I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Banu BOLAYIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008

I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Banu BOLAYIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Metin AKDAĞ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Emine ÖZTÜRK
Üye : Yrd. Doç. Dr. İdris ZORLUTUNA
Üye : Yrd. Doç. Dr. Metin AKDAĞ

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2008

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Hasan Hüseyin BAŞIBÜYÜK

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Banu BOLAYIR
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Metin AKDAĞ

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Hayashi (1958) tarafından tanımlanan $\star$-topoloji ve $\star$-kümelerin tanımı ve temel özellikleri verildi.

İkinci bölümde, Hamlett ve Jankovic (1990, New topologies from old via ideals) tarafından bir küme üzerinde tanımlı idealler kullanılarak elde edilen yeni topolojiler ve temel özellikleri çalışıldı.

Üçüncü bölümde, topolojik uzaylarda ideallerin uygun genişlemeleri kavramı çalışıldı.

Dördüncü bölümde, I-açık, I-kapalı kümeler ve I-sürekli fonksiyonların temel özellikleri çalışıldı.

Beşinci bölümde, şimdiye kadar ideal topolojik uzaylarda tanımlanmış küme ve süreklilik çeşitleri bir bütün halinde derlendi.

Son bölümde ise ideal topolojik uzaylar için verilmiş olan bazı ayırma aksiyomları özetlendi.

Anahtar Kelimeler: $\star$-topoloji, $\star$-küme, $\star$-kapalı ve $\star$-açık küme, $\star$-dense-in-itself, bar $\star$-topoloji, uygunluk, I-açık küme, I-kapalı küme, I-sürekli fonksiyon.

SUMMARY

MSc Thesis

ON I-CONTINUOUS FUNCTIONS

Banu BOLAYIR
Cumhuriyet University
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics
Advisor: Asoc. Proff. Dr. Metin AKDAĞ

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, fundemental properties of $\star$-topology and $\star$-sets defined by Hayashi have been given.

In the second chapter, obtained new topologicals by using ideals which have been defined on a set by Jankovic and Hamlett 1990, and essential properties of them have been studied

In the third chapter, apropriate extensions concept of ideals have been studied in topological spaces.

In the fourth chapter, essential properties of I-open, I-closed sets and I-continuous functions have been studied.

In the fifth chapter, kinds of I-sets and I-continuity of functions which have been defined in ideal topological spaces so far have been collected as a whole.

In the last chapter, given some seperation axioms for ideal topological spaces have been summorised.

Key Words: $\star$-topology, $\star$-set, $\star$-closed and $\star$-open set, $\star$-dense-in- itself, bar $\star$-topology, condensation, I-open set, I-closed set, I-continuity function .

Çalışma boyunca, karşılaştığım tüm güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Metin AKDAĞ'a saygılarımla birlikte şükranlarımı arzetmeyi bir borç bilirim.

Banu BOLAYIR

GİRİŞ

Lokalizasyon adı altında kalıtsallık ve sonlu toplamsallık özelliklerine göre kapalı bir aile olan ideal yardımıyla bir topolojik uzayda lokal fonksiyon kavramı ilk defa Kuratowski (1933) tarafından verildi. Ayrıca Kuratowski (1933) bu fonksiyonun bazı özelliklerini araştırdı. Daha sonra Vaidyanathaswamy (1945) lokal fonksiyon kavramından faydalanarak, bir kapanış işlemi ve bu işlem yardımıyla yeni bir topoloji kurup, bu topolojinin tabanını elde etti. Hayashi (1958) $\star$-topoloji ve $\star$-kümeleri tanımladı ve bazı temel özelliklerini verdi. Ayrıca Hayashi (1958)'de X bir R topolojik T_1 uzayının alt kümesi ve P de X in alt kümelerinin bir özelliğini göstermek üzere eğer $U \cap X$ kesişiminin P özelliğine sahip olduğu x in bir U açık komşuluğu varsa X in, x noktasında P özelliğine sahip olduğunu tanımladı. Bu tanımdan yararlanarak, $X^\star$ kümesi X in P özelliğine sahip olmayan noktalar kümesi olmak üzere, örneğin, eğer P zayıf (yani 1. kategoriden) özelliğinde ise $X^\star$ Kuratowski anlamında $D(X)$ kümesi ile çakıştığını gösterdi. Hashimoto (1952) de zayıf kümeler ile çalışmanın $D(X)$ ile çalışma kadar önemli olduğunu gösterdi. Hayashi (1964) de Hayashi uzayı olarak adlandırdığı bir uzay tanımladı. Samuels (1975) de idealleri değiştirmek suretiyle, lokal fonksiyonun genel topolojik uzaylarda bildiğimiz kapanış noktası, w-yığılma noktası (T_1 uzaylarındaki limit noktası), yoğunlaşma noktası ve ikinci kategoriden nokta kavramlarına eşit olduğunu kabul etti. Bu sonuç, lokal fonksiyonun söz konusu dört çeşit nokta kavramının genellemesi olduğunu göstermesi açısından önemlidir. Hamlett ve Jankovic (1990. New topologies from old via ideals) tarafından o güne kadar lokal fonksiyon için verilen bilgileri topluca ele alarak, bu fonksiyon ile ilgili yeni özellikler verdiler. Böylece, 1990 yılına kadar klasik bir metin olarak incelenen ideal yapısı, topoloji ile ilgilenen herkes için oldukça ilginç ve önemli bir konu haline geldi. Öyle ki, bu konu ile ilgili çalışmalar günümüze kadar devam etti ve hala devam etmektedir.

Tez içerisinde; uzay kavramı ile üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan topolojik uzay kastedilecektir. (X, τ) topolojik uzayındaki herhangi bir $A \subset X$ kümesinin kapanışı $cl(A)$ ve içi $int(A)$ sembolleri ile gösterilecektir.

Hazırlanan bu yüksek lisans tezinde, bir küme üzerinde tanımlı lokal fonksiyon ile ilgili günümüze kadar çalışılan bütün kavramların incelenip derlenmesi amaçlanmıştır.

I. BÖLÜM

LOKAL ÖZELLİKLERLE TANIMLI TOPOLOJİLER

Bu bölüm 4 kesim halinde incelenecektir. 1. kesimde Hayashi (1958) tarafından tanımlanan $\star$-topolojinin tanımı ve temel özellikleri, 2. kesimde $\star$-kapalı kümeler ve $\star$-açık kümeler, 3. kesimde $\star$-dense-in-itself uzayı ve son kesimde bar $\star$-topoloji incelenecektir.

1.1. $\star$-Topoloji

Bu kesimde Hayashi (1958) tarafından tanımlanan $\star$-topoloji ve $\star$-kümelerin temel özelliklerini vereceğiz. X bir R topolojik T_1 uzayının alt kümesi olsun. P de X in alt kümelerinin bir özelliğini göstersin. Bu durumda eğer $U \cap X$ kesişiminin P özelliğine sahip olduğu x in bir U açık komşuluğu varsa X e, x noktasında P özelliğine sahiptir denir. $X^\star$ kümesi X in P özelliğine sahip olmayan noktalar kümesi olsun. Örneğin, eğer P zayıf (yani 1. kategoriden) olma özelliği ise $X^\star$ Kuratowski anlamında $D(X)$ kümesi ile çakışır (Kuratowski, 1933). Hashimoto (1952) zayıf kümeler ile çalışmanın $D(X)$ ile çalışma kadar önemli olduğunu gösterdi. Ayrıca daha genel özellikli P nin bir sınıfını şu şekilde çalıştı:

(A) Eğer X P özelliğine sahip ve $Y \subset X$ ise Y de P özelliğine sahiptir.

(B) Eğer $n = 1, 2, ...$olmak üzere herbir X_n P özelliğine sahip ise $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ de P özelliğine sahiptir.

(C) $\{X,\, P \text{ özelliğine sahiptir}\} \equiv \{X \cap X^\star = \varnothing\} \Longrightarrow \{X^\star = \varnothing\}$

(D) $X^\star \subset cl(int(cl(X)))$

Buradan Hashimoto (1952) $\widehat{X} = X \cup X^\star$ kümesi ile yeni bir $\widehat{X}$ kapanış operatörünü üretti. Bu $\widehat{X}$ operatörü Kuratowski kapanış operatörünün özelliklerini sağlar. Gerçekten;

$D : P(X) \longrightarrow P(X),\; A \longrightarrow D(A) = \widehat{A} = A \cup A^\star$ biçiminde tanımlanırsa, D fonksiyonu

($\mathbf{K}_1$) $A \subset \widehat{A}$

($\mathbf{K}_2$) $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$

($\mathbf{K}_3$) A, $B \subset X$ olmak üzere $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$

($\mathbf{K}_4$) $\widehat{\varnothing} = \varnothing$

($\mathbf{K}_5$) A kapalıdır $\Longleftrightarrow A = \widehat{A}$

koşullarını sağlar.

$F = \left\{ A \subset X \ : D(A) = \widehat{A} = A \right\} \subset P(X)$ bu özelliklere sahip F ailesi X üzerinde bir topoloji belirler. Bu topoloji $\tau^\star = P(X) \backslash F = \{A \subset X : X \backslash A \in F\}$ biçiminde gösterilir. Ayrıca F ailesinin X üzerinde ürettiği topoloji

(F_1) $\varnothing$, $X \in F$

(F_2) $\{A_i : i \in I,\ A_i \subset F\}$ için $\underset{i \in I}{\cap} A_i \in F$

(F_3) $\{A_i :\ i = 1, 2, ...n,\ n \in \mathbb{N},\ A_i \subset F\}$ için $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \in F$

koşullarının sağlanması ile gösterilir.

Bu topolojiye $\star$-topoloji denir. Hayashi ayrıca $\star$-topoloji ile orjinal topoloji arasındaki çeşitli ilişkileri çalıştı. Özellikle bir X kümesinin $\star$-kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul X in bir kapalı küme ve P özelliğine sahip bir kümenin birleşimi olduğunu gösterdi (Banach, 1930, Teorem 11). Hayashi (1964) de bu teoremi Cantor-Bendixson Teoreminin bir genellemesi olduğunu gösterdi. (Alışılmış Cantor-Bendixson teoremi: Bir sayılabilir tabanla bir topolojik uzayda bulunan her kapalı küme bir perfect küme ve en çok bir sayılabilir kümenin birleşimidir.).

Daha sonra Freud (1958) de (A), (B), (C) ve (D) koşullarını sağlayan $U^\star$ ailesini tanımladı. (Biz $U^\star$ yerine $\rho^\star$ kullanacağız.). Bir x noktasının her U_x komşuluğu için $(X \cap (U_x - \{x\})) \notin U^\star$ koşulu sağlanıyorsa x noktasına X in bir $U^\star$-limit noktası denir. Bir $\star$-topoloji ile bir $U^\star$-topolojinin esas olarak özdeş olduğu kolayca gösterilebilir. $X^\star$, X için Freud'un türevlenebilir kümeleri ile çakışır (Freud, 1958). Ayrıca, eğer $U^\star$-ailesi bütün sayılabilir kümelerden meydana geliyorsa, o zaman $U^\star$-limit noktaları ile condensation noktaları çakışır. Freud bu topolojiyi kullanarak genelleşmiş Cantor-Bendixson

Teoremini ispatladı (Freud, 1958, Teorem 2). Her $U^\star$-kapalı küme $X \subset R$ de bir $U^\star$-mükemmel küme ve $U^\star$-kümenin birleşimidir (yani $U^\star$ ait bir kümede) ve tam tersine. Yukarıdaki nottan Freud'un teoreminde (1958) eğer $U^\star$-limit noktaları condensation noktaları ise Cantor-Bendixson teoremi elde edilir.

Bu kesimin iki ana amacı vardır. Birincisi Alexandroff'un tek nokta kompaktlaştırmasının bir genelleştirmesi olarak düşüneceğimiz tek nokta genelleşmesinin $\star$-topolojiyi kullanarak çalışmaktır. İkinci konu, $\star$-dense-in-itself bir uzayda $\star$-topoloji ve orjinal topoloji arasındaki ilişkiyi anlatan bir çalışmadır. Özellikle tam özelliklerin (örneğin; bağlantısızlık, açık bağlantısızlık ve Hausdorff, Urysohn-ayırma aksiyomları) $\star$-topoloji ve orjinal topolojide özdeş olduğunu göstereceğiz. Ayrıca bir $\star$-topoloji, eğer orjinal topoloji regüler ise, orjinal topoloji ile özdeş olduğunu göstereceğiz.

Tanım 1.1.4: R bir topolojik T_1-uzay ve ρ, R nin alt kümelerinin bir boş olmayan ailesi olsun.

(A) $X \in \rho$ ve $Y \subset X$ ise $Y \in \rho$ dir. (kalıtsallık)

(B) $X \in \rho$ ve $Y \in \rho$ ise $X \cup Y \in \rho$ dir. (sonlu toplamsallık)

(A) ve (B) yi sağlayan ρ ailesine dual süzgeç denir.

(A) dan $\varnothing$ boş küme her zaman ρ ye aittir.

Önerme 1.1.5: $X^\star$, x in herhangi bir U_x komşuluğu için $U_x \cap X$, ρ ya ait olmayacak şekildeki noktaların kümesi olmak üzere, T_1-uzayının her bir X ve Y alt kümeleri için

(1) $X \subset Y$ ise $X^\star \subset Y^\star$ dir.

(2) $(X \cup Y)^\star = X^\star \cup Y^\star$

(3) $X^{\star\star} \subset X^\star = cl(X^\star) \subset cl(X)$

(4) $X^\star - Y^\star \subset (X - Y)^\star$

koşulları sağlanır.

İspat: **(1)** $X \subset Y$ olsun. $x \in X^\star \overset{\rho \text{ tn.}}{\Rightarrow} \exists\, U_x \in \tau(x)$ vardır $\ni U_x \cap X \notin \rho \overset{X \subseteq Y}{\Rightarrow}$ $U_x \cap X \subset U_x \cap Y \Rightarrow U_x \cap Y \notin \rho$ dur. Gerçekten $U_x \cap Y \in \rho$ olsaydı (A) dan $U_x \cap X \in \rho$ olurdu. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$\exists\, U_x \in \tau(x)$ vardır $\ni U_x \cap Y \notin \rho \overset{\rho \text{ tn.}}{\Rightarrow} x \in Y^{\star}$ dır. O halde $X^{\star} \subset Y^{\star}$ dir.

(2) $x \in (X \cup Y)^{\star} \overset{\rho \text{ tn.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, U_x \in \tau(x)$ vardır $\ni U_x \cap (X \cup Y) \notin \rho \Longleftrightarrow$ $(U_x \cap X) \cup (U_x \cap Y) \notin \rho \overset{\text{(B) den}}{\Longleftrightarrow} U_x \cap X \notin \rho$ veya $U_x \cap Y \notin \rho \overset{\rho \text{ tn.}}{\Longleftrightarrow} x \in X^{\star}$ veya $x \in Y^{\star} \Longleftrightarrow x \in X^{\star} \cup Y^{\star}$ dır. O halde $(X \cup Y)^{\star} = X^{\star} \cup Y^{\star}$ dır.

(3) $x \in X^{\star\star} \overset{\rho \text{ tn.}}{\Rightarrow} \exists\, U_x \in \tau(x)$ vardır $\ni U_x \cap X^{\star} \notin \rho \Rightarrow \exists\, U_x \in \tau(x)$ vardır $\ni U_x \cap X \notin \rho \Rightarrow x \in X^{\star}$

(4) $x \in X^{\star} - Y^{\star} \Rightarrow x \in X^{\star}$ ve $x \notin Y^{\star} \overset{\rho \text{ tn.}}{\Rightarrow} \exists\, U_x \in \tau(x)$ vardır $\ni$ $U_x \cap X \notin \rho$ ve $\forall\, V_x \in \tau(x)$ vardır $\ni V_x \cap Y \in \rho \Rightarrow U_x \cap (X - Y) \notin \rho$ dur. Gerçekten $U_x \cap (X - Y) \in \rho$ yani $U_x \cap (X - Y) = (U_x \cap X) - (U_x \cap Y) \in \rho$ olsaydı $\overset{U_x \cap Y \in \rho}{\Rightarrow} U_x \cap X = [(U_x \cap X) - (U_x \cap Y)] \cup (U_x \cap Y)$ den $(U_x \cap X) - (U_x \cap Y) \in \rho$ ve $(U_x \cap Y) \in \rho$ olduğundan $U_x \cap X \in \rho$ olurdu. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $U_x \cap (X - Y) \notin \rho$ dur. $\overset{\rho \text{ tn.}}{\Rightarrow} x \in (X - Y)^{\star}$ dır. O halde $X^{\star} - Y^{\star} \subset (X - Y)^{\star}$ dir.

R T_1-uzayının herhangi X alt kümesi için $\widehat{X}$ yı yeni kapanış olarak tanımlayalım ve X in $\star$-kapanışı olarak adlandıralım, öyleki $\widehat{X} = X \cup X^{\star}$ dır. O zaman Önerme 1.1.5 (3) den $\widehat{X} \subset cl(X)$ dir.

Önerme 1.1.5 kullanarak aşağıdaki teoremi ispat edebiliriz.

Teorem 1.1.6: R nin keyfi X ve Y alt kümeleri için

(1) $X \subset Y$ ise $\widehat{X} \subset \widehat{Y}$ dir.

(2) $\widehat{X \cup Y} \subset \widehat{X} \cup \widehat{Y}$

(3) $X \subset \widehat{X}$

(4) $\widehat{\widehat{X}} \subset \widehat{X}$

(5) $\widehat{\varnothing} = \varnothing$

(6) Herhangi $x \in R$ noktası için $\widehat{x} = x$

İspat:(1) $X \subset Y$ olsun. $\widehat{X} \overset{\widehat{X} \text{ tn.}}{=} X \cup X^{\star} \overset{X \subset Y}{\subset} Y \cup X^{\star} \overset{\text{Önerme 1.1.5 (1)}}{\subset} Y \cup Y^{\star} \overset{\widehat{X} \text{ tn.}}{=} \widehat{Y}$ dır. O halde $\widehat{X} \subset \widehat{Y}$ olur.

(2) $\widehat{X \cup Y} \overset{\widehat{X} \text{ tn.}}{=} (X \cup Y) \cup (X \cup Y)^{\star} \overset{\text{Önerme 1.1.5 (2)}}{=} (X \cup Y) \cup (X^{\star} \cup Y^{\star}) \overset{\widehat{X} \text{ tn.}}{=} \widehat{X} \cup \widehat{Y}$ dır. O halde $\widehat{X \cup Y} \subset \widehat{X} \cup \widehat{Y}$ olur.

(3) $X \subset X \cup X^{\star} \overset{\widehat{X} \text{ tn.}}{=} \widehat{X}$ dır. O halde $X \subset \widehat{X}$ olur.

(4) $\widehat{\widehat{X}} \overset{\widehat{X}\text{ tn.}}{=} \widehat{X} \cup (\widehat{X})^{\star} \overset{\widehat{X}\text{ tn.}}{=} (X \cup X^{\star}) \cup (X \cup X^{\star})^{\star} \overset{\text{Önerme 1.1.5 (2)}}{=} (X \cup X^{\star}) \cup (X^{\star} \cup X^{\star\star}) = X \cup X^{\star} \cup X^{\star\star} \overset{\text{Önerme 1.1.5 (3)}}{\subset} = X \cup X^{\star} \cup X^{\star} = X \cup X^{\star} \overset{\widehat{X}\text{ tn.}}{=} \widehat{X}$. O halde $\widehat{\widehat{X}} \subset \widehat{X}$ olur.

(5) $\widehat{\varnothing} = \varnothing \cup \varnothing^{\star} = \varnothing$. O halde $\widehat{\varnothing} = \varnothing$ olur.

(6) Herhangi $x \in R$ noktası için $x = \{x\}$ ise $\widehat{x} = x \cup x^{\star} \overset{x^{\star} \subset cl(x) = x}{=} x \cup x = x$. O halde herhangi $x \in R$ noktası için $\widehat{x} = x$ olur.

$\rho^{\star}$ R nin alt kümelerinin Tanım 1.1.4 deki (A) ve (B) koşullarını sağlayan herhangi bir ailesi olsun.Ayrıca $\rho^{\star}$ (C) ve (D) koşullarını da sağlasın.

(C) Herhangi $x \in R$ noktası için $x \in \rho^{\star}$ dır.

(D) Eğer her $x \in X$ için burada $X \cap U_x \in \rho^{\star}$ olacak şekilde x in bir U_x komşuluğu var ise o zaman $X \in \rho^{\star}$ dır.

Bu durumda $X^{\star}$ ve $\widehat{X}$ kümeleri daha önce ρ için tanımlandığı gibi $\rho^{\star}$ içinde tanımlanır.

Önerme 1.1.7: Aşağıdakiler denktir.

$\{X \in \rho^{\star}\} \equiv \{X \cap X^{\star} = \varnothing\} \equiv \{X^{\star} = \varnothing\}$

İspat: Kabul edelimki $X \in \rho^{\star}$ ise o zaman R uzayının her p noktası ve p nin her U_p komşuluğu için, (A) dan $U_p \cap X \in \rho^{\star}$ dır. Böylece $X^{\star} = \varnothing$ ve buradan $X \cap X^{\star} = \varnothing$ dır. Tersini ispatlayalım. Kabul edelimki $X \notin \rho^{\star}$ dır, o zaman (D) den burada bir $x \in X$ noktası vardır öyleki x in bütün U_x komşulukları için $X \cap U_x \notin \rho^{\star}$ dır. Buradan $x \in X^{\star}$ ve sonuç olarak $X \cap X^{\star} \neq \varnothing$ demektir.

Bu bölüm boyunca R uzayının $\rho^{\star}$ ait olmayacağını kabul edeceğiz. Kabul edelimki R uzayı $\rho^{\star}$ ait değildir, eğer $R \in \rho^{\star}$ ise o zaman herhangi $X \subset R$ için, (A) dan $X \in \rho^{\star}$ dır ve Önerme 1.1.7 den bir $\star$-topolojiden $\widehat{X} = X$ dir.

Önerme 1.1.8: $(X - X^{\star})^{\star} = \varnothing$ dir.

İspat: Önerme 1.1.5 (1) den $(X - X^{\star})^{\star} \subset X^{\star}$ ve böylece $(X - X^{\star}) \cap (X - X^{\star})^{\star} \subset (X - X^{\star}) \cap X^{\star} = \varnothing$ dir. Buradan ve Önerme 1.1.7 den $(X - X^{\star})^{\star} = \varnothing$ elde edilir.

Ayrıca aşağıdaki önerme Önerme 1.1.7 den direk elde edilir.

Lemma 1.1.9: Eğer $Y \in \rho^{\star}$ ise o zaman $(X \cup Y)^{\star} = X^{\star} = (X - Y)^{\star}$ dır.

İspat: $Y \in \rho^\star$ olsun. $(X \cup Y)^\star \overset{\text{Önerme 1.1.5 (2)}}{=} X^\star \cup Y^\star \overset{\text{Önerme 1.1.7 } Y \in \rho^\star \text{ old. } Y^\star = \varnothing}{=} X^\star$ dir. O halde $(X \cup Y)^\star = X^\star$ dır.

Diğer taraftan $X^\star - Y^\star \overset{\text{Önerme 1.1.5 (4)}}{\subset} (X - Y)^\star \overset{\text{Önerme 1.1.7 } Y \in \rho^\star}{\Rightarrow} X^\star \subset (X - Y)^\star$ ...(1) ve $X - Y \subset X \overset{\text{Önerme 1.1.5 (1)}}{\Rightarrow} (X - Y)^\star \subset X^\star$ ...(2) dir.

(1) ve (2) den $X^\star = (X - Y)^\star$ dır. O halde $(X \cup Y)^\star = X^\star = (X - Y)^\star$ olur.

R T_1-uzayının X kümesinin $\star$-limit noktasını tanımlayalım. Bir p noktası X in bir $\star$-limit noktasıdır ancak ve ancak $p \in \widehat{X - p}$ ve X in bütün $\star$-limit noktalarının kümesi X in $\star$-türev kümesi olarak adlandırılırsa $\left\{p \in \widehat{X - p}\right\} \equiv \{p \in (X - p)^\star\} \equiv \{p \in X^\star\}$ denkliği (C) den ve Önerme 1.1.9 dan çıkar. Böylece $X^\star$ önemsizdir, fakat X in $\star$-türev kümesidir. Sonuç olarak herhangi $X \subset R$ için X', X in orjinal türev kümesi olmak üzere $X^\star \subset X'$dir.

1.2. $\star$-Kapalı Kümeler ve $\star$-Açık Kümeler

Tanım 1.2.1: R bir topolojik T_1-uzay ve $X \subset R$ olsun. Bütün $\star$-limit noktalarını içeren bir küme $\star$-kapalı olarak adlandırılır. Böylece X $\star$-kapalıdır ancak ve ancak $X^\star \subset X$ ya da denk olarak $\widehat{X} = X$ dir. Bir $\star$-kapalı kümenin bir tümleyeni $\star$-açık olarak adlandırılır.

Ayrıca bir kapalı (benzer şekilde açık) küme $\star$-kapalı (benzer şekilde $\star$-açık) tır.

Tanım 1.2.2: R bir topolojik T_1-uzay ve $X \subset R$ olsun. Bir kümenin her noktası $\star$-limit noktası ise bu küme $\star$-dense-in- itself olarak adlandırılır. Böylece bir X kümesi $\star$-dense-in- itselfdir ancak ve ancak $X \subset X^\star$ ya da denk olarak $\widehat{X} = X^\star$ dir.

Tanım 1.2.3: R bir topolojik T_1-uzay ve $X \subset R$ olsun. $\star$-kapalı ve $\star$-dense-in- itself bir küme $\star$-perfect olarak adlandırılır ve böylece bir X kümesi $\star$-perfectdir ancak ve ancak $X = X^\star$ dır.

Önerme 1.2.4: $X^\star$ kümesi $\star$-perfectdir.

İspat: $X^\star = X^{\star\star}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Önerme 1.1.5 (4) ve

Önerme 1.1.8 den $X^\star - X^{\star\star} \subset (X - X^\star)^\star = \varnothing$ dir. Böylece $X^{\star\star} \supset X^\star$ dır. Tersi Önerme 1.1.5 (3) den $X^{\star\star} \subset X^\star$ dir. Böylece $X^\star = X^{\star\star}$ olur.

Not: $\star$-dense-in-itself bir küme dense-in-itselfdir, dolayısıyla bir $X^\star$ kümesi Önerme 1.2.4 den perfectdir.

Teorem 1.2.5: Bir $X \subset R$ alt kümesi $\star$-kapalıdır ancak ve ancak X bir perfect küme ve $\rho^\star$ ait bir kümenin birleşimidir.

İspat: Kabul edelimki X $\star$-kapalı olsun. Buradan $X^\star \subset X$ dır. Böylece özdeş olarak $X = X^\star \cup (X - X^\star)$ dir, burada $X^\star$ yukarıdaki sonuçtan perfectdir ve diğer taraftan Önerme 1.1.7 ve Önerme 1.1.8 den $X - X^\star \in \rho^\star$dır.

Tersine, bir perfect P kümesi ve $\rho^\star$ ait bir Q kümesi için kabul edelimki $X = P \cup Q$ olsun. O zaman Önerme 1.1.7 den $X^\star = P^\star \cup Q^\star \subset cl(P) = P \subset X$ dir. Böylece X kümesi $\star$-kapalıdır.

Teorem 1.2.6: Bir $X \subset R$ alt kümesi $\star$-açıktır ancak ve ancak X bir açık küme ve $\rho^\star$ ait bir kümenin farkıdır.

İspat: R nin her $\star$-açık X kümesi için Teorem 1.2.5 den $R - X = (R - X)^\star \cup \{(R - X) - (R - X)^\star\}$ dır. Böylece $X = \{R - (R - X)^\star\} - \{(R - X) - (R - X)^\star\}$, burada $R - (R - X)^\star$ açıktır ve $(R - X) - (R - X)^\star \in \rho^\star$ dır.

Tersine, bir G açık kümesi ve $\rho^\star$ ait bir Q kümesi için kabul edelimki $X = G - Q$ ise o zaman $R - X = (R - G) \cup Q$ ve böylece $R - X$ $\star$-kapalı olduğundan X $\star$-açıktır.

1.3. $\star$-Dense-İn- İtself Uzay

$\star$-dense-in- itself R uzayının var olması $R^\star = R$ eşitliğinin sağlanması anlamına gelir. Örneğin, eğer $\rho^\star$ dense-in- itself bir R T_1-uzayının hiçbir yerde yoğun kümelerinin ailesi olsun, o zaman $\rho^\star$ ailesi kesim 1.1 deki (A), (B), (C) ve (D) koşullarını sağlar ve bu durumda her $X \subset R$ için $X^\star = cl(int(cl(X)))$ dir. (Fomin, 1943, page 41) O zaman R uzayı $\star$-dense-in- itself, çünkü $R^\star = cl(int(cl(R))) = R$ dir.

Önerme 1.3.1: Eğer $\star$-dense-in- itself R uzayında G açık ise o zaman $\widehat{G} = cl(G) = G^\star$ dır.

İspat: $\star$-dense-in- itself R uzayında G açık olduğundan G $\star$-dense-in- itselfdir, buradan $G \subset G^\star$ ve böylece $cl(G) \subset cl(G^\star) = G^\star$ dır. Fakat bu genelde $G^\star \subset \widehat{G} \subset cl(G)$ ve böylece $cl(G) = G^\star$ dır. Buradan $\widehat{G} = G^\star$ olduğunu kurabiliriz, fakat bu G $\star$-dense-in- itself olduğunda geçerlidir.

Önerme 1.3.2: $\star$-dense-in- itself R uzayında U bir $\star$-açık küme olsun öyleki G açık ve $P \in \rho^\star$ olmak üzere $U = G - P$ dır. O zaman $\widehat{U} = cl(U) = U^\star = G^\star = \widehat{G} = cl(G)$ dır.

İspat: $U^\star = G^\star$ olduğunu ispatlamamız yeterlidir. Önerme 1.1.7 den $U^\star = (G - P)^\star \supset G^\star - P^\star = G^\star$ ve tersine $U \subset G \overset{\text{Önerme 1.1.5 (1)}}{\Rightarrow} U^\star \subset G^\star$ dir. Dolayısıyla $U^\star = G^\star$ elde edilir. Önerme 1.3.1 den $G^\star = \widehat{G} = cl(G)$ ve $\widehat{U} = cl(U) = U^\star$ olduğundan $\widehat{U} = cl(U) = U^\star = G^\star = \widehat{G} = cl(G)$ elde edilir.

Yukarıdaki lemmada $G^\star = U^\star$ iddiası R nin $\star$-dense-in- itself kabul edilmemesi durumunda sağlanır.

Tanım 1.3.3: A ve B iki alt kümesi bir R T_1-uzayında $\star$-ayrıkdır ancak ve ancak $\widehat{A} \cap B$ ve $A \cap \widehat{B}$ ikiside boştur. Bir R T_1-uzayı $\star$-bağlantılıdır ancak ve ancak R iki boş olmayan $\star$-ayrık alt kümenin birleşimi değildir.

Teorem 1.3.4: $\star$-dense-in- itself bir R uzayı $\star$-bağlantılıdır ancak ve ancak R bağlantılıdır.

İspat: R bağlantılı olsun. Tersini kabul edelim. Burada $\star$-açık ve $\star$-kapalı A ve B kümeleri vardır öyleki $R = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, $A \neq \varnothing$ ve $B \neq \varnothing$ dır. O zaman

(1) $R = R^\star = A^\star \cup B^\star$ dır.

A ve B $\star$-kapalı olduğundan $\varnothing = A \cap B \supset A^\star \cap B^\star$ ve böylece

(2) $A^\star \cap B^\star = \varnothing$ dir.

Fakat A ve B $\star$-açık olduğundan Önerme 1.3.2 den

(3) $A^\star = cl(A) \neq \varnothing$, $B^\star = cl(B) \neq \varnothing$ dır.

(1), (2) ve (3) den $A^\star$ ve $B^\star$ R de kapalıdır. Tersini kabul ettiğimizde R

bağlantılı değildir. Tersi açıktır.

Sonuç 1.3.5: $\star$-dense-in- itself uzayda $\star$-perfect küme $\star$-bağlantılıdır ancak ve ancak bağlantılıdır.

Bir $\star$-scattered küme $\star$-dense-in- itself herhangi boş olmayan alt kümesini içermeyen bir kümedir. Dense-in- itself R uzayında $X \subset R$ scattereddir ancak ve ancak hiçbir yerde yoğundur. (Kuratowski, 1933, page 47). Uygun olarak yoğun, sınır ve hiçbir yerde yoğun kümelerin kavramlarını, sırasıyla $\star$-yoğun, $\star$-sınır, $\star$-hiçbir yerde yoğun kümelerin kavramlarını tanıtacağız.

Teorem 1.3.6: R uzayında $\rho^\star$ ait bir X kümesi dense-in- itselfdir ancak ve ancak X $\star$-scattereddir. (denk olarak yukarıdaki sonuçtan $\star$-hiçbir yerde yoğundur.)

İspat: X $\star$-scattereddir ve denk olarak $X = (X - X^\star) \cup (X \cap X^\star)$ olsun. Buradan Önerme 1.1.8 den $X^\star = (X \cap X^\star)^\star$ dır. Böylece $X \cap X^\star \subset X^\star = (X \cap X^\star)^\star$ dır. $X \cap X^\star$ kümesi $\star$-dense-in- itself olduğundan ve X de kapsandığından, $X \cap X^\star = \varnothing$ dir. Önerme 1.1.7 den $X \in \rho^\star$ dır.

Tersini gösterelim. Kabul edelimki $X \in \rho^\star$ dır. Eğer X $\star$-scattered değilse, $\star$-dense-in- itself bir boş olmayan Y kümesi vardır ve X de kapsanır. O zaman Önerme 1.1.7 den $Y \subset Y^\star \subset X^\star = \varnothing$ dir. Böylece tersinden Y boştur, çelişkidir. Dolayısıyla X $\star$-scattereddir.

Teorem 1.3.7: R, T_1-uzayında ($\star$-dense-in- itself olması gerekli değildir), bir $\star$-hiçbir yerde yoğun küme sınırlıdır. Eğer R, $\star$-dense-in- itself ise bir hiçbir yerde yoğun küme $\star$-hiçbir yerde yoğundur.

İspat: Bu teoremin birinci kısmı açıktır. X, $\star$-dense-in- itself R uzayının bir hiçbir yerde yoğun alt kümesi olsun. Önerme 1.3.1 den $R = cl(R - cl(X)) = \widehat{R - cl(X)} \subset \widehat{R - X}$, X $\star$-hiçbir yerde yoğundur.

1.4. Bar $\star$-Topoloji

$(cl(\rho))^\star$, Kesim 1.1 de (A), (B), (C) ve (D) koşullarına ek olarak aşağıdaki (E) koşulunuda sağlayan bir R T_1 uzayının alt kümelerinin bir ailesi olsun.

(E) $X \in (cl(\rho))^\star$ ise $cl(X) \in (cl(\rho))^\star$ dır.

Herhangi $X \subset R$ için bir yeni $\widetilde{X}$ kapanışı tanımlayalım. $\widetilde{X} = X \cup (cl(X))^\star$ kümesine X in bar $\star$-kapanışı denir. O zaman R, bar $\star$-topolojide ile bir T_1-uzaydır.

Önerme 1.4.1: Herhangi $X \subset R$ için, $X^\star \subset \widehat{X} \subset \widetilde{X} \subset cl(X)$ dir.

İspat: Tanımdan $X^\star \subset \widehat{X} = X \cup X^\star \subset X \cup (cl(X))^\star = \widetilde{X}$ ve $\widetilde{X} = X \cup (cl(X))^\star \subset cl(X)$ olduğundan $X^\star \subset \widehat{X} \subset \widetilde{X} \subset cl(X)$ dir.

Aşağıdaki teorem Teorem 1.2.5 ye benzerdir.

Teorem 1.4.2: Bir $X \subset R$ alt kümesi bar $\star$-kapalıdır ancak ve ancak X, bir kapalı küme ve $(cl(\rho))^\star$ ait bir kümenin birleşimidir.

İspat: Kabul edelimki $X \subset R$ bar $\star$-kapalı olsun. O zaman $X = (cl(X))^\star \cup (X - (cl(X))^\star)$, burada $(cl(X))^\star$ kapalıdır. Önerme 1.1.7 ve Önerme 1.1.8 den $X - (cl(X))^\star \subset X - X^\star \in (cl(\rho))^\star$ olduğundan $X - (cl(X))^\star \in (cl(\rho))^\star$dır.

Tersine F kapalı kümesi ve $Q \in (cl(\rho))^\star$ olmak üzere $X = F \cup Q$ olsun. O zaman (E) den $(cl(X))^\star = (cl(F))^\star \cup (cl(Q))^\star = F^\star \subset F \subset X$ dir ve böylece $\widetilde{X} \subset X$ dir.

Aşağıdaki teorem Teorem 1.2.6 ya benzerdir ve ispatıda benzer şekildedir.

Teorem 1.4.3: Bir $X \subset R$ kümesi bar $\star$-açıktır ancak ve ancak X, bir açık küme ve $(cl(\rho))^\star$ ait bir kümenin farkıdır.

Önerme 1.3.1 ve Önerme 1.3.2 den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 1.4.4: Eğer G bir R T_1 uzayının herhangi bar $\star$-açık kümesi ise öyleki U açık ve $P \in (cl(\rho))^\star$ olmak üzere $G = U - P$ dır, o zaman $G^\star = U^\star$ dır. Ayrıca eğer R, $G^\star = U^\star$ ile uyan G nin $\star$-dense-in- itself orjinal kapanışı, $\star$-kapanışı ve bar $\star$-kapanışıdır.

Genel olarak aşağıdaki iddialar $\star$-topoloji için sağlanmaz.

Teorem 1.4.5: R $\star$-dense-in- itself uzayı olsun.

(1) $X \subset R$, R de bar $\star$-yoğundur ancak ve ancak R de yoğundur.

(2) $X \subset R$ bar $\star$-sınırlıdır ancak ve ancak sınırlıdır.

İspat: **(1)** Eğer $cl(X) = R$ ise o zaman $\widetilde{X} = X \cup (cl(X))^{\star} = R^{\star} = R$ dir. Böylece X bar yoğundur. Tersi Önerme 1.4.1 den açıktır.

(2) Eğer $cl(R - X) = R$ ise o zaman $\widetilde{R - X} = (R - X) \cup (cl(R - X))^{\star} = R^{\star} = R$ dir. Tersi açıktır.

II. BÖLÜM

İDEALLERDEN ELDE EDİLEN BAZI YENİ TOPOLOJİLER

Bu bölümde Hamlett ve Jankovic (1990. New topologies from old via ideals) tarafından idealler kullanılarak elde edilen yeni topolojiler 5 kesim halinde incelenecektir. 1. kesimde bir ideal kullanılarak bir küme üzerinde $\star$-topoloji elde edilecek ve temel özellikleri çalışılacaktır. 2. kesimde $\tau^\star$ açık kümeleri için taban kümeleri incelenecektir. 3. kesimde bir topoloji ile bir idealin uygunluğu kavramı incelenecektir. 4. kesimde bazı ideallerden elde edilen topolojik uzayların temel özellikleri incelenecektir. 5. kesimde uygulamalar verilecektir.

2.1. Ön Tanımlar

Tanım 2.1.1: X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir ailesi I olmak üzere,

(A) $A \in I$ ve $B \subset A$ ise $B \in I$ (kalıtsallık)

(B) $A \in I$ ve $B \in I$ ise $A \cup B \in I$ (sonlu toplamsallık)

koşulları sağlıyorsa, I ailesine X üzerinde bir idealdir denir.

Bazı çok kullanılan ideal örnekleri verelim:

I_f : X in sonlu alt kümelerinin ideali

I_c : X in sayılabilir alt kümelerinin ideali

I_{cd} : (X, τ) da kapalı diskre kümelerin ideali

I_n :(X, τ) da hiçbir yerde yoğun kümelerin ideali

I_m:(X, τ) da zayıf kümelerin ideali

I_s:(X, τ) da scattered kümelerin ideali

I_k:(X, τ) da rölatif kompakt kümelerin ideali

I_{L_0}: Lebesgue sıfır kümelerinin ideali

Ayrıca asal ideallerin tümleyenler kümesinin ailesi (bir uzayı içermeyen) süper kümelerin işlemleri altında boş olmayan kümelerin bir boş olmayan ailesi ve sonlu arakesitleri olacaktır. Bir ailede bir süzgeç ideal ise bazen dual süzgeç olarak adlandırılacaktır.

Genel uygulamalarda bir uzay eğer x in P özelliğine sahip bir U komşuluğu varsa U bu özelliğe sahiptir. Bu düşünceyi alt kümelere genişletirsek eğer x in bir U komşuluğu ve bir A alt kümesi x noktasında P özelliğine sahipse $U \cap A$ da bu özelliğe sahiptir. Ayrıca x noktası A alt kümesinde olabilirde olmayabilirde. Sembolik olarak idealleri belirli özelliklere sahip alt kümelerin bir ailesi olarak tanımlayabiliriz. Bir uzaydaki bir alt kümenin bu özelliğe sahip olmayan noktalarının kümesi aşağıda olduğu gibi temel kavramdır.

Tanım 2.1.2: (X, τ) bir uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. O zaman $A^\star\ (I, \tau) = \{x \in X\ :\ \text{her } U \in N(x) \text{ için } A \cap U \notin I\}$ kümesine I ideali ve τ topolojisine bağlı A kümesininin lokal fonksiyonu denir.

Karışıklığa neden olmadıkça; $A^\star\ (I, \tau)$ sembolü yerine $A^\star\ (I)$ ya da basit olarak $A^\star$ ile göstereceğiz. Ayrıca Tanım 2.1.2 de $N(x)$, x in komşuluklar ailesidir.

Basit olarak idealler $\{\varnothing\}$ ve $P(X) = \{A : A \subset X\}$ dir. Belirtelim ki her $A \subset X$ için $A^\star(\{\varnothing\}) = cl(A)$ ve $A^\star(P(X)) = \varnothing$ dir. I_f, X kümesinin sonlu alt kümelerinin ideali ve A^w, $A \subset X$ in w-yığılma noktalarının kümesi olsun. ($x \in A^w$ ancak ve ancak her $U \in N(x)$ için $U \cap A$ sonsuzdur.) $A^w = A^\star\ (I_f)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer I_c, X kümesinin sayılabilir alt kümelerinin ideali ise $A^\star\ (I_c)$ tamamen A kümesinin condensation noktalarının kümesidir. (eğer her $U \in N(x)$ için $U \cap A$ sayılamaz ise $x \in X$, $A \subset X$ de bir condensation noktadır.) Böylece $A^\star\ (I)$ da kapanış noktasını, w-yığılma noktasını ve condensation noktasını genelleştirdik. Aşağıdaki teorem (Kuratowski, 1933; Vaidyanathaswamy, 1945) lokal fonksiyonların temel ve kullanışlı özelliklerini içermektedir.

Teorem 2.1.3: (X, τ) bir uzay, I ve J; X üzerinde idealler ve A, B; X in alt kümeleri olsun. O zaman

(1) $A \subset B$ ise $A^\star \subset B^\star$

(2) $I \subset J$ ise $A^{\star}(J) \subset A^{\star}(I)$

(3) $A^{\star} = cl(A^{\star}) \subset cl(A)$ ($A^{\star}$, $cl(A)$ nın kapalı alt kümesidir.)

(4) $(A^{\star})^{\star} \subset A^{\star}$

(5) $(A \cup B)^{\star} = A^{\star} \cup B^{\star}$

(6) $(A \cap B)^{\star} \subset A^{\star} \cap B^{\star}$

(7) $A^{\star} - B^{\star} = (A - B)^{\star} - B^{\star} \subset (A - B)^{\star}$

(8) $U \in \tau$ ise $U \cap A^{\star} = U \cap (U \cap A)^{\star} \subset (U \cap A)^{\star}$

(9) $I \in I$ ise $(A \cup I)^{\star} = A^{\star} = (A - I)^{\star}$.

İspat: (1) $A \subset B$ olsun. $x \in A^{\star} \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Rightarrow} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I \overset{A \subseteq B}{\Rightarrow}$ $U \cap B \notin I$ dir. Gerçekten $U \cap B \in I$ olsa $A \subset B$ olduğundan $U \cap A \subset U \cap B$ dir. Buradan $U \cap A \in I$ olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\forall\, U \in N(x)$ için $U \cap B \notin I \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Rightarrow} x \in B^{\star}$ dır. O halde $A^{\star} \subset B^{\star}$ dır.

(2) $I \subset J$ olsun. $x \in A^{\star}(J) \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Rightarrow} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin J \overset{I \subseteq J}{\Rightarrow} U \cap A \notin I$ dir. Yani $\forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Rightarrow} x \in A^{\star}(I)$ dır. O halde $A^{\star}(J) \subset A^{\star}(I)$ dır.

(3) Açıktır.

(4) $x \in (A^{\star})^{\star} \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Rightarrow} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A^{\star} \notin I \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Rightarrow} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I$ dir. $\overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Rightarrow} x \in A^{\star}$ dır. O halde $(A^{\star})^{\star} \subset A^{\star}$ dır.

(5) $x \in (A \cup B)^{\star} \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Longleftrightarrow} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap (A \cup B) \notin I \Longleftrightarrow U \cap (A \cup B) = (U \cap A) \cup (U \cap B) \notin I \Longleftrightarrow \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I$ veya $U \cap B \notin I$ $\overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Longleftrightarrow} x \in A^{\star}$ veya $x \in B^{\star} \Longleftrightarrow x \in A^{\star} \cup B^{\star}$ dır. O halde $(A \cup B)^{\star} = A^{\star} \cup B^{\star}$ dır.

(6) $x \in (A \cap B)^{\star} \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Rightarrow} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap (A \cap B) \notin I \Rightarrow U \cap (A \cap B) = (U \cap A) \cap (U \cap B) \notin I \Rightarrow \forall\, U \in N(x)$ için $(U \cap A) \notin I$ ve $(U \cap B) \notin I \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Rightarrow}$ $x \in A^{\star}(I)$ ve $x \in B^{\star} \Rightarrow x \in A^{\star} \cap B^{\star}$ dır. O halde $(A \cap B)^{\star} \subset A^{\star} \cap B^{\star}$ dır.

(7) $x \in (A - B)^{\star} - B^{\star} \Longleftrightarrow x \in (A - B)^{\star}$ ve $x \notin B^{\star} \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Longleftrightarrow} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap (A - B) \notin I$ ve $U \cap B \in I \Longleftrightarrow U \cap (A - B) = (U \cap A) - (U \cap B) \notin I$ dır. Gerçekten $U \cap (A - B) = (U \cap A) - (U \cap B) \in I$ olsa $U \cap A = [(U \cap A) - (U \cap B)] \cup (U \cap B)$ dan $(U \cap A) - (U \cap B) \in I$ ve $U \cap B \in I$ olduğundan $U \cap A \in I$

olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $(U \cap A) - (U \cap B) \notin I \iff \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I$ ve $U \cap B \in I \overset{A^\star \text{ tn.}}{\iff} x \in A^\star$ ve $x \notin B^\star \iff x \in A^\star - B^\star$ dır. O halde $A^\star - B^\star = (A - B)^\star - B^\star$ dır.

$(A - B)^\star - B^\star \subset (A - B)^\star$ olduğunu gösterelim. $x \in (A - B)^\star - B^\star \Rightarrow x \in (A - B)^\star$ ve $x \notin B^\star \overset{A^\star \text{ tn.}}{\Rightarrow} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap (A - B) \notin I$ ve $U \cap B \in I \Rightarrow (U \cap A) \notin I$ ve $U \cap B \in I \Rightarrow \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap (A - B) \notin I \overset{A^\star \text{ tn.}}{\Rightarrow} x \in (A - B)^\star$ dır. O halde $(A - B)^\star - B^\star \subset (A - B)^\star$ dır.

Dolayısıyla $A^\star - B^\star = (A - B)^\star - B^\star \subset (A - B)^\star$dır.

(8) $U \in \tau$ ise $x \in U \cap A^\star \iff x \in U$ ve $x \in A^\star \overset{A^\star \text{ tn.}}{\iff} x \in U$ ve $\forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I \iff x \in U$ ve $U \cap (U \cap A) \notin I \iff x \in U$ ve $x \in (U \cap A)^\star \iff x \in U \cap (U \cap A)^\star$ dır. O halde $U \cap A^\star = U \cap (U \cap A)^\star$ dır. Ayrıca $U \cap (U \cap A)^\star \subset (U \cap A)^\star$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $U \cap A^\star = U \cap (U \cap A)^\star \subset (U \cap A)^\star$ dır.

(9) $I \in I$ ise $x \in (A \cup I)^\star \overset{A^\star \text{ tn.}}{\iff} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap (A \cup I) \notin I \iff U \cap (A \cup I) = (U \cap A) \cup (U \cap I) \notin I \iff U \cap A \notin I$ veya $U \cap I \notin I \iff (U \cap I) \notin I$ olamaz. Buradan $U \cap A \notin I \overset{A^\star \text{ tn.}}{\iff} x \in A^\star$ dır. O halde $(A \cup I)^\star = A^\star$ dır.

$A^\star = (A - I)^\star$ olduğunu gösterelim. $x \in (A - I)^\star \overset{A^\star \text{ tn.}}{\iff} \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap (A - I) \notin I \iff U \cap (A - I) = (U \cap A) - (U \cap I) \notin I \iff U \cap A \notin I$ ve $U \cap I \in I \iff I \in I$ ise $U \cap I \in I$ dır. Buradan $U \cap A \notin I \overset{A^\star \text{ tn.}}{\iff} x \in A^\star$ dır. O halde $(A - I)^\star = A^\star$ dır.

Dolayısıyla $(A \cup I)^\star = A^\star = (A - I)^\star$ dır.

Tanım 2.1.4: $P(X)$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

$()^c : P(X) \longrightarrow P(X)$ fonksiyonu

(1) $\varnothing^c = \varnothing$

(2) $A \in P(X) \Rightarrow A \subset A^c$

(3) $A \in P(X), B \in P(X) \Rightarrow (A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

(4) $A \in P(X) \Rightarrow (A^c)^c = A^c$

koşullarını sağlıyorsa o zaman $()^c$ Kuratowski kapanış operatörüdür.

$\{A \in P(X) : A = A^c\}$ ailesine X üzerindeki bir topoloji için kapalı kümelerin ailesi denir.

Eğer $d : P(X) \longrightarrow P(X)$ fonksiyonu

(1) $d(\varnothing) = \varnothing$

(2) $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$ ve

(3) $d(d(A)) \subset d(A)$

koşullarını sağlıyorsa $A^c = A \cup d(A)$ ile tanımlanan $()^c : P(X) \longrightarrow P(X)$ fonksiyonunun $P(X)$ üzerinde Kuratowski kapanış operatörü olduğu gösterilebilir. Türev kümeleri yardımıyla oluşturulan operatörden doğrulan topoloji d ile çakışmaz.

$\star : P(X) \longrightarrow P(X)$

fonksiyonu yukarıdaki d fonksiyonu için gerekli koşulları sağlar, (Teorem 2.1.3 (4),(5); $\varnothing^\star = \varnothing$), bu nedenle $cl^\star(A) = A \cup A^\star$ bir Kuratowski kapanış operatörüdür. Bununla birlikte $cl^\star$ ın doğrudan bir kapanış operatörü olduğunu ispatlamak zor değildir. τ, X üzerindeki orjinal topoloji olmak üzere $cl^\star$ tarafından doğrulan topoloji $\tau^\star(I)$ ile gösterilecektir ve $\tau^\star(I) = \{U \subset X : cl^\star(X - U)$ $= X - U\}$ dır. Bir karışıklık olmadığı sürece $\tau^\star(I)$ sembolünü basit olarak $\tau^\star$ ile göstereceğiz.

Eğer $I = \{\varnothing\}$ ise o zaman $A^\star = cl(A)$ dır. Buradan $cl^\star(A) = cl(A)$ ve $\tau^\star = \tau$ dur. Eğer $I = P(X)$ ise o zaman her $A \subset X$ için $A^\star = \varnothing$ dir ve bundan dolayı $\tau^\star(I)$ ayrık topolojidir. $\{\varnothing\}$ ve $P(X)$ idealleri son durumda sırasıyla $\tau^\star = \tau$ ve $\tau^\star = \tau_{\text{ayrık}}$ tanımlanır. X üzerinde her I ideali için $\{\varnothing\} \subset I \subset P(X)$ dir. Teorem 2.1.3 (2) den $\tau \subset \tau^\star \subset \tau_{\text{ayrık}}$ dir. Özel olarak eğer (X, τ) üzerinde I ve J idealleri için $I \subset J$ ise o zaman $\tau^\star\ (I) \subset \tau^\star\ (J)$ dir.

İlerideki örneklerde $I \neq P(X)$ ve $\tau^\star(I)$ ayrık olduğunu göstereceğiz.

Örnek 2.1.5: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi için. $\{\{2n-1, 2n\} : n \in \mathbb{N}\}$ tabanı ile doğrulan τ topolojisi $\mathbb{N}$ ile donatılırsa ve I_f idealini düşünecek olursak $\mathbb{N}^\star(I_f) = \varnothing$ dir. Bu yüzden $\tau^\star(I_f)$ diskredir. Genellikle $X^\star(I_f) = \varnothing$ ancak ve ancak (X, τ) hemen hemen ayrıktır (yani herbir $x \in X$ sonlu komşuluğuna sahiptir.) ancak ve ancak $\tau^\star(I_f)$ ayrıktır.

(X, τ) da (benzer şekilde $(X, \tau^\star(I))$ da) A kümesinden elde edilen A^d türev (benzer şekilde $A^{d^\star}$) gösterimini hatırlayalım.($x \in A^d$; x, A kümesinin limit noktasıdır ancak ve ancak her $U \in N(x)$ için $(U - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$ dır.)

$A^{d^\star} \subset A^d$ ve ayrıca $x \in A^{d^\star}$ ancak ve ancak $x \in cl^\star(A - \{x\})$ ancak ve ancak $x \in (A - \{x\}) \cup (A - \{x\})^\star$ ancak ve ancak $x \in (A - \{x\})^\star$ dır. Bunlar $x \in A^{d^\star}$ ancak ve ancak her $U \in N(x)$ için $(U - \{x\}) \cap A \notin I$ dır. Eğer $\{x\}$ $\in I$ ise o zaman Teorem 2.1.3 (8) den $x \in A^{d^\star}$ancak ve ancak $x \in A^\star$ dır.

Aşağıdaki iki örnekte ideallerin herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ özelliğine sahip olduğu gösterilecektir.

Örnek 2.1.6: I_f , bir (X, τ) uzayının sonlu alt kümelerinin ideali olsun. Buradan herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I_f$ olduğundan $A^\star = A^{d^\star}$ dır. $A^\star = A^w$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle (X, τ) uzayında A kümesinin w-yığılma noktaları $(X, \tau^\star(I_f))$ uzayında A kümesinin limit noktaları ile çakışır. Buradan $(X, \tau^\star)$, $T_1(\{x\} \in I_f \Rightarrow \{x\}^\star = \varnothing \Rightarrow cl^\star\{x\} = \{x\})$ ve T_1 uzayında w-yığılma ve limit noktası kavramları çakışır. $A \subset X$ in w-yığılma noktalarının kümesinde (X, τ) ve $(X, \tau^\star)$ da çakışır. Ayrıca $A^\star(I_f) = A^d$ dir ancak ve ancak $\tau = \tau^\star(I_f)$ dir ancak ve ancak (X, τ) T_1 dir.

Örnek 2.1.5 de hemen hemen ayrık uzayını gösterdik ve $\tau^\star(I_f)$ ayrıktır. Eğer (X, ψ) ayrık olmayan uzayı ile başlarsak o zaman, eğer $A \notin I_f$ ise $A^\star(I_f) =$ X ve eğer $A \in I_f$ ise $A^\star(I_f) = \varnothing$ dir. Bundan dolayı eğer $A \notin I_f$ ise $cl^\star(A) =$ X ve $A \in I_f$ ise $cl^\star(A) = A$ dir. Bunlar $\psi^\star(I_f)$ iyi bilinen sonlu tümleyen topolojidir.

Örnek 2.1.7: I_c, (X, τ) uzayında sayılabilir alt kümelerin ideali olsun. $A^\star = A^{d^\star}$ ve $A^\star$, A kümesinin condensation noktalarının kümesiydi, (X, τ) da A kümesinin noktaları condensation $(X, \tau^\star(I_c))$ de A kümesinin limit noktaları olduğunu sonuçlandırmıştık.

Eğer (X, ψ) ayrık olmayan uzay ile başlarsak $\psi^\star$ (I_c) sayılabilir olmayan topoloji olduğu görülür. Farklı aileleri örneklerle gözönünde tutacağız. (R, τ) alışılmış topoloji ile reel dizi olsun. O zaman $\tau^\star(I_c)$ topolojisi hiçbir yerde sayılabilir tümleyene genişlemiş topoloji olur (Steen ve Seebach, 1978, Exp.

63). Ayrıca $\tau^\star(I_c)$, $\tau\cup\ \psi^\star\ (I_c)$ den meydana gelen en küçük topolojidir, yani τ ve $\psi^\star(I_c)$ den $\tau\vee\ \psi^\star\ (I_c)$ supremumdur.

İdeallerden meydana gelen topolojileri ters örneklerle kuralım. Topolojilerin önemli temel özelliklerini önceki ifadelerle doğrulayalım. Hatırlayalım ki (X,τ) uzayında A kümesi kapalı ve ayrıktır ancak ve ancak $A^d=\varnothing$ dir.

Önerme 2.1.8: X üzerinde I ideali ile (X,τ) bir uzay olsun. Eğer $I\in I$ ise o zaman $(X,\tau^\star)$ da I kapalı ve ayrıktır.

İspat: $I\in I\Rightarrow I^\star=\varnothing\Rightarrow cl^\star(I)=I\cup I^\star=I\Rightarrow I$ kapalıdır. Ayrıca $I^{d^\star}=\varnothing\Rightarrow I$ ayrıktır.

Örnek 2.1.9: (X,τ) bir uzay olsun. O zaman $I_{cd}=\left\{A\subset X:A^d=\varnothing\right\}$ X üzerinde idealdir ve $A^d\subset A^\star$ dır. Bu durumda $\tau^\star=\tau$ dur. (Genel olarak $\tau^\star(I)=\tau$ ancak ve ancak her $I\in I$, (X,τ) da kapalı olduğunu gösterebiliriz.) Ayrıca Önerme 2.1.8 den I_{cd}, $\tau^\star=\tau$ özelliğiyle X üzerinde en büyük idealdir. Sonuçta $A^\star=A^d$ dir ancak ve ancak (X,τ) T_1 dir.

Örnek 2.1.10: (X,τ) bir uzay ve $A\subset X$ olsun. $I(A)=\{B\subset X\ :B\subset A\ \}$ X üzerinde idealdir. $I(A)$ tarafından doğrulan topolojinin iki örneğini gösterelim.

(X,ψ) ayrık olmayan uzay ve $p\in X$ olsun. Buradan $I(X-\{p\})=\{A\subset X\ :p\notin A\}$ ailesi Steen ve Seebach (1978, Exp. 8-12) de kısmi nokta topoloji olarak bilinen bir basit $\psi^\star=\{A\subset X\ :p\in A\}\cup\{\varnothing\}$ topolojiyi doğurur.

İdealler tarafından üretilen topolojinin örneği çok karmaşıktır. (R,τ) alışılmış topoloji ile reel dizi ve $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in N\right\}$ olsun. O zaman $\tau^\star(I(A))$ Smirnov'un topolojisi olarak bilinir (Steen ve Seebach, 1978, Exp. 64).

İlerideki örneklerde hiçbir yerde yoğun kümelerin idealini göz önünde bulunduracağız.

Örnek 2.1.11: (X,τ) bir uzay ve $I_n=\{A\subset X:\ int(cl(A))=\varnothing\}$, yani I_n, (X,τ) nun hiçbir yerde yoğun alt kümelerinin ailesi olsun. I_n, X üzerinde bir idealdir ve bu önemli ideal iyi bir özelliğe sahiptir (Vaidyanathaswamy, 1960). Bir $A \subset X$ kümesinin lokal fonksiyonu $A^\star(I_n) = cl(int(cl(A)))$ dır.

Genelde τ aşikar olmayan daha zayıf topolojide $cl^\star(A) = A \cup cl(int(cl(A)))$ dır. Njastad (1965) de $A \subset int(cl(int(A)))$ ile $A \subset X$ kümeleri açık kümeler olarak tanımlanabilen bir τ^α topolojisi üretir. (X, τ^α) da kapalı kümeler olduğundan $A \subset X$ kümeleri ile $cl(int(cl(A))) \subset A$ dır, yani $A^\star(I_n, \tau) \subset A$ dır, böylece $\tau^\alpha = \tau^\star(I_n, \tau)$ dur.

Crossley ve Hildebrand (1972) de X üzerinde $[\tau]$ topolojilerinin bir ailesini gösterirsek (τ, X üzerinde bir topolojidir.) tanımdaki gibi
$F(\tau) = \{\sigma : \sigma$ X üzerinde bir topoloji ve her $A \subset X$ için $A \subset cl_\tau(int_\tau(A))$ ancak ve ancak $A \subset cl_\sigma(int_\sigma(A))$ sınıfı için en ince topoloji konumundadır.$\}$
$F(\tau) = \tau^\star(I_n, \tau)$ dur.

İlerideki örneklerde bir lokal fonksiyonun tanımı yapılacaktır. Öncelikle aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.1.12: Bir I idealine eğer sayılabilir birleşim olarak yazılabiliyorsa σ-ideal denir, yani her $n \in N$ için $I_n \in I$ ise o zaman $\cup\{I_n : n \in N\} \in I$ dır.

Örnek 2.1.13: Bir uzayın alt kümesi eğer hiçbir yerde yoğun kümelerin sayılabilir birleşimleri ise zayıftır (ya da 1. kategoridendir) denir. Bir uzayın bütün zayıf alt kümelerinin ailesi σ-idealdir. Bu idealleri I_m ile tanımlarız. Zayıf olmayan kümeler 2. kategoriden kümeleri olarak adlandırılır, uzayda bulunan A kümesi için $A^\star(I_m)$ nin noktaları A nın 2. kategorinin noktalarıdır (Kuratowski, 1966) . Blumberg (1922) de eğer $x \in A^\star(I_m)$ ise bir A kümesi ile "inexhaustibly approached" olabilen bir uzaydaki bir x noktasını tanımlar.

$A^\star(I_n) = cl(int(cl(A)))$ ise I_n, (X, τ) uzayında hiçbir yerde yoğun kümelerin idealidir. $A^\star(I_m)$, $A^\star = cl(int(A^\star))$ önemli özelliğe sahiptir. (İleride Teorem 2.3.12 ve Teorem 2.3.6(2) den $A^\star(I_n) = cl(int(cl(A)))$ kullanılarak gösterilebilir.)

2.2. $\tau^\star$ Açık Kümeler

$\tau^\star$ kapanış operatöründe $cl^\star(A) = A \cup A^\star$ tanımını yaptık. $\tau^\star$ ın açık kümeleri için temel esası verelim.

(X, τ) bir uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. A, $\tau^\star$-kapalıdır ancak ve ancak $A^\star \subset A$ dır. $U \in \tau^\star$ ancak ve ancak $X - U$ $\tau^\star$-kapalı ancak ve ancak $(X - U)^\star \subset X - U$ ancak ve ancak $U \subset X - (X - U)^\star$ dır. Buradan $x \in U \Rightarrow x \notin (X - U)^\star \Rightarrow$ burada bir $V \in N(x)$ vardır öyleki $V \cap (X - U) \in I$ dır. $I = V \cap (X - U)$ olsun. $V \in \tau$ ve $I \in I$ olmak üzere $x \in V - I \subset U$ olur. $\beta(I, \tau) = \{V - I : V \in \tau,\, I \in I\}$ olduğunu gösterelim ve bir karışıklık olmadığı sürece $\beta(I, \tau)$ sembolünü basit olarak $\beta(I)$ ya da β ile göstereceğiz. Bu ifadeler aşağıdaki sonuçta ileri sürülmektedir.

Teorem 2.2.1: (Vaidyanathaswamy, 1960) (X, τ) bir uzay, I, X üzerinde bir ideal olsun. O zaman β, $\tau^\star$ için bir tabandır.

İspat: Önceki sonuçlardan sadece β nın sonlu kesişimler altında kapalı olduğunu göstermeliyiz. De Morgan kuralından ve I nın sonlu toplamsallığından doğrudan elde edilir.

Eğer Örnek 2.1.7 dan $\tau^\star(I_c) = \tau \vee \psi^\star(I_c)$ kuralı Teorem 2.2.1 den farklı değildir.

Teorem 2.2.2: (X, τ) bir uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. O zaman ψ ayrık topoloji olmak üzere $\tau^\star(I) = \tau \vee \psi^\star(I)$ dır.

Bu noktada meydana gelen sonuç: bir (X, τ) uzaynı ve X üzerinde bir I idealini alırsak $[\tau^\star(I)]\ ^\star(I) = \tau^{\star\star}$ şeklinde olur. $\tau^{\star\star}$, $\tau^\star$ dan daha zayıf olduğunu biliyoruz, fakat $\tau^{\star\star}$, $\tau^\star$ dan kesinlikle daha zayıf olduğu her zaman doğrumudur? Bu sorunun olumsuz cevabı aşağıdaki teoremde verilmektedir. Fakat öncelikle eğer I ve J, X üzerinde idealler ise o zaman $I \cap J$ ve $I \vee J$ $= \{I \cup J : I \in I \text{ ve } J \in J\}$ ideallerdir.

Teorem 2.2.3: I ve J, X üzerinde idealleri ile (X, τ) bir uzay ve $A \subset X$ olsun.

Bu durumda,

(1) (Vaidyanathaswamy, 1945) $A^{\star}(I \cap J) = A^{\star}(I) \cup A^{\star}(J)$

(2) $A^{\star}(I \vee J, \tau) = A^{\star}(I, \tau^{\star}(J)) \cap A^{\star}(J, \tau^{\star}(I))$

İspat: (1) $x \in A^{\star}(I) \cup A^{\star}(J) \Longleftrightarrow x \in A^{\star}(I)$ veya $x \in A^{\star}(J) \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Longleftrightarrow} \forall$ $U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I$ veya $U \cap A \notin J \Longleftrightarrow \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin (I \cap J) \overset{A^{\star}\text{ tn.}}{\Longleftrightarrow} x \in A^{\star}(I \cap J)$

(2) Kabul edelimki $x \notin A^{\star}(I \vee J, \tau)$ olsun. O zaman burada bir $U \in N(x)$ vardır öyleki $U \cap A \in I \vee J$ dir. $I \in I$ ve $J \in J$ olsun öyleki $U \cap A = I \cup J$ dir. I nın kalıtsallığından dolayı, $I \cap J = \varnothing$ olduğunu kabul edelim. Böylece $(U \cap A) - I = J$ ve $(U \cap A) - J = I \Rightarrow (U - I) \cap A = J \in J$ ya da $(U - J) \cap A = I \in I \Rightarrow x \notin A^{\star}(J, \tau^{\star}(I))$ ya da $x \notin A^{\star}(I, \tau^{\star}(J))$ dır. (x, I ya da J dedir, fakat ikisinde de değildir.) Gösterelimki

(a) $A^{\star}(J, \tau^{\star}(I)) \cap A^{\star}(I, \tau^{\star}(J)) \subset A^{\star}(I \vee J, \tau)$ dir.

Kabul edelimki $x \notin A^{\star}(I, \tau^{\star}(J))$ dir. Bu, burada $U \in N(x)$ ve $J \in J$ vardır öyleki $(U - J) \cap A = I \in I$ olmasını gerektirir. Kabul edelimki J nin kalıtsallığından dolayı $J \subset A$ dır. $I = (U - J) \cap A$ tanımlayalım ve $U \cap A = I \cup J \in I \vee J \Rightarrow x \notin A^{\star}(I \vee J, \tau)$ dır.

(b) $A^{\star}(I \vee J, \tau) \subset A^{\star}(I, \tau^{\star}(J))$ gösterelim. $x \in A^{\star}(I \vee J, \tau) \Rightarrow \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I \vee J \Rightarrow I \in I$ ve $J \in J$ olmak üzere $U \cap A = I \cup J$ dir.

$I \cap J = \varnothing$ olduğundan $(U \cap A) - J = I \Rightarrow (U - J) \cap A = I \in I \Rightarrow$ $x \notin A^{\star}(I, \tau^{\star}(J))$ dır. O halde $A^{\star}(I \vee J, \tau) \subset A^{\star}(I, \tau^{\star}(J))$ dır.

Benzer şekilde

(c) $A^{\star}(I \vee J, \tau) \subset A^{\star}(J, \tau^{\star}(I))$ gösterelim.

$x \in A^{\star}(I \vee J, \tau) \Rightarrow \forall\, U \in N(x)$ için $U \cap A \notin I \vee J \Rightarrow I \in I$ ve $J \in J$ olmak üzere $U \cap A = I \cup J$ dir. $I \cap J = \varnothing$ olduğundan $(U \cap A) - I = J \Rightarrow (U - I) \cap A = J \in J \Rightarrow x \notin A^{\star}(J, \tau^{\star}(I))$ dır. O halde $A^{\star}(I \vee J, \tau) \subset A^{\star}(J, \tau^{\star}(I))$ dır.

(a), **(b)** ve **(c)** sonucu oluşturur.

Yukarıdaki teoremde $I = J$ alırsak, $\tau^{\star}$ ve $\tau^{\star\star}$ arasındaki ilişki hakkındaki sorunun cevabı aşağıdaki sonuçta bulunur.

Sonuç 2.2.4: (X,τ) bir uzay ve I, X üzerinde bir ideal olsun. O zaman $A^\star(I,\tau) = A^\star(I,\tau^\star)$ ve buradan $\tau^\star = \tau^{\star\star}$ dır. (Njastad, 1966)

Ayrıca Lemma 2.1.8 yi kullanarak ve Örnek 2.1.9 deki düşünceler ile Sonuç 2.2.4 ü kurmak mümkündür.

Sonuç 2.2.5: I ve J, X üzerinde idealleri ile (X,τ) bir uzay olsun. O zaman

(1) (Samuels, 1975) $\tau^\star(I \vee J) = [\tau^\star(J)]^\star(I) = [\tau^\star(I)]^\star(J)$

(2) $\tau^\star(I \vee J) = \tau^\star(I) \vee \tau^\star(J)$

(3) (Samuels, 1975) $\tau^\star(I \cap J) = \tau^\star(I) \cap \tau^\star(J)$

İspat: **(1)** Teorem 2.2.3 (2) den elde edilir.

(2) (2) yi göstermek için (1) den $\tau^\star(I \vee J) = [\tau^\star(I)]^\star(J)$ biliyoruz ve bundan dolayı Teorem 2.2.2 den $\tau^\star(I \vee J) = \tau^\star(I) \vee \psi^\star(J)$ dir. Teorem 2.2.2 ile $\tau^\star(I) \vee \psi^\star(J) = \tau^\star(I) \vee \tau \vee \psi^\star(J) = \tau^\star(I) \vee \tau^\star(J)$ den (2) yi elde ederiz.

(3) Teorem 2.2.3 (1) den elde edilir.

Tanım 2.2.6:(X,τ) bir uzay ve X üzerinde bir I ideali verilsin. $\beta(I,\tau) = \{V - I : V \in \tau,\ I \in I\}$, $\tau^\star$ için bir tabandır. Eğer β, topoloji ise , o zaman $\beta = \tau^\star$ dır (kompakt olmayan ve sayılabilir olmayan topolojilerdeki durum gibi) ve $\tau^\star$ ın bütün açık kümeleri $V \in \tau$, $I \in I$ olmak üzere $V - I$ şeklindedir.

Aşağıdaki örnekte β nın genelde bir topoloji olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 2.2.7: (X,τ) sol-ışın ile reel sayıların topolojisi olsun, yani $\tau = \{(-\infty,a) : a \in X\} \cup \{X, \varnothing\}$. I_f, X in sonlu alt kümelerinin ideali olsun. $U_n = (-\infty, n + \frac{1}{2})$ ve $I_n = \{1,2,3,...n\}$ olmak üzere β nın alt kümelerinin ailesi $U_n - I_n$ tanımlayalım. O zaman β da olmamak üzere $\cup\{U_n - I_n : n \in \mathbb{N}\} = X - \mathbb{N}$ dir. Böylece β kapalı alttan keyfi birleşimler değildir ve buradan bir topolojide değildir.

Aşağıdaki bölümde τ ve I arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurursak β topolojidir ve buradan $\tau^\star$ da bütün kümeler basit şekildedir.

2.3. τ ile I nın Uygunluğu

Tanım 2.3.1: (Njastad, 1966) X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay olsun. Eğer her $A \subset X$ ve her $x \in A$ için bir $U \in N(x)$ vardır öyleki $U \cap A \in I$ iken $A \in I$ sağlanırsa I ideali ile τ topolojisi uygundur denir ve $\tau \sim I$ ile gösterilir.

Uygun idealler Vaidyanathaswamy (1945) de "süper kompakt" ve Vaidyanathaswamy (1960) da "adherence idealler" olarak adlandırılır.

İdealler genellikle bir P özelliğine sahip X in alt kümelerinin bir ailesi olarak tanımlandığından $\tau \sim I$ koşulu bir alt küme P özelliğine sahipse lokaldir, kendisi bu özelliğe sahipse globaldir anlamına gelir. Bu koşul ilk düşünülenlere ek olarak tam bir kısıtlama gibi görülebilir. Bununla birlikte bu koşul bir çok kullanışlı, önemli ve genel yapıları sağlar. Bir sonraki teorem $\tau \sim I$ için yeterli koşulları verir, fakat ilk önce bazı ön tanımlar gereklidir.

Bir uzay, eğer her alt uzayı lindelöf özelliğe sahipse kalıtsal lindelöftür, fakat tersi doğru değildir. (Örnek 2.1.7 den $(R, \psi^{\star}(I_c))$ ya da $(R, \tau^{\star}(I_c))$ yi göz önünde bulunduralım.)

Teorem 2.3.2: (X, τ) bir kalıtsal lindelöf uzay ve I, X üzerinde σ-ideal olsun. O zaman $\tau \sim I$ dır.

İspat: $A \subset X$ olsun ve kabul edelimki her $x \in A$ için bir $U_x \in N(x)$ vardır öyleki $U_x \cap A \in I$ dır. $\{U_x \cap A : x \in A\}$, A nın bir açık örtüsüdür ve buradan bir sayılabilir altörtü $\{V_n \cap A : n \in N\}$ ye sahiptir. I, σ-ideal olduğundan $A = \cup \{V_n \cap A : n \in N\} \in I$ olur.

Örnek 2.3.3: (R, τ) reel sayılarla alışılmış topoloji ve I, Lebesgue sıfır ölçümlü alt kümelerin σ-ideali olsun. Açıktırki $\tau \sim I$ dır. $\tau^{\star}(I)$ topolojisi aşağıdaki yeni özelliğe sahiptir. $\tau^{\star}$ Borel kümeleri τ nun Lebesgue ölçümlü kümeleridir.(Njastad, 1966)

Uygunluğun önemi aşağıdaki teorem ile gösterilebilir.

Teorem 2.3.4: (Njastad, 1966) X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay olsun. Eğer $\tau \sim I$ ise o zaman β bir topolojidir ve buradan $\beta = \tau^{\star}$ dır.

Teorem 2.3.5: X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

(1) $\tau \sim I$

(2) (Vaidyanathaswamy, 1945) Eğer A, I da A ile kesişen herbir açık kümenin örtüsüne sahipse o zaman $A \in I$ dır.

(3) (Vaidyanathaswamy, 1945) Her $A \subset X$ için $A \cap A^{\star} = \varnothing \Rightarrow A \in I$ dır.

(4) (Vaidyanathaswamy, 1945) Her $A \subset X$ için $A - A^{\star} \in I$ dır.

(5) Her A $\tau^{\star}$-kapalı alt kümesi için $A - A^{\star} \in I$ dır.

(6) Her $A \subset X$ için, eğer A kümesi $B \subset B^{\star}$ ile boş kümeden farklı B alt kümesini içermiyorsa, o zaman $A \in I$ dır.

İspat: (3)$\longrightarrow$(4) : $A \subset X$ olsun. (3) den $(A - A^{\star}) \cap (A - A^{\star})^{\star} = \varnothing \Rightarrow A - A^{\star} \in I$ elde edilir.

(5)$\longrightarrow$(1) : $A \subset X$ olsun ve kabul edelimki $\forall\ x \in A$ için burada bir $U \in N(x)$ vardır öyleki $U \cap A \in I$ dır. O halde $A \cap A^{\star} = \varnothing$ ve $A \cup A^{\star}$, $\tau^{\star}$-kapalı olduğundan $(A \cup A^{\star}) - (A \cup A^{\star})^{\star} \in I$ dır ve $(A \cup A^{\star}) - (A \cup A^{\star})^{\star} = (A \cup A^{\star}) - (A^{\star} \cup A^{\star\star}) = (A \cup A^{\star}) - A^{\star} = A$ dır. Buradan $A \in I$ dır.

(4)$\longrightarrow$(6) : $A \subset X$ olsun ve kabul edelimki A kümesi $B \subset B^{\star}$ ile boş kümeden farklı B alt kümesine sahip olsun. $A - A^{\star} \in I$ olduğundan $A \cap A^{\star} \subset (A \cap A^{\star})^{\star}$ dır. (Teorem 2.3.6 (3) den görülür) ve buradan $A \cap A^{\star} = \varnothing$ dır. Böylece $A = A - A^{\star}$ ve $A \in I$ dır.

(6)$\longrightarrow$(4) : $A \subset X$ olsun. $(A - A^{\star}) \cap (A - A^{\star})^{\star} = \varnothing$ olduğundan $A - A^{\star}$, $B \subset B^{\star}$ ile boş kümeden farklı B alt kümesini içermez. Böylece $A - A^{\star} \in I$ dır.

Teorem 2.3.6: X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay olsun. O zaman aşağıdakiler denktir ve $\tau \sim I$ dır.

(1) Her $A \subset X$ için $A \cap A^{\star} = \varnothing \Rightarrow A^{\star} = \varnothing$

(2) Her $A \subset X$ için $(A - A^{\star})^{\star} = \varnothing$

(3) Her $A \subset X$ için $(A \cap A^{\star})^{\star} = A^{\ \star}$

İspat: (1)$\longrightarrow$(2) : $\forall\ A \subset X$ için $A \cap A^{\star} = \varnothing \Rightarrow A^{\star} = \varnothing$ olsun.

$(A - A^\star) \cap (A - A^\star)^\star = \varnothing \Rightarrow (A - A^\star)^\star = \varnothing$ olur.

(3)$\longrightarrow$(1) : $\forall\ A \subset X$ için $(A \cap A^\star)^\star = A^{\ \star}$ olsun. Buradan $A \cap A^\star = A$ dır. $\forall\ A \subset X$ için $A \cap A^\star = A \Rightarrow A^\star = \varnothing$ dir. O halde $\forall\ A \subset X$ için $A \cap A^\star = \varnothing \Rightarrow A^\star = \varnothing$ elde edilir.

Teorem 2.3.7: (Njastad, 1966) (X, τ) bir uzay ve X üzerinde bir I ideali τ ile uygun olsun. A kümesi $\tau^\star$ da kapalıdır ancak ve ancak I da bir küme ve τ da kapalı kümenin birleşimidir.

İspat: A, $\tau^\star$-kapalı olsun. O halde $A^\star \subset A \Rightarrow A = (A - A^\star) \cup A^\star$dır. Teorem 2.3.5 (4) den $A - A^\star \in I$ dır ve $A^\star$, Teorem 2.1.3 (3) den τ-kapalıdır.

Tersine B, τ kapalı ve $I \in I$ olmak üzere eğer $A = B \cup I$ ise o zaman $A^\star = B^\star \cup I^\star = B^\star \subset cl(B) = B \subset A$ dır. Böylece $A^\star \subset A$ ve A, $\tau^\star$ kapalıdır.

$\tau^\star$ daki her kapalı küme (Teorem 2.3.4 ün hipotezi altında $\tau \sim I$) B, τ kapalı ve $I \in I$ olmak üzere $B \cup I$ biçiminde olduğundan Teorem 2.3.4 doğrudan elde edilir. Böylece her $\tau^\star$-açık küme bu şekildeki bir açık kümenin tümleyeni olabilecektir ve buradan $U \in \tau$ ve $I \in I$ olmak üzere $U - I$ formuna sahip olacaktır.

Uygun bir topoloji olan bir β için yeterli koşul $\tau^\star = \beta$ iken aşağıdaki örnek uygun bir gerekli koşul değildir. Ayrıca örnek Teorem 2.3.6 nın denk koşulları uygunluktan daha zayıf olduğunu gösterir.

Örnek 2.3.8: (X, τ) ile reel sayıların diskre topolojisini ve I_c ile X in sayılabilir alt kümelerinin σ-idealini alalım. O zaman $\tau = \beta = \tau^\star$ dır, fakat τ, I_c ile uygun değildir. Örneğin, X bazı noktalarda kısmi sayılabilirdir, fakat X sayılabilir değildir. Bu uzayda her $A \subset X$ için $A^\star = \varnothing$ dir. Böylece koşul Teorem 2.3.6 (1) da gösterilmiştir.

Sonuç 2.3.9: Önceki örnek Vaidyanathaswamy (1945) deki hatayı işaret ederki Teorem 2.3.6 nın (1) koşulunun uygun denkliğini iddia eder. Bununla birlikte eğer bir ideal her $A \subset X$ için "$A^\star = \varnothing \Rightarrow A \in I$" koşulunu sağlanırsa o zaman Teorem 2.3.6 nın koşulları uygunluğa denk olur, I nın kompaktlığı yerine τ, I ile zayıf uygun olduğunu söyleyeceğiz ve $\tau \overset{w}{\sim} I$ ile göstereceğiz. $\overset{w}{\sim}$

ile $\sim$ kuvvetli bir karşılaştırılması için I_f durumunda $\tau \overset{w}{\sim} I_f$ dir ancak ve ancak (X, τ) sayılabilir kompakttır (Vaidyanathaswamy, 1945). (Vaidyanathaswamy, 1960) T_1 uzaylar için τ, I_f ile uygun değildir, ancak X in sonlu olması aşikardir ve böylece $I_f = P(X)$ dir. Bununla birlikte $\tau \sim I_f$ ancak ve ancak (X, τ) kalıtsal kompakt olduğundan bu doğru değildir. Bu durum I_c durumunda çok daha farklıdır. $\tau \overset{w}{\sim} I_c$ ancak ve ancak $(X, \tau^\star)$ $\varkappa_1$ kompakttır. (Bir uzay $\varkappa_1$ kompakttır ancak ve ancak uzaydaki her sayılamayan küme en azından bir limit noktasına sahiptir.). Not edelimki (X, τ) lindelöf $\Rightarrow \tau \overset{w}{\sim} I_c \Rightarrow (X, \tau)$ $\varkappa_1$ kompakttır. Aşağıdaki $\tau \sim I_c$ durumu Teorem 2.3.2 yi verdiğinden önemlidir.

Teorem 2.3.10: Bir (X, τ) uzayı kalıtsal lindelöftür ancak ve ancak $\tau \sim I_c$ dir.

İspat: Sadece koşulun yeterli olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelimki (X, τ) uzayı kalıtsal lindelöf olmasın. O zaman burada bir $A \subset X$ sayılamayan kümesi vardır öyleki herbir $x \in A$ için burada bir $U \in N(x)$ ile sayılamayan $U \cap A$ vardır (Semadeni, 1963). Bu basit olarak burada bir $A \cap A^\star(I_c) = \varnothing$ ile A$\notin I_c$ dir. Bu aksine $\tau \sim I_c$ dir.(Teorem 2.3.5 (3) den)

Örnek 2.1.10 a bakarsak bütün kapalı (ve açık) kümeler $(X, \tau^\star(I_n))$ da basit şekildedir.

Teorem 2.3.11: (X, τ) bir uzay ve I_n, X in hiçbir yerde yoğun alt kümelerinin ideali olsun. O zaman $\tau \sim I_n$ dir.

İspat: Teorem 2.3.5 (3) nin koşullarını yerine getirdiğini göstereceğiz. Kabul edelimki $A \cap A^\star(I_n) = \varnothing \Rightarrow A \cap cl(int(cl(A))) = \varnothing \Rightarrow$
$A \cap int(cl(int(cl(A)))) = \varnothing \Rightarrow A \cap int(cl(A)) = \varnothing \Rightarrow cl(A) \cap int(cl(A)) = \varnothing \Rightarrow int(cl(A)) = \varnothing$. $A \in I_n$ dir. Buradan $\tau \sim I_n$ dir.

$\tau \sim I_m$ kurulması zordur (Oxtoby, 1980). (Oxtoby (1980) nin Teorem 16.1 de $\tau \sim I_m$ denktir.)

Teorem 2.3.12: (Banach Kategori Teoremi) (X, τ) bir uzay ve I_m, zayıf alt kümelerin ideali olsun. O halde $\tau \sim I_m$ dir.

Sonuç 2.3.13: Uygunluk ve zayıf uygunluk τ ve $\tau^\star$ ile ortak özelliklerdir,

$\tau \sim I$ (benzer şekilde $\tau \overset{w}{\sim} I$) ancak ve ancak $\tau^\star \sim I$ (benzer şekilde $\tau^\star \overset{w}{\sim} I$) (Njastad, 1966)

2.4. I_f i İçeren İdealler, X=X* İçin Uzaylar

2.1 incelersek eğer herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise o zaman her $A \subset X$ için $A^\star = A^{d^\star}$dır.

Referans için aşağıdaki teoremde durum açıkça ifade edilmiştir.

Teorem 2.4.1: X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay olsun. O zaman herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ dır ancak ve ancak her $A \subset X$ için $A^\star = A^{d^\star}$dır.

İspat: Gereklilik. Tanımdan açıktır.

Yeterlilik. Her $A \subset X$ için $A^\star = A^{d^\star}$ olsun. $x \in A^\star = A^{d^\star} \overset{A^{d^\star} \text{tn.}}{\Rightarrow} \forall U \in N(x)$ için $(U - \{x\}) \cap A \notin I \Rightarrow x \in X$ için $\{x\} \in I$ dır.

(X, τ) uzayının A alt kümesi eğer $A \subset A^d$ ise dense-in- itselfdir olduğunu hatırlayalım. A kümesi dense-in- itself ve kapalı ise perfectdir. İhtiyacımız bu durumda reel uzayın alt kümeleri için Cantor ve Bendikson (1883) tarafından ispatlanan sonuçtur.

Teorem 2.4.2: (Cantor-Bendikson) Bir ikinci sayılabilir uzay (ayrıca lindelöfün kalıtsallığı) biri perfect, diğeri sayılabilir iki kümenin birleşimi gibi gösterilebilir.

Teorem 2.4.3: (Freud, 1958) X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay olsun öyleki $\tau \sim I$ ve herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ dır. Eğer bir $A \subset X$ $\tau^\star$ da kapalı ise o zaman A, τ da perfect ve I da bir kümenin birleşimidir.

İspat: $A \subset X$ $\tau^\star$ da kapalı olsun.O zaman Teorem 2.3.5 (4) den $I \in I$ olmak üzere $A = A^\star \cup I$ dır. (ve $A^\star \cap I = \varnothing$) Buradan Teorem 2.1.3 (6) den $A^\star - A^{\star\star} \subset (A - A^\star)^\star$ ve Teorem 2.3.6 (2) den $(A - A^\star)^\star = \varnothing$ olduğundan $A^\star = A^{\star\star}$ elde ederiz. Teorem 2.4.1 den $A^\star = (A^\star)^{d^\star}$ ve sonuç olarak $A^\star \subset (A^\star)^d$ dir. Böylece $A^\star$, τ ile ilgili olarak perfectdir ve sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 2.4.3 Cantor-Bendikson teoreminin genelleşmesidir, $A = X$ ve Teorem 2.4.3 de $I = I_c$ dir.

Eğer $A \cap A^d = \varnothing$ ise A ayrıktır. Bir $A \subset X$ kümesi eğer A boş olmayan dense-in- itself alt kümelerden farklı alt kümeler içeriyorsa scattereddir. Bir T_1 uzayında scattered kümelerin kolleksiyonu Kuratowski (1966) de sonlu toplamsal olduğu ispatlanmıştır. Bu idealin daha fazla özelliği için I_s tarafından tanımlanan Vaidyanathaswamy (1960) ve Oxtoby (1976) de gösterilmiştir. Ayrık kümelerin scattered olduğunu gösterdik. Tersi genelde doğru değildir. Lemma 2.1.8 de I da kümeler $(X, \tau^\star(I))$ da kapalı ve ayrıktır ve buradan $(X, \tau^\star(I))$ da scattereddir. $(X, \tau^\star)$ ın güçlü olarak scattered kümelerinin I da olmasının bir koşulu nedir? Açıktır ki $\{x\}$ ayrıktır ve burada herbir $x \in X$ için $(X, \tau^\star)$ da scattereddir ve I da olması yeterli değildir. Sonuç olarak herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ya ihtiyacımız vardır ve bu eklenen koşulla tamamlanır.

Teorem 2.4.4: (X, τ) bir uzay ve I , X üzerinde bir ideal olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) $\tau \sim I$ ve herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ dır.

(2) $(X, \tau^\star)$ da scattered kümeler I dadır.

(3) $(X, \tau^\star)$ da ayrık kümeler I dadır.

İspat: (1)$\longrightarrow$(2) $A \subset X$ olsun.O zaman Teorem 2.4.1 (2) den ve Teorem 2.3.5 (6) den $A^\star = A^{d^\star}$ dir.

(2)$\longrightarrow$(3) Açıktır.

(3)$\longrightarrow$(1) Açıktırki herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ dır. $A \subset X$ olsun. O zaman $A - A^\star$, $(A - A^\star) \cap (A - A^\star)^\star = \varnothing$ olduğundan Teorem 2.4.1 den $(X, \tau^\star)$ da ayrıktır. Teorem 2.3.5 (3) den $\tau \sim I$ dır.

Teorem 2.4.4, Sonuç 2.3.9 ve Sonuç 2.3.13 birleştirirsek (X, τ) da bir uzay kalıtsal kompakttır ancak ve ancak $(X, \tau^\star(I_f))$ kalıtsal kompakttır ancak ve ancak $(X, \tau^\star(I_f))$ ayrık sonsuz alt uzaya sahip değildir.

Benzer yolla aşağıdaki sonucu bulabiliriz.

Sonuç 2.4.5: (X, τ) bir uzay ve I_c , X in sayılabilir alt kümelerinin ideali olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) (X, τ) kalıtsal lindelöftür.

(2) $(X, \tau^\star(I_c))$ kalıtsal lindelöftür.

(3) Eğer I, $(X, \tau^\star)$ da scattered ise o zaman $I \in I_c$ dir.

(4) Eğer I, $(X, \tau^\star)$ da ayrık ise o zaman $I \in I_c$ dir.

Sonuç 2.4.5 in sonucu , örnek için $(R, \tau^\star(I_c))$ (Örnek 2.1.6) kalıtsal lindelöf uzay ve $(R, \tau^\star(I_c))$deki scattered kümeler R nin sayılabilir alt kümeleridir. Sonuç 2.4.5 in uygulaması gibi T_1, P-uzaylar ile diskre sayılabilir alt uzayları kalıtsal lindelöftür (Reilly ve Vamanamurthy, 1980). Açık kümelerin sayılabilir ailesinin kesişimindeki bir uzay açıktır, P-uzay olarak adlandırılır. Açıktırki (X, τ) bir T_1 P-uzayında $I_c \subset I_{cd}$ dir. Buradan $\tau^\star(I_c) = \tau^\star(I_{cd}) = \tau$ dır. Eğer kabul edelimki (X, τ) nun ayrık alt uzayları sayılabilir ise (X, τ) Sonuç 2.4.5 (4) den kalıtsal lindelöftür.

U, (X, τ) uzayının bir açık alt kümesi, eğer $U = int(cl(U))$ ise regüler açıktır. (X, τ) da regüler açık kümeler X üzerinde bir yeni topoloji için taban durumundadır. τ da yarı regüler olarak adlandırılır ve τ_s ile gösterilir. τ_s topolojisi τ dan kabadır ve eğer $\tau = \tau_s$ ise τ-yarı regülerdir.

Bir (X, τ) uzayı ve X üzerinde bir I ideali alalım, Hayashi (1964) den hipotezi kullanırsak $X = X^\star$ dır ve Samuels (1975) dan hipotezi kullanırsak $\tau \cap I = \{\varnothing\}$ dir. Bu koşullar $\tau_s = (\tau^\star)_s$ gerektirir, bunu ileride göstereceğiz.

Teorem 2.4.6: X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) $X = X^\star$ dır.

(2) $\tau \cap I = \{\varnothing\}$

(3) Eğer $I \in I$ ise o zaman $int(I) = \varnothing$ dir.

(4) Her $U \in \tau$ için $U \subset U^\star$ dır.

Sonuç 2.2.4 de $X^\star(I, \tau) = X^\star(I, \tau^\star)$ olduğundan Teorem 2.4.6 (2) de τ da $\tau^\star$ yı, (3) de "$int(A) = \varnothing$ " de "$int^\star(A) = \varnothing$ " yi ve (4) de "$U \in \tau$ "da "$U \in \tau^\star$ "yi yerine koyabiliriz.

$X = X^\star$ koşulu (X, τ) da hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin I_n idealinin koşullarını yerine getirmektedir. Ayrıca $(R, \tau^\star(I_c))$ durumunda $X = X^\star$

dır. (Örnek 2.1.7) (X, τ) zayıf kümelerin idealinde $X = X^\star$ koşulunun önemi yoktur. Eğer (X, τ) da açık kümelerin her sayılabilir ailesinin kesişimi yoğun ise (X, τ) bir Baire uzaydır. Ayrıca (X, τ) Baire uzaydır ancak ve ancak $X = X^\star(I_m)$ dir.

Bunları ispatlamak için sonuçta eğer $X = X^\star$ ise (X, τ) ve $(X, \tau^\star)$ benzer yarı regülerdir.

Önerme 2.4.7: X üzerinde τ ve σ topolojiler ve $\tau \subset \sigma$ olsun. Eğer her $V \in \sigma$ için $cl_\tau(V) = cl_\sigma(V)$ ise o zaman $\tau_s = \sigma_s$ dir.

Teorem 2.4.8: X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay ve $X = X^\star$ olsun. O zaman $\tau_s = (\tau^\star)_s$ dir.

İspat: $V \in \tau^\star$ olsun.Teorem 2.4.6 deki sonuçları takip edersek açıktırki $V \subset V^\star$ dır. Bundan dolayı $cl(V) \subset V^\star$ ve buradan $\tau_s = (\tau^\star)_s$ elde edilir.

Sonuç 2.4.9: X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay ve $X = X^\star$ olsun. Eğer $(X, \tau^\star)$ yarı regüler ise o zaman $\tau = \tau^\star$ dır.

İspat: $\tau^\star = (\tau^\star)_s = \tau_s \subset \tau \subset \tau^\star$ olduğundan $\tau = \tau^\star$ dır.

X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay ve $A \subset X$ olsun. O zaman $I_A = \{A \cap I : I \in I\}$ A üzerinde bir idealdir. Aşağıda ispatlanan lemmayı Teorem 2.4.8 ün genelleşmesinde kullanacağız.

Önerme 2.4.10: X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay ve $A \subset X$ olsun. O zaman $(\tau \mid A)^\star(I_A) = \tau^\star(I) \mid A$.

Teorem 2.4.11: X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subset A^\star$ ise o zaman $(\tau \mid A)_s = (\tau^\star \mid A)_s$ dir.

İspat: $(\tau \mid A) \cap$ $I_A = \{\varnothing\}$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelimki $U \in (\tau \mid A \cap I_A)$ olsun. O zaman $U \in I$ ve burada bir $V \in \tau$ vardırki $U = V \cap A$ dır. Bu eşitlikler $(V \cap A)^\star = \varnothing$ ve Teorem 2.1.3 (7) den $V \cap A^\star = \varnothing$ olur. $A \subset A^\star$ olduğundan $U = \varnothing$ dir. Böylece $\tau \mid A \cap I_A = \{\varnothing\}$ ve Teorem 2.4.6, Önerme 2.4.10 ve Teorem 2.4.8 takip edilerek elde edilir.

Aşağıda ispatlanan sonuçlarda benzer yarı regülere sahip alt kümelerin üzerinde τ ve $\tau^\star$ ın sınırları için yeterli koşulları elde ederiz.

Sonuç 2.4.12: X üzerinde bir I ideali ile (X,τ) bir uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A^\star = A^{\star\star}$ ise o zaman $(\tau \mid A^\star)_s = (\tau^\star \mid A^\star)_s$ dir.

Sonuç 2.4.13: X üzerinde bir I ideali ile (X,τ) bir uzay ve $X - X^\star \in I$ olsun. O zaman $(\tau \mid X^\star)_s = (\tau^\star \mid X^\star)_s$ dir.

Bourbaki (1966) de topolojik özelliklerin önemli bir kısmı (X,τ) ve (X,τ_s) ile benzer elde edilmiştir. Bu özelliklerin bir kısmına yarı regüler özellikler denir. Bunlar bir uzayın özelliğinin Hausdorff olması, Urysohn olması, bağlantısız ve tamamen bağlantısız olmasıdır (Bourbaki, 1966). Yarı regüler özellikler daha geniştir ve H-kapalılık, zayıf kompaktlık, pseudo kompaktlık olarak bilinir ve diğer özellikler regülerdir. Aşağıdaki sonuç Teorem 2.4.8 den doğrudan elde edilir.

Sonuç 2.4.14: Yarı regüler özellikler eğer $X = X^\star$ ise (X,τ) ve $(X,\tau^\star)$ ile benzerdir.

θ-sürekli fonksiyonların kavramı yarı regülerlik ile çok yakın ilişkilidir (Fomin, 1943). Bir $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu eğer her $V \in N_\sigma(f(x))$ için burada bir $U \in N_\tau(x)$ vardır öyleki $f(cl(U)) \subset cl(V)$ ise bir $x \in X$ noktasında θ-süreklidir denir. Bir $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu, eğer her $x \in X$ için f, x de θ-sürekli ise θ-süreklidir. θ-sürekliliğin kavramı bir (X,τ) yarı regüler olmayan uzay için $i : (X,\tau_s) \longrightarrow (X,\tau)$ özdeşlik fonksiyonunun sürekliliğinden daha zayıftır. Fakat eğer bir θ-sürekli fonksiyonunun serisi (dizisi) regüler ise fonksiyon süreklidir. $f : (X,\tau) \longrightarrow Y$ θ-süreklidir ancak ve ancak $f : (X,\tau_s) \longrightarrow Y$ θ-sürekli olduğu gösterilebilir. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.4.15: Eğer $X = X^\star$ ise o zaman $f : (X,\tau) \longrightarrow Y$ θ-süreklidir ancak ve ancak $f : (X,\tau^\star) \longrightarrow Y$ θ-süreklidir.

Sonuç 2.4.16: (Samuels, 1975) Eğer $X = X^\star$ ve Y regüler ise o zaman $f : (X,\tau) \longrightarrow Y$ süreklidir ancak ve ancak $f : (X,\tau^\star) \longrightarrow Y$ θ-süreklidir.

2.5. Bazı Uygulamalar

Teorem 2.5.1: (X, τ) bir Hausdorff uzay olsun. O zaman $(X, \tau^\star(I_c \cap I_s \cap I_k))$ antikompakttır..

İspat: A, X in bir sonsuz alt kümesi olsun. Kabul edelimki A, $(X, \tau^\star)$ da kompakt olsun. (X, τ) Hausdorff olduğundan, (X, τ) ayrık olmak üzere burada bir A nın sayılabilir B alt kümesi vardır. Açıktırki $B \in I_c \cap I_s$ dir. A, $(X, \tau^\star)$ da kompakt olduğundan A, (X, τ) da kompakttır ve buradan (X, τ) da kapalıdır. Bu nedenle $B \in I_k$ dır ve sonuç olarak $B \in I_c \cap I_s \cap I_k$ dır. Önerme 2.1.8 den B, $(X, \tau^\star)$ da kapalı ve ayrıktır. Bu çelişkiler kabullenmedir. Böylece $(X, \tau^\star)$ sonsuz kompakt kümelere sahip değildir.

Ayrıca $\tau^\star(I_c \cap I_s \cap I_k) = \tau^\star(I_c) \cap \tau^\star(I_s) \cap \tau^\star(I_k)$ dir. (Sonuç 2.2.5 (3)). Bundan dolayı bu üç topoloji antikompakttır. Açıktırki $\tau^\star(I_c)$ için gerekli değildir. Kabul edelimki (X, τ) Hausdorfftur. Gerçekten eğer I, X üzerinde bir σ-ideal ve herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise $\tau^\star(I_c)$ antikompakt olması bir $(X, \tau^\star)$ uzayının antikompakt olmasını gerektirir. (Martin, 1961) T_1 P-uzayları antikompakttır (Bankston, 1979).

Birinci sayılabilir T_1 antikompakt uzaylar ile lokal kompakt Hausdorff antikompakt uzayların ayrık olduğunu elde ederiz. Genelleştirirsek Hausdorff antikompakt k-uzaylar ayrıktır (Bankston, 1979).

Teorem 2.5.1 i kullanarak bir genel sonuç bulalım.

Teorem 2.5.2: X üzerinde bir I ideali ile (X, τ) bir Hausdorff uzay olsun. Eğer $\tau \sim I$ ve herbir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise o zaman $(X, \tau^\star(I))$ antikompakttır.

İspat: Teorem 2.4.4 ve Lemma 2.1.7 ile $I_s(\tau^\star)$, $(X, \tau^\star)$ da scattered kümelerin ideali olarak tanımlanmak üzere $I = I_s(\tau^\star)$ dır. $\tau^{\star\star} = \tau^\star$ olduğundan (Sonuç 2.2.4) Teorem 2.5.1 den elde edilir.

Ayrıca bir dense-in- itself T_1 uzayda scattered kümeler hiçbir yerde yoğundur (Kuratowski, 1966). Aşağıdaki sonuç Teorem 2.5.1 in sonucudur.

Sonuç 2.5.3: (X, τ) bir dense-in- itself Hausdorff uzay olsun. O zaman $(X, \tau^\star(I_c \cap I_n \cap I_k))$ antikompakttır.

Sonuca denk olarak hiçbir yerde yoğun kapalı kümeler ile kendi kendine yoğun Hausdorff uzaylar antikompakttır.

Sonuç 2.5.4: (X, τ) bir dense-in- itself Hausdorff uzay olsun. O zaman $(X, \tau^\star(I_n))$ antikompakttır.

Teorem 2.5.5: $\tau^\star$ ile İlgili Süreklilik

Eğer $f : (X, \tau) \longrightarrow Y$ bir sürekli fonksiyon ve I, X üzerinde bir ideal ise açıktırki $f : (X, \tau^\star) \longrightarrow Y$ süreklidir.

Tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnekte gösterelim.

Örnek 2.5.6:(R, τ) alışılmış topoloji ile reel dizi, σ, Snirnov'un topolojisi (Örnek 2.1.10) ve $i : (R, \tau) \longrightarrow (R, \sigma)$ özdeşlik fonksiyonu olsun. O zaman $i : (R, \tau) \longrightarrow (R, \sigma)$ olmadığı zaman $A = \{1/n : n \in N\} \in I_c$ olduğundan $i : (R, \tau^\star(I_c)) \longrightarrow (R, \sigma)$ süreklidir.Bu örnek Sonuç 2.5.8 de Y nin regülerliği kabul edilirse önemlidir.

Sonuç 2.5.7: $f : (X, \tau) \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve I, X üzerinde bir ideal olsun. Eğer $f : (X, \tau^\star) \longrightarrow Y$ θ-sürekli ise $f \mid X^\star : (X^\star, \tau \mid X^\star) \longrightarrow Y$ θ-süreklidir.

İspat: Teorem 2.1.3 (7) den her $U \in \tau$ için $U \cap X^\star = U \cap (U \cap X)^\star = U \cap U^\star$ dır. $x \in X^\star$ ve $V \in N(f(x))$ olsun. $f : (X, \tau^\star) \longrightarrow Y$ θ-sürekli olduğundan burada x i içeren $(X, \tau^\star)$ da bir $U - I$ açık taban kümesi vardır, $U \in \tau$ ve $I \in I$ olmak üzere öyleki $f(cl^\star(U - I)) \subset cl(V)$ dir. Burada $f((U - I) \cup (U - I)^\star) \subset cl(V)$ ve sonuç olarak $f(U^\star) \subset cl(V)$ dır. $cl_{X^\star}(U \cap X^\star) = cl(U \cap U^\star) \subset U^\star$ olduğundan $f(cl_{X^\star}(U \cap X^\star)) \subset cl(V)$ dir. Bu yüzden $f \mid X^\star$ θ-süreklidir.

Sonuç 2.4.15 den aşağıdaki sonuç Kaniewski ve Piotrowski (1986) elde edilir.

Sonuç 2.5.8: $f : (X, \tau) \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, I, X üzerinde bir ideal ve Y regüler olsun. Eğer $f : (X, \tau^\star) \longrightarrow Y$ sürekli ise $f \mid X^\star : (X^\star, \tau \mid X^\star) \longrightarrow Y$ süreklidir.

İlerideki sonuç σ idealler için (Hayashi, 1958) dedir.

Teorem 2.5.9: $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon, I, X üzerinde bir ideal,

$X - X^\star \in I$ ve Y regüler olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) $f : (X, \tau^\star) \longrightarrow Y$ süreklidir.

(2) $f \mid X^\star : (X^\star, \tau \mid X^\star) \longrightarrow Y$ süreklidir.

(3) Her $V \in \sigma$ için $U \in \tau$ ve $I \in I$ ile $f^{-1}(V) = U - I$ dır. (yani $f(X, \beta(I, \tau)) \longrightarrow (Y, \sigma)$ süreklidir.)

İspat:(1)⟶(2) Sonuç 2.5.7 ile Sonuç 2.5.8 takip edilirse ispatlanır.

(2)⟶(3) $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap X^\star) \cup (f^{-1}(F) \cap (X - X^\star))$ dır. Eğer F, (Y, σ) da kapalı ise o zaman $f^{-1}(F) \cap X^\star = (f \mid X^\star)^{-1}(F)$, $(X^\star, \tau \mid X^\star)$ da kapalıdır ve sonuç olarak (X, τ) dadır. $f^{-1}(F) \cap (X - X^\star) \in I$ olduğundan $I \in I$ ve (X, τ) da P kapalısı ile $f^{-1}(F) = P \cup\ I$ dır. Bu da (3) ye denktir.

(3)⟶(1) Açıktır.

τ ve I nın uygunluğundan dolayı $X - X^\star \in I$ dır. Eğer "$\tau \sim I$ " yerine yazarsak "$X - X^\star \in I$" ise Teorem 2.5.9 da geçerlidir. Bu gereklilik Kaniewski ve Piotrowski (1986) de sonuçların biridir.

Sonuç 2.5.10: I, X in bir σ-ideali ve Y regüler $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdakilerin herbiri denkse;

1. (X, τ) kalıtsal lindelöftür ya da

2. I, (X, τ) da zayıf kümelerin σ-idealidir.

o zaman aşağıdakiler denktir.

(a) $X - X_0 \in I$ ile bazı kapalı $X_0 \subset X$ için $f \mid X_0$ süreklidir.

(b) Her $V \in \sigma$ için $U \in \tau$ ve $I \in I$ ile $f^{-1}(V) = U - I$ dır.

İspat: Her iki durumda da $\tau \sim I$ dır.

III. BÖLÜM

İDEALLERİN UYGUN GENİSLEMELERİ

Bu bölümde topolojik uzaylarda ideallerin uygun genişlemeleri 4 kesim halinde incelenecektir. 1. kesimde zayıf uygunluk, 2. kesimde genel uygunluk, 3. kesimde Banach Kategori Teoreminin bir genelleşmesi ve son kesimde sonlu kümelerden elde edilen ideallerin uygun bir genişlemesi incelenecektir.

Topolojik uzaylarda ideallerin özelliklerinden bahsedeceğiz, idealler Vaidyanathaswamy (1960) de "süper kompakt", Vaidyanathaswamy (1945) de "adherence idealler", Semadeni (1963) de ideallerin sahip olduğu "güçlü Banach'ın localizasyon özelliği" ,ve Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals), Njastad (1966) de "uygunluk" özellikleri çalışılmıştır.

Kapalı alttan sayılabilir birleşimlerin bir ideali sayılabilir toplamsaldır ve bir σ-ideal olarak adlandırılır. (X, τ, I) kalıtsal lindelöf uzay ve I, bir σ-ideal ise o zaman Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals) de $I \sim \tau$ olduğu gösterilebilir. Bir (X, τ) uzayının zayıf alt kümelerinin (ya da birinci kategoriden) idealini I_m ile göstereceğiz. I_m, bir σ-ideal olduğundan açıktırki eğer (X, τ) kalıtsal lindelöf ise o zaman $I_m \sim \tau$ dur. Aslında herhangi bir topolojik uzayda $I_m \sim \tau$ dur (Banach, 1930), (Kuratowski, 1933). Bu sonuç Banach Kategori Teoremi olarak bilinmektedir. Uygunluk özelliğine sahip olarak bilinen bazı diğer idealler: I_n, hiçbir yerde yoğun kümelerin idealidir (Vaidyanathaswamy, 1945), I_s bir T_1 uzayında scattered kümelerin idealidir (Vaidyanathaswamy, 1945), ve I_c bir kalıtsal lindelöf uzayda sayılabilir alt kümelerin idealidir. Bu özelliğe sahip olmayan bazı idealler: I_f kalıtsal kompakt olmayan bir uzayda sonlu alt kümelerin ideali ve I_c ideali kalıtsal lindelöf olmayan bir uzayda idealdir. Ayrıca kapalı ayrık kümelerin $I_{cd} = \{A \subset X : A^d = \varnothing\}$ ideali genelde uygun değildir.

3.1. Zayıf Uygunluk

(X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $I \sim \tau$ nun önemli sonucu, $\tau^\star$ ın bütün açık kümeleri $U \in \tau$, $I \in I$ olmak üzere $U - I$ biçimindedir (Njastad, 1966), yani $I \sim \tau \Rightarrow \tau^\star = \beta$ dır. ($\beta(I, \tau) = \{U - I : U \in I,\ I \in I\}$)

Tanım 3.1.1: (X, τ, I) bir uzayını alalım. I, τ ile ilgili olarak zayıfça uygundur. $I \overset{w}{\sim} \tau$ olarak tanımlanır ancak ve ancak $A^\star = \varnothing \Rightarrow A \in I$ dır.
Vaidyanathaswamy (1945) den $I \sim \tau \Rightarrow I \overset{w}{\sim} \tau$ dır.

Aşağıdaki lemma koşullar sağlandığında zayıf uygunluk olarak tanımlanır.

Önerme 3.1.2: Bir (X, τ, I) uzayını alırsak , $I \overset{w}{\sim} \tau$ ancak ve ancak $A \notin I \Rightarrow A^\star \neq \varnothing$ dır.

İspat: Tanım 3.1.1 den açıktır.

$()^\star : P(X) \longrightarrow P(X)$ $\star$-operatörü sınırlı iki farklı ideal için mümkündür Vaidyanathaswamy (1945). Özel olarak $\widetilde{I}^w = \{A : A^\star(I) = \varnothing\}$ile tanımlanır (Vaidyanathaswamy, 1945), I bir zayıf uygun ideal içerir ve her $A \subset X$ için $A^\star(I) = A^\star(\widetilde{I}^w)$ dir. Vaidyanat-haswamy (1945) de $\widetilde{I}^w_f$=I_{cd} dir. $\widetilde{I}^w$ yı I nın zayıfça uygun genişlemesi olarak adlandıracağız.

Aşağıdaki teoremde zayıfça uygun ideallerin sınıfının içinde, $\star$-operatörü sınırlı idealler yapar.

Teorem 3.1.3: I ve J, $\widetilde{I} \overset{w}{\sim} \tau$ ve $\widetilde{J} \overset{w}{\sim} \tau$ ile bir (X, τ) uzayı üzerinde idealler olsun. Eğer her $A \subset X$ için $A^\star(I) = A^\star(J)$ ise o zaman $I = J$ dir.

İspat: Eğer $I \neq J$ ise o zaman bir $I \in I - J$ ya da $J \in J - I$ dir. Öncelikle kabul edelimki $I \in I - J$ olsun. O zaman $I \in I \Rightarrow I^\star(I) = \varnothing$ dir, fakat I$\notin J \Rightarrow I^\star(J) \neq \varnothing$ (Önerme 3.1.2) dir. Diğeri benzer şekilde ispatlanır.

Sonuç 3.1.4: Bir (X, τ, I) uzayını alalım., $\overset{\sim\, w}{\underset{}{I}}{}^{\sim w} = \overset{\sim w}{I}$ dır.

İspat: Vaidyanathaswamy (1945) de $\widetilde{I}^w$ nın $\star$ operatörüne benzer şekilde $\overset{\sim w}{\underset{}{I}}{}^{\sim w}$ nın $\star$-operatörüdür.

I_n hiçbir yerde yoğun kümelerin idealidir ve bu özelliklere sahip bir idealdir.

Bir (X, τ, I) uzayı ile. τ^c ile X in kapalı alt kümelerinin ailesini tanımlayalım. $I \cap \tau^c$ ailesi sonlu toplamsaldır fakat kalıtsal değildir. $\langle\ I \cap \tau^c \rangle$ ile tanımlanan aile $\{A \subset X :$ bir $B \in I \cap \tau^c$ vardır öyleki $A \subset B\}$ dır. Ayrıca $\langle\ I \cap \tau^c \rangle$, $I \cap \tau^c$ ile idealini üretir, I da içerir ve $\langle I \cap \tau^c \rangle = \{A \subset X : cl(A) \in I\ \}$ dır.

Teorem 3.1.5: (X, τ, I) bir uzay olsun. O zaman $I = I_n$ ancak ve ancak

(1) $I \overset{w}{\sim} \tau$

(2) $I \cap \tau = \{\varnothing\}$

(3) $\langle\ I \cap \tau^c \rangle = I$ ve

(4) $A^\star$ kapalı regülerdir.

İspat: Gereklilik. Vaidyanathaswamy (1945) den $A^\star(I_n) = cl(int(cl(A)))$ ve sırasıyla Hayashi (1964), Banach (1930) dan $I_n \sim \tau$ dir. Hiçbir yerde yoğun tanımından I_n, (2) ve (3) deki koşulları yerine getirir. (4) koşulunda bu kuruluşa ihtiyaç vardır.

Yeterlilik. Koşulların yeterli olduğu durumda kabul edelimki (X, τ, I) bir uzay ve I, (1), (2), (3) ve (4) koşullarını sağlasın. $I \in I$ olsun. O zaman (3) $\Rightarrow cl(I) \in I$ ve (2) $\Rightarrow int(cl(I)) = \varnothing$ dır. Böylece $I \subset I_n$ elde ederiz.Bu $A^\star(I_n) \subset A^\star(I)$ olduğunu ifade eder öyleki **(a)** $cl(int(cl(A))) \subset A^\star(I) \subset cl(A)$ dır. (a) deki ifade de int ve daha sonrada cl operatörünü uygulanırsa $cl(int(cl(int(cl(A))))) \subset cl(int(A^\star(I))) \subset cl(int(cl(A)))$ elde ederiz. (4) uygularsak $A^\star(I_n) = A^\star(I)$ elde ederiz. Sonuçta (1) ve Teorem 3.1.3 yi takip edersek $I = I_n$ dir.

$\{\varnothing\}$ aşikar ideali (1), (2) ve (3) ü sağlar. (4) göstermek kolay değildir. I_m (1), (2) ve (4) Baire uzayında gösterilir, (3) göstermek kolay değildir ve $I = P(X)$ (1),(3) ve (4) sağlar, (2) yi göstermek kolay değildir. (1) in kolay olup olmadığı hakkında bir soru soracağız.

3.2. Tam Uygunluk

Bu bölümde bir kanonikal yolla alınan herhangi idealin bir uygun genişlemesinin nasıl elde edileceğini göstereceğiz. (X, τ, I) uzayını alırsak Vaidyanathaswamy (1945) de $I_s(\tau^\star)$, $\tau^\star(I)$ topolojisi ile ilgili scattered kümelerin ideali olmak üzere $I \subset I_s(\tau^\star)$ ve $I_s(\tau^\star) \sim \tau$ dir. Bir küme eğer boş olmayan dense-in-itself alt kümeler içermiyorsa scattereddir. Buradan $I_s(\tau^\star)$, I nın bir "uygun genişlemesidir". Bu bölümde ideallerin uygun genişlemelerini sağlamak için sıra ile yaklaşım sunacağız .

Tanım 3.2.1: Bir (X, τ) uzayı ve X üzerinde I ve J ideallerini alalım. J ya göre I nın genişlemesi $I \star J$ ile tanımlanır, $I \star J = \{A \subset X : A^\star(I) \in J\}$ ile gösterilir. $I \star J$ bir idealdir ve $\star$-operatörü hakkında temel gerçekleri uygularsak $I \subset I \star J$ dir (Jankovic ve Hamlett, 1990. New topologies from old via ideals), (Njastad, 1966). ($A \subset B \Rightarrow A^\star \subset B^\star$ ve $(A \cup B)^\star = A^\star \cup B^\star$)

$I \star \{\varnothing\} = \{A : A^\star(I) = \varnothing \} = \widetilde{I}^w$; yani $I \star \{\varnothing\}$, I nın zayıfça uygun genişlemesidir.

Aşağıdaki teorem herhangi bir idealin bir uygun genişlemesinin nasıl bulunacağını gösterir.

Teorem 3.2.2: $I_n \subset J$ ve $J \sim \tau$ ile (X, τ, I) bir uzay olsun. O zaman X üzerinde her I ideali için $I \star J \sim \tau$ dur.

İspat: $A \cap A^\star(I \star J) = \varnothing \Rightarrow A \in I \star J$ olduğunu göstermek yeterlidir (Jankovic ve Hamlett, 1990. New topologies from old via ideals), (Vaidyanathaswamy, 1945). Kabul edelimki $A \cap A^\star(I \star J) = \varnothing$ olsun. O zaman her $a \in A$ için $U_a \in \tau(a)$ vardır öyleki kalıtsallıktan $U_a \cap A^\star(I) \subset (U_a \cap A)^\star(I)$ olduğundan $(U_a \cap A)^\star(I) \in J \Rightarrow U_a \cap A^\star(I) \in J$ (Jankovic ve Hamlett, 1990. New topologies from old via ideals), (Vaidyanathaswamy, 1945).

$G = \cup\{U_a : a \in A\}$ olsun. $A^\star(I) = [A^\star(I) \cap G] \cup [A^\star(I) - G]$ gibi ayrık birleşimler şeklinde ifade ederiz. $J \sim \tau$ olduğundan $A^\star(I) \cap G \in J$ ve $A^\star(I) - G \subset cl(A) - G \subset cl(G) - G \in I_n$ dır. Böylece toplamsallıktan $A^\star(I) \in J$ dır ve ispat tamamlanır.

Eğer (X, τ, I) bir uzay ise I nın bir uygun genişlemesi olan Teorem 3.2.2 den $I \star I_n$ yi $\widetilde{I}$ ile göstereceğiz. Sonuçta $I_n(\tau^\star(I)) \cup I_n(\tau) \subset \widetilde{I}$ dir ve $\widetilde{I} = \{A \subset X : intA^\star(I) = \varnothing\}$ dır, bu nedenle $\widetilde{I}^w \subset \widetilde{I}$ dır. Eğer (X, τ) bir dense-in-itself T_1 uzayı ise o zaman $I_s(\tau^\star(I)) \subset \widetilde{I}$ dır ve eğer $(X, \tau^\star(I))$ bir dense-in-itself

T_1 uzayı ise o zaman $I_s(\tau^\star(I)) \subset I_n(\tau^\star(I)) \subset \widetilde{I}$ dır.

$\widetilde{I}$ genişlemesinin yeni özelliklerinin biri $\widetilde{I}$ için $\star$-operatörü, I için $\star$-operatörünün terimlerinde formülleştirilerek elde edilir.

Teorem 3.2.3: Bir (X, τ, I) uzayını alalım. $A^\star(\widetilde{I}) = cl(int(A^\star(I)))$ dır.

İspat: $A^\star(\widetilde{I})$ regüler kapalı olduğunu gösterelim. $I_n \subset \widetilde{I}$ olduğundan her $A \subset X$ için $A^\star(\widetilde{I}) \subset A^\star(I_n) = cl(int(cl(A)))$ dir. A* da A yı yerine koyarsak elde ederiz.

$A^\star(\widetilde{I})$ kapalı olduğundan $\left[A^\star(\widetilde{I})\right]^\star(\widetilde{I}) \subset cl(int(cl(A^\star(\widetilde{I})))) = cl(int(A^\star(\widetilde{I})))$ dir. $\widetilde{I} \sim \tau$ olduğundan $\left[A^\star(\widetilde{I})\right]^\star\left(\widetilde{I}\right) = A^\star(\widetilde{I})$ (Njastad, 1966) dir, böylece $A^\star(\widetilde{I}) \subset cl(int(A^\star(\widetilde{I}))) \subset A^\star(\widetilde{I})$ ve $A^\star(\widetilde{I})$ regüler kapalıdır.

$I \subset \widetilde{I}$ ve $A^\star(\widetilde{I})$ regüler kapalı olduğundan $A^\star(\widetilde{I}) \subset cl(int(A^\star(I)))$ elde ederiz.

Diğer kapsam için kabul edelimki $x \notin A^\star(\widetilde{I})$ olsun. O zaman bir $U \in \tau(x)$ vardır öyleki $int(U \cap A)^\star = \varnothing$ dır. $U \cap A^\star(I) \subset (U \cap A)^\star(I)$ Kuratowski (1966) olduğundan $U \cap int(A^\star(I)) \subset int(U \cap A)^\star(I) = \varnothing$ dir. Böylece $cl(int(A^\star(I))) \subset A^\star(\widetilde{I})$ olduğundan $x \notin cl(int(A^\star(I)))$ olur ve ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.4: (X, τ) bir T_1 uzay, $A \subset X$ olsun ve I_f ile sonlu kümelerin idealini tanımlayalım. Bir T_1 uzayında A^d, A nın türev kümeleri ile tanımlanmak üzere $A^\star(I_f) = A^d$ dir. Teorem 3.2.2 den $\widetilde{I}_f = \left\{A \subset X : int(A^d) = \varnothing\right\}$ X üzerinde bir uygun idealdir ve Teorem 3.2.3 den $A^\star(\widetilde{I}_f) = cl(int(A^d))$ dir.

İleride bir uygun idealin uygun genişlemesi tanımlanacaktır ve Hashimoto (1976, Lemma 5) de kuvvetlendirilerek kabul edilecektir.

Ayrıca, eğer I ve J idealleri X üzerinde ise $I \vee J = \{I \cup J : I \in I,\ J \in J\}$ kümesi I ve J yi içeren X üzerinde en küçük idealdir.

Teorem 3.2.5: (X, τ, I) bir uzay olsun. Eğer $I \sim \tau$ ise o zaman $\widetilde{I} = I \vee I_n$ dir.

İspat: Eğer $A \in I$ ise o zaman $A^\star(I) = \varnothing \Rightarrow A \in \widetilde{I}$ dır. Eğer $B \in I_n$ ise o zaman $int(cl(B)) = \varnothing \Rightarrow int(B^\star(I)) = \varnothing$ dır. Eğer $A \in I$ ve $B \in I_n$ olmak üzere $A \cup B \in I \vee I_n$ ise $(A \cup B)^\star(I) = A^\star(I) \cup B^\star(I)$ buradan $int(A \cup B)^\star(I) =$

$int\,[A^\star(I) \cup B^\star(I)] \subset A^\star(I) \cup int(B^\star(I)) = \varnothing$ dir.Bu $I \vee I_n \subset \widetilde{I}$ olduğunu gösterir.

Diğer kapsamda kabul edelimki $A \in \widetilde{I}$ olsun. O zaman $A \cap A^\star(I) \in I_n$ olmak üzere $A = [A \cap A^\star(I)] \cup [A - A^\star(I)]$ ve $A - A^\star(I) \in I$ (Jankovic ve Hamlett, 1990. New topologies from old via ideals), (Vaidyanathaswamy, 1945) dir.

Teorem 3.2.5 in sonucundan $\widetilde{I}_n = I_n$, $I_m = \{A \subset X : int(A^\star(I_m)) = \varnothing\}$ ve $\widetilde{I}_m = I_m$dir. Eşitlikte $A \notin I_m$ ancak ve ancak $int(A^\star(I_m)) \neq \varnothing$ (Kuratowski, 1966) dir.

Aşağıdaki sonuç $I \cap \tau = \{\varnothing\}$ (ya da $X = X^\star$) hipotezinin tersi ile Hashimoto (1976, Lemma 5) kuvvetlendirir ve buradan $I_f \subset I$ dır.

Sonuç 3.2.6: $I \sim \tau$ ile (X, τ, I) bir uzay olsun. O zaman $(X, \tau^\star(I))$ da herhangi hiçbir yerde yoğun küme, I ya ait bir küme ve (X, τ) da bir hiçbir yerde yoğun kümenin birleşimidir.

İspat: $int^\star$ ve $cl^\star$, $\tau^\star(I)$ ın sırasıyla iç ve kapanış operatörleridir. Eğer $A \in I_n(\tau^\star)$ ise o zaman $int^\star(cl^\star(A)) = \varnothing$ dir. $int(A^\star(I)) \subset int^\star(cl^\star(A)) = int^\star\,[A \cup A^\star(I)]$ dir öyleki Teorem 3.2.5 den $I_n(\tau^\star) \subset \widetilde{I} = I \vee I_n$ dir.

Bir (X, τ) uzayında bir I idealinin önemli bir özelliği $I \cap \tau = \{\varnothing\}$ ya da eşdeğeri $X = X^\star$ dir. Örneğin $I_m \cap \tau = \{\varnothing\}$ için uzaylar Baire uzaylarıdır.

Teorem 3.2.7: (X, τ, I) bir uzay olsun. Aşağıdakiler eşittir.

(1) $\tau \cap I = \{\varnothing\}$

(2) $\tau \cap \widetilde{I} = \{\varnothing\}$

(3) $\widetilde{I} = I_n(\tau^\star(I))$

İspat: **(3)$\longrightarrow$(1)** açıktır.

(1)$\longrightarrow$(2) Kabul edelimki $\tau \cap I = \{\varnothing\}$ ve $\tau \cap I = \{\varnothing\}$ ancak ve ancak $X = X^\star(I)$ dır. Teorem 3.2.3 den $X^\star(\widetilde{I}) = cl(int(X^\star(I)))$ dır. Böylece $X^\star(\widetilde{I}) = cl(int(X)) = X$ ve $\tau \cap \widetilde{I} = \{\varnothing\}$ elde ederiz.

(2)$\longrightarrow$(3) $A \in I_n(\tau^\star(I)) \Rightarrow int^\star(cl^\star(A)) = \varnothing \Rightarrow int^\star(A^\star(I)) = \varnothing \Rightarrow int(A^\star(I)) = \varnothing \Rightarrow A \in \widetilde{I}$ olduğundan $I_n(\tau^\star(I)) \subset \widetilde{I}$ dur.Diğer kapsamı göstelim. $A \in \widetilde{I}$ olsun. O zaman kabul edelimki $int(A) = \varnothing$ ve $\widetilde{I}$ nın tanımından $int(A^\star(I)) = \varnothing$ dır. $int(cl^\star(A)) = int(A \cup A^\star(I)) \subset int(A^\star(I)) = \varnothing$. $\tau \cap I = \{\varnothing\}$ olduğundan her $U \in \tau^\star(I)$ için $cl^\star(U) = cl(U)$ dır (Jankovic ve Hamlett, 1990, New topologies from old via ideals). Samuels (1975) den ve her F $\tau^\star$-kapalı kümesi için $int^\star(F) = int(F)$ dir. $int^\star(cl^\star(A)) = \varnothing \Rightarrow int(cl^\star(A)) = \varnothing \Rightarrow A \in I_n(\tau^\star(I))$ dir.

Hashimoto (1952, Teorem 4) dekine benzer bir sonuç buluruz. Hashimoto (1952) deki kabul edilen ideali içeren bütün tek nokta kümeleri gereksizdir.

Sonuç 3.2.8: $I \sim \tau$ ve $\tau \cap I = \{\varnothing\}$ ile (X, τ, I) ile bir uzay olsun. Eğer $I_n \subset I$ ise o zaman $I = I_n(\tau^\star(I))$ dir.

İspat: Teorem 3.2.5 den $\widetilde{I} = I \vee I_n$, Teorem 3.2.7 den $\widetilde{I} = I_n(\tau^\star(I))$ dır. $I_n \subset I$ olduğundan $I \vee I_n = I$ dır ve ispat tamamlanır.

3.3. Banach Kategori Teoreminin Bir Genelleşmesi

Bir uzayda zayıf kümelerin I_m ideali, topoloji ile uygundur ve sonuçta Banach Kategori Teoremi Oxtoby (1980) olarak bilinir. $I_n = \left\{\widetilde{\varnothing}\right\}$ olduğundan ve I_m, I_n nin bir "sayılabilir genişlemesidir", bu öncüller I bir ideal ve uygun genişlemesi $\widetilde{I}$ yı alırsak, $\widetilde{I}$ nın sayılabilir genişlemesi topoloji ile kalıcı bir genişleme midir? Bu sorunun cevabı olumlu olacaktır.

Bir (X, τ, I) uzayını alalım. $\mathbb{N}$ doğal sayılar olmak üzere $\widetilde{I}_\sigma = \left\{A : A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ A_n \in \widetilde{I}, \text{ her } n \text{ için}\right\}$ ile tanımlayalım, yani $\widetilde{I}_\sigma$, $\widetilde{I}$ nın sayılabilir genişlemesidir.

Bu soru Banach Category teoreminin bir kolay uygulaması ile genelde olumlu cevaplandırılamaz. Gerçekten eğer (X, τ, I) bir uzay ve σ, $\tau \subset \sigma$ ile X için bir topolojidir öyleki $\widetilde{I} = I_n\ (\sigma)$ dır. Teorem 3.2.7 ile $\sigma \cap \widetilde{I} = \{\varnothing\} \Rightarrow \tau \cap \widetilde{I} = \{\varnothing\} \Rightarrow \tau \cap I = \{\varnothing\}$ dır. Bütün idealler bu koşulu sağlamaz. Aşağıdaki kavrama ve bazı öncelikli sonuçlara ihtiyacımız vardır.

Tanım 3.3.1: (X, τ, I) bir uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subset int(A^\star)$ ise A I-açıktır. $IO\,(X, \tau) = \{A \subset X : A \subset int(A^\star)\}$ ile tanımlayalım. Karışıklığa neden olmadıkça $IO\,(X, \tau)$ sembolü yerine IO ile göstereceğiz. A nın $I-$içi $I-int(A)$ ile gösterilir, A da büyükçe I-açık kümesini içeren şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3.2: $A \subset X$ ile (X, τ, I) bir uzay ve Δ bir keyfi indeks kümesi olsun.

(1) $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} \subset IO \Rightarrow \cup\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} \in IO$

(2) Eğer $U \in \tau$ ve $A \in IO$ ise o zaman $U \cap A \in IO$

(3) $I - int(A) = A \cap int(A^\star)$

(4) $I - int(A) = \varnothing$ ancak ve ancak $A \in \widetilde{I}$

(5) $\left[A \cap A^\star(\widetilde{I})\right] - [I - int(A)] \in \widetilde{I}$.

İspat: **(1)** Eğer her $\alpha \in \Delta$ için $A_\alpha \subset int(A^\star_\alpha)$ ise o zaman $\cup A_\alpha \subset \cup int(A^\star_\alpha) \subset int(\cup A^\star_\alpha) \subset int(\cup A_\alpha)^\star$.

(2) Kabul edelimki $U \in \tau$ ve $A \in IO$ olsun. O zaman $U \cap A \subset U \cap int(A^\star) \subset int(U \cap A^\star) \subset int(U \cap A)^\star$.

(3) $A \cap int(A^\star)$ I-açık olduğundan $int(A^\star) = A^\star \cap int(A^\star) \subset (A \cap int(A^\star))^\star$ $\Rightarrow A \cap int(A^\star) \subset int(A \cap int(A^\star))^\star$. Böylece $A \cap int(A^\star) \subset I - int(A)$ dır.

Ters kapsam için eğer $B \in IO$ ve $B \subset A$ ise o zaman $B^\star \subset A^\star \Rightarrow int(B^\star) \subset int(A^\star) \Rightarrow B = B \cap int(B^\star) \subset A \cap int(A^\star)$ dır.

(4) Gereklilik. Kabul edelimki $I - int(A) = \varnothing$ olsun. O zaman $A^\star \subset cl(A)$ olduğundan $A \cap int(A^\star) = \varnothing \Rightarrow cl(A) \cap int(A^\star) = \varnothing \Rightarrow int(A^\star) = \varnothing$ dir.

Yeterlilik. Eğer $A \in \widetilde{I}$ ise o zaman $int(A^\star) = \varnothing \Rightarrow A \cap int(A^\star) = \varnothing$.

(5) $\left[A \cap A^\star(\widetilde{I})\right] - [I - int(A)] \subset cl(int(A^\star)) - int(A^\star) \in I_n \subset \widetilde{I}$

Teorem 3.3.2 (1) de bir kümenin I-içi benzer şekilde kümede bütün I-açık kümeleri içeren birleşim olarak ifade edilir.

Teorem 3.3.3: (X, τ, I) bir uzay olsun. O zaman $G = \cup(\tau \cap \widetilde{I}_\sigma) \in \widetilde{I}_\sigma$ dır.

İspat: $\Im = \{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ $\tau \cap \widetilde{I}_\sigma$ ayrık boş kümeden farklı açık kümelerin bir maximal ailesi olsun. O zaman $cl(G) - \cup\Im \in I_n \subset \widetilde{I}$ dır.

Herbir $U_\alpha = \cup\left\{I_{\alpha,n} : \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için}, I_{\alpha,n} \in \widetilde{I}\right\}$, $\widetilde{I}$ da kümelerin sayılabilir birleşimi şeklinde gösterilir.

$I_n = \cup\{I_{\alpha,n} : \alpha \in \Delta\}$ olsun. Her n için $I_n \in \widetilde{I}$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten kabulümüz dışında bazı $n \Rightarrow I - int(I_n) \neq \varnothing$ için $I_n \notin \widetilde{I}$ dır. $A = I - int(I_n)$ olsun. Burada $\alpha \in \Delta$ vardır öyleki $A \cap I_{\alpha,n} \neq \varnothing \Rightarrow A \cap U_\alpha \neq \varnothing \Rightarrow$

$A \cap U_\alpha \subset I_{\alpha,n} \subset I_n$ ve buradan Teorem 3.3.2 (2) den $\varnothing \neq A \cap U_\alpha \subset I - int(I_{\alpha,n})$ dir. Teorem 3.3.2 (4) den $I_{\alpha,n} \in \widetilde{I} \Rightarrow I - int(I_{\alpha,n}) = \varnothing$ olduğundan bu bir çelişkidir ve iddia kurulur.

$G \subset (cl(G) - \cup\Im) \cup (\cup\Im)$ dir ve $\cup\Im = \cup\{U_\alpha : \ \alpha \in \Delta\} = \cup\{I_n : n \in N\} \in \widetilde{I}_\alpha$ dir. $cl(G) - \cup\Im \in \widetilde{I}$ olduğundan $\widetilde{I}_\sigma$ nın toplamsal ve kalıtsallığından sonuç elde edilir.

Eğer (X, τ, I) bir uzay ve $A \subset X$ ise A üzerindeki topoloji $\tau \mid A$ rölatif (ya da alt uzay) ve A da I nın sınırını $I \mid A$ ile göstereceğiz. Not edelimki $I \mid A$ bir idealdir.

Aşağıdaki lemmalar Banach Kategori Teoremi genelleşmesinin ispatı için gereklidir.

Önerme 3.3.4: $B \subset A \subset X$ ile (X, τ, I) bir uzay olsun. O zaman $B^\star(I \mid A, \tau \mid A) = B^\star(I, \tau) \cap A$ dır.

İspat: Açıktır.

Önerme 3.3.5: $A \in IO\,(X, \tau)$ ile (X, τ, I) bir uzay olsun.

(1) Eğer $B \subset A$ ise o zaman int_A , $\tau \mid A$ ile ilgili iç operatörü olarak tanımlanmak üzere $int_A\,(B^\star(I \mid A, \tau \mid A) = A \cap int(B^\star(I, \tau))$ dır.

(2) $(\widetilde{I|A}) = \widetilde{I} \mid A$

İspat: **(1)** $x \in A \cap int(B^\star(I))$ olsun. O zaman burada $U \in \tau(x)$ vardır öyleki Önerme 3.3.4 den $x \in A \cap U \subset A \cap B^\star(I) = B^\star(I \mid A, \tau \mid A)$ dır. Böylece $x \in int_A\,(B^\star(I \mid A, \tau \mid A)$ dır.

Ters kapsam için $x \in int_A\,(B^\star(I \mid A, \tau \mid A))$ olsun. O zaman burada $U \in \tau(x)$ vardır öyleki $x \in U \cap A \subset B^\star(I \mid A, \tau \mid A) = A \cap B^\star(I, \tau)$ (Önerme 3.3.4) dır. $(U \cap A)^\star(I) \subset [A \cap B^\star(I, \tau)]^\star\,(I) \subset A^\star(I) \cap (B^\star(I))^\star(I) \subset A^\star(I) \cap B^\star(I)$ dır, fakat $B \subset A$ olduğundan $A^\star(I) \cap B^\star(I) = B^\star(I)$ dır. Böylece $int((U \cap A)^\star(I)) \subset int(B^\star(I))$ dır. $U \cap A \in IO\,(X, \tau)$ olduğundan (Teorem 3.3.2 (2)), $U \cap A \subset int(U \cap A)^\star(I) \subset int(B^\star(I))$ dır, buradan $x \in A \cap int(B^\star(I))$ olur.

(2) $(\widetilde{I|A}) \subset \widetilde{I} \mid A$ olduğunu gösterelim. $B \subset A$ ve kabul edelimki $B \in (\widetilde{I|A})$ olsun. O zaman $B^\star(I, \tau) \subset cl(B)$ olduğundan $int_A\,(B^\star(I \mid A, \tau \mid A)) = \varnothing \Rightarrow$

$A \cap int(B^\star(I,\tau)) = \varnothing \Rightarrow B \cap int(B^\star(I,\tau)) = \varnothing \Rightarrow cl(B) \cap int(B^\star(I,\tau)) = \varnothing \Rightarrow int(B^\star(I,\tau)) = \varnothing$ dır.

$\widetilde{I} \mid A \subset (\widetilde{I|A})$ olduğunu gösterelim. Kabul edelimki $B \subset A$ ve $B \in \widetilde{I}$ olsun, yani $int(B^\star(I,\tau)) = \varnothing$ dır. O zaman $\varnothing = A \cap int(B^\star(I,\tau)) = int_A\,(B^\star(I \mid A, \tau \mid A)) \Rightarrow B \in (\widetilde{I} \mid A)$ dır.

Teorem 3.3.6: (Banach Kategori Teoreminin Genelleşmesi) (X,τ,I) bir uzay olsun. O zaman $\widetilde{I}_\sigma \sim \tau$ dır.

İspat: $A \subset X$ olsun ve kabul edelimki her $a \in A$ için burada bir $U_a \in \tau(a)$ vardır öyleki $U_a \cap A \in \widetilde{I}_\sigma$ dır. $A \in I$ göstermek yeterlidir (Vaidyanathaswamy, 1945). $B = I - int(A)$ olsun. Teorem 3.3.2 (4) den $A - B \in \widetilde{I}$ dir. Herbir $U_b \cap B \in \tau \mid B \cap \widetilde{I} \mid B$, fakat Önerme 3.3.5 (2) den $\widetilde{I} \mid B = (\widetilde{I|B})$dır. Bundan dolayı Teorem 3.3.3 den $B = \cup(U_b \cap B) \in (\widetilde{I|B})_\sigma$ ve $(\widetilde{I|B})_\sigma = (\widetilde{I} \mid B)_\sigma \subset \widetilde{I}_\sigma$ dır, toplamsallıktan $A = (A - B) \cup B \in \widetilde{I}_\sigma$dır.

İyi bilinen Banach Kategori Teoremi aşağıdaki sonuçtan doğrudan doğruya elde edilir.

Sonuç 3.3.7: (X,τ) bir uzay ve I_m, zayıf kümelerin ideali olarak tanımlansın. O zaman $I_m \sim \tau$ dur.

İspat: $I_m = \left\{\widetilde{\varnothing}\right\}_\sigma$ dır.

3.4. Sonlu Kümelerin İdealinin Uygun Genişlemeleri

I_f , kalıtsal kompakt olmayan bir (X,τ) uzayında uygun değildir. Sonuç olarak $\widetilde{I}_f = \{A \subset X : intA^\star(I_f) = \varnothing\} = I_f^\star I_n$ bir idealdir. Ayrıca T_1 uzaylarda $A^\star(I_f) = A^d$ türev küme operatörüdür.

Teorem 3.4.1: (X,τ) bir T_1 uzay olsun. O zaman $\widetilde{I}_f = I_f^\star I_n = I_s \vee I_n$ dir.

İspat: (X,τ) T_1 olduğundan her $A \subset X$ için $A^\star(I_f) = A^d$ dir. Öncelikle $I_s \subset \widetilde{I}$ olduğunu göstereceğiz. $A \in I_s$ olsun, $A \cap int(A^d)$ dense-in-itself olduğunu göstermektir. Gerçekten $int(A^d) = int(A^d) \cap A^d \subset int(A^d) \cap A^d \cap cl(A) \subset cl(A \cap int(A^d))$, $A \cap int(A^d)$, $int(A^d)$ de yoğun olduğunu göstereceğiz.

$int(A^d) = int(A^d) \cap A^d \subset (int(A^d) \cap A^d)^d \subset (int(A^d))^d$, $int(A^d)$ dense-in-itself olduğunu göstereceğiz. $A \cap int(A^d)$ açık dense-in-itself kümelerde yoğundur, $A \cap int(A^d)$ dense-in-itselfdir. Her $A \subset X$ için (Vaidyanathaswamy, 1945) de gösterildi. $K(A)$, A nın büyükçe dense-in-itself alt kümesi olmak üzere $A^\star(I_s) = cl(K(A))$ dir. ($K(A)$, A nın kerneli olarak adlandırılır.). Buradan $int(A^d) \subset cl(A \cap int(A^d)) \subset cl(K(A)) = A^\star(I_s)$ dır. $A \in I_s$ olduğundan $A^\star(I_s) = \varnothing \Rightarrow int(A^d) = \varnothing \Rightarrow A \in \widetilde{I}$ dir. Eğer $A \in I_n$ ise $int(A^d) \subset int(A \cup A^d) = int(cl(A)) = \varnothing \Rightarrow int(A^d) = \varnothing$ ve $A \in \widetilde{I}_f$ dir.Böylece

(1) $I_n \vee I_s \subset \widetilde{I}_f$dir.

Ters kapsamı gösterelim, $A \subset X$ için $A = (A - A^d) \cup (A \cap A^d)$ dir. Eğer $A \in \widetilde{I}_f$ ise $int(A^d) = \varnothing$ ve $int(cl(A \cap A^d)) = int\left[(A \cap A^d) \cup (A \cap A^d)^d\right] \subset int\left[(A \cap A^d) \cup A^{dd}\right] \subset int(A^d) = \varnothing$ dir. Bundan dolayı $A \cap A^d \in I_n$ dir. $A - A^d$ ayrık olduğundan scattereddir. Böylece eğer $A \in \widetilde{I}_f$ ise $A \in I_n \vee I_s$ dır.

(2) $\widetilde{I}_f \subset I_n \vee I_s$ dir.

(1) ve (2) den sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.2: (X, τ) bir T_1 uzay olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) (X, τ) dense-in-itselfdir.

(2) $\tau \cap I_f = \{\varnothing\}$

(3) $\tau \cap \widetilde{I}_f = \{\varnothing\}$

(4) $\widetilde{I}_f = I_n$

İspat: (1) ve (2) nin denkliği açıktır. (2) ve (3) nin denkliği Teorem 3.2.6 den elde edilir. (3) ve (4) ün denkliği bir T_1 uzayında $\tau^\star(I_f) = \tau$ olduğundan Teorem 3.2.6 takip edilirse elde edilir.

Sonuçtan doğrudan buluruz, öncelikle (Vaidyanathaswamy, 1945) in sonucunu ifade edelim.

Sonuç 3.4.3: (Vaidyanathaswamy, 1945) Eğer (X, τ) bir kendi dense-in-itself T_1 uzayı ise o zaman $I_s \subset I_n$ dır.

İspat: Teorem 3.5.1 ve Teorem 3.5.2, (4) beraber değerlendirirsek $I_n =$

$\widetilde{I}_f = I_s \vee I_n$ dir öyleki $I_s \subset I_s \vee I_n = I_n$ dir.Ayrıca Teorem 3.4.2 (4) den bir T_1 dense-in-itself uzayda $I_n = \left\{ A \subset X : int(A^d) = \varnothing \right\}$ dir.

IV. BÖLÜM

I-AÇIK KÜMELER VE I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölüm 2 kesim halinde incelenecektir. 1. kesimde I-açık kümeler ve özellikleri, 2. kesimde I-sürekli, I-açık (kapalı) fonksiyonlar ve özellikleri incelenecektir. Bu sınıflar ve diğer bilinen sınıflar arasındaki ilişkileri gösterilecektir.

4.1. I -Açık ve I -Kapalı Kümeler Üzerine

Tanım 4.1.1: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

(1) Eğer $A = cl(int(A))$ ise A ya regüler kapalı

(2) Eğer $A \subset int(cl(int(A)))$ ise A kümesine α -açık küme (αO) (Njastad, 1966)

(3) Eğer $A \subset cl(int(A))$ ise A kümesine semi-açık küme (SO) (Levine, 1963)

(4) Eğer $A \subset int(cl(A))$ ise A kümesine pre-açık küme (PO) (Abd El Monsef ve diğ., 1982)

(5) Eğer $A \subset cl(int(cl((A))))$ ise A kümesine β-açık küme (βO) (Abd El Monsef ve diğ., 1983)

denir.

Bir α açık (benzer şekilde semi-açık, pre-açık, β-açık) kümenin tümleyenine α kapalı (benzer şekilde semi-kapalı, pre-kapalı, β-kapalı) küme denir. (X, τ) nun bütün α-açık (benzer şekilde semi-açık, pre-açık, β-açık) kümelerinin ailesi τ^α (sırasıyla $SO\,(X, \tau)$, $PO\,(X, \tau)$, $\beta O\,(X, \tau)$) ile gösterilir..

Boş kümeden farklı bir X kümesi üzerindeki bir ideal alt küme işlemleri (kalıtsallık) ve sonlu birleşim işlemleri (toplamsallık) altında kapalı olan X in alt kümelerinin bir I ailesidir. (Vaidyanathaswamy, 1945)

(X, τ, I) yı bir (X, τ) topolojik uzayı ve X üzerinde bir I idealinden tanımlarız.

Tanım 4.1.2: Eğer herbir $V \in \sigma$ (benzer şekilde $V \in PO(Y)$) için $f^{-1}(V) \in PO(X)$ ise bir $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu pre-sürekli (Abd El Monsef ve diğ., 1982), (benzer şekilde M-pre-sürekli (Abd El Monsef ve diğ., 1984) dir.

Eğer X de herbir açık (benzer şekilde kapalı) küme pre-açık (benzer şekilde pre-kapalı) ise f pre-açık (Abd El Monsef ve diğ., 1982) (benzer şekilde pre-kapalı (Abd El Monsef ve diğ., 1982)) olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.3: (Jankovic ve Hamlett, 1992) (X, τ, I) uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subset int(A^\star)$ ise A, I-açıktır ve $IO\,(X, \tau) = \{A \subset X : A \subset int(A^\star)\}$ ile göstereceğiz. Herhangi bir değişiklik olmadığı sürece $IO\,(X, \tau)$ sembolü yerine basit olarak IO ile göstereceğiz.

Sonuç 4.1.4: I-açıklık ve açıklık bağımsız kavramlardır.(Örnek 4.1.5, Örnek 4.1.6))

Örnek 4.1.5: Bir $\tau = \{X, \varnothing, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi ile $X = \{a, b, c, d\}$ ve $I = \{\varnothing, \{a\}\}$ olsun. Buradan $\{b, c, d\} \in IO\,(X, \tau)$ dır fakat $\{b, c, d\} \notin \tau$ dur.

Örnek 4.1.6: $X = \{a, b, c, d\}$. $\tau = \{X, \varnothing, \{d\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}\}$ ve $I = \{\varnothing, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$ olsun. $\{a, c, d\} \in \tau$ dur, fakat $\{a, c, d\} \notin IO\,(X, \tau)$ dur.

Sonuç 4.1.7: Sonuç olarak I-açık küme $\Longrightarrow$ pre-açık kümedir ve genel olarak tersinin doğru olmadığı örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.1.8: X, τ, I Örnek 4.1.6 daki gibi olsun. O zaman $\{d\} \in PO\,(X, \tau)$ dur, fakat $\{d\} \notin IO\,(X, \tau)$ dur.

Sonuç 4.1.9: İki I-açık kümenin kesişimi örnekte gösterileceği gibi I-açık olmasına gerek yoktur.

Örnek 4.1.10: $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{X, \varnothing, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ ve $I = \{\varnothing\}$ olsun. O zaman $\{a, c\}$, $\{b, c, d\} \in IO\,(X, \tau)$ dur, fakat $\{a, c\} \cap \{b, c, d\} \notin IO\,(X, \tau)$ dur.

Teorem 4.1.11: (X, τ, I) bir uzay ve $A \subset X$ için

(1) Eğer $I = \{\varnothing\}$ ise o zaman $A^\star = cl(A)$ dır ve bundan dolayı herbir

$I-$açık küme ve pre-açık küme birbirine denktir.

(2) Eğer $I = P(X)$ ise o zaman $A^{\star}(I) = \varnothing$ dır ve buradan A I-açıktır ancak ve ancak $A = \varnothing$ dir.

Teorem 4.1.12: Bir (X, τ, I) uzayının A herhangi I-açık kümesi için $A^{\star} = (int(A^{\star}))^{\star}$ dır.

Tanım 4.1.13: Bir $F \subset (X, \tau, I)$ nin tümleyeni I-açık ise I-kapalı olarak adlandırılır.

Sonuç 4.1.14: I-kapalılık kavramı bilinen anlamdaki topoloji için kapalılık kavramından çok farklıdır.

Teorem 4.1.15: $A \subset (X, \tau, I)$ için genel olarak A^c, A nın tümleyeni olmak üzere $((int(A))^{\star})^c \neq int((A^c)^{\star})$ dır. (Örnek 4.1.16)

Örnek 4.2.16: Eğer $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ ve $I = \{\varnothing, \{a\}\}$ ise o zaman, eğer $A = \{a, b\}$ ise $((int(A))^{\star})^c = \{a\}$ dır, fakat $int((A^c)^{\star}) = \varnothing$ dir.

Teorem 4.1.17: Eğer $A \subset (X, \tau, I)$ I-kapalı ise o zaman $A \supset (intA)^{\star}$ dır.

İspat: I-kapalı küme tanımı ve Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals, Teorem 2.3(c)) den elde edilir.

Teorem 4.1.18: $A \subset (X, \tau, I)$ ve $(X \diagdown (int(A))^{\star}) = int((X \diagdown A)^{\star})$ dir. O zaman A, I-kapalıdır ancak ve ancak $A \supset (int(A))^{\star}$ dır.

İspat: Açıktır.

Teorem 4.1.19: (X, τ, I) bir uzay ve $A, B \subset X$ olsun. O zaman

(1) Eğer $\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\} \subset IO(X, \tau)$ ise o zaman $\cup \{U_\alpha : \alpha \in \Delta\} \in IO(X, \tau)$ (Jankovic ve Hamlett, 1992)

(2) Eğer $A \in IO(X, \tau)$ ve $B \in \tau$ ise o zaman $A \cap B \in IO(X, \tau)$ (Jankovic ve Hamlett, 1992)

(3) Eğer $A \in IO(X, \tau)$ ve $B \in \tau^{\alpha}$ ise o zaman $A \cap B \in PO(X, \tau)$

(4) Eğer $A \in IO(X, \tau)$ ve $B \in SO(X, \tau)$ ise o zaman $A \cap B \in SO(A)$

(5) Eğer $A \in IO(X, \tau)$ ve $B \in \tau$ ise o zaman $A \cap B \subset int(B \cap (B \cap A)^{\star})$

İspat: **(1)** $\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\} \subset IO(X, \tau)$ olduğundan, o zaman her $\alpha \in \Delta$

için $U_\alpha \subset int(U_\alpha^\star)$ dır. Böylece her $\alpha \in \Delta$ için $\cup U_\alpha \subset \cup(intU_\alpha^\star) \subset int(\cup U_\alpha^\star) \subset int(\cup U_\alpha)^\star$ dır.

(2) Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals, Teorem 2.3(g)) den $A \cap B \subset int(A^\star) \cap B = int(A^\star \cap B)$ ($B \in \tau$ olduğundan) dır. $A \cap B \subset int(A \cap B)^\star$ dır.

(3) $A^\star(I)$ kapalı ve $A^\star \subset cl(A)$ olduğundan açıktır.

(4) Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals, Teorem 2.3(c)) den elde edilir.

(5) Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals, Teorem 2.3(g)) den elde edilir.

Sonuç 4.1.20: (1) I-kapalı kümenin ve kapalı kümenin birleşimi I-kapalıdır.

(2) I-kapalı küme ve α-kapalı kümenin birleşimi pre-kapalıdır.

Teorem 4.1.21: Eğer $A \subset (X, \tau, I)$ I-açık ve semi-kapalı ise o zaman $A = int(A^\star)$ dır.

İspat: Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals, Teorem 2.3(c)) den elde edilir.

Teorem 4.1.22: $A \in IO(X)$ ve $B \in IO(Y)$ olsun. $X \times Y$ çarpım uzayında eğer $A^\star \times B^\star = (A \times B)^\star$ ise o zaman $A \times B \in IO(X \times Y)$ dir.

İspat: $A \times B \subset int(A^\star) \times int(B^\star) = int(A^\star \times B^\star) \overset{\text{hipotezden}}{=} int(A \times B)^\star$ dır. Buradan $A \times B \in IO(X \times Y)$ dir.

Teorem 4.1.23: Eğer $A \subset W \subset cl(A)$ ve $A \in IO\,(X, \tau)$ ise o zaman W, β-açıktır.

İspat: Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals, Teorem 2.3(g)) den elde edilir.

Teorem 4.1.24: Eğer (X, τ, I) bir uzay ve $W \in IO\,(X, \tau)$ ise o zaman her $V \in SO(X)$ için $cl(V) \cap W \subset (V \cap W)^\star$ dır.

İspat: $V \in SO(X)$ olsun. O zaman $W \in IO\,(X, \tau)$ olduğundan $cl(V) = cl(int(V))$ dır. Buradan $cl(V) \cap W \subset cl(int(V)) \cap int(W^\star) \subset cl(int(V) \cap W^\star) \subset cl(V \cap W)^\star$, Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals, Teorem 2.3(c)) den $= (V \cap W)^{\star}$ dır.

Teorem 4.1.25: Eğer (X, τ, I) bir uzay, $A \in \tau$ ve $B \in IO\,(X, \tau)$ ise o zaman burada X in bir G açık alt kümesi vardır öyleki $A \cap G = \varnothing$ olması $A \cap B = \varnothing$ gerektirir.

İspat: $B \in IO\,(X, \tau)$ olduğundan $G = int(B^{\star})$ bir açık kümeden $B \subset int(B^{\star})$ dır, öyleki $B \subset G$ dir, fakat $A \cap G = \varnothing$ dir. O zaman $G \subset X \setminus A$, $cl(G) \subset (X \setminus A)$ gerektirir. Bundan dolayı $B \subset (X \setminus A)$ dır. İspat tamamlanır.

Teorem 4.1.26: A^d, A nın türev kümesi ve I_f, sonlu alt kümelerin idealini göstermek üzere eğer (X, τ, I_f) T_1 uzay ve $A \in IO(X)$ ise o zaman $A \subset int(A^d)$ dir.

İspat: I-açık kümelerin tanımından ve bir T_1 uzayda $A^{\star}(I_f) = A^d$ den ispatlanır (Jankovic ve Hamlett, 1990. New topologies from old via ideals).

Teorem 4.1.27: $\{X_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ uzaylar bir ailesi olsun. n pozitif bir tamsayı ve $A_\alpha \subset X_\alpha$ olmak üzere $X = \prod X_\alpha$ çarpım uzayı ve $A = \prod_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\beta$, X in boş kümeden farklı bir alt kümesidir. O zaman herbir $1 \leq \alpha \leq n$ için $A_\alpha \in IO(X_\alpha)$ dır ancak ve ancak $A \in IO(X)$ dir.

İspat: Gereklilik. Kabul edelimki herbir $1 \leq \alpha \leq n$ için $A_\alpha \in IO(X_\alpha)$ olsun. $A = \prod_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\beta \subset int(A^{\star})$ olduğundan $A \in IO(X)$ dır.

Yeterlilik. Kabul edelimki $A \in IO(X)$ olsun. Dolayısıyla $A \subset int(A^{\star}) = \prod_{\alpha=1}^{n} A_\alpha^{\star} \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\beta$ dır. $A \neq \varnothing$ ve $A \in IO(X)$ olduğundan $int(A^{\star}) \neq \varnothing$ dir. Dolayısıyla herbir $1 \leq \alpha \leq n$ için $int(A_\alpha^{\star}) \neq \varnothing$ dır. Böylece herbir $1 \leq \alpha \leq n$ için $A_\alpha \subset int(A_\alpha^{\star})$ ve buradan $A_\alpha \in IO(X_\alpha)$ dir.

Teorem 4.1.28: $A \subset (X, \tau, I)$ bir alt kümesi için

(1) Eğer A $\tau^{\star}$ kapalı ve $A \in IO(X)$ ise o zaman $int(A) = int(A^{\star})$ dır.

(2) A $\tau^{\star}$ kapalıdır ancak ve ancak A açık ve I-kapalıdır.

(3) Eğer A $\star$-perfect ise o zaman her $A \in IO\,(X, \tau)$ için $A = int(A^{\star})$ dir.

(4) Eğer A regüler kapalı ve I-açık ise o zaman I_n hiçbir yerde yoğun kümelerin ideali olmak üzere $A^{\star}(I_n) = int(A^{\star}(I_n))$ dir.

İspat: (1), **(2)**, **(3)** açıktır.

(4) I-açık tanımından ve A regüler kapalıdır ancak ve ancak $A = A^{\star}(I_n)$ Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals) olmasından elde edilir.

4.2. I-Sürekli, I-Açık ve I-Kapalı Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu, eğer her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in IO\,(X, \tau)$ ise I-süreklidir.

Yukarıdaki tanımdan I-sürekli$\Longrightarrow$pre-süreklidir (Abd El Monsef ve diğ., 1982). Örnekte de göstereceğimiz gibi tersi doğru değildir.

Örnek 4.2.2: $X = Y = \{a, b, c, d\}$, τ ayrık olmayan topoloji , σ ayrık topoloji ve X üzerinde $I = \{\varnothing, \{c\}\}$ olsun. O zaman $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ özdeşlik fonksiyonu pre-süreklidir fakat I-sürekli değildir, çünkü $\{c\} \in \sigma$ dır, fakat $f^{-1}(\{c\}) = \{c\} \notin IO(X)$ dir.

Süreklilik kavramının I-süreklilikten bağımsız olduğuna iki örnek verelim.

Örnek 4.2.3: $X = Y = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, X üzerinde $I = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ ve $\sigma = \{Y, \varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ olsun. O zaman $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ özdeşlik fonksiyonu süreklidir fakat I-sürekli değildir, çünkü $\{c\} \in \sigma$ dır, fakat $f^{-1}(\{c\}) = \{c\} \notin IO(X)$ dir.

Örnek 4.2.4: $X = Y = \{a, b, c\}$, $\tau = \sigma = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ ve X üzerinde $I = \{\varnothing, \{b\}\}$ olsun. O zaman $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ $f(a) = a = f(b)$ ve $f(c) = c$ şeklinde tanımlanan fonksiyon I-süreklidir fakat sürekli değildir.

Teorem 4.2.5: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(1) f I-süreklidir.

(2) Herbir $x \in X$ ve $f(x)$ içeren herbir $V \in \sigma$ için x i içeren $W \in IO(X)$ vardır öyleki $f(W) \subset V$ dir.

(3) Herbir $x \in X$ ve $f(x)$ içeren herbir $V \in \sigma$ için $(f^{-1}(V))^{\star}$ x in bir komşuluğundadır.

İspat: (1)⟶(2) $f(x)$ içeren $V \in \sigma$ olduğundan (1) den $f^{-1}(V) \in IO(X)$ dir. x i içeren $W = f^{-1}(V)$ diyelim. Bundan dolayı $f(W) \subset V$ dir.

(2)⟶(3) $f(x)$ içeren $V \in \sigma$ olduğundan (2) den x i içeren $W \in IO(X)$ vardır öyleki $f(W) \subset V$ dir. Dolayısıyla $x \in W \subset int(W^\star) \subset int(f^{-1}(V))^\star \subset (f^{-1}(V))^\star$. Buradan $(f^{-1}(V))^\star$ x in bir yakın komşuluğudur.

(3)⟶(1) Açıktır.

Teorem 4.2.6: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(1) f I-süreklidir.

(2) Y deki herbir kapalı kümenin tersi I-kapalıdır.

(3) Herbir $\star$-dense-in-itself $M \subset Y$ alt kümesi için $(int(f^{-1}(M)))^\star \subset f^{-1}(M^\star)$ dır.

(4) Herbir $U \subset X$ ve Y nin $\star$-perfect alt kümesi için $f((int(U))^\star) \subset (f(U))^\star$ dır.

İspat: (1)⟶(2) $F \subset Y$ kapalı olsun. O zaman $Y \setminus F$ açık, (1) den $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ I-açıktır. Böylece $f^{-1}(F)$ kapalıdır.

(2)⟶(3) $M \subset Y$ olsun. $M^\star$ kapalı olduğundan (2) den $f^{-1}(M^\star)$ I-kapalıdır. Buradan Teorem 4.1.15 uygularsak $f^{-1}(M^\star) \supset (int(f^{-1}(M^\star)))^\star$, $M^\star$ dense-in-itself olduğundan o zaman $f^{-1}(M^\star) \supset (int(f^{-1}(M^\star)))^\star \supset (int(f^{-1}(M)))^\star$ dır.

(3)⟶(4) $U \subset X$ ve $W = f(U)$ olsun, o zaman (3) den $f^{-1}(W^\star) \supset (int(f^{-1}(W)))^\star \supset (int(U))^\star$ Buradan $f((int(U))^\star) \subset W^\star = (f(U))^\star$ dır.

(4)⟶(1) $V \in \sigma$, $W = Y \setminus V$ ve $U = f^{-1}(W)$ olsun. O zaman $f(U) \subset W$ ve (4) den $f((int(U))^\star) \subset (f(U))^\star \subset W^\star$ Jankovic and Hamlett (1990. New topologies from old via ideals, Teorem 2.3(a)) den $= W$ dır. (Çünkü W $\star$-perfecttir.)

Böylece $f^{-1}(W) \supset (int(U))^\star = (int(f^{-1}(W)))^\star$ ve bu yüzden $f^{-1}(W) = f^{-1}(Y \setminus V)$ I-kapalıdır. Bundan dolayı $f^{-1}(V)$, X de I-açıktır ve f I-süreklidir.

Teorem 4.2.7: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu I-süreklidir ancak ve ancak $g : X \longrightarrow X \times Y$ fonksiyonu I-süreklidir.

İspat: Gereklilik. f I-sürekli olsun. $x \in X$ ve $g(x) = (x, f(x))$ içeren $X \times Y$ de herhangi bir V açık kümesi alalım. Burada $U \times W$ bir taban açık kümesi vardır öyleki $g(x) \in U \times W \subset V$ dir. f I-sürekli olduğundan X de U_1 I-açık kümesi vardır öyleki $x \in U_1 \subset X$ ve $f(U_1) \subset W$ dır. $U_1 \cap U$, X de I-açık küme ve $U_1 \cap U \subset U$ dır. Buradan $g(U_1 \cap U) \subset U \times W \subset V$ bu da gösterirki g I-süreklidir.

Yeterlilik. $g : X \longrightarrow X \times Y$ I-sürekli ve $f(x)$ içeren V açık olsun. O zaman $X \times V$, $X \times Y$ de açıktır ve g I-süreklidir, burada W I-açık kümesi vardır öyleki $g(W) \subset X \times V$ dir. Fakat bu $f(W) \subset V$ gerektirir. Buradan f I-süreklidir.

Teorem 4.2.8: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ I-sürekli ve $U \in \tau$ olsun. O zaman $f \mid U$ sınırlaması I-süreklidir.

İspat: $V \in \sigma$ olsun. O zaman $f^{-1}(V) \subset int(f^{-1}(V))^\star$ ve buradan $U \cap f^{-1}(V) \subset U \cap int(f^{-1}(V))^\star$ dır. Böylece $U \in \tau$ olduğundan $(f \mid U)^{-1}(V) \subset U \cap int(f^{-1}(V))^\star$ dır. O zaman $(f \mid U)^{-1}(V) = int\,[U \cap (f^{-1}(V))^\star]$ Banach (1930, Teorem 2.3. (g)) den $\subset int\,[U \cap f^{-1}(V)]^{\,\star} = int\,[(f \mid U)^{-1}(V)]^{\,\star}$ dır. Bu yüzden $f \mid U$ I-süreklidir.

Teorem 4.2.9: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ bir fonksiyon ve $\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ X in bir açık örtüsü olsun. Eğer herbir $\alpha \in \Delta$ için $f \mid U_\alpha$ kısıtlanmış fonksiyonu I-sürekli ise f I-süreklidir.

İspat: Teorem 4.2.8 dekine benzerdir.

Teorem 4.2.10: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ I-sürekli ve açık fonksiyon olsun. O zaman Y de herbir I-açık kümesinin tersi X de pre-açıktır.

Teorem 4.2.11: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ I-sürekli ve herbir $V \subset Y$ için $f^{-1}(V^\star) \subset (f^{-1}(V))^\star$ olsun. O zaman herbir I-açık kümesinin tersi I-açıktır.

Sonuç 4.2.12: İki I-sürekli fonksiyonunun birleşimi I-sürekli olmasına gerek yoktur. Örnekte gösterilecektir.

Örnek 4.2.13: $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}, \sigma = \{Y, \varnothing, \{a, c\}\}, \nu = \{Z, \varnothing, \{c\}, \{b, c\}\}$ topolojileri ile $X = Z = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$, X de $I = \{\varnothing, \{c\}\}$ ve Y de $J = \{\varnothing, \{a\}\}$ olsun ve $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ özdeşlik fonksiyonu, $g : (Y, \sigma, J) \longrightarrow (Z, \nu)$ $g(a) = a$, $g(b) = g(d) = b$, $g(c) = c$ şeklinde tanımlansın. f ve g nin her ikiside I-süreklidir. Bununla birlikte $g \circ f$ bileşke fonksiyonu I-sürekli değildir. Çünkü $\{c\} \in \nu$ dır, fakat $(g \circ f)^{-1}(\{c\}) = \{c\} \notin IO(X)$ dir.

Teorem 4.2.14: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma)$ ve $g : (Y, \sigma, J) \longrightarrow (Z, \mu)$ fonksiyonları için aşağıdaki kavramlar vardır.

(1) Eğer f I-sürekli ve g sürekli ise $g \circ f$ I-süreklidir.

(2) Eğer f $M-P$ sürekli ve g I-sürekli ise $g \circ f$ pre-süreklidir.

(3) Eğer f örten, herbir $B \subset Y$ için $f^{-1}(B^{\star}) \subset [f^{-1}(B)]^{\star}$ ve f ve g nin her ikiside I-sürekli ise o zaman $g \circ f$ I-süreklidir.

İspat:(1) Açıktır.

(2) Herbir I-açık kümenin pre-açık küme olmasından çıkar.

(3) Teorem 4.2.11 den elde edilir.

Tanım 4.2.15: $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ bir fonksiyonu, eğer herbir $U \in \tau$ (benzer şekilde U kapalı) için $f(U) \in IO(Y)$ (benzer şekilde $f(U)$ I-kapalı) ise I-açık (benzer şekilde I-kapalı) olarak adlandırılır.

Sonuç 4.2.16: **(1)** I-açık (I-kapalı) fonksiyon $\Longrightarrow$pre-açık (pre-kapalı) fonksiyondur ve tersi genelde doğru değildir. (Örnek 4.2.17)

(2) Herbir I-açık fonksiyon ve açık fonksiyon birbirinden bağımsızdır. (Örnek 4.2.18, Örnek 4.2.19)

Örnek 4.2.17: $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\sigma = \{Y, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$ iki topolojisiyle $X = Y = \{a, b, c\}$ ve Y de $J = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ olsun. O zaman $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ pre-açıktır fakat I-açık değildir, çünkü $\{a\} \in \tau$ dur, fakat $f(\{a\}) = \{a\} \notin IO(Y)$ dir.

Örnek 4.2.18: Eğer $X = \{a, b, c, d\} = Y$, $\tau = \{X, \varnothing, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$, $\sigma = \{Y, \varnothing, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ ve Y üzerinde $J = \{\varnothing, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$ ise o zaman $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ özdeşlik fonksiyonu I-açık fonksiyondur, fakat açık fonksiyon değildir.

Örnek 4.2.19: Eğer $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$, $\sigma = \{Y, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$ ve $J = \{\varnothing, \{a\}\}$ ise o zaman $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ özdeşlik fonksiyonu açıktır, fakat I-açık değildir, çünkü $\{a\} \in \tau$ dur fakat $f(\{a\}) = \{a\} \notin IO(Y)$ dir.

Teorem 4.2.20: $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) f I-açık fonksiyondur.

(2) Herbir $x \in X$ ve x in herbir U yakın komşuluğu için burada $f(x)$ içeren bir $W \subset Y$ I-açık kümesi vardır öyleki $W \subset f(U)$ dur.

İspat: Açıktır.

Teorem 4.2.21: $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ bir I-açık (benzer şekilde I-kapalı) fonksiyon olsun, eğer $W \subset Y$ ve $F \subset X$, bir $f^{-1}(W)$ kapalı (benzer şekilde açık) küme içeriyorsa , o zaman burada bir W yı içeren I-kapalı (benzer şekilde I-açık) $H \subset Y$ kümesi vardır öyleki $f^{-1}(H) \subset F$ dir.

İspat: Açıktır.

Teorem 4.2.22: $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ I-açık ise o zaman $f^{-1}(int(B))^{\star} \subset (f^{-1}(B))^{\star}$ dir, öyleki her $B \subset Y$ için $f^{-1}(B)$ $\star$-dense-in-itselfdir.

İspat: Teorem 4.2.21 den açıktır.

Teorem 4.2.23: $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ herhangi bijektif fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(1) $f^{-1} : (Y, \sigma, J) \longrightarrow (X, \tau)$ I-süreklidir.

(2) f I-açıktır.

(3) f I-kapalıdır.

Teorem 4.2.24: Eğer $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ I-açık ve herbir $A \subset X$ için $f(A^{\star}) \subset [f(A)]^{\star}$ ise o zaman herbir I-açık küme I-açıktır.

Teorem 4.2.11: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ ve $g : (Y, \sigma, J) \longrightarrow (Z, \nu, K)$ iki fonksiyon olsun. Burada I, J, K sırasıyla X, Y, Z üzerinde ideallerdir. O zaman

(1) Eğer f açık ve g I-açık ise o zaman $g \circ f$ I-açıktır.

(2) Eğer $g \circ f$ açık ve g I sürekli, birebir ise f I-açıktır.

(3) Eğer f ve g I-açık, f örten ve herbir $V \subset Y$ için $g(V^\star) \subset [g(V)]^\star$ ise o zaman $g{\circ}f$ I-açıktır.

V. BÖLÜM

KÜME VE SÜREKLİLİK ÇEŞİTLERİ

Bu bölüm 2 kesim halinde incelenecektir. 1. kesimde ideal topolojik uzaylarda çalışılmış olan çeşitli kümelerin karşılaştırması tablo şeklinde, 2. kesimde şu ana kadar çalışılmış olan I-süreklilik çeşitleri tablo şeklinde özetlenecektir.

5.1. İdeal Topolojik Uzaylarda Bazı Küme Çeşitleri ve Özellikleri

Kuratowski (1933) ve Vaidyanathaswamy (1945) tarafindan ele alınan genel topolojideki ideal kavramı, 1964-1976 yılları arasında Hashimoto (1976) , Hayashi (1964), Newcomb (1967) ve Njastad (1966) tarafından çalışıldı. İdeal topolojik uzay kavramı ise; 1990-1995 yılları arasında, bazı genel topolojistler Abd El Monsef ve diğ. (1992. On I-open sets and I-continuous fonctions), Abd El Monsef ve diğ. (1992. Some topological operators via ideals), Abd El Monsef ve diğ. (1993), Jankovic ve Hamlett (1990, Ideals in Topological Spaces and the Set Operator Ψ), Hamlett ve Rose (1992, Local compactness with respect to an ideal), Hamlett ve Rose (1992, Remarks on some theorems of Banach), Hamlett ve Rose (1993), Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals), Hamlett ve Jankovic (1992), Natkaniec (1986), Hamlett ve Rose (1992. On the one point I-compactification and local I-compactness), Jankovic ve Rose (1993-94) için, önemli bir çalışma konusu oldu. Genel topolojideki kompaktlık ve süreklilik kadar pek çok topolojik kavram, bu çalışmalarda ideal topolojik uzay için genelleştirildi. Bunlar, (X, τ) topolojik uzayında tanımlanan genelleştirilmiş açık kümelerin. (X, τ, I) ideal topolojik uzayına aktarılması ile elde edildi.

Öncelikle, genel topolojide verilen bazı kümeleri ve ideal topolojik uzaylarda bu kümelere karşılık gelen küme çeşitlerini ele alacağız. Ardından; bu kümeler arasında elde edilen karşılaştırmaları inceleyeceğiz. Daha sonra ise; ideal topolojik uzaylarda, bazı kümeler için yeni karşılaştırmalar vereceğiz.

Tanım 5.1.1: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

(1) Eğer $A \subset int(cl(int(A)))$ ise A kümesine α -açık küme (Njastad, 1966)

(2) Eğer $A \subset cl(int(A))$ ise A kümesine semi-açık küme (Levine, 1963)

(3) Eğer $A \subset int(cl(A))$ ise A kümesine pre-açık küme (Abd El Monsef ve diğ., 1982)

(4) Eğer $A \subset cl(int(cl((A))))$ ise A kümesine β-açık küme (Abd El Monsef ve diğ., 1983)

(5) Eğer $int(A) = int(cl(int((A))))$ ise A kümesine $\alpha^{\star}$- küme (Hatir ve diğ., 1996)

(6) Eğer $int(A) = int(cl(A))$ ise A kümesine t- küme (Tong, 1989)

(7) Eğer $A \subset cl\,(int\,(A)) \cup int\,(cl\,(A))$ ise b-açık küme (Andrijević, 1996) (ya da γ-açık küme (El-Atik, 1997))

(8) Eğer $A = cl(int(A))$ ise A kümesine regüler kapalı küme (Kuratowski, 1933)

(9) Eğer $A = int(cl(A))$ ise A kümesine regüler açık küme

(10) U bir açık küme ve V bir regüler kapalı küme olmak üzere eğer $A = U \cap V$ ise A kümesine A- küme (Tong, 1989)

(11) U bir açık küme ve T bir t- küme olmak üzere eğer $A = U \cap T$ ise A kümesine B-küme (Tong, 1989)

(12) U bir açık küme ve V bir $\alpha^{\star}$- küme olmak üzere eğer $A = U \cap V$ ise A kümesine C- küme (Hatir ve diğ., 1996)

(13) U bir açık küme ve V bir kapalı küme olmak üzere eğer $A = U \cap V$ ise A kümesine lokal kapalı küme

denir.

Tanım 5.1.2: (X, τ, I) ideal topolojik uzayının $A \subset X$ kümesine

(1) Eğer $A^{\star} \subset A$ ise $\tau^{\star}$-kapalı küme (Jankovic ve Hamlett, 1990. New topologies from old via ideals)

(2) Eğer $A \subset int(A^{\star})$ ise I-açık küme (Abd El Monsef ve diğ., 1992, On I-open sets and I-continuous fonctions)

(3) Eğer $A \subset int((cl(int(A)))^{\star})$ ise α-I-açık küme (Hatir ve Noiri, 2002)

(4) Eğer $A \subset (cl(int(A)))^{\star}$ ise semi-I-açık küme (Hatir ve Noiri, 2002)

(5) Eğer $A \subset int(((cl(A))^{\star})$ ise pre-I-açık küme (Dontchev, 1996)

(6) Eğer $A \subset cl(int(((cl(A))^{\star}))$ ise β -I-açık küme (Hatir ve Noiri, 2002)

(7) Eğer $A \subset cl^{*}(int(A)) \cup int(cl^{*}(A))$ ise b-I-açık küme (Aslım ve Caksu, 2005).

(8) Eğer $int(A) = int(((cl(A))^{\star})$ ise t-I-küme (Hatir ve Noiri, 2002)

(9) Eğer $int(A) = int((cl(int(A)))^{\star})$ ise w-I-küme (Hatir ve Noiri, 2002)

(10) Eğer $A = (int(A))^{\star}$ ise regüler I-kapalı küme (Keskin ve diğ., 2004, Idealization of decomposition theorem)

(11) Eğer $A = int(cl(A))^{\star})$ ise regüler I-açık küme (Açıkgöz ve diğ., 2005)

(12) Eğer $A = A^{\star}$ ise *-perfect küme (Hayashi, 1964)

(13) Eğer $int(A) = ((cl(int(A)))^{\star})$ ise S-I-küme

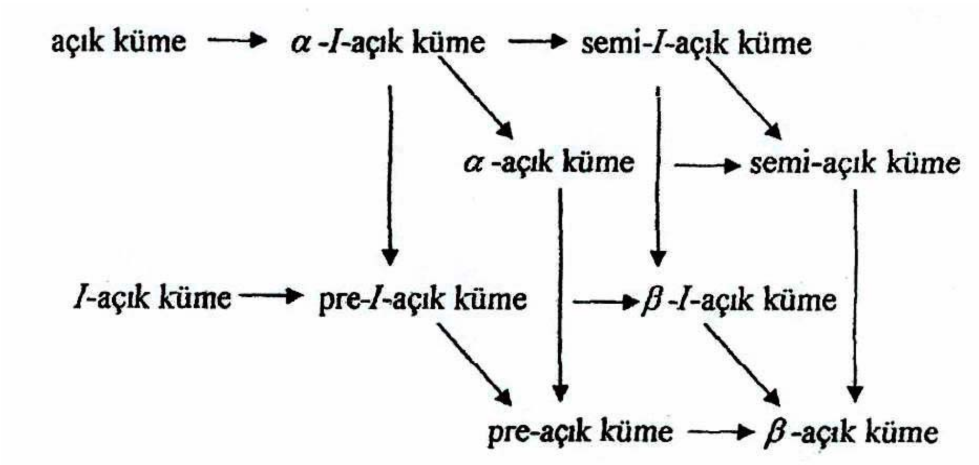
(14) Eğer $int(A) = int((cl(int(A)))^{\star})$ ise $\alpha^{\star}$-I-açık küme (Hatir ve Noiri, 2002)

(15) Eğer $cl_{\theta}^{\star}(A) = A$ ise θ-I-kapalı küme (burada x in her U açık komşuluğu için $A \cap ((cl(U))^{\star}) \neq \emptyset$ ise x noktasına A nın bir θ-I-cluster noktası, A nın bütün θ-I-cluster noktalarının ailesine A nın θ-I-kapanışı denir ve $cl_{\theta}^{\star}(A)$ ile gösterilir.)

(16) Eğer $[A]_{\delta-I} = A$ ise δ-I-kapalı küme (burada x in her U açık komşuluğu için $A \cap int(((cl(U))^{\star}) \neq \emptyset$ ise x noktasına A nın bir δ-I-cluster noktası, A nın bütün δ-I-cluster noktalarının ailesine A nın δ-I-kapanışı denir ve $[A]_{\delta-I}$ ile gösterilir.) (Açıkgöz ve diğ., 2005)

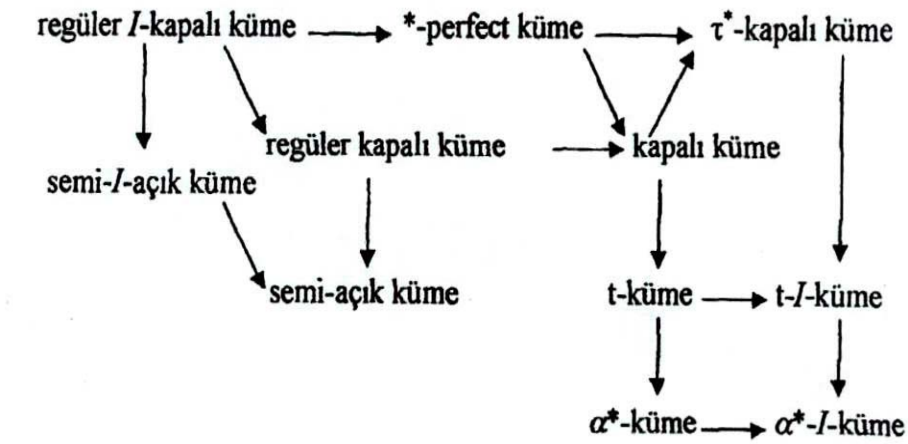
denir.

Tanım 5.1.1 ve Tanım 5.1.2 deki kümeler için, Dontchev (1996) ve Hatir ve Noiri (2002) de verilen karşılaştırmalar, aşağıdaki şekilde yer almaktadır. Şekildeki gerektirmelerin karşıtlarının doğru olmadığı, aynı yazarlar tarafından örneklerle gösterildi. Ayrıca; açık küme ile I-açık küme kavramlarının birbirinden bağımsız oldukları Abd El Monsef ve diğ. (1992, On I-open sets and I-continuous fonctions) de gösterildi.



Şekil 1

Hatir ve Noiri (2002) ve Keskin ve diğ. (2004, Idealization of decomposition theorem) de ayrı ayrı verilen özellikler ile birlikte Aynur Keskin'in doktora tezinden aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 2

Şekil 2 deki özelliklerin karşıtları genelde doğru değildir. Semi-I-açık bir kümenin regüler I-kapalı bir küme olmadığı Keskin ve diğ. (2004, Idealization of decomposition theorem) de gösterilldi. t-I-kümenin bir t-küme ve w-I-kümenin w-küme olmadığı da Hatir ve Noiri (2002) de verildi.

Tanım 5.1.3: (X, τ, I) ideal topolojik uzayının $A \subset X$ kümesine

(1) $U \in \tau$ ve V regüler-I- kapalı küme olmak üzere eğer $A = U \cap V$ ise A_I-küme (Keskin ve diğ., 2004, Idealization of decomposition theorem)

(2) $U \in \tau$ ve V bir t-I- küme olmak üzere eğer $A = U \cap V$ ise B_I- küme (Hatir ve Noiri, 2002)

(3) $U \in \tau$ ve V bir $\alpha^\star$-I- küme olmak üzere eğer $A = U \cap V$ ise C_I- küme (Hatir ve Noiri, 2002)

(4) $U \in \tau$ ve V bir S-I- küme olmak üzere eğer $A = U \cap V$ ise S_I- küme

(5) $U \in \tau$ ve V $\star$-perfect küme olmak üzere eğer $A = U \cap V$ ise I-LC küme (Dontchev, Idealizations of Ganster-Reilly decomposition theorems)

(6) $U \in \tau$ ve V $\tau^\star$-kapalı küme olmak üzere eğer $A = U \cap V$ ise w-I-LC küme (Keskin ve diğ., 2004. Decompositions of I-continuity and continuity)

(7) Eğer U$\in \tau$ ve V semi-I-regüler küme $A = U \cap V$ ise kümesine AB_I-küme (Keskin ve Yuksel, 2006)

(8) Eğer U$\in \tau$ ve V $\tau^\star$-kapalı küme ise $A = U \cap V$ ise kümesine st-I-LC küme

denir.

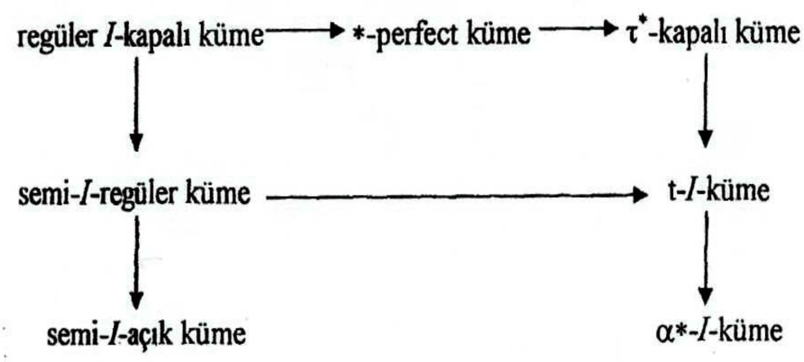
$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & S_I - k\ddot{u}me & \leftarrow & S - I - k\ddot{u}me \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
t - I - k\ddot{u}me & \longrightarrow & B_I - k\ddot{u}me & \longrightarrow & C_I - k\ddot{u}me & \leftarrow & w - I - k\ddot{u}me \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
t - k\ddot{u}me & \longrightarrow & B - k\ddot{u}me & \longrightarrow & C - k\ddot{u}me & \leftarrow & w - k\ddot{u}me
\end{array}
$$

Şekil 3

Tanım 5.1.4: (X, τ, I) ideal topolojik uzayında herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi, hem t-I-küme hem de semi-I-açık küme ise A kümesine semi-l-regüler küme denir.

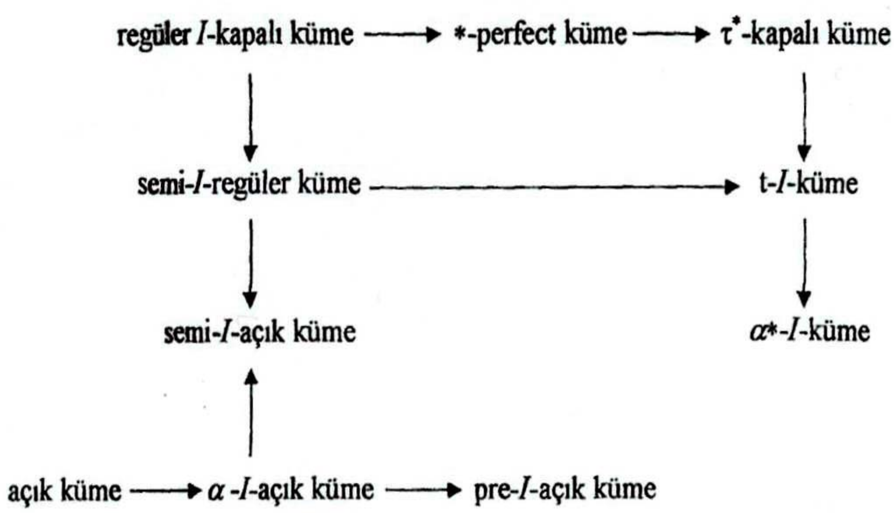
(X, τ, I) ideal topolojik uzayındaki bütün semi-I-regüler kümelerin ailesini $S_I R(X, \tau)$ ile göstereceğiz.

Aynur Keskin'in doktora tezinden aşağıdaki şekil elde edilir.



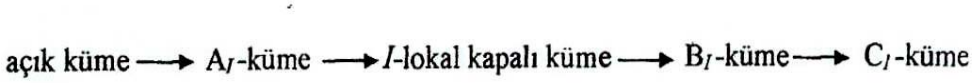
Şekil 4

Şekil 4 ve Aynur Keskin'in doktora tezinden aşağıdaki şekil elde edilir.



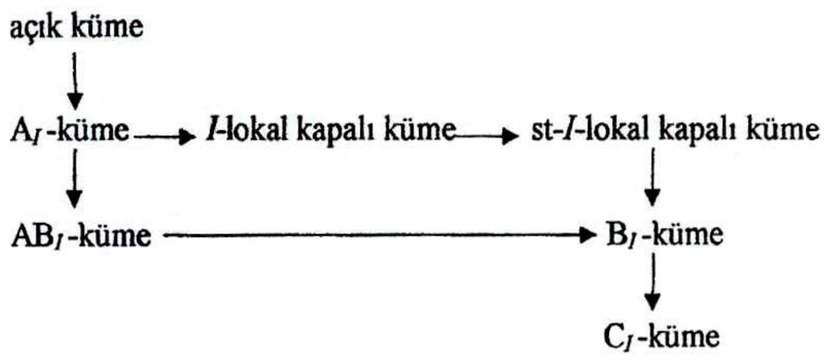
Şekil 5

Tanım 5.1.3 ile incelenen kümeler arasındaki geçişler Hatir ve Noiri (2002) ve Keskin ve diğ. (2004, Idealization of decomposition theorem) de verildi. Bu geçişleri, aşağıdaki şekilde gösterelim.



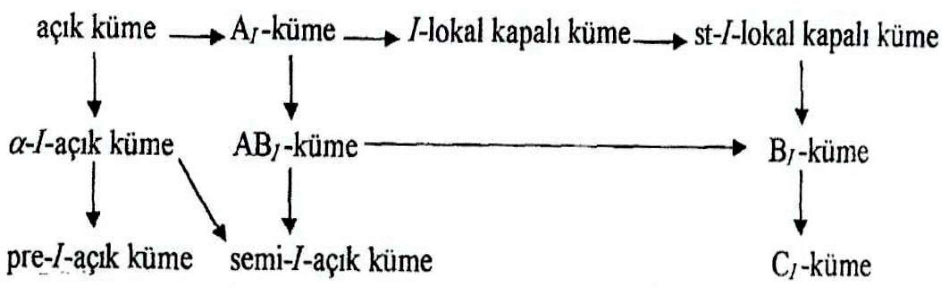
Şekil 6

Şekil 6 ve Aynur Keskin'in doktora tezinden aşağıdaki şekil elde edilir.



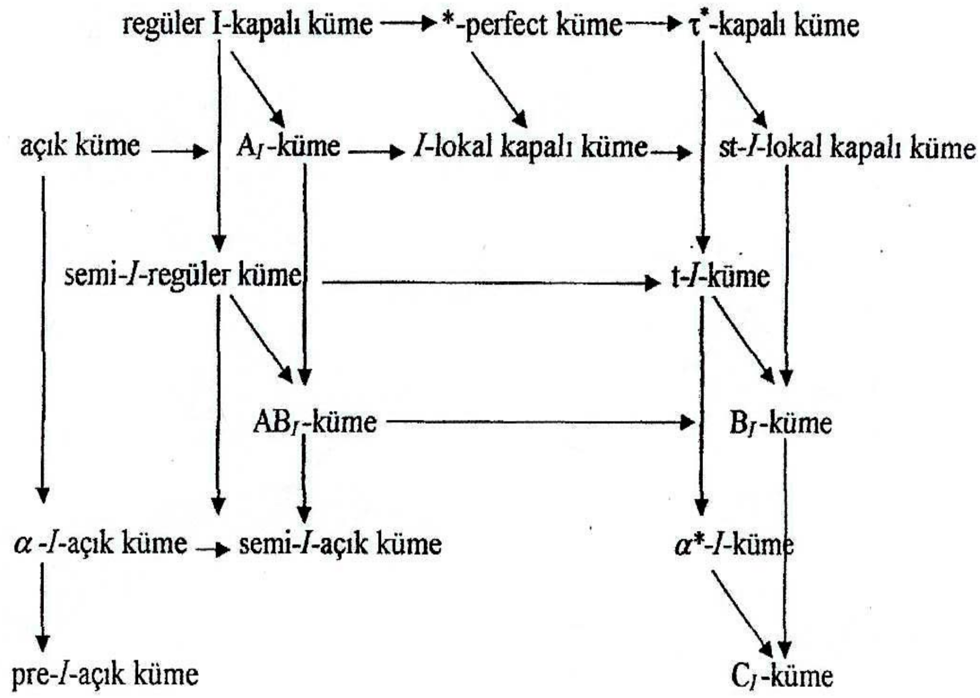
Şekil 7

Şekil 7 ve Aynur Keskin'in doktora tezinden aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 8

Şekil 4, Şekil 8 ve Aynur Keskin'in doktora tezinden aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 9

Tanım 5.1.5: (X, τ, I) ideal topolojik uzayının $A \subset X$ kümesine,

(1) Eğer $A \subset A^{\star}$ ise $\star$-dense-in-itself küme (Hayashi, 1964)

(2) Eğer $A \subset (int(A))^{\star}$ ise f_I-küme (Keskin ve diğ., 2004. F_I -sets and decomposition of R_I C continuity)

(3) Eğer $A \subset (cl(int((cl(A))^{\star})))^{\star}$ ise strong β-I-açık küme (Hatir ve diğ., 2003)

(4) Eğer $A \subset (cl(int(A^{\star})))^{\star}$ ise almost strong β-I-açık küme (Hatir ve diğ., 2003)

(5) Eğer $A \subset cl(int(A^{\star}))$ ise almost I-açık küme (Abd El Monsef ve diğ., 1999)

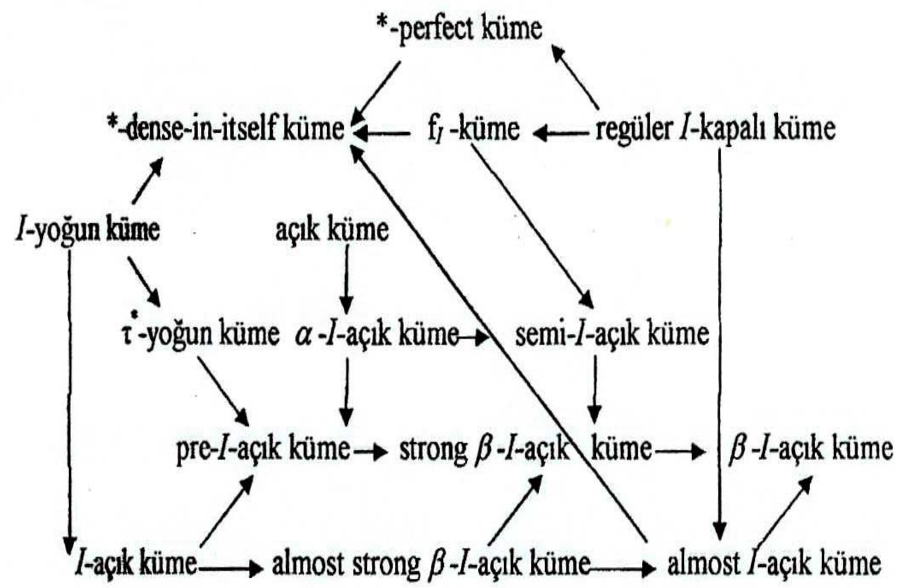
(6) Eğer $A^{\star} = X$ ise I-yoğun küme (Dontchev ve diğ., 1999)

(7) Eğer $(cl(A))^{\star} = X$ ise $\tau^{\star}$-yoğun küme (Dontchev ve diğ., 1999)

(8) Eğer $A^{\star} \subset A$ ise $\tau^{\star}$-kapalı (Jankovic ve Hamlett, 1990. New topologies from old via ideals)

denir.

Tanım 5.1.5 ve Tanım 5.1.2 deki kümeler için; Keskin ve diğ. (2004. F_I -sets and decomposition of R_I C continuity), Hatir ve diğ. (2003) ve Dontchev ve diğ. (1999) de verilen karşılaştırmalar yer almaktadır. Şekildeki karşıtların genelde doğru olmadığı aynı yazarlar tarafından örneklerle gösterildi. Ayrıca Keskin ve diğ. (2004. F_I -sets and decomposition of R_I C continuity) de *-perfect küme ile f_I-küme ve *-dense-in-itself küme ile semi-I-açık küme kavramlarını birbirinden bağımsız olduklarınıda gösterdi.



Şekil 10

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} \alpha^{\star}-I \\ açık\ küme \end{array} & \begin{array}{c} \tau^{\star}-kapalı \\ küme \end{array} \\
\begin{array}{c} I-açık \\ küme \end{array} \arrow[d] & \begin{array}{c} regüler\ I \\ kapalı\ küme \end{array} \arrow[u] \arrow[d] & \star-perfect \arrow[u] \arrow[d] \\
\begin{array}{c} almost\ strong \\ I-açık\ küme \end{array} \arrow[d] & f_I-küme \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \begin{array}{c} {}^{\star}-dense-in \\ itself\ küme \end{array} \\
\begin{array}{c} strong\ \beta-I \\ açık\ küme \end{array} & \begin{array}{c} semi-I \\ açık\ küme \end{array} \arrow[l] \arrow[r] & \begin{array}{c} semi\ açık \\ küme \end{array}
\end{tikzcd}
$$

Şekil 11

Tanım 5.1.6: (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer $X = X^{\star}$ ise (X, τ, I) ideal topolojik uzayına Hayashi uzayı denir.

Tanım 5.1.7: (X, τ, I) ideal topolojik uzayında $\tau \cap I = \{\varnothing\}$ ise (X, τ, I) ideal topolojik uzayına Samuels uzayı denir.

Jankovic ve Hamlett (1990. New topologies from old via ideals) farklı yıllarda verilen Tanım 5.1.6 ve Tanım 5.1.7 uzay kavramlarının çakışık olduklarını gösterdiler ve bu iki uzayı Hayashi-Samuels uzayı olarak adlandırdılar. Hayashi uzayı yeriine Hayashi-Samuels uzayı kavramını kullanacağız.

Şimdi, yeni bir ideal topolojik uzay kavramını verelim ve bu uzayı Hayashi-Samuels uzayı ile karşılaştıralım.

Tanım 5.1.8: (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer her $A \subset X$ kümesi *-dense-in-itself küme ise (X, τ, I) ideal topolojik uzayına **-uzayı denir.

Tanım 5.1.9: (X, τ, I) ideal topolojik uzayında herhangi bir $A \subset X$

kümesi verilsin. Eğer $cl(A) = X$ ise A kümesine yoğun küme denir (Kuratowski, 1933).

5.2. İdeal Topolojik Uzaylarda Bazı Süreklilik Çeşitleri ve Özellikleri

Tanım 5.2.1: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \varphi$ kümesi için

(1) $f^{-1}(V) \in IO\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna I-sürekli (Abd El Monsef ve diğ.,1992, On I-open sets and I-continuous fonctions)

(2) $f^{-1}(V) \in S_IO\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna semi-I-sürekli (Hatir ve Noiri, 2002)

(3) $f^{-1}(V) \in P_IO\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna pre-I-sürekli (Dontchev, 1996)

(4) $f^{-1}(V) \in \alpha_IO\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna α-I-sürekli (Hatir ve Noiri, 2002)

(5) $f^{-1}(V) \in A_I\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna A_I-sürekli (Keskin ve diğ., 2004, Idealization of decomposition theorem)

(6) $f^{-1}(V) \in B_I\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna B_I-sürekli (Hatir ve Noiri, 2002)

(7) $f^{-1}(V) \in C_I\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna C_I-sürekli (Hatir ve Noiri, 2002)

(8) $f^{-1}(V) \in S_I\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna S_I-sürekli

(9) $f^{-1}(V) \in w\text{-}I\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna w-I-sürekli (Açıkgöz ve diğ., 2004)

(10) $f^{-1}(V) \in I\text{-}LC$-kapalı$(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna I-LC-sürekli (Dontchev, Idealizations of Ganster-Reilly Decomposition Theorems)

(11) $f^{-1}(V) \in w\text{-}I\text{-}LC\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna w-I-LC-sürekli (Keskin ve diğ., 2004. Decompositions of I-continuity and continuity)

(12) $f^{-1}(V) \in AB_I\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna AB_I-sürekli

(13) $f^{-1}(V) \in t\text{-}I\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna t_I-sürekli

(14) $f^{-1}(V) \in st\text{-}I\text{-}LC\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna st-I-LC-sürekli

(15) $f^{-1}(V) \in f_I\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna f_I-sürekli (Keskin ve diğ., 2004, Idealization of decomposition theorem)

(16) $f^{-1}(V) \in AIO\,(X,\tau)$ ise f fonksiyonuna almost I-sürekli (Abd El Monsef ve diğ., 1999)

(17) $f^{-1}(V) \in \beta IO\,(X,\tau)$ ise f fonksiyonuna β-I-sürekli (Hatir ve diğ., 2003)

(18) $f^{-1}(V) \in PO\,(X,\tau)$ ise f fonksiyonuna almost strongly β-I-sürekli

(19) $f^{-1}(V) \in bIO\,(X,\tau)$ ise f fonksiyonuna b-I-sürekli

denir.

Tanım 5.2.2: $f:(X,\tau,I) \longrightarrow (Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin.

(1) Eğer her $U \in \tau$ için $f(U) \in IO\,(X,\tau)$ ise f fonksiyonuna I-açık (Abd El Monsef ve diğ.,1992, On I-open sets and I-continuous fonctions)

(2) Eğer X de her U kapalısı için $f(U)$ I-kapalı ise f fonksiyonuna I-kapalı (Abd El Monsef ve diğ.,1992, On I-open sets and I-continuous fonctions)

denir.

Tanım 5.2.3: $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\varphi,J)$ fonksiyonu verilsin.

(1) Eğer her $U \in \tau$ için $f(U) \in SIO\,(Y,\varphi,J)$ ise f fonksiyonuna semi-I-açık (Hatir ve Noiri, 2005)

(2) Eğer her U kapalısı için $f(U)$ semi-I-kapalı ise f fonksiyonuna semi-I-kapalı (Hatir ve Noiri, 2005)

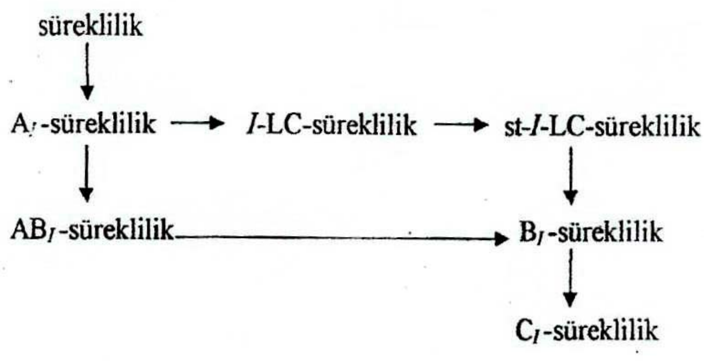
denir.

Tanım 5.2.1 deki süreklilik çeşitleri için Şekil 6 kullanılarak aşağıdaki şekil elde edilir:

Süreklilik $\rightarrow$ **A_I- süreklilik** $\rightarrow$ ***I*-LC-süreklilik** $\rightarrow$ **B_I-süreklilik** $\rightarrow$ **C_I- süreklilik**

Şekil 12

Şekil 12, Tanım 5.2.1 kullanılarak aşağıdaki biçimde genişletilir.



Şekil 13

Tanım 5.2.4: $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \varphi$ kümesi için

(1) $f^{-1}(V) \in \alpha O\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna α-sürekli (El-Deeb ve diğ., 1983)

(2) $f^{-1}(V) \in PO\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna pre-sürekli (Abd El Monsef ve diğ., 1982)

(3) $f^{-1}(V) \in SO\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna semi-sürekli (Levine, 1963)

(4) $f^{-1}(V) \in \beta O\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna β-sürekli (ya da bazen semi-presürekli) (Abd El Monsef ve diğ., 1983)

(7) $f^{-1}(V) \in A\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna A-sürekli (Tong, 1989)

(8) $f^{-1}(V) \in B\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna B-sürekli (Tong, 1989)

(9) $f^{-1}(V) \in C\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna C-sürekli (Hatir ve diğ., 1996)

(10) $f^{-1}(V) \in LC\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna LC-sürekli (Ganster ve Reilly, 1989)

(11) $f^{-1}(V) \in bO\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna b-sürekli (ya da γ-sürekli) (El-Atik, 1997)

denir.

$$\begin{array}{ccccc} & & I - s\ddot{u}rekli & & \\ & & \downarrow & & \\ s\ddot{u}rekli & \longrightarrow & pre - I - s\ddot{u}rekli & \longrightarrow & pre - s\ddot{u}rekli \end{array}$$

Şekil 14

Tanım 5.2.5: (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $A \subset S \subset X$ olsun.

(1) Eğer $A \in f_I(X, \tau)$ ve $S \in \tau$ ise o zaman $A \in f_I(S, \tau \backslash S)$

(2) Eğer $R_I C(X, \tau)$ ve $S \in \tau$ ise o zaman $R_I C(S, \tau \backslash S)$

denir.

Tanım 5.2.6: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \varphi$ kümesi için

(1) Eğer $f^{-1}(V)$ bir (X, τ, I) nın regüler I-kapalı kümesi ise $R_I C$-sürekli (Keskin ve diğ., 2004, Idealization of decomposition theorem)

(2) Eğer $f^{-1}(V)$ bir (X, τ, I) nın $\tau^\star$-kapalı kümesi ise contra*-sürekli (Keskin ve diğ., 2004, Idealization of decomposition theorem)

(3) Eğer $f^{-1}(V)$ (X, τ, I) nın $\star$-perfect kümesi ise f fonksiyonuna $\star$-perfectly sürekli

(4) Eğer $f^{-1}(V)$ (X, τ, I) nın semi-I-regüler kümesi ise f fonksiyonuna semi-I-regüler sürekli

(5) Eğer $f^{-1}(V)$ (X, τ, I) nın semi-I-açık kümesi ise f fonksiyonuna semi-I-sürekli (Hatir ve Noiri, 2002)

denir.

Tanım 5.2.7: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \varphi, J)$ fonksiyonu verilsin.

(1) Eğer her $x \in X$ ve $f(x)$ in her V açık komşuluğu için burada x in bir U açık komşuluğu vardır öyleki $f(int(cl^\star(U))) \in int(cl^\star(V))$ ise f fonksiyonuna δ-I-sürekli (Açıkgöz ve diğ., 2005)

(2)Eğer her $x \in X$ ve $f(x)$ in her V açık komşuluğu için burada x in bir U açık komşuluğu vardır öyleki $f(cl^\star(U)) \subset cl^\star(V)$ ise f fonksiyonuna θ-I-sürekli

(3) Eğer her $x \in X$ ve $f(x)$ in her V açık komşuluğu için burada x in bir U açık komşuluğu vardır öyleki $f(cl^{\star}(U)) \subset V$ ise f fonksiyonuna st-θ-I-sürekli denir.

$$st - \theta - I - s\ddot{u}rekli \quad \longrightarrow \quad \delta - I - s\ddot{u}rekli \quad \longrightarrow \quad almost - I - s\ddot{u}rekli$$

Şekil 15

Tanım 5.2.8: $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin.

(1) Eğer her $V \in IO\,(Y, \varphi)$ için $f^{-1}(V) \in IO\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna I-irresolute

(2) Eğer her $V \in PO\,(Y, \varphi)$ için $f^{-1}(V) \in PO\,(X, \tau)$ ise f fonksiyonuna pre-irresolute (Reilly ve Vamanamurthy, 1985)
denir.

VI. BÖLÜM

AYIRMA AKSİYOMLARI

6.1. İdeal Topolojik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları

Tanım 6.1.1: (X, τ, I) bir ideal topolojik uzayı eğer X in her $I \in I$ altkümesi ve her $x \notin I$ için burada x i içeren ve I dan ayrık bir A_x kümesi vardır öyleki A_x açık ya da kapalı ise bu uzaya T_I uzay denir.

Tanım 6.1.2: (X, τ, I) bir ideal topolojik uzayı eğer her x,$y \in X$, $x \neq y$ için x ve y yi sırasıyla bulunduran U ve V I-açık kümeleri vardır öyleki $U \cap V \neq \emptyset$ ise bu uzaya I-Hausdorff (ya da I-T_2) uzay denir. O zaman x ve y noktaları I-separateddir.

Tanım 6.1.3: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

(1) Eğer her farklı iki nokta ayrık açıklığa sahipse bu uzaya Hausdorff (ya da T_2)

(2) Eğer her farklı iki nokta ayrık pre-açıklığa sahipse bu uzaya pre-Hausdorff (ya da pre-T_2) (Bhattacharyya ve Kar., 1990)

(3) Eğer her farklı iki nokta ayrık β-açıklığa sahipse bu uzaya β-Hausdorff (ya da β-T_2) (Abd El Monsef ve Mahmoud, 1990)

denir.

Tanım 6.1.4: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ ve x i içermeyen I kapalı A kümesi için burada ayrık U ve V $I-$açık kümeleri vardır öyleki $x \in U$ ve $A \subset V$ ise bu uzaya I–regüler uzay denir.

Tanım 6.1.5: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ ve x i içermeyen regüler-I kapalı A kümesi için burada ayrık U ve V $I-$açık kümeleri vardır öyleki $x \in U$ ve $A \subset V$ ise bu uzaya almost-I–regüler uzay denir (Açıkgöz ve diğ., 2005).

Tanım 6.1.6: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ ve x i içermeyen semi-I kapalı A kümesi için burada ayrık U ve V $I-$açık kümeleri vardır öyleki $x \in U$ ve $A \subset V$ ise bu uzaya semi-I–regüler uzay denir.

KAYNAKLAR

Abd El Monsef, M.E, El-Deeb, S.N., Mahmoud, R.A., 1983. β-open sets and β-continious mappings, Bull. Fac. Sci., Assiut Univ., 12 (1), 77-90

Abd El Monsef, M.E, El-Deeb, S.N., Moshhour, A.S., 1982. On precontinious and weak precontinious mappings, Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, (53), 47-53

Abd El Monsef, M.E., Hasanein, I.A., Moshhour, A.S.,1984. On pretopological spaces, Bull. Math. Soc., R. S. Romania, 28 (76), 39-45

Abd El Monsef, M.E., Lashien, E.F., Nasef, A.A., 1992. On I-open sets and I-continuous fonctions, Kyungpook Math. J., vol. 32 (1), 21-30

Abd El Monsef, M.E., Lashien, E.F., Nasef, A.A., 1992. Some topological operators via ideals, Kyungpook Math. J., vol. 32 (2), 273-284

Abd El Monsef, M.E., Lashien, E.F., Nasef, A.A., 1993. S-compactness via ideals, Tamkang J. Math. J., vol. 24 (4), 431-443

Abd El Monsef, M.E., Mahmoud, R. A., 1990. β-irresolute and β-topological invariant, Proc. Pakistan Acad. Sci., 27, 285-296

Abd El Monsef, M.E., Mahmoud, R. A., Nasef, A.A., 1999, Almost I-openness and I-continuity, J. Egypt Math. Soc., vol. 7 (2), 191-200

Açıkgöz, A., Noiri, T., Yuksel, S., 2004. A Decomposition of Continuity in Ideal Topological Spaces, Acta Math. Hungar., 105 (4), 285-289

Açıkgöz, A., Noiri, T., Yuksel, S., 2005. On δ-I-Continuous Functions, Turk J. Math., 29, 39-51

Aho, T., Nieminen, T., 1994. Spaces in which pre-open subsets are semi-open, Ricerche Math., 43

Akdağ, M., On b-I-sets and $b-I$-continuity of Functions, Int. Jour. of Math. and Math. Sci., vol 2007, doi: 10.1155/2007/75721

Akdağ, M., 2008. On θ-I-sets, Kochi Journal of Math., vol 3, 217-229

Andrijević, D., 1996. $b-$open Sets, Mat. Bechnk, 48, 59-64.

Arenas, F.G., Dontchev, J., Puertas, M.L., 2000. Idealization of Some Weak Separation Axioms, Acta Math. Hungar., 89 (1-2), 47-53

Aslım, G., Caksu, A., 2005. $b-I-$open Sets and Decompositions of Continuity via İdealization, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., Vol. 22, 27-32

Banach, S., 1930. Theoreme sur les ensembles de premiere categorie, Fund. Math., 16, 395-398

Bankston, P., 1979. The total negation of a topological property, Illinois J. of Math., 23, 241-252

Bagley, R.W., Mcknight Jr, J.D., 1958. On properties characterizing pseudo-compact spaces, Proc. Am. Math. Soc., 9, 500-506

Bhattacharyya, P., Kar., A., 1990. Some weak separation axioms, Bull. Call. Math. Soc., 82, 415-422

Block, H.D., Cargal, B., 1952. Arbitrary Mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 937-941

Blumberg, H., 1922. New properties of all real functions, Trans. Amer. Math. Soc., 24, 113-128

Blumberg, H., 1944. Arbitrary point transformations, Duke Math. J., 11, 671-685

Bourbaki, N., 1966. General Topology, Addison-Wesley, Mass.

Cargal, B., 1953. Generalization of contiunity, Proc. Iowa. Acad.. Sci., 60, 477-481

Crossley, S.G., Hildebrand, S.K., 1972. Semi topological properties, Fund. Math., 74, 233-254

Dontchev, J., 1995. On Hausdorff spaces via topological ideals and I-irresolute functions, In Papers on General Topology and Applications, Annals of New York Academy of Sciences, vol.767, 28-38

Dontchev, J., 1996. On pre-I-open sets and a decomposition of I-continuity, Banyan Math. J., vol. 2

Dontchev, J., Idealizations of Ganster-Reilly decomposition theorems, to appear

Dontchev, J., Ganster, M., Noiri, T., 1999. Unified operation approach of generalized closed sets via topological ideals, Math. Japonica, vol.49 (3), 395-401

Dontchev, J., Ganster, M., Rose, D., 1999. Ideal resolvability, Topology and its Applications, vol. 93, 1-16

El-Atik, A. A., 1997. A study of Some Types of Mappings on Topological Spaces, M. Sci. Thesis, Tanta Univ., Egypt.

El-Deeb, S.N., Hasanein, I.A., Moshhour, A.S., 1983. α-continious and α-open mappings, Acta Math. Hungar., vol.41, 213-218

Fomin, S.V., 1943. Extensions of topological spaces, Ann. of Math., (2) 44, 471-480

Freud, G., 1958. Ein beitrag zu dem sätze von Cantor and Bendixson, Acta Math. Hung., 9, 333-336

Ganster, M., Reilly, I.L., 1989. Locally closed sets and LC-continuous functions, İnternat. J. Math. Sci., 3, 417-424

Hamlett, T.R., Jankovic, D., 1990. Ideals in Topological Spaces and the Set Operator Ψ, Bollettino U.M.I., vol.7, 863-874

Hamlett, T.R., Jankovic, D., 1990. New topologies from old via ideals, to appear in Amer. Math. Monthly, 97 No:4, 295-310

Hamlett, T.R., Jankovic, D., 1990. Compactness with Respect to an Ideal, Boll. U.M.I., 7 (4B), 849-861

Hamlett, T.R., Jankovic, D., 1992. Compatible Extensions of Ideals, to appear in Boll. U.M.I.

Hamlett, T.R., Rose, D.A., 1992. Local compactness with respect to an ideal, Kyungpook Math. J., vol. 32 (1), 31-43

Hamlett, T.R., Rose, D.A., 1992. On the one point I-compactification and local I-compactness, Math. Slovaca, vol.42 (3), 359-369

Hamlett, T.R., Rose, D.A., 1992. Remarks on some theorems of Banach, McShane and Pettis, Rocky Mountain J. Math., vol. 22(4),1329-1339

Hamlett, T.R., Rose, D.A., 1993. A note chracterizing countable compactness with respect to an ideal, New Zealand, J. Math., vol.22, 63-66

Hashimoto, H., 1952. On some local properties on spaces, Math. Japonica, II, 127-134

Hashimoto, H., 1976. On the *topology and its applications, Fund. Math., 91, 5-10

Hatir, E., Noiri, T., 2002. On decomposition of continuity via idealization, Acta Math. Hungar., vol.96, 341-349

Hatir, E., Noiri, T., 2005. On semi-I-open sets and semi-I-continuous functions, Acta Math. Hungar., 107 (4), 345-353

Hatir, E., Keskin, A., Noiri, T., 2003. On a new decomposition of continuity via idealization, JP Geometry and Topology, vol.1(3), 55-64

Hatir, E., Noiri, T., Yuksel, S., 1996. A decomposition of continuity, Acta Math. Hungar., vol.70 (1-2), 145-150

Hayashi, E., 1958. One point expansion of topological spaces, Proc. Japan. Acad., 34, 73-75

Hayashi, E., 1964. Topologies defined by local properties, Math. Ann.,156, 205-215

Hewitt, E., 1943 A problem in set theoretic topology, Duke Math. J., 10, 309-333

Jankovic, D., Rose, D., 1993-94. On functions having the property of Baire, Real Anal. Exchange, vol.19 (2), 589-597

Kaniewski, J., Piotrowski, Z., 1986. Concerning contiunity apart from a meager set, Proc. Amer. Math. Soc., 98, 324-328

Keskin, A., 2003. İdeal Topolojik Uzaylarda Sürekliliğin Yeni Dağılımları, Doktora tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Keskin, A., Noiri, T., Yuksel, S., 2004. F_I -sets and decomposition of R_I C continuity, Acta Math. Hungar., 104 (4), 307-313

Keskin, A., Noiri, T., Yuksel, S., 2004. Idealization of decomposition theorem, Acta Math. Hungar., to appear

Keskin, A., Noiri, T., Yuksel, S., 2004. Decompositions of I-continuity and continuity, Commun Fac. Sci. Univ. Ankara Series A1, 53, 67-75

Keskin, A., Yuksel, S., 2006. On Semi-I-Reguler Sets, AB_I-Sets and Decompositions of Continuity, R_IC-Continuity, A_I-Continuity, Acta Math. Hungar., 113 (3), 227-241

Kirch, M.R., 1969. A class of space in which compact sets are finite, Amer. Math. Monthly, 76, 42

Kuratowski, K., Sierpinski, W., 1921. Le theoreme de Borel-Lebesgue dans la theorie des Ensembles Abstraits, Fund. Math., 2, 172-178

Kuratowski, K., 1933. Topologie I, Warszawa

Kuratowski, K., 1966. Topology, Vol. I, Academic Press, New York

Levine, N., 1963. Semi open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 70, 36-41

Levine, N., 1968. On the equivalence of compactness and finiteness in topology, Amer. Math. Monthly, 75, 178-180

Martin, N.F.G., 1961. Generalized condensation points, Duke Math. J., 28, 507-514

Nasef, A.A., 2002. On Hausdorff Spaces via Ideals and quasi I-irresolute Functions, Depart. of Math. Fac. of Edu. Suez Canal Uni., El-Arish, Egypt, 14, 619-625

Natkaniec, T., 1986. On I-continuity and semi-I-continuity points, Math. Slovaca, vol.36 (3), 297-312

Newcomb, R.L., 1967. Topologies which are compact modulo an ideal, Ph. D. Dissertation, Univ. of Cal. at Santa Barbara

Njastad, O., 1965. One some classes of nearly open sets, Pasific J. Math.,15 961-970

Njastad, O., 1966. Remarks on topologies defined by local properties, Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo I (N.S), 8, 1-16

Oxtoby, J.C., 1976. The kernel operation on subsets of a T_1 -space, Fund. Math., 90, 205-224

Oxtoby, J.C., 1980. Measure and Category, Springer-Verlag

Reilly, I.L., Vamanamurthy, M.K., 1980. On hereditarily Lindelöf spaces, Bull. Austral. Math. Soc., 21, 357-362

Reilly, I.L., Vamanamurthy, M.K., 1985. On α-continuityin topological spaces, Acta Math. Hung.,45, no:1-2, 27,32

Samuels, P., 1975. A topology formed from a given topology and ideal, J. London Math. Soc., (2) 10, 409-416

Scheinberg, S., 1971. Topologies which generate a complete measure algebra, Advances in Math., 7, 231-239

Semadeni, Z., 1963. Functions with sets of points of discontinuity belonging to a fixed ideal, Fund. Math., 52, 25-39

Sharma, P.L., 1981. A class of spaces in which compact sets are finite, Canad. Math. Bull., 24 (3), 373-375

Seebach, J.A., Steen, L.A., Jr., 1978. Counterexamples in Topology, Springer-Verlag, New York

Tong, J., 1989. On decomposition of continuity in topological spaces, Acta Math. Hungar., vol.54 51-55

Vaidyanathaswamy, R., 1945. The localization theory in set-topology, Proc. İndian Acad Sci., 20, 51-61

Vaidyanathaswamy, R., 1960. Set Topology, Chelsea Publishing Company

Wilansky, A., 1970. Topology for Analysis, Ginn, Mass.

ÖZGEÇMİŞ

Banu BOLAYIR 1980 yılında Sivas'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sivas'ta tamamladı. 2000 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandı ve 2004 yılında bu bölümden mezun oldu. 2005 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2004 yılından itibaren dershanede Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.