SONLU ARALIKTA COULOMB POTANSİYELE SAHİP STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS (İNVERSE) PROBLEMLER

Nilifer TOPSAKAL

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008

T.C
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU ARALIKTA COULOMB POTANSİYELE SAHİP STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS (İNVERSE) PROBLEMLER

Nilifer TOPSAKAL
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2008

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1193 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Doktora Tezi

SONLU ARALIKTA COULOMB POTANSİYELE SAHİP
STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN
TERS PROBLEMLER

Nilifer TOPSAKAL
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman : Prof. Dr. Rauf AMİROV

Bu çalışma Coulomb Potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisine aittir. Sunulan çalışmada, sonlu aralıkta Coulomb Potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörü için çözümünün bir integral gösterimi, spektral karakteristiklerinin özellikleri, daranışları, Weyl fonksiyonu ve Weyl çözümünün özellikleri, ters problem için teklik teoremleri ve özfonksiyonların özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Operatör, Spektrum, Ters Problem, Coulomb Potansiyeli, Weyl Fonksiyonu, Weyl Çözümü.

SUMMARY

Ph.D. Thesis

INVERSE PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE OPERATORS WHICH HAVE COULOMB POTENTIAL IN FINITE INTERVAL

Nilifer TOPSAKAL
Cumhuriyet University
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Rauf AMİROV

This study belongs to spectral theory of Sturm-Liouville operators which have Coloumb Potential. Integral representation of solution, proporties and behaviours of spectral characteristics, properties of Weyl function and Weyl solution, uniqueness theorems and finally properties of eigenfunctions are investigated for Sturm-Liouville operators which have Coulomb Potential in finite interval.

Key Words : Operator, Spectrum, Inverse Problem, Coulomb Potential, Weyl Function, Weyl Solution.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer hocam Prof. Dr. Rauf AMİROV ’ a ve tüm emeği geçenlere içten teşekkürlerimi sunarım.

Nilifer TOPSAKAL
Sivas, Mayıs 2008

GIRIŞ

Spektral analizin bir dalı olan inverse (ters) problemler yani, spektral karakteristiklerine göre operatörlerin kurulması problemi, fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin mekanikte, verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesinde, Kuantum mekaniğinde, verilen enerji seviyelerine veya saçılma verilerine göre parçacıklar arasında etkileşmenin öğrenilmesinde, jeofizikte yer altı madenlerinin aranmasında karşımıza çıkmaktadır.

Bu yüzden verilen sistemin enerji seviyelerinin ve dalga fonksiyonlarının bulunması en önemli problemlerden birisidir. Söz konusu problemler verilen sistemin yerleştiği potansiyel alana bağlıdır. Bu tip problemlerin çözümü, farklı potansiyelli Schrödinger denklemi için sınır-değer problemlerinin özdeğer, özfonksiyon ve normalleştirici sayıların bulunmasına indirgenmektedir.

Ayrıca, Kuantum teorisinin önemli problemlerinden birisi de sistemin enerji seviyeleri belli iken sistemin bulunduğu potansiyel alanı bulmaktır. Bu tip problemler, singülariteye sahip Sturm-Liouville operatörler için inverse (ters) problemler yardımıyla çözülmektedir. Bu yüzden de, söz konusu operatörlerin spektral karakteristiklerine göre belirlenmesi probleminin çözülmesi, önem taşımaktadır.

Tanım 0.1: Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları toplanabilir fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan diferansiyel operatörlere singülerdir denir.

Ikinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Rietsz, Neumann, Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapılmıştır.

Ikinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan(artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü, Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar, 1949 yılında Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular Courant, Carleman, Birman, Salamyak, Maslov, Keldish gibi bazı matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Tanım 0.2: L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerinin bulunması problemine düz problem, spektral karakteristikleri verildiğinde bu hangi Sturm-Liouville tipinde L diferansiyel operatörünün spektral karakteristikleri olduğu problemine ise ters problem denir.

Ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörlerin spektral analizinde önemli bir yere sahiptir ve de fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma Ambartsumyan'a (1929) aittir. 1929 yılında Ambartsumyan tarafından Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 0.3: $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ 'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad 0 < x < \pi, \qquad (0.1)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \qquad (0.2)$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2, (n = 0, 1, ...)$ ise, $q(x) \equiv 0$ dır.

Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi Borg' a aittir ve elde ettiği sonuç, aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 0.4: $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ 'ler (0.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (0.3)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (0.4)$$

sınır koşulları ile verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n, ...$ 'ler ise (0.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad (0.5)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (0.6)$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri, $q(x)$ fonksiyonu ve h, h_1, ve H sayılarını tek olarak belirtir ($h \neq h_1$ ve h, h_1, H sonlu gerçel sayılardır).

Borg' un (1945) çalışmasında, $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilir ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirlenir. Yani bu tip operatörün varlığı önceden kabul edilir. Borg aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, Ambartsumyan' ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektruma göre Sturm-Liouville operatörünün belirlenebileceği Levinson' un (1949) çalışmalarında ispatlanmıştır. Ayrıca Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan çevirme operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde Delsarte, Lions (1938), (1956) ve Levitan, Gasimov (1964) tarafından verilmiştir. Key... Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm opertörünün yapısını ilk olarak Povzner (1948) kendi çalışmalarında incelemiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi Marchenko (1950) tarafından kaydedilmiştir. Marchenko bu çalışmasında ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yaralanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (0.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h, \tag{0.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise (0.1) diferansiyel denklemi ve ayrık sınır koşullarının ürettiği operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)\,dx \tag{0.8}$$

sayıları verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere Marchenko, Borg' un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşulu verilmiştir. Marchenko' nun çalışmalarıyla hemen hemen aynı zamanda Krein (1951) ve (1954) çalışmalarında Sturm-Liouville tipinde diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili bir yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında Marchenko' nun çalışması yayınlanmadan önce Tikhonov (1949) tarafından Marchenko' nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. Tikhonov' un (1949) çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 0.5: $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda\rho^2(x)\,U = 0, \quad x > 0, \quad U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ dır. $R(\lambda) = \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

Gelfand ve Levitan' ın (1951) çalışmalarında, $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $(\alpha_n > 0)$ dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimptotik eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \ldots + \frac{a_{\left[\frac{m}{2}\right]}}{n^{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \ldots + \frac{b_{\left[\frac{m}{2}\right]}}{n^{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\left[\frac{m}{2}\right]+1}}$$

Burada $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi q(t)\,dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\dfrac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek ise $\sum \left(\dfrac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville opertörünün belirlenmesi Levitan ve Gasimov' un (1964) çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{0.9}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n$. çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.9) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de eğer, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{0.9'}$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

şeklindeki klasik asimptotik formülleri sağlarsa, (0.9) formülünden yaralanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadeleri bulunur. Buradan $q(x)$ sürekli fonksiyon olduğu durumda $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin (0.1) formundaki denklemin iki spektrumu olması için gerek ve yeter koşullar alınır. Bu koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralıdır, yani $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < ...$ şeklindedir.

2) λ_n ve μ_n ' ler (0.9') asimptotik formüllerine sahiptir.

3) $a_0 \neq a_0'$.

Şimdi ise, singüler Sturm-Liouville operatörleriyle ilgili bazı sonuçlardan kısaca bahsedilecektir.

Gasimov' un (1965) çalışmasında,

$$-y'' + \left\{\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + q(x)\right\} y = \lambda y \tag{0.10}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0, \tag{0.11}$$

$$y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0, \tag{0.12}$$

$$y'(\pi) - H_2 y(\pi) = 0, \tag{0.12'}$$

sınır koşulları ile verilen diferansiyel operatörü incelenmiş ve bu diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü verilmiştir.

Teorem 0.6: ℓ pozitif tamsayı, $q(x) \in L_2[0,\pi]$ olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, ...$ ve $\mu_0, \mu_1, ...$ dizileri sırasıyla (0.10), (0.11), (0.12) ve (0.10), (0.11), (0.12') tipindeki diferansiyel operatörlerin özdeğerleri olması için:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralıdır, yani $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < ...$ şeklindedir.

2) $\lambda_n = \left(n + \frac{\ell}{2}\right)^2 + a + a_n,$

$\mu_n = \left(n + \frac{\ell}{2}\right)^2 + b + b_n,$

asimptotik formülleri sağlansın, burada $a \neq b$ ve $\{a_n\}, \{b_n\}$ dizileri öyle ki $\sum |a_n|^2$, $\sum |b_n|^2$ serileri yakınsaktır,

3) $\sum |c_n|^2$ serisi yakınsak olmak üzere $\mu_n - \lambda_n = b - a + \frac{c_n}{n}$ koşullarının sağlanması gerekli ve yeterli şarttır.

Gasimov ve Amirov' un (1985) çalışmasında,

$$-y'' + \left\{\frac{A}{x} + q(x)\right\} y = \lambda y \tag{0.13}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0, \tag{0.14}$$

$$y'(\pi) - h_1 y(\pi) = 0, \tag{0.15}$$

$$y'(\pi) - h_2 y(\pi) = 0, \tag{0.15'}$$

sınır koşulları ile verilen diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü ile ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 0.7: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) $\lambda_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2c_0 + a_n,$

$\mu_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2c_0' + a_n',$

asimptotik formülleri sağlansın, burada $c_0 \neq c_0'$ ve $\{a_n\}, \{a_n'\}$ dizileri için $\sum |a_n|^2$, $\sum |a_n'|^2$ serileri yakınsaktır,

O halde bir $q(x)$ sürekli fonksiyonu ve h_1, h_2 gerçel sayıları vardır ki, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, (0.13), (0.14), (0.15) operatörünün, $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ ise (0.13), (0.14), (0.15') operatörünün spektrumlarıdır ve

$$h_1 - h_2 = \pi\left(c_0' - c_0\right)$$

eşitliği sağlanır.

Diğer taraftan $W_2^{-1}(0,1)$ uzayında singüler reel değerli potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem Hryniv ve Mkytyuk (2003) çalışmasında incelenmiştir.

Bu çalışmada, $q \in W_2^{-1}(0,1)$ reel değerli dağılım (distrubition) fonksiyonu olmak üzere $H := L_2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$\ell := -\frac{d^2}{dx^2} + q \tag{0.16}$$

diferansiyel ifadesine karşılık gelen T Sturm-Liouville operatörü tanımlanmış ve Savchuk ve Shkalikov' un (1999) çalışmasına göre, regülarizasyon yöntemi ile Dirichlet sınır koşullarından bahsedilmiştir.

Dağılım anlamında $\sigma' = q$ olacak şekilde reel değerli $\sigma \in H$ alınmış ve

$$D(T_\sigma) = \left\{u \in W_1^1(0,1) \mid u' - \sigma u \in W_1^1(0,1), \ell_\sigma(u) \in H, u(0) = u(1) = 0\right\} \tag{0.17}$$

kümesinde tanımlı

$$Tu = T_\sigma u = \ell_\sigma(u) := -\left(u' - \sigma u\right)' - \sigma u' \qquad (0.18)$$

operatörü yazılmıştır.

Burada, dağılım anlamında her $u \in D(T_\sigma)$ için $\ell_\sigma(u) = -u'' + qu$ ifadesi incelendiğinde özellikle T_σ operatörü, regüler potansiyeller için ilkel σ nın özel seçimine bağlı değildir ve (0.16)' ya karşılık gelen standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörü ile çakışır. Ayrıca T_σ, ilkel $\sigma \in H$' ye düzgün rezolvent anlamında sürekli olarak bağlıdır ve böylece T_σ, herhangi bir $q = \sigma' \in W_2^{-1}(0,1)$ için (0.16)' ya ait standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörüdür. Ele alınan potansiyeller sınıfı Dirac $\delta -$ tipli ve $\frac{1}{x} -$ Coloumb tipli potansiyelleri içerir ve matematiksel fizik ve kuantum mekaniğinde geniş olarak kullanılır (Albeverio, Gesztesy ve Ark, 1988) ve (Albeverio ve Kurasov, 2000).

Savchuk ve Shkalikov' un (1999) çalışmasından iyi bilinir ki, her reel değerli $\sigma \in H$ için yukarda tanımlanan T_σ operatörü, diskret basit $\left(\lambda_k^2\right), k \in N$, spektrumlu self-adjoint operatördür ve λ_k, $\lambda_k = \pi k + \mu_k$ ($\mu_k \in \ell_2$ olan dizi) şeklinde asimptotiğe sahiptir (Savchuk ve Shkalikov, 1999, Savchuk , 2001 ve Hryniv, 2003). Regüler q potansiyelleri için yukarıdaki asimptotikler $\mu_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ olacak şekilde yazılır.

Bu çalışmada, " reel ikişerli farklı sayılardan oluşan ve yukarda ifade edilen asimptotiklere sahip hangi $\left(\lambda_k^2\right)$ dizileri, $W_2^{-1}(0,1)$ den olan singüler potansiyelli Sturm-Liouville operatörlerinin spektrumudur " sorusunun cevabı araştırılmıştır. Bu soru, ele alınan potansiyeller için ters spektral probleme götürür. Yani bu durum, karşılık gelen spektral parametreye dayanan q potansiyelinin kurulmasıdır.

Regüler durumda, yukarıda bahsedilen problemin çözümü için sadece $\left(\lambda_k^2\right)$ spektrumunun yetersiz olduğu bilinmektedir. Aynı dirichlet spektrumlu Sturm-Liouville operatörlerinin ürettiği bir çok farklı q potansiyelleri (isospectral) vardır. Pöschel ve Trubowitz (1987), verilen $\left(\lambda_k^2\right)$ spektrumlu (reel, basit ve $\lambda_k = \pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)$ asimptotiğine ait) H Hilbert uzayındaki bütün potansiyellerin kümesinin, analitik olarak $w_n = n$ ağırlıkları ile $\ell_2(w_n)$ ağırlıklı uzaya difeomorfik olduğunu göstermişlerdir.

q potansiyelini yeniden tek olarak elde etmek için spektrumun yanında bazı ek bilgiler verilmelidir. Bu bilgiler, $(0,1)$ aralığının yarısı üzerindeki potansiyelin bilinmesi veya farklı sınır koşulları olan aynı diferansiyel ifade ile verilen Sturm-Liouville operatörünün spektrumu veya biri bütün aralık için diğerleri aralığın eşit iki yarısı için olan üç spektrum olabilir.

Çevirme operatörlerine dayanan regüler Sturm-Liouville operatörünün spektral verisinden, q potansiyelini yeniden elde etmenin algoritması, Marchenko (1950) ve Gelfand (1951) tarafından geliştirilen Gelfand-Levitan-Marchenko denklemi olarak adlandırılır. Iki spektrum ile q potansiyelinin kurulumu için bir alternatif metod, Krein (1951) tarafından geliştirildi. Daha sonra H Hilbert uzayından potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için Trubowitz ve Pöschel (1987) tarafından farklı bir yaklaşım önerildi. Yazarlar, spektral veriyi ve H' deki potansiyeller arasındaki dönüşümü ayrıntılı olarak çalışmışlar ve ters spektral problemin çözülebilirliğini ispatlamışlardır. Özellikle spektral veriyi tam olarak karakterize etmişlerdir.

Hryniv ve Mkytyuk' un (2003) çalışmasında Gelfand, Levitan ve Marchenko' ya göre, klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve $W_2^{-1}(0,1)$ den singüler potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüştür. Şöyle ki, spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elemanından q' nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır.

Diğer singülarite tiplerine göre (örneğin Sturm-Liouville operatörler sınıfı için a süreksizlik noktası, $\frac{1}{x^{\gamma}}$ ya benzer potansiyeller, vs.), Hald (1984), Andersson (1988), Carlson (1994), Hald ve McLaughlin (1998), Yurko (200) ve Freiling (2002), Amirov ve Yurko (2001) bakmışlardır.

Aralığın iç noktasında singülariteye ve süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler, Amirov ve Yurko (2001) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $x=0$ noktasında singülariteye sahip self-adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralığın iç noktasında çözümün süreksizliğe sahip olduğu durumu incelenmiştir ve verilen operatörün spektral özellikleri ve bu spektral özelliklere göre ters problemin konumu ve çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Benzer şekilde Amirov (2002) çalışmasında self-adjoint olmayan, Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahip olduğu durum incelenmiştir. Burada verilen diferansiyel operatörü üreten diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışları, operatörün spektral özellikleri, spektrumu basit olduğu durumda yani yalnızca özdeğerlerden oluştuğu durumda, özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon ve koşulmuş fonksiyonlara göre operatörün ayrılışımı, spektral parametrelere göre ters problemin konumu ve bu ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Amirov' un (2006) çalışmasında, sonlu aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörler sınıfı için çevirme operatörü, çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri, spektral karakteristiklerinin bazı özellikleri ve ters problem için teklik teoremleri öğrenilmiştir.

Sonlu aralıkta Coulomb potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörü için ters problemlerin araştırıldığı bu tezde aşağıdaki yol izlenmiştir:

I. bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

II. bölümde sonlu aralıkta Coulomb potansiyele sahip Sturm-Liouville diferansiyel denklemi, birinci mertebeden denklem sistemine indirgenmiş ve bu sistemin çözümünün bir gösterilimi elde edilmiştir.

2.1 alt bölümünde,

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = u(x)\, y_1 \\ y_2' + k^2 y_1 = -u(x)\, y_2 - u^2(x)\, y_1 + q(x)\, y_1 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

$$y_1(0) = 0, y_1(\pi) = 0 \tag{2.1.5}$$

$$\begin{cases} y_1(d+0) = \alpha y_1(d-0) \\ y_2(d+0) = \alpha^{-1} y_2(d-0) + 2ik\beta y_1(d-0) \end{cases} \tag{2.1.6}$$

olmak üzere (2.1.4)-(2.1.6) probleminin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$ başlangıç koşulunu sağlayan $y(x,k) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x,k)$ çözümünün

$x < d$ ise,

$$\begin{cases} y_1 = e^{ikx} + \displaystyle\int_{-x}^{x} K_{11}(x,t)\, e^{ikt} dt \\ y_2 = ike^{ikx} + b(x)\, e^{ikx} + \displaystyle\int_{-x}^{x} K_{21}(x,t)\, e^{ikt} dt + ik \int_{-x}^{x} K_{22}(x,t)\, e^{ikt} dt \end{cases} \tag{2.1.10}$$

$x > d$ ise,

$$
\begin{cases}
y_1 = \alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} + \beta\left(e^{ikx} - e^{ik(2d-x)}\right) + \displaystyle\int_{-x}^{x} K_{11}(x,t)\, e^{ikt} dt \\
y_2 = ik\left(\alpha^+ e^{ikx} - \alpha^- e^{ik(2d-x)}\right) + ik\beta\left(e^{ikx} + e^{ik(2d-x)}\right) \\
\qquad + b(x)\left[\alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} + \beta\left(e^{ikx} - e^{ik(2d-x)}\right)\right] \\
\qquad + \displaystyle\int_{-x}^{x} K_{21}(x,t)\, e^{ikt} dt + ik \displaystyle\int_{-x}^{x} K_{22}(x,t)\, e^{ikt} dt
\end{cases}
\tag{2.1.11}
$$

şeklinde bir gösterilime sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca farklı bölgelerde $K_{ij}(x,t)$, $(i,j = 1,2)$ fonksiyonları için integral denklemleri sistemi elde edilmiştir.

2.2 alt bölümünde, 2.1 alt bölümünde elde edilen integral denklemleri sisteminin uygun bölgede çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

III. bölümde, verilen operatörün spektrumunun özellikleri, Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonunun özellikleri ile L probleminin belirlenmesi için Weyl fonksiyonuna ve diskret spektral verilere göre ters problemin çözümü incelenmiştir.

3.1 alt bölümünde, $C = 0, q(x) \equiv 0$ durumuna karşılık gelen L_0 probleminin

$$\Delta_0(k) = \left(\alpha^+ + \beta\right) \sin k\pi + \left(\alpha^- - \beta\right) \sin k(2d - \pi)$$

karakteristik fonksiyonunun özellikleri ve L probleminin özdeğerlerinin özellikleri incelenmiştir.

3.2 alt bölümünde, L probleminin spektral karakteristiklerinin n' nin yeterince büyük değerlerinde davranışları öğrenilmiştir.

3.3 alt bölümünde, L probleminin Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonunun özellikleri araştırılmıştır.

3.4 alt bölümünde, L probleminin belirlenmesi için Weyl fonksiyonuna ve diskret spektral verilere göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri verilmiştir.

3.5 alt bölümünde, L probleminin özfonksiyonlarının tamlığı ve ayrılışımı incelenmiştir.

I.BÖLÜM

Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1: $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L_2[a,b]$ uzayı,

$$L_2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 \, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $g(x) = \overline{g(x)}$).

Tanım 1.2: ℓ_2 uzayı,

$$\ell_2 = \left(x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \,\middle|\, x_i \in K, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3: L, $D(L)$ tanım kümesinde sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)\,y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise, λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 1.4: $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \left\{ y_1^2(x,\lambda_n) + y_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 1.5: $L - \lambda I$ operatörünün sınırlı $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ' lar kümesine L operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(L)$ ile gösterilir.

$$\sigma(L) = \{\lambda : Ly = \lambda y, y \in D(L)\}$$

Tanım (Adjoint Operatör)1.6: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L : H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \to H_1$ operatörü $\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^*y\rangle$ şartlarını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin adjointi denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne self adjoint operatör denir.

Tanım (Çevirme Operatörü)1.7: E lineer topolojik uzay, A ve B de $A : E \to E$, $B : E \to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır,

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatör çifti için çevirme operatörü denir.

Tanım 1.8: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 1.9: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir.

Teorem (Rouché Teoremi) 1.10: f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar olsunlar. Eğer γ, f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen, B içinde bulunan basit kapalı bir eğri ve de γ üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ ise bu durumda $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonlarının γ içindeki sıfırlarının sayılar katlılıkları ile birlikte aynıdır.

Teorem (Cauchy Integral Teoremi) 1.11: $f(z)$ bağlantılı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon ve γ G de bulunan keyfi düzlendirilebilir kapalı eğri olacak biçimde ise, $f(z)$nin γ eğrisi üzerinden integrali sıfıra eşittir:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Teorem (Cauchy Integral Formülü) 1.12: B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer a, γ içinde bir nokta ve $f(z)$, B de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

dir.

Tanım 1.13: Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası z_0 olsun. Eğer,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

ise, z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası denir.

Teorem (Rezidü Teoremi) 1.14: D bölgesinde ($f(z)$ nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, ..., z_n$ noktaları hariç) ve D nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]$$

z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z=z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]$$

dir. $f(z)$ tam fonksiyon olmak üzere

$$R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{|a_k|}\right)^{-1}$$

formülü ile tanımlı R sayısı

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı ve $M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ olsun.

Tanım 1.15: $r > R$ için

$$M(r) < \exp(r^{\mu})$$

olacak şekilde $\mu > 0$ varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir ve yukarıda verilen eşitsizliği sağlayan μ sayılar kümesinin

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$$

formülü ile tanımlı ρ alt sınırına $f(z)$ nin mertebesi denir.

Tanım 1.16: $f(z)$ tam fonksiyonun mertebesi sonlu $\rho\,(0<\rho<\infty)$ olmak üzere $r>R$ için

$$M(r)<\exp\left(ar^{\rho}\right) \tag{1.1}$$

olacak şekilde $a>0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir.

(1.1) eşitsizliğini sağlayan $\sigma=\inf\{a\}$ sayısına $f(z)$ fonksiyonun tipi denir ve

$$\sigma=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$$

formülüyle hesaplanır.

Tanım 1.17: $\sigma=0,0<\sigma<\infty$ olmak üzere $\rho\,(0<\rho<\infty)$ mertebeli $f(z)$ tam fonksiyonu sırası ile minimal, normal, maksimal tipe sahiptir denir.

Tanım (Mittag-Leffler Açılımı) 1.18: Bir $f(z)$ fonksiyonunun kompleks düzlemdeki aykırılıkları mutlak değer büyüklüğüne göre sıralanmış, basit $a_1,a_2,a_3,\ldots$kutup yerleri ve bu noktalardaki rezidüleri sırasıyla $b_1,b_2,b_3,\ldots$ olsun. Eğer C_N hiçbir kutup yerinden geçmeyen, üzerinde $|f(z)|<M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği R_N yarıçaplı çember ise ve $N\to\infty$ iken $R_N\to\infty$ oluyorsa,

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)$$

yazılır.

Tanım 1.19: $W_2^{\sigma}(a,b)$ uzayı şu şekilde tanımlanır:

$$W_2^{\sigma}(a,b)=\left\{f:\ f^{(\sigma-1)}\in AC(a,b),f^{(\sigma)}\in L_2(a,b)\right\}.$$

Şimdi ise koşulmuş fonksiyonlar tanımını verelim:

$$\ell(y):=P_0(x,\lambda)\,y^{(n)}+P_1(x,\lambda)\,y^{(n-1)}+\ldots+P_n(x,\lambda)\,y \text{ ve } \upsilon=\overline{1,n} \text{ için}$$

$$U_{\upsilon}(y):=\alpha_{0\upsilon}y(a)+\alpha_{1\upsilon}y'(a)+\ldots+\alpha_{n-1\upsilon}y^{(n-1)}(a)+\beta_{0\upsilon}y(b)+\beta_{1\upsilon}y'(b)+\ldots+\beta_{n-1\upsilon}y^{(n-1)}(b)$$

olmak üzere

$$\left\{\begin{array}{l}\ell(y)=0\\ U_{\upsilon}(y)=0,\upsilon=\overline{1,n}\end{array}\right. \tag{1.2}$$

genelleştirilmiş özdeğer problemini ele alalım. Burada $\ell(y)$ diferansiyel ifadesindeki katsayılar ve $U_{\upsilon}(y)$ formları λ parametresinin analitik fonksiyonlarıdır.

Tanım 1.20: Kabul edelim ki $\varphi(x)$ fonksiyonu (1.2) probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. Eğer $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ fonksiyonlarının tümü $\lambda = \lambda_0$ için

$$\sum_{p=0} \frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p} U_\upsilon \left(\varphi_{\mu-p}\right) = 0,\ \varphi_0 = \varphi,\ \mu = \overline{0,k},\ \upsilon = \overline{1,n}$$

koşullarını ve $\lambda = \lambda_0$ için

$$\begin{cases} \ell(\varphi) = 0 \\ \ell(\varphi_1) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial\lambda}\ell(\varphi) = 0 \\ \cdots \\ \ell(\varphi_k) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial\lambda}\ell\left(\varphi_{k-1}\right) + ... + +\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\ell(\varphi) = 0 \end{cases}$$

bağıntılarını gerçekliyorsa, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ fonksiyonlarına $\varphi(x)$ özfonksiyonunun koşulmuş fonksiyonları, k sayısına da koşulmuş fonksiyonlar sisteminin uzunluğu denir. Eğer $\varphi(x)$ özfonksiyonunun $m-1$ uzunluklu bir koşulmuş fonksiyonlar sistemi var fakat m uzunluklu sistemi yoksa, $\varphi(x)$ özfonksiyonuna m katlıdır denir.

II.BÖLÜM

ÇÖZÜMÜN INTEGRAL GÖSTERILIMI VE ÖZELLIKLERI

2.1. Integral Denklemin Oluşturulması

$$\ell(y) := -y'' + \frac{C}{x}y + q(x)y$$

diferansiyel ifadesini ele alalım. Tanım 0.1 gereği bu ifade singüler diferansiyel ifadedir. Dolayısıyla $D(L) = \{y(x) : y(x), y'(x) \in AC(0,d) \cup (d,\pi],$ $\ell y \in L_2(0,\pi), y(d+0) = \alpha y(d-0), y'(d+0) = \alpha^{-1}y'(d-0) + 2ik\beta y(d-0),$ $d \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \alpha > 0, \alpha \neq 1\}$ kümesinde bir singüler diferansiyel operatörü üretmektedir. Bu durumda $-y'' + \frac{C}{x}y + q(x)y = \lambda y$ veya başka bir gösterilimle $\ell(y) = \lambda y$ diferansiyel denklemi bir singüler diferansiyel denklemdir. Ayrıca $y'(0)$ değeri mevcut değildir. Dolayısıyla öncelikle verilen diferansiyel operatörün bu ifadelere benzer değerleri de tanımlı olacak şekilde yeni bir operatör tanımlamak gerekir. Bu operatörse, verilen operatörün self-adjoint genişlemesi olarak alınabilir.

$$\ell(y) = -y'' + \frac{C}{x}y + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = k^2, \quad 0 < x < \pi \tag{2.1.1}$$

diferansiyel denklemi

$$U(y) := y(0) = 0, \; V(y) := y(\pi) = 0 \tag{2.1.2}$$

sınır koşulları ve

$$\begin{cases} y(d+0) = \alpha y(d-0) \\ y'(d+0) = \alpha^{-1}y'(d-0) + 2ik\beta y(d-0) \end{cases} \tag{2.1.3}$$

süreksizlik koşullarının ürettiği L problemini ele alalım. Burada λ-spektral parametre, $C, \alpha \in R, \beta \in C, \alpha > 0, \alpha \neq 1, d \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $q(x)$-gerçel değerli, sınırlı bir fonksiyon ve $q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir.

(2.1.1) diferansiyel denkleminde $u(x) = C \ln x \in L_2(0,\pi)$ olmak üzere $(\Gamma y)(x) = y' - u(x)y$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \ell(y) &= -y'' + u'(x)y + q(x)y = -\left(y' - u(x)y\right)' - u(x)y' + q(x)y = k^2 y \\ &= -[(\Gamma y)(x)]' - u(x)(\Gamma y)(x) - u^2(x)y + q(x)y = k^2 y \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $y_1 = y$, $y_2(x) = y' - u(x)y = (\Gamma y)(x)$ denilirse,

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = u(x)\,y_1 \\ y_2' + k^2 y_1 = -u(x)\,y_2 - u^2(x)\,y_1 + q(x)\,y_1 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

$$y_1(0) = 0,\; y_1(\pi) = 0 \tag{2.1.5}$$

$$\begin{cases} y_1(d+0) = \alpha y_1(d-0) \\ y_2(d+0) = \alpha^{-1} y_2(d-0) + 2ik\beta y_1(d-0) \end{cases} \tag{2.1.6}$$

problemi elde edilir.

(2.1.4) sistemin matris gösterilimi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -k^2 - u^2 + q & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

veya $A = \begin{pmatrix} u(x) & 1 \\ -k^2 - u^2(x) + q(x) & -u(x) \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y' = Ay$ matrisinin elemanları integrallenebilir olduklarından Naimark' ın (1967) çalışmasında $y' = Ay + f,\ f \in L_1(0,\pi)$ sistemleri için başlangıç-değer probleminin çözümünün varlığı ile ilgili teorem gereği her $\xi \in [0,\pi]$, $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)^T \in C^2$ için (2.1.4) sisteminin $y_1(\xi) = \upsilon_1, y_2(\xi) = \upsilon_2$ başlangıç koşullarını sağlayan sadece bir tek çözümü vardır. Özel olarak $y_1(0) = 1, y_2(0) = ik$ alınabilir.

Tanım 2.1.1: (2.1.4) diferansiyel denklemler sisteminin $y_1(\xi) = \upsilon_1, y_2(\xi) = (\Gamma y)(\xi) = \upsilon_2$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün birinci bileşenine, (2.1.1) denkleminin aynı koşulları sağlayan çözümü denir.

Şimdi (2.1.4) diferansiyel denklemler sisteminde $C = 0$ ve $q(x) \equiv 0$ alınırsa, $\begin{cases} y_1' - y_2 = 0 \\ y_2' + k^2 y_1 = 0 \end{cases}$ lineer homojen diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix} e^{ikx}$ dir. Lineer homojen sisteminin bir diğer çözümü de

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -ik \end{pmatrix} e^{-ikx}$ dir. O halde lineer homojen sisteminin genel çözümü,

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} \\ ikc_1 e^{ikx} - ikc_2 e^{-ikx} \end{pmatrix}$ dir. Şimdi

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = u(x)\, y_1 \\ y_2' + k^2 y_1 = -u(x)\, y - u^2(x)\, y_1 + q(x)\, y_1 \end{cases}$$ homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulmak için

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x)\, e^{ikx} + c_2(x)\, e^{-ikx} \\ ikc_1(x)\, e^{ikx} - ikc_2(x)\, e^{-ikx} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} c_1'(x)\, e^{ikx} + c_2'(x)\, e^{-ikx} + ikc_1(x)\, e^{ikx} - ikc_2(x)\, e^{-ikx} \\ ikc_1'(x)\, e^{ikx} - ikc_2'(x)\, e^{-ikx} - k^2 c_1(x)\, e^{ikx} - k^2 c_2(x)\, e^{-ikx} \end{pmatrix}$$

alınır ve (2.1.4) sisteminde yerine yazılıp, parametrelerin değişimi metodu uygulanırsa;

$$\begin{cases} c_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left[u(t)\, y_1 - \frac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \right] e^{-ikt} dt + c_1^0 \\ c_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left[u(t)\, y_1 + \frac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \right] e^{ikt} dt + c_2^0 \end{cases}$$

elde edilir. $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ ifadeleri denklemde yerine yazılırsa;

$$\begin{cases} y_1(x,k) = c_1^0 e^{ikx} + c_2^0 e^{-ikx} \\ \quad + \frac{1}{2} \int_0^x \left[u(t)\, y_1 - \frac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \right] e^{ik(x-t)} dt \\ \quad + \frac{1}{2} \int_0^x \left[u(t)\, y_1 + \frac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \right] e^{-ik(x-t)} dt \\ y_2(x,k) = ikc_1^0 e^{ikx} - ikc_2^0 e^{-ikx} \\ \quad + \frac{ik}{2} \int_0^x \left[u(t)\, y_1 - \frac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \right] e^{ik(x-t)} dt \\ \quad - \frac{ik}{2} \int_0^x \left[u(t)\, y_1 + \frac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \right] e^{-ik(x-t)} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x,k) = c_1^0 e^{ikx} + c_2^0 e^{-ikx} \\ \quad + \int_0^x \left[u(t)\, y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \sin k(x-t) \right] dt \\ y_2(x,k) = ikc_1^0 e^{ikx} - ikc_2^0 e^{-ikx} \\ \quad + \int_0^x \left[-ku(t)\, y_1 \sin k(x-t) - \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \cos k(x-t) \right] dt \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Dolayısıyla (2.1.4) sisteminin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$x < d$ iken

$$\begin{cases} y_1(x,k) = e^{ikx} + \displaystyle\int_0^x \left[u(t)\, y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \sin k(x-t) \right] dt \\ y_2(x,k) = ike^{ikx} - \displaystyle\int_0^x \left[ku(t)\, y_1 \sin k(x-t) + \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \cos k(x-t) \right] dt \end{cases}$$

olarak elde edilir. $x > d$ iken çözüm

$$\begin{cases} y_1(x,k) = A(k)\, e^{ikx} + B(k)\, e^{-ikx} + \displaystyle\int_0^x u(t)\, y_1 \cos k(x-t)\, dt \\ \qquad - \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^x \left[\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \sin k(x-t) \right] dt \\ y_2(x,k) = ikA(k)\, e^{ikx} - ikB(k)\, e^{-ikx} - \displaystyle\int_0^x ku(t)\, y_1 \sin k(x-t)\, dt \\ \qquad - \displaystyle\int_0^x \left[\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \cos k(x-t) \right] dt \end{cases}$$

şeklinde aransın. (2.1.6) süreksizlik koşullarını uygulayarak $A(k)$ ve $B(k)$ fonksiyonları,

$$\begin{aligned} A(k) &= \alpha^+ + \beta + \frac{\alpha e^{-ikd}}{2}\int_0^d u(t)\, y_1 \cos k(d-t)\, dt \\ &- \frac{\alpha e^{-ikd}}{2k}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \sin k(d-t)\, dt \\ &- \frac{e^{-ikd}}{2}\int_0^d u(t)\, y_1 \cos k(d-t)\, dt + \frac{e^{-ikd}}{2k}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \sin k(d-t)\, dt \\ &- \frac{e^{-ikd}}{2i\alpha}\int_0^d u(t)\, y_1 \sin k(d-t)\, dt - \frac{e^{-ikd}}{2ik\alpha}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \cos k(d-t)\, dt \\ &+ \beta e^{-ikd}\int_0^d u(t)\, y_1 \cos k(d-t)\, dt - \frac{\beta e^{-ikd}}{k}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \sin k(d-t)\, dt \\ &+ \frac{e^{-ikd}}{2i}\int_0^d u(t)\, y_1 \sin k(d-t)\, dt + \frac{e^{-ikd}}{2ik}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \cos k(d-t)\, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B(k) &= \alpha^{-} e^{2ikd} - \beta e^{2ikd} + \frac{\alpha e^{ikd}}{2}\int_0^d \left[u(t)\, y_1 \cos k(d-t)\right] dt \\
&- \frac{\alpha e^{ikd}}{2k}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(d-t)\, dt \\
&- \frac{e^{ikd}}{2}\int_0^d u(t)\, y_1 \cos k(d-t)\, dt + \frac{e^{ikd}}{2k}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(d-t)\, dt \\
&- \frac{e^{ikd}}{2i\alpha}\int_0^d u(t)\, y_1 \sin k(d-t)\, dt - \frac{e^{ikd}}{2ik\alpha}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \cos k(d-t)\, dt \\
&+ \beta e^{ikd}\int_0^d u(t)\, y_1 \cos k(d-t)\, dt - \frac{\beta e^{ikd}}{k}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(d-t)\, dt \\
&+ \frac{e^{ikd}}{2i}\int_0^d u(t)\, y_1 \sin k(d-t)\, dt + \frac{e^{ikd}}{2ik}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \cos k(d-t)\, dt
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Bu sabitler yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, $\alpha^{+} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ ve $\alpha^{-} = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$ olmak üzere $y_1(x,k)$ ve $y_2(x,k)$ fonksiyonları için $x > d$ iken

$$
\begin{aligned}
y_1(x,k) &= \alpha^{+} e^{ikx} + \alpha^{-} e^{ik(2d-x)} + \beta\left(e^{ikx} - e^{ik(2d-x)}\right) \\
&+ \int_0^d u(t)\, y_1 \left[\alpha^{+} \cos k(x-t) + \alpha^{-} \cos k(x-2d+t)\right] dt \\
&+ i\beta \int_0^d u(t)\, y_1 \left[\left(\sin k(x-t) + \sin k(x-2d+t)\right)\right] dt \\
&- \frac{1}{k}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\left[\alpha^{+} \sin k(x-t) - \alpha^{-} \sin k(x-2d+t)\right] dt \\
&- \frac{i\beta}{k}\int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\left[\left(\cos k(x-t) - \cos k(x-2d+t)\right)\right] dt \\
&+ \int_d^x \left\{u(t)\, y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(x-t)\right\} dt
\end{aligned}
\tag{2.1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2(x,k) &= ik\left(\alpha^+ e^{ikx} - \alpha^- e^{ik(2d-x)}\right) + ik\beta\left(e^{ikx} + e^{ik(2d-x)}\right) \\
&+ \int_0^d u(t)\, y_1 \left[-k\alpha^+ \sin k(x-t) + k\alpha^- \sin k(x-2d+t)\right] dt \\
&+ ik\beta \int_0^d u(t)\, y_1 \left[(\cos k(x-t) - \cos k(x-2d+t))\right] dt \\
&+ \int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\left[\alpha^+ \cos k(x-t) - \alpha^- \cos k(x-2d+t)\right] dt \\
&- i\beta \int_0^d \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\left[\sin k(x-t) + \sin k(x-2d+t)\right] dt \\
&- \int_d^x \left[k u(t)\, y_1 \sin k(x-t) + \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\cos k(x-t)\right] dt \qquad (2.1.9)
\end{aligned}
$$

integral denklemler sistemini elde ederiz. Şimdi (2.1.4) diferansiyel denklemler sitem-inin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını ve (2.1.6) süreksizlik koşullarını sağlayan her çözümünün

$x < d$ iken

$$
\begin{cases}
y_1 = e^{ikx} + \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t)\, e^{ikt} dt \\
y_2 = ike^{ikx} + b(x)\, e^{ikx} + \int_{-x}^{x} K_{21}(x,t)\, e^{ikt} dt + ik \int_{-x}^{x} K_{22}(x,t)\, e^{ikt} dt
\end{cases} \qquad (2.1.10)
$$

$x > d$ iken

$$
\begin{cases}
y_1 = \alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} + \beta\left(e^{ikx} - e^{ik(2d-x)}\right) + \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t)\, e^{ikt} dt \\
y_2 = ik\left(\alpha^+ e^{ikx} - \alpha^- e^{ik(2d-x)}\right) + ik\beta\left(e^{ikx} + e^{ik(2d-x)}\right) \\
\quad + b(x)\left[\alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} + \beta\left(e^{ikx} - e^{ik(2d-x)}\right)\right] \\
\quad + \int_{-x}^{x} K_{21}(x,t)\, e^{ikt} dt + ik \int_{-x}^{x} K_{22}(x,t)\, e^{ikt} dt
\end{cases} \qquad (2.1.11)
$$

şeklinde bir integral gösterilime sahip olduğu ispatlansın. Burada $K_{ij}(x,t)$, $i,j = 1,2$ ve $b(x)$ reel değerli fonksiyonlardır. (2.1.10) ve (2.1.11) ifadeleri, (2.1.8) ve (2.1.9) çözümünde yerine yazılırsa,

$$\alpha^{+}e^{ikx}+\alpha^{-}e^{ik(2d-x)}+\beta\left(e^{ikx}-e^{ik(2d-x)}\right)+\int_{-x}^{x}K_{11}(x,t)\,e^{ikt}dt=$$

$$=\alpha^{+}e^{ikx}+\alpha^{-}e^{ik(2d-x)}+\beta\left(e^{ikx}-e^{ik(2d-x)}\right)$$

$$+\int_{0}^{d}u(t)\left[\alpha^{+}\cos k(x-t)+\alpha^{-}\cos k(x-2d+t)\right]e^{ikt}dt$$

$$+\int_{0}^{d}u(t)\left[\alpha^{+}\cos k(x-t)+\alpha^{-}\cos k(x-2d+t)\right]\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$+i\beta\int_{0}^{d}u(t)\left(\sin k(x-t)+\sin k(x-2d+t)\right)\left(e^{ikt}+\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\frac{1}{k}\int_{0}^{d}u(t)\left[\alpha^{+}\sin k(x-t)-\alpha^{-}\sin k(x-2d+t)\right]\left\{ike^{ikt}+b(t)\,e^{ikt}+\int_{-t}^{t}K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds+ik\int_{-t}^{t}K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right\}dt$$

$$-\frac{i\beta}{k}\int_{0}^{d}u(t)\left(\cos k(x-t)-\cos k(x-2d+t)\right)\left\{ike^{ikt}+b(t)\,e^{ikt}+\int_{-t}^{t}K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds+ik\int_{-t}^{t}K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right\}dt$$

$$-\frac{1}{k}\int_{0}^{d}\left(u^{2}(t)-q(t)\right)\left[\alpha^{+}\sin k(x-t)-\alpha^{-}\sin k(x-2d+t)\right]e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{k}\int_{0}^{d}\left(u^{2}(t)-q(t)\right)\left[\alpha^{+}\sin k(x-t)-\alpha^{-}\sin k(x-2d+t)\right]\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\frac{i\beta}{k}\int_{0}^{d}\left(u^{2}(t)-q(t)\right)\left(\cos k(x-t)-\cos k(x-2d+t)\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{i\beta}{k}\int_{0}^{d}\left(u^{2}(t)-q(t)\right)\left(\cos k(x-t)-\cos k(x-2d+t)\right)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$+\int_{d}^{x}u(t)\cos k(x-t)\left[\alpha^{+}e^{ikt}+\alpha^{-}e^{ik(2d-t)}+\beta\left(e^{ikt}-e^{ik(2d-t)}\right)+\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right]dt$$

$$-\frac{1}{k}\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\Big\{ik\left(\alpha^+e^{ikt}-\alpha^-e^{ik(2d-t)}\right)+ik\beta\left(e^{ikt}+e^{ik(2d-t)}\right)$$
$$+b(t)\left[\alpha^+e^{ikt}+\alpha^-e^{ik(2d-t)}+\beta\left(e^{ikt}-e^{ik(2d-t)}\right)\right]$$
$$+\int_{-t}^{t}K_{21}(t,s)e^{iks}ds+ik\int_{-t}^{t}K_{22}(t,s)e^{iks}ds\Big\}dt$$
$$-\frac{1}{k}\int_d^x\left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\left[\alpha^+e^{ikt}+\alpha^-e^{ik(2d-t)}+\beta\left(e^{ikt}-e^{ik(2d-t)}\right)\right.$$
$$\left.+\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right]dt$$

$$\int_{-x}^{x}K_{11}(x,t)e^{ikt}dt=\alpha^+\int_0^d u(t)\cos k(x-t)e^{ikt}dt$$
$$+\alpha^-\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)e^{ikt}dt$$
$$+i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-t)e^{ikt}dt+i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)e^{ikt}dt$$
$$+\alpha^+\int_0^d u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$
$$+\alpha^-\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$
$$+i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$
$$+i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$
$$-i\alpha^+\int_0^d u(t)\sin k(x-t)e^{ikt}dt-i\alpha^-\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)e^{ikt}dt$$
$$+\beta\int_0^d u(t)\cos k(x-t)e^{ikt}dt-\beta\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)e^{ikt}dt$$
$$-\frac{\alpha^+}{k}\int_0^d u(t)b(t)\sin k(x-t)e^{ikt}dt-\frac{\alpha^-}{k}\int_0^d u(t)b(t)\sin k(x-2d+t)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{i\beta}{k}\int_0^d u(t)\, b(t)\cos k(x-t)\, e^{ikt}dt+\frac{i\beta}{k}\int_0^d u(t)\, b(t)\cos k(x-2d+t)\, e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{k}\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{k}\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\frac{i\beta}{k}\int_0^d u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$+\frac{i\beta}{k}\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$-i\alpha^+\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$-i\alpha^-\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$+\beta\int_0^d u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\beta\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{k}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\, e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{k}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-2d+t)\, e^{ikt}dt$$

$$-\frac{i\beta}{k}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\, e^{ikt}dt$$

$$+\frac{i\beta}{k}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-2d+t)\, e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{k}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{k}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\frac{i\beta}{k}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$
$$+\frac{i\beta}{k}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$
$$+\alpha^+\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt+\alpha^-\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$
$$+\beta\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt-\beta\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$
$$+\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt-i\alpha^+\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$
$$+i\alpha^-\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt-i\beta\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$
$$-i\beta\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt-\frac{\alpha^+}{k}\int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\;e^{ik(2d-t)}dt$$
$$+\frac{\alpha^-}{k}\int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt-\frac{\beta}{k}\int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$
$$+\frac{\beta}{k}\int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt-\frac{1}{k}\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$
$$-i\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt-\frac{\alpha^+}{k}\int_d^x \left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$
$$-\frac{\alpha^-}{k}\int_d^x \left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt-\frac{\beta}{k}\int_d^x \left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$
$$+\frac{\beta}{k}\int_d^x \left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$
$$-\frac{1}{k}\int_d^x \left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt=I_1+I_2+I_3+\ldots+I_{48}$$

elde edilir. Burada;

$$I_1=\alpha^+\int_0^d u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt=\frac{\alpha^+}{2}e^{ikx}\int_0^d u(t)\,dt+\frac{\alpha^+}{4}\int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$I_2=\alpha^-\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$= \frac{\alpha^-}{2} e^{ik(2d-x)} \int_0^d u(t)\,dt + \frac{\alpha^-}{4} \int_{x-2d}^{x} u\left(d + \frac{t-x}{2}\right) e^{ikt} dt$$

$$I_3 = i\beta \int_0^d u(t) \sin k(x-t)\, e^{ikt} dt = \frac{\beta}{2} e^{ikx} \int_0^d u(t)\,dt - \frac{\beta}{4} \int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{ikt} dt$$

$$I_4 = i\beta \int_0^d u(t) \sin k(x-2d+t)\, e^{ikt} dt$$

$$= -\frac{\beta}{2} e^{ik(2d-x)} \int_0^d u(t)\,dt + \frac{\beta}{4} \int_{x-2d}^{x} u\left(d + \frac{t-x}{2}\right) e^{ikt} dt$$

$$I_5 = \alpha^+ \int_0^d u(t) \cos k(x-t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks} ds \right) dt$$

$$= \frac{\alpha^+}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}(s, t+s-x)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$+ \frac{\alpha^+}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}(s, t-s+x)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$I_6 = \alpha^- \int_0^d u(t) \cos k(x-2d+t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks} ds \right) dt$$

$$= \frac{\alpha^-}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\, K_{11}(s, t-x+2d-s)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$+ \frac{\alpha^-}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\, K_{11}(s, t-2d+x+s)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$I_7 = i\beta \int_0^d u(t) \sin k(x-t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks} ds \right) dt$$

$$= \frac{\beta}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}(s, t+s-x)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\beta}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}(s, t-s+x)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$I_8 = i\beta \int_0^d u(t) \sin k(x-2d+t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks} ds \right) dt$$

$$= \frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_9 = -i\alpha^+\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt = -\frac{\alpha^+}{2}e^{ikx}\int_0^d u(t)\,dt+\frac{\alpha^+}{4}\int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{10} = i\alpha^-\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\alpha^-}{2}e^{ik(2d-x)}\int_0^d u(t)\,dt+\frac{\alpha^-}{4}\int_{x-2d}^{x} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{11} = \beta\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$= \frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_0^d u(t)\,dt+\frac{\beta}{4}\int_{x-2d}^{x} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{12} = -\beta\int_0^d u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt = -\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_0^d u(t)\,dt-\frac{\beta}{4}\int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{13} = -\frac{\alpha^+}{k}\int_0^d u(t)\,b(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt = -\frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_0^{(t+x)/2} u(s)\,b(s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{14} = \frac{\alpha^-}{k}\int_0^d u(t)\,b(t)\sin k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt = \frac{\alpha^-}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,b(s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{15} = -\frac{i\beta}{k}\int_0^d u(t)\,b(t)\left[\cos k(x-2d+t)-\cos k(x-t)\right]e^{ikt}\,dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_0^{d} u(s)\,b(s)\,ds\right)e^{ikt}dt+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_0^{(x+t)/2} u(s)\,b(s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{16} = -\frac{\alpha^+}{k}\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= -\frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_0^d u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{17} = \frac{\alpha^{-}}{k}\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= \frac{\alpha^{-}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_0^d u(s)\int_{t-s-x+2d}^{t+x+s-2d} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{18} = -\frac{i\beta}{k}\int_0^d u(t)\left[\cos k(x-2d+t)-\cos k(x-t)\right]\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_0^d u(s)\int_{x-2d}^{x} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_0^d u(s)\int_{t+s-x}^{2d-x-s+t} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{19} = -i\alpha^{+}\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= -\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{20} = i\alpha^{-}\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= \frac{\alpha^{-}}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{21} = \beta\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= \frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$
\begin{aligned}
I_{22} &= -\beta \int_0^d u(t) \cos k(x-t) \left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s) e^{iks} ds \right) dt \\
&= -\frac{\beta}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s) K_{22}(s, t+s-x) ds \right) e^{ikt} dt \\
&\quad -\frac{\beta}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s) K_{22}(s, t-s+x) ds \right) e^{ikt} dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{23} &= -\frac{\alpha^{+}}{k} \int_0^d \left(u^2(t) - q(t) \right) \sin k(x-t) e^{ikt} dt \\
&= -\frac{\alpha^{+}}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_0^{(t+x)/2} \left[u^2(s) - q(s) \right] ds \right) e^{ikt} dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{24} &= \frac{\alpha^{-}}{k} \int_0^d \left(u^2(t) - q(t) \right) \sin k(x-2d+t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s) e^{iks} ds \right) dt \\
&= \frac{\alpha^{-}}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{d+(x+t)/2}^{d} \left[u^2(s) - q(s) \right] ds \right) e^{ikt} dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{25} &= -\frac{i\beta}{k} \int_0^d \left[u^2(t) - q(t) \right] \left[\cos k(x-2d+t) - \cos k(x-t) \right] e^{ikt} dt \\
&= -\frac{\beta}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_0^d \left(u^2(s) - q(s) \right) ds \right) e^{ikt} dt \\
&\quad +\frac{\beta}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_0^{(x+t)/2} \left(u^2(s) - q(s) \right) ds \right) e^{ikt} dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{26} &= -\frac{\alpha^{+}}{k} \int_0^d \left(u^2(t) - q(t) \right) \sin k(x-t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s) e^{iks} ds \right) dt \\
&= -\frac{\alpha^{+}}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_0^d \left[u^2(s) - q(s) \right] \int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{11}(s,\xi) d\xi ds \right) e^{ikt} dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{27} &= \frac{\alpha^{-}}{k} \int_0^d \left(u^2(t) - q(t) \right) \sin k(x-2d+t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s) e^{iks} ds \right) dt \\
&= \frac{\alpha^{-}}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_0^d \left[u^2(s) - q(s) \right] \int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d} K_{11}(s,\xi) d\xi ds \right) e^{ikt} dt
\end{aligned}
$$

$$I_{28} = -\frac{i\beta}{k}\int_0^d \left[u^2(t) - q(t)\right]\left[\cos k(x-2d+t) - \cos k(x-t)\right]\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks} ds\right)$$

$$= -\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_0^d \left[u^2(s) - q(s)\right]\int_{x-2d}^{x} K_{11}(s,\xi)\, d\xi ds\right) e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_0^d \left[u^2(s) - q(s)\right]\int_{t+s-x}^{2d-x-s+t} K_{11}(s,\xi)\, d\xi ds\right) e^{ikt}dt$$

$$I_{29} = \alpha^+\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\, e^{ikt}dt = \frac{\alpha^+}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\, dt + \frac{\alpha^+}{4}\int_{2d-x}^{x} u\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{ikt}dt$$

$$I_{30} = \alpha^-\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\, e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= \frac{\alpha^-}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\, dt - \frac{\alpha^-}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right) e^{ikt}dt$$

$$I_{31} = \beta\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\, e^{ikt}dt = \frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\, dt + \frac{\beta}{4}\int_{2d-x}^{x} u\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{ikt}dt$$

$$I_{32} = -\beta\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\, e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\, dt + \frac{\beta}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right) e^{ikt}dt$$

$$I_{33} = \int_d^x u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks} ds\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}(s, t+s-x)\, ds\right) e^{ikt}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_d^x u(s)\, K_{11}(s, t-s+x)\, ds\right) e^{ikt}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}(s, t-s+x)\, ds\right) e^{ikt}dt$$

$$I_{34} = -i\alpha^+\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\, e^{ikt}dt = -\frac{\alpha^+}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\, dt + \frac{\alpha^+}{4}\int_{2d-x}^{x} u\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{ikt}dt$$

$$I_{35} = i\alpha^-\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\, e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -\frac{\alpha^-}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\,dt - \frac{\alpha^-}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{36} = -i\beta\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= \frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\,dt + \frac{\beta}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{37} = -i\beta\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt = -\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\,dt + \frac{\beta}{4}\int_{2d-x}^x u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{38} = -\frac{\alpha^+}{k}\int_d^x u(t)\,b(t)\sin k(x-t)\; e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\alpha^+}{2}\int_{2d-x}^x\left(\int_0^{(x+t)/2} u(s)\,b(s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{39} = -\frac{\alpha^-}{k}\int_d^x u(t)\,b(t)\sin k(x-t)\; e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -\frac{\alpha^-}{2}\int_{2d-x}^x\left(\int_d^{d+(x+t)/2} u(s)\,b(s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{40} = -\frac{\beta}{k}\int_d^x u(t)\,b(t)\sin k(x-t)\; e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}\int_{2d-x}^x\left(\int_0^{(x+t)/2} u(s)\,b(s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{41} = -\frac{\beta}{k}\int_d^x u(t)\,b(t)\sin k(x-t)\; e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}\int_{2d-x}^x\left(\int_d^{d+(x+t)/2} u(s)\,b(s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{42} = -\frac{1}{k}\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^t K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-x}^x\left(\int_d^x u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{43} = -i\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^t K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{44} = -\frac{\alpha^+}{k}\int_{d}^{x}\left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\alpha^+}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{0}^{(x+t)/2}\left[u^2(s)-q(s)\right]ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{45} = -\frac{\alpha^-}{k}\int_{d}^{x}\left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -\frac{\alpha^-}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{d}^{d+(x+t)/2}\left[u^2(s)-q(s)\right]ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{46} = -\frac{\beta}{k}\int_{d}^{x}\left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{0}^{(x+t)/2}\left[u^2(s)-q(s)\right]ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{47} = -\frac{\beta}{k}\int_{d}^{x}\left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{d}^{d+(x+t)/2}\left[u^2(s)-q(s)\right]ds\right)e^{ikt}dt$$

$$I_{48} = -\frac{1}{k}\int_{d}^{x}\left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{d}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t+x-s}K_{11}(s,\xi)\,d\xi\,ds\right)e^{ikt}dt$$

şeklindedir. Bu hesaplamalar yerine yazılırsa,

$$\int_{-x}^{x}K_{11}(x,t)\,e^{ikt}dt = \frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt + \frac{\alpha^-}{2}\int_{x-2d}^{x}u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{x}^{2d-x}u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt - \frac{\beta}{2}\int_{x}^{2d-x}u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt + \frac{\beta}{2}\int_{2d-x}^{x}u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt+\frac{\beta}{2}\int_{x}^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{(t+x)/2}\left(u^{2}(s)+u(s)\,b(s)-q(s)\right)ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d}\left(u^{2}(s)+u(s)\,b(s)-q(s)\right)ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}u(s)\int_{t-s-x+2d}^{t+x+s-2d}K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt \\
&+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt \\
&-\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt \\
&-\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt \\
&-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t+x-s}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt \\
&+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x-s+2d}^{t+x+s-2d}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt \\
&+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt \\
&+\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt \\
&+\frac{1}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt \\
&-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{d}^{d+(x+t)/2}\left(u^{2}(s)+u(s)b(s)-q(s)\right)ds\right)e^{ikt}dt \\
&-\frac{\beta}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{0}^{(x-t)/2}\left(u^{2}(s)+u(s)b(s)-q(s)\right)ds\right)e^{ikt}dt \\
&+\frac{\beta}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{d}^{d+(x+t)/2}\left(u^{2}(s)+u(s)b(s)-q(s)\right)ds\right)e^{ikt}dt \\
&-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{d}^{x} u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt \\
&-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{d}^{x}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t+x-s}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(x+t)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$
$$+\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$
$$-\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$
$$+\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$
$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$
$$-\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{0}^{d}\left(u^2(s)+u(s)\,b(s)-q(s)\right)ds\right)e^{ikt}dt$$
$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{0}^{(x+t)/2}\left(u^2(s)+u(s)\,b(s)-q(s)\right)ds\right)e^{ikt}dt$$
$$-\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{0}^{d} u(s)\int_{x-2d}^{x} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$
$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{0}^{d} u(s)\int_{t+s-x}^{2d-x-s+t} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$
$$-\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{0}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]\int_{x-2d}^{x} K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$
$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{0}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]\int_{t+s-x}^{2d-x-s+t} K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt \qquad (2.1.12)$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$ik\left(\alpha^{+}e^{ikx}-\alpha^{-}e^{ik(2d-x)}\right)+ik\beta\left(e^{ikx}+e^{ik(2d-x)}\right)+b(x)\left[\alpha^{+}e^{ikx}+\alpha^{-}e^{ik(2d-x)}\right]$$
$$+b(x)\,\beta\left(e^{ikx}-e^{ik(2d-x)}\right)+\int_{-x}^{x} K_{21}(x,t)\,e^{ikt}dt+ik\int_{-x}^{x} K_{22}(x,t)\,e^{ikt}dt$$
$$=ik\left(\alpha^{+}e^{ikx}-\alpha^{-}e^{ik(2d-x)}\right)+ik\beta\left(e^{ikx}+e^{ik(2d-x)}\right)$$

$$+\int_0^d u(t)\left[-k\alpha^+\sin k(x-t)+k\alpha^-\sin k(x-2d+t)\right]e^{ikt}dt$$

$$+\int_0^d u(t)\left[-k\alpha^+\sin k(x-t)+k\alpha^-\sin k(x-2d+t)\right]\left(\int_{-t}^t K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$

$$+ik\beta\int_0^d u(t)\left(\cos k(x-t)-\cos k(x-2d+t)\right)e^{ikt}dt$$

$$+ik\beta\int_0^d u(t)\left(\cos k(x-t)-\cos k(x-2d+t)\right)\left(\int_{-t}^t K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$

$$+\int_0^d u(t)\left[-\alpha^+\cos k(x-t)-\alpha^-\cos k(x-2d+t)\right]\left\{ike^{ikt}+b(t)e^{ikt}\right.$$

$$\left.+\int_{-t}^t K_{21}(t,s)e^{iks}ds+ik\int_{-t}^t K_{22}(t,s)e^{iks}ds\right\}dt$$

$$-i\beta\int_0^d u(t)\left(\sin k(x-t)+\sin k(x-2d+t)\right)\left\{ike^{ikt}+b(t)e^{ikt}\right.$$

$$\left.+\int_{-t}^t K_{21}(t,s)e^{iks}ds+ik\int_{-t}^t K_{22}(t,s)e^{iks}ds\right\}dt$$

$$+\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\left[-\alpha^+\cos k(x-t)-\alpha^-\cos k(x-2d+t)\right]e^{ikt}dt$$

$$+\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\left[-\alpha^+\cos k(x-t)-\alpha^-\cos k(x-2d+t)\right]\left(\int_{-t}^t K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$

$$-i\beta\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\left(\sin k(x-t)+\sin k(x-2d+t)\right)e^{ikt}$$

$$-i\beta\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\left(\sin k(x-t)+\sin k(x-2d+t)\right)\left(\int_{-t}^t K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\int_d^x ku(t)\sin k(x-t)\left[\alpha^+e^{ikt}+\alpha^-e^{ik(2d-t)}+\beta\left(e^{ikt}-e^{ik(2d-t)}\right)\right.$$

$$\left.+\int_{-t}^t K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right]dt$$

$$-\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\left\{ik\left(\alpha^+e^{ikt}-\alpha^-e^{ik(2d-t)}\right)+ik\beta\left(e^{ikt}+e^{ik(2d-t)}\right)\right.$$

$$+b(t)\left[\alpha^{+}e^{ikt}+\alpha^{-}e^{ik(2d-t)}+\beta\left(e^{ikt}-e^{ik(2d-t)}\right)\right.$$
$$\left.+\int_{-t}^{t}K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds+ik\int_{-t}^{t}K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right\}dt$$

$$-\int_{d}^{x}\left(u^{2}(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\left[\alpha^{+}e^{ikt}+\alpha^{-}e^{ik(2d-t)}+\beta\left(e^{ikt}-e^{ik(2d-t)}\right)\right.$$
$$\left.\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right]dt$$

$$b(x)\left[\alpha^{+}e^{ikx}+\alpha^{-}e^{ik(2d-x)}+\beta\left(e^{ikx}-e^{ik(2d-x)}\right)\right]$$
$$+\int_{-x}^{x}K_{21}(x,t)\,e^{ikt}dt+ik\int_{-x}^{x}K_{22}(x,t)\,e^{ikt}dt=$$
$$=-k\alpha^{+}\int_{0}^{d}u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt+k\alpha^{-}\int_{0}^{d}u(t)\sin k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$
$$+ik\beta\int_{0}^{d}u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt-ik\beta\int_{0}^{d}u(t)\cos k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$
$$-k\alpha^{+}\int_{0}^{d}u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$
$$+k\alpha^{-}\int_{0}^{d}u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$
$$+ik\beta\int_{0}^{d}u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$
$$-ik\beta\int_{0}^{d}u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$
$$-ik\alpha^{+}\int_{0}^{d}u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt+k\beta\int_{0}^{d}u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$
$$-ik\alpha^{-}\int_{0}^{d}u(t)\cos k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$
$$+k\beta\int_{0}^{d}u(t)\sin k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$
$$-\alpha^{+}\int_{0}^{d}u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$-\alpha^{-}\int_0^d u(t)\,b(t)\cos k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$-i\beta\int_0^d u(t)\,b(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$-i\beta\int_0^d u(t)\,b(t)\sin k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$-\alpha^{+}\int_0^d u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\alpha^{-}\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$-i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$-i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$-ik\alpha^{+}\int_0^d u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$-ik\alpha^{-}\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$+k\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$+k\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$-\alpha^{+}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$-\alpha^{-}\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$-i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt-i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$-\alpha^{+}\int_0^d \left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$- \alpha^- \int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$- i\beta \int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$- i\beta \int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$- k\alpha^+ \int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$- k\alpha^- \int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt - k\beta \int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$+ k\beta \int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$- k \int_d^x u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$- ik\alpha^+ \int_a^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt + ik\alpha^- \int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$- ik\beta \int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt - ik\beta \int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$- \alpha^+ \int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt - \alpha^- \int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$- \beta \int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt + \beta \int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$- \int_d^x u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$- ik \int_d^x u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$- \alpha^+ \int_d^x \left(u^2(t) - q(t)\right)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$- \alpha^- \int_d^x \left(u^2(t) - q(t)\right)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$-\beta \int_d^x \left(u^2(t) - q(t)\right)\cos k(x-t)\, e^{ikt}dt$$

$$+\beta \int_d^x \left(u^2(t) - q(t)\right)\cos k(x-t)\, e^{ik(2d-t)}dt$$

$$-\int_d^x \left(u^2(t) - q(t)\right)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$= T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{52}$$

ile gösterilsin. Burada;

$$T_1 = -k\alpha^+ \int_0^d u(t)\sin k(x-t)\, e^{ikt}dt$$

$$= ik\frac{\alpha^+}{2}e^{ikx}\int_0^d u(t)\,dt - ik\frac{\alpha^+}{4}\int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_2 = k\alpha^- \int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\, e^{ikt}dt$$

$$= ik\frac{\alpha^-}{2}e^{ik(2d-x)}\int_0^d u(t)\,dt - ik\frac{\alpha^-}{4}\int_{x-2d}^{x} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_3 = ik\beta \int_0^d u(t)\cos k(x-t)\, e^{ikt}dt$$

$$= ik\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_0^d u(t)\,dt + ik\frac{\beta}{4}\int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_4 = ik\beta \int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\, e^{ikt}dt$$

$$= ik\frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_0^d u(t)\,dt + ik\frac{\beta}{4}\int_{x-2d}^{x} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_5 = -k\alpha^+ \int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{iks}ds\right)dt$$

$$= ik\frac{\alpha^+}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-ik\frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_6 = k\alpha^- \int_0^d u(t) \sin k(x - 2d + t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s) e^{iks} ds \right) dt$$

$$= -ik\frac{\alpha^-}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s) K_{11}(s, t - x + s) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$+ik\frac{\alpha^-}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s) K_{11}(s, t - s + x) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$T_7 = ik\beta \int_0^d u(t) \cos k(x - t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s) e^{iks} ds \right) dt$$

$$= ik\frac{\beta}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s) K_{11}(s, t + s - x) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$+ik\frac{\beta}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s) K_{11}(s, t - s + x) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$T_8 = ik\beta \int_0^d u(t) \cos k(x - 2d + t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s) e^{iks} ds \right) dt$$

$$= ik\frac{\beta}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s) K_{11}(s, t - x + 2d - s) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$+ik\frac{\beta}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_{d-(x+t)/2}^{d} u(s) K_{11}(s, t - 2d + x + s) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$T_9 = -ik\alpha^+ \int_0^d u(t) \cos k(x - t) e^{ikt} dt$$

$$= -ik\frac{\alpha^+}{2} e^{ikx} \int_0^d u(t) dt - ik\frac{\alpha^+}{4} \int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{ikt} dt$$

$$T_{10} = -ik\alpha^- \int_0^d u(t) \cos k(x - 2d + t) e^{ikt} dt$$

$$= -ik\frac{\alpha^-}{2} e^{ik(2d-x)} \int_0^d u(t) dt - ik\frac{\alpha^-}{4} \int_{x-2d}^{x} u\left(d + \frac{t-x}{2}\right) e^{ikt} dt$$

$$T_{11} = k\beta \int_0^d u(t) \sin k(x - t) e^{ikt} dt$$

$$= -ik\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_0^d u(t)\,dt + ik\frac{\beta}{4}\int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{t+x}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{12} = k\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$= ik\frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_0^d u(t)\,dt - ik\frac{\beta}{4}\int_{x-2d}^{x} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{13} = -\alpha^{+}\int_0^d u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\alpha^{+}}{2}e^{ikx}\int_0^d u(t)\,b(t)\,dt - \frac{\alpha^{+}}{4}\int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{14} = -\alpha^{-}\int_0^d u(t)\,b(t)\cos k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$= \frac{\alpha^{-}}{4}\int_{x-2d}^{x} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt - \frac{\alpha^{-}}{2}e^{ik(2d-x)}\int_0^d u(t)\,b(t)\,dt$$

$$T_{15} = -i\beta\int_0^d u(t)\,b(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_0^d u(t)\,b(t)\,dt - \frac{\beta}{4}\int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{16} = -i\beta\int_0^d u(t)\,b(t)\sin k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\beta}{4}\int_{x-2d}^{x} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt + \frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_0^d u(t)\,b(t)\,dt$$

$$T_{17} = -\alpha^{+}\int_0^d u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= -\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{21}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{21}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$
\begin{aligned}
T_{18} &= -\alpha^{-}\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt\\
&= -\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{21}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt\\
&\quad -\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{21}(s,t+x-2d+s)\,ds\right)e^{ikt}dt\\
T_{19} &= -i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt\\
&= -ik\beta\int_{-x}^{x}\left(\int_0^d u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt\\
T_{20} &= -i\beta\int_0^d u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt\\
&= -ik\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_0^d u(s)\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt\\
T_{21} &= -ik\alpha^{+}\int_0^d u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt\\
&= -ik\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt\\
&\quad -ik\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t+x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt\\
T_{22} &= -ik\alpha^{-}\int_0^d u(t)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt\\
&= -ik\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt\\
&\quad -ik\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt\\
T_{23} &= \beta k\int_0^d u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt
\end{aligned}
$$

$$= -ik\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+ik\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{24} = -\beta k\int_{0}^{d} u(t)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= ik\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t+2d-x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-ik\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{25} = -\alpha^{+}\int_{0}^{d}\left(u^{2}(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\alpha^{+}}{2}e^{ikx}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(t)-q(t)\right]dt-\frac{\alpha^{+}}{4}\int_{-x}^{2d-x}\left[u^{2}\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$T_{26} = -\alpha^{-}\int_{0}^{d}\left(u^{2}(t)-q(t)\right)\cos k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\alpha^{-}}{2}e^{ik(2d-x)}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(t)-q(t)\right]dt$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{4}\int_{x-2d}^{x}\left[u^{2}\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$T_{27} = -i\beta\int_{0}^{d}\left(u^{2}(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left[u^{2}\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt-\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(t)-q(t)\right]dt$$

$$T_{28} = -i\beta\int_{0}^{d}\left(u^{2}(t)-q(t)\right)\sin k(x-2d+t)\,e^{ikt}dt$$

$$= \frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(t)-q(t)\right]dt$$

$$-\frac{\beta}{4}\int_{x-2d}^{x}\left[u^2\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$T_{29}=-\alpha^+\int_0^d\left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$

$$=-\frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{30}=-\alpha^+\int_0^d\left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$

$$=-\frac{\alpha^-}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{31}=-i\beta\int_0^d\left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)dt$$

$$=-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_0^d\left[u^2(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{x-s+t}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{32}=-i\beta\int_0^d\left(u^2(t)-q(t)\right)\sin k(x-2d+t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{iks}ds\right)e^{ikt}dt$$

$$=-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_0^d\left[u^2(s)-q(s)\right]\int_{t-s-x+2d}^{t+x+s-2d}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{33}=-k\alpha^+\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$=ik\frac{\alpha^+}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\,dt-ik\frac{\alpha^+}{4}\int_{2d-x}^{x}u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{34}=-k\alpha^-\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -ik\frac{\alpha^-}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\,dt - ik\frac{\alpha^-}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{35} = -k\beta\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= ik\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\,dt - ik\frac{\beta}{4}\int_{2d-x}^x u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{36} = k\beta\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= ik\frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\,dt + ik\frac{\beta}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{37} = -k\int_d^x u(t)\sin k(x-t)\left(\int_{-t}^t K_{11}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= \frac{ik}{2}\int_{-x}^x\left(\int_{(x-t)/2}^x u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{ik}{2}\int_{x-2d}^x\left(\int_d^x u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_d^x u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{2d-x}^x\left(\int_{(x+t)/2}^x u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{38} = -ik\alpha^+\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -ik\frac{\alpha^+}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\,dt - ik\frac{\alpha^+}{4}\int_{2d-x}^x u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{39} = ik\alpha^-\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= ik\frac{\alpha^-}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\,dt - ik\frac{\alpha^-}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{40} = -ik\beta\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -ik\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\,dt - ik\frac{\beta}{4}\int_{2d-x}^x u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{41} = -ik\beta\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -ik\frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\,dt + ik\frac{\beta}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{42} = -\alpha^+\int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\alpha^+}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\,b(t)\,dt - \frac{\alpha^+}{4}\int_{2d-x}^x u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{43} = -\alpha^-\int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -\frac{\alpha^-}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\,b(t)\,dt + \frac{\alpha^-}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)b\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{44} = -\beta\int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_d^x u(t)\,b(t)\,dt - \frac{\beta}{4}\int_{2d-x}^x u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{45} = \beta\int_d^x u(t)\,b(t)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= \frac{\beta}{2}e^{ik(2d-x)}\int_d^x u(t)\,b(t)\,dt + \frac{\beta}{4}\int_x^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)b\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{46} = -\int_d^x u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^t K_{21}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-x}^x\left(\int_{(x-t)/2}^x u(s)\,K_{21}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-2d}^x\left(\int_d^x u(s)\,K_{21}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_d^x u(s)\,K_{21}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{21}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{47} = -ik\int_{d}^{x} u(t)\cos k(x-t)\left(\int_{-t}^{t} K_{22}(t,s)\,e^{iks}ds\right)dt$$

$$= -\frac{ik}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$T_{48} = -\alpha^{+}\int_{d}^{x}\left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\alpha^{+}}{2}e^{ikx}\int_{0}^{d}\left[u^2(t)-q(t)\right]dt - \frac{\alpha^{+}}{4}\int_{-x}^{2d-x}\left[u^2\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$T_{49} = -\alpha^{-}\int_{d}^{x}\left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= -\frac{\alpha^{-}}{2}e^{ik(2d-x)}\int_{0}^{d}\left[u^2(t)-q(t)\right]dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{4}\int_{x-2d}^{x}\left[u^2\left(d+\frac{x-t}{2}\right)-q\left(d+\frac{x-t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$T_{50} = -\beta\int_{d}^{x}\left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\,e^{ikt}dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}e^{ikx}\int_{0}^{d}\left[u^2(t)-q(t)\right]dt - \frac{\beta}{4}\int_{-x}^{2d-x}\left[u^2\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$T_{51} = \beta\int_{d}^{x}\left(u^2(t)-q(t)\right)\cos k(x-t)\,e^{ik(2d-t)}dt$$

$$= \frac{\beta}{2} e^{ik(2d-x)} \int_0^d \left[u^2(t) - q(t) \right] dt$$

$$- \frac{\beta}{4} \int_{x-2d}^{x} \left[u^2\left(d + \frac{x-t}{2}\right) - q\left(d + \frac{x-t}{2}\right) \right] e^{ikt} dt$$

$$T_{52} = - \int_d^x \left(u^2(t) - q(t) \right) \cos k(x-t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s) e^{iks} ds \right) dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x-t)/2}^{x} \left[u^2(s) - q(s) \right] K_{11}(s, t-s+x) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{1}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{d}^{x} \left[u^2(s) - q(s) \right] K_{11}(s, t-x+s) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_{d}^{x} \left[u^2(s) - q(s) \right] K_{11}(s, t-s+x) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{1}{2} \int_{2d-x}^{x} \left(\int_{(x+t)/2}^{x} \left[u^2(s) - q(s) \right] K_{11}(s, t-x+s) ds \right) e^{ikt} dt$$

şeklindedir. Bu hesaplamalar yerine yazılırsa,

$$b(x) \left[\alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} + \beta \left(e^{ikx} - e^{ik(2d-x)} \right) \right]$$

$$+ \int_{-x}^{x} K_{21}(x,t) e^{ikt} dt + ik \int_{-x}^{x} K_{22}(x,t) e^{ikt} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} - \beta \left(e^{ikx} - e^{ik(2d-x)} \right) \right] \int_0^x \left(u^2(t) + u(t) b(t) - q(t) \right) dt$$

$$- \frac{ik\alpha^+}{2} \int_{-x}^{x} u\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{ikt} dt - \frac{ik\alpha^-}{2} \int_{x-2d}^{x} u\left(d + \frac{t-x}{2}\right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{ik\alpha^-}{2} \int_{x}^{2d-x} u\left(d + \frac{x-t}{2}\right) e^{ikt} dt + \frac{ik\beta}{2} \int_{-x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{ik\beta}{2} \int_{2d-x}^{x} u\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{ikt} dt - \frac{ik\beta}{2} \int_{x-2d}^{x} u\left(d + \frac{t-x}{2}\right) e^{ikt} dt$$

$$+ \frac{ik\beta}{2} \int_{x}^{2d-x} u\left(d + \frac{x-t}{2}\right) e^{ikt} dt$$

$$+ \frac{ik\alpha^+}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{(x-t)/2}^{d} u(s) K_{11}(s, t-x+s) ds \right) e^{ikt} dt$$

$$-\frac{ik\alpha^+}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{(t+x)/2}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\alpha^-}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d}u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{ik\alpha^-}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d}u(s)\,K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d}u(s)\,K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t-x)/2}^{d}u(s)\,K_{11}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{4}\int_{-x}^{x}\left[u^2\left(\frac{x+t}{2}\right)+u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{4}\int_{x-2d}^{x}\left[u^2\left(d+\frac{t-x}{2}\right)+u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{4}\int_{x}^{2d-x}\left[u^2\left(d+\frac{x-t}{2}\right)+u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)b\left(d+\frac{x-t}{2}\right)-q\left(d+\frac{x-t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{4}\int_{-x}^{x}\left[u^2\left(\frac{x+t}{2}\right)+u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{4}\int_{x-2d}^{x}\left[u^2\left(d+\frac{t-x}{2}\right)+u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{4}\int_{2d-x}^{x}\left[u^2\left(d+\frac{x-t}{2}\right)+u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)b\left(d+\frac{x-t}{2}\right)-q\left(d+\frac{x-t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{21}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{21}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-s-x+2d}^{s+x+t-2d} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\alpha^-}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\alpha^-}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{ik\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t+s-x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^+}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-2d+x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{x+s+t}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]\int_{t-s-x+2d}^{t+x+s-2d}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{ik}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{ik}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)\,K_{21}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d}^{x}u(s)\,K_{21}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d}^{x}u(s)\,K_{21}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)\,K_{21}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)K_{22}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d}^{x}u(s)K_{22}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d}^{x}u(s)K_{22}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{ik}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)K_{22}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-s+x)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

Buradan $b(x)=\int_0^x\left[u^2(t)+u(t)b(t)-q(t)\right]dt$ ve

$$\int_{-x}^{x}K_{21}(x,t)e^{ikt}dt=-\frac{\alpha^+}{4}\int_{-x}^{x}\left[u^2\left(\frac{x+t}{2}\right)+u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{4}\int_{x-2d}^{x}\left[u^2\left(d+\frac{t-x}{2}\right)+u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{4}\int_{x}^{2d-x}\left[u^2\left(d+\frac{x-t}{2}\right)+u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)b\left(d+\frac{x-t}{2}\right)-q\left(d+\frac{x-t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{4}\int_{-x}^{x}\left[u^2\left(\frac{x+t}{2}\right)+u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{4}\int_{x-2d}^{x}\left[u^2\left(d+\frac{t-x}{2}\right)+u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{4}\int_{2d-x}^{x}\left[u^2\left(d+\frac{x-t}{2}\right)+u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)b\left(d+\frac{x-t}{2}\right)-q\left(d+\frac{x-t}{2}\right)\right]e^{ikt}dt$$

$$- \frac{\alpha^+}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s) K_{11}(s, t+s-x)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^+}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s) K_{11}(s, t-s+x)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^-}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s) K_{21}(s, t-x+2d-s)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^-}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s) K_{21}(s, t+x-2d+s)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^+}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x-t)/2}^{x} \left[u^2(s) - q(s) \right] K_{11}(s, t+s-x)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^+}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{(x+t)/2}^{x} \left[u^2(s) - q(s) \right] K_{11}(s, t-s+x)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^-}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} \left[u^2(s) - q(s) \right] K_{11}(s, t-x+2d-s)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^-}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} \left[u^2(s) - q(s) \right] K_{11}(s, t-2d+x+s)\, ds \right) e^{ikt} dt \qquad (2.1.13)$$

$$\int_{-x}^{x} K_{22}(x,t) e^{ikt} dt = -\frac{\alpha^-}{2} \int_{x-2d}^{x} u\left(d + \frac{t-x}{2} \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^-}{2} \int_{x}^{2d-x} u\left(d - \frac{t-x}{2} \right) e^{ikt} dt - \frac{\alpha^+}{2} \int_{-x}^{x} u\left(\frac{t+x}{2} \right) e^{ikt} dt$$

$$+ \frac{\alpha^+}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s) K_{11}(s, t-x+s)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^+}{2} \int_{-x}^{2d-x} \left(\int_{(t+x)/2}^{x} u(s) K_{11}(s, t+x-s)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$- \frac{\alpha^-}{2} \int_{x-2d}^{x} \left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s) K_{11}(s, t-x+s)\, ds \right) e^{ikt} dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t+x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t+x-2d+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{x}^{2d-x} u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt-\frac{\beta}{2}\int_{2d-x}^{x} u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)e^{ikt}dt+\frac{\beta}{2}\int_{x}^{2d-x} u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t+x-2d+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t+x-2d+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-2d}^{x}\left(\int_{d}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{2d-x}\left(\int_{d}^{x}u(s)\,K_{22}(s,t+x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{2d-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)\,K_{22}(s,t+x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{d}u(s)\,K_{11}(s,t+x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)\,K_{11}(s,t+x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}u(s)\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s}K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)\,K_{22}(s,t-x+s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)\,K_{22}(s,t+x-s)\,ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t+x-s}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds\right)e^{ikt}dt \qquad (2.1.14)$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi,

1-)$d<x<2d$, $-x<t<x-2d<2d-x$, 2-) $2d<x,\ -x<t<2dx,$

3-) $d<x<2d,\ x-2d<t<2d-x$, 4-) $2d<x,\ -x<t<x-2d,$

5-) $2d<x,\ 2d-x<t<x$, 6-) $d<x<2d,\ x-2d<t<x$

bölgelerinde $K_{11}(x,t)\,,K_{21}(x,t)$ ve $K_{22}(x,t)$ fonksiyonlarının ifadeleri yazılsın:

1-)$d<x<2d$, $-x<t<x-2d<2d-x$ aralığında (2.1.12), (2.1.13) ve (2.1.14) eşitliklerinden $K_{ij}(x,t), i,j=1,2$ fonksiyonları için aşağıdaki integral denklem sistemleri elde edilir

$$K_{11}(x,t)=\frac{\alpha^{+}}{2}u\left(\frac{x+t}{2}\right)+\frac{\alpha^{-}}{2}u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-\frac{\beta}{2}u\left(\frac{x+t}{2}\right)+\frac{\beta}{2}u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)$$

$$+\frac{\beta}{2}u\left(d+\frac{x-t}{2}\right)-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{(x+t)/2}\left[u^{2}(s)+u(s)b(s)-q(s)\right]ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{0}^{(x+t)/2}\left[u^{2}(s)+u(s)b(s)-q(s)\right]ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)+u(s)b(s)-q(s)\right]ds$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d}\left[u^{2}(s)+u(s)b(s)-q(s)\right]ds$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)K_{11}(s,t-x+s)\,ds+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)K_{11}(s,t+x-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{d}u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)K_{22}(s,t-x+s)\,ds$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)K_{22}(s,t+x-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d}u(s)K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d}u(s)K_{11}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d}u(s)K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)K_{22}(s,t-x+s)\,ds+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{d}u(s)\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s}K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+x-s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{d(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{d-\frac{t+x}{2}}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t+x-2d+s}^{t-x-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds+\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-x+s}^{t-x+2d-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t+x-2d+s}^{t-x-s} K_{11}(s,\xi)\,d\xi$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t-x+2d-s} K_{11}(s,\xi)\,d\xi$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-x+s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t+x-s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+x-s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\int_{t-x+s}^{t-x-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds-\frac{1}{2}\int_{d}^{x}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t-x-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds \quad (2.1.15)$$

$$K_{21}(x,t)=-\frac{\alpha^{+}}{4}\left[u^{2}\left(\frac{x+t}{2}\right)+u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{4}\left[u^{2}\left(d+\frac{t-x}{2}\right)+u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{\beta}{4}\left[u^2\left(\frac{x+t}{2}\right)+u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{\beta}{4}\left[u^2\left(d+\frac{t-x}{2}\right)+u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{\alpha^+}{2}\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)K_{11}(s,t-x+s)\,ds-\frac{\alpha^+}{2}\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)K_{11}(s,t+x-s)\,ds$$
$$-\frac{\alpha^+}{2}\int_{(x-t)/2}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-x+s)\,ds$$
$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_{(x+t)/2}^{x}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t+x-s)\,ds$$
$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d}u(s)K_{21}(s,t-x+2d-s)\,ds$$
$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d}u(s)K_{21}(s,t+x-2d+s)\,ds$$
$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t-x+2d-s)\,ds$$
$$-\frac{\alpha^-}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d}\left[u^2(s)-q(s)\right]K_{11}(s,t+x-2d+s)\,ds$$
$$-\frac{1}{2}\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)K_{21}(s,t-x+s)\,ds-\frac{1}{2}\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)K_{11}(s,t-x+s)\,ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_{d}^{x}u(s)K_{21}(s,t-x+s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{d}^{x}u(s)K_{11}(s,t-x+s)\,ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)K_{11}(s,t+x-s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)K_{11}(s,t+x-s)\,ds \qquad (2.1.16)$$

$$K_{22}(x,t)=-\frac{\alpha^+}{2}u\left(\frac{x+t}{2}\right)-\frac{\alpha^-}{2}u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)$$
$$+\frac{\beta}{2}u\left(\frac{x+t}{2}\right)-\frac{\beta}{2}u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)$$
$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_{(x-t)/2}^{x}u(s)K_{21}(s,t-x+s)\,ds-\frac{\alpha^+}{2}\int_{(x+t)/2}^{x}u(s)K_{11}(s,t+x-s)\,ds$$
$$-\frac{\alpha^+}{2}\int_{0}^{d}u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s}K_{21}(s,\xi)\,d\xi\,ds-\frac{\alpha^-}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d}u(s)K_{11}(s,t-x+s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha -}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t+x-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha -}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha -}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t+x-s)\,ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-x+s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t+x-s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds-\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s} K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds-\frac{1}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}(s,t-x+s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\,K_{11}(s,t-x+s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\, K_{22}(s, t - x + s)\, ds - \frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\, K_{22}(s, t + x - s)\, ds \qquad (2.1.17)$$

Benzer şekilde diğer bölgeler için de integral denklemleri kolayca alınabilir.

2.2 Integral Denklemleri Sisteminin Çözümünün Varlığı ve Özellikleri

Bu bölümde alınan integral denklemlerin her bölge için çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecektir. Ayrıca çevirme operatörünün çekirdeğinin sağladığı özellikler incelenecektir.

1- $d < x < 2d,\ -x < t < x - 2d < 2d - x$ bölgesinde $K_{11}(x,t)$, $K_{21}(x,t)$ ve $K_{22}(x,t)$ fonksiyonlarının ifadelerine ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanrsa;

$$K_{11}^{(0)}(x,t) = \frac{\alpha^+}{2} u\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{\alpha^-}{2} u\left(d + \frac{t-x}{2}\right)$$
$$-\frac{\beta}{2} u\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{\beta}{2} u\left(d + \frac{t-x}{2}\right) + \frac{\beta}{2} u\left(d + \frac{x-t}{2}\right)$$
$$-\frac{\alpha^+}{2} \int_0^{(x+t)/2} \left[u^2(s) + u(s)b(s) - q(s)\right] ds$$
$$+\frac{\beta}{2} \int_0^{(x+t)/2} \left[u^2(s) + u(s)b(s) - q(s)\right] ds$$
$$-\frac{\beta}{2} \int_0^{d} \left[u^2(s) + u(s)b(s) - q(s)\right] ds$$
$$+\frac{\alpha^-}{2} \int_{d+(t-x)/2}^{d} \left[u^2(s) + u(s)b(s) - q(s)\right] ds,$$

$$K_{11}^{(n)}(x,t) = \frac{\alpha^+}{2} \int_{(x-t)/2}^{x} u(s) K_{11}^{(n-1)}(s, t-x+s)\, ds$$
$$+\frac{\alpha^+}{2} \int_{(x+t)/2}^{x} u(s) K_{11}^{(n-1)}(s, t+x-s)\, ds - \frac{\alpha^+}{2} \int_0^{d} u(s) \int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\, d\xi ds$$
$$-\frac{\alpha^+}{2} \int_{(x-t)/2}^{x} u(s) K_{22}^{(n-1)}(s, t-x+s)\, ds + \frac{\alpha^+}{2} \int_{(x+t)/2}^{x} u(s) K_{22}^{(n-1)}(s, t+x-s)\, ds$$
$$-\frac{\alpha^+}{2} \int_0^{d} \left[u^2(s) - q(s)\right] \int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s} K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\, d\xi ds$$
$$+\frac{\alpha^-}{2} \int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s) K_{11}^{(n-1)}(s, t-x+2d-s)\, ds$$
$$+\frac{\alpha^-}{2} \int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s) K_{11}^{(n-1)}(s, t+x-2d+s)\, ds$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s} K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t+x-2d+s}^{t+x-s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds+\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-x+s}^{t-x+2d-s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t+x-2d+s}^{t+x-s} K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t-x+2d-s} K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds-\frac{1}{2}\int_{d}^{x}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds.$$

$$K_{21}^{(0)}(x,t)=-\frac{\alpha^{+}}{4}\left[u^{2}\left(\frac{x+t}{2}\right)+u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{4}\left[u^{2}\left(d+\frac{t-x}{2}\right)+u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{\beta}{4}\left[u^{2}\left(\frac{x+t}{2}\right)+u\left(\frac{x+t}{2}\right)b\left(\frac{x+t}{2}\right)-q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{\beta}{4}\left[u^{2}\left(d+\frac{t-x}{2}\right)+u\left(d+\frac{t-x}{2}\right)b\left(d+\frac{t-x}{2}\right)-q\left(d+\frac{t-x}{2}\right)\right]$$

$$K_{21}^{(n)}(x,t)=-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x-t)/2}^{x}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x+t)/2}^{x}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\,K_{21}^{(n-1)}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\,K_{21}^{(n-1)}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+2d-s)\,ds$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-2d+s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{21}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds-\frac{1}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\,K_{21}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds$$

$$+\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}^{(n-1)}(s, t+x-s)\, ds$$

$$K_{22}^{(0)}(x,t) = -\frac{\alpha^{+}}{2} u\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{\alpha^{-}}{2} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right) + \frac{\beta}{2} u\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{\beta}{2} u\left(d+\frac{t-x}{2}\right),$$

$$K_{22}^{(n)}(x,t) = \frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\, K_{21}^{(n-1)}(s, t-x+s)\, ds$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}^{(n-1)}(s, t+x-s)\, ds$$

$$-\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\, d\xi ds - \frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\, K_{11}^{(n-1)}(s, t-x+s)\, ds$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\, K_{11}^{(n-1)}(s, t+x-s)\, ds$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\, K_{22}^{(n-1)}(s, t-x+2d-s)\, ds$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\, K_{22}^{(n-1)}(s, t+x-2d+s)\, ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}^{(n-1)}(s, t-x+s)\, ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\, K_{11}^{(n-1)}(s, t+x-s)\, ds - \frac{\beta}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d} u(s)\, K_{11}^{(n-1)}(s, t-x+s)\, ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\, K_{11}^{(n-1)}(s, t+x-2d+s)\, ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\, K_{22}^{(n-1)}(s, t-x+2d-s)\, ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d} u(s)\, K_{22}^{(n-1)}(s, t+x-2d+s)\, ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\, K_{22}^{(n-1)}(s, t-x+s)\, ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,ds+\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{0}^{d} u(s)\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d+(t-x)/2}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+s}^{t+x-s} K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$-\frac{\beta}{2}\int_{d-(t+x)/2}^{d}\left[u^{2}(s)-q(s)\right]\int_{t-x+2d-s}^{t+x-2d+s} K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{(x-t)/2}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{(x+t)/2}^{x} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\,K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,ds-\frac{1}{2}\int_{d}^{x} u(s)\,K_{22}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,ds$$

integral denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin her birinin mutlak değeri alınıp, $[-x,x]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{x}|u(t)|\,dt+\frac{|\alpha^{-}|}{2}\int_{d-x}^{d}|u(t)|\,dt+\frac{|\beta|}{2}\int_{0}^{x}|u(t)|\,dt$$

$$+\frac{|\beta|}{2}\int_{d-x}^{d}|u(t)|\,dt+\frac{|\beta|}{2}\int_{d}^{d+x}|u(t)|\,dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{x}(x-t)\left[|u(t)|^{2}+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

$$+|\alpha^{-}|\int_{0}^{x}(x-t)\left[|u(t)|^{2}+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

$$+|\beta|\int_{0}^{x}(x-t)\left[|u(t)|^{2}+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

$$+\frac{|\beta|}{2}\int_{0}^{x}(x-t)\left[|u(t)|^{2}+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt,$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \frac{\alpha^{+}}{4}\int_{0}^{x}\left[|u(t)|^{2}+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

$$+\frac{|\alpha^-|}{2}\int_{d-x}^{d}\left[|u(t)|^2+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

$$+\frac{|\beta|}{4}\int_{d-x}^{d}\left[|u(t)|^2+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

$$+\frac{|\beta|}{4}\int_{0}^{x}\left[|u(t)|^2+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt,$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{22}^{(0)}(x,t)\right|dt\le\frac{\alpha^+}{2}\int_0^x|u(t)|\,dt+\frac{|\alpha^-|}{2}\int_{d-x}^{d}|u(t)|\,dt+\frac{|\beta|}{2}\int_0^x|u(t)|\,dt+\frac{|\beta|}{2}\int_{d-x}^{d}|u(t)|\,dt$$

ve buradan da

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(x,t)\right|dt\le\left[2\alpha^++2\left|\alpha^-\right|+6|\beta|\right]\int_0^x(x-t)\left[|u(t)|^2+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(0)}(x,t)\right|dt\le\left(\frac{\alpha^+}{2}+\frac{|\alpha^-|}{2}+|\beta|\right)\int_0^x(x-t)\left[|u(t)|^2+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{22}^{(0)}(x,t)\right|dt\le\left[\alpha^++\left|\alpha^-\right|+2|\beta|\right]\int_0^x(x-t)\left[|u(t)|^2+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$c_1=\max\left\{\left[2\alpha^++2\left|\alpha^-\right|+6\beta\right],\left(\frac{\alpha^+}{2}+\frac{|\alpha^-|}{2}+|\beta|\right),\left[\alpha^++\left|\alpha^-\right|+2|\beta|\right]\right\}$$

ve

$$\sigma(x)=\int_0^x(x-t)\left[|u(t)|^2+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

olarak alınırsa, her $i,j=1,2$ için

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{ij}^{(0)}(x,t)\right|dt\le c_1\sigma(x)$$

olur. Ayrıca

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(n)}(x,t)\right|dt\le\frac{\alpha^+}{2}\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds+\alpha^+\pi\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds+\frac{\alpha^+}{2}\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha^{+}\pi\int_0^x\left[|u(s)|^2+|q(s)|\right]\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\alpha^{-}|\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds+\left|\alpha^{-}\right|\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\alpha^{-}|\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds+\frac{|\alpha^{-}|}{2}\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\alpha^{-}|\pi\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\alpha^{-}|\pi\int_0^x\left[|u(s)|^2+|q(s)|\right]\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\beta|\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\beta|\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds+\frac{|\beta|}{2}\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\frac{|\beta|}{2}\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds+|\beta|\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\beta|\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds+|\beta|\pi\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\beta|\pi\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\beta|\pi\int_0^x\left[|u(s)|^2+|q(s)|\right]\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\frac{|\beta|}{2}\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds+\frac{|\beta|}{2}\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+2\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds+\pi\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\pi\int_0^x\left[|u(s)|^2+|q(s)|\right]\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\int_0^x|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(n)}(x,t)\right|dt \le{}& \frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{x}\left[|u(s)|^{2}+|q(s)|\right]\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{x}\left[|u(s)|^{2}+|q(s)|\right]\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\alpha^{-}|\int_{0}^{x}\left[|u(s)|^{2}+|q(s)|\right]\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\alpha^{-}|\int_{0}^{x}\left[|u(s)|^{2}+|q(s)|\right]\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\alpha^{-}|\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+|\alpha^{-}|\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds\\
&+\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds,
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-x}^{x}\left|K_{22}^{(n)}(x,t)\right|dt \le \frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{-s}^{s}\left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right|d\xi ds
$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds + \alpha^+\pi \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

$$+|\alpha^-| \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds + |\alpha^-| \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

$$+|\alpha^-| \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds + \left|\alpha^-\right| \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

$$+\beta \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds + 2\beta \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

$$+2\beta \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds + \beta \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

$$+2\pi\beta \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

$$+\beta\pi \int_0^x \left[|u(s)|^2 + |q(s)|\right] \int_{-s}^{s} \left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

$$+\beta\pi \int_0^x \left[|u(s)|^2 + |q(s)|\right] \int_{-s}^{s} \left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds + \frac{1}{2} \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

$$+\int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds + \int_0^x |u(s)| \int_{-s}^{s} \left|K_{22}^{(n-1)}(s,\xi)\right| d\xi ds$$

yazılabilir. $n = 1$ için bu eşitsizlikler kullanılırsa;

$$\int_{-x}^{x} \left|K_{11}^{(1)}(x,t)\right| dt \le \left(2\alpha^+ + \frac{7}{2}\left|\alpha^-\right| + 6|\beta| + 3 + 2\pi\left(\alpha^+ + \left|\alpha^-\right| + |\beta| + 1\right)\right) c_1 \frac{\sigma^2(x)}{2!}$$

$$\int_{-x}^{x} \left|K_{21}^{(1)}(x,t)\right| dt \le \left[2\alpha^+ + 4\left|\alpha^-\right| + 5\right] c_1 \frac{\sigma^2(x)}{2!}$$

$$\int_{-x}^{x} \left|K_{22}^{(1)}(x,t)\right| dt \le \left[\alpha^+ + 4\left|\alpha^-\right| + 6|\beta| + 3 + \pi\left(\alpha^+ + 4|\beta|\right)\right] c_1 \frac{\sigma^2(x)}{2!}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$c = \max\left\{\left[2\alpha^+ + \tfrac{7}{2}|\alpha^-| + 6|\beta| + 3 + 2\pi(\alpha^+ + |\alpha^-| + |\beta| + 1)\right], [2\alpha^+ + 4|\alpha^-| + 5], \right.$$
$$\left. [\alpha^+ + 4|\alpha^-| + 6|\beta| + 3 + \pi(\alpha^+ + 4|\beta|)], c_1\right\}$$

olarak alınırsa; her $i,j=1,2$ için

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{ij}^{(1)}(x,t)\right|dt\le c^{2}\frac{\sigma^{2}(x)}{2!}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca $n=2$ için $i,j=1,2$ olmak üzere

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{ij}^{(2)}(x,t)\right|dt\le c^{3}\frac{\sigma^{3}(x)}{3!}$$

elde edilir. Tümevarım yöntemi kullanılırsa, her $i,j=1,2$ için

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{ij}^{(n)}(x,t)\right|dt\le c^{(n+1)}\frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

eşitsizliği geçerli olur. Benzer işlemler diğer

1-)$d<x<2d$, $-x<t<x-2d<2d-x$,2-) $2d<x,$ $-x<t<2dx,$

3-) $d<x<2d,$ $x-2d<t<2d-x$,4-) $2d<x,$ $-x<t<x-2d,$

5-) $2d<x,$ $2d-x<t<x$,6-) $d<x<2d,$ $x-2d<t<x$

bölgelerinde de yapılabilir.

Dolayısıyla

$$\sigma(x)=\int_{0}^{x}(x-t)\left[|u(t)|^{2}+|u(t)||b(t)|+|q(t)|\right]dt$$

olmak üzere her $i,j=1,2$ için

$$\int_{-x}^{x}|K_{ij}(x,t)|\,dt\le e^{c\sigma(x)}-1$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 2.2.1: L probleminin $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}1\\ ik\end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için şu gösterilim mevcuttur:

$x<d$ iken

$$\begin{cases} y_1=e^{ikx}+\displaystyle\int_{-x}^{x}K_{11}(x,t)\,e^{ikt}dt\\ y_2=ike^{ikx}+b(x)\,e^{ikx}+\displaystyle\int_{-x}^{x}K_{21}(x,t)\,e^{ikt}dt+ik\int_{-x}^{x}K_{22}(x,t)\,e^{ikt}dt\end{cases}$$

$x > d$ iken

$$\begin{cases} y_1 = \alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} + \beta\left(e^{ikx} - e^{ik(2d-x)}\right) + \int\limits_{-x}^{x} K_{11}(x,t)\, e^{ikt} dt \\ y_2 = ik\left(\alpha^+ e^{ikx} - \alpha^- e^{ik(2d-x)}\right) + ik\beta\left(e^{ikx} + e^{ik(2d-x)}\right) \\ \quad + b(x)\left[\alpha^+ e^{ikx} + \alpha^- e^{ik(2d-x)} + \beta\left(e^{ikx} - e^{ik(2d-x)}\right)\right] \\ \quad + \int\limits_{-x}^{x} K_{21}(x,t)\, e^{ikt} dt + ik \int\limits_{-x}^{x} K_{22}(x,t)\, e^{ikt} dt \end{cases}$$

Burada $b(x) = -\frac{1}{2} \int\limits_0^x \left[u^2(s) - q(s)\right] e^{-\frac{1}{2}\int\limits_s^x u(t)\,dt} ds$ ve

$K_{11}(x,x) = \frac{(\alpha^+ + \beta)}{2} u(x)$, $K_{11}(x,-x) = 0$,

$K_{11}(x, 2d - x + 0) - K_{11}(\pi, 2d - x - 0) = \frac{(\alpha^- - \beta)}{2} u(x)$,

$K_{21}(x,x) = b'(x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left[u^2(s) - q(s)\right] K_{11}(s,s)\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_0^x u(s) K_{21}(s,s)\, ds,$

$K_{22}(x,x) = -\frac{(\alpha^+ + \beta)}{2}\left[u(x) + 2b(x)\right]$,

$\frac{\partial K_{ij}(x,.)}{\partial x}, \frac{\partial K_{ij}(x,.)}{\partial t} \in L_2(0,\pi), i,j = 1,2$ şeklindedir.

III.BÖLÜM

3.1. Karakteristik Fonksiyon ve Özellikleri

Bu bölümde L operatörünün spektrumunun özellikleri araştırılacaktır. $C = 0$ ve $q(x) \equiv 0$ olması durumunda L operatörü L_0 ile gösterilsin. $\varphi(x,k) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,k) \\ \varphi_2(x,k) \end{pmatrix}$ fonksiyonu $\varphi(0,k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ başlangıç koşulu ile (2.1.6) süreksizlik koşulunu sağlayan çözüm olsun. $C = 0$ ve $q(x) \equiv 0$ olması durumunda bu çözüm $\varphi_0(x,k)$ ile gösterilsin. $k \in R$ için

$x < d$ iken

$$\begin{cases} \varphi_{01}(x,k) = \dfrac{y_{01}(x,k) - \overline{y_{01}(x,k)}}{2i} = \sin kx \\ \varphi_{02}(x,k) = \dfrac{y_{02}(x,k) - \overline{y_{02}(x,k)}}{2i} = k\cos kx \end{cases},$$

$x > d$ iken

$$\begin{cases} \varphi_{01}(x,k) = \dfrac{y_{01}(x,k) - \overline{y_{01}(x,k)}}{2i} = (\alpha^+ + \beta)\sin kx + (\alpha^- - \beta)\sin k(2d - x) \\ \varphi_{02}(x,k) = \dfrac{y_{02}(x,k) - \overline{y_{02}(x,k)}}{2i} = (\alpha^+ + \beta)k\cos kx + (-\alpha^- + \beta)k\cos k(2d - x) \end{cases}$$

şeklindedir.

$\Delta_0(k)$ ile L_0 probleminin karakteristik fonksiyonu gösterilirse;

$$\varphi_{01}(\pi,k) = \Delta_0(k) = \left(\alpha^+ + \beta\right)\sin k\pi + \left(\alpha^- - \beta\right)\sin k(2d - \pi)$$

olduğu açıktır. $\Delta_0(k) = 0$ denkleminin $n \in N \in$ için k_n^0 kökleri L_0 probleminin özdeğerleridir.

Tanım 3.1.1: $y(x,\lambda), z(x,\mu) \in D(L)$ fonksiyonları, $\beta = i\omega$ olmak üzere

$$\int_0^\pi y(x,\lambda)\overline{z(x,\mu)}dx + \frac{2\alpha\omega}{\left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\bar{\mu}}\right)} y(d-0,\lambda)\overline{z(d-0,\mu)} = 0$$

koşulunu sağlarsa, $y(x,\lambda), z(x,\mu)$ fonksiyonlarına ortogonaldir denir.

Tanım 3.1.2: $y(x,\lambda) \in D(L)$ için , $\beta = i\omega$ olmak üzere, α_n normalleştirici sayıları

$$\alpha_n = \int_0^\pi y^2(x,\lambda_n)\,dx + \frac{\alpha\omega}{\sqrt{\lambda_n}} y^2(d-0,\lambda_n)$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.1.3 (Lagrange Fomülü): $y, z \in D(L_0^*)$ olsun. Bu durumda

$$(L_0^* y, z) = \int_0^\pi \ell(y)\,\bar z\,dx = (y, L_0^* z) + [y,\bar z]\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right)$$

eşitliği sağlanır. Burada $[y,\bar z]\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right) = \left[(-\bar z)(x)\,y(x) - (-y)(x)\,\overline{z(x)}\right]\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right)$ dir.

İspat:

$$(L_0^* y, z) = \int_0^\pi \ell(y)\,\bar z\,dx = -\int_0^\pi \left(y' - u\,y\right)'\bar z\,dx - \int_0^\pi u\left(y' - u\,y\right)\bar z\,dx - \int_0^\pi \left(u^2 - q(x)\right) y\bar z\,dx$$

$$= -(y' - u\,y)\,\bar z\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right) + \int_0^\pi \left(y' - u\,y\right)\bar z'\,dx$$

$$- \int_0^\pi u\left(y' - u\,y\right)\bar z\,dx - \int_0^\pi \left(u^2 - q(x)\right) y\bar z\,dx$$

$$= \int_0^\pi \left(y' - u\,y\right)\left(\bar z' - u\bar z\right)dx - (-y)(x)\,\overline{z(x)}\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right)$$

$$- \int_0^\pi \left(u^2 - q(x)\right) y\bar z\,dx$$

$$= \int_0^\pi y'\left(\bar z' - u\bar z\right)dx - \int_0^\pi u\,y\left(\bar z' - u\bar z\right)dx - (-y)(x)\,\overline{z(x)}\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right)$$

$$- \int_0^\pi \left(u^2 - q(x)\right) y\bar z\,dx$$

$$= (\bar z' - u\bar z)\,y\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right) - \int_0^\pi y\left(\bar z' - u\bar z\right)'dx$$

$$- \int_0^\pi u y\left(\bar z' - u\bar z\right)dx - (-y)(x)\,\overline{z(x)}\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right) - \int_0^\pi \left(u^2 - q(x)\right) y\bar z\,dx$$

$$= \int_0^\pi y\,\ell(\bar z)\,dx + [y,\bar z]\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right) = (y, L_0^* z) + [y,\bar z]\left(\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi}\right).$$

Lemma 3.1.4: $\inf\limits_{n\neq m}\left|k_n^0 - k_m^0\right| = a > 0$ yani $\Delta_0(k) = 0$ karakteristik denkleminin kökleri ayrıktır.

İspat: Kabul edelim ki $\left\{k_n^0\right\}$ dizisinin $\left\{k_{n_p}^0\right\}$ ve $\left\{\tilde k_{n_p}^0\right\}$ alt dizileri vardır, öyle ki $k_{n_p}^0 \neq \tilde k_{n_p}^0$ ve $p \to \infty$ ve ayrıca

$$\lim_{p\to\infty}\left|k_{n_p}^0 - \tilde k_{n_p}^0\right| = 0$$

dir. $L_2(0,\pi)$ uzayında L_0 probleminin $\varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)$ ve $\varphi_0\left(x,\overline{k}^0_{n_p}\right)$ özfonksiyonlarının ortogonallik koşulundan yararlanılırsa;

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^\pi \varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)\overline{\varphi_0\left(x,\overline{k}^0_{n_p}\right)}\,dx+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)\overline{\varphi_0\left(d-0,\overline{k}^0_{n_p}\right)}\\
&= \int_0^\pi \varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)\overline{\varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)}\,dx+\int_0^\pi \varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(x,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)}\right]dx\\
&\quad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)\overline{\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)}\\
&\quad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(d-0,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)}\right]
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^\pi \left\|\varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)\right\|^2 dx+\int_0^\pi \varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(x,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)}\right]dx\\
&\quad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\left\|\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)\right\|^2\\
&\quad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(d-0,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)}\right]\\
&\geq \int_0^d \left\|\varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)\right\|^2 dx+\int_0^\pi \varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(x,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)}\right]dx\\
&\quad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\left\|\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)\right\|^2\\
&\quad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(d-0,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)}\right]\\
&= \int_0^d \sin^2 k^0_{n_p}x\,dx+\int_0^\pi \varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(x,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)}\right]dx\\
&\quad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\sin^2 k^0_{n_p}d\\
&\quad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(d-0,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)}\right]\\
&= \frac{d}{2}-\frac{\sin 2k^0_{n_p}d}{2k^0_{n_p}}+\int_0^\pi \varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(x,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(x,k^0_{n_p}\right)}\right]dx\\
&\qquad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\sin^2 k^0_{n_p}d\\
&\qquad+\frac{2\alpha\omega}{\left(k^0_{n_p}+\overline{k}^0_{n_p}\right)}\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)\left[\overline{\varphi_0\left(d-0,\overline{k}^0_{n_p}\right)}-\overline{\varphi_0\left(d-0,k^0_{n_p}\right)}\right]
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$\varphi_0\left(x,\tilde{k}'_{n_p}\right)-\varphi_0\left(x,k'_{n_p}\right)=\sin\tilde{k}'_{n_p}x-\sin k'_{n_p}x=2\sin\left(\frac{\tilde{k}'_{n_p}-k'_{n_p}}{2}x\right)\cos\left(\frac{\tilde{k}'_{n_p}+k'_{n_p}}{2}x\right)$$

eşitliğinden ve hipotezden $\lim_{p\to\infty}\left\|\varphi_0\left(x,\tilde{k}'_{n_p}\right)-\varphi_0\left(x,k'_{n_p}\right)\right\|=0$ yazılabileceğinden (3.1.1) eşitsizliğinde $p\to\infty$ için limite geçilirse; $\frac{d}{2}\leq 0$ olur. Bu da $d\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ olmasıyla bir çelişki oluşturur. Bu çelişki ile Lemma ispatlanmış olur

$$\Delta(k)=\langle\psi(x,k),\varphi(x,k)\rangle,\ \langle y(x),z(x)\rangle:=y(x)(-z)(x)-(-y)(x)z(x)$$

olarak tanımlansın. $\varphi(x,k)$ fonksiyonu, (2.1.1) denkleminin $\varphi(0,k)=0$, $(-\varphi)(0,k)=1$ başlangıç koşullarını ve (2.1.3) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü; $\psi(x,k)$ fonksiyonu da, (2.1.1) denkleminin $\psi(\pi,k)=1,(-\psi)(\pi,k)=0$ başlangıç koşullarını ve (2.1.3) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü olsun. Liouville formülünden dolayı $\langle\psi(x,k),\varphi(x,k)\rangle$ ifadesi x değişkenine bağlı değildir ve

$$\Delta(k)=V(\varphi)=U(\psi)=\varphi(\pi,k)=\psi(0,k)$$

yazılabilir. $\Delta(k)$ fonksiyonu k ya göre tamdır ve onun sayılabilir sayıda olan sıfırları, L probleminin özdeğerleridir.

Lemma 3.1.5: L probleminin özdeğerleri basittir. Yani $\dot{\Delta}(k_n)\neq 0$ dır.

İspat:

$$\begin{aligned}-\psi''(x,k)+\left[u'(x)+q(x)\right]\psi(x,k)&=k\psi(x,k)\\-\varphi''(x,k_n)+\left[u'(x)+q(x)\right]\varphi(x,k_n)&=k_n\varphi(x,k_n)\end{aligned}$$

ilk denklem $\varphi(x,k_n)$ ile, ikinci denklem $\psi(x,k)$ ile çarpılıp, taraf tarafa çıkarıldıktan sonra

$$\frac{d}{dx}\langle\psi(x,k),\varphi(x,k_n)\rangle=(k-k_n)\psi(x,k)\varphi(x,k_n)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı x e göre $[0,\pi]$ da integrallenirse;

$$(k-k_n)\int_0^{\pi}\psi(x,k)\varphi(x,k_n)\,dx=\langle\psi(x,k),\varphi(x,k_n)\rangle\left[\Big|_0^{d-0}+\Big|_{d+0}^{\pi}\right]$$

$=\psi(d-0,k)(-\varphi)(d-0,k_n)-(-\psi)(d-0,k)\varphi(d-0,k_n)$

$-\psi(0,k)(-\varphi)(0,k_n)+(-\psi)(0,k)\varphi(0,k_n)$

$+\psi(\pi,k)(-\varphi)(\pi,k_n)-(-\psi)(\pi,k)\varphi(\pi,k_n)$

$$
\begin{aligned}
&-\psi(d+0,k)(-\varphi)(d+0,k_n)+(-\psi)(d+0,k)\varphi(d+0,k_n)\\
&=\psi(d-0,k)(-\varphi)(d-0,k_n)-(-\psi)(d-0,k)\varphi(d-0,k_n)\\
&-\psi(0,k)+(-\varphi)(\pi,k_n)-\alpha\psi(d-0,k)\left[\alpha^{-1}(-\varphi)(d-0,k_n)+2i\sqrt{k_n}\beta\varphi(d-0,k_n)\right]\\
&+\alpha\varphi(d-0,k_n)\left\langle\alpha^{-1}(-\psi)(d-0,k)+2i\sqrt{k}\beta\psi(d-0,k)\right\rangle\\
&=\Delta(k_n)-\Delta(k)+2i\alpha\beta\left(\sqrt{k}-\sqrt{k_n}\right)\varphi(d-0,k_n)\psi(d-0,k)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan da, $k\to k_n$ için limite geçilirse ve $\beta=i\omega$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$
\int_0^\pi\psi(x,k_n)\varphi(x,k_n)\,dx+\frac{\alpha\omega}{\sqrt{k_n}}\psi(d-0,k_n)\varphi(d-0,k_n)=-\dot{\Delta}(k_n)
$$

olur. $[0,\pi]$ aralığında $\psi(x,k_n)=\gamma_n\varphi(x,k_n)$ eşitliğini sağlayan $0\neq\gamma_n$ ler için $\alpha_n=\int_0^\pi\varphi^2(x,k_n)\,dx+\frac{\alpha\omega}{\sqrt{k_n}}\varphi^2(d-0,k_n)$ olmak üzere, $\alpha_n\gamma_n=-\dot{\Delta}(k_n)$ elde edilir ki bu $\dot{\Delta}(k_n)\neq0$ anlamına gelir.

Şimdi

$$
L:\begin{cases}
-y''+[u'(x)+q(x)]y=\lambda y,\ \lambda=k^2\\
(-y)(0)-hy(0)=0\\
(-y)(\pi)+Hy(\pi)=0\\
y(d+0)=\alpha y(d-0)\\
(-y)(d+0)=\alpha^{-1}(-y)(d-0)+2ik\beta y(d-0)
\end{cases},
$$

$$
\tilde{L}:\begin{cases}
-y''+[u'(x)+q(x)]y=\mu y,\ \mu=\rho^2\\
(-y)(0)-hy(0)=0\\
(-y)(\pi)+\tilde{H}y(\pi)=0\\
y(d+0)=\alpha y(d-0)\\
(-y)(d+0)=\alpha^{-1}(-y)(d-0)+2i\rho\beta y(d-0)
\end{cases}
$$

ve $H\neq\tilde{H}$ olmak üzere $L(q(x),h,H)$ ve $\tilde{L}\left(q(x),h,\tilde{H}\right)$ problemleri ele alınsın. $L(q(x),h,H)$ problemleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{n\geq0}$ ve $\tilde{L}\left(q(x),h,\tilde{H}\right)$ problemleminin özdeğerleri ise $\{\mu_n\}_{n\geq0}$ olsun.

Lemma 3.1.6: L ve $\tilde{L}$ sınır-değer problemlerinin özdeğerleri sıralıdır. Yani, $\tilde{H}>H$ ise $n\geq0$ için $\lambda_n<\mu_n<\lambda_{n+1}$ ve $H>\tilde{H}$ ise $\mu_n<\lambda_n<\mu_{n+1}$ dir.

İspat: Lemma 3.1.5 de olduğu gibi

$$\frac{d}{dx}\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle=(\lambda-\mu)\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)$$

ve dolayısıyla

$$(\lambda-\mu)\int_0^{\pi}\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)\,dx=\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle\left[\Big|_0^{d-0}+\Big|_{d+0}^{\pi}\right]$$

$$\begin{aligned}
&=\varphi(d-0,\lambda)(-\varphi)(d-0,\mu)-(-\varphi)(d-0,\lambda)\varphi(d-0,\mu)\\
&-\varphi(0,\lambda)(-\varphi)(0,\mu)+(-\varphi)(0,\lambda)\varphi(0,\mu)\\
&+\varphi(\pi,\lambda)(-\varphi)(\pi,\mu)-(-\varphi)(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\mu)\\
&-\varphi(d+0,\lambda)(-\varphi)(d+0,\mu)+(-\varphi)(d+0,\lambda)\varphi(d+0,\mu)\\
&=\varphi(d-0,\lambda)(-\varphi)(d-0,\mu)-(-\varphi)(d-0,\lambda)\varphi(d-0,\mu)\\
&-h\varphi(0,\lambda)\varphi(0,\mu)+h\varphi(0,\lambda)\varphi(0,\mu)\\
&+\varphi(\pi,\lambda)(-\varphi)(\pi,\mu)-(-\varphi)(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\mu)\\
&-\alpha\varphi(d-0,\lambda)\left[\alpha^{-1}(-\varphi)(d-0,\mu)+2i\rho\varphi(d-0,\mu)\right]\\
&+\alpha\varphi(d-0,\mu)\left[\alpha^{-1}(-\varphi)(d-0,\lambda)+2ik\varphi(d-0,\lambda)\right]\\
&=\varphi(\pi,\lambda)(-\varphi)(\pi,\mu)-(-\varphi)(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\mu)\\
&+2i\alpha(k-\rho)\varphi(d-0,\lambda)\varphi(d-0,\mu)
\end{aligned}$$

ve $\Delta(\lambda)=(-\varphi)(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)$, $\tilde{\Delta}(\mu)=(-\varphi)(\pi,\mu)+\tilde{H}\varphi(\pi,\mu)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(\lambda)\Delta(\mu)&=\left[(-\varphi)(\pi,\lambda)+\tilde{H}\varphi(\pi,\lambda)\right]\left[(-\varphi)(\pi,\mu)+H\varphi(\pi,\mu)\right]\\
&=(-\varphi)(\pi,\lambda)(-\varphi)(\pi,\mu)+H(-\varphi)(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\mu)\\
&+\tilde{H}(-\varphi)(\pi,\mu)\varphi(\pi,\lambda)+H\tilde{H}\varphi(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\mu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(\lambda)\Delta(\mu)-\tilde{\Delta}(\mu)\Delta(\lambda)&=\tilde{H}\left[\varphi(\pi,\lambda)(-\varphi)(\pi,\mu)-\varphi(\pi,\mu)(-\varphi)(\pi,\lambda)\right]\\
&+H\left[\varphi(\pi,\mu)(-\varphi)(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)(-\varphi)(\pi,\mu)\right]\\
&=\left(\tilde{H}-H\right)\left[\varphi(\pi,\lambda)(-\varphi)(\pi,\mu)-(-\varphi)(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\mu)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\varphi(\pi,\lambda)(-\varphi)(\pi,\mu)-(-\varphi)(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\mu)=\frac{1}{\tilde{H}-H}\left[\tilde{\Delta}(\lambda)\Delta(\mu)-\tilde{\Delta}(\mu)\Delta(\lambda)\right]$$

ve

$$\begin{aligned}
(\lambda-\mu)\int_0^{\pi}\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)\,dx&=\frac{1}{\tilde{H}-H}\left[\tilde{\Delta}(\lambda)\Delta(\mu)-\tilde{\Delta}(\mu)\Delta(\lambda)\right]\\
&+2i\alpha\beta(k-\rho)\varphi(d-0,\lambda)\varphi(d-0,\mu)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\int_0^{\pi} \varphi(x,\lambda)\,\varphi(x,\mu)\,dx + \frac{2\alpha\omega}{k+\rho}\varphi(d-0,\lambda)\,\varphi(d-0,\mu)$$

$$= \frac{1}{\tilde{H}-H}\left[\frac{\tilde{\Delta}(\lambda)-\tilde{\Delta}(\mu)}{\lambda-\mu}\Delta(\mu) - \frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\lambda-\mu}\tilde{\Delta}(\mu)\right]$$

elde edilir. Son eşitlikte $\mu \to \lambda$ iken limite geçilirse

$$\int_0^{\pi} \varphi^2(x,\lambda)\,dx + \frac{\alpha\omega}{k}\varphi^2(d-0,\lambda) = \frac{1}{\tilde{H}-H}\left(\dot{\tilde{\Delta}}(\lambda)\,\Delta(\lambda) - \dot{\Delta}(\lambda)\,\tilde{\Delta}(\lambda)\right)$$

elde edilir. $-\infty < \lambda < \infty$ için eğer $\tilde{\Delta}(\lambda) \neq 0$ ise,

$$\frac{1}{\tilde{\Delta}^2(\lambda)}\left[\int_0^{\pi} \varphi^2(x,\lambda)\,dx + \frac{\alpha\omega}{k}\varphi^2(d-0,\lambda)\right] = -\frac{1}{\tilde{H}-H}\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\right)$$

olur. Eğer $\tilde{H} > H$ ise, $\dfrac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}$, $R \setminus \{\mu_n, n \geq 0\}$ kümesinde monoton azalandır. O halde $\lim\limits_{\lambda \to \mu_n^{\pm 0}} \dfrac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} = \pm\infty$ olur. Eğer $H > \tilde{H}$ ise,

$$\frac{1}{\Delta^2(\lambda)}\left[\int_0^{\pi} \varphi^2(x,\lambda)\,dx + \frac{\alpha\omega}{k}\varphi^2(d-0,\lambda)\right] = -\frac{1}{H-\tilde{H}}\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\tilde{\Delta}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)$$

olduğundan $\dfrac{\tilde{\Delta}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, $R \setminus \{\lambda_n, n \geq 0\}$ kümesinde monoton azalandır ve

$\lim\limits_{\lambda \to \lambda_n^{\pm 0}} \dfrac{\tilde{\Delta}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \pm\infty$ olur. Dolayısıyla ispat bitmiş olur.

3.2. Özdeğer ve Normalleştirici Sayıların Asimptotik İfadeleri

Bu bölümde L probleminin özdeğerleri ve normalleştirici sayıları için n nin yeterince büyük değerlerinde asimptotik ifadeler elde edilecektir.

Lemma 3.2.1: L probleminin özdeğerleri aşağıdaki asimptotik davranışına sahiptir:

$$k_n = k_n^0 + \frac{d_n}{k_n^0} + \frac{\delta_n}{k_n^0}.$$

Burada $\delta_n \in \ell_2$ ve

$$d_n = \frac{(\alpha^+ + \beta)\cos\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)\pi - (\alpha^- - \beta)\cos\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)(2d - \pi)}{2\dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right)} u(\pi)$$

sınırlı bir dizidir.

İspat: δ yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere $\left(\delta < \frac{\sigma}{2}\right)$

$$\Gamma_n = \left\{ k : |k| = \left|k_n^0\right| + \frac{\sigma}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$
$$G_\delta = \left\{ k : \left|k - k_n^0\right| \geq \delta,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

olsun. $k \in \overline{G_\delta}$ için

$$\begin{aligned}
\Delta_0(k) &= (\alpha^+ + \beta)\sin k\pi + (\alpha^- - \beta)\sin k(2d - \pi) \\
&= \frac{(\alpha^+ + \beta)}{2i}e^{ik\pi} + \frac{(\alpha^- - \beta)}{2i}e^{ik(2d-\pi)} - \frac{(\alpha^+ + \beta)}{2i}e^{-ik\pi} - \frac{(\alpha^- - \beta)}{2i}e^{-ik(2d-\pi)}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|\Delta_0(k)| &\geq \frac{(\alpha^+ + |\beta|)}{2}\left|e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}\right| + \frac{(|\alpha^-| + |\beta|)}{2}\left|e^{ik(2d-\pi)} - e^{-ik(2d-\pi)}\right| \\
&= (\alpha^+ + |\beta|)\,|\sin(\pi x + i\pi y)| + (|\alpha^-| + |\beta|)\,|\sin(x(2d - \pi) + iy(2d - \pi))| \\
&\geq (\alpha^+ + |\beta|)\,|\cosh \pi y| + (|\alpha^-| + |\beta|)\,|\cosh \pi y| \\
&\geq e^{\pi y}\left(\frac{\alpha^+ + |\beta|}{2} + \frac{\alpha^+ + |\beta|}{2}e^{-2\pi y} + \frac{|\alpha^-| + |\beta|}{2} + \frac{|\alpha^-| + |\beta|}{2}e^{-2\pi y}\right) \\
&= e^{|\operatorname{Im} k|\pi} C_\delta
\end{aligned}$$

olacak biçimde $C_\delta > 0$ vardır. Diğer taraftan $\Delta(k) = \varphi_1(\pi, k)$, $\Delta_0(k) = \varphi_{01}(\pi, k)$ ve $\tilde{K}_{11}(x,t) = K_{11}(x,t) - K_{11}(x,-t)$ olmak üzere L probleminin karakteristik fonksiyonu

$$\Delta(k) = \Delta_0(k) + \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t)\sin kt\,dt$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\lim_{|k| \to +\infty} e^{-|\operatorname{Im} k|\pi}\left(\Delta(k) - \Delta_0(k)\right) = \lim_{|k| \to +\infty} \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi, t)\sin kt\,dt = 0$$

yazılabilir ve n nin yeterince büyük değerleri için

$$|\Delta(k) - \Delta_0(k)| < \frac{C_\delta}{2} e^{|\mathrm{Im}\,k|\pi} \text{ ve } |\Delta_0(k)| > C_\delta e^{|\mathrm{Im}\,k|\pi} > \frac{C_\delta}{2} e^{|\mathrm{Im}\,k|\pi} > |\Delta(k) - \Delta_0(k)|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada Rouché Teoremi uygulanırsa n nin yeterince büyük değerlerinde Γ_n yörüngesinin iç kısmında $\Delta_0(k)$ ve $\Delta_0(k) + (\Delta(k) - \Delta_0(k)) = \Delta(k)$ fonksiyonunun sıfırları aynı sayıdadır. Benzer şekilde Rouché Teoreminden gösterilebilir ki; yeterince büyük n ler için $\left|k - k_n^0\right| < \delta$ çemberlerinin her birinde $\Delta(k)$ fonksiyonunun yalnızca bir sıfırı vardır.

Bu durumda δ yeterince küçük pozitif sayı olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olmak üzere $k_n = k_n^0 + \varepsilon_n$ elde edilir. k_n sayıları, $\Delta(k)$ karakteristik fonksiyonunun kökleri olduğundan,

$$\Delta(k_n) = \Delta_0\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right) + \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi,t) \sin\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right) t\,dt = 0$$

ve diğer taraftan $\Delta_0\left(k_n^0\right) = 0$ olduğundan,

$$\Delta_0(k_n) = \Delta_0\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right) = \Delta_0\left(k_n^0\right) + \dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right)\varepsilon_n + \ddot{\Delta}_0\left(k_n^0\right)\frac{\varepsilon_n^2}{2!} + \ldots = \dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right) + O(\varepsilon_n)$$

$$\Delta_0\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right) = \dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) = \left(\dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right) + o(1)\right)\varepsilon_n$$

olur. $\Delta_0\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)$ ifadesini $\Delta(k_n)$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\left(\dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right) + o(1)\right)\varepsilon_n + \int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi,t) \sin\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right) t\,dt = 0$$

bulunur. $\Delta_0(k)$ sinüs tipli fonksiyon (Levin, 1971) olduğundan , her n doğal sayısı için N_1 ve N_2 sabitleri vardır öyle ki;

$$0 < N_1 < \left|\dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right)\right| < N_2 < \infty \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

eşitsizliği sağlanır. Zhdanovich (1960) ve Krein'in (1948) çalışmalarından yararlanılırsa, $\sup\limits_n |h_n| < M$ olmak üzere $k_n^0 = n + h_n$ sağlanır.

Teorem (Zhdanovich, 1960):

$$e^{\alpha_0\lambda} + a_1 e^{\alpha_1\lambda} + \ldots + a_{p-1} e^{\alpha_{p-1}\lambda} + a_p = 0$$

α_s ler $(s = 0, 1, \ldots, p-1)$ gerçel sayılar, $\alpha_{s-1} > \alpha_s > 0$, a_s ler $(s = \overline{1,p})$ kompleks ve $a_p \neq 0$ ise bu denklemin kökleri $\lambda_n = \frac{2\pi n i}{\alpha_0} + \kappa(n)$, $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ dir. $\kappa(n)$ ise sınırlı kompleks değerli fonksiyon, $\sup\limits_n |\kappa(n)| < +\infty$ dur.

Bu teoreme göre,

$$\Delta_0(k) = \left(\alpha^+ + \beta\right)\sin k\pi + \left(\alpha^- - \beta\right)\sin k(2d - \pi) = 0$$

denklemi

$$\frac{(\alpha^+ + \beta)}{2i}e^{ik\pi} - \frac{(\alpha^+ + \beta)}{2i}e^{-ik\pi} + \frac{(\alpha^- - \beta)}{2i}e^{ik(2d-\pi)} - \frac{(\alpha^- - \beta)}{2i}e^{-ik(2d-\pi)} = 0$$

$$e^{2ik\pi} + \frac{(\alpha^- - \beta)}{(\alpha^+ + \beta)}e^{2ikd} - \frac{(\alpha^- - \beta)}{(\alpha^+ + \beta)}e^{2ik(\pi-d)} - 1 = 0$$

şeklinde yazılır ve

$$\alpha_0 = 2\pi,\ \alpha_1 = 2d,\ \alpha_2 = 2(\pi - d), \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2$$

$$a_1 = \frac{(\alpha^- - \beta)}{(\alpha^+ + \beta)},\ a_2 = -\frac{(\alpha^- - \beta)}{(\alpha^+ + \beta)},\ a_3 = -1$$

olmak üzere denklemin kökleri için

$$ik_n^0 = \frac{2\pi ni}{2\pi} + \Omega(n) = ni + \Omega(n)$$

veya

$$k_n^0 = n - i\Omega(n) = n + \Omega_1(n),\ \left(\Omega_1(n) = h_n = -i\Omega(n)\right)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\sup\limits_n |\Omega_1(n)| < M < \infty$ koşulu sağlanır. O halde,

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)}\int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi,t)\sin\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)tdt$$

$$= \frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)}\frac{1}{k_n^0 + \varepsilon_n}\int_0^\pi \tilde{K}_{11}(\pi,t)\,d\left(\cos\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)t\right)$$

$$= \frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)}\frac{1}{k_n^0 + \varepsilon_n}\left[\tilde{K}_{11}(\pi,t)\cos\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)t\left(\Big|_0^{2d-\pi-0} + \Big|_{2d-\pi+0}^{\pi}\right) - \int_0^\pi \tilde{K}'_{11_t}(\pi,t)\cos\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)tdt\right]$$

$$= \frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)}\frac{1}{k_n^0 + \varepsilon_n}\Big[\left(\tilde{K}_{11}(\pi,2d-\pi-0) - \tilde{K}_{11}(\pi,2d-\pi+0)\right)\cos\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)(2d-\pi)$$
$$+\tilde{K}_{11}(\pi,\pi)\cos\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)\pi - \tilde{K}_{11}(\pi,0) - \int_0^\pi \tilde{K}'_{11_t}(\pi,t)\cos\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)tdt\Big]$$

$\tilde{K}_{11}(x,x) = \dfrac{(\alpha^+ + \beta)}{2}u(x)$ ve $\tilde{K}_{11}(x,2d-x+0) - \tilde{K}_{11}(\pi,2d-x-0) = \dfrac{(\alpha^- - \beta)}{2}u(x)$ olduğundan,

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0) + o(1)}\frac{1}{k_n^0 + \varepsilon_n}\left[-\frac{(\alpha^- - \beta)}{2}u(\pi)\cos\left(k_n^0 + \varepsilon_n\right)(2d - \pi)\right.$$

$$+\frac{(\alpha^+ + \beta)}{2}u(\pi)\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)\pi - \tilde K_{11}(\pi,0) - \int_0^\pi \tilde K'_{11_t}(\pi,t)\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)t\,dt\Bigg]$$

$$= \frac{(\alpha^+ + \beta)\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)\pi - (\alpha^- - \beta)\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)(2d-\pi)}{2\dot\Delta_0(k_n^0)\,k_n^0}u(\pi)$$

$$-\frac{1}{\dot\Delta_0(k_n^0)+o(1)}\frac{1}{k_n^0+\varepsilon_n}\left[\int_0^\pi \tilde K'_{11_t}(\pi,t)\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)t\,dt + \tilde K_{11}(\pi,0)\right] \qquad (3.2.1)$$

$d_n = \dfrac{(\alpha^+ + \beta)\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)\pi - (\alpha^- - \beta)\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)(2d-\pi)}{2\dot\Delta_0(k_n^0)\,k_n^0}u(\pi)$ sınırlı bir dizi ve

$$\delta_n = -\frac{1}{\dot\Delta_0(k_n^0)+o(1)}\frac{1}{k_n^0+\varepsilon_n}\left[\int_0^\pi \tilde K'_{11_t}(\pi,t)\cos\left(k_n^0+\varepsilon_n\right)t\,dt + \tilde K_{11}(\pi,0)\right] \in \ell_2$$

elde edilir.

Lemma 3.2.2: L probleminin normalleştirici sayıları için $\alpha_n = \alpha_n^0 + \delta_n$ asimptotik eşitliği geçerlidir. Burada $\delta_n \in \ell_2$ dir.

İspat:

$$\Delta(k) = \Delta_0(k) + \int_0^\pi \tilde K_{11}(\pi,t)\sin kt\,dt$$

$$\dot\Delta(k_n) = \dot\Delta_0(k_n) + \int_0^\pi t\tilde K_{11}(\pi,t)\cos k_n t\,dt$$

Ayrıca

$$\dot\Delta_0(k_n) = \dot\Delta_0\left(k_n^0+\varepsilon_n\right) = \dot\Delta_0\left(k_n^0\right) + \ddot\Delta_0\left(k_n^0\right)\varepsilon_n + \dddot\Delta_0\left(k_n^0\right)\frac{\varepsilon_n^2}{2!} + \ldots = \dot\Delta_0\left(k_n^0\right) + O(\varepsilon_n)$$

ve $\cos k_n t = \cos k_n^0 t + O(\varepsilon_n t)$, $\varepsilon_n \in \ell_2$ yazılabildiğinden,

$$\alpha_n\gamma_n = -\dot\Delta(k_n) = -\dot\Delta_0\left(k_n^0\right) - \int_0^\pi t\tilde K_{11}(\pi,t)\cos k_n^0 t\,dt - O(\varepsilon_n t)\int_0^\pi t\tilde K_{11}(\pi,t)\cos k_n^0 t\,dt + O(\varepsilon_n)$$

bulunur. Burada $\varepsilon_n \in \ell_2$, $\tilde K_{11}(\pi,.) \in L_2(0,\pi)$ ve $k_n^0 = n + h_n$ olduğundan

$$\delta_n = -\int_0^\pi t\tilde K_{11}(\pi,t)\cos k_n^0 t\,dt - O(\varepsilon_n t)\int_0^\pi t\tilde K_{11}(\pi,t)\cos k_n^0 t\,dt + O(\varepsilon_n) \in \ell_2$$

olmak üzere $\alpha_n\gamma_n = \alpha_n^0\gamma_n^0 + \delta_n$

3.3. Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonunun Özellikleri

$\Phi(x,k) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x,k) \\ \Phi_2(x,k) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu (2.1.4) denklem sisteminin $\Phi_1(0,k) = 1$ ve $\Phi_1(\pi,k) = 0$ koşullarını ve (2.1.6) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\Phi(x,k)$ fonksiyonuna L probleminin Weyl çözümü denir.

$$\psi(x,k) = \begin{pmatrix} \psi_1(x,k) \\ \psi_2(x,k) \end{pmatrix}, \varphi(x,k) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,k) \\ \varphi_2(x,k) \end{pmatrix} \text{ ve } C(x,k) = \begin{pmatrix} C_1(x,k) \\ C_2(x,k) \end{pmatrix}$$

fonksiyonları (2.1.4) denkleminin

$$\psi(\pi,k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi(0,k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ve } C(0,k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını ve (2.1.6) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $\psi(x,k)$ ve $C(x,k)$ fonksiyonlarının k ya göre tam olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\psi(x,k) = c_1(k)\varphi(x,k) + c_2(k)C(x,k)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\langle \psi(x,k), \varphi(x,k) \rangle = \psi_1(x,k)\varphi_2(x,k) - \psi_2(x,k)\varphi_1(x,k)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \psi(x,k), \varphi(x,k) \rangle &= c_1(k)\langle \varphi(x,k), \varphi(x,k) \rangle + c_2(k)\langle C(x,k), \varphi(x,k) \rangle \\ &= c_2(k)\langle C(x,k), \varphi(x,k) \rangle = c_2(k)\left[C_1(x,k)\varphi_2(x,k) - C_2(x,k)\varphi_1(x,k)\right] \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Başlangıç koşulları uygulanırsa,

$$\langle \psi(x,k), \varphi(x,k) \rangle(0) = \psi_1(0,k)\varphi_2(0,k) - \psi_2(0,k)\varphi_1(0,k) = \psi_1(0,k) = \Delta(k)$$

ve

$$\langle \psi(x,k), \varphi(x,k) \rangle(0) = c_2(k)\left[C_1(0,k)\varphi_2(0,k) - C_2(0,k)\varphi_1(0,k)\right] = c_2(k)$$

eşitliklerinden

$$c_2(k) = \psi_1(0,k) = \Delta(k)$$

olarak bulunur. Aynı şekilde,

$$\langle \psi(x,k), C(x,k) \rangle = \psi_1(x,k)C_2(x,k) - \psi_2(x,k)C_1(x,k)$$

ve

$$\langle \psi(x,k), C(x,k) \rangle = c_1(k)\langle \varphi(x,k), C(x,k) \rangle + c_2(k)\langle C(x,k), C(x,k) \rangle$$

$$= c_1(k)\langle\varphi(x,k), C(x,k)\rangle = c_1(k)\left[\varphi_1(x,k)C_2(x,k) - \varphi_2(x,k)C_1(x,k)\right]$$

eşitlikleri elde edilir. Başlangıç koşulları uygulanırsa,

$\langle\psi(x,k), C(x,k)\rangle(0) = \psi_1(0,k)C_2(0,k) - \psi_2(0,k)C_1(0,k) = -\psi_2(0,k)$

ve

$\langle\psi(x,k), C(x,k)\rangle(0) = c_1(k)\left[\varphi_1(0,k)C_2(0,k) - \varphi_2(0,k)C_1(0,k)\right] = -c_1(k)$

eşitliklerinden

$$c_1(k) = \psi_2(0,k),$$

$$\psi(x,k) = \psi_2(0,k)\varphi(x,k) + \Delta(k)C(x,k),$$

$$\frac{\psi(x,k)}{\Delta(k)} = \frac{\psi_2(0,k)}{\Delta(k)}\varphi(x,k) + C(x,k).$$

Diğer taraftan

$$\Psi(x,k) = A(k)\varphi(x,k) + B(k)C(x,k)$$

şeklinde Weyl çözümü oluşturulursa,

$$\begin{cases} \Psi_1(x,k) = A(k)\varphi_1(x,k) + B(k)C_1(x,k) \\ \Psi_2(x,k) = A(k)\varphi_2(x,k) + B(k)C_2(x,k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi_1(0,k) = A(k)\varphi_1(0,k) + B(k)C_1(0,k) = B(k) \\ \Psi_2(0,k) = A(k)\varphi_2(0,k) + B(k)C_2(0,k) = A(k) \end{cases}$$

ve $\Psi_1(0,k) = B(k) = 1$, $\Psi_2(0,k) = A(k)$ olduğundan,

$$\Psi(x,k) = \Psi_2(0,k)\varphi(x,k) + C(x,k)$$

elde edilir. $C(x,k)$ ve $\varphi(x,k)$ (2.1.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü ve bunların lineer birleşimide (2.1.1) denkleminin çözümü olacağından ve bu çözümün tekliğinden,

$$\begin{cases} \Psi(x,k) = \Psi_2(0,k)\varphi(x,k) + C(x,k) \\ \dfrac{\psi(x,k)}{\Delta(k)} = \dfrac{\psi_2(0,k)}{\Delta(k)}\varphi(x,k) + C(x,k) \end{cases} \tag{3.3.1}$$

aynı çözümler olur. Buradan da $\Psi(x,k)$ Weyl çözümü ve $\Psi_2(0,k) = M(k)$ Weyl fonksiyonları

$$\Psi(x,k) = \frac{\psi(x,k)}{\Delta(k)} \quad \text{ve} \quad \Psi_2(0,k) = \frac{\psi_2(0,k)}{\Delta(k)} = M(k)$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\psi(x,k) = \Delta(k)\Psi(x,k) = \psi_2(0,k)\varphi(x,k) + \Delta(k)C(x,k)$$

$$\begin{aligned}\langle\Phi(x,k),\varphi(x,k)\rangle &= \varphi_1(x,k)\,\Phi_2(x,k)-\varphi_2(x,k)\,\Phi_1(x,k)\\ &= \varphi_1(x,k)\left[\Phi_2(0,k)\,\varphi_2(x,k)+C_2(x,k)\right]\\ &\quad -\varphi_2(x,k)\left[\Phi_2(0,k)\,\varphi_1(x,k)+C_1(x,k)\right]\\ &= \varphi_1(x,k)\,C_2(x,k)-\varphi_2(x,k)\,C_1(x,k)\\ &= \langle C(x,k),\varphi(x,k)\rangle = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\Psi(x,k),\varphi(x,k)\rangle &= \varphi_1(x,k)\,\Psi_2(x,k)-\varphi_2(x,k)\,\Psi_1(x,k)\\ &= \varphi_1(x,k)\left[\Psi_2(0,k)\,\varphi_2(x,k)+\Delta(k)\,C_2(x,k)\right]\\ &\quad -\varphi_2(x,k)\left[\Psi_2(0,k)\,\varphi_1(x,k)+\Delta(k)\,C_1(x,k)\right]\\ &= \Delta(k)\left[\varphi_1(x,k)\,C_2(x,k)-\varphi_2(x,k)\,C_1(x,k)\right]\\ &= \Delta(k)\,\langle C(x,k),\varphi(x,k)\rangle = \Delta(k)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem.3.3.1:

$$M(k)=\frac{1}{\alpha_0(k-k_0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n(k-k_n)}+\frac{1}{\alpha_n' k_n'}\right\} \tag{3.3.2}$$

gösterilimi doğrudur.

İspat: İlkönce $\Psi(x,k)$ çözümü için $\varphi(x,k)$ çözümüne benzer bir gösterilim elde edilsin. $\begin{cases} y_1'-y_2=0\\ y_2'+k^2y_1=0\end{cases}$ lineer homojen diferansiyel denklem sisteminin $\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}(\pi)=\begin{pmatrix}1\\ ik\end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix}1\\ ik\end{pmatrix}e^{ik(x-\pi)}$ dir. Lineer homojen sisteminin bir diğer çözümü de $\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix}1\\ -ik\end{pmatrix}e^{-ik(x-\pi)}$ dir. O halde lineer homojen sisteminin genel çözümü,

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix} c_1e^{ik(x-\pi)}+c_2e^{-ik(x-\pi)}\\ ikc_1e^{ik(x-\pi)}-ikc_2e^{-ik(x-\pi)}\end{pmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi $\begin{cases} y_1'-y_2=u(x)\,y_1\\ y_2'+k^2y_1=-u(x)\,y-u^2(x)\,y_1+q(x)\,y_1\end{cases}$ homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi metodu uygulanırsa:

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix} c_1(x)\,e^{ik(x-\pi)}+c_2(x)\,e^{-ik(x-\pi)}\\ ikc_1(x)\,e^{ik(x-\pi)}-ikc_2(x)\,e^{-ik(x-\pi)}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} c_1'(x)e^{ik(x-\pi)} + c_2'(x)e^{-ik(x-\pi)} + ikc_1(x)e^{ik(x-\pi)} - ikc_2(x)e^{-ik(x-\pi)} \\ ikc_1'(x)e^{ik(x-\pi)} - ikc_2'(x)e^{-ik(x-\pi)} - k^2c_1(x)e^{ik(x-\pi)} \\ - k^2c_2(x)e^{-ik(x-\pi)} \end{pmatrix}$$

olur. Bunlar $\begin{cases} y_1' - y_2 = u(x)y_1 \\ y_2' + k^2y_1 = -u(x)y - u^2(x)y_1 + q(x)y_1 \end{cases}$ sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} c_1'(x)e^{ik(x-\pi)} + c_2'(x)e^{-ik(x-\pi)} = u(x)y_1 \\ ikc_1'(x)e^{ik(x-\pi)} - ikc_2'(x)e^{-ik(x-\pi)} = -u(x)y - u^2(x)y_1 + q(x)y_1 \end{pmatrix}$$ ve

$\{c_1'(x), c_2'(x)\}$ bilinmeyenleri hesaplanırsa,

$$\begin{cases} c_1(x) = \frac{1}{2}\int_x^\pi \left[u(t)y_1 - \frac{1}{ik}\left(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1\right)\right]e^{-ikt}dt + c_1^0 \\ c_2(x) = \frac{1}{2}\int_x^\pi \left[u(t)y_1 + \frac{1}{ik}\left(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1\right)\right]e^{ikt}dt + c_2^0 \end{cases}$$ elde edilir.

Buradan da

$$\begin{cases} y_1(x,k) = c_1^0e^{ik(x-\pi)} + c_2^0e^{-ik(x-\pi)} \\ \qquad + \frac{1}{2}\int_x^\pi \left[u(t)y_1 - \frac{1}{ik}\left(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1\right)\right]e^{ik(x-t)}dt \\ \qquad + \frac{1}{2}\int_x^\pi \left[u(t)y_1 + \frac{1}{ik}\left(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1\right)\right]e^{-ik(x-t)}dt \\ y_2(x,k) = ikc_1^0e^{ik(x-\pi)} - ikc_2^0e^{-ik(x-\pi)} \\ \qquad + \frac{ik}{2}\int_x^\pi \left[u(t)y_1 - \frac{1}{ik}\left(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1\right)\right]e^{ik(x-t)}dt \\ \qquad - \frac{ik}{2}\int_x^\pi \left[u(t)y_1 + \frac{1}{ik}\left(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1\right)\right]e^{-ik(x-t)}dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x,k) = c_1^0e^{ik(x-\pi)} + c_2^0e^{-ik(x-\pi)} \\ \qquad + \int_x^\pi \left[u(t)y_1\cos k(x-t) - \frac{1}{k}\left(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1\right)\sin k(x-t)\right]dt \\ y_2(x,k) = ikc_1^0e^{ikx} - ikc_2^0e^{-ikx} \\ \qquad + \int_x^\pi \left\{-ku(t)y_1\sin k(x-t) - \left(u(t)y_2 + u^2(t)y_1 - q(t)y_1\right)\cos k(x-t)\right\}dt \end{cases}$$

olur ve (2.1.4) sisteminin $y_1(\pi) = 1, y_2(\pi) = ik$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$x > d$ iken

$$\begin{cases} y_1(x,k) = e^{ik(x-\pi)} \\ \quad + \displaystyle\int_x^{\pi} \left\{ u(t)\, y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(x-t) \right\} dt \\ y_2(x,k) = ike^{ik(x-\pi)} \\ \quad - \displaystyle\int_x^{\pi} \left[ku(t)\, y_1 \sin k(x-t) + \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \cos k(x-t) \right] dt \end{cases}$$

olarak bulunur. $x < d$ iken çözüm

$$\begin{cases} y_1(x,k) = A(k)\, e^{ik(x-\pi)} + B(k)\, e^{-ik(x-\pi)} + \displaystyle\int_x^{\pi} u(t)\, y_1 \cos k(x-t)\, dt \\ \qquad - \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_x^{\pi} \left[\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(x-t) \right] dt \\ y_2(x,k) = ikA(k)\, e^{ik(x-\pi)} - ikB(k)\, e^{-ik(x-\pi)} - \displaystyle\int_x^{\pi} ku(t)\, y_1 \sin k(x-t)\, dt \\ \qquad - \displaystyle\int_x^{\pi} \left[\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \cos k(x-t) \right] dt \end{cases}$$

şeklinde aransın. (2.1.6) süreksizlik koşulları uygulanarak elde edilen $A(k)$ ve $B(k)$ fonksiyonları denklemde yerine yazılırsa,

$x < d$ iken çözüm

$$
\begin{cases}
y_1(x,k) = \alpha^+ e^{ik(x-\pi)} - \alpha^- e^{ik(2d-x-\pi)} - \beta\left(e^{ik(x-\pi)} - e^{ik(2d-x-\pi)}\right) \\
\quad + \int_d^\pi u(t)\, y_1 \left[\alpha^+ \cos k(x-t) - \alpha^- \cos k(x-2d+t)\right] dt \\
\quad - i\beta \int_d^\pi u(t)\, y_1 \left[(\sin k(x-t) + \sin k(x-2d+t))\right] dt \\
\quad - \frac{\alpha^+}{k} \int_d^\pi \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(x-t)\, dt \\
\quad + \frac{\alpha^-}{k} \int_d^\pi \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(x-2d+t)\, dt \\
\quad + \frac{i\beta}{k} \int_d^\pi \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \cos k(x-t)\, dt \\
\quad - \frac{i\beta}{k} \int_d^\pi \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \cos k(x-2d+t)\, dt \\
\quad + \int_x^d \left[u(t)\, y_1 \cos k(x-t) - \frac{1}{k}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(x-t)\right] dt, \\
y_2(x,k) = ik\left(\alpha^+ e^{ik(x-\pi)} + \alpha^- e^{ik(2d-x-\pi)}\right) - ik\beta\left(e^{ik(x-\pi)} + e^{ik(2d-x-\pi)}\right) \\
\quad + \int_d^\pi u(t)\, y_1 \left[-k\alpha^+ \sin k(x-t) + k\alpha^- \sin k(x-2d+t)\right] dt \\
\quad - ik\beta \int_d^\pi u(t)\, y_1 \left[(\cos k(x-t) - \cos k(x-2d+t))\right] dt \\
\quad - \alpha^+ \int_d^\pi \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \cos k(x-t)\, dt \\
\quad + \alpha^- \int_d^\pi \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \cos k(x-2d+t)\, dt \\
\quad - i\beta \int_d^\pi \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(x-t) + dt \\
\quad - i\beta \int_d^\pi \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \sin k(x-2d+t)\, dt \\
\quad - \int_x^d \left[k u(t)\, y_1 \sin k(x-t) + \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) \cos k(x-t)\right] dt
\end{cases}
$$

şeklinde bulunur. $\psi(x,k) = \dfrac{y(x,k) - \overline{y(x,k)}}{2i}$ olarak alınırsa $\varphi(x,k)$ gösterilimine benzer olarak

$x > d$ iken

$$\begin{cases} \psi_1(x,k) = -\sin k(\pi - x) + \int\limits_{\pi - x}^{\pi + x} N_{11}(x,t)\sin kt\,dt \\ \psi_2(x,k) = k\cos k(\pi - x) - b(x)\sin k(\pi - x) + \int\limits_{\pi - x}^{\pi + x} N_{21}(x,t)\sin kt\,dt \\ \qquad + \int\limits_{\pi - x}^{\pi + x} kN_{22}(x,t)\cos kt\,dt, \end{cases}$$

$x < d$ iken

$$\begin{cases} \psi_1(x,k) = -\alpha^{+}\sin k(\pi - x) + \alpha^{-}\sin k(x + \pi - 2d) \\ \qquad +\beta\left[\sin k(\pi - x) - \sin k(x + \pi - 2d)\right] \\ \qquad + \int\limits_{\pi - x}^{\pi + x} N_{11}(x,t)\sin kt\,dt \\ \psi_2(x,k) = k\alpha^{+}\cos k(\pi - x) + k\alpha^{-}\cos k(x + \pi - 2d) \\ \qquad - k\beta\left[\cos k(\pi - x) - \cos k(x + \pi - 2d)\right] \\ \qquad + b(x)\left[-\alpha^{+}\sin k(\pi - x) + \alpha^{-}\sin k(x + \pi - 2d)\right] \\ \qquad + \beta b(x)\left[\sin k(\pi - x) - \sin k(x + \pi - 2d)\right] \\ \qquad + \int\limits_{\pi - x}^{\pi + x} N_{21}(x,t)\sin kt\,dt + \int\limits_{\pi - x}^{\pi + x} kN_{22}(x,t)\cos kt\,dt \end{cases}$$

gösterilimi vardır ve buradan da $\tilde{N}_{ij}(x,t) = N_{ij}(x,t) - N_{ij}(x,-t)$, $i,j = 1,2$ olmak üzere

$x > d$ iken

$$\begin{cases} \psi_1(x,k) = -\sin k(\pi - x) + \int\limits_{0}^{\pi + x} \tilde{N}_{11}(x,t)\sin kt\,dt \\ \psi_2(x,k) = k\cos k(\pi - x) - b(x)\sin k(\pi - x) + \int\limits_{0}^{\pi + x} \tilde{N}_{21}(x,t)\sin kt\,dt \\ \qquad + \int\limits_{0}^{\pi + x} k\tilde{N}_{22}(x,t)\cos kt\,dt, \end{cases}$$

$x < d$ iken

$$\begin{cases} \psi_1(x,k) = -\alpha^+ \sin k(\pi - x) + \alpha^- \sin k(x+\pi-2d) \\ \qquad +\beta\left[\sin k(\pi-x) - \sin k(x+\pi-2d)\right] \\ \qquad + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin kt\,dt \\ \psi_2(x,k) = k\alpha^+ \cos k(\pi-x) + k\alpha^- \cos k(x+\pi-2d) \\ \qquad - k\beta\left[\cos k(\pi-x) - \cos k(x+\pi-2d)\right] \\ \qquad + b(x)\left[-\alpha^+ \sin k(\pi-x) + \alpha^- \sin k(x+\pi-2d)\right] \\ \qquad + \beta b(x)\left[\sin k(\pi-x) - \sin k(x+\pi-2d)\right] \\ \qquad + \int_0^x \tilde{K}_{21}(x,t)\sin kt\,dt + \int_0^x k\tilde{K}_{22}(x,t)\cos kt\,dt \end{cases}$$

elde edilir. $\tilde{K}_{ij}(x,t), i,j = 1,2$ fonksiyonları her sabitlenmiş $x \in [0,\pi]$ için t değişkenine göre $L_2(0,\pi)$ uzayına aittir. $C = 0$ ve $q(x) \equiv 0$ durumuna karşılık gelen $\psi_i(x,k), i = 1,2$ fonksiyonları $\psi_{0i}(x,k), i = 1,2$ olarak gösterilirse,

$x > d$ iken

$$\begin{cases} \psi_1(x,k) = \psi_{01}(x,k) + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin kt\,dt \\ \psi_2(x,k) = \psi_{02}(x,k) - b(x)\sin k(\pi-x) + \int_0^x \tilde{K}_{21}(x,t)\sin kt\,dt \\ \qquad + \int_0^x k\tilde{K}_{22}(x,t)\cos kt\,dt, \end{cases}$$

$x < d$ iken

$$\begin{cases} \psi_1(x,k) = \psi_{01}(x,k) + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin kt\,dt \\ \psi_2(x,k) = \psi_{02}(x,k) + b(x)\left[-\alpha^+ \sin k(\pi-x) + \alpha^- \sin k(x+\pi-2d)\right] \\ \qquad + \beta b(x)\left[\sin k(\pi-x) - \sin k(x+\pi-2d)\right] \\ \qquad + \int_0^x \tilde{K}_{21}(x,t)\sin kt\,dt + \int_0^x k\tilde{K}_{22}(x,t)\cos kt\,dt \end{cases}$$

elde edilir.

$f_1 = \int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin kt\,dt$ ve

$f_2 = b(x)\left[-\alpha^+ \sin k(\pi-x) + \alpha^- \sin k(x+\pi-2d) + \beta\left[\sin k(\pi-x) - \sin k(x+\pi-2d)\right]\right]$

$$+\int_0^x \tilde{N}_{21}(x,t)\sin kt\,dt + \int_0^x k\tilde{N}_{22}(x,t)\cos kt\,dt$$

olarak alınırsa,

$$\begin{cases} \psi_1(x,k) = \psi_{01}(x,k) + f_1 \\ \psi_2(x,k) = \psi_{02}(x,k) + f_2 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Son alınan eşitlikler ve $\Delta(k) = \psi_1(0,k)$, $\Delta_0(k) = \psi_{01}(0,k)$ olduğu kullanılırsa,

$$M(k) - M_0(k) = \frac{\psi_2(0,k)}{\psi_1(0,k)} - \frac{\psi_{02}(0,k)}{\psi_{01}(0,k)} = \frac{\psi_{02}(x,k)+f_2}{\psi_{01}(x,k)+f_1} - \frac{\psi_{02}(0,k)}{\psi_{01}(0,k)}$$

$$= \frac{\psi_{01}(x,k)\psi_{02}(0,k) + f_2\psi_{01}(0,k) - \psi_{01}(x,k)\psi_{02}(0,k) - f_1\psi_{02}(0,k)}{(\psi_{01}(0,k)+f_1)\,\psi_{01}(0,k)}$$

$$= \frac{f_2}{\psi_{01}(0,k)+f_1} - \frac{f_1}{\psi_{01}(0,k)+f_1}M_0(k)$$

$$= \frac{f_2}{\Delta(k)} - \frac{f_1}{\Delta(k)}M_0(k)$$

elde edilir. Burada $k \in G_\delta$ için $\lim\limits_{|k|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im} k\pi|}|f_i(k)| = 0$ ve $\Delta(k) > C_\delta e^{|\operatorname{Im} k|\pi}$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\limsup_{|k|\to\infty,\ k\in G_\delta} |M(k) - M_0(k)| = 0 \qquad (3.3.3)$$

alınır. Diğer taraftan $\varphi(x,k_n)$ $\left(\varphi_0\left(x,k_n^0\right)\right)$ ve $\psi(x,k_n)$ $\left(\psi_0\left(x,k_n^0\right)\right)$ fonksiyonları $L(L_0)$ probleminin özfonksiyonlarıdır. O halde γ_n $\left(\gamma_n^0\right)$ sabitleri vardır öyle ki,

$$\psi(x,k_n) = \gamma_n\varphi(x,k_n),\ \psi_0\left(x,k_n^0\right) = \gamma_n^0\varphi_0\left(x,k_n^0\right)$$

eşitliği sağlanır. O halde $\psi_2(0,k_n) = \gamma_n\varphi_2(0,k_n)$ ve $\psi_2(\pi,k_n) = \gamma_n\varphi_2(\pi,k_n)$ olduğundan

$$\gamma_n = \psi_2(0,k_n) = \frac{1}{\varphi_2(\pi,k_n)} \text{ ve } \gamma_n^0 = \psi_{02}\left(0,k_n^0\right) = \frac{1}{\varphi_{02}(\pi,k_n^0)}$$

$$\alpha_n = -\dot{\Delta}(k_n)\varphi_2(\pi,k_n)\ ,\ \alpha_n^0 = -\dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right)\varphi_{02}\left(\pi,k_n^0\right)$$

eşitlikleri elde edilir. $\psi_2(0,k)$ ve $\Delta(k)$ fonksiyonları $k = k_n$ de analitik ve $\psi_2(0,k_n) \neq 0$, $\Delta(k_n) = 0$, $\dot{\Delta}(k_n) \neq 0$ olduğundan $M(k)$ ve $M_0(k)$, $k = k_n$ de basit kutup noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$\operatorname*{Res}_{k=k_n} M(k) = \frac{\psi_2(0,k_n)}{\dot{\Delta}(k_n)} = \frac{1}{\dot{\Delta}(k_n)\varphi_2(\pi,k_n)} = -\frac{1}{\alpha_n} \qquad (3.3.4)$$

$$\operatorname*{Res}_{k=k_n^0} M_0(k) = \frac{\psi_{02}\left(0,k_n^0\right)}{\dot{\Delta}(k_n^0)} = \frac{1}{\dot{\Delta}_0(k_n^0)\varphi_{02}(\pi,k_n^0)} = -\frac{1}{\alpha_n^0}$$

elde edilir.

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{M(\mu) - M_0(\mu)}{k-\mu}d\mu\ ,\ k \in int\,\Gamma_n$$

eğrisel integrali ele alındığında, $\limsup |M(k) - M_0(k)| = 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = 0$ bulunur. $M(\mu)$ fonksiyonunun Γ_n deki aykırılıkları sırasıyla $k_0, k_1,..., k_n$ şeklinde sıralanmış olup kutup yerleri ve buralardaki rezidüleri sırasıyla $\frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\alpha_1}, ..., \frac{1}{\alpha_n},...$ dir. Γ_n hiçbir kutup yerinden geçmeyen, üzerinde $|M(\mu)| < M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği R_n yarıçaplı çember ve $n \to \infty$ iken $R_n \to \infty$ olur. $M(\mu)$ fonksiyonunun bir kutbu olmadığından $\frac{M(\mu)}{\mu - k}$ fonksiyonu, $\mu = k_n$, $n = 0, 1, , ...$ ve k noktalarında kutup yerlerine sahiptir. Bu durumda (3.3.4)' den

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{M(\mu)}{\mu - k}, k_n\right) &= \lim_{\mu\to k_n}(\mu - k_n)\frac{M(\mu)}{\mu - k} = -\frac{1}{\alpha_n(k-k_n)}\\
\operatorname{Res}\left(\frac{M(\mu)}{\mu - k}, k\right) &= \lim_{\mu\to k}(\mu - k)\frac{M(\mu)}{\mu - k} = M(k)
\end{aligned}$$

olur. Rezidü teoreminden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{M(\mu)}{\mu - k}d\mu &= M(k) - \sum_{k_n \in int\,\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n(k-k_n)}\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{M_0(\mu)}{\mu - k}d\mu &= M_0(k) - \sum_{k_n^0 \in int\,\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n^0(k_n^0-k)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{M(\mu) - M_0(\mu)}{k-\mu}d\mu = -M(k)+M_0(k)+\sum_{k_n \in int\,\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n(k-k_n)} - \sum_{k_n^0 \in int\,\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n^0(k_n^0-k)}$$

$n \to \infty$ için $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= -M(k) + M_0(k) + \sum_{k_n \in int\,\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n(k-k_n)} - \sum_{k_n^0 \in int\,\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n^0(k_n^0-k)}\\
M(k) &= M_0(k) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n(k-k_n)} - \frac{1}{\alpha_n^0(k-k_n^0)}\right\} \qquad (3.3.5)
\end{aligned}$$

alınır. Mittag-Leffler açılımına göre,

$$M_0(k) = \frac{1}{\alpha_0^0 k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\left\{\frac{1}{k-k_n^0} + \frac{1}{k_n^0}\right\}$$

olur. $M(k)$ ve $M_0(k)$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$M(k) = \frac{1}{\alpha_0^0 k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\left\{\frac{1}{k-k_n^0} + \frac{1}{k_n^0}\right\} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n(k-k_n)} - \frac{1}{\alpha_n^0(k-k_n^0)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha_0' k} + \frac{1}{\alpha_0 (k - k_0)} - \frac{1}{\alpha_0' k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n'} \left(\frac{1}{k - k_n'} + \frac{1}{k_n'} \right) + \left(\frac{1}{\alpha_n (k - k_n)} - \frac{1}{\alpha_n' (k - k_n')} \right) \right\}$$

buradan da

$$M(k) = \frac{1}{\alpha_0 (k - k_0)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n (k - k_n)} + \frac{1}{\alpha_n' k_n'} \right\}$$

eşitliği elde edilir.

3.4. Ters Problemler

Bu bölümde L probleminin belirlenmesi için Weyl fonksiyonu ve spektral karakteristiklere göre ters problemin çözümü verilmiştir.

L problemi ile beraber $\tilde{q}(x)$ potansiyeline sahip $\tilde{L}$ problemi ele alınsın ve herhangi α sembolü L problemine ait ise $\tilde{\alpha}$ sembolünün de $\tilde{L}$ problemine ait olduğu kabul edilsin.

Teorem 3.4.1: Eğer $M(k) = \tilde{M}(k)$ ise $L = \tilde{L}$ dir. Dolayısıyla Weyl fonksiyonu L sınır-değer problemini tek olarak belirtmektedir.

Ispat: $P(x,k) = [P_{jk}(x,k)]_{j,k=1,2}$ matrisi ele alınsın.

$$P(x,k)\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix}$$ eşitliği sağlansın.

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x,k) & P_{12}(x,k) \\ P_{21}(x,k) & P_{22}(x,k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix}$$

eşitliğin her iki yanı $\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & -\tilde{\Phi}_1 \\ -\tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}$ matrisi ile çarpılırsa;

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x,k) & P_{12}(x,k) \\ P_{21}(x,k) & P_{22}(x,k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & -\tilde{\Phi}_1 \\ -\tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} P_{11}(x,k) = \varphi_1(x,k)\tilde{\Phi}_2(x,k) - \Phi_1(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k) \\ P_{12}(x,k) = \Phi_1(x,k)\tilde{\varphi}_1(x,k) - \varphi_1(x,k)\tilde{\Phi}_1(x,k) \\ P_{21}(x,k) = \varphi_2(x,k)\tilde{\Phi}_2(x,k) - \Phi_2(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k) \\ P_{22}(x,k) = \Phi_2(x,k)\tilde{\varphi}_1(x,k) - \varphi_2(x,k)\tilde{\Phi}_1(x,k) \end{cases} \tag{3.4.1}$$

buradan da

$$\begin{cases} \varphi_1(x,k) = P_{11}(x,k)\tilde{\varphi}_1(x,k) + P_{12}(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k) \\ \varphi_2(x,k) = P_{21}(x,k)\tilde{\varphi}_1(x,k) + P_{22}(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k) \\ \Phi_1(x,k) = P_{11}(x,k)\tilde{\Phi}_1(x,k) + P_{12}(x,k)\tilde{\Phi}_2(x,k) \\ \Phi_2(x,k) = P_{21}(x,k)\tilde{\Phi}_1(x,k) + P_{22}(x,k)\tilde{\Phi}_2(x,k) \end{cases} \tag{3.4.2}$$

olduğu alınır. (3.4.1) ve $\Phi(x,k) = \dfrac{\Psi(x,k)}{\Delta(k)}$ ifadelerinden faydalanılırsa

$$\Phi_1(x,k) = \frac{\Psi_1(x,k)}{\Delta(k)}, \Phi_2(x,k) = \frac{\Psi_2(x,k)}{\Delta(k)}$$

yazılabilir. $\langle \psi(x,k), \varphi(x,k)\rangle = \Delta(k)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
P_{11}(x,k) &= \frac{1}{\Delta(k)}\left[\varphi_1(x,k)\tilde{\psi}_2(x,k) - \psi_1(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k)\right] \\
&= 1+\frac{1}{\Delta(k)}\left[\varphi_1(x,k)\left(\tilde{\psi}_2(x,k) - \psi_2(x,k)\right) - \psi_1(x,k)\left(\tilde{\varphi}_2(x,k) - \varphi_2(x,k)\right)\right] \\
&= 1+\frac{1}{\Delta(k)}\left[\psi_1(x,k)\left(\tilde{\varphi}_2(x,k) - \varphi_2(x,k)\right) - \varphi_1(x,k)\left(\tilde{\psi}_2(x,k) - \psi_2(x,k)\right)\right], \\
P_{12}(x,k) &= \frac{1}{\Delta(k)}\left[\varphi_1(x,k)\tilde{\psi}_1(x,k) - \psi_1(x,k)\tilde{\varphi}_1(x,k)\right], \\
P_{21}(x,k) &= \frac{1}{\Delta(k)}\left[\psi_2(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k) - \varphi_1(x,k)\tilde{\psi}_2(x,k)\right], \\
P_{22}(x,k) &= \frac{1}{\Delta(k)}\left[\varphi_2(x,k)\tilde{\psi}_1(x,k) - \psi_2(x,k)\tilde{\varphi}_1(x,k)\right] \\
&= 1+\frac{1}{\Delta(k)}\left[\varphi_2(x,k)\left(\tilde{\psi}_1(x,k) - \tilde{\psi}_2(x,k)\right) - \psi_2(x,k)\left(\tilde{\varphi}_1(x,k) - \tilde{\varphi}_2(x,k)\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $k \in G_\delta$ için $|\Delta(k)| > C_\delta e^{|\mathrm{Im}\, k|\pi}$ olduğundan Lebesgue lemmasından,

$$\begin{cases}
\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k\in G_\delta}} \max\limits_{0\le x\le\pi} |P_{11}(x,k) - 1| = \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k\in G_\delta}} \max\limits_{0\le x\le\pi} |P_{22}(x,k) - 1| \\
= \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k\in G_\delta}} \max\limits_{0\le x\le\pi} |P_{12}(x,k)| = \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k\in G_\delta}} \max\limits_{0\le x\le\pi} |P_{21}(x,k)| = 0
\end{cases} \tag{3.4.3}$$

yazılır. (3.3.1) ve (3.4.1) den,

$$\begin{aligned}
P_{11}(x,k) &= \varphi_1(x,k)\tilde{\Phi}_2(x,k) - C_1(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k) + \left(\tilde{M}(k) - M(k)\right)\varphi_1(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k), \\
P_{12}(x,k) &= \tilde{\varphi}_1(x,k)\tilde{\Phi}_2(x,k) - \tilde{\Phi}_1(x,k)\varphi_1(x,k) + \left(M(k) - \tilde{M}(k)\right)\varphi_1(x,k)\tilde{\varphi}_1(x,k), \\
P_{21}(x,k) &= \varphi_2(x,k)\tilde{\Phi}_2(x,k) - C_2(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k) + \left(\tilde{M}(k) - M(k)\right)\varphi_2(x,k)\tilde{\varphi}_2(x,k), \\
P_{22}(x,k) &= \tilde{\varphi}_1(x,k)C_2(x,k) - \tilde{\Phi}_1(x,k)\varphi_2(x,k) + \left(M(k) - \tilde{M}(k)\right)\varphi_2(x,k)\tilde{\varphi}_1(x,k)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer $M(k) = \tilde{M}(k)$ ise her sabitlenmiş x için $P_{jk}(x,k)$ fonksiyonları k ya göre tamdırlar. Ayrıca (3.4.3) den yararlanılırsa,

$$P_{11}(x,k) \equiv 1, P_{12}(x,k) \equiv 0, P_{21}(x,k) \equiv 0, P_{22}(x,k) \equiv 1$$

olur. Bunlar (3.4.2) eşitlikleriyle beraber göz önüne alınırsa, her x ve her k için,

$$\varphi_1(x,k) \equiv \tilde{\varphi}_1(x,k), \varphi_2(x,k) \equiv \tilde{\varphi}_2(x,k), \Phi_1(x,k) \equiv \tilde{\Phi}_1(x,k), \Phi_2(x,k) \equiv \tilde{\Phi}_2(x,k)$$

elde edilir. Dolayısıyla $L = \tilde{L}$ dir.

Teorem 3.4.2: Eğer her $n \in Z$ için $k_n = \tilde{k}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ ise, bu durumda $L = \tilde{L}$ dir yani spektral veriler, L problemini tek olarak belirtmektedir.

İspat:

$$M(k) = \frac{1}{\alpha_0 (k - k_0)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n (k - k_n)} + \frac{1}{\alpha'_n k'_n} \right\},$$

$$\tilde{M}(k) = \frac{1}{\tilde{\alpha}_0 \left(k - \tilde{k}_0\right)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tilde{\alpha}_n \left(k - \tilde{k}_n\right)} + \frac{1}{\tilde{\alpha}'_n \tilde{k}'_n} \right\}$$

ve her $n \in Z$ için $k_n = \tilde{k}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ olduğundan, $M(k) = \tilde{M}(k)$ olur ki bu durumda Teorem 3.4.1 den $L = \tilde{L}$ dir.

Teorem 3.4.3: Eğer her $n \in Z$ için $k_n = \tilde{k}_n$, $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ ise, $L = \tilde{L}$ dir; yani $\{k_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri L problemini tek olarak belirtir.

İspat: $\Delta(k)$ ve $\tilde{\Delta}(k)$ fonksiyonlarının özelliklerinden, $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{\Delta(k)}{\tilde{\Delta}(k)} = 1$ olduğu açıktır. $k_n = \tilde{k}_n$ ve $\Delta(k)$ ile $\tilde{\Delta}(k)$ fonksiyonları analitik olduğundan, analitik fonksiyonların tekliği teoreminden $\Delta(k) \equiv \tilde{\Delta}(k)$ olduğu elde edilir. $\psi(x, k_n) = \gamma_n \varphi(x, k_n)$ olduğundan, $\tilde{\psi}\left(x, \tilde{k}_n\right) = \tilde{\gamma}_n \tilde{\varphi}\left(x, \tilde{k}_n\right) = \tilde{\gamma}_n \varphi(x, k_n)$ ve $\tilde{\psi}\left(x, \tilde{k}_n\right) = \psi(x, k_n) = \gamma_n \varphi(x, k_n)$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden yararlanılırsa $\gamma_n = \tilde{\gamma}_n$ olur. Ayrıca $\Delta(k) \equiv \tilde{\Delta}(k)$ olduğundan $\dot{\Delta}(k) \equiv \dot{\tilde{\Delta}}(k)$ olur. Dolayısıyla $\alpha_n = -\dot{\Delta}(k_n)\, \varphi_2(\pi, k_n) = -\dot{\Delta}(k_n) \frac{1}{\gamma_n}$ olduğundan $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ elde edilir. O halde Teorem 3.4.2 den, $L = \tilde{L}$ elde edilir.

3.5. Özfonksiyonların Özellikleri

Bu bölümde L probleminin özfonksiyonlarının tamlığı ve ayrılışımı gösterilecektir. L probleminin özfonksiyonları $x < d$ iken

$$\varphi(x,k_n) = \sin k_n x + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin k_n t\,dt,$$

$x > d$ iken

$$\varphi(x,k_n) = \left(\alpha^+ + \beta\right)\sin k_n x + \left(\alpha^- - \beta\right)\sin k_n(2d - x) + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin k_n t\,dt$$

şeklindedir. Özfonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ uzayında tamlığı gösterilmeden önce bazı tanımlar verilsin.

Tanım 3.5.1: Kabul edelim ki $\{f_n\}, n \in N$, H Hilbert uzayında bir dizi olsun. Burada N sayılabilir bir indis kümesidir. Eğer,

$$\overline{span\{f_n\}} = H$$

eşitliği sağlanıyor ise $\{f_n\}$ dizisi tamdır denir. Eğer kompleks sayıların tüm sonlu $\{c_n\}$ sistemi için

$$\left\|\sum_n c_n f_n\right\| \leq \beta\left(\sum_n |c_n|^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $\beta > 0$ sayısı varsa, $\{f_n\}$ bir Bessel dizisi olarak adlandırılır ve $\{f_n\}$ dizisi β üst sınırına sahiptir denir. Eğer kompleks sayıların tüm sonlu $\{c_n\}$ sistemi için

$$\left\|\sum_n c_n f_n\right\| \geq \alpha\left(\sum_n |c_n|^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $\alpha > 0$ sayısı varsa, $\{f_n\}$, bir Riesz-Fischer dizisi olarak adlandırılır ve $\{f_n\}$ dizisi α alt sınırına sahiptir denir.

Tanım 3.5.2: Hilbert uzayında, Bessel ve Riesz-Fischer dizisi ve aynı zamanda tam olan bir dizi, Riesz bazı olarak adlandırılır.

Tanımlardan da anlaşılacağı gibi $\{\varphi(x,k_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazı olduğunu göstermekle tam olduğu da gösterilmiş olur.

Teorem 3.5.3: (i) L sınır-değer probleminin $\{\varphi(x,k_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$ uzayında tamdır.

(ii) Kabul edelim ki $f(x)$, $x \in [0,d) \cup (d,\pi]$, mutlak sürekli bir fonksiyon olsun ve

$$\begin{cases} f(d+0) = \alpha f(d-0) \\ f'(d+0) = \alpha^{-1} f'(d-0) + 2ik\beta f(d-0) \end{cases} \tag{3.5.1}$$

süreksizlik koşullarını sağlasın. Bu durumda $\{\varphi(x,k_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonlar sistemi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x,k_n), \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi} \varphi(x,k_n) f(t)\,dt \tag{3.5.2}$$

şeklinde bir ayrılışıma sahiptir ve bu seri $[0,d) \cup (d,\pi]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: (i) $x > d$ iken

$$\varphi(x,k) = \left(\alpha^+ + \beta\right)\sin kx + \left(\alpha^- - \beta\right)\sin k(2d-x) + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin kt\,dt$$

özfonksiyonları için $\{\varphi(x,k_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazı olduğunu göstermek için ilk önce $\{\sin(k_n)x\}$, $n \in N_0$ sisteminin $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazı olduğu gösterilsin. Bunun için aşağıda verilen teorem kullanılsın:

Teorem 3.(Xionghui He ve Hans Volkmer,2001): $\{\lambda_n\}$, $n \in N_0$, dizisi $k \neq m$ için $\lambda_k \neq \lambda_m$ olacak biçimde bir negatif olmayan sayılar dizisi olsun ve yeterince büyük n ler için $\delta_n \in [-l,l]$ olmak üzere $\lambda_n = n - \delta + \delta_n$ formuna sahip olsun ve $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$, $0 < l < \frac{1}{4}$ sabitleri

$$(1+\sin(2\delta\pi))^{1/2}(1-\cos(l\pi)) + \sin(l\pi) < 1 \tag{3.5.3}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\{\sin(k_n)x\}$, $n \in N_0$ sistemi $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazıdır.

Teoremin koşulları, daha önce $\sup\limits_n |h_n| < M$ olmak üzere $k_n = n + h_n$ şeklinde yazılabileceği gösterilmiş olduğundan ve dolayısıyla $\delta = 0$ olmak üzere (3.5.3) eşitsizliği

$$\tan l\pi < 1$$

$h_n \in [-l,l]$ ve $0 < l < \frac{1}{4}$ için sağlandığından $\{\sin(k_n)x\}$, $n \in N_0$, sistemi $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazıdır. Aynı şekilde $d \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ olmak üzere, $2d - x = u$ şeklinde yeni bir değişken ile gösterildiğinde $\{\sin(k_n)u\}$, $n \in N_0$, sistemi içinde yaptıklarımız geçerli olacağından $\{\sin k_n(2d-x)\}, n \in N_0$ sistemi de $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazıdır.

Teorem 1.(Xionghui He ve Hans Volkmer,2001): $\{f_n\}, n \in N$, dizisi H Hilbert uzayında α alt sınırına ve β üst sınırına sahip bir Riesz bazı ve $\{g_n\}, n \in N$, dizisi de $\{f_n - g_n\}, n \in N$, γ üst sınırına sahip olacak biçimde bir dizi olsun. Eğer $\alpha > \gamma$ ise, bu durumda $\{g_n\}, n \in N$ dizisi de H Hilbert uzayında $\alpha - \gamma$ üst sınırı ve $\beta + \gamma$ alt sınırına sahip bir Riesz bazıdır.

Teorem 1 den dolayı da $\{(\alpha^+ + \beta)\sin k_n x + (\alpha^- - \beta)\sin k_n(2d-x)\}, n \in N_0$, sistemi $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazıdır.

Son olarak kabul edelim ki $y(x) = y(x,\lambda)$,

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \le x \le \pi$$

Sturm-Liouville denkleminin

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = m$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Burada $q(x)$, $[0,\pi]$ üzerinde reel-değerli, integrallenebilir bir fonksiyon ve m bir reel sayı olsun.

Teorem 8.(Xionghui He ve Hans Volkmer,2001): Kabul edelim ki $\{\lambda_n\}, n \in N$, negatif olmayan bir sayılar dizisi olsun. Bu durumda $\{y(x,\lambda_n)\}$ sisteminin $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazı olması için gerek ve yeter koşul $\{\sin(\lambda_n)x\}$ sisteminin $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazı olmasıdır.

Bu teoremde,

$$\varphi(x,k) = \left(\alpha^+ + \beta\right)\sin kx + \left(\alpha^- - \beta\right)\sin k(2d-x) + \int_0^x K_{11}(x,t)\sin kt\,dt$$

olmak üzere $\{\varphi(x,k_n)\}$,$n \in N_0$, özfonksiyonlar sisteminin de $L_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz bazı olduğunu gösterir.

(ii) Şimdi özfonkisyonların ayrılışım özelliğine sahip olduğunu göstermek için L probleminin Green fonksiyonu oluşturulsun:

(2.1.1) denkleminin, $\varphi(0,k) = 1$, $\varphi'(0,k) = 0$ başlangıç koşulu ile (2.1.3) süreksizlik koşulunu sağlayan çözümü $\varphi(x,k)$; $\psi(0,k) = 0$, $\psi'(0,k) = k$ başlangıç koşulu ile (2.1.3) süreksizlik koşulunu sağlayan çözümü $\psi(x,k)$ olsun.

$x<d$ iken

$$\varphi(x,k)=\frac{y(x,k)+\overline{y(x,k)}}{2}=\cos kx+\int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\cos kt\,dt \qquad (3.5.4)$$

ve

$$\psi(x,k)=\frac{y(x,k)-\overline{y(x,k)}}{2i}=\sin kx+\int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin kt\,dt, \qquad (3.5.5)$$

$x>d$ iken

$$\begin{aligned}\varphi(x,k) &= \frac{y(x,k)+\overline{y(x,k)}}{2}=\left(\alpha^{+}+\beta\right)\cos kx+\left(\alpha^{-}-\beta\right)\cos k(2d-x)\\ &\quad+\int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\cos kt\,dt \qquad (3.5.6)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\psi(x,k) &= \frac{y(x,k)-\overline{y(x,k)}}{2i}=\left(\alpha^{+}+\beta\right)k\sin kx+\left(-\alpha^{-}+\beta\right)k\sin k(2d-x)\\ &\quad+\int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin kt\,dt \qquad (3.5.7)\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
&W\{\varphi(x,k),\psi(x,k)\}\\
&=k(1+2\alpha\beta)\\
&+(\alpha^{-}-\beta)\sin k(2d-x)\tilde{K}_{11}(x,x)+k(\alpha^{+}+\beta)\int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\cos k(x-t)\,dt\\
&+(\alpha^{-}-\beta)\int_0^x \tilde{K}'_{11_x}(x,t)\sin k(x-2d+t)\,dt-k\left(\alpha^{-}-\beta\right)\int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\cos k(x-2d+t)\,dt\\
&+\tilde{K}_{11}(x,x)\int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\sin k(x-t)\,dt
\end{aligned}$$

dir ve $W_0=k(1+2\alpha\beta)$ eşitliği göz önünde bulundurulursa, Liouville Teoremi gereği $W_0=W_\pi=W(x)$ olacağından $k\neq 0$ ve $\alpha\beta\neq -\frac{1}{2}$ için

$$W\{\varphi(x,k),\psi(x,k)\}=\begin{cases}k, & x<d\\ k(1+2\alpha\beta), & x>d\end{cases}$$

olarak elde edilir. Sırasıyla (3.5.4) ve (3.5.5) de verilen $\varphi(x,k)$ ve $\psi(x,k)$ fonksiyonları yardımıyla $x<d$ iken L probleminin Green fonksiyonu,

$$G(x,t,k) = -\frac{1}{k}\begin{cases}\varphi(x,k)\,\psi(t,k)\,, & x\le t\\ \varphi(t,k)\,\psi(x,k)\,, & x\ge t\end{cases}$$

ve benzer şekilde (3.5.6) ve (3.5.7) de verilen $\varphi(x,k)$ ve $\psi(x,k)$ fonksiyonları yardımıyla $x>d$ iken, L probleminin Green fonksiyonu,

$$G(x,t,k) = -\frac{1}{k(1+2\alpha\beta)}\begin{cases}\varphi(x,k)\,\psi(t,k)\,, & x\le t\\ \varphi(t,k)\,\psi(x,k)\,, & x\ge t\end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} Y(x,k) &= \int_0^\pi G(x,t,k)\,f(t)\,dt\\ &= -\frac{1}{k}\psi(x,k)\int_0^x \varphi(t,k)\,f(t)\,dt\\ &\quad -\frac{1}{k(1+2\alpha\beta)}\varphi(x,k)\left\{\int_x^d \psi(t,k)\,f(t)\,dt+\int_d^\pi \psi(t,k)\,f(t)\,dt\right\}\end{aligned}$$

fonksiyonu

$$\begin{aligned}\ell Y-\lambda Y &= f(x)\,,\lambda=k^2\\ U(Y) &= 0, V(Y)=0\end{aligned}$$

$$\begin{cases} Y(d+0)=\alpha Y(d-0)\\ Y'(d+0)=\alpha^{-1}Y'(d-0)+2ik\beta Y(d-0)\end{cases}$$

sınır-değer probleminin çözümüdür.

$$\begin{aligned} Y(x,k) &= -\frac{1}{\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x \varphi(t,k)\,f(t)\,dt\\ &\quad-\frac{1}{\Delta(k)}\varphi(x,k)\left\{\int_x^d \psi(t,k)\,f(t)\,dt+\int_d^\pi \psi(t,k)\,f(t)\,dt\right\}\\ &= -\frac{1}{k^2\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x\left[-\varphi''(t,k)+\left(u'(t)+q(t)\right)\varphi(t,k)\right]f(t)\,dt\\ &\quad-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_x^d\left[-\psi''(t,k)+\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)\right]f(t)\,dt\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi\left[-\psi''(t,k)+\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)\right]f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{k^2\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x\varphi''(t,k)f(t)\,dt+\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_x^d\psi''(t,k)f(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi\psi''(t,k)f(t)\,dt-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x\left(u'(t)+q(t)\right)\varphi(t,k)f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_x^d\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{k^2\Delta(k)}\left\{\psi(x,k)\left[\varphi'(t,k)f(t)\big|_0^x\right]\right\}+\frac{1}{k^2\Delta(k)}\left\{\varphi(x,k)\left[\psi'(t,k)f(t)\right]\left(\big|_x^{d-0}+\big|_{d+0}^{\pi}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x\varphi'(t,k)f'(t)\,dt-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_x^d\psi'(t,k)f'(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi\psi'(t,k)f'(t)\,dt-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x\left(u'(t)+q(t)\right)\varphi(t,k)f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_x^d\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{k^2\Delta(k)}\left\{\psi(x,k)\left[\varphi'(x,k)f(x)-\varphi'(0,k)f(0)\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{k^2\Delta(k)}\left\{\varphi(x,k)\left[\psi'(d-0,k)f(d-0)-\psi'(x,k)f(x)\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{k^2\Delta(k)}\left\{\varphi(x,k)\left[\psi'(\pi,k)f(\pi)-\psi'(d+0,k)f(d+0)\right]\right\}$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x\varphi'(t,k)f'(t)\,dt-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_x^d\psi'(t,k)f'(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi\psi'(t,k)f'(t)\,dt-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x\left(u'(t)+q(t)\right)\varphi(t,k)f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_x^d\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{k^2 \Delta(k)} f(x) \left[\varphi'(x,k)\,\psi(x,k) - \varphi(x,k)\,\psi'(x,k) \right] + \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \psi'(\pi,k)\, f(\pi)\,\varphi(x,k)$$

$$+ \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \varphi(x,k) \left\{ \psi'(d-0,k)\, f(d-0) - \frac{1}{\alpha} \psi'(d-0,k)\, f(d+0) \right\}$$

$$- \frac{2i\beta}{k \Delta(k)} \varphi(x,k)\,\psi(d-0,k)\, f(d+0)$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \psi(x,k) \int_0^x \varphi'(t,k)\, f'(t)\,dt - \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \varphi(x,k) \int_x^d \psi'(t,k)\, f'(t)\,dt$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \varphi(x,k) \int_d^\pi \psi'(t,k)\, f'(t)\,dt - \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \psi(x,k) \int_0^x \left(u'(t) + q(t) \right) \varphi(t,k)\, f(t)\,dt$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \varphi(x,k) \int_x^d \left(u'(t) + q(t) \right) \psi(t,k)\, f(t)\,dt$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \varphi(x,k) \int_d^\pi \left(u'(t) + q(t) \right) \psi(t,k)\, f(t)\,dt$$

$$= \frac{f(x)}{k^2}$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \left\{ \psi(x,k) \int_0^x \varphi'(t,k)\, f'(t)\,dt + \varphi(x,k) \int_x^d \psi'(t,k)\, f'(t)\,dt \right\}$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \varphi(x,k) \int_d^\pi \psi'(t,k)\, f'(t)\,dt$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \left\{ \psi'(\pi,k)\, f(\pi)\,\varphi(x,k) - \varphi(x,k)\,\psi'(d-0,k) \left[f(d-0) - \frac{1}{\alpha} f(d+0) \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{k^2 \Delta(k)} 2ik\beta\varphi(x,k)\,\psi(d-0,k)\, f(d+0)$$

$$- \frac{1}{k \Delta(k)} \psi(x,k) \int_0^x \left(u'(t) + q(t) \right) \varphi(t,k)\, f(t)\,dt$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \varphi(x,k) \int_x^d \left(u'(t) + q(t) \right) \psi(t,k)\, f(t)\,dt$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \varphi(x,k) \int_d^\pi \left(u'(t) + q(t) \right) \psi(t,k)\, f(t)\,dt$$

Burada $f'(t) = g(t) \in AC[0,\pi]$ olması durumunda,

$$= \frac{f(x)}{k^2}$$

$$- \frac{1}{k^2 \Delta(k)} \left\{ \psi(x,k) \int_0^x \varphi(t,k)\, g'(t)\,dt + \varphi(x,k) \int_x^d \psi(t,k)\, g'(t)\,dt \right\}$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi \psi(t,k)\,g'(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\left\{-\psi(x,k)\,f'(0)\,\varphi(0,k)+\varphi(x,k)\left[f'(d-0)\,\psi(d-0,k)-\alpha f'(d+0)\,\psi(d-0,k)\right]\right\}$$

$$+\frac{2i\beta}{k\Delta(k)}\varphi(x,k)\,\psi(d-0,k)\,f(d+0)$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\left\{\psi'(\pi,k)\,f(\pi)-\psi(\pi,k)\,f'(\pi)-\psi'(d-0,k)\left[f(d-0)-\frac{1}{\alpha}f(d+0)\right]\right\}$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x\left(u'(t)+q(t)\right)\varphi(t,k)\,f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_x^d\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)\,f(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{k^2\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)\,f(t)\,dt$$

olur ve $f(x)$ fonksiyonu,

$$\begin{cases} f(d+0)=\alpha f(d-0) \\ f'(d+0)=\alpha^{-1}f'(d-0)+2ik\beta f(d-0) \end{cases}$$

süreksizlik koşullarını sağladığından,

$$Y(x,k)=\frac{f(x)}{k^2}-\frac{1}{k^2}\left\{Z_1(x,k)+Z_2(x,k)\right\} \qquad (3.5.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$Z_1(x,k)=\frac{1}{\Delta(k)}\left\{\psi(x,k)\int_0^x\varphi(t,k)\,f''(t)\,dt+\varphi(x,k)\int_x^d\psi(t,k)\,f''(t)\,dt\right\}$$

$$+\frac{1}{\Delta(k)}\varphi(x,k)\int_d^\pi\psi(t,k)\,f''(t)\,dt+\frac{1}{\Delta(k)}\left[f'(0)\,\psi(x,k)+\psi(\pi,k)\,f'(\pi)\,\varphi(x,k)\right],$$

$$Z_2(x,k)=\frac{1}{\Delta(k)}\varphi(x,k)\,\psi'(\pi,k)\,f(\pi)+\frac{1}{\Delta(k)}\psi(x,k)\int_0^x\left(u'(t)+q(t)\right)\varphi(t,k)\,f(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{\Delta(k)}\varphi(x,k)\left[\int_x^d\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)\,f(t)\,dt+\int_d^\pi\left(u'(t)+q(t)\right)\psi(t,k)\,f(t)\,dt\right].$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\varphi(x,k) &= O\left(\exp|\operatorname{Im}k|x\right),\ \varphi'(x,k)=O\left(|k|\exp|\operatorname{Im}k|x\right), \\
\psi(x,k) &= O\left(\exp|\operatorname{Im}k|(\pi-x)\right),\ \psi'(x,k)=O\left(|k|\exp|\operatorname{Im}k|(\pi-x)\right), \qquad (3.5.9) \\
|\Delta(k)| &\geq C_\delta|k|\exp|\operatorname{Im}k|\pi,\ k\in G_\delta,\ |k|\geq k^*,
\end{aligned}$$

ifadelerinden, sabitlenmiş bir $\delta > 0$ ve yeterince büyük $k^* > 0$ için

$$\max_{0 \le x \le \pi} |Z_2(x,k)| \le \frac{C}{|k|}, \quad k \in G_\delta, \quad |k| \ge k^*$$

elde edilir. Şimdi de

$$\lim_{\substack{|k| \to \infty \\ k \in G_\delta}} \max_{0 \le x \le \pi} |Z_1(x,k)| = 0 \qquad (3.5.10)$$

olduğu gösterilsin. (3.5.9) ifadelerinden

$$\max_{0 \le x \le \pi} |Z_1(x,k)| \le \frac{C}{|k|}, \quad k \in G_\delta, \quad |k| \ge k^*$$

eşitsizliği sağlanır. Kabul edelim ki $f'(t) = g(t) \in L[0,\pi]$ olsun. Sabit $\varepsilon > 0$ için $g_\varepsilon(t)$,

$$C^+ = \max_{0 \le x \le \pi} \sup_{k \in G_\delta} \frac{1}{|\Delta(k)|} \left\{ |\psi(x,k)| \int_0^x \left|\varphi'(t,k)\right| dt + |\varphi(x,k)| \left(\int_x^d \left|\psi'(t,k)\right| dt + \int_d^\pi \left|\psi'(t,k)\right| dt \right) \right\};$$

olmak üzere

$$\int_0^\pi |g(t) - g_\varepsilon(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2C^+}$$

eşitsizliğini sağlayan mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $k \in G_\delta, |k| \ge k^*$ için

$$\max_{0 \le x \le \pi} |Z_1(x,k)| \le \max_{0 \le x \le \pi} |Z_1(x,k;g_\varepsilon)| + \max_{0 \le x \le \pi} |Z_1(x,k;g - g_\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C(\varepsilon)}{|k|}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $|k| > k^0$ için $\max_{0 \le x \le \pi} |Z_1(x,k)| \le \varepsilon$ sağlanacak biçimde bir $k^0 > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan (3.5.10) eşitliği elde edilmiş olur.

$$\Gamma_n = \left\{ k : |k| = \left|k_n^0\right| + \frac{\sigma}{2}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

olmak üzere,

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} Y(x,k)\, dk$$

integrali ele alınsın. (3.5.8)- (3.5.10) ifadeleri göz önünde bulundurulursa,

$$I_N(x) = f(x) + \varepsilon_N(x), \quad \lim_{N \to \infty} \max_{0 \le x \le \pi} |\varepsilon_N(x)| = 0 \qquad (3.5.11)$$

yazılabilir. Öte yandan $I_N(x)$, Rezidü teoreminden elde edilirse,

$$\operatorname{Res}_{k=k_n} Y(x,k) = -\frac{1}{\dot{\Delta}(k_n)} \psi(x,k_n) \int_0^x \varphi(t,k_n) f(t)\, dt$$

$$-\frac{1}{\dot{\Delta}(k_n)}\varphi(x,k_n)\left\{\int_x^d \psi(t,k_n)f(t)\,dt+\int_d^\pi \psi(t,k_n)f(t)\,dt\right\}$$

$$=-\frac{\gamma_n}{\dot{\Delta}(k_n)}\varphi(x,k_n)\int_0^\pi \varphi(t,k_n)f(t)\,dt$$

ve $\alpha_n\gamma_n=-\dot{\Delta}(k_n)$ eşitliğinden

$$\operatorname*{Res}_{k=k_n} Y(x,k)=\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,k_n)\int_0^\pi \varphi(t,k_n)f(t)\,dt$$

olur. Dolayısıyla

$$I_N(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n\varphi(x,k_n),\quad a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \varphi(t,k_n)f(t)\,dt$$

bulunur ve (3.5.11) ifadesinden

$$f(x)+\varepsilon_N(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n\varphi(x,k_n) \qquad (3.5.12)$$

yazılabilir. (3.5.12) eşitliğinin sol tarafı $N\to\infty$ için limiti yakınsak olduğundan, sağ tarafında $N\to\infty$ için limiti yakınsak olur. Dolayısıyla

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi(x,k_n)$$

serisi $[0,d)\cup(d,\pi]$ da düzgün yakınsaktır.

KAYNAKLAR

Ambartsumyan, V.A.,1929, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53 , pp. 690-695.

Borg, G., 1945, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Di¤erentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math.78,pp1-96.

Levinson, N., 1949, The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B.,pp. 25-30.

Levinson, N. , 1949, Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Di¤erential Operators, Casopis. Pest. Mat. Fys. 74, pp. 17-20.

Delsarte, J., 1938, Sur Certains Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Linears Aux Derivees Partielles du Second-Order, C. R. Hebd. Acad. Sci.,206,pp. 178-182.

Delsarte, J. and Lions J., 1957, Transmutations D'operateurs Di¤erentiels Dans Le Domaine Complexe, Comm. Math. Helv., 32(2), pp. 113-128.

Levitan, B. M., 1964, Generalized Translation Operators and some o its Applications, Jerusalem.

Povzner, A. V., 1948, On Di¤erential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb., 23.

Marchenko, V. A., 1950, Some Problems in the Theory of Second-Order Di¤erential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72 , pp. 457-560.

Krein, M. G., 1951, Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 76 , pp. 21-24.

Krein, M. G., 1954, On a Method of the E¤ective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 95 ,pp. 767-770.

Tikhonov, A. N., 1949, Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad., Nauk SSSR. Vol 69, No 4, pp. 797-800.

Gelfand, I. M. and Levitan, B.M., 1951, On the Determination of a Di¤erential Equation by its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 15, pp. 309-360.

Gasimov, M.G. and Amirov, R. Kh., 1985, Direct and Inverse Spectral Problems for Second Order Di¤erential Operators which has Coulumb Singularity., Dokl. Akad., Nauk Az.SSR., Vol 41 ,No.8, pp. 1-5.

Gasimov, M.G., 1965, Determination of Singular Sturm-Lioville Operators According to two Spectrums., Dokl. Akad., Nauk SSSR. Vol 161, No 2, pp. 274-276.

Gasimov, M.G. and Levitan, B.M., 1964, About Sturm-Liouville Di¤erential Operators, Math. Sborn., 63 (105), No. 3.

Wolk, B.Y., 1953, Transform Operator for Di¤erential Equations Singularity in Point x = 0., Survey Math. Sci.,Vol:8, No:4(56), pp. 141-151.

Stasevskaya, V.V., 1953, Inverse Problems of Spectral Analysis for a Class Differential Equations, Dokl. Akad., Nauk SSSR. Vol 93, No 3, pp. 409-412

Stasevskaya, V.V., 1957, Inverse Problems for Spectral Analysis of Di¤erential Operators Singularity in Point x = 0, Kharkiv Univ. Bilimsel Yay¬nlar Dergisi, Vol 25, No 4, pp. 49-86.

Quigg, C., Rosner, J.L. and Thacker, H. B., 1978, Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and II Phys. Rev., D 18,No:1, pp. 274-295.

Grosse, H., and Martin, A., 1979,Theory of the Inverse Problem for Con…ning Potentials, Nuclear Phys., B 14 B, pp. 413-432.

Roos, B.W. and Sangren, W.C., 1961, Spectra for a Pair Singular First Order Di¤erential Equations, Proc. Amer. Math. Soc., V. 12, pp. 468-476.

Martynov, V.V., 1965, Conditions of Discreteness and Continuity of the Spectrum in the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Di¤erential Equations, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 165, pp. 996-999.

Hryniv, R.O. and Mykytyuk, Ya. V., 2003, Inverse Spectral Problems for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials, Inverse Problems 19, pp. 665-684.

Savchuk, A. M., Shkalikov, A.A., 1999, Sturm-Liouville operators with Singular potentials, Math. Zametki, 66 , pp. 897-912, In Russian.

Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R. and Holden, H. , 1988, Solvable Models in Quantum Mechanics (New York Springer).

Albeverio, S. and Kurasov, P., 2000, Singular Perturbations of Di¤erential Operators,Solvable Schrödinger Type Operators(Cambridge:Cambridge University Press).

Savchuk, A. M., 2001, On Eigenvalues and Eigenfunctions of Sturm-Liouville

Operators with Singular Potentials, Mat. Zametki 69, 277-285 (in Russian).

Hryniv, R.O. and Mykytyuk, Ya. V., 2003, Transformation Operators for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials, Mat. Phys. Anal. Geom..

Pöschel, J. and Trubowitz, E. , 1987, Inverse Spectral Theory (Pure Appl. Math. Vol. 130)(Orlando, FL:Academic).

Marchenko, V. A. ,1950, Some Questions of the Theory of Second-Order Di¤erential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72, pp.457-460.

Gelfand, I. M. and Levitan, B. M., 1951, On Determination of a Di¤erential Equation by its Spectral Function Izv. Akad. Nauk SSSR

Hald, O., 1984, Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem Commun. Pure Appl. Math. 37,pp. 539-77.

Andersson, L., 1988, Inverse Eigenvalue Problems for a Sturm-Liouville Equationin Impedance Form Inverse Problems 4 , pp. 929-71.

Carlson, R., 1994, Inverse Sturm-Liouville Operators with a Singularity at Zero Inverse Problems 10, pp. 851-64.

Hald, O. and McLaughlin, J.R., 1998, Inverse Problems: Recovery of BV Coef…cients From Nodes Inverse Problems14, pp. 245-73.

Yurko, V.A., 2000, Inverse Problems for Di¤erential Equation with Singularities Lyng Inside the Interval J. Inverse Ill-Posed Probl. 8, pp. 89-103.

Freiling, G. and Yurko, V.A., 2002, On the Determination of Di¤erential Equation with Singularities and Turning Points Results Math. 41, pp. 275-90.

Amirov, R. Kh. and Yurko, V.A., 2001, On Di¤erential Operators with a Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval. Ukr. Math. Jour., V.53, No:11, pp. 1443-1458.

Amirov, R. Kh., 2002, Direct and Inverse Problems for Di¤erential Operators with a Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval Transactions of NAS Azerbaijan., Vol 22, No:1, pp. 21-39.

Amirov, R. Kh., 2006, On Sturm-Liouville Operators with Discotinuity conditions inside an interval, J. Math. Anal. Appl., 317 , pp. 163-176.

Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S., 1970, Intoduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.

Marchenko, V. A., 1977, Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev .

Levin, B. Ya., 1956, Distribution of Zeros of Entire Functions, Moscow .

Levin, B. Ya., 1971, Entire Functions, Moscow University, Moscow .

Zhdanovich,V.F., 1960, Formulas for the Zeros of Dirichlet Polynomials and Quasipolynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 135, No:8, pp. 1046-1049 .

Krein, M. G. and Levin, B. Ya., 1948, On Entire Almost Periodic Functions of Exponential Type, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 64, No:3, pp. 285-287 .

Amirov, R. Kh., 1985, Inverse Problem for the Sturm-Liouville Equation with Coulomb Singularity its Spectra, Kand. Dissertasiya, Baku .

Amirov, R. Kh., 1999, Transformation operator for a class of the di¤erential operators with a singularity, Proc. Of Institute of Math. and Mech. Of Azerbajian, 11, pp. 8-15.

Amirov, R. Kh., Guseinov, I. M., 2002, Boundary value problems for a class of Sturm-Liouville operator with nonintegrable potential, Di¤. Eq., 38, No:8 , pp. 1195-1197.

Gelfand, I. M., Shilov, G. E., 1964, Generalized Functions, Volume I, Academic Pres, New York-London .

V.V. Stashevskaya, On ¬nverse problems for spectral analysis for the one class di¤erential equations, Dokl. AN SSSR, 93, No:3 (1953).

Volk, B.ya., 1953, On inverse formulae for the di¤erential equation with the singularity, Sur. Sov. Mathematics, 8, No:4 , pp. 141-151.

Amirov, R. Kh., 2004, Transformation operators for Sturm-Liouville operators with singular potential, J. of Pure Appl. Math., 12, No:3, pp. 311-334.

Amirov, R. Kh., Çakmak, Y., and Gülyaz, S., 2006, Boundary Value Problem For Second Order Di¤erential Equations with Coulomb Singularity on a Finite Interval, Indian J. Pure appl. Math., 37(3); pp. 125-140,.

Naimark, M. A., 1967, Linear Di¤erential Operators, Moscow, Nauka, (in Russian).

He, X., and Volkmer, H., 2001, Riesz bazes of solutions of Sturm-Liouville equations, Fourier Anal. Appl., Vol.7, pp. 297-307.

ÖZGEÇMİŞ

Nilifer TOPSAKAL 1978 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1996 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2000 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine başladı ve 2003 yılında mezun oldu. 2003 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde doktoraya başladı. Halen Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.