GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ ASAL HALKALAR

EMİNE KOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008

T.C
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ ASAL HALKALAR

EMİNE KOÇ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2008

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Yard. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

Üye : Yard. Doç. Dr. Neşe ÖMÜR

Üye : Yard. Doç. Dr. Öznur GÖLBAŞI

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

/ /2008

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Hasan Hüseyin BAŞIBÜYÜK

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan “Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu” adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
SUMMARY	ii
TEŞEKKÜR	iii
GİRİŞ	1
1. BÖLÜM:	
GENEL BİLGİLER	5
2. BÖLÜM:	12
2.1. Türevli Halkalar	12
2.2. Türev ve Lie İdealler	23
3.3. Türev ve (s,t)- Lie İdealler	30
3. BÖLÜM:	
GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ LİE İDEALLER	42
4. BÖLÜM:	
GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ (s,t)- LİE İDEALLER	48
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	60

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ ASAL HALKALAR

Emine KOÇ
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Öznur GÖLBAŞI

Türev yardımıyla bir halkanın komütatifliğinin araştırılması konusu özetlenerek, Lie idealler ve (s,t)- Lie idealler için bazı sonuçların bulunmasını amaçlayan bu çalışmada aşağıdaki yol izlenmiştir:

I. bölümde araştırılan konularla ilgili genel bilgiler verilerek, II. Bölümde genelleştirilen sonuçlarla ilgili yapılmış olan çalışmalar özetlenecektir.

III. bölümde Posner' ın (Posner, 1957, Teorem 2) ve Daif ve Bell' in (Daif ve Bell, 1992, Teorem 3) teoremleri, R asal halkasının sıfırdan farklı Lie ideali ve genelleştirilmiş türevi için ispatlanacaktır.

IV. bölümde ise genelleştirilmiş türevli (s,t)– Lie ideallerle ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Türev, genelleştirilmiş türev, Lie ideal, (s,t)– Lie ideal.

SUMMARY

MSc Thesis

PRIME RINGS WITH GENERALIZED DERIVATION

Emine KOÇ
Cumhuriyet University
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics

Advisor: Asoc. Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

The plan followed in this work, which aims at the study of some paper for Lie ideal and (s,t)- Lie ideal have been summarized the subject of commutativity of ring through derivation.

In chapter one, general information about researched has been given, in chapter two the studies about generalized results have been summarized.

In chapter three, Posner' s (Posner, 1957, Theorem 2) and Daif and Bell' s (Daif and Bell, 1992, Theorem 3) theorems have been proved for a nonzero Lie ideal of prime ring with generalized derivation.

In chapter four, some results about (s,t)- Lie ideals with generalized derivation have been given.

Key Words: Derivation, generalized derivation, Lie ideal, (s,t)- Lie ideal.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Öznur GÖLBAŞI' na içten teşekkürlerimi sunarım.

GİRİŞ

R bir halka, $d : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulunu sağlıyor ise d ye R halkasında bir türevdir, denir.

R bir halka, $f : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$f(xy) = f(x)y + xd(y)$

koşulunu sağlayan bir $d : R \to R$ türevi varsa f ye R halkasında d ile belirlenmiş genelleştirilmiş türevdir, denir.

Bir R halkasında, $x, y \in R$ için $xy - yx$ elemanı komütatör çarpım olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir. $\{z \in R \mid xz = zx \ ,\forall x \in R\}$ kümesine ise R halkasının merkezi denir ve Z ile gösterilir.

X ve Y, R halkasının iki alt kümesi olsun. $[X, Y]$ ile $xy - yx$, $x \in X$, $y \in Y$ elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup gösterilir.

U, R halkasının toplamsal alt grubu olsun.

1) $[U, R] \subset U$ oluyorsa U ya R halkasının bir Lie ideali denir.

2) $s, t : R \to R$ iki fonksiyon olsun. $x, y \in R$ için $xs(y) - t(y)x$ elemanı $[x, y]_{s,t}$ ile gösterilmek üzere,

i. $[U, R]_{s,t} \subset U$ oluyorsa U ya R halkasının bir (s, t)- sağ Lie ideali,

ii. $[R, U]_{s,t} \subset U$ oluyorsa U ya R halkasının bir (s, t)- sol Lie ideali,

iii. U, R halkasının hem (s, t)- sol ve hem de (s, t)- sağ Lie ideali ise U ya R nin (s, t)- Lie ideali, denir.

$C_{s,t} = \{c \in R \mid cs(x) = t(x)c, \ \forall x \in R\}$ kümesine ise R halkasının (s, t)-merkezi, denir.

1957 yılında E. C. Posner tarafından bir halkada türev tanımı yapılarak, R bir asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev ve $a \in R$ için $ad(R) = (0)$ iken $a = 0$

olduğu gösterildi. Daha sonra R karakteristiği ikiden farklı asal halka olmak üzere, J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr, yukarıdaki koşulu R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali için genelleştirdiler. 1995 yılında ise bu terorem (s,t)- Lie ideali için N. Aydın ve M. Soytürk tarafından, 1998 yılında (s,t)- sol Lie ideali için N. Aydın tarafından ispatlandı. Ö. Gölbaşı ve K. Kaya 2006 yılında, U, R halkasının bir Lie ideali ve (f,d) genelleştirilmiş türev olmak üzere; her $u\in U$ için, $af(U)=(0)$ iken $U\subset Z$ olduğunu gösterdiler. Bu teorem Ö. Gölbaşı tarafından (s,t)– sol Lie ideal için $af(U)=(0)$ iken her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ biçiminde genelleştirildi.

P. H. Lee ve T. K. Lee 1983 yılında, R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $ad(U)\subseteq Z$ iken $a=0$ veya $U\subseteq Z$ olduğunu gösterdiler. Bu teorem Ö. Gölbaşı tarafından, U, R halkasının bir Lie ideali ve (f,d) genelleştirilmiş türev olmak üzere $af(U)\subseteq Z$ koşulu alınarak genelleştirildi.

E. C. Posner 1957 yılında, d, R asal halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere her $x\in R$ için $[d(x),x]\in Z$ koşulunu inceledi. Bu teorem için 1981 yılında P. H. Lee ve T. K. Lee, karakteristiği ikiden farklı asal halka için değişik bir ispat verdiler. 1973 yılında Awtar, yukarıdaki teoremi, R halkasının Lie ve Jordan idealleri için genelleştirdi. P. H. Lee ve T. K. Lee ise U, R halkasının bir Lie ideali ve her u∈ U için $[d(u),u]\in Z$ koşulu altında $U\subset Z$ olduğunu gösterdiler. Bu teorem 2006 yılında N. Argaç tarafından asal halka yerine yarı-asal halka alınarak, 2004 yılında ise N. Argaç ve E. Albaş tarafından asal halkada genelleştirilmiş türev için incelendi. Ö. Gölbaşı ise R, yarı-asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olmak üzere her $x\in R$ için $[f(x),x]\in Z$ iken R halkasının komütatifliğini gösterdi.

1979 yılında I. N. Herstein, R, karakteristiği ikiden farklı asal olan bir halka için $[a,d(R)]=(0)$ koşulunu sağlayan a elemanının halkanın merkezinde olduğunu ispatladı. Herstein'ın bu teoremi $[a,d(R)]\subset Z$ koşulu altında P. H. Lee ve T. K. Lee tarafından, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir

Lie ideali olmak üzere $[a,d(U)]=(0)$ koşulu altında ise J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından genelleştirildi. Daha sonra P. H. Lee ve T. K. Lee, U, R halkasının bir Lie ideali ve $[a,d(U)]\subset Z$ iken $a\in Z$ olduğunu kanıtladılar. N. Argaç ve E. Albaş, bu koşulu 2004 yılında R asal halkası üzerinde genelleştirilmiş türev için, Ö. Gölbaşı ve K. Kaya ise, U, R halkasının Lie ideali ve (f,d), genelleştirilmiş türevi için incelediler. Aynı teorem Ö. Gölbaşı tarafından U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali, (f,d), genelleştirilmiş türev ve $a\in R$ olmak üzere $[a,f(U)]\subseteq Z$ ise $a\in Z$ veya $d(a)=0$ veya $U\subset Z$ biçiminde genelleştirildi.

1978 yılında I. N. Herstein, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, d, sıfırdan farklı türev olmak üzere $d(R)\subset Z$ koşulunu ele almıştır. J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından ise R halkası yerine onun bir U Lie ideali alınarak $d(U)\subset Z$ iken $U\subset Z$ olduğu ispatlanmıştır. Bu teorem N. Aydın ve M. Soytürk tarafından 1995 yılında R halkasının bir (s,t)- Lie ideali için, 2002 yılında N. Aydın, K. Kaya ve Ö. Gölbaşı tarafından (s,t)– sol Lie ideali için, 2006 yılında ise Ö. Gölbaşı ve K. Kaya tarafından, (f,d), R de genelleştirilmiş türev, U, R halkasının sıfırdan farklı Lie ideali olmak üzere $f(U)\subset Z$ iken $U\subset Z$ gösterilerek genelleştirildi.

1992 yılında Daif ve Bell tarafından “d, R yarı-asal halkasının sıfırdan farklı türevi ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olmak üzere aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa I halkanın merkezindedir;

i. $d([x,y])=\pm[x,y],\ \forall x,y\in I$,

ii. $x,y\in I$ için $d([x,y])=[x,y]$ veya $d([x,y])=-[x,y]$.”

teoremi ispatlandı. Bu sonuç 2006 yılında N. Argaç tarafından incelendi. Ö. Gölbaşı ise aynı sonucu bir yarı-asal halkada (f,d) genelleştirilmiş türevi için genelleştirdi.

Bu çalışmada türev yardımıyla bir halkanın komütatifliğinin araştırılması konusunda,

I. bölümde araştırılan konularla ilgili genel bilgiler verilecek, II. Bölümde genelleştirilen sonuçlarla ilgili yapılmış olan çalışmalar özetlenecektir.

III. bölümde Posner' ın (Posner, 1957, Teorem 2) ve Daif ve Bell' in (Daif ve Bell, 1992, Teorem 3) teoremleri, R asal halkasının sıfırdan farklı Lie ideali ve (f,d) genelleştirilmiş türevi için ispatlanacaktır.

IV. bölümde ise genelleştirilmiş türevli $(s,t)-$ Lie ideallerle ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

I. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

Tanım 1.1: R, boş olmayan bir küme ve R üzerinde toplama ve çarpma ikili işlemleri tanımlı olsun. Buna göre aşağıdaki koşulları sağlarsa R ye bir halka denir ve $(R,+,\cdot)$ ile gösterilir.

i. $(R,+)$ değişmeli grup,

ii. $\forall a,b,c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$,

iii. $\forall a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab + ac$ ve $(a+b)c = ac + bc$.

Ayrıca

iv. $\forall a,b \in R$ için $ab = ba$ ise R halkasına değişmeli (komütatif) halka, denir.

Tanım 1.2: R bir halka ve S, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer S kümesi R deki toplama ve çarpma işlemleri altında bir halka ise S ye R nin alt halkası, denir.

Tanım 1.3: R bir halka ve I, R nin bir alt halkası olsun.

i. Her $r \in R$, $a \in I$ için $ra \in I$ ise I ya R halkasının sol ideali,

ii. Her $r \in R$, $a \in I$ için $ar \in I$ ise I ya R halkasının sağ ideali, denir.

I, R nin hem sol, hem de sağ ideali ise I ya R halkasının bir ideali denir.

Tanım 1.4: R bir halka ve A, B ve P, R nin idealleri olsun. $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının asal ideali denir.

Teorem 1.5: R bir halka ve P, R nin bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) P asal idealdir.

(2) $\forall a,b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) $\forall a,b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(4) U, V R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

(5) U, V R halkasının iki sağ ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): P asal ideal olsun. $\forall a,b \in R$ için $aRb \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $RaRbR \subseteq P$ olur. Buradan $RaRRbR \subseteq P$ olur. P asal ideal olduğu için $RaR \subseteq P$ veya $RbR \subseteq P$ bulunur. $(a) = A$ olsun. $A^3 \subseteq RaR \subseteq P$ ve yine P asal ideal olduğundan $A^2 \subseteq P$ veya $A \subseteq P$ olur. Böylece $A = (a) \subseteq P$ elde edilir. Buradan $a \in P$ bulunur. Benzer şekilde $b \in P$ gösterilir.

(2) $\Rightarrow$(3): $\forall a,b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. Kabul edelim ki $(a)(b) \subseteq P$ olsun. Bu durumda; $aRb \subseteq (a)(b) \subseteq P$ olduğundan $aRb \subseteq P$ olur. Hipotezden, $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) $\Rightarrow$(4): $\forall a,b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. U, V R halkasının iki sol ideali ve $UV \subseteq P$ olsun. Bu durumda $U \not\subset P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u \in U$ ve $u \notin P$ olacak biçimde bir u elemanı vardır. Keyfi bir $v \in V$ alalım. $(u)(v) \subseteq UV + UVR \subseteq P$ dir. Bu durumda hipotezden $u \in P$ veya $v \in P$ olur.

(3) $\Rightarrow$(5): Benzer şekilde gösterilir.

(4) $\Rightarrow$(1) : Tanımdan (4) $\Rightarrow$(1) ve (5) $\Rightarrow$(1) olduğu açıktır.

Tanım 1.6: (0) ideali asal ideal olan halkaya asal halka denir.

Önerme 1.7: R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) R asal halkadır.

(2) Eğer $a,b \in R$ için $aRb = (0)$ ise bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

(3) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

(4) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 1.8: R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. $I^n = (0)$ olacak biçimde $\exists n \in Z^+$ varsa I ya R nin nilpotent ideali denir.

Tanım 1.9: R bir halka, A ve Q, R halkasının iki ideali olsun. $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ise Q idealine R halkasının yarı-asal ideali denir.

Tanım 1.10: Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya yarı-asal halka denir.

Tanım 1.11: R bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $na = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise böyle n lerin en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir ve $charR = n$ ile gösterilir.

Tanım 1.12: R bir halka ve $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. Her $x \in R$ için $mx = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa R halkasına m- torsion free halka denir.

Tanım 1.13: X, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $C_R(X) = \{a \in R \mid xa = ax, \forall x \in X\}$ kümesine X in R deki merkezleştiricisi denir.

Tanım 1.14: R bir halka olsun. $Z = \{z \in R \mid xz = zx \ , \forall x \in R\}$ kümesine R halkasının merkezi denir. Z, R nin bir alt halkasıdır.

Önerme 1.15: R asal halka olsun. Eğer $ab, b \in Z$ ise bu durumda $b = 0$ veya $a \in Z$ dir.

İspat: $ab, b \in Z$ olsun. $\forall x \in R$ için $xab = abx = axb$ olur. Buradan

$$(ax - xa)b = 0 \ , \ \forall x \in R \tag{1.1}$$

elde edilir. (1.1) de x yerine xy, $y \in R$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (axy - xya)b = axyb - xyab \\ &= axyb - xayb + xayb - xyab \\ &= (ax - xa)yb + x(ay - ya)b \end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin ikinci terimi (1.1) den dolayı sıfırdır. Böylece

$$(ax - xa)Rb = (0) \ , \ \forall x \in R \tag{1.2}$$

olduğu görülür. R asal halka olduğu için (1.2) den;

$$b = 0 \text{ veya } a \in Z$$

bulunur.

Önerme 1.16: R bir yarı-asal halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $a(ax - xa) = 0$ oluyorsa $a \in Z$ dir.

İspat: $x, r \in R$ için hipotezden;

$$a(a(xr) - (xr)a) = 0 \tag{1.3}$$

olur. $a(xr) - (xr)a = (ax - xa)r + x(ar - ra)$ olduğu (1.3) de yerine yazılır ve yine (1.3) eşitliği kullanılırsa;

$$ax(ar - ra) = 0\ , \ \forall x, r \in R$$

elde edilir. Bu ise

$$(ar - ra)R(ar - ra) = (0)\ , \ \forall r \in R$$

olduğunu verir. R yarı-asal halka olduğundan $\forall r \in R$ için $ar = ra$ elde edilir. Böylece $a \in Z$ bulunur.

Önerme 1.17: Bir asal halkanın merkezinde sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur.

Tanım 1.18: R bir halka olsun. $0 \neq a \in R$ elemanı için $ab = 0$(veya $ba = 0$) olacak şekilde en az bir $0 \neq b \in R$ bulunabilirse a ya, halkanın bir sol sıfır böleni (veya sağ sıfır böleni) denir.

Tanım 1.19: $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesi komütatör çarpımı olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir.

Özellikler: $\forall x, y, z \in R$ için

i. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$

ii. $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$

iii. $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca,

iv. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

eşitliğine Jacobi özdeşliği denir.

Tanım 1.20: R bir halka ve A, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. $\forall a, b \in A$ için $ab - ba \in A$ ($aob = ab + ba \in A$) oluyorsa A ya R nin Lie (Jordan) alt halkası denir.

Tanım 1.21: A, R halkasının bir Lie (Jordan) alt halkası ve $U \subset A$ toplamsal alt grubu olsun. $\forall u \in U$ ve $\forall a \in A$ için $ua - au \in U$ $(ua + au \in U)$ oluyorsa, U ya A nın Lie (Jordan) ideali denir.

Tanım 1.22: R bir halka ve $s, t : R \to R$ iki fonksiyon olsun. $x, y \in R$ için $[x, y]_{s,t} = xs(y) - t(y)x$ ifadesine (s, t)- komütatör denir.

Özellikler: $\forall x, y, z \in R$ için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

i. $[xy, z]_{s,t} = x[y, z]_{s,t} + [x, t(z)]y$

ii. $[xy, z]_{s,t} = x[y, s(z)] + [x, z]_{s,t}\, y$

iii. $[x, yz]_{s,t} = t(y)[x, z]_{s,t} + [x, y]_{s,t}\, s(z)$

iv. $[[x, y]_{s,t}, z]_{s,t} = [x, [y, z]]_{s,t} + [[x, z]_{s,t}, y]_{s,t}$ (Jacobi özdeşliği)

Tanım 1.23: R bir halka, U, R halkasının toplamsal alt grubu ve $s, t : R \to R$ iki fonksiyon olsun.

i. $[U, R]_{s,t} \subset U$ oluyorsa U ya R halkasının bir (s, t)- sağ Lie ideali

ii. $[R, U]_{s,t} \subset U$ oluyorsa U ya R halkasının bir (s, t)- sol Lie ideali

iii. U, R halkasının hem (s, t)- sol ve hem de (s, t)- sağ Lie ideali ise U ya R nin (s, t)- Lie ideali denir.

Tanım 1.24: $C_{s,t} = \{c \in R \mid cs(x) = t(x)c, \ \forall x \in R\}$ kümesine R halkasının (s, t)- merkezi denir.

Tanım 1.25: R bir halka, $d : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

koşulunu sağlıyor ise d ye R halkasında bir türevdir, denir.

Tanım 1.26: R ve S iki halka ve $q : R \to S$ toplamsal dönüşüm olsun. Her $a, b \in R$ için

$$q(ab) = q(a)q(b)$$

koşulunu sağlıyorsa q ya bir homomorfizm, denir.

Tanım 1.27: R ve S iki halka ve $q : R \to S$ toplamsal dönüşüm olsun. Her $a, b \in R$ için

$$q(ab) = q(b)q(a)$$

koşulunu sağlıyorsa q ya bir anti-homomorfizm, denir.

Tanım 1.28: R bir halka ve $d : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için;

(1) $g : R \to R$ bir fonksiyon olmak üzere

$$d(xy) = d(x)y + g(x)d(y) = d(x)g(y) + xd(y) \text{ ve } gd = dg$$

ise d ye g ile belirlenen bir yarı-türev denir.

(2) $0 \neq a : R \to R$ bir endomorfizma olmak üzere

$$d(xy) = d(x)a(y) + xd(y)$$

ise d ye bir α- türev denir.

(3) $s, t : R \to R$ R iki fonksiyon olmak üzere

$$d(xy) = d(x)s(y) + t(x)d(y)$$

ise d ye bir (s, t)- türev denir.

Tanım 1.29: R bir halka, $f : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y)$$

koşulunu sağlayan bir $d : R \to R$ türevi varsa f e R halkasında d ile belirlenmiş genelleştirilmiş türev, denir.

Önerme 1.30 (Brauer trick): Bir G toplamsal grubu iki öz alt grubunun bileşimi olarak yazılamaz.

İspat: A ve B, G nin iki öz alt grubu olmak üzere $G = A \cup B$ olsun. Kabul edelim ki $G \neq A$ olsun. Bu durumda $G = B$ olduğunu görmeliyiz. $G \neq A$ olduğundan $x \in G$ ve $x \notin A$ olacak biçimde en az bir x elemanı vardır. Öte yandan $G = A \cup B$ olduğundan $x \in B$ dir. İddiamız $G \subset B$ dir. Eğer $G \not\subset B$

olsaydı bu durumda $y \in G$ ve $y \notin B$ olacak biçimde en az bir y elemanı var olurdu. $G = A \cup B$ olduğundan $y \in A$ olur.

$x + y \in B$ dir. Gerçekten; $x + y \notin B$ olsaydı $G = A \cup B$ olduğundan $x + y \in A$ olurdu. $y \in A$ ve A toplamsal alt grup olduğundan $x \in A$ olurdu ki bu $x \notin A$ alınışıyla çelişir. O halde $x + y \in B$ dir. $x \in B$ ve B toplamsal olduğundan $y \in B$ olur ki bu da $y \notin B$ oluşuyla çelişir. O halde $G \not\subset B$ olamaz. Yani $G \subset B$ dir. Böylece $G = B$ olur.

Tanım 1.31: R bir asal halka olsun. U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $f : U \to R$ bir sağ R- modül homomorfizması olmak üzere; M ile bütün (U, f) şeklindeki ikililerin kümesini gösterelim. M üzerinde

“ (U,f) ~ (V,g) $\Leftrightarrow$ R nin sıfırdan farklı bir $W \subseteq U \cap V$ ideali üzerinde $f = g$” denklik bağıntısını tanımlayalım. Bu bağıntı ile belirlenen denklik sınıflarının kümesi Q olsun. Q kümesi

$$\overline{(U, f)} + \overline{(V, g)} = \overline{(U \cap V, f + g)} \quad , \quad \overline{(\mathrm{U,f})}\,\overline{(V, g)} = \overline{(VU, fg)}$$

ikili işlemleri ile R yi kapsayan bir asal halkadır.

(1) Q nun merkezi C ile gösterilir ve C ye R nin genişletilmiş merkezi (extended centroid) denir. C bir cisimdir.

(2) $S = RC$ ye R nin Q daki merkezi kapanışı (central closure) denir. S , R yi kapsayan bir asal halkadır.

II. BÖLÜM

Bu bölümde konuyla ilgili bazı makaleler ispatsız olarak verilecektir.

2.1. Türevli Halkalar

Posner, E. C, 1957

Tanım 2.1.1: R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $xay = 0$ iken $x = 0$ veya $y = 0$ oluyorsa R halkasına asal halka, denir.

Lemma 2.1.2: R bir asal halka, $d : R \to R$ bir türevi ve $a \in R$ olsun. Eğer her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ (veya $d(x)a = 0$) oluyorsa bu durumda $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 2.1.3: R bir asal halka olsun. Eğer $p, q, r \in R$ elemanları her $a \in R$ için $paqar = 0$ olacak biçimde ise bu durumda p, q, r elemanlarından en az biri sıfırdır.

Teorem 2.1.4: R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, d_1, d_2 R halkasının iki türevi olsun. Eğer $d_1 d_2$ bir türev ise bu durumda $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Lemma 2.1.5: R bir asal halka, $d : R \to R$ bir türev olsun. Eğer her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ oluyorsa bu durumda $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 2.1.6: A bir Lie halka , I, A Lie halkasının bir ideali olsun. Eğer $d \in A$ ve her $x \in I$ için $dx.x = 0$ oluyorsa bu durumda her $a \in R$ ve her $x \in I$ için $(da.x)x = 0$ olur. (Her $x \in I$ için $dx.x = 0$ koşulunu sağlayan $d \in R$ elemanlarının kümesi A nın bir idealidir.)

Teorem 2.1.7: R bir asal halka, $d : R \to R$ bir türev olsun. Eğer her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a \in Z$ oluyorsa bu durumda $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Herstein, I.N., 1978

Teorem 2.1.8: R bir halka, $d : R \to R$ bir türev ve $d^3 \neq 0$ olsun. O zaman her $r \in R$ için $d(r)$ elemanları tarafından üretilen A alt halkası R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 2.1.9: R bir asal halka, $d : R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Her $x, y \in R$ için $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ ise bu durumda,

i. Eğer R karakteristiği ikiden farklı halka ise bu durumda R halkası komütatif tamlık bölgesidir.

ii. Eğer R karakteristiği iki olan halka ise bu durumda R halkası komütatif veya R halkası merkezi üzerinde 4-boyutlu basit cebirdir.

Herstein, I.N., 1979

Teorem 2.1.10: R bir asal halka, $d : R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. $a \in R$ ve her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ olacak biçimde ise bu durumda,

i. Eğer R karakteristiği ikiden farklı halka ise bu durumda $a \in Z$ dir.
(Z, R halkasının merkezidir.)

ii. Eğer R karakteristiği iki olan halka ise bu durumda $a^2 \in Z$ dir. Üstelik, $a \notin Z$ ise $l \in C$ (R halkasının genişletilmiş merkezi) olmak üzere her $x \in R$ için $d(x) = (la)x - x(la)$ dır.

Lee, P.H. ve Lee, T.K., 1981

Teorem 2.1.11: R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev ve $a \in R$ olsun. Eğer $[a, d(R)] \subseteq Z$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

Teorem 2.1.12: R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev olsun. Eğer $[d(R), d(R)] \subset Z$ ise bu durumda R halkası komütatiftir.

Teorem 2.1.13: R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0 \neq d : R \to R$ bir türev olsun. Eğer $d^2(R) \subseteq Z$ ise bu durumda R halkası komütatiftir.

Teorem 2.1.14: R karakteristiği ikiden farklı asal halka, d_1 ve d_2, R halkasının sıfırdan farklı iki türevi olsun. Eğer $d_1 d_2(R) \subseteq Z$ ise bu durumda R halkası komütatiftir.

Teorem 2.1.15: R karakteristiği ikiden farklı asal halka ve $0 \neq d : R \to R$ bir türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise bu durumda R halkası komütatiftir.

Bresar, M., 1989

Tanım 2.1.16: A cebir olsun. $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

özelliği sağlanıyorsa A ya normlu cebir, denir.

Tanım 2.1.17: A kompleks normlu cebir olsun.

$$\|M_{a,b}\| \geq c\|a\|\|b\|, \ \forall a, b \in A$$

olacak biçimde c > 0 sabiti varsa A ya ultra asal denir.

Tanım 2.1.18: A kompleks normlu cebir olsun.

$$\|M_{a,a}\| \geq c\|a\|^2, \ \forall a \in A$$

olacak biçimde c > 0 sabiti varsa A ya ultra yarı-asal denir.

Tanım 2.1.19: A bir halka, $d : A \to A$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$$d(xy) = d(x)y + xh(y)$$

koşulunu sağlayan bir $h : A \to A$ türevi varsa d ya A halkasında h ile belirlenmiş genelleştirilmiş türev, denir.

A herhangi halka , d_1, d_2 A da türevler, $\Delta(A)$, A nın genelleştirilmiş türevlerinin kümesi, D(A), A daki bütün türevlerin kümesi olsun. A normlu cebir iken $\Delta_b(A) = \{d \in \Delta(A) \mid d : A \to A$ sınırlı lineer operatör $\}$, $D_b(A)$, bütün sınırlı türevlerin kümesidir. $dist(d_1 d_2, \Delta_b(A)) = \inf\{\ \|d_1 d_2 - d\|, d \in \Delta_b(A)\ \}$ olarak alınacaktır.

Teorem 2.1.20: A ultra asal normlu cebir, $d_1, d_2 \in D_b(A)$ ve $a,b \in A$ için $M_{a,b} : A \to A,\ x \to axb$ şeklinde tanımlı dönüşüm olsun. Eğer her $a,b \in A$ için $\|M_{a,b}\| \geq c\|a\|\|b\|$, olacak biçimde c > 0 varsa bu durumda

$dist(d_1 d_2, \Delta_b(A)) \geq \dfrac{c^2}{6}\|d_1\|\|d_2\|$ dir.

Teorem 2.1.21: A ultra yarı-asal normlu cebir ve $d \in D_b(A)$ olsun. Eğer $a \in A$ için $\|M_{a,a}\| \geq c\|a\|^2$ olacak biçimde c > 0 varsa bu durumda

$dist(d^2, \Delta_b(A)) \geq \dfrac{c}{2}\|d\|^2$ dir.

Teorem 2.1.22: A, Neumann cebiri olsun. Eğer $d_1, d_2 \in D(A)$ ise

$dist(d_1, d_2, \Delta(A)) \leq \dfrac{1}{2}\|d_1\|\|d_2\|$ dir. Her $d \in D(A)$ için $dist(d^2, \Delta_b(A)) \leq \dfrac{1}{2}\|d\|^2$ dir.

Hvala, B., 1998

Bu makalede R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $Q_r(R)$ ve $Q_s(R)$ sırasıyla sağ ve simetrik Martindale kesirler halkası (quotient halkası), C genişletilmiş merkezi, $R_C = RC$ merkezi kapanışı olarak alınacaktır.

Önerme 2.1.23: $f_j : R \to A$ ve $h_i : R \to R_C$ herhangi dönüşümler ve $a_j, c_i \in R$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z)xa_j + \sum_{i=1}^{k} c_i z h_i(x) = 0,\ \forall x, z \in R$$

olsun. Eğer $\{a_1, a_2, .., a_n\}$ ve $\{c_1, c_2, .., c_k\}$ kümeleri C-bağımsız ise

$$f_j(z) = -\sum_{i=1}^{k} c_i z q_{ij},\ h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x a_j,\ \forall x, z \in R,\ i = 1,2,...,k,\ j = 1,2,...,n$$

olacak biçimde $q_{ij} \in Q_r(R_C)$, $i = 1,2,...,k$, $j = 1,2,...,n$ vardır.

Lemma 2.1.24: $f : R \to R_C$ toplamsal dönüşüm ve her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Lemma 2.1.25: R komütatif olmayan halka ve $F: R \to C$ genelleştirilmiş türev olsun. Bu durumda $F = 0$ dır.

Lemma 2.1.26: $a, b \in A$ ve $f: R \to A$, $f(x) = axb$ şeklinde bir dönüşüm olsun. Eğer f genelleştirilmiş türev ise bu durumda $a \in C$ veya $b \in C$ dır.

Argaç, N., Albaş, E., 2004

Bu makale boyunca R asal halka, $Q_r(R)$ sağ Martindale kesirler halkası (quotient halkası), C genişletilmiş merkez, $R_C = RC$ merkezi kapanış, Z, R halkasının merkezi ve α türev olmak üzere (d, a) R de genelleştirilmiş türev olarak alınacaktır.

Teorem 2.1.27: R komütatif olmayan halka olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = 0$ ise bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 2.1.28: R komütatif olmayan halka olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = \pm[x, y]$ ise bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Sonuç 2.1.29: R komütatif olmayan halka olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $d(xy) = \pm xy$ ise bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 2.1.30: Eğer (d, a) genelleştirilmiş türev ve d, R de homomorfizma veya anti-homomorfizma ise bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 2.1.31: (d, a), (g, b) iki genelleştirilmiş türev ve $a \in R$ olsun. Bu durumda $ad(x) = g(x)a$, $\forall x \in R$ ise aşağıdakilerden herhangi biri sağlanır:

i. $a \in C$ dir.

ii. Her $x \in R$ için $a(x) = [x, p]$, $b(x) = [q, x]$, $qa \in C$, $p = la$, $l \in C$ olacak biçimde $p, q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Sonuç 2.1.32: $a \in R$ olsun. Eğer her $x \in R$ için $[a, d(x)] = 0$ ise bu durumda $a \in C$ veya $a(x) = [x, p]$, $qa \in C$, $p = la$, $l \in C$ olacak biçimde $p \in Q_r(R_C)$ vardır.

Lemma 2.1.33: R karakteristiği ikiden farklı komütatif olmayan halka ve (d, a) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $[x, d(x)] = 0$ ise bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = lx$ olacak biçimde $l \in C$ vardır.

Teorem 2.1.34: R komütatif olmayan halka ve (d, a) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 2.1.35: R karakteristiği ikiden farklı komütatif olmayan halka ve (d, a) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $xd(x) + d(x)x \in Z$ ise bu durumda her $x \in R$ için $[x, d(x)] = 0$ dir.

Sonuç 2.1.36: R karakteristiği ikiden farklı komütatif olmayan halka ve (d, a) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $xd(x) + d(x)x \in Z$ ise bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = lx$ olacak biçimde $l \in C$ vardır.

Teorem 2.1.37: R komütatif olmayan halka, (d, a) genelleştirilmiş türev, $a(Z) \neq 0$ ve $a \in R$ olsun. Eğer her $x \in R$ için $[a, d(x)] \in Z$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

Sonuç 2.1.38: R komütatif olmayan halka, (d, a) genelleştirilmiş türev ve $a(Z) \neq 0$ olsun. Eğer $[d(R), d(R)] \subseteq Z$ ise bu durumda $d = 0$ dır.

Teorem 2.1.39: R karakteristiği ikiden farklı komütatif olmayan halka ve (d, a) sıfırdan farklı genelleştirilmiş türev olsun. Eğer $d^2(R) \subseteq Z$ ise aşağıdaki durumlardan biri sağlanır:

i. Her $x \in R$ için $d(x) = xa$ ve $a^2 = 0$ olacak biçimde $a \in Q_r(R_C)$ vardır.

ii. Her $x \in R$ için $d(x) = ax$ ve $a^2 = 0$ olacak biçimde $a \in Q_r(R_C)$ vardır.

iii. $d(x) = lx + a(x)$ olacak biçimde $l \in C$ vardır.

Argaç, N., 2006

Teorem 2.1.40: R yarı-asal halka, d ve g, R de en az biri sıfırdan farklı türevler olsun. Eğer her $x \in R$ için $d(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı bir merkezi ideal kapsar.

Sonuç 2.1.41: R asal, d ve g, R de en az biri sıfırdan farklı türevler olsun. Eğer her $x \in R$ için $d(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R komütatiftir.

Sonuç 2.1.42: R asal halka ve d, R de türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $[x, d(x)] = 0$ ise bu durumda R komütatiftir.

Teorem 2.1.43: R yarı-asal halka, I, R nin sıfırdan farklı ideali ve d, R de bir türev olsun. Eğer d aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda d, I üzerinde komütingdir.

Ayrıca, $d(I) \neq (0)$ ise R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x, y \in I$ için $d([x, y]) = [x, y]$.

ii. Her $x, y \in I$ için $d([x, y]) = -[x, y]$.

iii. Her $x, y \in I$ için $d([x, y]) = [x, y]$ veya $d([x, y]) = -[x, y]$ dir.

Sonuç 2.1.44: R asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa bu durumda d, I üzerinde komütingdir.

veya R komütatiftir.

i. Her $x, y \in I$ için $d(xy) = xy$.

ii. Her $x, y \in I$ için $d(xy) = yx$.

iii. Her $x, y \in I$ için $d(xy) = xy$ veya $d(xy) = yx$ dir.

Teorem 2.1.45: R yarı-asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa bu durumda d, I üzerinde komütingdir.

Üstelik, eğer $d(I) \neq (0)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x, y \in I$ için $d(xoy) = xoy$.

ii. Her $x, y \in I$ için $d(xoy) = -xoy$.

iii. Her $x, y \in I$ için $d(xoy) = xoy$ veya $d(xoy) = -(xoy)$ dir.

Sonuç 2.1.46: R asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer aşağıdakilerden biri sağlanırsa bu durumda R komütatiftir.

i. Her $x \in I$ için $d(x^2) = x^2$.

ii. Her $x \in I$ için $d(x^2) = -x^2$.

Teorem 2.1.47: R, 2- torsion free yarı-asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Aşağıdaki durumlardan biri varsa bu durumda d, I üzerinde komütingdir.

Üstelik, eğer $d(I) \neq (0)$ ise R sıfırdan farklı merkezi ideal kapsar.

i. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([x, y])$.

ii. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([y, x])$.

iii. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([x, y])$ veya $[d(x), d(y)] = d([y, x])$.

Sonuç 2.1.48: R karakteristiği ikiden farklı asal halka, d sıfırdan farklı R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer aşağıdaki durumlardan biri sağlanırsa bu durumda R komütatiftir.

i. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([x, y])$.

ii. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([y, x])$.

iii. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([x, y])$ veya $[d(x), d(y)] = d([y, x])$ dir.

Teorem 2.1.49: R asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $d([x, y]) \in Z$ ise bu durumda $d^2(I) \subset Z$ veya R komütatiftir. Üstelik, R karakteristiği ikiden farklı asal halka ve d sıfırdan farklı türev ise R komütatiftir.

Sonuç 2.1.50: R asal halka, I, R nin sıfırdan farklı ideali ve d, R de bir türev olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $d(xy) \in Z$ ise bu durumda $d^2(I) \subset Z$ veya R komütatiftir. Üstelik, R karakteristiği ikiden farklı asal halka ve d sıfırdan farklı türev ise R komütatiftir.

Gölbaşı, Ö., (On commutativity of semiprime rings with generalized derivations)

Teorem 2.1.51: R yarı-asal halka, (f,d), (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x,y \in R$ için $f(x)y = xg(y)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

Sonuç 2.1.52: R asal halka, (f,d), (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x,y \in R$ için $f(x)y = xg(y)$ ise bu durumda R komütatiftir.

Teorem 2.1.53: R yarı-asal halka, (f,d), (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $f(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

Sonuç 2.1.54: R asal halka, (f,d), (g,h) R de iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $f(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R komütatiftir.

Teorem 2.1.55: R yarı-asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x,y \in R$ için $f([x,y]) = [x,y]$.

ii. Her $x,y \in R$ için $f([x,y]) = -[x,y]$.

iii. Her $x,y \in R$ için $f([x,y]) = [x,y]$ veya $f([x,y]) = -[x,y]$ dir.

Sonuç 2.1.56: R yarı-asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x,y \in R$ için $f(xy) = xy$.

ii. Her $x,y \in R$ için $f(xy) = yx$.

iii. Her $x,y \in R$ için $f(xy) = xy$ veya $f(xy) = yx$ dir.

Sonuç 2.1.57: R asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa bu durumda R komütatiftir.

i. Her $x,y \in R$ için $f(xy) = xy$.

ii. Her $x,y \in R$ için $f(xy) = yx$.

iii. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = xy$ veya $f(xy) = yx$ dir.

Teorem 2.1.58: R yarı-asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x, y \in R$ için $f(xoy) = xoy$.

ii. Her $x, y \in R$ için $f(xoy) = -xoy$.

iii. Her $x, y \in R$ için $f(xoy) = xoy$ veya $f(xoy) = -xoy$ dir.

Sonuç 2.1.59: R yarı-asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa R komütatiftir veya R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x \in R$ için $f(x^2) = x^2$.

ii. Her $x \in R$ için $f(x^2) = -x^2$.

Teorem 2.1.60: R yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d), (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev ve $h(U) \neq (0)$ olsun. Eğer her $x, y \in U$ için $f(x)y = xg(y)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

Sonuç 2.1.61: R asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d), (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev ve $h(U) \neq (0)$ olsun. Eğer her $x, y \in U$ için $f(x)y = xg(y)$ ise bu durumda R komütatiftir.

Teorem 2.1.62: R yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d), (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev ve $h(U) \neq (0)$ olsun. Eğer her $x, y \in U$ için $f(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

Sonuç 2.1.63: R asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d), (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev ve $h(U) \neq (0)$ olsun. Eğer her $x, y \in U$ için $f(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R komütatiftir.

Teorem 2.1.64: R yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d) R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x, y \in U$ için $f([x,y]) = [x,y]$.

ii. Her $x, y \in U$ için $f([x,y]) = -[x,y]$.

iii. Her $x, y \in U$ için $f([x,y]) = [x,y]$ veya $f([x,y]) = -[x,y]$ dir.

Sonuç 2.1.65: R yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x, y \in U$ için $f(xy) = xy$.

ii. Her $x, y \in U$ için $f(xy) = yx$.

iii. $x, y \in U$ için $f(xy) = xy$ veya $f(xy) = yx$ dir.

Sonuç 2.1.66: R asal halka, U sıfırdan farklı R nin ideali, (f,d) R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa bu durumda R komütatiftir.

i. Her $x, y \in U$ için $f(xy) = xy$.

ii. Her $x, y \in U$ için $f(xy) = yx$.

iii. $x, y \in U$ için $f(xy) = xy$ veya $f(xy) = yx$ dir.

Teorem 2.1.67: R yarı-asal halka, U sıfırdan farklı R nin ideali ve (f,d) R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x, y \in U$ için $f(xoy) = xoy$.

ii. Her $x, y \in U$ için $f(xoy) = -xoy$.

iii. $x, y \in U$ için $f(xoy) = xoy$ veya $f(xoy) = -xoy$ dir.

Sonuç 2.1.68: R yarı-asal halka, U sıfırdan farklı R nin ideali ve (f,d) R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki özelliklerden birini sağlarsa R komütatiftir veya R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x \in U$ için $f(x^2) = x^2$.

ii. Her $x \in U$ için $f(x^2) = -x^2$.

2.2. Türev ve Lie İdealler

Herstein, I.N., 1970

Lemma 2.2.1: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka ve T, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $[T,T]\subset Z$ ise bu durumda $T\subseteq Z$ olur.

Lemma 2.2.2: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. $t\in R$ elemanı $[U,U]$ nun her elemanı ile yer değiştirirse bu durumda t, U Lie idealinin her elemanı ile yer değiştirir.

Lemma 2.2.3: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Buna göre $t\in R$ elemanı her $u\in U$ için, $tu-ut$ elemanlarıyla yer değiştirirse, t, U Lie idealinin tüm elemanlarıyla yer değiştirir.

Bergen, J., Herstein, I.N. ve Kerr, J.W., 1981

Bu makale boyunca R, karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve Z, R halkasının merkezi olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.4: Eğer U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ise bu durumda R halkasının $[M,R]\subset U$ fakat $[M,R]\not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

Lemma 2.2.5: Eğer U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ise bu durumda $C_R(U)=Z$ dir.

Lemma 2.2.6: $C_R([U,U])=C_R(U)$ dur.

Lemma 2.2.7: U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ve $a,b\in R$ olsun. Eğer $aUb=0$ ise bu durumda $a=0$ veya $b=0$ dır.

Lemma 2.2.8: U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d(U)=0$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

Lemma 2.2.9: U, R nin bir Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d(U)\subset Z$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

Lemma 2.2.10: U, Z tarafından kapsanmayan R nin bir Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $t \in R$ için $td(U) = 0$ (veya $d(U)t = 0$) ise bu durumda $t = 0$ dır.

Teorem 2.2.11: U, karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Sonuç 2.2.12: R, 2- torsion free olan bir yarı-asal halka ve U, R nin bir Lie ideali olsun. Eğer $a \in R$ için $[a,[a,U]] = 0$ ise bu durumda $[a,U] = 0$ dır.

Teorem 2.2.13: U, Z tarafından kapsanmayan R asal halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu durumda $C_R(d(U)) = Z$ dir.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında $d : R \to R$ sıfırdan farklı türev, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali, $\overline{d(U)}$, $d(U)$ tarafından üretilen alt halka, $V = [U,U]$ ve $W = [V,V]$ olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.14: Eğer $d^3 \neq 0$ ve $\overline{d(V)}$, R halkasının sıfırdan farklı sol l ve sıfırdan farklı sağ d idealini kapsarsa bu durumda $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Lemma 2.2.15: I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı sağ ve sıfırdan farklı sol idealini kapsamıyor ise bu durumda, $[c,I] \subset \overline{d(U)}$ olduğunda $c \in Z$ dir.

Lemma 2.2.16: Eğer $d^2(U)^2 = 0$ ise bu durumda $d^3(W) = 0$ dır.

Lemma 2.2.17: Eğer $d^3(U) = 0$ ise bu durumda $d^3 = 0$ dır.

Teorem 2.2.18: R karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, $d : R \to R$ sıfırdan farklı türev ve $d^3 \neq 0$, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali olsun. Bu durumda $\overline{d(U)}$, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 2.2.19: R karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ve d , d, R halkasının iki türevi olsun. Eğer $dd(U) = 0$ ise bu durumda $d = 0$ veya $d = 0$ dır.

Awtar, R., 1973

Lemma 2.2.20: R, karakterisitiği ikiden farklı olan bir asal halka, $d : R \to R$ sıfırdan farklı türev ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ve $u^2 \in U$ ise bu durumda her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ dır.

Lemma 2.2.21: R asal halka, U, R halkasının Lie ideali ve $d : R \to R$ sıfırdan farklı türev olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda her $u \in U$ ve $r \in R$ için $[[d(r), u], u] \in Z$ olur. Üstelik, her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ ise bu durumda her $r \in R$ için $[[d(r), u], u] = 0$ olur.

Lemma 2.2.22: R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, $d : R \to R$ sıfırdan farklı türev ve U, R halkasının bir Jordan ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $ud(u) = d(u)u = 0$ ise bu durumda $U = (0)$ dır.

Teorem 2.2.23: R karakteristiği iki ve üçden farklı olan asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R nin Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.24: R karakteristiği üç olan asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R nin Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ve $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.25: R karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R nin Jordan ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.26: R karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi, U, R halkasının bir alt halkası ve Lie (Jordan) ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lee, P.H. ve Lee, T.K., 1983

Bu makale boyunca R, karakteristiği ikiden farklı olan asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.27: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi, $d(Z)\neq 0$ ve $a\in R$ olsun. Eğer $[a,d(U)]\subseteq Z$ ise bu durumda $a\in Z$ veya $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.28: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d^2(U)\subseteq Z$ ise bu durumda $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.29: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a\in R$ olsun. Eğer $[a,d(U)]\subseteq Z$ ise bu durumda $a\in Z$ veya $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.30: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $[d(U),d(U)]\subseteq Z$ ise bu durumda $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.31: d , d, R halkasının sıfırdan farklı türevleri olsun. Eğer $dd(U)\subseteq Z$ ise bu durumda $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.32: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer her $u\in U$ için $[u,d(u)]\in Z$ ise bu durumda $U\subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.33: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a\in R$ olsun. Eğer $ad(U)\subseteq Z$ ise bu durumda $a=0$ veya $U\subseteq Z$ dir.

Awtar, R., 1984

Teorem 2.2.34: R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi, U, R halkasının bir Lie ideali ve $a\in R$ için $d(a)=0$ olsun. Eğer $d^2(U)\subseteq Z$ ve $[a,d(U)]\subset Z$ ise bu durumda $a\in Z$ veya $U\subset Z$ dir.

Teorem 2.2.35: R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Eğer her $u\in U$ için $[a,[a,u]]\in Z$ ise bu durumda $[a,U]=0$ dır. Üstelik, $U\not\subset Z$ ise bu durumda $a\in Z$ dir.

Teorem 2.2.36: R, 2- torsion free yarı-asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Eğer her $u\in U$ için $[a,[a,u]]\in Z$ ise bu durumda $[a,U]=0$ dir.

Teorem 2.2.37: R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $a\in R$ elemanı, her $u\in U$ için $[a,d(u)]\in Z$ ise bu durumda $d=0$ veya $a\in Z$ olur.

Teorem 2.2.38: R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.39: R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ve d , d, R halkasının türevleri olsun. Eğer $dd(U) \subseteq Z$ ise bu durumda $d = 0$ veya $d = 0$ dır.

Teorem 2.2.40: R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise $U \subset Z$ dir.

Carini, L., 1985

Bu makalede R, 2- torsion free yarı-asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının $d^2(U) = 0$ ve $d(U) \subset U$ olan bir türevi olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.41: $d([U, R]) = 0$ dır.

Lemma 2.2.42: $d(R)[U, R] = 0$ dır.

Teorem 2.2.43: R, 2- torsion free yarı-asal halka, d, R halkasının bir türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise bu durumda $d(U) \subset Z$ dir.

Sonuç 2.2.44: R, 2- torsion free yarı-asal halka, d, R halkasının bir iç türevi ve I, R halkasının ideali olsun. Eğer $d^2(I) = 0$ ise bu durumda $d(I) = 0$ dır.

Sonuç 2.2.45: R, 2- torsion free yarı-asal halka, d, R halkasının bir iç türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise bu durumda $d(U) = 0$ dır.

Gölbaşı, Ö., Kaya, K., 2006

Bu makalede R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, d, sıfırdan farklı olmak üzere (f, d), R de iki yanlı genelleştirilmiş türev, U, R halkasının sıfırdan farklı Lie ideali olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.46: Eğer $f(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.47: Eğer $f(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.48: $a \in R$ için

i. Eğer $af(U) = 0$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

ii. Eğer $f(U)a = 0$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.49: $a \in R$ ve $d(Z) \neq 0$ olsun. Eğer $[a, f(U)] = 0$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.50: Eğer $a \in R$ için $[a, f(U)] = 0$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $d(a) = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.51: Eğer $f^2(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.52: Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $f(uv) = f(u)f(v)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.53: Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $f(uv) = f(v)f(u)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.54: Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $f(uv) = f(vu)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Gölbaşı, Ö., (Lie ideals and generalized derivations of prime rings)

Bu makalede R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, d sıfırdan farklı olmak üzere (f, d), R de iki yanlı genelleştirilmiş türev ve U, R halkasının sıfırdan farklı Lie ideali olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.55: Eğer $a \in R$ için $[a, f(U)] \subseteq Z$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $d(a) = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.56: Eğer $d(U) \subset U$ ve her $u \in U$ için $[u, f(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.57: Eğer $f(U) \subset U$ ve $f^2(U) \subseteq Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.58: Eğer her $u, v \in U$ için $f(uv) = f(u)f(v)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.59: $a \in R$ için

i. Eğer $d(Z) \neq 0$ ve $af(U) \subseteq Z$ ise bu durumda $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

ii. Eğer $d(Z) = 0$ ve $af(U) \subseteq Z$ ise bu durumda $d(a) = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

2.3. Türev ve (s,t)- Lie İdealler

Kaya, K., 1991

Bu makalede R karakteristiği ikiden farklı asal halka ve $s,t : R \to R$ iki otomorfizma olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.1: $d_1 : R \to R$ bir (s,t)- türev, a, R nin bir halka otomorfizmi olmak üzere $d_2 : R \to R$ bir (a,a)- türev, $d_2 a = a d_2$, $d_1 a = a d_1$ ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $d_2(U) \subset U$ ve $d_1 d_2(U) = 0$ ise bu durumda $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dir.

Sonuç 2.3.2: U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $a,b \in U$ olsun. Eğer her $x \in U$ için $[a,[b,x]]_{s,t} = 0$ ise bu durumda $a \in C_{s,t}$ veya $b \in Z$ dir.

Lemma 2.3.3: $d : R \to R$ sıfırdan farklı bir (s,t)- türev ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $a \in U$ için $[d(U),a]_{s,t} \subset C_{s,t}$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

Lemma 2.3.4: $0 \neq d : R \to R$ bir (s,t)- türev ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $d(U) \subset U$ ve $[d(U),d(U)]_{s,t} \subset C_{s,t}$ ise bu durumda R halkası komütatiftir.

Teorem 2.3.5: $0 \neq d_1 : R \to R$ bir (s,t)- türev, $0 \neq d_2 : R \to R$ bir türev, U, R nin sıfırdan farklı ideali ve $d_2(U) \subset U$ olsun. Eğer $d_1 d_2(U) \subset C_{s,t}$ ise bu durumda R komütatiftir.

Teorem 2.3.6: U, R nin bir (s,t)- sağ Lie ideali olsun. Eğer $[U,U]_{s,t} \subset C_{s,t}$ ise bu durumda $U \subset Z$ veya $U \subset C_{s,t}$ dir.

Sonuç 2.3.7: M sıfırdan farklı R halkasının bir ideali olsun. Eğer $[M,R]_{s,t} \subset C_{s,t}$ ise bu durumda R komütatiftir.

Sonuç 2.3.8: Eğer her $x,y,z \in R$ için $[[x,y]_{s,t},z]_{s,t} = 0$ ise bu durumda R komütatiftir.

Teorem 2.3.9: U, karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının hem sıfırdan farklı bir (s,t)- sağ Lie ideali ve hem de alt halkası ise bu durumda $U \subset Z$ veya $U \subset C_{s,t}$ veya U, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Aydın, N. ve Kandamar , H. , 1994

Bu makale boyunca R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve $s,t : R \to R$ iki otomorfizma olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.10: U, R halkasının (s,t)- sağ Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Eğer $[U,a]_{s,t} \subset C_{s,t}$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $U \subset C_{s,t}$ dir.

Lemma 2.3.11: $a \in R$ ve $aU = 0$ (veya $Ua = 0$) olsun.

(a) Eğer U, (s,t)- sol Lie ideal ise bu durumda $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

(b) Eğer U, (s,t)- sağ Lie ideal ise bu durumda $a = 0$ veya $U \subset C_{s,t}$ olur.

Teorem 2.3.12: U, karakteristiği ikiden farklı R asal halkasının bir (s,t)- sağ Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Eğer $[U,a] = 0$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $U \subset C_{s,t}$ dir.

Sonuç 2.3.13: U, R halkasının (s,t)- sağ Lie ideali olsun. Eğer U komütatif ise bu durumda $U \subset Z$ veya $U \subset C_{s,t}$

Lemma 2.3.14: R bir halka ve U sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideal olsun. $T(U) = \{a \in R \mid [R,a]_{s,t} \subset U\}$ olmak üzere $R[T(U), s(T(U))] \subset T(U)$ ve $[T(U), t(T(U))]R \subset T(U)$ olur.

Lemma 2.3.15: U sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideal, $U \not\subset Z$, $U \not\subset C_{s,t}$ ve $a,b \in R$ olsun. Eğer $aT(U)b = (0)$ ise bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Teorem 2.3.16: U, (s,t)- Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{s,t}$ olsun. Bu durumda R halkasının $[R,M]_{s,t} \subset U$ fakat $[R,M]_{s,t} \not\subset C_{s,t}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır.

Sonuç 2.3.17: U sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{s,t}$ olsun. Eğer $a,b \in R$ için $aUb = 0$ ise bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Aydın, N. ve Soytürk, M., 1995

Bu çalışma boyunca R karakteristiği ikiden farklı asal halka, d, sıfırdan farklı R nin türevi, $s,t : R \to R$ iki otomorfizma ve $sd = ds$, $td = dt$ olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.18: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer $U \subset C_{s,t}$ ise bu durumda $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.3.19: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sağ Lie ideali olsun. Eğer $d(U) \subset C_{s,t}$ ise bu durumda R halkası komütatiftir veya $U \subset C_{s,t}$ dir.

Sonuç 2.3.20: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali olsun. Eğer $d(U) \subset C_{s,t}$ ise bu durumda $U \subset Z$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 2.3.21: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sağ Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Eğer $ad(U) = 0$ (veya $d(U)a = 0$) ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.3.22: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise bu durumda $d(U) \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.23: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Soytürk, M., 1996

Bu makalede R, karakteristiği ikiden ve üçden farklı asal halka, d, sıfırdan farklı R nin türevi, $s,t : R \to R$ iki otomorfizma, $sd = ds$ ve $td = dt$ olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.24: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali için $[R,U]_{s,t} \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.3.25: R karakteristiği ikiden farklı asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir (s,t)- Lie ideali ve d, R nin sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.3.26: R, karakteristiği ikiden ve üçden farklı asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir (s,t)- Lie ideali, d, R nin sıfırdan farklı bir türev, $d(U) \subset U$ ve $d^2(U) \subset Z$ olsun. Eğer $d^3(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.27: R, karakteristiği ikiden ve üçden farklı asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali, d, R nin sıfırdan farklı bir türev ve $d(U) \subset U$ olsun. Eğer $d^2(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Aydın, N., 1997

Bu makale boyunca R asal halka, s ve t, R halkasının iki otomorfizması, C, R halkasının genişletilmiş merkezi ve Z, R halkasının merkezi olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.28: U, (s,t)- sol Lie ideal olsun. Eğer $U \subset Z$ ise bu durumda her $u \in U$ için $s(u) = t(u)$ veya R halkası komütatiftir.

Teorem 2.3.29: U, R asal halkasının (s,t)- sol Lie ideali, $[R,U]_{s,t} \subset C_{s,t}$ olsun. Bu durumda her $u \in U$ için $s(u) = t(u)$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 2.3.30: R asal halka, U, R halkasının (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer $a \in R$ için $[a,U] = 0$ ise bu durumda $a \in Z$ veya her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dır.

Lemma 2.3.31: R asal halka, U, R halkasının (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer $a \in R$ için $[a,U] = 0$ ve $[a,U]_{s,t} = 0$ ise bu durumda $a = 0$ veya her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dır.

Teorem 2.3.32: R asal halka, U, R halkasının (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer $[U,U]_{s,t} = 0$ ve $[U,U] = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dır.

Lemma 2.3.33: R asal halka, U, R halkasının (s,t)- sol Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda her $u \in U$ için $s(u)+t(u) \in Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ve sol idealini kapsar.

Teorem 2.3.34: R asal halka, U, R nin (s,t)- sol Lie ideali ve $s(v)+t(v) \notin Z$ olacak biçimde bir $v \in U$ olsun. Bu durumda R halkasının sıfırdan farklı bir A sol ve sıfırdan farklı bir B sağ idealleri vardır ve $[R,A]_{s,t} \subset U$ ve $[R,B]_{s,t} \subset U$ fakat $[R,A]_{s,t} \not\subset Z$ ve $[R,B]_{s,t} \not\subset Z$ dir.

Teorem 2.3.35: R asal halka, U, R nin (s,t)- sol Lie ideali ve $v \in U$ için $s(v)+t(v) \notin Z$ olsun. Eğer $a,b \in R$ için $aUb = 0$ ise bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Lemma 2.3.36: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve her $x \in R$ için $s(x)-t(x) \in Z$ olsun. Bu durumda $s = t$ veya R halkası komütatiftir.

Lemma 2.3.37: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U sıfırdan farklı (s,t)- sağ Lie ideal ve $U \subset Z$ olsun. Bu durumda $s = t$ veya R halkası komütatiftir.

Teorem 2.3.38: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideal ve $U \subset C_{s,t}$ olsun. Bu durumda $s = t$ veya R halkası komütatiftir.

Kaya, A., 1997

Bu çalışmada R, karakteristiği üç olan asal halka, s, t R halkasının iki otomorfizması, U, sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali, d, sıfırdan farklı R nin türevi, $Z_{s,t}$, R halkasının (s,t)- merkez ideali, Z, R nin merkezi, $sd = ds$ ve $td = dt$ olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.39: S, karakteristiği ikiden farklı asal halka, $D: S \to S$, $x \to x'$ tanımlı sıfırdan farklı türev, C, S halkasının merkezi, $D^3 = 0$ ve A, S halkasının $A'' \subset C$ olan bir alt kümesi olsun.

i. Eğer A, S nin sağ ideali ise bu durumda $S'' \subset C$ veya $A'A = 0$ dır.

ii. Eğer A, S nin ideali ise bu durumda $S'' \subset C$ dir.

Lemma 2.3.40: S bir asal halka, $D : S \to S$, x **a** x' tanımlı sıfırdan farklı türev ve C, S halkasının merkezi olsun.

i. Eğer $r''S's''=0$, $\forall r, s \in S$ ise bu durumda $0 \neq u'' \in C$ olacak biçimde hiçbir $u \in S$ elemanı yoktur.

ii. S, karakteristiği ikiden farklı asal halka, A, S nin sıfırdan farklı bir ideali, ve $D^3 = 0$ olsun. Eğer en az bir $b \in S$ için $A''b = 0$ ise $0 \neq u'' \in C$ olacak biçimde hiç bir $u \in S$ elemanı yoktur veya $b = 0$ dır.

Lemma 2.3.41: S bir halka, $D : S \to S$, $x \to x'$ tanımlı sıfırdan farklı türev, C, S halkasının merkezi, $D^3 = 0$, $b \in S$ ve $c \in C$ olsun. Eğer

$$[[s', b'], b'] + c[s', b'] = 0, \ \forall s \in S$$

eşitliği sağlanırsa bu durumda

i. $2[s'', b']^2 = 0$, $\forall s \in S$

ii. Eğer S'' komutatif ve $[r'', [s'', t']] = 0$, $\forall r, s, t \in S$ eşitliği sağlanırsa bu durumda $[r'', [r'', b]]b'' = 0$, $\forall r \in S$ olur. Eğer b'' sıfır bölen değil ve S halkası yarı-asal halka ise bu durumda $2S'' \subset C$ dir.

Lemma 2.3.42: Eğer R, karakteristiği ikiden farklı asal halka ve $U \not\subset Z$ ise

i. U'' ve Z sıfırdan farklıdır.

ii. $[U, U]_{s,t}$, U' ve R'', Z tarafından kapsanılmaz.

iii. R halkasının $[R, M]_{s,t} \subset U$, fakat $[R, M]_{s,t} \not\subset Z_{s,t}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır.

iv. $a \in R$ elemanı için eğer $[U, a] = 0$ ise $a \in Z$ dir.

Lemma 2.3.43: R, karakteristiği üç olan halka ve $U \not\subset Z$ olsun.

i. Eğer $U'' = 0$ ise $d^3 = 0$ dır.

ii. Eğer $d^3 = 0$ ise $Z' = 0$ dır.

Lemma 2.3.44: R, karakteristiği üç olan asal halka, $d^3 = 0$ ve $U \not\subset Z$ olsun. Bu durumda

i. $s(c) = t(c)$, $\forall c \in Z$ dir ve böylece $[R, Z]_{s,t} = 0$ olur.

ii. $[Z, M'']_{s,t} = 0$ dır.

Lemma 2.3.45: R, karakteristiği üç olan asal halka, $d^3 = 0$ ve $U \not\subset Z$ olsun. Bu durumda

i. $[r, s'']_{s,t} = [r, s(s'')]$, $\forall r, s \in S$ dir.

ii. $s(r'') = t(r'')$, $\forall r \in R$ dir.

Lemma 2.3.46: R, karakteristiği üç olan asal halka, $d^3 = 0$ ve $U \not\subset Z$ olsun. Bu durumda

i. R'' komütatiftir.

ii. $\exists u_0 \in U$ ve $\exists r_0 \in R$ için $[r_0'', u_0']_{s,t} \neq 0$ dır.

Lemma 2.3.47: R, karakteristiği üç olan asal halka, $d^3 = 0$ olsun. Bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.48: R, karakteristiği üç olan asal halka olsun. Eğer $d(U) \subset U$ ve $d^2(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Aydın, N., 1999

Lemma 2.3.49: R asal halka, U sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali ve $T = \{c \in R \mid [R, c]_{s,t} \subset U\}$ olsun.

i. T, R halkasının alt halkasıdır.

ii. Eğer U, R halkasının (s,t)- sağ Lie ideali ise bu durumda T, R nin $[R, T]_{s,t} \subset U$ ve $U \subset T$ olan en büyük Lie idealidir.

Lemma 2.3.50: R, 2- torsion free yarı-asal halka, M, R halkasının sıfırdan farklı ideali olsun. Bu durumda $[R, M]_{s,t} \subset C_{s,t}$ ve $M \subset Z$ dir. Üstelik, her $m \in M$ için $s(m) = t(m)$ dir.

Teorem 2.3.51: R, 2-torsion free yarı-asal halka, U merkez tarafından kapsanılmayan (s,t)- Lie ideali olsun. Bu durumda R halkasının $[R, M]_{s,t} \subset U$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır. Üstelik, eğer $\exists m \in M$ için $s(m) \neq t(m)$ ise $[R, M]_{s,t} \not\subset C_{s,t}$ dur.

Lemma 2.3.52: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer $a, b \in R$ için

$aUb = 0$ ise bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ veya her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.

Lemma 2.3.53: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer $d(U) = 0$ ise bu durumda her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.

Teorem 2.3.54: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan (s,t)- sol Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Eğer $ad(U) = 0$ (veya $d(U)a = 0$) ise bu durumda $a = 0$ veya her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.

Teorem 2.3.55: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan (s,t)- sol Lie ideali, d, R halkasının türevi ve $d(Z) \neq 0$ olsun.

i. Eğer $a \in R$ için $[d(U), a] = 0$ ise bu durumda $a \in Z$ veya her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.
ii. Eğer $d(U) \subset Z$ ise bu durumda her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.

Kaya, K., Aydın, N., 1999

Bu makale boyunca R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan (s,t)- sol Lie ideali ve $s,t : R \rightarrow R$ iki otomorfizma olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.56: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının (s,t)- sol Lie ideal ve $a, b \in R$ olsun.

i. $d_1(x) = [x, b]_{s,t}$ tanımlı dönüşüm olmak üzere eğer $ad_1(R) = 0$ (veya $d_1(R)a = 0$) ise bu durumda $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.
ii. Eğer $a[R, b]_{s,t} = 0$ (veya $[R, b]_{s,t}\, a = 0$) ise bu durumda $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.
iii. Eğer $Ua = 0$ (veya $aU = 0$) ise bu durumda $a = 0$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Lemma 2.3.57: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olsun. Eğer $d(U)=0$ ise bu durumda $[U,s(U)]=0$ ve $[s(U),t(U)]=0$ dır.

Lemma 2.3.58: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d(U)=0$ ise her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Lemma 2.3.59: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Eğer $[a,U]=0$ ise bu durumda $a\in Z$ veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Sonuç 2.3.60: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı komütatif bir (s,t)- sol Lie ideali olsun. Bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Lemma 2.3.61: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı merkez tarafından kapsanılmayan (s,t)- sol Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini kapsar veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Lemma 2.3.62: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı merkez tarafından kapsanılmayan (s,t)- sol Lie ideali ve alt halkası olsun. Eğer $a,b\in R$ için $aUb=0$ ise bu durumda $a=0$ veya $b=0$ veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.63: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı merkez tarafından kapsanılmayan (s,t)- sol Lie ideali ve alt halkası olsun. Bu durumda U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.64: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı merkez tarafından kapsanılmayan (s,t)-sol Lie ideali olsun. Bu durumda R halkasının $[R,M]_{s,t}\subset U$ fakat $[R,M]_{s,t}\not\subset C_{s,t}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Aydın, N., Kaya, K., Gölbaşı, Ö., 2002

Bu makale boyunca R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U, sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali, d, sıfırdan farklı R nin türevi, $s,t:R\to R$ iki otomorfizma, $sd=ds$, $td=dt$ ve Z, R nin merkezi olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.65: Eğer $d^2(U)=0$ ve $d(U)\subset Z$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.66: Eğer $d(U)\subset Z$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Lemma 2.3.67: $d^2(U)=0$ ve $a\in R$ olsun. Eğer $ad([R,U]_{s,t})=0$ bu durumda $a=0$ veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.68: Eğer $d^2(U)=0$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.69: R, karakteristiği ikiden ve üçden farklı asal halka olsun. Eğer $d(U)\subset U$ ve $d^2(U)\subset Z$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Gölbaşı, Ö., ((s,t)- Lie ideals and generalized derivations)

Bu makale boyunca, R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali, $s,t:R\to R$ iki otomorfizma, $sd=ds$, $td=dt$, d, sıfırdan farklı türev, (f,d) iki yanlı genelleştirilmiş türev ve $C_{s,t}$, R halkasının (s,t)- merkezi olsun.

Teorem 2.3.70: U, $[R,R]_{s,t}$ nin (s,t)- sol Lie ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i. $[U,U]\subset T(U)$, $[U,T(U)]\subset T(U)$

ii. $[U,U]_{s,t}\subset T(U)$

iii. $[U,T(U)]_{s,t}\subset T(U)$

iv. $[[R,T(U)]_{s,t},T(U)]_{s,t}\subset T(U)$, $[R,[T(U),T(U)]]_{s,t}\subset T(U)$.

Lemma 2.3.71: U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer $f(U)=0$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Lemma 2.3.72: U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan (s,t)- sol Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Eğer $af(U)=0$ (veya $f(U)a=0$) ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ veya $a=0$ dır.

Lemma 2.3.73: U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan (s,t)- sağ Lie ideali olsun. Eğer $f(U)\subset C_{s,t}$, $sd=ds$ ve $td=dt$ ise bu durumda $U\subset C_{s,t}$ dir.

Lemma 2.3.74: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Eğer $d(Z)\neq 0$ ve $[f(U),a]_{s,t}=0$ ise bu durumda $a\in Z$ veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.75: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali ve $d(Z)\neq 0$ olsun. Eğer $f^2(U)=0$, $sd=ds$ ve $td=dt$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.76: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali, $sd=ds$ ve $td=dt$ olsun. Eğer $f(U)\subset Z$ ve $f^2(U)=0$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.77: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer her $u\in U$ ve $x\in R$ için $f([x,u]_{s,t})=0$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.78: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer her $u\in U$ ve $x\in R$ için $f([x,u]_{s,t})=[x,u]_{s,t}$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Teorem 2.3.79: Eğer $a\in R$ için $(f(R),a)=0$ ise bu durumda $d(a)=0$ dır.

Sonuç 2.3.80: $(f(R),U)=0$ olsun.

i. Eğer U, R halkasının (s, t)- sol Lie ideali ise bu durumda her $u \in U$ için $s(u)+t(u) \in Z$ dir.

ii. Eğer U, R halkasının (s, t)- sağ Lie ideali ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.3.81: $a \in R$ ve $d(Z) \neq 0$ olsun. Eğer $(f(R), a) \subset Z$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

Teorem 2.3.82: $a \in R$ için $(f(R), a) = 0 \Leftrightarrow f(R, a) = 0$ dır.

Teorem 2.3.83: U, $t(U) \subset U$ olacak biçimde R halkasının (s, t)- Lie ideali, $sd = ds$ ve $td = dt$ olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $f(uv) = f(u) f(v)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

III. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ LİE İDEALLER

d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ için $[a, d(a)] = 0$ iken R halkasının komütatif olduğu Posner tarafından 1957 yılında gösterilmiştir. Daha sonra Awtar tarafından yukarıdaki teorem, R halkası yerine Lie ve Jordan idealleri alınarak genelleştirilmiştir. P. H. Lee ve T. K. Lee ise aynı sonucu karakteristiği ikiden farklı asal halka için ispatlamışlardır. 1991 yılında Bresar tarafından genelleştirilmiş türev tanımı yapılmış ve böylece aynı sonuçlar genelleştirilmiş türev için incelenmeye başlanmıştır. Bu teorem 2004 yılında Argaç ve Albaş tarafından R halkasının genelleştirilmiş türevi için ispatlanmıştır.

Öte yandan Daif ve Bell, 1992 yılında,

"d, R yarı-asal halkasının sıfırdan farklı türevi ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olmak üzere

i. $d([x, y]) = [x, y], \ \forall x, y \in I$,

ii. $d([x, y]) = -[x, y], \ \forall x, y \in I$,

iii. Her $x, y \in I$ için $d([x, y]) = [x, y]$ veya $d([x, y]) = -[x, y]$

koşullarından biri sağlanırsa I, R halkasının merkezindedir."

teoremini ispatlamışlardır. Bu sonuç 2006 yılında Argaç tarafından incelenmiştir. Gölbaşı ise aynı sonucu yarı-asal halkada genelleştirilmiş türev için ispatlamıştır.

Bu bölümde yukarıdaki iki teorem genelleştirilmiş türevli bir R asal halkasının Lie ideali için ispatlanacaktır. Ayrıca bu bölüm boyunca R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı Lie ideali ve (f, d) iki yanlı genelleştirilmiş türev olarak alınacaktır.

Chang' in 2003 yılında yapmış olduğu genelleştirilmiş (a, b)- türev tanımından hareketle aşağıdaki genelleştirilmiş türev tanımı verilebilir.

Tanım 3.1: R halka ve $f : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y)$$

koşulunu sağlayan bir $d: R \rightarrow R$ türevi varsa f ye genelleştirilmiş sağ türev denir.

Eğer her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = d(x)y + xf(y)$$

koşulunu sağlayan bir $d: R \rightarrow R$ türevi varsa f ye genelleştirilmiş sol türev denir. Eğer (f, d) hem genelleştirilmiş sağ, hem de genelleştirilmiş sol türev ise (f, d) ye iki yanlı genelleştirilmiş türev (genelleştirilmiş türev) denir.

Uyarı:

i. (f, d) genelleştirilmiş türev olsun. Eğer $d = 0$ ise her $x, y \in R$ $f(xy) = f(x)y$ dir. Lemma 2.1.24 den $f(x) = qx$, $\forall x \in R$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır. Bu nedenle $d \neq 0$ alınacaktır.

ii. Her $x, y \in R$ için

$$f([x, y]) = f(xy - yx) = f(x)y + xd(y) - d(y)x - yf(x) = [f(x), y] + [x, d(y)]$$

dir.

iii. $a \in Z$ iken $f(a) \in Z$ dir. Gerçekten;

$a \in Z$ olduğundan, her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ dır. Bu nedenle,

$$0 = f([a, r]) = [f(a), r] + [a, d(r)]$$

$$0 = [f(a), r], \ \forall r \in R$$

dir. Dolayısıyla $f(a) \in Z$ dir.

Teorem 3.2: Eğer her $u \in U$ için $[u, f(u)]$=0 ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

İspat: Hipotezde u yerine $u + v$, $v \in U$ yazılırsa;

$$[u, f(v)] + [v, f(v)] + [v, f(u)] + [u, f(u)] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik hipotez kullanılarak düzenlenirse;

$$[u, f(v)] + [v, f(u)] = 0, \ \forall u, v \in U \tag{3.1}$$

olur. (3.1) eşitliğinde v yerine $[u, v]$ alınırsa;

$$[u, f([u, v])] + [[u, v], f(u)] = 0$$

dir. Bu ifadeyi düzenlersek;

$$[u,[f(u),v]]+[u,[u,d(v)]]+[[u,v],f(u)]=0\ ,\ \forall u,v\in U$$

bulunur. Jacobi eşitliği kullanılarak;

$$[u,[f(u),v]]+[u,[u,d(v)]]+[u,[v,f(u)]]+[v,[u,f(u)]]=0\ ,\ \forall u,v\in U$$

elde edilir. Bu ifadede hipotez ve $[u,[v,f(u)]]=[u,[f(u),v]]$ olduğu kullanılırsa;

$$[u,[u,d(v)]]=0\ ,\forall u,v\in U \tag{3.2}$$

olur. (3.2) eşitliğinde u yerine $u+d(v)$, $v\in[U,U]$ yazılır ve (3.2) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}0&=[u+d(v),[u+d(v),d(v)]]\\&=[u+d(v),[u,d(v)]]\\&=[u,[u,d(v)]]+[d(v),[u,d(v)]]\end{aligned}$$

olur. Yani;

$$[d(v),[d(v),u]]=0\ ,\ \forall u,v\in U \tag{3.3}$$

elde edilir. $I_{d(v)}:R\to R,\ I_{d(v)}(x)=[d(v),x]$ biçiminde tanımlı $d(v)$ ile belirlenen iç türev olmak üzere (3.3) eşitliğinden $I^2_{d(v)}(U)=0$ olur. Bu ise Lemma 2.2.11 den $d([U,U])\subset Z$ veya $U\subset Z$ demektir. Eğer $d([U,U])\subset Z$ ise Lemma 2.2.9 dan $[U,U]\subset Z$ dir. Buradan Lemma 2.2.1 kullanılarak $U\subset Z$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3: Eğer her $u\in U$ için $[u,f(u)]\in Z$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

İspat: Hipotezde u yerine $u+v$, $v\in U$ yazılırsa;

$$[u,f(v)]+[v,f(v)]+[v,f(u)]+[u,f(u)]\in Z$$

dir. Bu eşitlikte hipotez kullanılırsa;

$$[u,f(v)]+[v,f(u)]\in Z\ ,\ \forall u,v\in U \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinde v yerine $[u,r]$, $r\in R$ alınırsa;

$$[u,f([u,r])]+[[u,r],f(u)]\in Z$$

olur. Bu ifade düzenlenirse;

$$[u,[f(u),r]]+[u,[u,d(r)]]+[[u,r],f(u)]\in Z\ ,\ \forall r\in R,u\in U \tag{3.5}$$

dir. (3.5) eşitliğinde Jacobi özdeşliği kullanılırsa;

$$[u,[f(u),r]]+[u,[u,d(r)]]+[u,[r,f(u)]]+[r,[u,f(u)]]\in Z\ ,\ \forall r\in R,u\in U$$

bulunur. Yani;

$$[u,[f(u),r]]+[u,[u,d(r)]]-[u,[f(u),r]]+[r,[u,f(u)]]\in Z$$

dir. Bu ifadede hipotez kullanılırsa;

$$[u,[u,d(r)]]\in Z\,,\quad \forall r\in R, u\in U \tag{3.6}$$

dır. $I_{d(r)}:R\to R,\quad I_{d(r)}(x)=[x,d(r)]$ biçiminde tanımlı, $d(r)$ ile belirlenen iç türev olmak üzere, (3.6) eşitliğinden her $u\in U$ için $[u,I_{d(r)}(u)]\in Z$ sonucu elde edilir. Böylece Teorem 2.2.32 den $U\subset Z$ veya $I_{d(r)}=0$ olur. İkinci durumdan $d(R)\subset Z$ ve dolayısıyla R komütatiftir. Bu ise yine $U\subset Z$ olduğunu verir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4: (f,d) ve (g,h), R halkasında iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $u,v\in U$ için $f(u)v=ug(v)$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

İspat: $U\not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Lemma 2.2.4 den, R halkasının $[R,M]\subset U$ fakat $[R,M]\not\subset Z$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır. $x\in R$ ve $m\in M$ için $m[x,m]=[mx,m]\in U$ olur. Hipotezde u yerine $m[x,m]$ yazılırsa;

$$f(m[x,m])v=m[x,m]g(v)$$

$$d(m)[x,m]v+mf([x,m])v=m[x,m]g(v) \tag{3.7}$$

bulunur. (3.7) eşitliğinde hipotez kullanılırsa;

$$d(m)[x,m]v+m[x,m]g(v)=m[x,m]g(v)$$

olur. Bu ise

$$d(m)[x,m]v=0\,,\ \forall m\in M, v\in U, x\in R \tag{3.8}$$

olduğunu verir. (3.8) eşitliğinde v yerine $[v,r]\in U$, $r\in R$ yazılır ve (3.8) eşitliği kullanılırsa;

$$0=d(m)[x,m][v,r]$$

$$0=d(m)[x,m](vr-rv)$$

$$0=d(m)[x,m]vr-d(m)[x,m]rv$$

olur. Böylece;

$$d(m)[x,m]Rv=(0)\,,\ \forall m\in M, v\in U, x\in R$$

dır. R asal halka ve U sıfırdan farklı Lie ideal olduğundan;

$$d(m)[x,m]=0\,,\ \forall m\in M, x\in R \tag{3.9}$$

olur. (3.9) eşitliğinde x yerine xy, $y\in R$ yazılır ve (3.9) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} 0 &= d(m)[xy,m] \\ &= d(m)x[y,m] \end{aligned}$$

bulunur. Yani;

$$d(m)R[y,m]=(0)\,,\ \forall m\in M, y\in R$$

elde edilir. R asal halka olduğundan;

$$m\in Z \text{ veya } d(m)=0\,,\ \forall m\in M$$

olur. L=$\{m\in M \mid m\in Z\}$ ve K=$\{m\in M \mid d(m)=0\}$ kümeleri tanımlansın. L ve K, M idealinin iki özalt grubudur. Ayrıca $M=K\cup L$ dir. Brauer Trick' ten $M=L$ veya $M=K$ dır. Eğer $M=L$ ise $M\subset Z$ ve dolayısıyla R halkası komütatif olur. Bu ise $U\not\subset Z$ oluşuyla çelişir. Eğer $M=K$ ise bu durumda $d(M)=0$ dır. M, R asal halkasının sıfırdan farklı ideali olduğundan $d=0$ elde edilir ki bu çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani; $U\subset Z$ olmalıdır. İspat tamamlanır.

Sonuç 3.5: (f,d) ve (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $u\in U$ için $f(u)u=ug(u)$ ise bu durumda $U\subset Z$ dir.

İspat: Teorem 3.4 de $u=v$ alınırsa istenen elde edilir.

Not: Sonuç 3.5 de $f=g$ alınırsa Teorem 3.2 elde edilir.

Teorem 3.6: (f,d) genelleştirilmiş türevi aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa $U\subset Z$ dir.

i. Her $u,v\in U$ için $f([u,v])=[u,v]$.

ii. Her $u,v\in U$ için $f([u,v])=-[u,v]$.

iii. $u,v\in U$ için $f([u,v])=[u,v]$ veya $f([u,v])=-[u,v]$.

İspat:

i. Hipotezden;

$$f([u,v]) = [f(u),v] + [u,d(v)] = [u,v],\ \forall u,v \in U \tag{3.10}$$

olur. (3.10) eşitliğinde u yerine $[u,w]$, $w \in U$ yazılırsa,

$$[f([u,w]),v] + [[u,w],d(v)] = [[u,w],v],\ \forall u,v,w \in U$$

bulunur. Bu eşitlikte hipotez kullanılarak;

$$[[u,w],v] + [[u,w],d(v)] = [[u,w],v],\ \forall u,v,w \in U$$

elde edilir. Buradan

$$[[u,w],d(v)] = 0,\ \forall u,v,w \in U$$

olur. Yani;

$$[[U,U],d(U)] = 0$$

bulunur. Teorem 2.2.13 den $[U,U] \subset Z$ veya $U \subset Z$ elde edilir. Eğer $[U,U] \subset Z$ ise Lemma 2.2.1 den $U \subset Z$ olur. Böylece ispat biter.

ii. Benzer teknik kullanılarak yapılır.

iii. Bir $w \in U$ için

$$U_w = \{v \in U \mid f([w,v]) = [w,v]\} \quad \text{ve} \quad U_{w^*} = \{v \in U \mid f([w,v]) = -[w,v]\}$$

kümelerini tanımlayalım. $(U,+) = U_w \cup U_{w^*}$ dır. Brauer Trick'ten $U = U_w$ veya $U = U_{w^*}$ olmalıdır. Bu durumda teoremin (i) ve (ii) deki teknikle ispat tamamlanır.

IV.BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ (s,t)- LİE İDEALLER

R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, d sıfırdan farklı türev olmak üzere $d(R)\subset Z$ koşulunu 1978 yılında I. N. Herstein incelemiştir. Daha sonra J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından R halkası yerine onun bir U Lie ideali alınarak $d(U)\subset Z$ iken $U\subset Z$ olduğu ispatlanmıştır. Bu teoremi 1995 yılında N. Aydın ve M. Soytürk, R halkasının bir (s,t)- Lie ideali için, 2002 yılında N. Aydın, K. Kaya ve Ö. Gölbaşı ise (s,t)– sol Lie ideali için ispatlamışlardır. Aynı teorem 2006 yılında Ö. Gölbaşı ve K. Kaya tarafından, (f,d), R de genelleştirilmiş türev, U, R halkasının sıfırdan farklı Lie ideali olmak üzere $f(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$ gösterilerek genelleştirilmiştir.

Öte yandan 2004 yılnda N. Argaç ve E. Albaş tarafından R asal halka, (d,a), (g,b) iki genelleştirilmiş türev ve $a\in R$ olmak üzere her $x\in R$ için $ad(x)=g(x)a$ koşulu incelenmiştir. 2006 yılında ise Ö. Gölbaşı bu teoremi R asal halkası yerine yarı- asal halka alarak genelleştirmiştir.

Bu bölümde ilk olarak, yukarıdaki teorem (s,t)- sol Lie ideal için ispatlanacaktır. İkinci olarak ise R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali ve $a,b\in R$ için $f:R\rightarrow R$, $f(x)=xa-bx$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olmak üzere $f(U)\subset Z$ problemi ele alınacaktır. Ayrıca bu bölüm boyunca R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, $s,t:R\rightarrow R$ iki otomorfizma ve (f,d), (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev olarak alınacaktır.

Uyarı: (f,d) genelleştirilmiş türev olsun.

i. Eğer $ds=sd$ ve $dt=td$ ise her $x,y\in R$ için
   $f([x,y]_{s,t})=[f(x),y]_{s,t}+[x,d(y)]_{s,t}$ dir.

ii. Eğer $fs=sf$, $ft=tf$ ise her $x,y\in R$ için
   $f([x,y]_{s,t})=[d(x),y]_{s,t}+[x,f(y)]_{s,t}$ dir.

iii. (f,d) genelleştirilmiş türev olsun. Eğer $d=0$ ise her $x,y\in R$ $f(xy)=f(x)y$ dir. Lemma 2.1.24 den $f(x)=qx$, $\forall x\in R$ olacak biçimde $q\in Q_r(R_C)$ vardır. Bu nedenle $d\neq 0$ alınacaktır.

iv. R bir halka, $a,b\in R$ olsun. $f:R\to R$, $f(x)=xa-bx$ dönüşümü bir genelleştirilmiş türevdir. Gerçekten ;

$\forall\ x,y\in R$ için

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)a-b(x+y) \\ &= xa-bx+ya-by \\ &= f(x)+f(y) \end{aligned}$$

olduğundan $f:R\to R$ toplamsal bir dönüşümdür. Diğer taraftan her $x,y\in R$ için $d(y)=ya-ay$ şeklinde a ile belirlenen bir iç türev olarak alınırsa;

$$\begin{aligned} f(xy) &= (xy)a-b(xy) \\ &= xya-xay+xay-bxy \\ &= (xa-bx)y+x(ya-ay) \\ &= f(x)y+xd(y) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde Tanım 1.29 dan f, genelleştirilmiş türevdir.

Lemma 4.1 (Gölbaşı, (s,t)- Lie ideals and generalized derivations, Lemma 1): U, R halkasının sıfırdan farklı merkez tarafından kapsanmayan (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer $f(U)=0$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki, $\exists u\in U$ için $s(u)+t(u)\notin Z$ olsun. Bu durumda Teorem 2.3.64 den R halkasının $[R,M]_{s,t}\subset U$ fakat $[R,M]_{s,t}\not\subset C_{s,t}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır. Bu nedenle $x\in R$, $m\in M$ için $[x,m]_{s,t}\,s(m)\in U$ olur. Hipotezden;

$$0=f([x,m]_{s,t}\,s(m))=f([x,m]_{s,t})s(m)+[x,m]_{s,t}\,d(s(m)).$$

Yine hipotezden;

$$0=[x,m]_{s,t}\,d(s(m)),\ \forall x\in R, m\in M \tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) eşitliğinde x yerine xy, $y\in R$ yazılır ve (4.1) eşitliği kullanılırsa;

$$0=[xy,m]_{s,t}\,d(s(m))=x[y,m]_{s,t}\,d(s(m))+[x,t(m)]yd(s(m))$$

elde edilir. Yani;

$$0=[x,t(m)]Rd(s(m)),\ \forall x\in R, m\in M$$

bulunur. R asal halka olduğundan

$d(s(m))=0$ veya $m\in Z$, $\forall m\in M$

elde edilir.

K=$\{m\in M \mid d(s(m))=0\}$ ve L=$\{m\in M \mid m\in Z\}$ kümeleri tanımlansın.

K ve L kümeleri M nin toplamsal iki öz alt grubudur. Ayrıca $M=K\cup L$ dir. Brauer Trick'ten $M=L$ veya $M=K$ olmalıdır.

Eğer $M=L$ ise; bu durumda $M\subset Z$ olduğu açıktır. Böylece R halkası komütatiftir. Bu ise $U\not\subset Z$ oluşuyla çelişir.

Eğer $M=K$ ise $d(s(M))=(0)$ dır. $s(M)$, R nin sıfırdan farklı ideali olduğundan $d=0$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. $\forall u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Lemma 4.2 (Gölbaşı, (s,t)- Lie ideals and generalized derivations, Lemma 4): U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Eğer $d(Z)\neq 0$ ve $[f(U),a]_{s,t}=0$ ise bu durumda $a\in Z$ veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

İspat: $d(Z)\neq 0$ olduğundan $d(a)\neq 0$ olacak biçimde $a\in Z$ elemanı vardır. $a\in Z$ olduğundan $d(a)\in Z$ dir.

$\forall x\in R, u\in U$ için hipotezden

$$0=[f([x,u]_{s,t}\,a),a]_{s,t}=[f([x,u]_{s,t})a+[x,u]_{s,t}\,d(a),a]_{s,t}$$

$$=[f([x,u]_{s,t}),a]_{s,t}\,a+f([x,u]_{s,t})[a,s(a)]+[[x,u]_{s,t},a]_{s,t}\,d(a)+[x,u]_{s,t}[d(a),s(a)]$$

elde edilir. Bu ise $a,d(a)\in Z$ olduğundan ve hipotezden;

$$\left[[x,u]_{s,t},a\right]_{s,t} d(a)=0\,,\ \forall x\in R, u\in U$$

dır. R asal halka ve $0\neq d(a)\in Z$ olduğundan;

$$\left[[x,u]_{s,t},a\right]_{s,t}=0\,,\ \forall x\in R, u\in U \tag{4.2}$$

bulunur. (4.2) eşitliğinde x yerine $xs(u)$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}0&=\left[[xs(u),u]_{s,t},a\right]_{s,t}\\&=\left[x[s(u),s(u)]+[x,u]_{s,t}s(u),a\right]_{s,t}\\&=\left[[x,u]_{s,t}s(u),a\right]_{s,t}\\&=\left[[x,u]_{s,t},a\right]s(u)+[x,u]_{s,t}[s(u),s(a)]\end{aligned}$$

dir. Burada (4.2) eşitliği kullanılırsa;

$$[x,u]_{s,t}\,s([u,a])=0\,,\ \forall x\in R, u\in U$$

elde edilir. Bu eşitlikte x yerine xy, $y\in R$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}0&=[xy,u]_{s,t}\,s([u,a])\\&=x[y,u]_{s,t}\,s([u,a])+[x,t(u)]ys([u,a])\\&=[x,t(u)]ys([u,a])\end{aligned}$$

dir. Yani;

$$[R,t(u)]Rs([u,a])=0\,,\ \forall u\in U$$

bulunur. R asal halka olduğundan her $u\in U$ için $u\in Z$ veya $[u,a]=0$ olur. Eğer $u\in Z$ ise bu durumda $[u,a]=0$ olduğu açıktır. Böylece $[U,a]=0$ olur. Lemma 2.3.59 dan $a\in Z$ veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

Sonuç 4.3: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali, d, R nin türevi ve $a\in R$ olsun. Eğer $d(Z)\neq 0$ ve $[d(U),a]_{s,t}=0$ ise bu durumda $a\in Z$ veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

İspat: Lemma 4.2 de $f=d$ türevi alınırsa istenen elde edilir.

Teorem 4.4: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- sol Lie ideali olsun. Eğer her $u,v\in U$ için $f(u)v=ug(v)$ ise her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

İspat: $\exists u \in U$ için $s(u)+t(u) \notin Z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 2.3.64 den, R halkasının $[R,M]_{s,t} \subset U$ fakat $[R,M]_{s,t} \not\subset C_{s,t}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır. $\forall x \in R,\ m \in M$ olmak üzere $t(m)[x,m]_{s,t} \in U$ elemanı için hipotezden;

$$f(t(m)[x,m]_{s,t})v = t(m)[x,m]_{s,t}\, g(v)$$

$$d(t(m))[x,m]_{s,t}\, v + t(m) f([x,m]_{s,t})v = t(m)[x,m]_{s,t}\, g(v)$$

olur. Bu ifade de hipotez kullanılırsa;

$$d(t(m))[x,m]_{s,t}\, v + t(m)[x,m]_{s,t}\, g(v) = t(m)[x,m]_{s,t}\, g(v)$$

olur. Böylece

$$d(t(m))[x,m]_{s,t}\, U = (0),\ \forall x \in R,\ m \in M$$

elde edilir. Lemma 2.3.11 (a) dan;

$$d(t(m))[x,m]_{s,t} = 0, \forall x \in R, m \in M \tag{4.3}$$

olur. (4.3) eşitliğinde x yerine xy, $y \in R$ yazılır ve (4.3) eşitliği kullanılırsa;

$$0 = d(t(m))[xy,m]_{s,t} = d(t(m))[x,m]_{s,t}\, y + d(t(m))x[y,s(m)]$$

$$d(t(m))x[y,s(m)] = 0,\ \forall x \in R,\ m \in M$$

bulunur. Yani;

$$d(t(m))R[y,s(m)] = 0, \forall y \in R, m \in M$$

dir. R asal halka ve s otomorfizma olduğundan;

$$d(t(m)) = 0 \quad \text{veya} \quad m \in Z,\ \forall m \in M$$

elde edilir.

K= $\{m \in M \mid d(t(m)) = 0\}$ ve L= $\{m \in M \mid m \in Z\}$ kümeleri tanımlansın.

K ve L kümeleri M nin toplamsal iki öz alt grubudur. Brauer Trick'ten $M = K$ veya $M = L$ olmalıdır.

Eğer $M = L$ ise bu durumda $M \subset Z$ olduğu açıktır. Böylece R komütatiftir. Bu ise $\exists u \in U$ için $s(u)+t(u) \notin Z$ kabulüyle çelişir.

Eğer $M = K$ ise $d(t(M)) = (0)$ dır. $t(M)$, R halkasının sıfırdan farklı ideali olduğundan $d = 0$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. $\forall u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.

Sonuç 4.5: U, R halkasının sıfırdan farklı (s, t)- sol Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $f(u)u = ug(u)$ ise bu durumda her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.

İspat: Teorem 4.4 de $u = v$ alınırsa istenen elde edilir.

Sonuç 4.6: U, R halkasının sıfırdan farklı (s, t)- sol Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, f(u)] = 0$ ise bu durumda her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.

İspat: Sonuç 4.5 de $f = g$ alınırsa istenen elde edilir.

Sonuç 4.7: U, R halkasının sıfırdan farklı (s, t)- sol Lie ideali, d ve h, R nin sıfırdan farklı iki türevi olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $d(u)v = uh(v)$ ise her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dır.

İspat: Teorem 4.4 de $f = d$, $g = h$ alınırsa istenen elde edilmiş olur.

Sonuç 4.8: U, R halkasının sıfırdan farklı (s, t)- sol Lie ideali, d ve h, R nin sıfırdan farklı iki türevi olsun. Eğer her $u \in U$ için $d(u)u = uh(u)$ ise bu durumda her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.

İspat: Sonuç 4.7 de $u = v$ alınırsa istenen elde edilir.

Sonuç 4.9: U, R halkasının sıfırdan farklı (s, t)- sol Lie ideali, d R nin sıfırdan farklı türevi olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ ise bu durumda her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dir.

İspat: Sonuç 4.8 de $d = h$ alınırsa istenen elde edilmiş olur.

Teorem 4.10: U, R halkasının sıfırdan farklı (s, t)- sol Lie ideali ve $a, b \in R$ olsun. $f : R \to R$, $f(x) = xa - bx$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olmak üzere eğer $f(U) \subseteq U$ ve $f(U) \subseteq Z$ ise bu durumda her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ dır.

İspat: Hipotezden $u \in U$ için $f(u) = ua - bu \in Z$ dir. Bu eleman $u \in U$ ile komüte edilirse;

$$0 = [ua - bu, u]$$

$$= u[a,u] - [b,u]u$$

dir. Böylece;

$$u[a,u] = [b,u]u\ ,\ \forall u \in U \qquad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) ifadesinde u yerine $u + v\ ,\ v \in U$ yazılırsa;

$$(u+v)[a,u+v] = [b,u+v](u+v)$$

$$u[a,u] + v[a,u] + u[a,v] + v[a,v] = [b,u]u + [b,u]v + [b,v]u + [b,v]v$$

olur. Son ifadede (4.4) eşitliği kullanılırsa;

$$u[a,v] + v[a,u] = [b,v]u + [b,u]v\ ,\ \forall u,v \in U$$

bulunur. Bu ifadede u yerine $f(u)$ alınırsa;

$$f(u)[a,v] + v[a, f(u)] = [b,v]f(u) + [b, f(u)]v\ ,\ \forall u,v \in U$$

olur. $f(u) \in Z$ olduğu kullanılırsa;

$$0 = f(u)([a,v] - [b,v]),\ \forall u,v \in U \qquad (4.5)$$

elde edilir. R asal halka ve $f(u) \in Z$ olduğu için (4.5) ifadesinden;

$$f(u) = 0 \text{ veya } [a,v] = [b,v],\ \forall u,v \in U$$

dır. Yani; $f(U) = 0$ veya $[a-b,U] = 0$ olur.

Eğer $[a-b,U] = 0$ ise Lemma 2.3.30 dan $a - b \in Z$ veya her $u \in U$ için $s(u) + t(u) \in Z$ elde edilir.

$a - b \in Z$ olsun. (4.4) eşitliğinden;

$$u^2 a - uau = ubu - bu^2\ ,\ \forall u \in U \qquad (4.6)$$

elde edilir. $a - b = a\ , a \in Z$ alalım. (4.6) eşitliğinde $a = b + a$ yazılırsa;

$$u^2 b + u^2 a - ubu - uau = ubu - bu^2$$

dir. Bu ifade düzenlenirse;

$$u^2 b + u^2 a + bu^2 = 2ubu + uau$$

olur. Son eşitlikte $a \in Z$ olduğu kullanılırsa;

$$u^2 b + bu^2 - 2ubu = 0$$

$$u^2 b - ubu = ubu - bu^2$$

bulunur. Yani;

$$u[u,b] = [u,b]u$$

olur. Böylece

$$[u,[u,b]]=0\ ,\forall u\in U \tag{4.7}$$

dır. $d_b : R\to R,\ d_b(x)=[x,b]$ dönüşümü b elemanı ile belirlenen bir iç türevdir. Buna göre (4.7) eşitliğinden $[u,d_b(u)]=0$, $\forall u\in U$ elde edilir. Sonuç 4.9 dan $\forall u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ veya $d_b=0$ dır.

Eğer $d_b=0$ ise, b$\in Z$ dir. Böylece hipotezden her $u\in U$ için $f(u)=ua-bu=u(a-b)\in Z$ olur. Yani; $U(a-b)\in Z$ elde edilir. Ayrıca $a-b\in Z$ ve R asal halka olduğundan $U\subseteq Z$ veya $a-b=0$ bulunur.

Eğer $a-b=0$, yani $a=b$ ise $b\in Z$ olduğu kullanılarak;

$$f(x)=xa-bx=xb-bx=0\ ,\ \forall x\in R$$

elde edilir. Bu nedenle $f=0$, dolayısıyla $f(U)=0$ dır. Bu durumda Lemma 4.1 den her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir. Sonuç olarak her durum için $s(u)+t(u)\in Z$, $\forall u\in U$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.11: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali ve $a\in R$ olsun. Eğer $[U,a]_{s,t}\subseteq Z$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

İspat:

$f:R\to R,\quad f(x)=[x,a]_{s,t}=xs(a)-t(a)x$ dönüşümünü tanımlayalım. Hipotezden $f(U)\subseteq Z$ dir. Ayrıca U, (s,t)- Lie ideal olduğundan $f(U)\subseteq U$ dır. Teorem 4.10 dan her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ bulunur.

Sonuç 4.12: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali olsun. Eğer $[U,U]_{s,t}\subseteq Z$ ise bu durumda her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dır.

İspat: Sonuç 4.11 kullanılarak istenen elde edilir.

Teorem 4.13: U, R halkasının sıfırdan farklı (s,t)- Lie ideali, (f,d), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi, $fs=sf$, $ft=tf$ ve $d(Z)\neq 0$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

i. Her $u,v\in U$ için $f([u,v]_{s,t})=[u,v]_{s,t}$.

ii. Her $u,v\in U$ için $f([u,v]_{s,t})=-[u,v]_{s,t}$.

iii. Her $u,v\in U$ için $f\left([u,v]_{s,t}\right)=[u,v]_{s,t}$ veya $f\left([u,v]_{s,t}\right)=-[u,v]_{s,t}$.

İspat:

i. Hipotezden;

$$f\left([u,v]_{s,t}\right)=[d(u),v]_{s,t}+[u,f(v)]_{s,t}=[u,v]_{s,t}\ ,\ \forall u,v\in U \qquad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) eşitliğinde v yerine $[v,w]_{s,t}$, $w\in U$ yazılır ve hipotez kullanılırsa;

$$\left[d(u),[v,w]_{s,t}\right]_{s,t}+\left[u,f([v,w]_{s,u})\right]_{s,t}=\left[u,[v,w]_{s,t}\right]_{s,t}$$

$$\left[d(u),[v,w]_{s,t}\right]_{s,t}+\left[u,[v,w]_{s,u}\right]_{s,t}=\left[u,[v,w]_{s,t}\right]_{s,t}$$

olur. Buradan

$$\left[d(u),[v,w]_{s,t}\right]_{s,t}=0\ ,\forall u,v,w\in U$$

bulunur. Yani; $\left[d(U),[U,U]_{s,t}\right]_{s,t}=0$ olur. Sonuç 4.3 den $[U,U]_{s,t}\subset Z$ veya her $u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ elde edilir. Eğer $[U,U]_{s,t}\subset Z$ ise Sonuç 4.12 den $\forall u\in U$ için $s(u)+t(u)\in Z$ dir.

ii. Benzer tekniklerle yapılır.

iii. $w\in U$ için

$$U_w=\left\{v\in U \ \middle|\ f\left([w,v]_{s,t}\right)=[w,v]_{s,t}\right\} \text{ ve}$$

$$U_{w^*}=\left\{v\in U \ \middle|\ f\left([w,v]_{s,t}\right)=-[w,v]_{s,t}\right\}$$

kümeleri tanımlansın. $(U,+)=U_w\cup U_{w^*}$ olduğundan Brauer Trick'ten $U=U_w$ veya $U=U_{w^*}$ olmalıdır. (i) ve (ii) deki aynı metod kullanılarak ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

Aydın, N., Kandamar, H., 1994. (σ,τ)- Lie ideals in prime rings: Doğa- Tr. J. of Math., 18 (2) , 143-148.

Aydın, N., Soytürk, M., 1995. (σ,τ)- Lie ideals in prime rings with derivations: Doğa- Tr. J. of Math., 19 , 239-244.

Aydın, N., 1997. On one sided (σ,τ)- Lie ideals in prime rings: Doğa- Tr. J. of Math., 21, 1-7.

Aydın, N., 1999. Notes on generalized Lie ideals: Analele Universitatii din Timisoara, Seria Matematica-Informatica, XXXVII (2), 7-13.

Aydın, N., Kaya, K., Gölbaşı, Ö., 2002. Some results on one- sided generalized Lie ideals with derivation: Mathematical Notes, Miskolc., 3(2), 83-89.

Argaç, N., Albaş, E., 2004. Generalized derivations of prime rings: Algebra Coll., 11 (3), 399-410.

Argaç, N., 2006. On prime and semiprime rings with derivations: Algebra Coll., 13 (3), 371-380.

Awtar, R., 1973. Lie and Jordan structure in prime rings with derivations: Proc. Amer. Math. Soc., 41 (1), 67-74.

Awtar, R., 1984. Lie structure in prime rings with derivations: Publ. Math. Debrecen C. 31, s.209-215.

Bergen, J., Herstein, I. N., Kerr J. W. , 1981. Lie ideals and derivation of prime rings: J. of Algebra, 71, 259-267.

Bresar, M., 1991. On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivation: Glasgow Math. J., 33, 89-93.

Carini, L., 1985. Derivations on Lie ideals in semiprime rings: Rend. Del. Circolo. Mat. Di Polermo Serie II, Tomo, XXXIV, 122-126.

Chang, J., 2003. On the identitiy $h(x)=af(x)+g(x)b$: Taiwanese J. of Math., 7(1), 103-113.

Daif, M. N., Bell, H. E., 1992. Remarks on derivations on semiprime rings: Internat J. Math. and Math. Sci., 15(1), 205-206.

Gölbaşı, Ö., Kaya, K., 2006. On Lie ideals with generalized derivations: Siberian Math. J., 47 (5), 862-866.

Gölbaşı, Ö. On commutativity of semiprime rings with generalized derivations: Indian Journal of Pure and Appl. Math. (to appear).

Gölbaşı, Ö. Lie ideals and generalized derivations of prime rings (yayına gönderildi).

Gölbaşı, Ö. (σ,τ)- Lie ideals and generalized derivations (yayına gönderildi).

Herstein, I. N., 1969. Topics in Ring Theory: University of Chicago Press.

Herstein, I. N., 1970. On the Lie structure of assosiative rings: J. of algebra, 14, 561-571.

Herstein, I. N., 1976. Rings with Involution: University of Chicago Press.

Herstein, I. N., 1978. A note on derivations: Canad. Math. Bull., 21(3), 369-370.

Herstein, I. N., 1979. A note on derivations II: Canad. Math. Bull., 22(4), 509-511.

Hvala, B., 1998. Generalized derivations in rings: Comm.Algebra, 26 (4), 1147-1166.

Kaya, K., 1991. (σ,τ)- right Lie ideals in prime rings: Proc. 4. National Math. Symposium Antakya.

Kaya, K., 1992. (σ,τ)-Lie ideals in prime rings: An. Üniv. Timisoara, Stiinte Mat., 30 (2-3), 251-255.

Kaya, A., 1997. On a generalization of Lie ideals in prime rings: Tr. J. Math., 21, 285-294.

Kaya, K., Aydın, N., 1999. Some results in generalized Lie ideals: Albasapr, A Scientitic Journal Issued by Jordan University for Women, 3 (1), 53-61.

Lee, P. H. and Lee T. K., 1981. On derivations of prime rings: Chines J. Math., 9 (2), 107-110.

Lee, P. H. and Lee, T. K., 1983. Lie ideals of prime rings with derivations: Bull. Inst. of Math. Academia Sinica II, 75-79.

Posner, E. C., 1957. Derivations in prime rings: Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1093-1100.

Soytürk, M., 1996. (σ,τ)-Lie ideals in prime rings with derivation: Doğa-Tr. J. of Math., 233-236.

ÖZGEÇMİŞ

Emine KOÇ, 1984 yılında Sivas'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sivas'ta tamamladı. 2001 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandı ve 2005 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2006 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen buradaki görevine devam etmektedir.