konveks Hausdorff topolojik uzayı olsun öyleki onun topolojisi sürekli yarı-normların bir G sistemi ile tanımlansın.

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in G$ için

$$\delta_{\mathcal{B}}\left(\{k : g\,(x_k - l) \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

ise bu durumda $x = (x_k) \in w\,(X)$ dizisi bir $l \in X$ elemanına $\mathcal{B}-$istatistiksel yakınsaktır.

Ayrıca eğer her $g \in G$ için

$$i \text{ ye göre düzgün olarak } \lim_n \sum_k b_{nk}\,(i)\,[f_k\,(g\,(x_k - l))]^p = 0$$

ise bu durumda $x = (x_k) \in w\,(X)$ dizisi bir $l \in X$ elemanına kuvvetli $(\mathcal{B},p,\mathcal{F})$-toplanabilirdir.

5.3 Genelleştirilmiş İstatistiksel Yakınsaklık

Kolk (1998) $A-$istatistiksel yakınsaklık kavramını, Steiglitz'e (1973) ait olan $\mathfrak{B}-$toplanabilme (veya $F_{\mathfrak{B}}-$yakınsaklık) kavramını kullanarak $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsaklığa genelleştirdi.

$\mathfrak{B}_i = (b_{nk}(i))$ olmak üzere $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_i)$ sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. Bu durumda, $x \in \ell_\infty$ dizisi için eğer

$$\lim_n (\mathfrak{B}_i x)_n = \lim_n \sum_k b_{nk}(i)\, x_k = \mathfrak{B}-\lim x, \ \ (i \geq 0 \text{ a göre düzgün olarak})$$

ise x dizisi $\mathfrak{B}-\lim x$ değerine $F_{\mathfrak{B}}-$yakınsaktır (veya $\mathfrak{B}-$toplanabilirdir) denir.

$\mathfrak{B}$ metodu regülerdir (Bell, 1973; Steiglitz, 1973) $\Leftrightarrow$

(i) $\|\mathfrak{B}\| < \infty$,

(ii) Her $k \geq 1$ için i ye göre düzgün olarak $\lim\limits_n b_{nk}(i) = 0$,

(iii) i ye göre düzgün olarak $\lim\limits_n \sum\limits_k b_{nk}(i) = 1$

Kolk (1998), aşağıdaki tanımı vermiştir:

$K = \{k_i\} \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere eğer her i için $k_i < k_{i+1}$ oluyorsa K ya bir indis kümesi denir. Eğer K indis kümesinin karakteristik dizisi d ye $\mathfrak{B}-$toplanabilirse, yani i ye göre düzgün olarak $\lim_n \sum_{k\in K} b_{nk}(i) = d$ ise bu durumda K indis kümesi d ye eşit olan $\delta_{\mathfrak{B}}(K)$, $\mathfrak{B}-$yoğunluğuna sahiptir denir (yani $\delta_{\mathfrak{B}}(K) = \lim_n \sum_{k\in K} b_{nk}(i) = d$ dir).

$\Re^+$ ile her n, k ve i için $b_{nk}(i) \geq 0$ olan tüm regüler $\mathfrak{B}$ metotlarının kümesini gösterelim.

$\mathfrak{B} \in \Re^+$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_{\mathfrak{B}}\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durumda $st_{\mathfrak{B}} - \lim x = L$ yazılır. $st(\mathfrak{B})$ ile tüm $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini göstereceğiz.

Özel olarak, eğer $\mathfrak{B} = (C_1)$ Cesàro matrisi ise bu durumda $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsaklık bilinen istatistiksel yakınsaklığa indirgenir. $\mathfrak{B} = (A)$ içinse $A-$istatistiksel yakınsaklığa indirgenir (Demirci, 2000). $\mathfrak{B} = (A_\theta)$ durumunda ise

$\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsaklık lacunary istatistiksel yakınsaklığa indirgenir (Fridy ve Orhan, 1993).

$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1$ için $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsaklık düzgün istatistiksel yakınsaklığa indirgenir (Pehlivan, 1994). Burada $\mathfrak{B}_1=\left(b^1_{nk}(i)\right)$,

$$b^1_{nk}(i)=\begin{cases}\frac{1}{n} & , \quad 1+i\le k\le n+i\\ 0 & , \quad \textit{diğer yerlerde}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathfrak{B}-$İstatistiksel Cluster ve Limit Noktaları

Bu kısıma istatistiksel yakınsaklık ve $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsaklık metodlarının birbirini gerektirmediğini gösteren bir örnekle başlayalım.

Örnek 5.3.1: Sonsuz matrislerin

$$b_{nk}(i)=\begin{cases}\frac{1}{i}+\frac{1}{in} & , \quad k=n^2 \text{ ise}\\ 1-\frac{n}{i(n+1)} & , \quad k=n^2+1 \text{ ise}\\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

ile tanımlı $\mathfrak{B}=(B_i)$ dizisini ele alalım.

Her n,k için $b_{nk}(i)\ge 0$ dır. Ayrıca

i) $\|\mathfrak{B}\|=\sup\limits_{n,i}\sum\limits_{k}|b_{nk}(i)|<\infty$

ii) Her $k\ge 1$ için i ye göre düzgün olarak $\lim\limits_{n} b_{nk}(i)=0$

iii) i ye göre düzgün olarak

$$\begin{aligned}\lim_n\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}(i) &= \lim_n\left[\sum_{k=n^2+1}b_{nk}(i)+\sum_{k=n^2}b_{nk}(i)\right]\\ &= \lim_n\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{in}+1-\frac{n}{i(n+1)}\right)=1+\frac{1}{i}-\frac{1}{i}=1\end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{B}\in\Re^+$ dır. Şimdi $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ dizilerini

$$x_k=\begin{cases}0 & , \quad k=n^2 \text{ ise}\\ \frac{1}{k} & , \quad k=n^2+1 \text{ ise}\\ k & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases} \quad , n\in\mathbb{N}$$

ve

$$y_k=\begin{cases}k & , \quad k=n^2 \text{ ise}\\ 0 & , \quad k=n^2+1 \text{ ise}\\ 1 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases} \quad , n\in\mathbb{N}$$

şeklinde tanımlayalım. $\delta\{k:|x_k|\geq\varepsilon\}\neq 0$ olduğundan x dizisi sıfıra istatistiksel yakınsak değildir. Fakat x dizisi sıfıra $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsaktır. Diğer taraftan $\delta\{k:|y_k-1|\geq\varepsilon\}=\delta\left\{k:k=n^2\right\}=0$ olduğundan $st-\lim y=1$ dir. Fakat $\delta_{\mathfrak{B}}\{k:|y_k-1|\geq\varepsilon\}=\lim\limits_{n}\sum\limits_{k=n^2}b_{nk}(i)=\lim\limits_{n}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{in}\right)=\frac{1}{i}\neq 0$ olduğundan $st_{\mathfrak{B}}-\lim y\neq 1$ dir.

Şimdi $\mathfrak{B}$ metodu için bazı benzer tanımları verelim.

Tanım 5.3.2: $\mathfrak{B}\in\Re^{+}$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için $\{k:|x_k-\gamma|<\varepsilon\}$ kümesinin $\mathfrak{B}-$yoğunluğu sıfırdan farklı ise bu durumda γ sayısına x dizisinin bir $\mathfrak{B}-$istatistiksel cluster noktası denir (Mursaleen ve Edely, 2004).

Tanım 5.3.3:. $\mathfrak{B}\in\Re^{+}$ olsun. Eğer x dizisinin λ ya yakınsayan indislerinin $\mathfrak{B}-$yoğunluğu sıfırdan farklı olan bir alt dizisi varsa bu durumda λ ya x dizisinin bir $\mathfrak{B}-$istatistiksel limit noktası denir (Mursaleen ve Edely, 2004).

$\Gamma_x(\mathfrak{B})$ ile x in $\mathfrak{B}-$istatistiksel cluster noktalarının kümesini, $\Lambda_x(\mathfrak{B})$ ile de x in $\mathfrak{B}-$istatistiksel limit noktalarının kümesini göstereceğiz.

Yukarıdaki örnekten, $\Gamma_x(\mathfrak{B})=\{0\}$ ve $\Lambda_x(\mathfrak{B})=\{0\}$, $\Gamma_y(\mathfrak{B})=\{0\}$ ve $\Lambda_y(\mathfrak{B})=\{0\}$ olduğunu görebiliriz.

Not edelimki Tanım 5.3.2 ve Tanım 5.3.3 de $\mathfrak{B}=(A)$ için A-istatistiksel cluster ve A-istatistiksel limit noktaları tanımlarını elde ederiz (Connor ve Kline,1996). $\mathfrak{B}=(C_1)$ için sırasıyla bu tanımlar bilinen istatistiksel cluster noktası ve istatistiksel limit noktası tanımlarına indirgenir (Fridy, 1993).

Bu kısım boyunca $\mathfrak{B}\in\Re^{+}$ olduğu göz önüne alınacaktır.

Tanım 5.3.4: Bir $x=(x_k)$ sayı dizisi için

$$G_x=\{g\in\mathbb{R}:\delta_{\mathfrak{B}}\{k:x_k>g\}\neq 0\}$$

ve

$$F_x=\{f\in\mathbb{R}:\delta_{\mathfrak{B}}\{k:x_k<f\}\neq 0\}$$

kümelerini tanımlayalım. Bu durumda x dizisinin $\mathfrak{B}-$istatistiksel üst limiti ve $\mathfrak{B}-$istatistiksel alt limiti aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$st_{\mathfrak{B}}-\limsup x=\begin{cases}\sup G_x & , \quad G_x\neq\varnothing \text{ ise}\\ -\infty & , \quad G_x=\varnothing \text{ ise}\end{cases}$$

ve

$$st_{\mathfrak{B}} - \liminf x = \begin{cases} \inf F_x & , \quad F_x \neq \varnothing \text{ ise} \\ +\infty & , \quad F_x = \varnothing \text{ ise} \end{cases}$$

dir (Mursaleen ve Edely, 2004).

Tanım 5.3.5: Bir x sayı dizisi için eğer

$$\delta_{\mathfrak{B}} \{k : |x_k| > d\} = 0$$

olacak şekilde bir d sayısı varsa, x dizisine $\mathfrak{B}-$istatistiksel sınırlıdır denir.

Örnek 5.3.6: Örnek 5.3.1 de tanımlanan $\mathfrak{B}$ matrisini alalım. $z = (z_k)$ dizisini

$$z_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = n^2 \text{ ise} \\ 1 & , \quad k = n^2 + 1 \text{ ise} \\ k & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases} , n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada z nin üstten sınırsız fakat $\delta_{\mathfrak{B}} \{k : |z_k| > 1\} = 0$ olduğundan $\mathfrak{B}-$istatistiksel sınırlı olduğunu görürüz. $G_z = (-\infty, 1)$ dir. Çünkü $g = 1$ için $\delta_{\mathfrak{B}} \{k : z_k > 1\} = \delta_{\mathfrak{B}} \left\{k : k \neq n^2 \text{ ve } k \neq n^2 + 1\right\} = 0$ dır. Fakat $g < 1$, $g \in \mathbb{R}$ için $\delta_{\mathfrak{B}} \{k : z_k > g\} = \delta_{\mathfrak{B}} \left\{k : \ k = n^2 + 1\right\} = 1 - \frac{1}{i} \neq 0$ dır.

Benzer şekilde $F_z = (0, \infty)$ olduğu gösterilebilir. Buna göre $st_{\mathfrak{B}} - \limsup z = 1$ ve $st_{\mathfrak{B}} - \liminf z = 0$ olur. Ayrıca $\Gamma_z (\mathfrak{B}) = \{0, 1\} = \Lambda_z (\mathfrak{B})$ dir ve z dizisi ne $\mathfrak{B}-$istatistiksel ne de istatistiksel yakınsaktır. Bu örnekte z dizisi $\mathfrak{B}-$istatistiksel sınırlıdır fakat $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsak değildir. Diğer taraftan, Örnek 5.3.1 deki y dizisi istatistiksel yakınsak fakat $\mathfrak{B}-$istatistiksel sınırlı değildir.

Ayrıca not edelimki, $st_{\mathfrak{B}} - \limsup z$, $\Gamma_z (\mathfrak{B})$ nin en büyük elemanına, $st_{\mathfrak{B}} - \liminf z$ ise $\Gamma_z (\mathfrak{B})$ nin en küçük elemanına eşittir. Bu gözlemlerimiz bize en küçük üst sınır kavramı yardımıyla kolaylıkla ispatlanabilen aşağıdaki sonucu verir.

Teorem 5.3.7: (a) Eğer $l_1 = st_{\mathfrak{B}} - \limsup x$ sonlu ise bu durumda her pozitif ε sayısı için

(i) $\delta_{\mathfrak{B}} \{k : x_k > l_2 - \varepsilon\} \neq 0$ ve $\delta_{\mathfrak{B}} \{k : x_k > l_1 + \varepsilon\} = 0$ dır. Tersine eğer her $\varepsilon > 0$ için (i) geçerliyse bu durumda $l_1 = st_{\mathfrak{B}} - \limsup x$ dir.

(b) Eğer $l_2 = st_{\mathfrak{B}} - \liminf x$ sonlu ise bu durumda her pozitif ε sayısı için

(ii) $\delta_{\mathfrak{B}} \{k : x_k < l_2 + \varepsilon\} \neq 0$ ve $\delta_{\mathfrak{B}} \{k : x_k < l_2 - \varepsilon\} = 0$ dır. Tersine eğer her $\varepsilon > 0$ için (ii) geçerliyse bu durumda $l_2 = st_{\mathfrak{B}} - \liminf x$ dir (Mursaleen ve Edely, 2004).

Tanım 5.3.2 ye göre, yukarıdaki teoremden şunu söleyebiliriz: $st_{\mathfrak{B}} - \limsup x$ ve $st_{\mathfrak{B}} - \liminf x$, x dizisinin sırasıyla en büyük ve en küçük $\mathfrak{B}-$istatistiksel cluster noktalarıdır.

Not edelim ki, $\mathfrak{B}-$istatistiksel sınırlılık $st_{\mathfrak{B}} - \limsup x$ in ve $st_{\mathfrak{B}} - \liminf x$ in sonlu olmasını gerektirir. Böylece Teorem 5.3.7 deki (i) ve (ii) şartları gerçeklenir. Aşağıda Fridiy ve Orhan'ın (1997) sonuçlarının $\mathfrak{B}-$benzerlerini vereceğiz.

Bu kısımda $\delta_{\mathfrak{B}}(K) \neq 0$ ile ya $\delta_{\mathfrak{B}}(K) > 0$ yada K kümesi $\mathfrak{B}-$yoğunluğa sahip değildir anlayacağız.

Teorem 5.3.8: Her x reel sayı dizisi için $st_{\mathfrak{B}} - \liminf x \leq st_{\mathfrak{B}} - \limsup x$ dir (Mursaleen ve Edely, 2004).

İspat. İlk olarak $st_{\mathfrak{B}} - \limsup x = -\infty$ olsun. Bu ise $G_x = \varnothing$ olmasını gerektirir. Böylece her $g \in \mathbb{R}$ için $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k > g\} = 0$ dır. Buradan ise $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k \leq g\} = 1$ yazılabilir. Buna göre her $f \in \mathbb{R}$ için $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k < f\} \neq 0$, yani $st_{\mathfrak{B}} - \liminf x = -\infty$ olur.

Şimdi ise $st_{\mathfrak{B}} - \limsup x = +\infty$ olsun. Bu durumda her $g \in \mathbb{R}$ için $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k > g\} \neq 0$ dır. Bu ise $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k \leq g\} = 0$ olması anlamına gelir. Böylece her $f \in \mathbb{R}$ için $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k < f\} = 0$, yani $F_x = \varnothing$ tur. Dolayısıyla $st_{\mathfrak{B}} - \liminf x = +\infty$ olur.

Son olarak kabul edelim ki $l_1 = st_{\mathfrak{B}} - \limsup x < \infty$ olsun ve $l_2 = st_{\mathfrak{B}} - \liminf x$ diyelim. Verilen $\varepsilon > 0$ için $l_1 + \varepsilon \in F_x$ olduğunu yani $l_2 \leq l_1 + \varepsilon$ olduğunu gösterelim. Teorem 5.3.7 (a) dan $l_1 = \sup G_x$ olduğundan $\delta_{\mathfrak{B}}\left\{k : x_k \leq l_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 1$ dir ve de $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k < l_1 + \varepsilon\} = 1$ olduğu çıkar. O halde $l_1 + \varepsilon \in F_x$ ve böylece $l_2 \leq l_1 + \varepsilon$ elde edilir. ε keyfi olduğundan $l_2 \leq l_1$ olduğunu göstermiş oluruz.

Uyarı. **(i)** Herhangi x sayı dizisi için

$$liminf x \leq st_{\mathfrak{B}} - \liminf x \leq st_{\mathfrak{B}} - \limsup x \leq limsup x$$

(ii) $st_{\mathfrak{B}} - \limsup x$ in , x in en büyük $\mathfrak{B}-$istatistiksel limit noktasına eşit oduğu söylenemez. Örneğin;

$$C^r_{nk} = \begin{cases} \frac{A^{r-1}_{n-k}}{A^r_n} & , \quad 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k > n \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Burada $A^r_n = \frac{(r+1)(r+2)...(r+n)}{n!}$ ve $A^r_0 = 1$ dir. Eğer x dizisi Örnek 2.1.9 da verilen $\left\{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, ...\right\}$ dizisi ise, bu durumda $\Gamma_x(\mathfrak{B}) = [0, 1]$ ve

$\Lambda_x(\mathfrak{B}) = \varnothing$ dir. Üstelik $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k > 1-\varepsilon\} \neq 0$ olduğundan $st_{\mathfrak{B}} - \limsup x = 1$ dir.

Teorem 5.3.9: $\mathfrak{B}-$istatistiksel sınırlı bir x dizisinin $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $st_{\mathfrak{B}} - \liminf x = st_{\mathfrak{B}} - \limsup x$ olmasıdır (Mursaleen ve Edely, 2004).

İspat. $l_1 = st_{\mathfrak{B}} - \limsup x$ ve $l_2 = st_{\mathfrak{B}} - \liminf x$ diyelim. İlk önce $st_{\mathfrak{B}} - limx = L$ ve $\varepsilon > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$ dır. Dolayısıyla $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k > L+\varepsilon\} = 0$ olur. Buradan $l_1 \leq L$ oduğu çıkar. Ayrıca $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k < L-\varepsilon\} = 0$ dır. Buradanda $L \leq l_2$ olduğu çıkar. Teorem 3.1 den $l_1 = l_2$ elde ederiz.

Tersine kabul edelim ki $l_1 = l_2 = L$ ve x, $\mathfrak{B}-$istatistiksel sınırlı olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için Teorem 5.3.7. den $\delta_{\mathfrak{B}}\left\{k : x_k > L + \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0$ ve de $\delta_{\mathfrak{B}}\left\{k : x_k < L - \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0$ elde ederiz. O halde $st_{\mathfrak{B}} - limx = L$ olur.

Teorem 5.3.10: Eğer x sayı dizisi üstten sınırlı ve $L = st_{\mathfrak{B}} - limsupx$ sayısına $\mathfrak{B}-$toplanabilir ise bu durumda x dizisi L ye $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsaktır (Mursaleen ve Edely, 2004).

İspat. Kabul edelimki x dizisi L ye $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsak olmasın. Bu durumda Teorem 5.3.9 dan $st_{\mathfrak{B}} - liminfx < L$ dir. Böylece $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k < M\} \neq 0$ olacak şekilde bir $M < L$ sayısı vardır. $K' = \{k : x_k < M\}$ diyelim. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\delta_{\mathfrak{B}}\{k : x_k > L+\varepsilon\} = 0$ dır

$K'' = \{k : M \leq x_k \leq L+\varepsilon\}$ ve $K''' = \{k : x_k > L+\varepsilon\}$ diyelim ve $G = sup_k x_k < \infty$ olsun. $\delta_{\mathfrak{B}}\{K'\} \neq 0$ olduğundan sonsuz çokluktaki n değeri için

$$limsup_n \sum_{k\in K'} b_{nk}(i) \geq d > 0$$

ve her n, i için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}(i)\, x_k| < \infty$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}(i)\,x_k &= \left(\sum_{k\in K'} + \sum_{k\in K''} + \sum_{k\in K'''}\right) b_{nk}(i)\,x_k \\
&\leq M\sum_{k\in K'} b_{nk}(i) + (L+\varepsilon)\sum_{k\in K''} b_{nk}(i) + G\sum_{k\in K'''} b_{nk}(i) \\
&= M\sum_{k\in K'} b_{nk}(i) + (L+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}(i) - (L+\varepsilon)\sum_{k\in K''} b_{nk}(i) + O(1) \\
&= -\sum_{k\in K'} b_{nk}(i)\left[-M+(L+\varepsilon)\right] + (L+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}(i) + O(1) \\
&\leq L\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}(i) - d(L-M) + \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}(i) - d\right) + O(1)
\end{aligned}$$

dir. ε keyfi olduğundan

$$liminf B_x \leq L - d(L-M) < L$$

elde edilir. O halde x, L ye $\mathfrak{B}-$toplanabilir değildir.■

Aşağıdaki sonuç Teorem 5.3.10 un benzer bir ifadesidir.

Teorem 5.3.11: Eğer x sayı dizisi alttan sınırlı ve $L = st_{\mathfrak{B}} - liminf x$ sayısına $\mathfrak{B}-$toplanabilir ise bu durumda x dizisi L ye $\mathfrak{B}-$istatistiksel yakınsaktır (Mursaleen ve Edely, 2004).

Not. Fridy ve Orhan'a (1997) benzer olarak, yukarıdaki Teorem 5.3.10 ve Teorem 5.3.11 den x in sınırlılık şartı kaldırılamaz veya $\mathfrak{B}-$istatistiksel sınırlılık şartı ile yer değiştirilemez. Bunun için uyarı (ii) deki $\mathfrak{B} = (C_{nk}^{r})$ matrisi ve Fridy ve Orhan(1997) Örnek 2 deki

$$x_k := \begin{cases} \sqrt{k} & ,\ k \text{ bir kare ise} \\ 0 & ,\ k \text{çift kare değil ise} \\ 1 & ,\ k \text{ tek kare değil ise} \end{cases}$$

dizisi ele alınabilir.

VI. BÖLÜM

FUZZY SAYI DİZİLERİNDE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

6.1 Fuzzy Sayı Dizilerinin İstatistiksel Limit Noktaları

Bu kısımda Fridy'nin (1993) reel sayı dizileri için verdiği istatistiksel limit ve cluster noktası tanımlarına karşılık gelen bir fuzzy sayı dizisinin istatistiksel limit ve cluster noktaları kavramları verilecektir. Daha sonra ise bilinen limit noktaları, istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel cluster noktaları kümeleri arasındaki ilişki incelenecektir.

D ile reel eksen üzerindeki tüm sınırlı $A = \left[\underline{A}, \overline{A}\right]$ kapalı aralıkların kümesini gösterelim. $A, B \in D$ için

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \text{ ve } \overline{A} \leq \overline{B}$$

$$d(A, B) := max\left(\left|\underline{A} - \underline{B}\right|, \left|\overline{A} - \overline{B}\right|\right)$$

tanımlayalım. d nin D üzerinde bir metrik ve (D, d) nin tam metrik uzay olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca "$\leq$" D üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Bir fuzzy sayısı, $\mathbb{R}$ den $[0,1]$ aralığına tanımlı aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir X fonksiyonudur.

- X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır.
- X fuzzy konvekstir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $X(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq min\{X(x), X(y)\}$ dir.
- X üstten yarı süreklidir.
- $\{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin X^0 ile gösterilen kapanışı kompakttır.

Bu özellikler her $\alpha \in (0,1]$ için $X^\alpha := \{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} = \left[\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha\right]$ $\alpha-$seviye kümesinin, $X^0 = lim_{\alpha \to 0^+} X^\alpha$ şeklinde tanımlanan X^0 supportunda olduğu gibi, $\mathbb{R}$ nin boş kümeden farklı kompakt ve konveks bir alt kümesi olduğunu gösterir.

Tüm fuzzy sayılarının kümesini $L(\mathbb{R})$ ile gösterelim.

$$\overline{d}(X, Y) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d(X^\alpha, Y^\alpha)$$

ile verilen $\overline{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dönüşümünü tanımlayalım.

Puri ve Ralescu (1983), $L(\mathbb{R})$ nin $\overline{d}$ metriği ile bir tam metrik uzay olduğunu gösterdi. $X, Y \in L(\mathbb{R})$ için

$$X \leq Y \Leftrightarrow \text{Herhangi bir } \alpha \in [0,1] \text{ için } X^{\alpha} \leq Y^{\alpha}$$

tanımlayalım. Eğer $X \leq Y$ ve $\underline{X}^{\alpha_0} < \underline{Y}^{\alpha_0}$ veya $\overline{X}^{\alpha_0} < \overline{Y}^{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0,1]$ varsa o zaman $X < Y$ dir deriz.

Tanım 6.1.1: Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı

$$\text{her } k > n_0 \text{ için } \overline{d}(X_k, X_0) < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa o zaman $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına yakınsaktır denir ve $lim_k X_k = X_0$ yazılır.

Tanım 6.1.2: $X = \{X_k\}$ bir fuzzy sayı dizisi ve γ bir fuzzy sayısı olsun. Eğer X in γ ya yakınsayan bir alt dizisi varsa bu durumda γ sayısına X dizisinin bir limit noktası denir. L_X ile X fuzzy dizisinin tüm limit noktalarının kümesini gösterelim.

Şimdi Nuray ve Savaş (1995) tarafından verilen bir fuzzy sayı dizisinin istatistiksel yakınsaklığı tanımını verelim.

Tanım 6.1.3: Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\right\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise bu durumda $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $st - limX_k = X_0$ gösterimini kullanacağız.

Açık olarak, eğer bir fuzzy sayı dizisi yakınsaksa bu durumda her $\varepsilon > 0$ için dizinin $\varepsilon-$komşuluğu dışında sonlu sayıda eleman kalır. Sonlu kümenin yoğunluğu sıfır olduğundan dizi istatistiksel yakınsak olmalıdır. Bu iddianın tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 6.1.4: Her $x \in \mathbb{R}$ için $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$X_k(x) := \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 0, & x \in (-\infty, k-1) \cup (k+1, \infty) \\ x-(k-1), & x \in [k-1, k] \\ -x+k+1, & x \in (k, k+1] \end{array}\right\} & \begin{array}{l}\text{Eğer } k = n^2, \\ n = 1,2,3,\ldots \text{ ise}\end{array} \\ \mu(x), & \text{diğer} \end{cases}$$

Burada

$$\mu(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \text{ ise} \\ x, & x \in [0,1] \text{ ise} \\ -x+2, & x \in (1,2] \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda her $0 < \varepsilon < 1$ için

$$K = \left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, \mu) \geq \varepsilon\right\} = \{4, 9, 16, 25, ...\}$$

olur. $\delta(K) = 0$ olduğundan $X = \{X_k\}$ dizisi μ ye istatistiksel yakınsaktır fakat μ ye yakınsak değildir.

Tanım 6.1.5: $\left(X_{k(j)}\right), X = \{X_k\}$ nın bir alt dizisi olsun ve $K := \{k(j) : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\left(X_{k(j)}\right)$ yi $\{X\}_K$ ile gösterelim. Eğer $\delta(\{K\}) = 0$ ise o zaman $\{X\}_K$ ya sıfır yoğunluklu bir alt dizi veya ince alt dizi denir (Aytar, 2003).

Tanım 6.1.6: $X = \{X_k\}$ bir fuzzy sayı dizisi ve v bir fuzzy sayısı olsun. Eğer X dizisinin v ye yakınsak ince olmayan bir alt dizisi varsa bu durumda v ye X fuzzy sayı dizisinin bir istatistiksel limit noktası denir (Aytar, 2003). Λ_X ile X in istatistiksel limit noktalarının kümesini gösterelim.

Tanım 6.1.7:$X = \{X_k\}$ bir fuzzy sayı dizisi ve μ bir fuzzy sayısı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, \mu) < \varepsilon\right\}\right) > 0$$

oluyorsa bu durumda μ sayısına X fuzzy sayı dizisinin bir istatistiksel cluster noktası denir (Aytar, 2003). Γ_X ile X in tüm istatistiksel cluster noktalarının kümesini gösterelim.

Teorem 6.1.8: Eğer $X = \{X_k\}$ ve $Y = \{Y_k\}$, $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq Y_k\}) = 0$ olacak şekilde birer fuzzy sayı dizisi ise bu durumda $\Lambda_X = \Lambda_Y$ ve $\Gamma_X = \Gamma_Y$ dir (Aytar, 2003).

İspat. $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq Y_k\}) = 0$ ve $v \in \Lambda_Y$ olsun. Y nin v ye yakınsak ince olmayan bir alt dizisi $\{Y\}_K$ olsun. $\delta(\{k \in \mathbb{N} : k \in K \text{ ve } X_k \neq Y_k\}) = 0$ olduğundan $\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : k \in K \text{ ve } X_k = Y_k\}) > 0$ dır. Buna göre , en son ki küme $\{X\}_K$ nın v ye yakınsak bir $\{X\}_{K'}$ ince olmayan alt dizisi olduğu sonucunu verir. Dolayısıyla $v \in \Lambda_X$ ve $\Lambda_Y \subseteq \Lambda_X$ dir. Simetriden $\Lambda_X \subseteq \Lambda_Y$ dir. Böylece $\Lambda_X = \Lambda_Y$ olur.

Şimdi $\mu \in \Gamma_X$ alalım ve $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq Y_k\}) = 0$ olsun. $\mu \in \Gamma_X$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\overline{\delta}\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, \mu) < \varepsilon\right\}\right) > 0$ dır. Hemen her k için $X_k = Y_k$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\overline{\delta}\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(Y_k, \mu\right) < \varepsilon\right\}\right) > 0$ dır. Böylece $\mu \in \Gamma_Y$ yani $\Gamma_X \subseteq \Gamma_Y$ elde edilir. Simetriden $\Gamma_Y \subseteq \Gamma_X$ dir. Böylece $\Gamma_X = \Gamma_Y$ olur.■

Teorem 6.1.9:. Herhangi bir $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi için $\Lambda_X \subseteq \Gamma_X$ dir (Aytar, 2003).

İspat. $v \in \Lambda_X$ olsun. Bu durumda X in v ye yakınsak ince olmayan bir $\left\{X_{k(j)}\right\}$ alt dizisi vardır, yani

$$\overline{\delta}\left(\left\{k\left(j\right) \in \mathbb{N} : j \in \mathbb{N}\right\}\right) = d > 0$$

dır. Her $\varepsilon > 0$ için $\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, v\right) < \varepsilon\right\} \supseteq \left\{k\left(j\right) \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_{k(j)}, v\right) < \varepsilon\right\}$ olduğundan

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, v\right) < \varepsilon\right\} \supseteq \left\{k\left(j\right) \in \mathbb{N} : j \in \mathbb{N}\right\} \setminus \left\{k\left(j\right) \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_{k(j)}, v\right) \geq \varepsilon\right\}$$

dır. $\left\{X_{k(j)}\right\}$, v ye yakınsak olduğundan $\varepsilon > 0$ için $\left\{k\left(j\right) \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_{k(j)}, v\right) \geq \varepsilon\right\}$ kümesi sonludur. Böylece

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, v\right) < \varepsilon\right\}\right) &\geq \overline{\delta}\left(\left\{k\left(j\right) \in \mathbb{N} : j \in \mathbb{N}\right\}\right) \\
&\quad -\overline{\delta}\left(\left\{k\left(j\right) \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_{k(j)}, v\right) \geq \varepsilon\right\}\right) \\
&= d > 0
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $\overline{\delta}\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, v\right) < \varepsilon\right\}\right) > 0$, yani $v \in \Gamma_X$ olur.

Teorem 6.1.10: Herhangi bir $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi için $\Gamma_X \subseteq L_X$ dir (Aytar, 2003).

İspat. $\mu \in \Gamma_X$ alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\overline{\delta}\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, \mu\right) < \varepsilon\right\}\right) > 0$$

dır. X in her $\varepsilon > 0$ için $K := \left\{k\left(j\right) \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_{k(j)}, \mu\right) < \varepsilon\right\}$ ve $\overline{\delta}\left(\{K\}\right) > 0$ olacak şekilde ince olmayan bir alt dizisini alalım. K kümesinde sonsuz çoklukta eleman bulunduğundan $\mu \in L_X$ olur. ■

Aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi yukarıdaki teoremin tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 6.1.11: Her $x \in \mathbb{R}$ için $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$X_k\left(x\right) := \begin{cases} \mu_1\left(x\right), & \text{eğer } k = n^2 \text{ ise, } n = 1, 2, ... \\ \mu_2\left(x\right), & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

Burada

$$\mu_1(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \text{ ise} \\ x, & x \in [0, 1] \text{ ise} \\ -x + 2, & x \in (1, 2] \text{ ise} \end{cases}$$

$$\mu_2(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty) \text{ ise} \\ x - 3, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ -x + 5, & x \in (4, 5] \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $L_X = \{\mu_1, \mu_2\}$ fakat $\Gamma_X = \{\mu_2\}$ dir.

Teorem 6.1.12: $X = \{X_k\}$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $X_0 := st - lim_k X_k$ ise bu durumda $\Lambda_X = \Gamma_X = \{X_0\}$ dır (Aytar, 2003).

İspat. İlk önce $\Lambda_X = \{X_0\}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\Lambda_X = \{X_0, Y_0\}$ ve $\overline{d}(X_0, Y_0) > 2\varepsilon$ olsun. Bu durumda $X = \{X_k\}$ dizisinin sırasıyla X_0 a ve Y_0 a yakınsak $\{X_{k(j)}\}$ ve $\{X_{l(i)}\}$ alt dizileri vardır. $\{X_{l(i)}\}$ Y_0 a yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\{l(i) \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_{l(i)}, Y_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonludur.

$$\{l(i) \in \mathbb{N} : i \in \mathbb{N}\} = \{l(i) \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\} \cup \{l(i) \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_{l(i)}, Y_0) \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{\delta}(\{l(i) \in \mathbb{N} : i \in \mathbb{N}\}) &= \overline{\delta}(\{l(i) \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\}) \\ &\quad + \overline{\delta}(\{l(i) \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_{l(i)}, Y_0) \geq \varepsilon\}) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\overline{\delta}(\{l(i) \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\}) > 0 \tag{6.1.1}$$

dir. $X_0 := st - lim_k X_k$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0 \tag{6.1.2}$$

olur. Böylece

$$\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, X_0) < \varepsilon\}) > 0$$

yazabiliriz. Her $0 < 2\varepsilon < \overline{d}(X_0, Y_0)$ için

$$\{l(i) \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\} \cap \{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, X_0) < \varepsilon\} = \varnothing$$

dir. Buna göre

$$\{l(i) \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$\overline{\delta}\left(\left\{l\left(i\right)\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{l(i)},Y_{0}\right)<\varepsilon\right\}\right)\leq\delta\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{k},X_{0}\right)\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

elde edilir. Bu, (6.1.1) ile çelişir. O halde $\Lambda_X=\{X_0\}$ olmalıdır.

Şimdi ise $\Gamma_X=\{X_0,Z_0\}$ olduğunu kabul edelim öyleki herhangi $\varepsilon>0$ için $\overline{d}\left(X_0,Z_0\right)>2\varepsilon$ olsun. Bu durumda

$$\overline{\delta}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{k},Z_{0}\right)<\varepsilon\right\}\right)>0 \tag{6.1.3}$$

dır. Her $0<2\varepsilon<\overline{d}\left(X_0,Z_0\right)$ için

$$\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{k},X_{0}\right)<\varepsilon\right\}\cap\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{k},Z_{0}\right)<\varepsilon\right\}=\varnothing$$

olduğundan

$$\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{k},X_{0}\right)\geq\varepsilon\right\}\supseteq\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{k},Z_{0}\right)<\varepsilon\right\}$$

olur. Böylece

$$\overline{\delta}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{k},X_{0}\right)\geq\varepsilon\right\}\right)\geq\overline{\delta}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{k},Z_{0}\right)<\varepsilon\right\}\right) \tag{6.1.4}$$

bulunur. (6.1.3) ten (6.1.4) ün sağ yanı sıfırdan büyüktür ve (6.1.2) den (6.1.4) ün sol yanı sıfıra eşittir. Bu bir çelişkidir. O halde $\Gamma_X=\{X_0\}$ olmalıdır. ■

Geriye kalan kısımda , klasik analizde reel sayı dizileri için verilen iki sonucun istatistiksel benzerini fuzzy sayı dizileri için vereceğiz.

Teorem 6.1.13:(Sıkıştırma) Her $k\in K\subseteq\mathbb{N}$, $\delta\left(K\right)=1$ için $X_k\leq Y_k\leq Z_k$ ve $\mu:=st-limX_k=st-limZ_k$ olsun. Bu durumda $st-limX_k=\mu$ dür (Aytar, 2003).

İspat.

$$A:=\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(X_{k},\mu\right)\geq\varepsilon\right\}$$

ve

$$B:=\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(Z_{k},\mu\right)\geq\varepsilon\right\}$$

olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$\left\{k\in\mathbb{N}:\overline{d}\left(Y_{k},\mu\right)\geq\varepsilon\right\}\subseteq A\cup B\cup K^{c} \tag{6.1.5}$$

olduğunu göstereceğiz. $k_0 \in \left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(Y_k, \mu\right) \geq \varepsilon\right\}$ keyfi bir sayı olsun. Bu durumda ya $k_0 \in K$, yada $k_0 \in K^c$ dir. Eğer $k_0 \in K^c$ ise bu durumda (6.1.5) gerçeklenir. Eğer $k_0 \in K$ ise o zaman $X_{k_0} \leq Y_{k_0} \leq Z_{k_0}$ dır.

$$\overline{d}\left(Y_{k_0}, \mu\right) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{\left|\underline{Y}_{k_0}^{\alpha} - \underline{\mu}^{\alpha}\right|, \left|\overline{Y}_{k_0}^{\alpha} - \overline{\mu}^{\alpha}\right|\right\} \geq \varepsilon$$

olduğundan, supremum tanımını kullanırsak, bir $\alpha_0 \in [0,1]$ vardır öyleki her $0 < \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}$ için

$$\max \left\{\left|\underline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} - \underline{\mu}^{\alpha_0}\right|, \left|\overline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} - \overline{\mu}^{\alpha_0}\right|\right\} \geq \varepsilon - \widetilde{\varepsilon}$$

olur. Buna göre

$$\left|\underline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} - \underline{\mu}^{\alpha_0}\right| \geq \varepsilon - \widetilde{\varepsilon} \tag{6.1.6}$$

veya

$$\left|\overline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} - \overline{\mu}^{\alpha_0}\right| \geq \varepsilon - \widetilde{\varepsilon} \tag{6.1.7}$$

dır. Genelliği bozmadan (6.1.6) nın geçerli olduğunu kabul edelim. Y_{k_0} ve μ nün karşılaştırılabilir olup olmamasına göre aşağıdaki iki durum mümkündür:

(i) $\underline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} < \underline{\mu}^{\alpha_0}$ ve " $\overline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} < \overline{\mu}^{\alpha_0}$ veya $\overline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} > \overline{\mu}^{\alpha_0}$ "

(ii) $\underline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} > \underline{\mu}^{\alpha_0}$ ve " $\overline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} < \overline{\mu}^{\alpha_0}$ veya $\overline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} > \overline{\mu}^{\alpha_0}$ "

(i) durumunda, $\underline{Y}_{k_0}^{\alpha_0} \geq \underline{X}_{k_0}^{\alpha_0}$ eşitsizliğinden ve (6.1.6) dan $\left|\underline{X}_{k_0}^{\alpha_0} - \underline{\mu}^{\alpha_0}\right| \geq \varepsilon - \widetilde{\varepsilon}$ elde ederiz. $\widetilde{\varepsilon}$ keyfi seçildiğinden $\overline{d}\left(X_{k_0}, \mu\right) \geq \varepsilon$ elde edilir. Yani $k_0 \in A$ dır ve böylece (6.1.5) geçerlidir.

(ii) durumunda benzer düşünceyle $k_0 \in A$ olduğu gösterilebilir. Bu ise (6.1.5) içermesini ispatlar.

$\overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B) = \overline{\delta}(K^c) = 0$ olduğu gerçeğini göz önüne alarak (6.1.5) içermesiyle birlikte

$$\overline{\delta}\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(Y_k, \mu\right) \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \overline{\delta}\left(\left\{A \cup B \cup K^c\right\}\right) = 0$$

sonucuna ulaşırız. O halde $Y = \{Y_k\}$ dizisi μ sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 6.1.14: Her $k \in K \subseteq \mathbb{N}$, $\delta(K) = 1$ için $X_k \leq Y_k$ olsun. Eğer $\mu_1 := st - limX_k$ ve $\mu_2 := st - limY_k$ mevcutsa bu durumda $\mu_1 \leq \mu_2$ dir (Aytar, 2003).

İspat. İlk olarak teoremin varsayımlarından dolayı μ_1 ve μ_2 nin karşılaştırılabilir olduğunu göstermemiz gerekir. $\mu_1 := st - limX_k$ ve $\mu_2 := st - limY_k$ olduğundan,

$K_1 := \left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, \mu_1\right) \geq \varepsilon\right\}$ ve $K_2 := \left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(Y_k, \mu_2\right) \geq \varepsilon\right\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(K_1\right) = \delta\left(K_2\right) = 0 \text{ ve } \delta\left(K_1^c\right) = \delta\left(K_2^c\right) = 1 \tag{6.1.8}$$

dir. Diğer taraftan $\delta\left(K_1 \cup K_2\right) = 0$ olmasından dolayı $\delta\left(K_1^c \cap K_2^c\right) = 1$ dir.

μ_1 ve μ_2 nin karşılaştırılamaz olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\alpha_0 \in [0,1]$ için

(i) $\underline{\mu}_1^{\alpha_0} < \underline{\mu}_2^{\alpha_0}$ ve $\overline{\mu_1}^{\alpha_0} > \overline{\mu_2}^{\alpha_0}$

(ii) $\underline{\mu}_1^{\alpha_0} > \underline{\mu}_2^{\alpha_0}$ ve $\overline{\mu_1}^{\alpha_0} < \overline{\mu_2}^{\alpha_0}$

Sadece (i) durumunu ele alalım. (ii) durumu benzer şekilde elde edilebilir. (i) nin gerçeklendiğini kabul edelim. $\varepsilon_1 := \underline{\mu}_2^{\alpha_0} - \underline{\mu}_1^{\alpha_0}$, $\varepsilon_2 := \overline{\mu_1}^{\alpha_0} - \overline{\mu_2}^{\alpha_0}$ olsun ve $\widetilde{\varepsilon} := min\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\right\}$ diyelim. $\widetilde{\varepsilon} > 0$ olduğu açıktır. (6.1.8) eşitlikleri her $\varepsilon > 0$ için geçerli olduğundan aynı zamanda herhangi $0 < \varepsilon < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{2}$ içinde gerçeklenir. Buna göre böyle bir ε için ve her $k \in K_1^c \cap K_2^c$ için

$$\underline{X}_k^{\alpha_0} < \underline{Y}_k^{\alpha_0} \text{ ve } \overline{Y}_k^{\alpha_0} > \overline{X}_k^{\alpha_0}$$

elde ederiz. $\delta\left(K_1^c \cap K_2^c\right) = 1$ eşitliğinden

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : X_k \ veY_k \text{ karşılaştırılamaz } \right\}\right) = 1$$

elde ederiz. Bu ise $\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : X_k \leq Y_k\right\}\right) = 1$ ile çelişir. Böylece μ_1 ve μ_2 karşılaştırılabilirdir.

Şimdi, μ_1 ve μ_2 karşılaştırılabilir olduğundan ya $\mu_1 \leq \mu_2$, yada $\mu_1 > \mu_2$ dir. Çelişki için $\mu_1 > \mu_2$ olduğunu kabul edelim. Her $0 < 2\varepsilon < \overline{d}\left(\mu_1, \mu_2\right)$ için

$$K \cap \left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, \mu_1\right) \geq \varepsilon\right\} \supseteq \left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(Y_k, \mu_2\right) \geq \varepsilon\right\} \cap K$$

olduğundan

$$\delta\left(K \cap \left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, \mu_1\right) \geq \varepsilon\right\}\right) \geq \delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(Y_k, \mu_2\right) \geq \varepsilon\right\} \cap K\right) \tag{6.1.9}$$

dır. $\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(Y_k, \mu_2\right) < \varepsilon\right\}\right) = 1$ ve $\delta\left(K\right) = 1$ olduğundan (6.1.9) un sağ tarafı 1 e eşittir. Bu yüzden sol tarafıda 1 e eşit olur. Bu ise $\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, \mu_1\right) \geq \varepsilon\right\}\right) = 1$ olması anlamına gelip bir çelişkidir. Sonuç olarak $\mu_1 \leq \mu_2$ dir.■

6.2 Fuzzy Sayı Dizileri İçin İstatistiksel Alt ve Üst Limit

Sınırlı ve yakınsak fuzzy sayı dizileri ilk kez Matloka (1986) tarafından verildi ve her sınırlı dizinin yakınsak olduğu gösterildi. Nanda (1989), sınırlı ve yakınsak fuzzy sayı dizilerinin uzaylarını çalıştı ve bunların tam metrik uzay olduklarını ispatladı. Diğer taraftan Nuray ve Savaş, istatistiksel yakınsak ve istatistiksel Cauchy fuzzy sayı dizilerini tanıtıp ele aldı. Daha sonra Nuray (1998), Savaş (2001) ve Kwon (2000;2001) istatistiksel yakınsaklık teorisindeki bazı sonuçların fuzzy benzerlerini verdi. Son olarak Aytar (2004), fuzzy sayı dizileri için istatistiksel limit ve cluster noktaları kavramlarını çalıştı.

Şimdiye kadar, "sup" ve "inf" kavramları sadece sınırlı fuzzy sayı dizileri için verildi (Fang ve Huang, 2004; Wu ve Wu, 1997). Bu kısımda istatistiksel sınırlı fuzzy sayı dizileri için istatistiksel alt limit ve üst limit kavramları verilecektir. Daha sonra ise, reel sayı dizileri için Fridy ve Orhan (1997) tarafından belirtilen bazı sonuçların aynı zamanda fuzzy sayı dizileri içinde geçerli olduğu ispatlanacaktır. Fakat aşağıdaki Örnek 6.2.3 den de görüleceği gibi, reel sayı dizileri için öneme sahip olan

$$st-liminf_{k\to\infty}x_k = st-limsup_{k\to\infty}x_k = x_0 \text{ ise } st-lim_{k\to\infty}x_k = x_0$$

dır önermesi fuzzy sayı dizileri için geçerli olmayabilir. Bu kısımda, bu önermenin herhangi istatistiksel sınırlı fuzzy sayı dizisi için doğru bir ifadesi verilecektir.

Eğer X, Y fuzzy sayı dizileri için ne $X \leq Y$ ne de $Y \leq X$ ise o zaman X ve Y fuzzy sayı dizileri karşılaştırılamazdır denir. Bu durumda $X \nsim Y$ gösterimi kullanılır.

$L(\mathbb{R})$ nin bir E alt kümesi verildiğinde eğer her $X \in E$ için $X \leq \mu$ olacak şekilde bir μ fuzzy sayı dizisi varsa o halde E ye üstten sınırlıdır, μ ye ise E nin bir üst sınırı denir. Eğer μ bir üst sınır ve tüm μ' üst sınırları için $\mu \leq \mu'$ ise bu durumda μ ye E nin en küçük üst sınırı(supremum) denir. Bir alt sınır ve en büyük alt sınır (infimum) kavramları benzer şekilde tanımlanır. Eğer E, hem alttan hem üstten sınırlı ise E ye sınırlıdır denir. Wu ve Wu (1997), $E \in L(\mathbb{R})$ sınırlı olduğunda supremumun ve infimumun mevcut olduğunu ispatladı.

Her $X, Y, Z \in L(\mathbb{R})$ için ve her $\alpha \in [0,1]$ için $\underline{Z}^{\alpha} := \underline{X}^{\alpha} + \underline{Y}^{\alpha}$ ve $\overline{Z}^{\alpha} := \overline{X}^{\alpha} + \overline{Y}^{\alpha}$ ise o zaman Z, X ve Y nin toplamıdır denir ve $Z = X + Y$ şeklinde yazılır.

Bir $\mu \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayısını ele alalım. $\mu^\alpha := \left[\underline{\mu}^\alpha, \overline{\mu}^\alpha\right]$, $\alpha \in [0,1]$ μ nün $\alpha-$seviye kümeleri olsun. Verilen pozitif bir a sayısı için $\mu + a_1$ ve $\mu - a_1$ fuzzy sayılarını aşağıdaki gibi tanımlayalım (Kaufman ve Gupta, 1984):

$$(\mu + a_1)^\alpha := \left[\underline{\mu}^\alpha, \overline{\mu}^\alpha\right] + [a, a] = \left[\underline{\mu}^\alpha + a, \overline{\mu}^\alpha + a\right]$$

$$(\mu - a_1)^\alpha := \left[\underline{\mu}^\alpha, \overline{\mu}^\alpha\right] - [a, a] = \left[\underline{\mu}^\alpha - a, \overline{\mu}^\alpha - a\right]$$

Burada $a_1(x) := \begin{cases} 1, & \text{eğer } x = a \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$

Açık olarak $(\mu + a_1), (\mu - a_1) \in L(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca $\mu - a_1 < \mu < \mu + a_1$ ve $\overline{d}(\mu, \mu + a_1) = \overline{d}(\mu, \mu - a_1) = a$ dır.

Eğer fuzzy sayılarının $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlı ise o zaman $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisine sınırlıdır denir.

$X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi için eğer

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu\}\right) = 0$$

olacak şekilde bir μ fuzzy sayısı varsa X dizisine üstten sınırlıdır denir. Benzer şekilde

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k < \nu\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu\}\right) = 0$$

olacak şekilde bir ν sayısı varsa X dizisine alttan sınırlıdır denir. μ ve ν sayılarına ise sırasıyla istatistiksel üst sınır ve istatistiksel alt sınır denir.

Eğer $X = \{X_k\}$ dizisi hem alttan hemde üstten istatistiksel sınırlı ise bu durumda X dizisine istatistiksel sınırlıdır denir (Aytar ve diğ., 2003).

Fuzzy sayı dizileri için istatistiksel alt limit ve üst limit.

Bu kısımda istatistiksel sınırlı fuzzy sayı dizileri için istatistiksel alt limit ve üst limit kavramları verilecektir. Verilen bir $X = \{X_k\}$ dizisi için

$$A_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\{k \in \mathbb{N} : X_k < \mu\} \neq 0\}$$

$$\overline{A}_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu\} = 1\}$$

$$B_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu\} \neq 0\}$$

$$\overline{B}_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\{k \in \mathbb{N} : X_k < \mu\} = 1\}$$

kümelerini tanımlayalım. $\overline{A}_X$ ve $\overline{B}_X$ sırasıyla istatistiksel alt sınırların ve istatistiksel üst sınırların kümeleridir. Eğer $X = \{X_k\}$ dizisi istatistiksel sınırlı ise bu durumda bu kümelerin boş kümeden farklı oldukları açıktır. Ayrıca A_X ve $\overline{B}_X$ kümelerinin bir alt sınıra, $\overline{A}_X$ ve B_X kümelerinin bir üst sınıra sahip oldukları açıktır. Buna göre supremumun ve infimumun varlık teoreminden (Fang ve Huang, 2004, Teorem 3.1) $infA_X, sup\overline{A}_X, supB_X$ ve $inf\overline{B}_X$ mevcut olduğu sonucuna ulaşırız.

Teorem 6.2.1: Eğer $X = \{X_k\}$ dizisi istatistiksel sınırlı ise bu durumda $infA_X = sup\overline{A}_X$ ve $supB_X = inf\overline{B}_X$ dir (Aytar ve diğ., 2006).

İspat. İlk eşitliği ispatlayalım. $v := infA_X$ ve $\mu := sup\overline{A}_X$ olsun. A_X in ve $\overline{A}_X$ nin tanımından her $\widetilde{v} \in A_X$ için $v \leq \widetilde{v}$ ve her $\widetilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için $\mu \geq \widetilde{\mu}$ dır.

Her $\widetilde{v} \in A_X$ ve $\widetilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k < \widetilde{v}\}) \neq 0 \text{ ve } \delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k > \widetilde{\mu}\}) = 1$$

dir. Buradan $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k < \widetilde{v}\} \cap \{k \in \mathbb{N} : X_k > \widetilde{\mu}\}) \neq 0$ dır. Diğer bir ifadeyle $\widetilde{\mu} < X_k < \widetilde{v}$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$$\text{her } \widetilde{v} \in A_X, \widetilde{\mu} \in \overline{A}_X \text{ için } \widetilde{\mu} < \widetilde{v} \tag{6.2.1}$$

dır. (6.2.1) den $\widetilde{\mu}$ nın A_X kümesinin bir alt sınırı olduğu çıkar. Bu durumda infimum tanımından

$$\widetilde{\mu} \leq v = infA_X$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik her $\widetilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için geçerlidir. Bu durumda supremum tanımından

$$\mu \leq v \tag{6.2.2}$$

dir. Şimdi $\mu < v$ durumunun olamayacağını gösterelim.

Tersine, $\mu < v$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$\underline{\mu}^{\alpha} < \underline{v}^{\alpha} \text{ veya } \overline{\mu}^{\alpha} < \overline{v}^{\alpha}$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0,1]$ vardır. Belirlilik için

$$\underline{\mu}^{\alpha} < \underline{v}^{\alpha} \tag{6.2.3}$$

durumunu ele alacağız ve bu durumda bunun bir çelişki olacağını göstereceğiz.

$b := v(\mu^\alpha)$ olsun. $b < \alpha$ olduğu açıktır (b sıfır olabilir). Ayrıca her $\lambda \in (b, \alpha]$ için $\underline{\mu}^\alpha < \underline{v}^\alpha$ eşitsizliği geçerlidir. $\mu(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları üstten yarı sürekli olduğundan bir (z, β) noktası $z \in \left(\underline{\mu}^\alpha, \underline{v}^\alpha\right)$, $\beta \in (b, \alpha)$ ve

$$\text{her } \lambda \in [\beta, \alpha] \text{ için } \underline{\mu}^\alpha < z, \; \underline{v}^\alpha \underline{v}^\alpha > z \tag{6.2.4}$$

olacak şekilde vardır. γ_1 ve γ_2 fuzzy sayılarını

$$\gamma_1 := \begin{cases} 0, & x < \underline{x}^o \\ \beta, & x \in [\underline{x}^o, z) \text{ ise} \\ 1, & x = z \text{ ise} \\ 0, & x > z \text{ ise} \end{cases}$$

$$\gamma_2 := \begin{cases} 0, & x < z \text{ ise} \\ \beta, & x \in \left[z, \overline{x}^0\right) \text{ ise} \\ 1, & x = \overline{x}^0 \text{ ise} \\ 0, & x > \overline{x}^0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\underline{x}^o := st - liminf \underline{X}_k^0 - 1$ ve $\overline{x}^0 := st - limsup \overline{X}_k^0 + 1$ sayıları sonludur.

$$\mu \nsim \gamma_1, \qquad v \nsim \gamma_2 \tag{6.2.5}$$

olduğunu göstermek zor değildir. Bu

$$\underline{\mu}^\beta \geq st - liminf \underline{X}_k^\beta \geq st - liminf \underline{X}_k^0 > \underline{x}^o = \underline{\gamma}_1^\beta, \quad \underline{\mu}^\alpha < z = \underline{\gamma}_1^\alpha$$

ve

$$\underline{v}^b \leq \underline{\mu}^\alpha < z = \underline{\gamma}_2^b, \qquad \underline{v}^\beta > z = \underline{\gamma}_2^\beta$$

olmasından çıkar ((6.2.4)). Şimdi ise

$$C_1 := \left\{k \in \mathbb{N} : \lambda \in (\beta, \alpha] \text{ için } \underline{X}_k^\lambda \leq z\right\}$$

$$C_2 := \left\{k \in \mathbb{N} : \lambda \in (\beta, \alpha] \text{ için } \underline{X}_k^\lambda \geq z\right\}$$

kümelerini ele alalım. $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$ olması açıktır. Bu yüzden

$$\delta(C_1) + \delta(C_2) \geq 1 \tag{6.2.6}$$

dir. İlk olarak $\delta(C_1) > 0$ olduğunu kabul edelim. γ_2 fuzzy sayısının ve $\overline{x}^0$ reel sayısının yapısını göz önünde bulundurarak

$$\text{her } k \in C_1 \backslash K_1 \text{ için } X_k < \gamma_2$$

elde edebiliriz. Burada $K_1 := \left\{k \in \mathbb{N} : \lambda \in [0,1] \text{ için } \underline{X}_k^\lambda \geq \overline{x}^0\right\}$ kümesidir. $\delta(K_1) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\delta(C_1/K_1) = \delta(C_1)$ olur. Böylece

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k < \gamma_2\}) \geq \delta(C_1) > 0$$

bulunur. Bu ise $\gamma_2 \in A_X$ demektir. Buna göre $infA_X$ tanımından $\gamma_2 \geq v = infA_X$ elde ederiz. Bu da (6.2.5) ile çelişir (Yani $v \nsim \gamma_2$ dir).

Böylece $\delta(C_1) = 0$ olduğunu göstermiş olduk. (6.2.6) dan $\delta(C_2) = 1$ olur. γ_1 fuzzy sayısının ve $\underline{x}^0$ reel sayısının yapısını göz önünde bulundurarak

$$\text{her } k \in C_2 \backslash (C_1 \cup K_2) \text{ için } X_k > \gamma_1$$

elde ederiz. Burada $K_2 := \left\{k \in \mathbb{N} : \lambda \in [0,\beta] \text{ için } \underline{X}_k^\lambda < \underline{x}^0\right\}$ kümesidir. $\delta(K_2) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\delta(C_2 \backslash (C_1 \cup K_2)) = 1$ sonucuna ulaşırız. Bu ise

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k > \gamma_1\}) \geq \delta(C_2 \backslash (C_1 \cup K_2)) = 1,$$

yani $\gamma_1 \in \overline{A}_X$ olması demektir. Böylece $\gamma_1 \leq \mu = sup\overline{A}_X$ olur. Bu ise (6.2.5) ile çelişir (Yani $\mu \nsim \gamma_1$ dir).■

Tanım 6.2.2: Eğer $X = \{X_k\}$ istatistiksel sınırlı bir fuzzy sayı dizisi ise bu durumda $X = \{X_k\}$ nın istatistiksel alt limiti

$$st - liminfX = infA_X$$

ile verilir. Ayrıca $X = \{X_k\}$ nın istatistiksel üst limiti

$$st - limsupX = supB_X$$

ile verilir (Aytar ve diğ., 2006).

Teorem 6.2.1 den $st - liminfX = sup\overline{A}_X$ ve $st - limsupX = inf\overline{B}_X$ dir.

Örnek 6.2.3: Her $x \in \mathbb{R}$ için $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$X_k(x) := \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 0, & x \in (-\infty, k-1) \cup (k+1, \infty) \\ x - (k-1), & x \in [k-1, k] \\ -x + k + 1, & x \in (k, k+1] \end{array}\right\} & k = n^2, \; n = 1, 2, 3, ... \text{ ise} \\ \mu_1(x), & k \text{ tek ve kare değilse} \\ \mu_2(x), & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$\mu_1(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \\ x, & x \in [0, 1] \\ -x + 2, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$\mu_2(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty) \\ x - 3, & x \in [3, 4] \\ -x + 5, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$Y = \{Y_k\}$ fuzzy sayı dizisi ise

$$Y_k(x) := \begin{cases} \mu_1(x), & k \text{ tek ve kare değil ise} \\ \mu_2(x), & k \text{ tek ve kare ise} \\ 0_1(x), & k \text{ tek, kare değil ise} \\ X_k(x), & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Not edelim ki $Y = \{Y_k\}$ üstten sınırsız olmasına rağmen, karelerin kümesi sıfır yoğunluğa sahip olduğundan istatistiksel sınırlıdır. Böylece $st - limsupY = supB_Y = \mu_1$ dir. Benzer şekilde $st - liminfY = infA_Y = 0_1$ dir.

Teorem 6.2.4: $X = \{X_k\}$ istatistiksel sınırlı bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $v := st - liminfX$ ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k < v - \varepsilon_1\}\right) = 0 \tag{6.2.7}$$

ve

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k < v + \varepsilon_1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim v + \varepsilon_1\}\right) \neq 0 \tag{6.2.8}$$

dır (Aytar ve diğ., 2006).

İspat. Tersine, $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k < v - \varepsilon_1\}) \neq 0$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ın varlığını kabul edelim. Buna göre $v - \varepsilon_1 \in A_X$ dir. Buradan $v \leq v - \varepsilon_1$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Şimdi ise (6.2.8) i gösterelim. Kabul edelim ki (6.2.8) eşitliği doğru olmasın. Bu durumda

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k < v + \varepsilon_1\}) = 0 \quad \text{ve} \quad \delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim v + \varepsilon_1\}) = 0 \tag{6.2.9}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için sadece şu üç durum mümkündür: $X_k < v + \varepsilon_1$, $X_k \nsim v + \varepsilon_1$ ve $X_k \geq v + \varepsilon_1$. Bu durumda

$$\{k \in \mathbb{N} : X_k < v + \varepsilon_1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim v + \varepsilon_1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \geq v + \varepsilon_1\} = \mathbb{N}$$

olur. Böylece (6.2.9) dan

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \geq v + \varepsilon_1\}) = 1$$

elde ederiz. Bu ise $v + \varepsilon_1 \in \overline{A}_X$ olması demektir. Dolayısıyla $v + \varepsilon_1 \leq sup\overline{A}_X = inf A_X = v$ yazabiliriz. Bu bir çelişkidir.■

Uyarı 1. Not edelim ki Teorem 6.2.4 ün tersi reel sayı dizileri için geçerlidir fakat fuzzy sayı dizileri için aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi doğru olmayabilir.

$X = \{X_k\}$ dizisini

$$X_k(x) := \begin{cases} \mu_1(x), & k \text{ bir tek sayı} \\ \mu_2(x), & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$\mu_1(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (6, \infty) \\ \frac{x-1}{4}, & x \in [1, 5] \\ 6 - x, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ve

$$\mu_2(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty) \\ x - 2, & x \in [2, 3] \\ 4 - x, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

Her $\varepsilon > 0$ için (7) ve (8) koşulları μ_1 sayısı için gerçeklenmesine rağmen $\mu_1 \neq st - liminf X$ dir. Burada

$$st - liminf X = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty) \\ \frac{x-1}{4}, & x \in \left[1, \frac{7}{3}\right] \\ x - 2, & x \in \left(\frac{7}{3}, 3\right] \\ 4 - x, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

Teorem 6.2.4 ün benzer bir ifadesi $st - limsup X$ için aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 6.2.5: $X = \{X_k\}$ istatistiksel sınırlı bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\mu := st - limsup X$ ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} &\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu + \varepsilon_1\}\right) = 0 \quad \text{ve} \\ &\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu - \varepsilon_1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\}\right) = 0 \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

dır (Aytar ve diğ., 2006).

İspatı Teorem 6.2.4 deki gibi yapılabilir. Ayrıca Uyarı 1 ile benzer olarak Teorem 6.2.5 in tersi genel olarak doğru değildir.

Teorem 6.2.6: Herhangi bir istatistiksel sınırlı $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi için

$$st - liminf X \leq st - limsup X$$

dir.

İspat. $st - liminf X = sup\overline{A}_X$ ve $st - limsup X = sup B_X$ dir. $\overline{A}_X$ ve B_X kümelerinin tanımından $\overline{A}_X \subset B_X$ dir. Böylece $sup\overline{A}_X \leq sup B_X$ olur, bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 6.2.7: Kabul edelim ki $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi X_0 a istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda

$$st - liminf X = st - limsup X = X_0$$

dır (Aytar ve diğ., 2006).

İspat. Herhangi $\varepsilon > 0$ alalım. $X = \{X_k\}$ dizisinin X_0 a istatistiksel yakınsak olmasından dolayı

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, X_0\right) \geq \varepsilon\right\}\right) = 0,$$

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}\left(X_k, X_0\right) < \varepsilon\right\}\right) = 1,$$

$$\delta\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\underset{\alpha\in[0,1]}{sup}\,d\left(X_k^\alpha,X_0^\alpha\right)<\varepsilon\right\}\right)=1$$

dir. Diğer bir ifadeyle hemen her k için

$$\underset{\alpha\in[0,1]}{sup}\,d\left(X_k^\alpha,X_0^\alpha\right)<\varepsilon$$

veya

$$\underset{\alpha\in[0,1]}{sup}\left|\underline{X}_k^\alpha-\underline{X}_0^\alpha\right|<\varepsilon \text{ ve } \underset{\alpha\in[0,1]}{sup}\left|\overline{X}_k^\alpha-\overline{X}_0^\alpha\right|<\varepsilon$$

dur. Bu durumda hemen her k için

$$X_0-\varepsilon_1<X_k<X_0+\varepsilon_1$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

(1) $\delta\left(\{k\in\mathbb{N}:X_k<X_0+\varepsilon_1\}\right)=1$ dir. Bu, $X_0+\varepsilon_1\in\overline{B}_X$ olması demektir. Bu durumda

$$st-limsupX=inf\overline{B}_X:=\mu\leq X_0+\varepsilon_1$$

olur.

(2) $\delta\left(\{k\in\mathbb{N}:X_k>X_0-\varepsilon_1\}\right)=1$ dir. Bu, $X_0-\varepsilon_1\in\overline{A}_X$ olması demektir. Bu durumda

$$st-liminfX=sup\overline{A}_X:=v\geq X_0-\varepsilon_1$$

olur.

Bu eşitsizliklerden ve Teorem 6.2.6 dan,

$$X_0-\varepsilon_1\leq v\leq\mu\leq X_0+\varepsilon_1$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\varepsilon>0$ keyfi sayı olduğundan, $v=\mu=X_0$ olduğunu alırız. ■

Aşağıdaki örnek , Teorem 6.2.7 nin tersinin genel olarak geçerli olmadığını gösterir.

Örnek 6.2.8: $X=\{X_k\}$ fuzzy sayı dizisini ve μ fuzzy sayısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k(x):=\begin{cases} x+1, & -1\leq x\leq 0 \text{ ise}\\ -x+1, & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\left(\frac{5k-2}{5k-1}\right) \text{ ise}\\ -\frac{1}{5k}(x-1)+\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\left(\frac{5k-2}{5k-1}\right)\leq x\leq\frac{1}{2}\left(\frac{15k-2}{5k-1}\right) \text{ ise}\\ -x+2, & \frac{1}{2}\left(\frac{15k-2}{5k-1}\right)\leq x\leq 2 \text{ ise}\\ 0, & \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

$$\mu(x) := \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \text{ ise} \\ -x+1, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \text{ ise} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \text{ ise} \\ -x+2, & \frac{3}{2} \le x \le 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

Buna göre, $st - limsupX_k = st - liminf X_k = \mu$ olur. Diğer taraftan, her $k \in \mathbb{N}$ için $\left|\overline{X}_k^{1/2} - \overline{\mu}^{1/2}\right| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $\overline{d}(X_k, \mu) \ge \frac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, \mu) \ge \frac{1}{2}\right\}\right) = \frac{1}{2}$$

olur. Sonuç olarak $st - limX_k$ mevcut değildir.

Bir fuzzy sayı dizisinin istatistiksel yakınsaklığı için yeterli koşulu vermeden önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 6.2.9: Verilen X ve μ fuzzy sayı dizileri için aşağıdakiler denktir.

(i) $\overline{d}(X, \mu) \le \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$

(ii) $\mu - \varepsilon_{\ 1} \le X \le \mu + \varepsilon_{\ 1}$ (Aytar ve diğ., 2006).

İspat. $\overline{d}(X, \mu) = \sup_{\alpha \in [0,1]} max \left\{\left|\underline{X}^\alpha - \underline{\mu}^\alpha\right|, \left|\overline{X}^\alpha - \overline{\mu}^\alpha\right|\right\}$ olduğundan (i) eşitsizliği

$$\text{her } \alpha \in [0, 1] \text{ için } \left|\underline{X}^\alpha - \underline{\mu}^\alpha\right| \le \varepsilon \text{ ve } \left|\overline{X}^\alpha - \overline{\mu}^\alpha\right| \le \varepsilon$$

olması ile denktir. Bu ise her $\alpha \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliklerin gerçeklenmesi anlamına gelir:

$$\underline{X}^\alpha \le \underline{\mu}^\alpha + \varepsilon, \ \overline{X}^\alpha \le \overline{\mu}^\alpha + \varepsilon \text{ ve } \underline{X}^\alpha \ge \underline{\mu}^\alpha - \varepsilon, \ \overline{X}^\alpha \ge \overline{\mu}^\alpha - \varepsilon$$

Diğer bir ifadeyle, $X \le \mu + \varepsilon_{\ 1}$ ve $X \ge \mu - \varepsilon_{\ 1}$ olur.■

Teorem 6.2.10: $st - limsupX_k = st - liminf X_k = \mu$ olduğunu ve bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısının, her bir $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon^0\right)$ için $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu + \varepsilon_1\}$ ve $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\}$ kümeleri sıfır yoğunluğa sahip olacak şekilde var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $st - limX_k = \mu$ dür (Aytar ve diğ., 2006).

İspat. Herhangi $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon^0\right)$ sayısı alalım. $st - liminf X_k = \mu$ olduğundan, Teorem 6.2.4 den her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k < \mu - \varepsilon_1\}) = 0 \tag{6.2.11}$$

dır. Benzer şekilde, $st - limsupX_k = \mu$ olduğundan Teorem 6.2.5 den her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu + \varepsilon_1\}\right) = 0 \tag{6.2.12}$$

dır. $\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\}\right) = 0, \delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu + \varepsilon_1\}\right) = 0$ ve (6.2.11), (6.2.12) den $\delta\left(K_1(\varepsilon)\right) = 1$ ve $\delta\left(K_2(\varepsilon)\right) = 1$ dir. Burada
$K_1(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \geq \mu - \varepsilon_1\}$ ve $K_2(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \leq \mu + \varepsilon_1\}$ kümeleridir. Açık olarak

$$K_1(\varepsilon) \cap K_2(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \mu - \varepsilon_1 \leq X_k \leq \mu + \varepsilon_1\}$$

dir. Lemma 6.2.9 dan

$$K_1(\varepsilon) \cap K_2(\varepsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, \mu) \leq \varepsilon\right\}$$

elde edilir.Böylece $\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, \mu) \leq \varepsilon\right\}\right) = 1$ olur. Bu durumda $\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{d}(X_k, \mu) > \varepsilon\right\}\right) = 0$ dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $st{-}limX_k = \mu$ sonucuna ulaşırız.■

Teorem 6.2.11: Eğer $X = \{X_k\}$ ve $Y = \{Y_k\}$ istatistiksel sınırlı fuzzy sayı dizileri ve $\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq Y_k\}\right) = 0$ ise bu durumda

(i) $st - limsupX = st - limsupY$

(ii) $st - liminfX = st - liminfY$

dir (Aytar ve diğ., 2006).

İspat. (i) eşitliğini ispatlayalım. $\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq Y_k\}\right) = 0$ olduğundan
$\{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu\}\right) \neq 0\} = \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\left(\{k \in \mathbb{N} : Y_k > \mu\}\right) \neq 0\}$dır. Yani $B_X = B_Y$ dir. Bu durumda $supB_X = supB_Y$ olur. Bu ise (i) yi ispatlar.

KAYNAKLAR

Agnew, R.P., 1939. Cores of Complex sequences and their transforms, Amer. J. Math. 61, 176-186.

Agnew, R.P., 1944. Summability of subsequences. Bull. Amer. Math. Soc.50, 596-598.

Agnew, R.P., 1946. A simple sufficient condition that a method of summability be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc., 52, 128-132.

Allen, H.S., 1944. T-transformations which leave the core of every bounded sequence invariant. J.London Math. Soc.19, 42-46.

Aytar, S., Gürdal, M., Pehlivan, S., 2003. Statistical boundedness sequences of fuzzy numbers, Fourth International Conference "Tolls for Mathematical Modelling", June 23-28, St Petersburg, Russia.

Aytar, S., 2004. Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers, Inform. Sci.,165, 129-138.

Aytar, S., Mammadov, M.A., Pehlivan, S., 2006. Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 157, 976-985.

Bilgin, T., 1994. On the statistical convergence, An. Univ. Timisoara Ser. Mat.-Inform. 32, 3-7.

Bilgin, T., 1996. Spaces of strongly $A-$summable sequences, Acta et Comment. Univ. Tartuensis Math. 1, 75-80.

Brown A.L., Page, A., 1970. Elements of Functional Analysis. Van Nostrand Reinhold Company.

Boos, J., 2000. Classical and Modern Methods in Summability, Oxford Univ. Press, UK.

Buck, R.C., 1953. Generalized asymptotic density . American J. Math. 75, 335-346.

Christopher, P., 1956. The asymptotic density of some k-dimensional sets. Amer. Math. Monthly 63, 399–401.

Connor, J., 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis 8, 47–63.

Connor, J., 1990. Two valued measures and summability. Analysis 10, 373–385.

Connor, J., 1992. R-type summability methods, Cauchy criteria, P-sets and statistical convergence, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (2), 319-327.

Connor, J., 1999. A topological and functional analytic approach to statistical convergence. Analysis of divergence (Orono, ME), 403–413, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA.

Connor, J., Kline, J., 1996. On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. J. Math. Anal. Appl. 197, no. 2, 392–399.

Connor, J., Ganichev, M., Kadets V., 2000. A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence. J. Math. Anal. Appl. 244, 251–261.

Connor, J., Fridy, J.A., Orhan, C., 2006. Core equality results for sequences. J. Math. Anal. Appl., 321, 515-523.

Cooke, R.G., 1950. Infinite matrices and sequences spaces. McMillan & Co. New york.

Cooke, R.G., 1960. Infinite matrices and sequences spaces. Moscow, (in Russian).

Das, G., 1987. Sublinear functionals and a class of conservative matrices, Bull.Inst.Math.Acad.Si 15, 89-106.

Das, G., Mishra S.K., 1981. A note on a theorem of Maddox on almost strong convergence, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 89, 393-96.

Davydov, N.A., 1983. On the Knopp kernel of a regular positive transformation, Izv. VUZ Matematika 27 (1983)30-40.

Demirci, K., 1992. İstatistiksel Yakınsaklık. Yüksek Lisans Tezi.

Demirci, K., 2000. A-statistical core of a sequence, Demonstratio Mathematica vol. XXXIII (2), 343-353.

Demirci, K., 2001. I-limit superior and limit inferior, Math. Commun. 6, 165-172.

Demirci, K., 2002. On lacunary statistical limit points, Demonstratio Mathematica, 35, 93-101.

Demirci, K., Yardımcı, Ş., 2004. $\sigma-$core and $I-$core of bounded sequences. J. Math. Anal. Appl., 290, 414-422.

Devi, S. J., 1976. Banach limits and infinite matrices, J. London Math.Soc.(2) 12, 397-401.

Diamond, P., Kloeden, P., 1994. Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications, World Scientific, Singapore.

Dubois, D., Prade, H., 1978. Operation on fuzzy numbers, Internat J. System Sci. 9, 613-626.

Dubois, D., Prade, H., 1980. Fuzzy Sets and Systems, Academic Press, New York.

Duman, O., Orhan, C., 2004. $\mu-$Statistically convergent function sequences. Czech. Math. J., 129, 413-422.

Duran, J.P., 1972. Strongly regular matrices, almost convergence and Banach limits. Duke M.J., 39, 497-502.

Duran, J.P.,1972. Infinite Matrices and Almost Convergence. Math. Z. 128(1972),75-83.

Fang, J.-X., Huang, H., 2004. On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 147, 417-435.

Fast, H., 1951. Surla Convergence Statistique Collog. Math. 2. 241–244.

Freedman, A.R., Sember J.J., Raphael M., 1978. Some Cesàro-type summability spaces, Proc. London Math.Soc.37, 508-520.

Freedman, A. R., Sember J. J., 1981. Dentsities and summability, Pacific J. Math. 95, 293–305.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence, Analysis 5, 301-313.

Fridy, J.A., 1993. Statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc. 118,1187-1192.

Fridy J.A., Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math. 160, (1), 43-51.

Fridy J.A., Orhan, C., 1993. Lacunary statistical summability, J. Math. Anal. Appl. 173, 497-504.

Fridy J.A., Orhan, C., 1997. Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc. 152:12,3625-3631.

Fridy J.A., Orhan, C., 1997. Statistical core theorems, J. Math. Anal. Appl.

208,520-527.

Fridy. J.A., Miller, H.I., 1991. A matrix characterization of statistical convergence, Analysis 11, (1), 59-66.

Fridy, J.A. Khan, M.K., 2000. Tauerian Theorems via statisical convergence J. Math. Anal. Appl. 228, (1), 73-95.

Halberstem, H., Roth, K. F., 1993. Sequences . New York springer-verlag.

Hamilton H.J., Hill, J.D., 1938. On strong summability, Amer. J. Math. 60, 588-594.

Hardy G.H., 1910. Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series, Proc. London Math. Soc. (2) 8, 310-320.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E., 1913. Sur la serie de Fourier d'une function a carre sommable, C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I Math. 156, 1307-1309.

Hardy G.H., Littlewood J.E., 1914. Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet series whose coefficients are positive, P.Lond.Math.Soc.13,174-191.

Kaufmann, A., Gupta, M.M., 1984. Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold, New York.

King, J.P., 1966. Almost summable sequences. Proc. Amer. Math. Soc. 17, 1219-1225.

Knopp, K., 1930. Zur Theori der limitierungsverfahren (Erste Mitteilung) Math. Z,31,97-127.

Kolk, E., 1988. Statistically convergent sequences in normed spaces. Reports of conference " Methods of algebra and analysis ". Tartu,63-66(in Russian)

Kolk, E., 1990. Sequence spaces defined by a sequence of moduli, Abstract of convergence “Problems of pure and applied mathematics”. Tartu, 131-134

Kolk, E., 1991. The statistical convergence in Banach spaces. Tartu Ül. Toimetised No. 928, 41–52.

Kolk, E., 1993. Matrix summability of statistically convergent sequences. Analysis 13, 77–83.

Kolk, E., 1993. On strong boundedness and summability with respect to a sequence of moduli, Tartu Ül. Toimetised No. 960, 41–50.

Kolk, E., 1994. Inclusion theorems for some sequence spaces defined by a sequence of moduli, Tartu Ül. Toimetised No. 970, 65-72.

Kolk, E., 1996. Matrix maps into the space of statistically convergent bounded sequences. Problems of pure and applied mathematics (Tallinn, 1995). Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 45, (2-3), 187–192.

Kolk, E., 1997. $F-$seminormed sequence spaces defined by a sequence of modulus functions and strong summability, Indian J. Pure Appl. Math. 28, 1547-1566.

Kolk, E., 1998. Inclusion relations between the statistical convergence and strong summability. Acta Comment. Univ. Tartu. Math. No. 2, 39–54.

Kolk, E., 1999. Convergence-preserving function sequences and uniform convergence. J. Math. Anal. Appl. 238, 599-603.

Kostyrko, P., Macaj, M., Šalát, T. Statistical convergence and I-convergence, Real Anal. Exchange, submitted

for publication.

Kostyrko, P., Macaj, M., Šalát, T., 2000. I-convergence, Real Anal. Exchange, 26, 669-685

Kuratowski, C., 1958. Topologie I, PWN, Warszava.

Kuttner, B., Maddox, I.J., 1983. Inequalities Between Functionals on Bounded Sequences, Indian J. Math., 25, 1-10.

Kwon, J.S., 2000. On statistical and p-Cesaro convergence of fuzzy numbers, Korean J. Comput. Appl. Math. 7 (1), 195-203.

Kwon, J.S., 2001. Remark on lacunary statistical convergence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 123 (1), 85-88.

Landau, E., 1910. Über die Bedentung einiger Grenzwersatze der Herren Hardy und Axel, Prace Mat.-Fiz. 21, 97-177.

Li, J., 1998. On the core of a sequences in Banach spaces. Far East J. Math. Sci. Special Volume, Part III, 295-307.

Li, J., 2000. Lacunary statistical convergence and inclusion properties between lacunary methods. Internat J. Math.&Math. Sci. Vol. 23, (3), 175-180.

Li, J., Fridy, J.A., 2000. Matrix Transformations of statistical cores of complex sequences, Analysis 20, 15-34.

Littlewood J.E., The converse of Abel's theorem on power series , P. Lond. Math.

Soc. 9, (2), 434-448.

Loone, L., 1975. Knopp's core and almost-convergence core in the space m. Tartu Riikl. All. Toimetised 335, 148-156.

Lorentz, G.G., 1948. A Contribution to the Theory of Divergent Series, Acta Math. 80.167–190.

Lorentz G.G., 1948. Tauberian Teorems and Tauberian Conditions.Trans.Amer.Math.Soc. 63, 226–234.

Maddox, I. J., 1967. Spaces of strongly summable sequences, Quart J. Math. Oxford (2) 18, 345–355.

Maddox, I.J., 1970. Elements of functional analysis, Cambridge University Press.

Maddox I.J., 1974. Steinhaus type theorems for summability matrices, Proc. Amer. Math. Soc. 45, 209-213.

Maddox, I. J., 1978. A new Type of convergence, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.83, 61–64.

Maddox, I. J., 1979. On strong almost convergence, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.85, 345-350.

Maddox, I.J., 1979. Some analogues of Knopp's Core Theorems. Internat J. Math.& Math. Sci. 2, 605-614.

Maddox, I.J., 1986. Sequence space defined by a modulus, Math. Proc. Cambiridge Phil. Soc. 100, 161–166.

Maddox, I.J., 1988. Statistical convergence in a locally convex sequence space, Math. Proc. Camp. Soc. 104), 141-145.

Mamedov, M.A., Pehlivan, S., 2001. Statistical cluster points and Turnpike theorem in nonconvex problems. J. Math. Anal. Appl. 256, 686-693.

Matloka, M., 1986. Sequences of fuzzy numbers. Busefal 28 (1986), 28–37.

Miller, H., 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Trans. Amer. Math. Soc. 347, 1811-1819.

Móricz, F., 1994. Tauberian theorems for Cesàro summable double sequences. Studia Math. 110, 83–96.

Móricz, F., 2002. Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability $(C, 1)$ .J. Math. Anal. Appl. ,275, 277-287.

Móricz, F., 2003. Statistical convergence of multiple sequences. Arch. Math., 81, 82-89.

Mursaleen, 1979. On strong $F_{\mathcal{B}}$-summable sequences, Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A 28, 13-21.

Mursaleen, Edely, O.H.H., 2003. Statistical convergence of double sequences. J. Math. Anal. Appl., 288, 223-231.

Mursaleen, Edely, O.H.H., 2004. Generalized statistical convergence. Information Sciences, 162, 287-294.

Nagata, J., 1974. Modern General Topology, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam-London.

Nanda, S., 1976. Some sequence spaces and almost convergence, J. Austral. Math. Soc. 22, 446-455.

Nanda, S., 1984. Strongly Almost Convergent Sequences, Bull, Cal. Math. Soc. 76. 236–240.

Nanda, S., 1989. On Sequence of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and systems 33, 123–126.

Natarajan, P.N., 1990. On the core of a sequence over valued fields, J. Indian Math. Soc. 55,189-198.

Neubrum, T., Smital, J., Salat, T., 1968. On the structure of the space $M(0,1)$. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 13, 337–386.

Niven, I., Zuckerman, H.S., 1980. An Introduction to the Theory of Numbers, Fourth Ed. New York.

Nuray, F., Savas, E., 1994. Invariant statistical convergence and $A-$invariant statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math. 25, 267-274

Nuray, F., Savas, E., 1995. Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. Math. Slovaca 45 3, 269–273.

Nuray, F., 1998. Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 99 (3), 353-355.

Orhan, C., 1990. Sublinear Functionals and Knopp's Core Theorem Int. J. Math. & Math. Sci. 2, 461-68

Orhan, C., Yardımcı, S., 2004. Banach and statistical cores of bounded sequences, Czechoslovak Math. 54 (129), 65-72.

Pehlivan, S., 1994. Strongly almost convergent sequences defined by a modulus and uniformly statistical convergence, Soochow J. Math. 20, 205-211.

Pehlivan, S., Fisher, B., 1995. Lacunary strong convergence with respect to a sequence of modulus functions, Comment Math. Univ. Carolniae 36, 69-76.

Pehlivan, S., Mamedov, M.A., 2000. Statistical cluster points and turnpike. Optimization 48, 93-106.

Pehlivan, S., Güncan, A., Mamedov, M.A., 2004. Statistical cluster points in R^N. Czechoslovak Math. J. 54 (129), 95-102.

Petersen, G.M., 1966. Regular matrix transformations, McGraw-Hill, Book Co., Inc., New York.

Pringsheim, A., 1900. Zur Ttheorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. Math. Ann. 53, 289–321.

Puri, M.L., Ralescu, D.A., 1983. Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 91, 552-558.

Rhoades, B.E., 1960. Some properties of totally coregular matrices, Illinois J.Math., 4, 518-525.

Ruckle, W.H., 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Canad. J. Math. 25, 973-978.

Sálat, T., 1980. On statistical convergent sequences of real numbers Math. Slovaca 30, 139–150.

Savaş, E., 2000. A note on sequence of fuzzy numbers. Inf. Sci. 124, 297–300.

Savaş, E., Patterson, R.F., 2006. Lacunary statistical convergence of multiple sequences. Applied Mathematics Letters, 19, 527-534.

Schaefer, P., 1972. Infinite matrices and invariant means, Proc. Amer. Math. Soc. 36, 104–110.

Schmidt, R., 1925. Über divergente Folgen und Mittelbildungen, M. Zeit. 22, 89-152.

Schoenberg I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly 66, 361-375.

Simmons, S., 1969. Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals, J.Math. Anal. Appl. 26, 640-655.

Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinarie et la convergence asymptotique, Colloq. Math. 2, 73-74.

Stieglitz, M., 1973. Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Fastkonvergenz, Math Japon 18, 53-70

Stieglitz, M., Tietz, H., 1977. Matrix transformationen von Folgenraumen. Eine Ergebnisübersicht. Math. Z., 154, 1-16.

Teran, P. , 2005. A reduction method for proving Tauberian theorems for statistical convergence in metric spaces, Bull. Belgian Math. Soc., to

appear.

Tripathy, B. C., 1993. Statistical convergence in normed linear spaces. Bull. Pure Appl. Sci. Sec. E Math. 12,(1-2), 83–84.

Tripathy, B.C., 1988. On statistically convergent sequences. Bull. Cal.Math. Soc. 90,259-262.

Wilansky, A., 1984. Summability Through Functional Analysis. North Holland, Amsterdam.

Wilczyski, W., 2000. Statistical convergence of sequences of functions. Real Anal. Exchange 25, 49-50.

Wu, C., Wu, C., 1997. The supremum and infimum of the set of fuzzy numbers and its application, J. Math. Anal. Appl. 210, 499-511.

Yardımcı, Ş., 1989. Knopp çekirdek teoremi ve benzerleri Yüksek Lisans Tezi.

Yardımcı, Ş., 1996. Core theorems for real bounded sequences. Indian J. Pure Appl. Math. 27, 861-867.

Zeager, J., 1999. Buck-type theorems for statistical convergence. Rad. Mat. 9 (1), 59–69.

Zeager, J., 2000. Statistical limit point theorems. Internat J. Math. & Math. Sci. Vol. 23 (11), 741-752.

Zygmund, A., 1979. Trigonometric series, 2nd Ed., Cambridge Univ. Press.

.

KAYNAKLAR

Agnew, R.P., 1939. Cores of Complex sequences and their transforms, Amer. J. Math. 61, 176-186.

Agnew, R.P., 1944. Summability of subsequences. Bull. Amer. Math. Soc.50, 596-598.

Agnew, R.P., 1946. A simple sufficient condition that a method of summability be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc., 52, 128-132.

Allen, H.S., 1944. T-transformations which leave the core of every bounded sequence invariant. J.London Math. Soc.19, 42-46.

Aytar, S., Gürdal, M., Pehlivan, S., 2003. Statistical boundedness sequences of fuzzy numbers, Fourth International Conference "Tolls for Mathematical Modelling", June 23-28, St Petersburg, Russia.

Aytar, S., 2004. Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers, Inform. Sci.,165, 129-138.

Aytar, S., Mammadov, M.A., Pehlivan, S., 2006. Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 157, 976-985.

Bilgin, T., 1994. On the statistical convergence, An. Univ. Timisoara Ser. Mat.-Inform. 32, 3-7.

Bilgin, T., 1996. Spaces of strongly $A-$summable sequences, Acta et Comment. Univ. Tartuensis Math. 1, 75-80.

Brown A.L., Page, A., 1970. Elements of Functional Analysis. Van Nostrand Reinhold Company.

Boos, J., 2000. Classical and Modern Methods in Summability, Oxford Univ. Press, UK.

Buck, R.C., 1953. Generalized asymptotic density . American J. Math. 75, 335-346.

Christopher, P., 1956. The asymptotic density of some k-dimensional sets. Amer. Math. Monthly 63, 399–401.

Connor, J., 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis 8, 47–63.

Connor, J., 1990. Two valued measures and summability. Analysis 10, 373–385.

Connor, J., 1992. R-type summability methods, Cauchy criteria, P-sets and statistical convergence, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (2), 319-327.

Connor, J., 1999. A topological and functional analytic approach to statistical convergence. Analysis of divergence (Orono, ME), 403–413, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA.

Connor, J., Kline, J., 1996. On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. J. Math. Anal. Appl. 197, no. 2, 392–399.

Connor, J., Ganichev, M., Kadets V., 2000. A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence. J. Math. Anal. Appl. 244, 251–261.

Connor, J., Fridy, J.A., Orhan, C., 2006. Core equality results for sequences. J. Math. Anal. Appl., 321, 515-523.

Cooke, R.G., 1950. Infinite matrices and sequences spaces. McMillan & Co. New york.

Cooke, R.G., 1960. Infinite matrices and sequences spaces. Moscow, (in Russian).

Das, G., 1987. Sublinear functionals and a class of conservative matrices, Bull.Inst.Math.Acad.Sinica 15, 89-106.

Das, G., Mishra S.K., 1981. A note on a theorem of Maddox on almost strong convergence, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 89, 393-96.

Davydov, N.A., 1983. On the Knopp kernel of a regular positive transformation, Izv. VUZ Matematika 27 (1983)30-40.

Demirci, K., 1992. İstatistiksel Yakınsaklık. Yüksek Lisans Tezi.

Demirci, K., 2000. A-statistical core of a sequence, Demonstratio Mathematica vol. XXXIII (2), 343-353.

Demirci, K., 2001. I-limit superior and limit inferior, Math. Commun. 6, 165-172.

Demirci, K., 2002. On lacunary statistical limit points, Demonstratio Mathematica, 35, 93-101.

Demirci, K., Yardımcı, Ş., 2004. $\sigma-$core and $I-$core of bounded sequences. J. Math. Anal. Appl., 290, 414-422.

Devi, S. J., 1976. Banach limits and infinite matrices, J. London Math.Soc.(2) 12, 397-401.

Diamond, P., Kloeden, P., 1994. Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications, World Scientific, Singapore.

Dubois, D., Prade, H., 1978. Operation on fuzzy numbers, Internat J. System Sci. 9, 613-626.

Dubois, D., Prade, H., 1980. Fuzzy Sets and Systems, Academic Press, New York.

Duman, O., Orhan, C., 2004. $\mu-$Statistically convergent function sequences. Czech. Math. J., 129, 413-422.

Duran, J.P., 1972. Strongly regular matrices, almost convergence and Banach limits. Duke M.J., 39, 497-502.

Duran, J.P.,1972. Infinite Matrices and Almost Convergence. Math. Z. 128(1972),75-83.

Fang, J.-X., Huang, H., 2004. On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 147, 417-435.

Fast, H., 1951. Surla Convergence Statistique Collog. Math. 2. 241–244.

Freedman, A.R., Sember J.J., Raphael M., 1978. Some Cesàro-type summability spaces, Proc. London Math.Soc.37, 508-520.

Freedman, A. R., Sember J. J., 1981. Dentsities and summability, Pacific J. Math. 95, 293–305.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence, Analysis 5, 301-313.

Fridy, J.A., 1993. Statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc. 118,1187-1192.

Fridy J.A., Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math. 160, (1), 43-51.

Fridy J.A., Orhan, C., 1993. Lacunary statistical summability, J. Math. Anal. Appl. 173, 497-504.

Fridy J.A., Orhan, C., 1997. Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc. 152:12,3625-3631.

Fridy J.A., Orhan, C., 1997. Statistical core theorems, J. Math. Anal. Appl. 208,520-527.

Fridy. J.A., Miller, H.I., 1991. A matrix characterization of statistical convergence, Analysis 11, (1), 59-66.

Fridy, J.A. Khan, M.K., 2000. Tauerian Theorems via statisical convergence J. Math. Anal. Appl. 228, (1), 73-95.

Halberstem, H., Roth, K. F., 1993. Sequences . New York springer-verlag.

Hamilton H.J., Hill, J.D., 1938. On strong summability, Amer. J. Math. 60, 588-594.

Hardy G.H., 1910. Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series, Proc. London Math. Soc. (2) 8, 310-320.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E., 1913. Sur la serie de Fourier d'une function a carre sommable, C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I Math. 156, 1307-1309.

Hardy G.H., Littlewood J.E., 1914. Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet series whose coefficients are positive, P.Lond.Math.Soc.13,174-191.

Kaufmann, A., Gupta, M.M., 1984. Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold, New York.

King, J.P., 1966. Almost summable sequences. Proc. Amer. Math. Soc. 17, 1219-1225.

Knopp, K., 1930. Zur Theori der limitierungsverfahren (Erste Mitteilung) Math. Z,31,97-127.

Kolk, E., 1988. Statistically convergent sequences in normed spaces. Reports of conference " Methods of algebra and analysis ". Tartu,63-66(in Russian)

Kolk, E., 1990. Sequence spaces defined by a sequence of moduli, Abstract of convergence “Problems of pure and applied mathematics”. Tartu, 131-134

Kolk, E., 1991. The statistical convergence in Banach spaces. Tartu Ül. Toimetised No. 928, 41–52.

Kolk, E., 1993. Matrix summability of statistically convergent sequences. Analysis 13, 77–83.

Kolk, E., 1993. On strong boundedness and summability with respect to a sequence of moduli, Tartu Ül. Toimetised No. 960, 41–50.

Kolk, E., 1994. Inclusion theorems for some sequence spaces defined by a sequence of moduli, Tartu Ül. Toimetised No. 970, 65-72.

Kolk, E., 1996. Matrix maps into the space of statistically convergent bounded sequences. Problems of pure and applied mathematics (Tallinn, 1995). Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 45, (2-3), 187–192.

Kolk, E., 1997. $F-$seminormed sequence spaces defined by a sequence of modulus functions and strong summability, Indian J. Pure Appl. Math. 28, 1547-1566.

Kolk, E., 1998. Inclusion relations between the statistical convergence and strong summability. Acta Comment. Univ. Tartu. Math. No. 2, 39–54.

Kolk, E., 1999. Convergence-preserving function sequences and uniform convergence. J. Math. Anal. Appl. 238, 599-603.

Kostyrko, P., Macaj, M., Šalát, T. Statistical convergence and I-convergence, Real Anal. Exchange, submitted
for publication.

Kostyrko, P., Macaj, M., Šalát, T., 2000. I-convergence, Real Anal. Exchange, 26, 669-685

Kuratowski, C., 1958. Topologie I, PWN, Warszava.

Kuttner, B., Maddox, I.J., 1983. Inequalities Between Functionals on Bounded Sequences, Indian J. Math., 25, 1-10.

Kwon, J.S., 2000. On statistical and p-Cesaro convergence of fuzzy numbers, Korean J. Comput. Appl. Math. 7 (1), 195-203.

Kwon, J.S., 2001. Remark on lacunary statistical convergence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 123 (1), 85-88.

Landau, E., 1910. Über die Bedentung einiger Grenzwersatze der Herren Hardy und Axel, Prace Mat.-Fiz. 21, 97-177.

Li, J., 1998. On the core of a sequences in Banach spaces. Far East J. Math. Sci. Special Volume, Part III, 295-307.

Li, J., 2000. Lacunary statistical convergence and inclusion properties between lacunary methods. Internat J. Math.&Math. Sci. Vol. 23, (3), 175-180.

Li, J., Fridy, J.A., 2000. Matrix Transformations of statistical cores of complex sequences, Analysis 20, 15-34.

Littlewood J.E., The converse of Abel's theorem on power series , P. Lond. Math. Soc. 9, (2), 434-448.

Loone, L., 1975. Knopp's core and almost-convergence core in the space m. Tartu Riikl. All. Toimetised 335, 148-156.

Lorentz, G.G., 1948. A Contribution to the Theory of Divergent Series, Acta Math. 80.167–190.

Lorentz G.G., 1948. Tauberian Teorems and Tauberian Conditions.Trans.Amer.Math.Soc. 63, 226–234.

Maddox, I. J., 1967. Spaces of strongly summable sequences, Quart J. Math. Oxford (2) 18, 345–355.

Maddox, I.J., 1970. Elements of functional analysis, Cambridge University Press.

Maddox I.J., 1974. Steinhaus type theorems for summability matrices, Proc. Amer. Math. Soc. 45, 209-213.

Maddox, I. J., 1978. A new Type of convergence, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.83, 61–64.

Maddox, I. J., 1979. On strong almost convergence, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.85, 345-350.

Maddox, I.J., 1979. Some analogues of Knopp's Core Theorems. Internat J. Math.& Math. Sci. 2, 605-614.

Maddox, I.J., 1986. Sequence space defined by a modulus, Math. Proc. Cambiridge Phil. Soc. 100, 161–166.

Maddox, I.J., 1988. Statistical convergence in a locally convex sequence space, Math. Proc. Camp. Soc. 104), 141-145.

Mamedov, M.A., Pehlivan, S., 2001. Statistical cluster points and Turnpike theorem in nonconvex problems. J. Math. Anal. Appl. 256, 686-693.

Matloka, M., 1986. Sequences of fuzzy numbers. Busefal 28 (1986), 28–37.

Miller, H., 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Trans. Amer. Math. Soc. 347, 1811-1819.

Móricz, F., 1994. Tauberian theorems for Cesàro summable double sequences. Studia Math. 110, 83–96.

Móricz, F., 2002. Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability $(C,1)$ .J. Math. Anal. Appl. ,275, 277-287.

Móricz, F., 2003. Statistical convergence of multiple sequences. Arch. Math., 81, 82-89.

Mursaleen, 1979. On strong $F_{\mathcal{B}}$-summable sequences, Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A 28, 13-21.

Mursaleen, Edely, O.H.H., 2003. Statistical convergence of double sequences. J. Math. Anal. Appl., 288, 223-231.

Mursaleen, Edely, O.H.H., 2004. Generalized statistical convergence. Information Sciences, 162, 287-294.

Nagata, J., 1974. Modern General Topology, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam-London.

Nanda, S., 1976. Some sequence spaces and almost convergence, J. Austral. Math. Soc. 22, 446-455.

Nanda, S., 1984. Strongly Almost Convergent Sequences, Bull, Cal. Math. Soc. 76. 236–240.

Nanda, S., 1989. On Sequence of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and systems 33, 123–126.

Natarajan, P.N., 1990. On the core of a sequence over valued fields, J. Indian Math. Soc. 55,189-198.

Neubrum, T., Smital, J., Salat, T., 1968. On the structure of the space $M(0,1)$. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 13, 337–386.

Niven, I., Zuckerman, H.S., 1980. An Introduction to the Theory of Numbers, Fourth Ed. New York.

Nuray, F., Savas, E., 1994. Invariant statistical convergence and $A-$invariant statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math. 25, 267-274

Nuray, F., Savas, E., 1995. Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. Math. Slovaca 45 3, 269–273.

Nuray, F., 1998. Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 99 (3), 353-355.

Orhan, C., 1990. Sublinear Functionals and Knopp's Core Theorem Int. J. Math. & Math. Sci. 2, 461-68

Orhan, C., Yardımcı, S., 2004. Banach and statistical cores of bounded sequences, Czechoslovak Math. 54 (129), 65-72.

Pehlivan, S., 1994. Strongly almost convergent sequences defined by a modulus and uniformly statistical convergence, Soochow J. Math. 20, 205-211.

Pehlivan, S., Fisher, B., 1995. Lacunary strong convergence with respect to a sequence of modulus functions, Comment Math. Univ. Carolniae 36, 69-76.

Pehlivan, S., Mamedov, M.A., 2000. Statistical cluster points and turnpike. Optimization 48, 93-106.

Pehlivan, S., Güncan, A., Mamedov, M.A., 2004. Statistical cluster points in R^N. Czechoslovak Math. J. 54 (129), 95-102.

Petersen, G.M., 1966. Regular matrix transformations, McGraw-Hill, Book Co., Inc., New York.

Pringsheim, A., 1900. Zur Ttheorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. Math. Ann. 53, 289–321.

Puri, M.L., Ralescu, D.A., 1983. Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 91, 552-558.

Rhoades, B.E., 1960. Some properties of totally coregular matrices, Illinois J.Math., 4, 518-525.

Ruckle, W.H., 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Canad. J. Math. 25, 973-978.

Sálat, T., 1980. On statistical convergent sequences of real numbers Math. Slovaca 30, 139–150.

Savaş, E., 2000. A note on sequence of fuzzy numbers. Inf. Sci. 124, 297–300.

Savaş, E., Patterson, R.F., 2006. Lacunary statistical convergence of multiple sequences. Applied Mathematics Letters, 19, 527-534.

Schaefer, P., 1972. Infinite matrices and invariant means, Proc. Amer. Math. Soc. 36, 104–110.

Schmidt, R., 1925. Über divergente Folgen und Mittelbildungen, M. Zeit. 22, 89-152.

Schoenberg I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly 66, 361-375.

Simmons, S., 1969. Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals, J.Math. Anal. Appl. 26, 640-655.

Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinarie et la convergence asymptotique, Colloq. Math. 2, 73-74.

Stieglitz, M., 1973. Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Fastkonvergenz, Math Japon 18, 53-70

Stieglitz, M., Tietz, H., 1977. Matrix transformationen von Folgenraumen. Eine Ergebnisübersicht. Math. Z., 154, 1-16.

Teran, P. , 2005. A reduction method for proving Tauberian theorems for statistical convergence in metric spaces, Bull. Belgian Math. Soc., to appear.

Tripathy, B. C., 1993. Statistical convergence in normed linear spaces. Bull. Pure Appl. Sci. Sec. E Math. 12,(1-2), 83–84.

Tripathy, B.C., 1988. On statistically convergent sequences. Bull. Cal.Math. Soc. 90,259-262.

Wilansky, A., 1984. Summability Through Functional Analysis. North Holland, Amsterdam.

Wilczyski, W., 2000. Statistical convergence of sequences of functions. Real Anal. Exchange 25, 49-50.

Wu, C., Wu, C., 1997. The supremum and infimum of the set of fuzzy numbers and its application, J. Math. Anal. Appl. 210, 499-511.

Yardımcı, Ş., 1989. Knopp çekirdek teoremi ve benzerleri Yüksek Lisans Tezi.

Yardımcı, Ş., 1996. Core theorems for real bounded sequences. Indian J. Pure Appl. Math. 27, 861-867.

Zeager, J., 1999. Buck-type theorems for statistical convergence. Rad. Mat. 9 (1), 59–69.

Zeager, J., 2000. Statistical limit point theorems. Internat J. Math. & Math. Sci. Vol. 23 (11), 741-752.

Zygmund, A., 1979. Trigonometric series, 2nd Ed., Cambridge Univ. Press.

.

ÖZGEÇMİŞ

Cemal BELEN 1981 yılında Aybastı'da doğdu. İlk öğremini Aybastı'da, orta ve lise öğremini Ordu'da tamamladı. 2000 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandı ve 2004 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2005 yılından itibaren Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.