

**T.C.**  
**ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**DOKTORA TEZİ**

**BAZI UZAY-ZAMANLARIN NOETHER**  
**SİMETRİLERİ**

**Yusuf KÜÇÜKAKÇA**

**Fizik Anabilim Dalı**

**Tezin Sunulduğu Tarih:10.06.2010**

**Tez Danışmanı:**  
**Prof. Dr. Uğur CAMCI**

**ÇANAKKALE**

## DOKTORA TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

**Yusuf KÜÇÜKAKÇA** tarafından **Prof.Dr. Uğur CAMCI** yönetiminde hazırlanan “**BAZI UZAY-ZAMANLARIN NOETHER SİMETRİLERİ**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Can Battal KILINÇ

Yönetici

Prof. Dr. Uğur CAMCI

Jüri Üyesi

Prof. Dr. İhsan YILMAZ

Jüri Üyesi

Prof. Dr. İsmail TARHAN

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Melis ULU

Jüri Üyesi

Sıra No:.....

Tez Savunma Tarihi: 10/06/2010

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

## İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

**Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.**

Yusuf KÜÇÜKAKÇA

## TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimim her aşamasında ve bu tezin hazırlanma sürecinde bilgi ve deneyimlerini hiçbir zaman esirgmeden bana yol gösteren, emek ve zaman harcayan değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Uğur CAMCI' ya; bu tezin hazırlık sürecinde önerileriyle yol gösteren tez izleme komitesi üyeleri Prof.Dr. Can Battal Kılınç'a, Prof.Dr. Hüsnü BAYSAL'a, Prof.Dr. İsmail TARHAN'a, sadece lisansüstü öğrenimimde değil tüm okul hayatım boyunca desteklerini hiçbir zaman esirgmeden hep yanımda olan sevgili anneme, babama ve tüm aile fertlerime teşekkürü bir borç bilirim.

Yusuf KÜÇÜKAKÇA

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

### Simgeler:

$(\cdot)$	$t$ değişkenine göre türev
$(\prime)$	$\Phi$ değişkenine göre türev
$(,)$	Kısmi türev
$(;), \nabla_a$	Kovaryant türev
$\square = \nabla^a \nabla_a$	Box Operatörü
$\delta$	Varyasyon
$\mathfrak{L}_X$	$X$ vektör alanı yönündeki Lie türevi operatörü
$f_R$	$f(R)$ nin $R'$ ye göre türevi
$\Theta_L$	Cartan-one form ( $\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} dA + \frac{\partial L}{\partial \dot{B}} dB + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} d\Phi$ )
$i_X \Theta_L$	Hareket sabiti ( $i_X \Theta_L = \alpha \frac{dL}{dA} + \beta \frac{dL}{dB} + \gamma \frac{dL}{d\Phi}$ )
H	Hubble Parametresi
$q$	Yavaşlama Parametresi
$\Delta$	Anizotropi Parametresi

### Kısaltmalar:

BI	Bianchi Tip I
BIII	Bianchi Tip III
EFE	Einstein Field (Alan) Equations (Denklemleri)
FRW	Friedmann-Robertson-Walker
GRT	Genel Relativite Teorisi
K-S	Kantowski-Sachs
LRS	Lokal Rotasyonel Simetrik
WDW	Wheeler De Witt

### Konvansiyon

Signatür +2' dir.

## ÖZET

### BAZI UZAY-ZAMANLARIN NOETHER SİMETRİLERİ

Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı Doktora Tezi

Danışman: Prof.Dr. Uğur CAMCI

10.06.2010, 100

Bu çalışmanın birinci bölümünde tezin amacının anlatıldığı bir giriş yapılmış; ikinci bölümde ise temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde materyal ve yöntem olarak kullanılacak olan genelleştirilmiş gravitasyon teorileri ve Noether simetrisi kavramları anlatılmıştır.

Bu tezde, Einstein-Hilbert Lagrangianının genelleştirilmesi olan gravitasyon teorilerinde bazı tam kozmolojik çözümler elde edilmiştir. Öncelikle Lokal Rotasyonel Simetrik Bianchi I, III ve Kantowski-Sachs uzay-zamanları için skaler tensör teorilerinde çözümler araştırılmıştır. Daha sonra skaler tensör teorilerinde, diğer Bianchi Tip uzay-zamanlarının Noether simetrisi incelenmiştir. Ayrıca diğer önemli bir genelleştirilmiş gravitasyon teorisi olan  $f(R)$  teorisinde, Bianchi I uzay-zamanları için metrik potansiyelleri elde edilmiştir. Her iki gravitasyonel teoride de, Lagrange fonksiyoneli Lie dönüşümü altında invariant bırakan Noether simetri yaklaşımı dikkate alınmıştır. Noether simetrisinin mevcut olması birinci teoride, skaler alanın çiftlenim fonksiyonu ve potansiyeli, ikinci teoride ise  $f(R)$  fonksiyonunun şeklini seçmemize olanak sağlar. Ayrıca böyle bir simetri, alan denklemlerini sadeleştiren bazı dönüşümler bulunmasına da imkân verir. Elde edilen bu dönüşümler kullanılarak, dikkate alınan uzay-zamanlar için alan denklemlerinin çözümleri araştırılmıştır.

**Anahtar sözcükler:** Noether simetrisi, Skaler tensör teorileri,  $f(R)$  teorileri, Bianchi tip uzay-zamanlar

## ABSTRACT

### NOETHER SYMMETRIES OF SOME SPACE-TIMES

Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Science and Engineering

Chair for Physics Thesis of Doctor of Philosophy

Advisor: Prof.Dr. Uğur CAMCI

10.06.2010, 100

In the first chapter of this study, an introduction in which aim of the thesis is explained has been begun and in the second chapter, the fundamental definitions have been given. In the third chapter, generalized gravity theories and Noether symmetry concepts to be used as a material and method have been explained.

In this thesis, it has been obtained some exact cosmological solutions in gravity theory which is generalization of the Einstein-Hilbert Lagrangian. Firstly, the solutions have been investigated for the Local rotational symmetric Bianchi I, III and Kantowski-Sachs space time in the scalar tensor theories. Later, Noether symmetries of other Bianchi type space-times in scalar tensor theories have been studied. Metric potentials for Bianchi I space-times have also been obtained in the framework of  $f(R)$  gravity theory which is the other important generalized gravitation theory. In both gravitation theories, the Lagrange functional invariant under a Lie transformation is taken into account the Noether symmetry approach. The existence of Noether symmetry allows us to choose the coupling function and the potential of scalar field in the first theory and the form of  $f(R)$  function in the second theory. Moreover, such a symmetry also permits to find some transformations which simplify the field equations. Solutions of the field equations for taken into account the space-times have been investigated by using these transformations.

**Keywords:** Noether symmetry, Scalar tensor theories,  $f(R)$  theory, Bianchi type space-times

## İÇERİK

	Sayfa
TEZ SINAV SONUÇ BELGESİ.....	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
<b>BÖLÜM 1 – GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>BÖLÜM 2- ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....</b>	<b>4</b>
2.1. Varyasyon Hesabı ve Euler-Lagrange Hareket Denklemleri.....	4
2.2. Lie Türevi.....	7
2.3. Bianchi Sınıflaması .....	8
2.4. Genel Relativite Teorisi.....	11
2.5. Standart Kozmolojik Model.....	13
<b>BÖLÜM 3- MATERYAL VE YÖNTEM.....</b>	<b>21</b>
3.1. Genelleştirilmiş Gravitasyon Teorileri.....	21
3.1.1. Brans-Dicke Skaler Tensör Teorisi.....	21
3.1.2. $f(R)$ Teorisi.....	24
3.2. Noether Simetri Yaklaşımı.....	26
3.3. Bianchi Uzay-zaman Modelleri.....	29
3.3.1. LRS Bianchi Tip I, III ve Kantowski-Sachs Uzay-zamanı.....	30
3.3.2. LRS Bianchi Tip II Uzay-zamanı ve Ricci Skaleri.....	31
3.3.3. LRS Bianchi Tip IV Uzay-zamanı ve Ricci Skaleri.....	31
3.3.4. LRS Bianchi Tip V Uzay-zamanı ve Ricci Skaleri .....	31
3.3.5. LRS Bianchi Tip VI <sub>h</sub> Uzay-zamanı ve Ricci Skaleri .....	31
3.3.6. LRS Bianchi Tip VIII ve IX Uzay-zamanı ve Ricci Skaleri .....	32
3.4. Önemli Çalışmalar.....	32
<b>BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....</b>	<b>34</b>
4.1. Bianchi I, Bianchi III ve Kantowski-Sachs Uzay-Zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı.....	34
4.2. Bianchi II Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı.....	42
4.3. Bianchi IV Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı.....	48
4.4. Bianchi V Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı.....	50



4.5. Bianchi VI <sub>h</sub> Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı.....	52
4.6. Bianchi VIII ve IX Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı.....	54
4.7. $f(R)$ Teorisinde Bianchi I Uzay-Zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı.....	56
<b>BÖLÜM 5- SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....</b>	<b>75</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>92</b>
Şekiller.....	I
Özgeçmiş.....	III

## BÖLÜM 1 GİRİŞ

Evrenin büyük ölçekteki yapısına ait matematiksel model, 1915 yılında Einstein tarafından ortaya konulan Genel Relativite Teorisi (GRT) çerçevesinde oluşturulmuştur. GRT, uzay-zamanın geometrik yapısı ile gravitasyonel alanlar arasındaki ilişkiyi bu matematiksel model ile açıklamaktadır. GRT' nin temel denklemleri; sol taraf uzay-zaman geometrisini ve sağ taraf ise bu geometrideki madde dağılımını göstermek üzere

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab}$$

şeklinde formüle edilen Einstein Alan Denklemleri (EFE) dir. Burada  $\kappa = 8\pi G / c^4$  şeklinde verilmektedir. Bu denklemlerden evren modeli inşa etmek için bir geometri ( $g_{ab}$ ) seçilir ve madde dağılımı olarak ideal veya ideal olmayan akışkan, viskoz akışkan, ısı akısı, kütleli ve kütesiz skaler alan, kozmik sicimler veya elektromanyetik alan gibi enerji-momentum ifadelerinden biri veya birkaçı seçilir. Bu şekilde oluşturulan denklemler, ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi olup bunlara çözüm bulmak oldukça zordur ve bazı kabuller (homojenlik veya izotropluk) altında çözümler elde edilmektedir. Ayrıca, EFE' lere kesin çözüm bulmak için kullanılan önemli yöntemlerden birisi, ele alınan uzay-zaman metriği üzerinde belirli simetri kabulleri yapmaktır. Benzer şekilde; Lagrange fonksiyoneli invariant bırakan simetri koşulları alan denklemlerine çözüm elde edebilmek için kullanışlıdır.

GRT, uzay-zamandaki gravitasyon ile ilgili mevcut en tutal teoridir. GRT'nin formülasyonu, klasik mekanikteki gibi uzay ve zamanın mutlak nicelikler olmadığını ifade eder ve bu teorideki dinamik nicelikler tamamen madde ve enerji dağılımıyla ilgilidir. Böylece ilk kez bu yaklaşım ile evrenin kendisinin dinamik bir sistem olarak düşünülmesi gerektiği sonucu ortaya çıkmıştır. Diğer taraftan evrenle ilgili teorik hesaplamalar gözlemlerle uyumlu olan Standart Kozmolojik Modelin (Weinberg, 1972) formülasyonuna götürmüştür. GRT bir çok deneysel testlerle uyumlu olduğu için şu sorunun sorulması da doğaldır: Neden gravitasyon için alternatif bir teori arıyoruz? Bu sorunun cevabı birkaç kısımdan oluşur. Birincisi, deneysel olarak test edilmiş bir teorinin özelliklerini daha iyi anlayabilmek için bu alternatif modellerle GRT'nin öngörülerini karşılaştırmak oldukça

öğreticidir. Alternatif bir teori çalışmanın ikinci nedeni ise muammalı birçok deneysel konunun mevcut olmasıdır. Özellikle kozmolojik veriler, evrendeki madde miktarının %72' sinin Karanlık Enerji (negatif basınçlı yani  $p = -\rho$  durum denklemine sahip bir akışkan), %24' ünün Karanlık Madde (basıncı ihmal edilebilir ve kendisi ile normal madde arasındaki etkileşimi yok denilecek kadar az olan bir akışkan) ve kalan %4' ü normal madde olduğunu göstermektedir (Spergel ve ark, 2003, 2007). Ayrıca evrenin kozmik ivmelenmesini açıklayabilmek için gravitasyon teorisi modifiye edilmeye çalışılmış ya da alternatif bir teori arayışına girilmiştir. Einstein GRT teorisini düzeltme çalışmaları uzun bir geçmişe sahiptir. Bunlardan en çok çalışılanlardan birisi metrik yanında skaler alanı da içeren skaler tensör teorileridir. Bu teorilerin en basit olanı daha sonra ayrıntılı bir şekilde verileceği gibi Brans-Dicke skaler tensör teorisidir. Başka bir alternatif ise Einstein-Hilbert etki integralindeki  $R$  Ricci skaleri yerine  $R$ 'nin analitik bir fonksiyonunun  $f(R)$  alındığı bir teori inşa etmektir. Bu teoriler kullanılarak; Standart Kozmolojik Modelin çözölemeyen problemleri aşmaya çalışılmıştır.

Son yıllarda, uzun süredir var olan birkaç kozmoloji bilmecesini çözmek için çekimli minimal olmayan çiftlenmiş (coupled) skaler alan kullanılmaya başlanmıştır. Mikroskobik ölçekte gravitasyonel alanın davranışını anlamak için indirgenmiş (induced) gravitasyon teorisi (Zee, 1979; Smolin, 1979; Adler, 1980) geliştirilmiştir. Makroskobik ölçekte ise evrenin en iyi tanımı standart kozmolojik model ile verilir. Evrenin şu anki evrimi için Friedmann-Robertson-Walker (FRW) uzay-zamanı, makroskobik ölçekte uygun bir evren tasviri vermektedir (Capozziello ve Lambiase, 2000).

Kuantum kozmolojisi, kuantum gravitasyon teorisinin inşası için ilk adım olarak düşünülmekte olup klasik evrenin ilk ortaya çıktığındaki başlangıç koşullarını bulmakla ilgilidir. Ancak; elektromanyetizma, genel relativite ya da alışılmış kuantum mekaniği gibi diğer fizik teorilerine göre “evren sisteminin” gelişimi için sınır koşulları dışardan getirilemez. Bu durumda; Maxwell denklemleri, Einstein alan denklemleri ya da Schrödinger denklemi gibi temel dinamik yasalara ihtiyaç duyulur ve başlangıç koşulları dışarıdan alınır. Kuantum kozmolojisi; kuantum gravitasyon teorisini çalışmak için uygulanabilir bir tasarı olmasının yanında, başlangıç koşullarını bulmak sorunundan dolayı kendi başına bir fizik dalı olarak düşünülebilir. Sadece kavramsal zorluklar değil, aynı zamanda matematiksel karmaşıklık kuantum kozmoloji çalışmayı zorlaştırmaktadır

(Narlikar ve Padmanabhan, 1986). Örneğin; geometrodinamiğin süper uzayı, sonsuz serbestlik derecesine sahiptir ve bundan dolayı Wheeler De Witt (WDW) denklemini tam olarak integre etmek pratik olarak imkânsızdır.

Noether teoremini kozmolojiye uygulama düşüncesi çok eski değildir. İlk kez 1990 yılında de Rities ve ark. (1990) Noether teoremini minimal olarak çiftlenmiş skaler alanlı GRT' nin homojen ve izotrop kozmolojik modellerine uygulamıştır. 1990' ların başlarında birçok kozmojik bilmeceyi çözebilmek için minimal olmayan çiftlenmiş skaler alanlı gravitasyon teorileri önerilmiştir (Linde 1990). Noether simetri yaklaşımı skaler tensör teorilerinde bazı açık çözümler sunmaktadır. Bu yaklaşım uygun bir şekilde keyfiliği kısıtlayarak, potansiyelin dinamik olarak seçilmesini ve alan denklemlerine çözümlerin bulunmasını sağlar. Özellikle Noether simetri yaklaşımı, hareket sabitlerini belirlemede genel bir kriterdir.

Bu tezde, geliştirilmiş gravitasyon teorilerinde bazı tam kozmolojik çözümler bulunmaya çalışılmıştır. Öncelikle Lokal Rotasyonel Simetrik (LRS) Bianchi I, III ve Kantowski-Sachs uzay-zamanları için skaler alanın Ricci skaleri ile non-minimal çiftlenimli (non-minimal coupled) skaler tensör teorilerinde çözümler araştırılmıştır. Daha sonra skaler tensör teorilerinde, diğer Bianchi Tip uzay-zamanlarının Noether simetrisi incelenmiştir. Ayrıca diğer önemli bir geliştirilmiş gravitasyon teorisi olan  $f(R)$  teorisinde, Bianchi I uzay-zamanları için metrik potansiyelleri elde edilmiştir. Her iki gravitasyon teorisinde de, Lagrange fonksiyoneli Lie dönüşümü altında invaryant bırakan Noether simetri yaklaşımı dikkate alınmıştır. Noether simetri yaklaşımının kullanılması birinci teoride, skaler alanın çiftlenim fonksiyonu ve potansiyelini, ikinci teoride ise  $f(R)$  fonksiyonunun şeklini seçmemize olanak sağlar. Noether simetrisinin varlığı, ortaya çıkan diferansiyel denklemleri sadeleştirici bazı dönüşümler bulunmasına imkân verir. Elde edilen bu dönüşümler kullanılarak, dikkate alınan uzay-zamanlar için alan denklemlerinin çözümleri araştırılmıştır.

## BÖLÜM 2 ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

### 2.1 Varyasyon Hesabı ve Euler -Lagrange Hareket Denklemleri

En basit düşünce ile varyasyon hesabının temel problemi  $x_1$  ve  $x_2$  ile verilen iki nokta arasındaki en kısa yolun ne olması gerektiğinin bulunmasıdır. Bu iki nokta arasındaki  $y(x)$  yoluna bağlı bir  $f\{y(x), y'(x); x\}$  fonksiyoneli dikkate alınsın.  $x_1$  ve  $x_2$  noktaları arasındaki öyle bir  $y(x)$  yolu olsun ki; bu yol  $f$  fonksiyonelinin

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\} dx \quad (2.1.1)$$

çizgi integralini ekstremum yapsın. Burada  $y(x)$  ve  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$  bağımlı değişken,  $x$  ise bağımsız değişkendir. Eğer  $y(x)$  fonksiyonu  $J$  integralinin minimum yapıyorsa o zaman bir komşu fonksiyon  $J$ 'yi arttırmak zorundadır. Olası bütün  $y(x)$  fonksiyonları parametrik olarak  $y = y(\alpha, x)$  ile gösterilsin; bu durumda  $\alpha = 0$  noktasında  $y(0, x) = y(x)$  eşitliği  $J$  için bir ekstremum verir. Dolayısıyla,

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x) \quad (2.1.2)$$

yazılabilir. Burada  $\eta(x)$  sürekli ve birinci türeve sahip bir fonksiyon olup sınır noktalarda sıfırdır; yani,  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  dır. Bu durumda (2.1.1) integrali  $\alpha$  parametresine bağlı olarak

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x\} dx \quad (2.1.3)$$

yazılabilir. Bütün  $\eta(x)$  fonksiyonları için  $J(\alpha)$  integralinin ekstremum olma koşulu

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (2.1.4)$$

ile verilir. Şimdi (2.1.3) ile verilen integralin  $\alpha$ ' ya göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \quad (2.1.5)$$

bulunur. (2.1.2) eşitliğinden elde edilen  $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$  ve  $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta(x)}{dx}$  ifadeleri (2.1.5)

denkleminde yerine konursa

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx \quad (2.1.6)$$

elde edilir. Burada kısmi integrasyon uygulanır ve  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  sınır koşulları kullanılırsa

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \quad (2.1.7)$$

olur. Geleneksel varyasyon hesabı notasyonuna geçmek için (2.1.7) ifadesi

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx \quad (2.1.8)$$

şeklinde yazılabilir.  $J$  ve  $y$ 'nin varyasyonları  $\delta J \equiv \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha$  ve  $\delta y \equiv \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha$  şeklinde

tanımlandığında (2.1.8) denkleminde

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (2.1.9)$$

yazılır. (2.1.4) ekstremum koşulundan  $\delta J = 0$  olmak zorundadır. Dolayısıyla (2.1.9) bağıntısından

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (2.1.10)$$

elde edilir ve bu eşitlik “Euler denklemi” olarak bilinir.  $J$  çizgi integralinin bir ekstremum değere sahip olması için gerekli koşul (2.1.10) denklemi ile verilir (Marion ve Thornton, 1988). Eğer  $m$  tane bağımlı değişken varsa o zaman Euler denklemleri

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0 \quad i=1, 2, 3, \dots, m \quad (2.1.11)$$

şeklinde yazılır.

Ele alınan sistem için

$$g\{y_i; x\} = g\{y, z; x\} = 0 \quad (2.1.12)$$

kısıtlama denklemi mevcut olsun. Bu durumda (2.1.1) integralinin ekstremum noktaları

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (2.1.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (2.1.14)$$

denklemlerini sağlamak zorundadır. Buradaki  $\lambda(x)$  sistemin çözümünün bir parçası olarak elde edilir ve “Lagrange belirsiz çarpanı” olarak bilinir. Sistem birçok bağımlı değişken ve birçok kısıtlama denkleminin olduğu duruma genelleştirilirse

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_j \lambda(x) \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0 \quad (2.1.15)$$

$$g_j\{y_i; x\} = 0 \quad (2.1.16)$$

denklemlerine sahip olunur. Eğer  $i=1,2,\dots,m$  ve  $j=1,2,\dots,n$  ise (2.1.15) denklemi  $m+n$  bilinmeyenli  $m$  tane denklem içerir. Fakat (2.1.16) kısıtlama denklemi  $n$  tane daha denklem içerdiği için sistem tam olarak çözülebilir.

## 2.2 Lie Türevi

$X$ ,  $M$  manifoldu üzerinde bir teğet vektör alan ve  $\varphi_t$ ,  $X$  tarafından doğurulan  $M$ 'deki 1-parametrelili transformasyonlar grubu olsun.  $M$  üzerinde her  $K$  tensör alanı için,  $X$  vektör alanı yönündeki **Lie Türevi**

$$(\mathfrak{L}_X K)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [K_p - (\varphi_t K)_p] \quad (2.2.1)$$

şekilde tanımlanır (Nakahara, 2003; Stephani, 2003; Hall, 2004). Burada,  $\mathfrak{L}_X$  Lie türev operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i.  $\mathfrak{L}_X (fg) = (\mathfrak{L}_X f)g + f(\mathfrak{L}_X g)$
- ii.  $\mathfrak{L}_X [Y, Z] = [\mathfrak{L}_X Y, Z] + [Y, \mathfrak{L}_X Z]$  (2.2.2)

Burada  $f$  ve  $g$ , fonksiyonlar;  $X$ ,  $Y$  ve  $Z$  vektör alanlarıdır. Lie türev operatörünün bir fonksiyon üzerine etkisi;

$$\mathfrak{L}_X f = Xf \quad (2.2.3)$$

şeklindedir. Bir  $X$  vektör alanı boyunca  $Y$  vektör alanının Lie türevi, Lie parantezi (braket) olarak

$$\mathfrak{L}_X Y = [X, Y] \quad (2.2.4)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.  $Y^a$  kontravaryant vektör alanının Lie türevi

$$\mathfrak{L}_X Y^a = [X, Y]^a = X^b Y^a_{,b} - X^a_{,b} Y^b \quad (2.2.5a)$$

dir ve  $Y_a$  kovaryant vektör alanının Lie türevi



$$\mathcal{L}_X Y_a = X^b Y_{a,b} + X^b{}_{,a} Y_b \quad (2.2.5b)$$

ile verilir. Ayrıca [,.] Lie braketi aşağıdaki özellikleri sağlar.

a. Lineerlik:

$$[X, c_1 Y_1 + c_2 Y_2] = c_1 [X, Y_1] + c_2 [X, Y_2] \quad (2.2.6a)$$

$$[c_1 X_1 + c_2 X_2, Y] = c_1 [X_1, Y] + c_2 [X_2, Y] \quad (2.2.6b)$$

Burada  $c_1$  ve  $c_2$  keyfi sabitlerdir.

b. Anti (Skew)-simetri:

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (2.2.7)$$

c. Jakobi Özdeşliği:

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \quad (2.2.8)$$

### 2.3. Bianchi Sınıflaması

İzometrilere metrik tensörü invariant bırakan dönüşümlerdir. Sonsuz küçük bir izometri  $X$  Killing Vektör (KV) alanıyla tasvir edilir ve

$$\mathcal{L}_X g_{ab} = 0 \Leftrightarrow g_{ab,c} X^c + g_{ac} X^c{}_{,b} + g_{cb} X^c{}_{,a} = 0 \Leftrightarrow X_{a;b} + X_{b;a} = 0 \quad (2.3.1)$$

Killing denklemlerini sağlar. Killing denklemlerinin bir çözümü varsa, uzay-zaman bir *hareket simetrisine* ya da *izometriye* sahiptir denir. İzometri, bir vektörün uzunluğunu koruduğu için katı (*rigid*) hareket olarak da adlandırılabilir. KV alanları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. KV alanlarının lineer kombinasyonu da bir KV alanıdır.
2. Herhangi  $X_1$  ve  $X_2$  KV alanının komütatörü de bir KV alanıdır.
3. Bir manifold, en çok sonlu sayıda lineer bağımsız KV alanını kabul eder.

Bu nedenle bütün KV alanlarının kümesi  $X_a$  baz vektörlü Lie cebri oluştururlar. Bir Lie grubunun cebirsel yapısı, Lie cebrinin bazı  $\{X_a | a=1, \dots, r\}$  alınıp  $X_a$  nın bütün komütatörleri oluşturularak bu Lie cebri ile açıklanabilir.  $a = 1, \dots, r$  olmak üzere  $r$ ,  $G$  ile gösterilen Lie grubunun boyutudur. Üç-boyutlu uzayın Lie cebri dokuz Bianchi tipine sınıflanmıştır (Ellis ve MacCallum, 1969). Lie cebri kapalı (yani  $[X_a, X_b]$  komütatörü Lie cebri içinde tanımlı) olduğundan

$$[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = C^d{}_{ab} X_d \quad (2.3.2)$$

elde edilmelidir. Burada  $C^d{}_{ab}$  ifadelerine Lie cebrinin **yapı sabitleri** denir. Jacobi özdeşliği yapı sabitleri cinsinden yazıldığında

$$C^e{}_{ab} C^d{}_{ec} + C^e{}_{bc} C^d{}_{ea} + C^e{}_{ca} C^d{}_{eb} = 0 \Leftrightarrow C^e{}_{[ab} C^d{}_{c]e} = 0 \quad (2.3.3)$$

elde edilir. Yapı sabitleri kovaryant ( $a$  ve  $b$ ) indislerine göre anti-simetrikler:

$$C^d{}_{ab} = -C^d{}_{ba} \quad (2.3.4)$$

Bir Lie cebri,  $C^d{}_{ab}$  ile donatılmış bir reel vektör uzayı olarak düşünülebilir. Eğer Lie cebrinin boyutu üç ( $r=3$ ) ise;  $C^d{}_{ab}$  yapı sabitleri, özel olarak, uygun bir ayrıştırmaya (dekompozisyona) izin verir. Bu durumda;  $C^d{}_{ab}$  nin antisimetri özelliği kullanılarak aşağıdaki ayrıştırma yapılabilir:

$$C^d{}_{ef} = S^{di} \varepsilon_{ief} + \delta_e^d a_f - \delta_f^d a_e \quad (2.3.5)$$

Burada;  $S^{di}$  simetrik bir tensör,  $\varepsilon_{ief}$  tam antisimetrik tensör ve  $2a_f = C^{d}_{df}$  dir. Bu yüzden;  $C^{d}_{ab}$  nin dokuz bileşenin içeriği,  $S^{di}$  nin altı bileşeni ve  $a_f$  nin üç bileşeni ile temsil edilmiştir. Ancak ve ancak  $a_f$ ,  $S^{di}$  tensörüne ortogonal (dik) yani

$$S^{df} a_f = 0 \quad (2.3.6)$$

ise Jacobi özdeşliği sağlanır. Eğer  $a_f$  sıfırlanır, Lie cebri A sınıfıdır denir. Bu durumda (2.3.6) denkleminin sağlandığı aşıkardır ve Lie cebri, tam olarak,  $S^{di}$  tensörünün işareti ile karakterize edilir. Eğer  $a_f$  sıfır değilse, Lie cebri B sınıfıdır. Üç-boyutlu uzayda, dokuz tane eşdeğer olmayan farklı Bianchi tiplerini veren cebirsel sınıflama aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned}
\text{Bianchi I} & : [X_i, X_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \\
\text{Bianchi II} & : [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = 0, \\
\text{Bianchi III} & : [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \\
\text{Bianchi IV} & : [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1 + X_2, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \\
\text{Bianchi V} & : [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_2, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad (2.3.7) \\
\text{Bianchi VI} & : [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = qX_2, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad (q \neq 0, 1) \\
\text{Bianchi VII} & : [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad q^2 < 0 \\
\text{Bianchi VIII} & : [X_1, X_2] = X_1, [X_2, X_3] = X_3, \quad [X_3, X_1] = -2X_2, \\
\text{Bianchi IX} & : [X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.
\end{aligned}$$

Her bir Bianchi tipi durumundaki KV alanlar

$$\begin{aligned}
\text{Bianchi I} & : \bar{X}_{(1)} = \partial_x, \bar{X}_{(2)} = \partial_y, \bar{X}_{(3)} = \partial_z \\
\text{Bianchi II} & : \bar{X}_{(1)} = \partial_y, \bar{X}_{(2)} = \partial_z, \bar{X}_{(3)} = \partial_x + z\partial_y \\
\text{Bianchi III} & : \bar{X}_{(1)} = \partial_z, \bar{X}_{(2)} = \partial_x, \bar{X}_{(3)} = \partial_y + (x - Az)\partial_z + (z - Ax)\partial_x \\
\text{Bianchi IV} & : \bar{X}_{(1)} = \partial_z, \bar{X}_{(2)} = \partial_x, \bar{X}_{(3)} = \partial_y - z\partial_z - (z + x)\partial_x \\
\text{Bianchi V} & : \bar{X}_{(1)} = \partial_z, \bar{X}_{(2)} = \partial_x, \bar{X}_{(3)} = \partial_y - z\partial_z - x\partial_x \quad (2.3.8) \\
\text{Bianchi VI} & : \bar{X}_{(1)} = \partial_z, \bar{X}_{(2)} = \partial_x, \bar{X}_{(3)} = \partial_y + (x - Az)\partial_z + (z - Ax)\partial_x
\end{aligned}$$

$$\text{Bianchi VII: } \vec{X}_{(1)} = \partial_z, \vec{X}_{(2)} = \partial_x, \vec{X}_{(3)} = \partial_y + (x - Az)\partial_z - (z + Ax)\partial_x$$

$$\text{Bianchi VIII: } \vec{X}_{(1)} = \partial_x, \vec{X}_{(2)} = \sec hz \cosh x \partial_y + \sinh x \partial_z - \tanh z \cosh x \partial_x,$$

$$\vec{X}_{(3)} = \sec hz \sinh x \partial_y + \cosh x \partial_z - \tanh z \sinh x \partial_x$$

$$\text{Bianchi IX : } \vec{X}_{(1)} = \partial_x, \vec{X}_{(2)} = \sec z \cos x \partial_y + \sin x \partial_z - \tan z \cos x \partial_x,$$

$$\vec{X}_{(3)} = -\sec z \sin x \partial_y + \cos x \partial_z + \tan z \sin x \partial_x$$

ile verilirler (Ryan ve Shepley, 1975).

## 2.4 Genel Relativite Teorisi

Bir  $m$  kütlelerinin  $r$  uzaklıktaki başka bir  $M_G$  kütlelerine etki ettiği kuvvet Newton'un kütle çekim yasası olarak bilinir. Newton çekim yasası, özel relativite teorisi ile üç farklı durumda çelişkiye düşmektedir. Birincisi; Newton yasası skalerler içerdiği için bu yasayı invariyantlara göre tekrar yazmanın yolu açık değildir. İkincisi; Newton yasası zamana açık bir şekilde bağlı değildir. Bu yüzden kütle çekim (gravitasyonel) etkileri, evrendeki her yerel bölgeye aynı anda yayılır. Üçüncüsü;  $M_G$  kütle Newton'un ikinci yasasındaki eylemsiz kütleden tamamen bağımsızdır. Fakat bu iki kütle bilinmeyen bir nedenden dolayı  $10^{-13}$  mertebesinde eşit olurlar. Dolayısıyla inşa edilecek tutarlı bir teori söz konusu iki kütle arasında bir ilişki kurmak zorundadır. Mach, bir cismin eylemsizlik kütlelerinin bütün evrenin kütlesi ile bağlantılı olduğunu düşünmüştür. Einstein, "Mach prensibi" olarak bilinen bu düşünceden oldukça etkilenmiş ve genel görelilik üzerine yaptığı ilk çalışmalarda bu prensibi temel almıştır. Einstein'ın "eşdeğerlik prensibine" göre; sınırlı bir uzay bölgesi göz önüne alındığında, fiziksel ölçümlerle, ivmeli (eylemli) referans sistemi ile gerçek gravitasyonel kuvvetleri birbirinden ayırt edebilmek mümkün olmamaktadır.

Herhangi bir eylemsiz (ivmesiz ve ya düzgün değişen ivmeli) referans sisteminde Newton'un ikinci yasası, özel relativite teorisi altında invariyant olmasına rağmen ivmeli referans sistemlerinde invariyant değildir. Fakat Einstein'ın "Genel Kovaryans İlkesi", bütün fizik yasalarının tüm referans sistemlerinde aynı kalması gerektiğini söyler. Einstein bir adım daha ileri giderek genel kovaryans ilkesi ile eşdeğerlilik prensibini birleştirerek, kütleli bir cismin homojen olmayan gravitasyonel alanın eğri uzay-zamana eşdeğer olduğunu söylemiştir. Einstein kütle çekim yasası olarak bilinen bu birleştirme, genel kovaryant tensör denklemleriyle tasvir edilmek zorundadır. Bu nedenle gravitasyon

yasasının, uzay-zaman eğriliği ve madde yoğunluğu arasında kovaryant bir ilişkiye sahip olması gerekmektedir (Ross, 2003). Dolayısıyla GRT, gravitasyonel alanlar ile uzay-zamanın geometrisi arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Genel Relativite Teorisi,

$$I = \frac{-1}{16\pi G} \int L_{E-H} d^4x + \int L_M d^4x \quad (2.4.1)$$

ile verilen etki fonksiyonelinin,  $L_{E-H} = \sqrt{-g}R$  ve  $L_M = \Lambda\sqrt{-g}$  Lagrange fonksiyonellerinin (yani dinamik değişkenlerin) varyasyonu altında değişmez (invariant) kalması koşulu sonucu ortaya çıkan bir teodir.  $L_{E-H}$  fonksiyoneline Einstein-Hilbert Lagrange fonksiyoneli,  $L_M$  fonksiyoneline ise madde alanının Lagrange fonksiyoneli adı verilir. Einstein alan denklemleri (veya gravitasyonel alanın hareket denklemleri), (2.4.1) ile verilen  $I$  etkisinin  $g_{ab}$  metrik tensörüne göre varyasyonu alınıp minimize edilmesiyle elde edilmektedir. Bu işlem sonucu teonin denklemleri, yani Einstein Alan Denklemleri (EFE)  $\kappa = 8\pi G/c^4$  olmak üzere

$$G_{ab} = \kappa T_{ab} \quad (2.4.2)$$

şeklini alır. Burada  $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$  Einstein tensörü,  $R_{ab}$  Ricci tensörü,  $R$  Ricci (eğrilik) skaleri,  $g_{ab}$  metrik tensör ve  $T_{ab}$  enerji-momentum tensörünün bileşenleridir. Enerji-momentum tensörü simetriktir ve

$$T^{ab}_{;c} = 0 \quad (2.4.3)$$

korunum yasasını (Bianchi Özdeşliği) sağlar.

Dört-boyutlu uzay-zamanda

$$ds^2 = g_{ab}(x^c)dx^a dx^b \quad a, b, c = 0, 1, 2, 3 \quad (2.4.4)$$

yay elemanı verildiğinde; bu uzay-zamana ait Ricci tensörü, Ricci skaleri ve dolayısıyla Einstein tensörü bulunabilir. (2.4.2) ile verilen EFE'nin sol tarafı uzay-zamanın geometrisini gösterirken sağ tarafı madde dağılımını vermektedir. Einstein alan denklemleri, ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemi olduğu için bu denklemleri çözmek oldukça zordur. Bu denklemlerin kesin çözümlerinin bulunmasında kullanılan yöntemlerden birisi, dikkate alınan uzay-zaman metriği üzerinde bazı simetri kabulleri yapmaktır. Ayrıca; Lagrange fonksiyonelinin varyasyonu alınarak elde edilen Euler-Lagrange hareket denklemlerine çözüm bulmak için de simetri yaklaşımı kullanılmaktadır.

### 2.5 Standart Kozmolojik Model

Gözlemsel gerçeklerle uyumlu bir evren modeli oluşturulmak istendiğinde aşağıdaki varsayımların kabul edilmesi gerekir:

1. GRT, gravitasyonu tam olarak tasvir etmelidir.
2. Evrenin büyük ölçekte ( $10^6$  ışık yılından büyük ) homojen ve izotrop olduğunu ifade eden “Kozmolojik Prensip” geçerli olmalıdır.
3. “Hidrodinamik yaklaşım” gereği, madde dağılımını akışkan gibi düşünülmelidir.

Evrenin homojenliğini ve izotropluğunu ifade eden en genel uzay-zaman metriği FRW modelidir ve şu şekilde verilir:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.5.1)$$

Burada “ $t$ ” zaman,  $r, \theta$  ve  $\phi$  uzay koordinatlarıdır.  $a(t)$  evrenin ölçek çarpanı olarak bilinir ve evrenin genişlemesinin ölçüsü hakkında bilgi verir.  $k$  eğrilik parametresi olup  $k = +1$  (pozitif eğrilikli uzay-zaman),  $k = 0$  (düz uzay-zaman) ve  $k = -1$  (negatif eğrilikli uzay-zaman) değerlerini alır.

Hidrodinamik yaklaşım için, evrenin madde dağılımını veren ve FRW metriğinin simetrisine uygun en basit enerji-momentum tensörü ideal akışkandır. Bir ideal akışkan,

zamana bağlı  $\rho$  enerji yoğunluğu ve  $p$  basıncı ile karakterize edilir. İdeal akışkan için enerji-momentum tensörü

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab} \quad (2.5.2)$$

formundadır. Burada  $u_a$  akışkanın dörtlü hızıdır ve FRW modeli için  $u_a = (-c, 0, 0, 0)$  şeklindedir. FRW metriği ve (2.4.2) enerji-momentum tensörü dikkate alındığında Einstein alan denklemleri

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (2.5.3)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} p \quad (2.5.4)$$

şeklinde bulunur. Burada nokta (.) kozmik zamana göre türevi göstermektedir. (2.4.3) ile verilen Bianchi özdeşliğinden

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (2.5.5)$$

*korunum denklemi* elde edilir (korunum denklemi (2.5.3) ve (2.5.4) denklemlerinden de elde edilebilir). Ortaya çıkan bu denklem sistemi üç tane bilinmeyen ( $a(t)$ ,  $\rho(t)$  ve  $p(t)$ ) içerdiği için tam olarak çözülemez. Çünkü birbirinden bağımsız iki denklemden oluşmaktadır. Dolayısıyla (2.5.3) ve (2.5.4)'den oluşan bu denklem sisteminin çözülebilmesi için üçüncü bir denkleme ihtiyaç vardır.

(2.5.3) denkleminde,  $\dot{a}$  genişleme oranı elde edilir.  $\rho(t)$  enerji yoğunluğu arttıkça bu oran artmaktadır. (2.5.4) denkleminde (2.5.3) denklemini çıkartılırsa

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) \quad (2.5.6)$$

bulunur. Bu denklemden, basınç ve enerji yoğunluğunun artmasıyla genişleme ivmesinin azaldığı görülmektedir. Bu nedenle, genişlemenin yavaşlamasından bahsedilmesi daha

uygundur. Bugün  $\dot{a} \geq 0$  iken; eğer geçmişte  $(\rho c^2 + 3p)$  daima pozitif olsaydı o zaman  $\frac{\ddot{a}}{a}$  daima negatif olurdu. Bu yüzden geçmişte sonlu bir anda  $a$  sifıra eşit olmalıdır. Büyük patlama (big bang) olarak adlandırılan bu olayın genellikle  $t=0$  zamanında oluştuğu düşünülür.  $a=0$  olduğunda bir tekillik vardır ve geçmişteki bu tekilliği tahmin etmek, klasik genel relativite çerçevesinde mümkün değildir.

(2.5.3) denklemi  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$  Hubble Parametresi cinsinden tekrar yazılırsa

$$\frac{kc^2}{a^2 H^2} = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} - 1 \equiv \Omega - 1 \quad (2.5.7)$$

olur. Burada  $\rho_c = 3H^2/8\pi G$  olmak üzere  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$  dir.  $\rho_c$  evrenin kritik yoğunluğu ve  $\Omega$  yoğunluk parametresi olarak bilinir. Evrenin,  $\rho > \rho_c$  durumunda kapalı (pozitif eğrilikli) ve  $\rho < \rho_c$  durumunda ise açık (negatif eğrilikli) olduğu söylenir. (2.5.7) eşitliğine bakıldığında eğrilik ve yoğunluk parametresi arasında aşağıdaki ilişki görülmektedir

$$k=1 \Rightarrow \Omega > 1,$$

$$k=0 \Rightarrow \Omega = 1,$$

$$k=-1 \Rightarrow \Omega < 1.$$

(2.5.4) denkleminde,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  kullanılarak

$$\frac{kc^2}{a^2} + H^2(1-2q) = -\frac{8\pi G p}{c^2} \quad (2.5.8)$$

elde edilir. Burada,

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (2.5.9)$$



boyutsuz bir nicelik olan *yavaşlama parametresidir* (Berman, 1983). Bu parametre, evrenin genişleme hızının yavaşlamasının bir ölçüsünü verir. (2.5.6) denklemi kullanılarak FRW evren modeli durumundaki yavaşlama parametresi için

$$q = \frac{\Omega}{2} \left( 1 + \frac{3p}{\rho c^2} \right) \quad (2.5.10)$$

elde edilir.

(2.5.3) Friedmann denkleminde  $a(t)$  ölçek çarpanı zamanın fonksiyonu olarak bulunmak istendiğinde, (2.5.5) korunum denkleminde enerji yoğunluğunun  $a$ 'nın fonksiyonu olarak bulunması gerekir. Bu amaçla, ideal akışkan için

$$p = w\rho \quad (2.5.11)$$

*durum denklemi* kullanılır.  $w=0$  değeri maddenin,  $w=1/3$  ışınımın ve  $w=-1$  ise vakumun baskın olduğu evren durumuna karşılık gelir. Dolayısıyla, (2.5.11) durum denklemi, (2.5.5) korunum denkleminde kullanılır ve ortaya çıkan diferansiyel denklem  $\rho$  için çözülürse

$$\rho \propto a^{-3(w+1)} \quad (2.5.12)$$

olduğu görülür.  $k=0$  iken, maddenin baskın olduğu evrende ( $w=0$ ,  $p=0$ ) (2.5.3) denkleminde

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad (2.5.13)$$

elde edilir. Bu çözüm, Einstein de Sitter çözümü olarak bilinir. Burada, (2.5.9) denkleminde yavaşlama parametresi  $q=1/2$  olur. Günümüzdeki Hubble sabiti

( $H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$ ) ile evrenin yaşı ( $t_0$ ) arasında, (2.5.13) kullanıldığında

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6,52 \times 10^9 h^{-1} y \quad (2.5.14)$$

ilişkisi bulunur. Burada “0” alt indisi günümüzdeki değerleri göstermekte olup  $H_0 = 100h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc} = h/9.78Gy$  alınmaktadır (Ross, 2003). (2.5.13) ile verilen  $a(t)$  için belirli bir  $t$  anındaki enerji yoğunluğu

$$\rho = \frac{1}{16 \pi G t^2} \quad (2.5.15)$$

olur.

Işınımın baskın olduğu everende  $k=0$  iken,  $\rho \propto a^{-4}$  ve ölçek çarpanı  $a(t) \propto t^{1/2}$  olur. Bu durumda  $q=1$  dir ve evrenin yaşı  $t_0 = \frac{1}{2H_0}$  olmaktadır. Belirli bir  $t$  anındaki enerji yoğunluğu ise  $\rho = \frac{3}{32 \pi G t^2}$  dir. Eğer evren vakum durumunda (yani  $w=-1$ ) ise (2.5.3) denkleminde  $a(t) \propto e^{Ht}$  bulunur. Böylece (2.5.9) ifadesinden  $q=-1$  olur ve evrenin yaşının sonsuz olduğu sonucu çıkar. Bu tür modellere “de Sitter Modeli” adı verilmektedir.

Standart kozmoloji, Planck zamanına ( $t \approx 10^{-43} s$ ) kadar evrenin evrimini açıklamakta oldukça başarılıdır. Modelin bu başarısına rağmen açıklayamadığı bazı problemleri vardır. Bunlar,

- i. Evrenin bugün neredeyse düz olduğu ile alakalı düzlük problemi (Flatness Problem)
- ii. Evrenin büyük ölçekte homojen ve izotrop olması durumuyla alakalı ufuk (horizon) problemi,
- iii. Manyetik tek kutuplu parçacıkların varlığı ile alakalı tek kutup (monopole) problemi olarak özetlenebilir (Ryden, 2003).

*i. Düzlük Problemi:* Uzay-zamanın yapısıyla ilgili düzlük problemini incelemek için

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2} = \frac{|k|}{\dot{a}^2} \quad (2.5.16)$$

denklemini ele alalım. Evrendeki ışınımın baskın olduğu dönemde

$$|\Omega - 1| \propto t \quad (2.5.17)$$

ve maddenin baskın olduğu dönemde ise

$$|\Omega - 1| \propto t^{2/3} \quad (2.5.18)$$

şeklinindedir. Her iki dönemde de  $|\Omega - 1|$  zamanla artmaktadır. Bu çözümler  $\Omega$ 'nın 1'e yakın olduğu koşul dikkate alınırsa sağlanır. Bu yüzden  $\Omega = 1$  ( $k = 0$ ) olması evren için kararsız durumdur. Eğer  $\Omega$ 'dan herhangi bir sapma varsa evren hızlı bir şekilde eğrilmiş olacaktır. Bu durumda evren ya Planck zamanında maksimum boyutuna ulaşır ve sonrada tekelliğe çökecek ya da çok küçük enerji yoğunluğuna dağılacaktır (Ross,2003).

**ii. Ufuk Problemi:** Gökyüzünün karşıt iki bölgesinden yayılan mikrodalga fotonların daima aynı sıcaklıkta ve termal dengede olduğu görülür. Bu durum için en doğal açıklama, farklı bölgeler arasındaki etkileşmeler yoluyla evrenin gerçekten termal bir denge durumuna ulaşmış olmasıdır. Fakat büyük patlama teorisinde bu mümkün değildir. Çünkü sonlu ufuk boyutundan dolayı mikrodalga fotonları yayılmadan önce bu bölgelerin birbirleriyle etkileşmeleri için yeterli zaman yoktur (Liddle,1999).

**iii. Tek kutup problemi:** Modern parçacık fizik teorileri, gözlemleri ihlal eden çeşitli egzotik parçacıkların varlığını öngörmektedir. Bunlar manyetik tek kutuplar, Domain duvarlar (Walls), süpersimetrik parçacıklar, kozmik sicimler (strings) vb dir. Bu tür kalıntıların evrenin erken döneminde, ışınım dönemi boyunca yaratılmış olması beklenir. Fakat günümüz gözlemleri bu parçacıkların varlığına dair hiçbir kanıt bulamamıştır (Liddle,1999).

Alan Guth 1981 yılında bütün bu kozmik problemlerin çözümü olarak şişme (inflation) modelini ortaya atmıştır (Guth,1981). Bu modele göre evren,  $10^{-35}$  inci saniyede büyük bir patlamayla neredeyse bugünkü büyüklüğüne ulaşmıştır. Şişme modeli, ölçek çarpanının  $\ddot{a} > 0$  olduğu durum boyunca evrenin evriminde bir dönem olarak tanımlanır (Liddle, 2003).  $\ddot{a} > 0$  olması, evrenin ivmelenerek genişlemesi durumuna karşılık gelir.

(2.5.6) ivmelenme denkleminde bakıldığında  $\ddot{a} > 0$  ise  $\rho + 3p < 0$  olmalıdır. Bu durum, yoğunluğun daima pozitif olduğu varsayıldığı için negatif bir basınç ile sağlanır. Yani,

$$p < -\frac{\rho}{3} \quad (2.5.19)$$

koşulu sağlanmalıdır. Şişerek genişlemenin en klasik örneği  $\Lambda$  kozmolojik sabitine sahip evrendir (Einstein, evrenin statik olabileceği düşüncesiyle kozmolojik sabiti denklemlerinin sol tarafına eklemiştir). Bu, (2.5.19) koşulunu sağlayan  $p = -\rho$  durum denkleminde sahip olmaya denktir.

Madde terimleri ve eğriliği içeren Friedmann denklemi

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.5.20)$$

biçimindedir. Bu denklemin sağ tarafındaki bütün terimler dikkate alındığında çözüm oldukça karmaşıktır. Fakat sağ taraftaki ilk iki terim evren genişledikçe hızlı bir şekilde azalacağı için bu terimler ihmal edilebilir. Dolayısıyla

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} \quad (2.5.21)$$

olur. Bu denklemin çözümünden,  $a(t)$  evrenin ölçek çarpanı

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \quad (2.4.22)$$

şeklinde bulunur. Bu yüzden; kozmolojik sabitin baskın olduğu evrende, evrenin genişlemesi çok hızlı bir şekilde meydana gelir.

## BÖLÜM 3 MATERYAL VE YÖNTEM

### 3.1. Genelleştirilmiş Gravitasyon Teorileri

#### 3.1.1. Brans-Dicke Skaler Tensör Teorisi

Uzun-menzilli kuvvetlerin, gravitasyonel alan ve elektromanyetik potansiyel tarafından taşındığı bilinmektedir. Bu yüzden; diğer uzun-menzilli kuvvetlerin, skaler alanlar tarafından üretildiğini beklemek doğaldır. Dicke, gravitasyonel teorilerin kavramsal temelini tartışılmasında öncü olmuştur. Skaler alanın gravitasyon ile birlikte ele alındığı en iyi teori Brans-Dicke teorisidir (Bazen Jordan-Brans-Dicke teorisi olarak bilinir). Bu teori geçtiğimiz 50 yılda geniş bir çalışma konusu olmuştur. Brans ve Dicke'nin başlangıç noktası; eylemsizlik olayının, evrenin genel kütle dağılımına göre ivmelenmesinden ortaya çıkabildiğini ifade eden Mach Prensibidir (D'Inverno,1992). Brans ve Dicke, alternatif bir teori olarak, Einstein-Hilbert etki integraline  $\Phi$  skaler alanını yerleştirerek, gravitasyonun skaler tensör teorisini önermiştir. Bu teoriye göre gravitasyon sabiti, skaler alan ile yer değiştirmekte ve evrendeki bütün maddeyi skaler alan oluşturmaktadır (Brans ve Dicke,1961; Weinberg, 1972).

Brans ve Dicke'nin önerdiği Lagrangian

$$L_{BD} = \sqrt{-g} \left( \Phi_{BD} R - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi_{BD}} \nabla_{,a} \Phi \nabla^{,a} \Phi \right) \quad (3.1.1.1)$$

şeklindedir. Burada,  $\Phi_{BD} R$  terimi minimal olmayan çiftlenim terimidir. İkinci terim ise  $\Phi$  skaler alanının kinetik enerji ile ilgili terimine benzemektedir.  $L_{BD}$  Brans-Dicke Lagrangianındaki  $\Phi_{BD} R$  terimi, Einstein-Hilbert Lagrangianı

$$L_{EH} = \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} R \quad (3.1.1.2)$$

ile kıyaslanırsa

$$\Phi_{BD} = \frac{1}{16\pi G} \quad (3.1.1.3)$$

tanımı yapılabilir (Fujii ve Maeda, 2004). Buradan görülüyor ki Brans-Dicke teorisinde, gravitasyon sabiti  $\Phi$  skaler alanı ile yer değiştirmektedir. Bu teori GRT'ye göre fazladan sadece  $\omega$  parametresine sahiptir.

Brans-Dicke teorisi  $\omega \rightarrow \infty$  limitinde ( $\omega$ : Brans-Dicke parametresi) Einstein Genel Relativite teorisine indirgenmektedir. Bu parametre, genel relativitenin klasik testleri sonucu kısıtlamalara maruz kalmıştır. Işığın sapması ve zaman gecikmesi  $\omega > 500$  olması gerektiğini, kozmik arka alan fon ışınımı anizotropisi üzerindeki sınırlamalar  $\omega < 30$  olması gerektiğini söylemektedir. Son zamanlarda  $\omega$  nın negatif değeri Brans-Dicke kozmolojisinde evrenin geç-zaman ivmelenmesine götürdüğü gösterilmiştir (Sen ve Sen, 2001). Bundan dolayı, skaler tensör teorisinin tutarlı bir modeli  $\omega$ 'nın zamanın fonksiyonu olması gerektiğini göstermektedir (Sanyal, ,2003; Sanyal ,2005).

Brans-Dicke teorisi, *skaler tensör teorileri* olarak adlandırılan gravitasyon teorisine genelleştirilebilir. En genel formda skaler-tensör teorileri şu şekilde verilir:

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f(\Phi, R) - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \Phi_{,a} \Phi^{,a} - U(\Phi) \right] \quad (3.1.1.4)$$

Burada  $f(\Phi, R)$ ,  $\Phi$  skaler alanın ve  $R$  Ricci skalerinin fonksiyonudur. (3.1.1.4) ile verilen etki integralinin  $g_{ab}$  metrik tensörüne göre varyasyonu alındığında alan denklemleri,

$$f_R R_{ab} - \frac{1}{2} f g_{ab} - \frac{\omega}{\Phi} \Phi_{,a} \Phi_{,b} - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Phi} g_{ab} \Phi_{,c} \Phi^{,c} - f_{;ab} + g_{ab} \square f + \frac{1}{2} g_{ab} U = 0 \quad (3.1.1.5)$$

şeklinde bulunur. (3.1.1.4) etki integralinin  $\Phi$  skaler alanına göre varyasyonu alındığında ise,

$$2\frac{\omega}{\Phi}\square\Phi + f' - \left(\frac{\omega'}{\Phi} - \frac{\omega}{\Phi^2}\right)\Phi_{,a}\Phi^{,a} - U'(\Phi) = 0 \quad (3.1.1.6)$$

Klein-Gordon denklemi elde edilir. Burada  $f_R \equiv \frac{\partial f(\Phi, R)}{\partial R}$  ve  $f' \equiv \frac{\partial f(\Phi, R)}{\partial \Phi}$  şeklinde tanımlanmıştır.

Brans-Dicke teorisi, indirgenmiş (induced) gravitasyon teorisi (Zee, 1979) ve minimal olmayan çiftlenmiş gravitasyon teorileri, skaler tensör teorisinin özel durumlarıdır. Bu genel form  $f(\Phi, R) = F(\Phi)R$  olmak üzere,

$$F(\Phi) = \Phi, \quad \omega = \omega_0 \quad (3.1.1.7)$$

( $\omega_0$  sabit) alındığında Brans-Dicke teorisine indirgenmektedir.

$$F(\Phi) = \varepsilon\Phi^2, \quad \omega = \frac{\Phi}{2} \quad (3.1.1.8)$$

alındığında ise indirgenmiş gravitasyon teorisi için etki integrali elde edilir ( $\varepsilon$  boyutsuz bir sabittir).  $\xi$  çiftlenim sabiti olmak üzere, standart minimal olmayan skaler alan teorisi için

$$F(\Phi) = 1 - \xi\Phi^2, \quad \frac{\omega}{\Phi} = \frac{1}{2} \quad (3.1.1.9)$$

alınmaktadır.

$$F(\Phi) = \frac{\Phi^2}{6}, \quad \omega(\Phi) = \frac{\Phi}{2} \quad (3.1.1.10)$$

ise konformal çiftlenmiş gravitasyon teorisi (Kofman ve Mukohyama, 2008) elde edilir. Son olarak (3.1.1.4) ile verilen genel form,



$$F(\Phi) = \frac{1}{2}, \quad \omega(\Phi) = \frac{\Phi}{2} \quad (3.1.1.11)$$

alındığında skaler alanlı Einstein-Hilbert etki integraline indirgenir.

### 3.1.2. $f(R)$ Teorisi

Son yıllarda süpernova tip Ia (Riess,1998; Pelmutter, 1999), kozmik mikrodalga arka alan anizotropisi verileri (Bennet ve ark.,2003) ve büyük ölçekteki yapılara (Tegmark ve ark., 2004) ait gözlemler göstermiştir ki, evrenin genişleme hızı artmaktadır (accelerating expansion). Bu ivmelenmeyi GRT çerçevesinde açıklayabilmek için birçok düşünce ortaya atılmıştır. Bunlardan en dikkate değer olanlardan birisi *karanlık enerji* (Patmanabhan, 2003) olarak bilinen gizemli bir kozmik akışkan düşüncesidir. Diğer taraftan Einstein-Hilbert etki integraline bazı terimler eklenerek modifiye olmuş gravitasyon teorileri inşa edilmiş ve bu bağlamda kozmik ivmelenme açıklanmaya çalışılmıştır. Eklenen bu terimler, FRW metriği için alan denklemlerinin çözümlerinin ivmelenmeye neden olacak çözümler olduğunu göstermiştir (Nojiri ve ark., 2006; Atazadeh ve Sepangi, 2007).

$f(R)$  teorileri ilk kez Buchadahl (1970) tarafından çalışılmıştır. Bu teori, Einstein-Hilbert etki integralindeki  $R$  Ricci skaleri yerine  $R$ 'nin analitik bir fonksiyonu olan  $f(R)$  nin alınması şeklinde ortaya konulmuştur. Son zamanlarda, literatürde  $f(R)$  teorisi çerçevesinde birçok farklı fonksiyonel şekil önerilmiştir.  $f(R)$  fonksiyonunun bu açık şekilleri farklı içeriklerde tartışılmıştır. Bu içerikler;  $f(R)$  nin kararlılık koşulları ile ilgili konular (Dolgov ve Kawasaki, 2003; Faroni, 2006; Bohmer ve ark., 2007), şişme dönemi ile ilgili konular (Barrow ve Hervik, 2006), geç-zaman kozmolojik evrim (Capozzilello ve ark., 2007a), güneş sistemi testleri (Nojiri ve Odintsov, 2003) ve enerji koşulları (Santos ve ark.,2007) şeklinde sıralanabilir.

4-boyutlu uzay-zamanda  $f(R)$  teorisi için toplam etki integrali

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R)] + A_m(g_{ab}, \psi) \quad (3.1.2.1)$$

şeklindedir (Carloni ve ark., 2005; Poplawski, 2006; Sawicki ve Hu, 2007; Hu ve Sawicki, 2007; Starobinsky, 2007; Li ve Barrow, 2007; Bertolami ve ark., 2007; Nojiri ve Odintsov, 2008; Azadi ve ark., 2008; Amendola ve Tsujikawa, 2008; Capozziello ve Tsujikawa, 2008; Cognola ve ark., 2009; Sotiriou ve Faraoni, 2010 ). Burada  $8\pi G = 1$  alınmıştır.  $A_m$ , madde için etki integralidir ve  $\psi$  toplam madde alanını göstermektedir.

Lineer olmayan bir  $f(R)$  Lagrangianı dikkate alındığında metrik için hareket denklemleri eşdeğer olmayan iki yolla elde edilir. Bir taraftan standart metrik formalizmi ile alan denklemleri elde edilir. Bu formalizmde hareket denklemlerini elde etmek için etki integralinin metriğe göre varyasyonu alınır ve sonuçta dördüncü mertebeden diferansiyel denklem sistemi ortaya çıkar. Diğer taraftan, metrik ve bağlantının (connection) bağımsız alanlar oldukları varsayılır. Alan denklemleri metrik ve bağlantıya göre varyasyon alınarak elde edilir (Palatini Formalizmi). Bu durumda elde edilecek olan hareket denklemleri ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerdir. Eğer  $f(R)$ ,  $R$  nin lineer fonksiyonu ise (yani GRT ve GRT+ kozmolojik sabit) metrik ve Palatini formalizmi aynı alan denklemlerini verir (Olmo, 2007).

Bu çalışmada metrik formalizmi kullanılacaktır. (3.1.2.1) etki integralinin metrik tensöre göre varyasyonu alındığında alan denklemleri şu şekilde bulunur:

$$f_R(R)R_{ab} - \frac{1}{2}f(R)g_{ab} - \nabla_a \nabla_b f_R(R) + g_{ab} \square f_R(R) = T^{(m)}_{ab} \quad (3.1.2.2)$$

Burada  $T^{(m)}_{ab}$  madde için enerji-momentum tensörüdür ve tanımı

$$T^{(m)}_{ab} = \frac{-2\delta S_m}{\sqrt{-g} \delta g^{ab}} \quad (3.1.2.3)$$

ile verilir.  $f_R(R) \equiv \frac{df(R)}{dR}$  olarak tanımlanır,  $\nabla_a$  kovaryant türevi göstermektedir ve

$\square = \nabla^a \nabla_a$  biçimindedir. (3.1.2.2) denklemi, eşitliğin sol tarafındaki son iki terimden dolayı

dördüncü mertebeden diferansiyel denklem sistemidir.  $f_R$  sabit olduğu zaman dördüncü mertebeden terimler sıfırlanır ve  $f(R) = R$  standart Einstein denklemlerine indirgenir. Ayrıca (3.1.2.2) denkleminin izi (trace) alınırsa,  $T = g^{ab}T^m_{ab}$  olmak üzere

$$Rf_R - 2f + 3\Box f_R(R) = T \quad (3.1.2.4)$$

bulunur.

### 3.2. Noether Simetri Yaklaşımı

Parçacık sayısı  $n$  tane olan bir sistemin durumunu belirtmek için  $n$  tane yer (konum) vektörü kullanılır. Her yer vektörü, 3 tane dik koordinat içerdiğinden, bütün parçacıkların konumlarını belirlemek için  $3n$  tane koordinat gereklidir. Eğer sistemdeki kısıtlama sayısı  $m$  ise, sistemin durumu  $s = 3n - m$  tane koordinatla (*Genelleştirilmiş Koordinatlar*) tamamen belirlenebilir. Bu yüzden böyle bir sistemin durumu, konfigürasyon uzayı denilen,  $s$ -boyutlu uzayda bir nokta ile gösterilebilir. Bu uzayın her bir boyutu,  $q_j$  koordinatlarından birine karşılık gelir. Bir sistemin zaman içindeki yapısı, konfigürasyon uzayında bir eğri ile gösterilebilir; bu eğri, özel bir anda sistemin *konfigürasyonunu* ifade eden her bir noktadan oluşmaktadır. Böyle her noktadan, sistemin mümkün hareketlerini gösteren sonsuz sayıda eğri geçtiği için; her bir eğri, özel bir başlangıç koşulları kümesine karşılık gelir.

Nokta,  $t$ 'ye göre türevi göstermek üzere,  $TQ \equiv \{q_i(t), \dot{q}_i(t)\}$  konfigürasyon (teğet) uzayında tanımlı  $L$  Lagrange fonksiyonu dikkate alınsın. Bu durumda;  $\bar{\mathbf{X}}$  vektör alanı

$$\bar{\mathbf{X}} = \alpha^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{\alpha}^i(q) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \quad (3.2.1)$$

boyunca  $L$ ' nin Lie türevi

$$\mathfrak{L}_{\bar{\mathbf{X}}} L \equiv \bar{\mathbf{X}}L = \alpha^i(q) \frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{\alpha}^i(q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (3.2.2)$$

ile verilir. Böylece

$$\mathfrak{L}_{\bar{X}}L=0 \quad (\text{Noether Teoremi}) \quad (3.2.3)$$

şartı; faz akısının (phase flux)  $\bar{X}$  boyunca korunduğunu ifade eder (Capozziello ve Lambiase, 2000). Bu şu anlama gelir;  $L$  için bir hareket sabiti mevcuttur ve Noether Teoremi sağlanmaktadır. Aslında;

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (3.2.4)$$

Euler-Lagrange denklemleri dikkate alındığında, (3.2.2) eşitliğinden

$$\frac{d}{dt} \left( \alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \mathfrak{L}_{\bar{X}}L \quad (3.2.5)$$

bulunur. Eğer (3.2.3) şartı sağlanıyor ise

$$\sum_0 = \alpha^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (3.2.6)$$

ifadesi bir hareket sabitidir. Alternatif olarak Cartan 1-form

$$\theta_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \quad (3.2.7)$$

ve  $i_{\bar{X}}$  iç türev operatörü olmak üzere,

$$i_{\bar{X}}\theta_L = \langle \theta_L, \bar{X} \rangle = (\theta_L)_i X^i \quad (3.2.8)$$

iç türev tanımı, yapıldığında, (3.2.3) koşulu sağlanırsa (3.2.6) denkleminde

$$i_{\bar{X}}\theta_L = \sum_0 \quad (3.2.9)$$

elde edilir. Bu gösterim, *dönümlü* (cyclic) değişkenler tanımlamak için daha kullanışlıdır. Eğer bir sistemin Lagrangianı  $q^i$  koordinatlarını içermiyorsa yani  $\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$  ise  $q^i$  koordinatlarının dönümlü ya da ihmal edilebilir olduğu söylenir. Bu tanım genel değildir fakat Lagrange mekaniğinde çok kullanışlıdır. Bir dönümlü koordinat için Lagrange hareket denklemleri

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \quad (3.2.10)$$

denkleminde indirgenir. Yani

$$\frac{dp^i}{dt} = 0 \quad (3.2.11)$$

olur. Bunun anlamı  $p^i = \text{sabit}$  olup dönümlü koordinatlar için konjuge momentum korunumludur (Goldstein ve ark, 2000). Burada; özellikle  $L$ 'nin zamandan bağımsız ve non-dejenere olduğu durum, yani  $L = L(q^i, \dot{q}^j)$ 'nin

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \det(H_{ij}) \equiv \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right\| \neq 0 \quad (3.2.12)$$

koşullarını sağladığı örnekler incelenecektir ( $H_{ij}$ , Hessian matrisidir).

Analitik mekanikte  $L$ , aşağıdaki şekle sahiptir:

$$L = T(q^i, \dot{q}^i) - V(q^i) \quad (3.2.13)$$

Burada  $T$ ,  $\dot{q}^i$  ler cinsinden pozitif-tanımlı bir karesel formdur ve  $V(q^i)$ , potansiyel terimidir.  $L$  ile ilgili enerji fonksiyonu;

$$E_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L(q^j, \dot{q}^j) \quad (3.2.14)$$

olup Legendre dönüşümleri kullanıldığında Hamilton fonksiyonu ve konjuge momentumu

$$H = p_j \dot{q}^j - L(q^j, \dot{q}^j), \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \quad (3.2.15)$$

şeklini alır. (3.2.3) koşulu ve (3.2.3) denklemindeki  $\vec{X}$  vektör alanı, hızlara göre ikinci dereceden homojen bir polinom ve  $q^j$  ler cinsinden homojen olmayan bir terim verir. (3.2.3)'den dolayı böyle bir polinom özdeş olarak sıfır olmalı ve dolayısıyla her katsayı ayrı ayrı sıfırlanmalıdır. Eğer konfigürasyon uzayının boyutu  $n$  ise, çözümleri simetriyi veren  $\{1+ n(n+1)/2\}$  tane kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Bu tür simetri denklemlerinde, denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla olmaktadır.

### 3.3. Bianchi Uzay-zaman Modelleri

İdealize dilmiş bir varsayımla yaşadığımız evrenin homojen ve izotrop olduğu ve bu varsayımın FRW modelini ön gördüğü (2.5) bölümünde ifade edilmişti. Ancak, evren gerçek anlamda tam olarak homojen ve izotrop olmadığı için başka uzay-zaman modellerinin dikkate alınması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Uzaysal homojen fakat anizotrop olan *Bianchi Tipi* uzay-zamanlar öncelikli olarak dikkate alınmalıdır. Bu modeller 3-boyutlu izometri gruplarıyla temsil edilmektedirler ve ilk kez 1897 yılında Bianchi tarafından 3-boyutlu uzayın dokuz tipe ayrılacak şekilde sınıflanabileceği ortaya konulmuştur (Ellis ve MacCallum, 1969; Griffiths ve Podolski, 2009).

Bianchi uzay-zamanları evrenin gelişiminin ilk dönemlerini tasvir etmede önemli rol oynamaktadırlar. Özellikle; Bianchi II, VIII, IX metriklerine ait Einstein Alan Denklemlerinin çözümleri, pozitif eğrilikli FRW modelinin çözümlerine benzedikleri için bu uzay-zamanlar önemlidirler (Rao ve ark, 2008). Benzer şekilde Bianchi V uzay-zamanı negatif eğrilikli, Bianchi I uzay-zamanı ise düz FRW evreninin geliştirilmesi olarak kabul edilmektedir (Ryan ve Shepley, 1975).

Bianchi tip kozmolojik modellere ait metrikler ve bu metriklere ait eğrilik skalerleri sırasıyla aşağıda verilmektedir. Burada  $A$ ,  $B$  ve  $C$  metrik potansiyelleri zamanın fonksiyonlarıdır.

### 3.3.1. LRS Bianchi Tip I, III ve Kantowski-Sachs Uzay-zamanı

LRS Bianchi Tip I, III ve Kantowski-Sachs Tip Uzay-zamanına ait metrik

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dr^2 + B^2 (d\theta^2 + \Sigma^2(\chi, \theta) d\phi^2) \quad (3.3.1.1)$$

şeklindedir. Burada

$$\Sigma(\chi, \theta) = \begin{cases} \theta, & BI (\chi = 0) \\ \sin\theta, & K-S (\chi = 1) \\ \sinh\theta, & BIII (\chi = -1) \end{cases} \quad (3.3.1.2)$$

ile verilmektedir. Bu uzay-zamana için Ricci skaleri

$$R = 2 \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + 2 \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\chi}{A^2} \right] \quad (3.3.1.3)$$

şeklindedir.  $x^a = (t, x, y, z)$  koordinatlarında Bianchi tip I uzay zamanı

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dx^2 + B^2 dy^2 + C^2 dz^2 \quad (3.3.1.4)$$

şeklindedir ve bu uzay-zaman için Ricci skaleri

$$R = 2 \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right] \quad (3.3.1.5)$$

olur.

**3.3.2. Bianchi Tip II Uzay-zamanı ve Ricci Skalari**

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dx^2 + B^2 (dy - xdz)^2 + C^2 dz^2 \quad (3.3.2.1)$$

$$R = 2 \left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{B^2}{4A^2C^2} \right) \quad (3.3.2.2)$$

**3.3.3. Bianchi Tip IV Uzay-zamanı ve Ricci Skalari**

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dx^2 + e^{2x} B^2 dy^2 + e^{2x} C^2 (xdy + dz)^2 \quad (3.3.3.1)$$

$$R = 2 \left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{3}{A^2} - \frac{C^2}{4A^2B^2} \right) \quad (3.3.3.2)$$

**3.3.4. Bianchi Tip V Uzay-zamanı ve Ricci Skalari**

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dx^2 + e^{2mx} (B^2 dy^2 + C^2 dz^2) \quad (3.3.4.1)$$

$$R = 2 \left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{3m^2}{A^2} \right) \quad (3.3.4.2)$$

**3.3.5. Bianchi Tip VI<sub>h</sub> Uzay-zamanı ve Ricci Skalari**

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 dx^2 + e^{(-2qx)} B^2 dy^2 + e^{(-2hx)} C^2 dz^2 \quad (3.3.5.1)$$



$$R = 2 \left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - (q^2 + qh + h^2) \frac{1}{A^2} \right) \quad (3.3.5.2)$$

Bianchi VI<sub>h</sub> metriği  $q = h = 0$  için Bianchi I metriğine,  $q = h$  için ise Bianchi V metriğine indirgenir.

### 3.3.6. Bianchi Tip VIII ve IX Uzay-zamanı ve Ricci Skaleri

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 [dx - h(y)dz]^2 + B^2 dy^2 + f^2(y)C^2 dz^2 \quad (3.3.6.1)$$

$$R = 2 \left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{q}{B^2} - \frac{A^2}{4B^2C^2} \right) \quad (3.3.6.2)$$

Burada

$$f(y) = \begin{pmatrix} \sinh(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix}, h(y) = \begin{pmatrix} -\cosh(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix} \text{ ve } q = -\frac{f_{,y,y}}{f} = \begin{cases} -1, & BVIII \\ 1, & BIX \end{cases} \quad (3.3.6.3)$$

şeklindedir (Kramer ve ark.,1980).

### 3.4. Önemli Çalışmalar

Demianski ve ark. (1992) Noether simetri yaklaşımını kullanarak, çiftlenim fonksiyonu  $F(\Phi) = 1$  durumu için kozmolojik sabitli alan denklemlerinin çözümlerini incelemiştir. Capozziello ve ark. (1997a) skaler alanlı minimal olmayan gravitasyon teorisi için Noether simetri yaklaşımını Bianchi uzay-zamanlarına uygulamış ve bu çalışmada bazı Bianchi sınıfları için alan denklemlerinin  $V(\Phi) = 0$  durumundaki tam çözümleri verilmiştir. Sanyal (2002) Kantowski-Sachs metriğinin Noether ve dinamik simetrilerini tartışmıştır. Sanyal'ın elde etmiş olduğu çözümler, evrenin sabit bir hacimden başlayarak şiştiğini kabul eden çözümlerle uyum içindedir. Camci ve Kucukakca (2007), Kantowski-Sachs, Bianchi I ve III uzay-zamanlarının Noether simetrilerini çalışmış olup

bu araştırmada Sanyal'ın elde ettiği çözümleri de içeren yeni çözümler bulmuşlardır. Ayrıca literatürde Noether simetri yaklaşımını kullanarak skaler tensör teorilerinde bir çok çalışma yapılmıştır (Capozziello ve ark. 1997b; Modak ve ark., 2000; Kamilya ve ark., 2004; Bonanno ve ark.,2007; Capozziello ve ark., 2009a).

Son yıllarda,  $f(R)$  teorisinde Noether simetrisini kullanılarak tam kozmolojik çözümler bulabilmek amacıyla genel bir yaklaşım tartışılmıştır ve FRW modeli için kozmolojik çözümler elde edilmiştir (Capozziello ve De Felice, 2008; Capozziello ve ark., 2009b). Ayrıca Capozziello ve ark. (2007b) Noether simetrisi yaklaşımı vasıtasıyla,  $f(R)$  çekim teorisinin küresel simetrik çözümlerini araştırmışlar ve bazı tam çözümler elde etmişlerdir. Noether simetrisinin varlığı durumunda,  $(n+1)$ -boyutlu FRW metriği dikkate alınarak,  $f(R)$ 'nin açık şekli başka bir çalışmada bulunmuş ve  $f(R)$ 'nin bu şeklinin ölçek çarpanı için üstel genişleyen bir evren modeline götürdüğü gösterilmiştir (Vakili, 2008).

**BÖLÜM 4**  
**ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA**

**4.1. Bianchi I, Bianchi III ve Kantowski-Sachs Uzay-Zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı**

Dört boyutlu uzay-zamanda, (4.1.1) ile verilen gravitasyon alanına ait skaler tensör teorisi için  $f(\Phi, R) = F(\Phi)R$  ise etki integrali

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ F(\Phi)R - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \Phi_{,a} \Phi^{,a} - U(\Phi) \right] \quad (4.1.1)$$

şekline dönüşür (Kamilya ve Modak, 2004). Bu etki integralinden alan denklemleri

$$FG_{ab} - \frac{\omega}{\Phi} \Phi_{,a} \Phi_{,b} - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Phi} g_{ab} \Phi_{,c} \Phi^{,c} - F_{,ab} + g_{ab} \square F + \frac{1}{2} g_{ab} U(\Phi) = 0, \quad (4.1.2)$$

$$2 \frac{\omega}{\Phi} \square \Phi + RF' - \left( \frac{\omega'}{\Phi} - \frac{\omega}{\Phi^2} \right) \Phi_{,a} \Phi^{,a} - U'(\Phi) = 0 \quad (4.1.3)$$

olarak bulunur. Burada  $F' \equiv \frac{dF(\Phi)}{d\Phi}$  dir.

Uzaysal homojen fakat izotrop olmayan ve (3.3.1.1) ile verilen Bianchi I (BI), Bianchi III (BIII) ve Kantowski-Sachs (K-S) metriği için (4.1.2) alan denklemleri ve (4.1.3) Klein-Gordon denkleminde,  $F \neq 0$  olmak üzere,

$$\frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\chi}{B^2} + \frac{F'}{F} \left( \frac{\dot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{\Phi} - \frac{1}{2F} \left[ \frac{\omega}{2\Phi} \dot{\Phi}^2 + U \right] = 0, \quad (4.1.4)$$

$$2 \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\chi}{B^2} + \frac{F'}{F} \left[ \ddot{\Phi} + 2 \frac{\dot{B}}{B} \dot{\Phi} \right] + \frac{1}{2F} \left( \frac{\omega}{\Phi} + 2F'' \right) \dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0, \quad (4.1.5)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{F'}{F} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{\Phi} \right] + \frac{1}{2F} \left( \frac{\omega}{\Phi} + 2F'' \right) \dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0, \quad (4.1.6)$$

$$F \left( \frac{\ddot{A}}{A} + 2 \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\chi}{B^2} \right) - \frac{\omega}{\Phi} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{\Phi} \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{\Phi} - \frac{\omega}{\Phi^2} \right) \dot{\Phi}^2 - \frac{U'}{2} = 0 \quad (4.1.7)$$

bulunur.

BI, BIII ve KS uzay-zamanları için (4.1.1) ile verilen etki integralinde (3.3.1.2) Ricci skaleri yerine konulup ivme terimleri yok edildiğinde Lagrangian yoğunluğu aşağıdaki şekli alır:

$$L = -2F'B^2\dot{A}\dot{\Phi} - 4F'AB\dot{B}\dot{\Phi} - 2FAB^2 - 4FB\dot{A}\dot{B} + 2\chi FA + AB^2 \left[ \frac{\omega\dot{\Phi}^2}{\Phi} - V(\Phi) \right] \quad (4.1.8)$$

Bu Lagrangian kullanılarak elde edilen Euler-Lagrange denklemleri, (4.1.4)-(4.1.7) ile verilen alan denklemleri ile aynıdır. (4.1.8) Lagrangianının  $E_L$  enerji fonksiyoneli hesaplandığında

$$E_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \dot{A} + \frac{\partial L}{\partial \dot{B}} \dot{B} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \dot{\Phi} - L = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\chi}{B^2} + \frac{F'}{F} \left( \frac{\dot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{\Phi} - \frac{1}{2F} \left[ \frac{\omega}{2\Phi} \dot{\Phi}^2 + U \right] = 0 \quad (4.1.9)$$

elde edilir. (4.1.4) ile verilen Einstein alan denkleminde  $E_L = 0$  olduğu görülmektedir.

Verilen  $L$  Lagrangianı için Noether simetri koşulunu inceleyelim. Bu Lagrangian için konfigürasyon uzayı  $Q = (A, B, \Phi)$  ve konfigürasyon teğet uzayı ise  $TQ = (A, B, \Phi, \dot{A}, \dot{B}, \dot{\Phi})$  dır. Eğer Noether simetrisi mevcut ise  $\vec{X}$  vektör alanı aşağıdaki gibi olmak zorundadır:

$$\vec{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial A} + \beta \frac{\partial}{\partial B} + \gamma \frac{\partial}{\partial \Phi} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{A}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \quad (4.1.10)$$

Burada  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  sadece  $A$ ,  $B$  ve  $\Phi$ ' nin fonksiyonlarıdır.  $L$  Lagrangianı için (3.2.3) ile verilen Noether simetri koşulundan ( $\mathcal{L}_{\vec{X}} L = 0 \Leftrightarrow \vec{X}L = 0$ ), aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$2 \frac{\partial \beta}{\partial A} + B \frac{F'}{F} \frac{\partial \gamma}{\partial A} = 0, \quad (4.1.11)$$

$$\frac{\alpha}{2} + B \frac{\partial \alpha}{\partial B} + A \frac{\partial \beta}{\partial B} + A \frac{F'}{F} \left( \frac{\gamma}{2} + B \frac{\partial \gamma}{\partial B} \right) = 0, \quad (4.1.12)$$

$$\frac{\omega}{\Phi} \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \frac{A}{B} + A \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} \right) + \frac{A}{2} \left( \frac{\omega'}{\Phi} - \frac{\omega}{\Phi^2} \right) - F' \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} + 2 \frac{A}{B} \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} \right) = 0, \quad (4.1.13)$$

$$\beta + B \frac{\partial \alpha}{\partial A} + A \frac{\partial \beta}{\partial A} + B \frac{\partial \beta}{\partial A} + B \frac{F'}{F} \left( \gamma + A \frac{\partial \gamma}{\partial A} + \frac{B}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial B} \right) = 0, \quad (4.1.14)$$

$$2 \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} + \frac{F'}{F} \left( 2\beta + B \frac{\partial \alpha}{\partial A} + B \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} + 2A \frac{\partial \beta}{\partial A} \right) + \frac{F''}{F} B \gamma - \frac{\omega}{\Phi F} AB \frac{\partial \gamma}{\partial A} = 0, \quad (4.1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} + \frac{A}{B} \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} + \frac{F'}{F} \left( \alpha + \frac{A}{B} \beta + \frac{B}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial B} + A \frac{\partial \beta}{\partial B} + A \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} \right) \\ + \frac{F''}{F} A \gamma + \frac{\omega}{2\Phi F} AB \frac{\partial \gamma}{\partial B} = 0, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

$$2q(F\alpha + F'A\gamma) - B(B\alpha + 2A\beta)U - AB^2\gamma U' = 0 \quad (4.1.17)$$

Burada, konfigürasyon uzayının boyutu üç olduğu için yedi tane diferansiyel denklem elde edilmiştir. Hessian determinanı ( $W = \sum \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{Q}_i \partial \dot{Q}_j} \right|$ ) hesaplandığında

$$W = -\frac{16AB^4F}{\Phi} (3\Phi F'^2 + 2\omega F) \quad (4.1.18)$$

bulunur. Eğer  $F$  fonksiyonu

$$F = \Phi - \Phi_0, \quad \omega = -\frac{3}{2} \quad (4.1.19)$$

şeklinde verilirse Hessian determinanı sıfırlanır. Bu durumda  $L$  Lagrangianı dejeneredir denir.  $F(\Phi)$  ve  $\omega(\Phi)$  nin (4.1.19) seçimi ile (4.1.1) etki integrali, genelleştirilmiş Brans-Dicke çekim teorisine indirgenir. Değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak (4.1.11)-(4.1.17) diferansiyel denklem sistemi çözüldüğünde  $\alpha, \beta, \gamma$  ve  $U(\Phi)$  nicelikleri

$$\alpha = c_1 \left( AB\Phi^{\frac{3}{2}} \right)^{-1} \quad (4.1.20)$$

$$\beta = \frac{c_1}{2} \left( A^2\Phi^{\frac{3}{2}} \right)^{-1} \quad (4.1.21)$$

$$\gamma = -c_1 \left( A^2 B \Phi^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \quad (4.1.22)$$

$$U(\Phi) = \lambda \Phi^2 \quad (4.1.23)$$

olarak bulunur. Burada  $\lambda$  ve  $c_1$  sabitler olup  $\Phi_0 = 0$  kabul edilmiştir. (4.1.19) ve (4.1.23) ile verilen genelleştirilmiş Brans-Dicke çekim teorisinde; BI, BIII ve K-S uzay-zamanları Noether simetrisine sahiptir ve simetriyi doğuran vektör alanı şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \bar{X} = c_1 \left( AB \Phi^{\frac{3}{2}} \right)^{-1} & \left[ A \frac{\partial}{\partial A} + B \frac{\partial}{\partial B} - \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} - A \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{3 \dot{\Phi}}{2 \Phi} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{A}} \right. \\ & \left. - \frac{B}{2} \left( \frac{2 \dot{A}}{A} + \frac{3 \dot{\Phi}}{2 \Phi} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \Phi \left( \frac{2 \dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{1 \dot{\Phi}}{2 \Phi} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \right] \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

(4.1.4)-(4.1.7) alan denklemlerinde, (4.1.19) ile verilen çiftlenim (coupling) fonksiyonu ile Brans Dicke parametresini ve (4.1.23) ile verilen skaler potansiyelini yerine yazarsak

$$\frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\chi}{B^2} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} + \frac{3 \dot{\Phi}^2}{4 \Phi^2} - \frac{\lambda \Phi}{2} = 0, \quad (4.1.25)$$

$$2 \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\chi}{B^2} + \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + 2 \frac{\dot{B}\dot{\Phi}}{B\Phi} - \frac{3 \dot{\Phi}^2}{4 \Phi^2} - \frac{\lambda \Phi}{2} = 0, \quad (4.1.26)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} - \frac{3 \dot{\Phi}^2}{4 \Phi^2} - \frac{\lambda \Phi}{2} = 0, \quad (4.1.27)$$

$$\left( \frac{\ddot{A}}{A} + 2 \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\chi}{B^2} \right) + \frac{3}{2} \left[ \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{2\dot{B}}{B} \right) \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} \right] - \frac{3 \dot{\Phi}^2}{4 \Phi^2} - \lambda \Phi = 0 \quad (4.1.28)$$

bulunur.  $\bar{X}$ , Noether simetrisini doğuran vektör alanı olduğu için bu simetriye uygun (3.2.6) ile verilen hareket sabiti, Cartan 1-form kullanılarak  $(\theta_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} dA + \frac{\partial L}{\partial \dot{B}} dB + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} d\Phi)$

$$2\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} = -\frac{l}{c_1} \frac{A\Phi^{\frac{1}{2}}}{B}, \quad (4.1.29)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $l$  hareket sabitidir. (4.1.25)-(4.1.28) alan denklemlerinden bulunan  $A, B$  ve  $\Phi$  nicelikleri (4.1.29) denklemini de sağlamak zorundadır.

Noether simetrisinin varlığı durumunda  $L(A, B, \Phi, \dot{A}, \dot{B}, \dot{\Phi}) \leftrightarrow L(w, u, \dot{z}, \dot{w}, \dot{u})$  dönüşümü yapılabilir. Burada  $z = z(A, B, \Phi)$ ,  $w = w(A, B, \Phi)$  ve  $u = u(A, B, \Phi)$  dir. Ancak ve ancak

$$i_x(dz) = 1, \quad i_x(dw) = 0, \quad i_x(du) = 0 \quad (4.1.30)$$

ise  $z$ , *dönümlü* (cyclic) değişkendir (Demianski ve ark, 1991). (4.1.30) eşitlikleri açık olarak yazılırsa

$$\alpha \frac{\partial z}{\partial A} + \beta \frac{\partial z}{\partial B} + \gamma \frac{\partial z}{\partial \Phi} = 1 \quad (4.1.31)$$

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial A} + \beta \frac{\partial w}{\partial B} + \gamma \frac{\partial w}{\partial \Phi} = 0 \quad (4.1.32)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial A} + \beta \frac{\partial u}{\partial B} + \gamma \frac{\partial u}{\partial \Phi} = 0 \quad (4.1.33)$$

elde edilir. (4.1.31)-(4.1.33) denklem sisteminin  $z$ ,  $w$  ve  $u$  için genel çözümü

$$z = \frac{1}{c_1} A^2 B \Phi^{\frac{3}{2}} + f_1\left(BA^{-\frac{1}{2}}, A\Phi\right), \quad w = f_2\left(BA^{-\frac{1}{2}}, A\Phi\right), \quad u = f_3\left(BA^{-\frac{1}{2}}, A\Phi\right) \quad (4.1.34)$$

şeklindedir. Bu çözüm ailesinden

$$z = \frac{1}{c_1} A^2 B \Phi^{\frac{3}{2}}, \quad w = BA^{-\frac{1}{2}}, \quad u = A\Phi \quad (4.1.35)$$

çözümlerinin en kullanışlı olduğu görülmektedir. Bu durumda, seçilen (4.1.35) çözümlerinin

$$A = \frac{c_1 z}{w} u^{\frac{3}{2}}, \quad B = (c_1 z w)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{4}}, \quad \Phi = \frac{1}{c_1} z^{-1} w u^{\frac{5}{2}}, \quad (4.1.36)$$

ile verilen ters dönüşümleri alınır ve bu nicelikler (4.1.8) Lagrange fonksiyoneline yerine konulursa Lagrangian

$$L = -c_1 w \dot{u} \dot{z} u^{\frac{3}{2}} - 2c_1 \dot{w} \dot{z} u^{\frac{1}{2}} - \lambda w^2 u^2 + 2\chi u \quad (4.1.37)$$

şeklini alır. Bu Lagrange fonksiyoneli  $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$  olduğu görülmektedir. Dolayısıyla  $z$  dönümlü değişkendir. (4.1.37) ile verilen Lagrangiana ait Euler-Lagrange hareket denklemleri ve  $E_L = 0$  enerji fonksiyoneli aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{\dot{u}}{u} + \frac{2\dot{w}}{w} = \frac{l_0 u^{\frac{1}{2}}}{w}, \quad (4.1.38)$$

$$\ddot{z} - \frac{\dot{u}\dot{z}}{u} - \frac{\lambda w u^{\frac{5}{2}}}{c_1} = 0, \quad (4.1.39)$$

$$\ddot{z} + \frac{2\dot{w}\dot{z}}{w} - \frac{2\lambda w u^{\frac{5}{2}}}{c_1} + \frac{2\chi u^{\frac{3}{2}}}{c_1 w} = 0, \quad (4.1.40)$$

$$\left( \frac{\dot{u}}{u} + \frac{2\dot{w}}{w} \right) \dot{z} - \frac{\lambda w u^{\frac{5}{2}}}{c_1} + \frac{2\chi u^{\frac{3}{2}}}{c_1 w} = 0, \quad (4.1.41)$$

Burada  $l_0$  hareket sabiti olup sıfırdan farklı alınmaktadır. (4.1.38)-(4.1.41) denklem sistemi çözüldüğünde

$$u(t) = \frac{4a_1^2}{(l_0 t - 2a_1 a_2)^2}, \quad (4.1.42)$$

$$w(t) = -[a_3(l_0 t - 2a_1 a_2) + a_1], \quad (4.1.43)$$

$$z(t) = -\frac{8a_1^2}{l_0^2 c_1 (l_0 t - 2a_1 a_2)} \left[ 2\lambda a_1^2 \left( \frac{a_1^2}{3(l_0 t - 2a_1 a_2)^2} + \frac{a_1 a_3}{(l_0 t - 2a_1 a_2)} + a_3^2 \right) - \chi \right] + a_4 \quad (4.1.44)$$



bulunur. Burada  $a_1, a_2, a_3$  ve  $a_4$  integrasyon sabitleri ve  $a_1 \neq 0$  dır. Bu çözümler (4.1.36) eşitliklerinde yerine yazılırsa metrik fonksiyonları ve skaler alan aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A(t) = \frac{\frac{8a_1^2 M(t)}{l_0^2(l_0 t - 2a_1 a_2)} - c_1 a_4}{\frac{8a_1^2}{(l_0 t - 2a_1 a_2)^3} [a_3(l_0 t - 2a_1 a_2) + a_1]}, \quad (4.1.45)$$

$$B(t) = \left[ \frac{[(l_0 t - 2a_1 a_2)^3] [a_3(l_0 t - 2a_1 a_2) + a_1]}{a_1^3} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{8a_1^2 M(t)}{l_0^2(l_0 t - 2a_1 a_2)} - c_1 a_4 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.1.46)$$

$$\Phi(t) = \frac{32a_1^5 [a_3(l_0 t - 2a_1 a_2) + a_1]}{(l_0 t - 2a_1 a_2)^5 \left[ \frac{8a_1^2 M(t)}{l_0^2(l_0 t - 2a_1 a_2)} - c_1 a_4 \right]} \quad (4.1.47)$$

Burada  $M(t) \equiv 2\lambda a_1^2 \left( \frac{a_1^2}{3(l_0 t - 2a_1 a_2)^2} + \frac{a_1 a_3}{(l_0 t - 2a_1 a_2)} + a_3^2 \right) - \chi$  şeklinde tanımlıdır.

Ele alınan bu model için her bir yön boyunca Hubble parametreleri

$$H_1 = \frac{\dot{A}}{A}, \quad H_2 = H_3 = \frac{\dot{B}}{B}, \quad (4.1.48)$$

olmak üzere, ortalama Hubble parametresi (Burada  $H_1, H_2$  ve  $H_3$  sırasıyla  $r, \theta$  ve  $\phi$  yönlerindeki Hubble parametreleridir)

$$H(t) = \frac{\dot{V}}{3V} = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{2\dot{B}}{B} \right) \quad (4.1.49)$$

$$= \frac{16l_0 a_1^2 \left[ M(t) + \frac{2\lambda a_1^3}{(l_0 t - 2a_1 a_2)} \left[ \frac{2a_1}{3(l_0 t - 2a_1 a_2)} + a_3 \right] \right]}{(l_0 t - 2a_1 a_2) [3c_1 l_0^2 a_4 (l_0 t - 2a_1 a_2) - 24a_1^2 M(t)]} + \frac{2l_0}{(l_0 t - 2a_1 a_2)} \quad (4.1.50)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $V(t) = AB^2$  evrenin hacmi olup bu model için

$$V(t) = \frac{c_1^2 (l_0 t - 2a_1 a_2)^6}{64a_1^6} \left[ -\frac{8a_1^2 M(t)}{c_1 l_0^2 (l_0 t - 2a_1 a_2)} + a_4 \right]^2 \quad (4.1.51)$$

olarak bulunur. Ortalama ölçek çarpanı

$$a(t) = V(t)^{\frac{1}{3}} \quad (4.1.52)$$

şeklinde tanımlandığından

$$a(t) = \frac{c_1^{2/3} (l_0 t - 2a_1 a_2)^2}{4a_1^2} \left[ -\frac{8a_1^2 M(t)}{c_1 l_0^2 (l_0 t - 2a_1 a_2)} + a_4 \right]^{2/3} \quad (4.1.53)$$

olur. Elde edilen bu model için *anizotropi parametresi*

$$\Delta = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{H_i - H}{H} \right)^2$$

$$= \frac{a_1^2}{8} \left[ \frac{16\chi a_1^2 (l_0 t - 2a_1 a_2) + P_1 [l_0^2 t^2 - 4a_1 a_2 (l_0 t - a_1 a_2)]}{[a_3 (l_0 t - 2a_1 a_2) + a_1] [16a_1^2 [P_2 (l_0 t - 2a_1 a_2) + \lambda a_1^3 a_3] - 3c_1 l_0^2 a_4 [l_0^2 t^2 - 4a_1 a_2 (l_0 t - a_1 a_2)]]} \right]^2 \quad (4.1.54)$$

olarak bulunur. Burada  $P_1 \equiv 3c_1 l_0^2 a_4 - 8\chi a_1 a_3 + 16\lambda a_1^3 a_3^3$  ve  $P_2 \equiv 2\lambda a_1^2 a_3^2 - \chi$  dir. Ayrıca yavaşlama parametresi ( $q(t)$ )

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{16a_1^4 [P_1 \lambda a_1^2 (l_0 t - 2a_1 a_2) + a_3 P_3 [l_0^2 t^2 - 4a_1 a_2 (l_0 t - a_1 a_2)] + 8\chi \lambda a_1^4]}{[-16a_1^2 [P_2 (l_0 t - 2a_1 a_2) + \lambda a_1^3 a_3] + 3c_1 l_0^2 a_4 [l_0^2 t^2 - 4a_1 a_2 (l_0 t - a_1 a_2)]]^2} \quad (4.1.55)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $P_3 \equiv 3c_1 \lambda l_0^2 a_1 a_4 - 16\chi a_1^2 a_3 + 16\lambda^2 a_1^4 a_3^3 + 4\chi^2$  ile verilmektedir.

### 4.2. Bianchi II Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı

(4.1.1) etki integralinde, (3.3.2.1) ile verilen Bianchi tip II uzay-zamanı için (3.3.2.2) Ricci skaleri yerine konulduğunda ve ikinci türevlere sahip terimler yok edildiğinde Lagrange fonksiyoneli

$$L = -2F'BC\dot{A}\dot{\Phi} - 2F'AC\dot{B}\dot{\Phi} - 2F'AB\dot{C}\dot{\Phi} - 2FC\dot{A}\dot{B} - 2FB\dot{A}\dot{C} - 2FA\dot{B}\dot{C} - \frac{FB^3}{2AC} + ABC\left(\frac{\omega\dot{\Phi}^2}{\Phi} - U(\Phi)\right) \quad (4.2.1)$$

şeklini alır. Burada  $F' \equiv \frac{dF(\Phi)}{d\Phi}$  dir.

Bianchi tip II uzay-zamanı için (4.1.1) skaler tensör teorisine ait (4.1.2) alan denklemlerinden ve (4.1.5) Klein-Gordon denkleminde

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{B^2}{4A^2C^2} + \frac{F'}{F}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi} - \frac{1}{2F}\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U\right) = 0 \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{B^2}{4A^2C^2} + \frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi}\right] + \frac{1}{4F}(4F'' + 1)\dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{B^2}{4A^2C^2} + \frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi}\right] + \frac{1}{4F}(4F'' + 1)\dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{B^2}{4A^2C^2} + \frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{\Phi}\right] + \frac{1}{4F}(4F'' + 1)\dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{B^2}{4A^2C^2} - \frac{1}{2F'}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi}\right] - \frac{U'}{2F'} = 0 \quad (4.2.6)$$

elde edilir. Burada  $F \neq 0 \neq F'$  dür ve  $\omega(\Phi) = \frac{\Phi}{2}$  alınmıştır. (4.2.2)-( 4.2.2) denklemleri,

(4.2.1) Lagrangianı kullanılarak elde edilen Euler-Lagrange denklemleri ile aynıdır. (4.2.1)

Lagrangianı ile ilgili  $E_L$  enerji fonksiyonu

$$E_L = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{B^2}{4A^2C^2} + \frac{F'}{F}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi} - \frac{1}{2F}\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U\right) \quad (4.2.7)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, (4.2.4) ile verilen (0-0)- Einstein denkleminin  $E_L = 0$  denklemine eşit olduğu görülmektedir. (4.2.2)-( 4.2.6) denklemlerinden  $\ddot{A}$ ,  $\ddot{B}$  ve  $\ddot{C}$  terimleri yok edilirse aşağıdaki süreklilik denklemi elde edilir:

$$(3F'^2 + F) \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} \right] + \frac{F'}{2} (6F'' + 1) \dot{\Phi}^2 - (2F'U - FU') = 0 \quad (4.2.8)$$

Noether simetri koşulundan bulunacak olan  $F(\Phi)$  ve  $U(\Phi)$  fonksiyonları (4.2.2)-( 4.2.6) alan denklemlerinin yanı sıra (4.2.8) ile verilen süreklilik denklemini de sağlamak zorundadır.

(4.2.3) Lagrangian için konfigürasyon uzayı  $Q = (A, B, C, \Phi)$ , konfigürasyon teğet uzayı ise  $TQ = (A, B, C, \Phi, \dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{\Phi})$  şeklindedir. Eğer (3.2.3) Noether teoremi koşulu sağlanıyorsa Noether simetrisi vardır denir. Bu durumda  $X$  vektör alanı

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial A} + \beta \frac{\partial}{\partial B} + \gamma \frac{\partial}{\partial C} + \delta \frac{\partial}{\partial \Phi} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{A}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \dot{C}} + \dot{\delta} \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \quad (4.2.9)$$

şeklinde olmak zorundadır. Burada  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ve  $\delta$  fonksiyonları  $A, B, C$  ve  $\Phi$ ' ye bağlı olup

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \alpha}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \alpha}{\partial C} \dot{C} + \frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} \dot{\Phi}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \beta}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \beta}{\partial C} \dot{C} + \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} \dot{\Phi} \quad (4.2.10)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \gamma}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \gamma}{\partial C} \dot{C} + \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} \dot{\Phi} \quad \dot{\delta} = \frac{\partial \delta}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \delta}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \delta}{\partial C} \dot{C} + \frac{\partial \delta}{\partial \Phi} \dot{\Phi}$$

dir. (3.2.3) ile verilen Noether simetri koşulundan;  $X$  vektör alanı,  $F(\Phi)$  ve  $U(\Phi)$  bulunabilir. Bianchi tip II modeli için (3,2.3) koşulundan, (4.2.9) vektör alanı ve (4.2.1) Lagrangianı kullanıldığında aşağıdaki 11 denklemden oluşan diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$C \frac{\partial \beta}{\partial A} + B \frac{\partial \gamma}{\partial A} + \frac{F'}{F} BC \frac{\partial \delta}{\partial A} = 0 \quad (4.2.11)$$

$$C \frac{\partial \alpha}{\partial B} + A \frac{\partial \gamma}{\partial B} + \frac{F'}{F} AC \frac{\partial \delta}{\partial B} = 0 \quad (4.2.12)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial C} + A \frac{\partial \beta}{\partial C} + \frac{F'}{F} AB \frac{\partial \delta}{\partial C} = 0 \quad (4.2.13)$$

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} \right) - F' \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} + \frac{1}{B} \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} + \frac{1}{C} \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta}{\partial \Phi} = 0 \quad (4.2.14)$$

$$\gamma + C \frac{\partial \alpha}{\partial A} + A \frac{\partial \gamma}{\partial A} + C \frac{\partial \beta}{\partial B} + B \frac{\partial \gamma}{\partial B} + \frac{F'}{F} \left( \delta C + AC \frac{\partial \delta}{\partial A} + BC \frac{\partial \delta}{\partial B} \right) = 0 \quad (4.2.15)$$

$$\beta + B \frac{\partial \alpha}{\partial A} + A \frac{\partial \beta}{\partial A} + C \frac{\partial \beta}{\partial C} + B \frac{\partial \gamma}{\partial C} + \frac{F'}{F} \left( \delta B + AB \frac{\partial \delta}{\partial A} + BC \frac{\partial \delta}{\partial C} \right) = 0 \quad (4.2.16)$$

$$\alpha + B \frac{\partial \alpha}{\partial B} + A \frac{\partial \beta}{\partial B} + C \frac{\partial \alpha}{\partial C} + A \frac{\partial \gamma}{\partial C} + \frac{F'}{F} \left( \delta A + AB \frac{\partial \delta}{\partial B} + AC \frac{\partial \delta}{\partial C} \right) = 0 \quad (4.2.17)$$

$$C \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} + B \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} + \frac{F'}{F} \left( \beta C + \gamma B + BC \frac{\partial \alpha}{\partial A} + AC \frac{\partial \beta}{\partial A} + AB \frac{\partial \gamma}{\partial A} + BC \frac{\partial \delta}{\partial \Phi} \right) - \frac{ABC}{2F} \frac{\partial \delta}{\partial A} + \frac{F''}{F} \delta BC = 0 \quad (4.2.18)$$

$$C \frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} + A \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} + \frac{F'}{F} \left( \alpha C + \gamma A + BC \frac{\partial \alpha}{\partial B} + AC \frac{\partial \beta}{\partial B} + AB \frac{\partial \gamma}{\partial B} + AC \frac{\partial \delta}{\partial \Phi} \right) - \frac{ABC}{2F} \frac{\partial \delta}{\partial B} + \frac{F''}{F} \delta AC = 0 \quad (4.2.19)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} + A \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} + \frac{F'}{F} \left( \alpha B + \beta A + BC \frac{\partial \alpha}{\partial C} + AC \frac{\partial \beta}{\partial C} + AB \frac{\partial \gamma}{\partial C} + AB \frac{\partial \delta}{\partial \Phi} \right) - \frac{ABC}{2F} \frac{\partial \delta}{\partial C} + \frac{F''}{F} \delta AB = 0 \quad (4.2.20)$$

$$\frac{FB^2}{2A^2C^2} \left( \alpha BC - 3\beta AC + \gamma AB - \frac{F'}{F} ABC \delta \right) - U \left( \alpha BC + \beta AC + \gamma AB + \frac{U'}{U} ABC \delta \right) = 0 \quad (4.2.21)$$

Eğer  $B = C$  ise (LRS Bianchi tip II durumu) , (4.2.1) Lagrangianı

$$L = -2F'B^2 \dot{A}\dot{\Phi} - 4F'AB\dot{B}\dot{\Phi} - 4FB\dot{A}\dot{B} - 2FAB\dot{B}^2 - \frac{FB^2}{2A} + AB^2 \left( \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - U(\Phi) \right) \quad (4.2.22)$$

şeklini alır. Bu durumda; (3.2.3) ile verilen Noether simetri koşulundan 7 tane denklem elde edilir:

$$2 \frac{\partial \beta}{\partial A} + \frac{F'}{F} B \frac{\partial \gamma}{\partial A} = 0 \quad (4.2.23)$$

$$\frac{\alpha}{2} + B \frac{\partial \alpha}{\partial B} + A \frac{\partial \beta}{\partial B} + A \frac{F'}{F} \left( \frac{\gamma}{2} + B \frac{\partial \gamma}{\partial B} \right) = 0 \quad (4.2.24)$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{A}{B} \beta + A \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} - 2F' \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} + 2 \frac{A}{B} \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} \right) = 0 \quad (4.2.25)$$

$$\beta + B \frac{\partial \alpha}{\partial A} + A \frac{\partial \beta}{\partial A} + B \frac{\partial \beta}{\partial B} + B \frac{F'}{F} \left( \gamma + A \frac{\partial \gamma}{\partial A} + \frac{B}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial B} \right) = 0 \quad (4.2.26)$$

$$2 \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} + \frac{F'}{F} \left( 2\beta + B \frac{\partial \alpha}{\partial A} + B \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} + 2A \frac{\partial \beta}{\partial A} \right) + \frac{F''}{F} B \gamma - \frac{AB}{2F} \frac{\partial \gamma}{\partial A} = 0 \quad (4.2.27)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} + \frac{A}{B} \frac{\partial \beta}{\partial \Phi} + \frac{F'}{F} \left( \alpha + \frac{A}{B} \beta + \frac{B}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial B} + A \frac{\partial \beta}{\partial B} + A \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} \right) + \frac{F''}{F} A \gamma - \frac{AB}{4F} \frac{\partial \gamma}{\partial B} = 0 \quad (4.2.28)$$

$$\frac{F}{2A^2} \left( \alpha B - 2\beta A - \frac{F'}{F} AB \gamma \right) - U \left( \alpha B + 2\beta A + \frac{U'}{U} AB \gamma \right) = 0 \quad (4.2.29)$$

(4.2.22) ile verilen Lagrange fonksiyoneli için Hessian determinantı hesaplandığında

$$W = \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right\| = -16AB^4 F(3F'^2 + F) \quad (4.2.30)$$

bulunur. Hessian determinantı sıfır ( $W = 0$ ) olduğunda (4.2.22) Lagrangianı dejeneredir. Bu durumda  $F(\Phi)$  çiftlenim fonksiyonu

$$F(\Phi) = -\frac{1}{12}(\Phi - \Phi_0)^2 \quad (4.2.31)$$

olur. Burada  $\Phi_0$  integral sabitidir.

(4.2.23)-(4.2.28) denklem sistemi değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak çözüldüğünde

$$\alpha = \frac{l}{m+1} A^{m+1} B^{n/3} (\Phi - \Phi_0)^n, \quad (4.2.32)$$

$$\beta = \frac{l}{m} A^m B^{(m/2)+1} (\Phi - \Phi_0)^n, \quad (4.2.33)$$

$$\gamma = -\frac{l}{m} A^m B^{m/2} (\Phi - \Phi_0)^{n+1} \quad (4.2.34)$$

bulunur. Burada,  $n$  ve  $m$  değişkenlerine ayırma sabitleri olup  $n = \frac{3m}{2}$  ve  $m \neq 0, -1$ dir.

(4.2.8) süreklilik denklemi dikkate alındığında, skaler alanın  $U(\Phi)$  potansiyeli,

$$U(\Phi) = \lambda \Phi^4 \quad (4.2.35)$$

elde edilir. Elde edilen (4.2.31)-(4.2.35) çözümleri (4.2.29) denkleminde yerine konulduğunda  $l = 0$  olmasının zorunlu olduğu görülür. Bu durumda

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0 \quad (4.2.36)$$

bulunur. Dolayısıyla ele alınan bu durum için Noether simetrisini doğuran herhangi bir vektör alanı yoktur ve buradan bir hareket sabiti elde edilemez.

LRS olmayan durum ele alalım.  $F(\Phi)$  fonksiyonunun (4.2.31) şekli seçildiğinde, (4.2.11)-(4.2.21) Noether denklemlerinden

$$\alpha = -c_1 A, \quad \beta = -c_2 B, \quad \gamma = -c_3 C \quad \delta = (c_1 + c_2 + c_3) \frac{\Phi - \Phi_0}{2} \quad (4.2.37)$$

çözümleri elde edilir. Burada  $c_1, c_2$  ve  $c_3$  integral sabitleridir. (4.2.8) süreklilik denkleminin dolaylı  $U(\Phi)$  potansiyeli (4.2.35) formunda olmak zorundadır. Dolayısıyla (4.2.31), (4.2.35) ve (4.2.37) ifadeleri (4.2.22) Noether denkleminde yerine konursa  $c_2 = 0$  ve  $c_3 = -c_1$  bulunur. Bu durumda (4.2.37) ifadeleri

$$\alpha = -c_1 A, \quad \beta = 0, \quad \gamma = c_1 C \quad \delta = 0 \quad (4.2.38)$$

olur. Cartan bir-form

$$\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} dA + \frac{\partial L}{\partial \dot{B}} dB + \frac{\partial L}{\partial \dot{C}} dC + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} d\Phi \quad (4.2.39)$$

kullanılarak, (4.2.38) ile verilen Noether simetrisi için hareket sabiti  $i_X \Theta_L$

$(i_X \Theta_L = \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} + \beta \frac{\partial L}{\partial \dot{B}} + \gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{C}} + \delta \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}})$  bağıntısından aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{C}}{C} = \frac{6l}{c_1 ABC \Phi^2} \quad (4.2.40)$$

Burada  $l$  hareket sabitidir. Bulunan bu ifade aslında bir kısıtlama denklemdir ve bu denklem (4.2.2)-(4.2.6) alan denklemlerinden elde edilecek olan  $A$ ,  $B$  ve  $C$  çözümlerini sağlamak zorundadır.



**4.3. Bianchi IV Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı**

(3.3.3.1) ile verilen Bianchi tip IV uzay-zamanı ve (4.1.1) etki integrali dikkate alındığında Lagrange fonksiyoneli

$$L = -2F'BC\dot{A}\dot{\Phi} - 2F'AC\dot{B}\dot{\Phi} - 2F'AB\dot{C}\dot{\Phi} - 2FC\dot{A}\dot{B} - 2FB\dot{A}\dot{C} - 2FAB\dot{C} - \frac{FC^3}{2AB} - \frac{6FBC}{A} + ABC\left(\frac{\omega\dot{\Phi}^2}{\Phi} - U(\Phi)\right) \quad (4.3.1)$$

olur.  $F \neq 0 \neq F'$  olmak üzere ve  $\omega(\Phi) = \frac{\Phi}{2}$  seçildiğinde Bianchi tip IV uzay-zamanı için

(4.1.1) skaler tensör teorisine ait (4.1.2) ve (4.1.5) denklemlerinden

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{C^2}{4A^2B^2} - \frac{3}{A^2} + \frac{F'}{F}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi} - \frac{1}{2F}\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U\right) = 0 \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{C^2}{4A^2B^2} + \frac{3}{A^2} + \frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi}\right] + \frac{1}{4F}(4F'' + 1)\dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{C^2}{4A^2B^2} - \frac{3}{A^2} + \frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi}\right] + \frac{1}{4F}(4F'' + 1)\dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{3C^2}{4A^2B^2} - \frac{3}{A^2} + \frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{\Phi}\right] + \frac{1}{4F}(4F'' + 1)\dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.3.5)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{C^2}{4A^2B^2} - \frac{3}{A^2} - \frac{1}{2F'}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi}\right] - \frac{U'}{2F'} = 0 \quad (4.3.6)$$

$$2\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} = 0 \quad (4.3.7)$$

elde edilir. (4.3.1) Lagrangianı ile ilgili  $E_L$  enerji fonksiyonu

$$E_L = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{C^2}{4A^2B^2} - \frac{3}{A^2} + \frac{F'}{F}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi} - \frac{1}{2F}\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U\right) \quad (4.3.8)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, (4.3.2) ile verilen (0-0)- Einstein denkleminin  $E_L = 0$  denklemine eşit olduğu görülmektedir. Noether simetri koşulundan elde edilecek olan  $F(\Phi)$  çiftlenim fonksiyonu ve  $U(\Phi)$  potansiyeli (4.2.8) denklemleri ile verilen süreklilik koşulunu da sağlamak zorundadır.

Bianchi tip IV uzay-zamanı için (4.3.1) Lagrangianı kullanılarak elde edilen Noether denklemleri, (4.2.11)-(4.2.20) ile verilen denklemler ve

$$\begin{aligned} & \frac{FC^2}{2A^2B^2}(\alpha BC + \beta AC - 3\gamma AB - \frac{F'}{F} ABC\delta) + \frac{6F}{A^2}(\alpha BC - \beta AC - \gamma AB - \frac{F'}{F} ABC\delta) \\ & - U(\alpha BC + \beta AC + \gamma AB + \frac{U'}{U} ABC\delta) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

denklemlerinden oluşmaktadır. LRS olmayan bu durumda, (4.2.31) çiftlenim fonksiyonu, (4.2.35) potansiyeli ve (4.2.37) çözümleri (4.3.9) denkleminde yerine konursa  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  olur. Bu durumda simetriyi doğuran bir vektör alanı bulunmamaktadır.

LRS Bianchi tip IV uzay zamanı dikkate alındığında, (4.3.1) Lagrange fonksiyoneli

$$L = -2F'B^2\dot{A}\dot{\Phi} - 4F'AB\dot{B}\dot{\Phi} - 4FB\dot{A}\dot{B} - 2FAB\dot{B}^2 - \frac{FB^2}{2A} - \frac{6FB^2}{A} + AB^2\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} - U(\Phi)\right) \quad (4.3.10)$$

şekline dönüşür. Bu Lagrange fonksiyoneli için Noether simetri denklemleri (4.2.23)-(4.2.28) denklemleri ve

$$\frac{13F}{2A^2}\left(\alpha B - 2\beta A - \frac{F'}{F} AB\gamma\right) - U\left(\alpha B + 2\beta A + \frac{U'}{U} AB\gamma\right) = 0 \quad (4.3.11)$$

denklemlerinden oluşmaktadır. (4.2.31)-(4.2.35) çözümleri (4.3.11) denkleminde kullanıldığında  $l = 0$  bulunur. Dolayısıyla ele alınan bu durum için Noether simetrisini doğuran herhangi bir vektör alanı yoktur.

**4.4. Bianchi V Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı**

(3.3.4.1) ile verilen Bianchi tip V uzay-zamanı ve (4.1.1) etki integrali dikkate alındığında Lagrange fonksiyoneli

$$L = -2F'BC\dot{A}\dot{\Phi} - 2F'AC\dot{B}\dot{\Phi} - 2F'AB\dot{C}\dot{\Phi} - 2FC\dot{A}\dot{B} - 2FB\dot{A}\dot{C} - 2FAB\dot{C} - \frac{6m^2FBC}{A} + ABC\left(\frac{\omega\dot{\Phi}^2}{\Phi} - U(\Phi)\right) \quad (4.4.1)$$

olur. Bianchi tip V metriği için, (4.1.1) ile verilen teoriye ait (4.1.2) alan denklemleri ve (4.1.5) Klein-Gordon denkleminde

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{3m^2}{A^2} + \frac{F'}{F}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi} - \frac{1}{2F}\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U\right) = 0 \quad (4.4.2)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{m^2}{A^2} + \frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi}\right] + \frac{1}{4F}(4F'' + 1)\dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.4.3)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{m^2}{A^2} + \frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi}\right] + \frac{1}{4F}(4F'' + 1)\dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.4.4)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{m^2}{A^2} + \frac{F'}{F}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{\Phi}\right] + \frac{1}{4F}(4F'' + 1)\dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.4.5)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{3m^2}{A^2} - \frac{1}{2F'}\left[\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi}\right] - \frac{U'}{2F'} = 0 \quad (4.4.6)$$

$$2\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} = 0 \quad (4.4.7)$$

elde edilir. Burada  $F \neq 0 \neq F'$  ve  $\omega(\Phi) = \frac{\Phi}{2}$  dir. (4.4.1) Lagrangianı ile ilgili  $E_L$  enerji fonksiyonu

$$E_L = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{3m^2}{A^2} + \frac{F'}{F}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi} - \frac{1}{2F}\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U\right) \quad (4.4.8)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, (4.4.4) ile verilen (0-0)- Einstein denkleminin  $E_L = 0$  denkleminde eşit olduğu görülmektedir. Noether simetri koşulundan elde edilecek olan  $F(\Phi)$  çiftlenim fonksiyonu ve  $U(\Phi)$  potansiyeli (4.2.8) denklemleri ile verilen süreklilik koşulunu da sağlamalıdır.

Bianchi tip V uzay-zamanı için (4.4.1) Lagrangianı kullanılarak elde edilen Noether denklemleri, (4.2.11)-(4.2.20) ile verilen denklemler ve

$$\begin{aligned} & \frac{6m^2 F}{A^2} \left( \alpha BC - \beta AC - \gamma AB - \frac{F'}{F} ABC \delta \right) \\ & - U \left( \alpha BC + \beta AC + \gamma AB + \frac{U'}{U} ABC \delta \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

denklemlerinden oluşmaktadır. LRS olmayan Bianchi tip V uzay-zamanı durumunda, (4.2.31) çiftlenim fonksiyonu, (4.2.35) potansiyeli ve (4.2.37) çözümleri (4.4.9) denkleminde yerine konursa  $c_1 = 0$  ve  $c_3 = -c_2$  bulunur. Dolayısıyla Noether simetrisini doğuran vektör alanı

$$X = c_2 \left( -B \frac{\partial}{\partial B} + C \frac{\partial}{\partial C} - \frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \frac{\partial}{\partial \dot{C}} \right) \quad (4.4.10)$$

şeklinde dir. Bu Noether simetrisi için hareket sabiti  $i_X \Theta_L$

$(i_X \Theta_L = \beta \frac{\partial L}{\partial \dot{B}} + \gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{C}})$  bağıntısından

$$\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} = \frac{6l}{c_2 ABC \Phi^2} \quad (4.4.11)$$

elde edilir.

LRS Bianchi tip V uzay zamanı dikkate alındığında, (4.4.1) Lagrange fonksiyoneli

$$\begin{aligned} L = & -2F'B^2 \dot{A}\dot{\Phi} - 4F'AB\dot{B}\dot{\Phi} - 4FB\dot{A}\dot{B} - 2FAB^2 \\ & - \frac{6m^2 FB^2}{A} + AB^2 \left( \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - U(\Phi) \right) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

şekline dönüşür. Bu Lagrange fonksiyoneli için Noether simetri denklemleri (4.2.23)-(4.2.28) denklemleri ve

$$\frac{6m^2F}{A^2} \left( \alpha B - 2\beta A - \frac{F'}{F} AB\gamma \right) - U \left( \alpha B + 2\beta A + \frac{U'}{U} AB\gamma \right) = 0 \quad (4.4.13)$$

denkleminde oluşmaktadır. (4.2.31)-(4.2.35) çözümleri (4.4.13) denkleminde kullanılırsa  $l = 0$  olur. Dolayısıyla ele alınan bu durum için de Noether simetrisini doğuran herhangi bir vektör alanı yoktur.

#### 4.5. Bianchi VI<sub>h</sub> Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı

(3.3.5.1) ile verilen Bianchi tip VI<sub>h</sub> uzay-zamanı ve (4.1.1) etki integrali dikkate alındığında Lagrange fonksiyoneli

$$L = -2F'BC\dot{A}\dot{\Phi} - 2F'AC\dot{B}\dot{\Phi} - 2F'AB\dot{C}\dot{\Phi} - 2FC\dot{A}\dot{B} - 2FB\dot{A}\dot{C} - 2FAB\dot{C} - 2F(q^2 + qh + h^2) \frac{BC}{A} + ABC \left( \frac{\omega\dot{\Phi}^2}{\Phi} - U(\Phi) \right) \quad (4.5.1)$$

olur. Bianchi tip VI<sub>h</sub> uzay-zamanı için, (4.1.1) ile verilen skaler tensör teorisine ait (4.1.2) alan denklemleri ve (4.1.5) Klein-Gordon denkleminde

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - (q^2 + qh + h^2) \frac{1}{A^2} + \frac{F'}{F} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} - \frac{1}{2F} \left( \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U \right) = 0 \quad (4.5.2)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + (q^2 + qh + h^2) \frac{1}{A^2} + \frac{F'}{F} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} \right] + \frac{1}{4F} (4F'' + 1) \dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - (q^2 + qh + h^2) \frac{1}{A^2} + \frac{F'}{F} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} \right] + \frac{1}{4F} (4F'' + 1) \dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.5.4)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - (q^2 + qh + h^2) \frac{1}{A^2} + \frac{F'}{F} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{\Phi} \right] + \frac{1}{4F} (4F'' + 1) \dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.5.5)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - (q^2 + qh + h^2) \frac{1}{A^2} - \frac{1}{2F'} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} \right] - \frac{U'}{2F'} = 0 \quad (4.5.6)$$

$$(q+h)\frac{\dot{A}}{A}-q\frac{\dot{B}}{B}-h\frac{\dot{C}}{C}=0 \quad (4.5.7)$$

elde edilir. Burada  $F \neq 0 \neq F'$  ve  $\omega(\Phi) = \frac{\Phi}{2}$  alınmıştır. (4.5.1) Lagrangianı ile ilgili  $E_L$  enerji fonksiyonu

$$E_L = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - (q^2 + qh + h^2)\frac{1}{A^2} + \frac{F'}{F}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right)\dot{\Phi} - \frac{1}{2F}\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U\right) \quad (4.5.8)$$

şeklindedir. Buradan, (4.5.4) ile verilen (0-0)- Einstein denkleminin  $E_L = 0$  denklemine eşit olduğu açıkça görülür. Noether simetri koşulundan elde edilecek olan  $F(\Phi)$  çiftlenim fonksiyonu ve  $U(\Phi)$  potansiyeli (4.2.8) denklemi ile verilen süreklilik koşulunu da sağlamalıdır.

Bianchi tip VI<sub>h</sub> uzay-zamanı için (4.5.1) Lagrangianı kullanılarak elde edilen Noether denklemleri, (4.2.11)-(4.2.20) ile verilen denklemlere ilaveten

$$\begin{aligned} & \frac{2F(q^2 + qh + h^2)}{A^2} \left( \alpha BC - \beta AC - \gamma AB - \frac{F'}{F} ABC \delta \right) \\ & - U \left( \alpha BC + \beta AC + \gamma AB + \frac{U'}{U} ABC \delta \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

denkleminde oluşmaktadır. LRS olmayan bu Bianchi tip VI<sub>h</sub> uzay-zamanı durumunda, (4.2.31) çiftlenim fonksiyonu, (4.2.35) potansiyeli ve (4.2.37) çözümleri (4.5.9) denkleminde yerine konursa  $c_1 = 0$  ve  $c_3 = -c_2$  olur. Hareket sabiti bağıntısından elde edilecek olan denklem (4.4.13) şeklindedir.

Bianchi tip VI<sub>h</sub> uzay zamanının LRS durumu dikkate alındığında, (4.5.1) Lagrange fonksiyoneli

$$\begin{aligned} L = & -2F'B^2\dot{A}\dot{\Phi} - 4F'AB\dot{B}\dot{\Phi} - 4FB\dot{A}\dot{B} - 2FAB^2 \\ & - \frac{2(q^2 + qh + h^2)FB^2}{A} + AB^2 \left( \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - U(\Phi) \right) \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

şekline dönüşür. Bu Lagrange fonksiyoneli için Noether simetri denklemleri, (4.2.23)-(4.2.28) denklemleri ve

$$\frac{2(q^2 + qh + h^2)F}{A^2} \left( \alpha B - 2\beta A - \frac{F'}{F} AB\gamma \right) - U \left( \alpha B + 2\beta A + \frac{U'}{U} AB\gamma \right) = 0 \quad (4.5.11)$$

denkleminde oluşmaktadır. (4.2.31)-(4.2.35) çözümleri (4.5.11) denkleminde kullanılırsa  $l=0$  bulunur. Dolayısıyla ele alınan bu durum için de Noether simetrisini doğuran herhangi bir vektör alanı yoktur.

#### 4.6. Bianchi VIII ve IX Uzay-zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı

(3.3.6.1) ile verilen Bianchi tip VIII ve IX metrikleri ve (4.1.1) etki integrali dikkate alındığında Lagrange fonksiyoneli aşağıdaki gibi bulunur:

$$L = -2F'BC\dot{A}\dot{\Phi} - 2F'AC\dot{B}\dot{\Phi} - 2F'AB\dot{C}\dot{\Phi} - 2FC\dot{A}\dot{B} - 2FB\dot{A}\dot{C} - 2FA\dot{B}\dot{C} + 2qF \frac{AC}{B} - \frac{F}{2} \frac{A^3}{BC} + ABC \left( \frac{\omega\dot{\Phi}^2}{\Phi} - U(\Phi) \right) \quad (4.6.1)$$

Bianchi VIII ve IX metrikleri için (4.1.2) alan denklemleri ve (4.1.5) Klein-Gordon denklemleri kullanıldığında

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{q}{B^2} - \frac{A^2}{4B^2C^2} + \frac{F'}{F} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} - \frac{1}{2F} \left( \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U \right) = 0 \quad (4.6.2)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{q}{B^2} - \frac{A^2}{4B^2C^2} + \frac{F'}{F} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} \right] + \frac{1}{4F} (4F'' + 1) \dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.6.3)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{q}{B^2} + \frac{A^2}{4B^2C^2} + \frac{F'}{F} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} \right] + \frac{1}{4F} (4F'' + 1) \dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.6.4)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{q}{B^2} + \frac{A^2}{4B^2C^2} + \frac{F'}{F} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{\Phi} \right] + \frac{1}{4F} (4F'' + 1) \dot{\Phi}^2 - \frac{U}{2F} = 0 \quad (4.6.5)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{q}{B^2} - \frac{A^2}{4B^2C^2} - \frac{1}{2F'} \left[ \ddot{\Phi} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} \right] - \frac{U'}{2F'} = 0 \quad (4.6.6)$$

$$\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} = 0 \quad (4.6.7)$$

bulunur. (4.6.1) Lagrangianı ile ilgili  $E_L$  enerji fonksiyonu

$$E_L = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{q}{B^2} - \frac{A^2}{4B^2C^2} + \frac{F'}{F} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{\Phi} - \frac{1}{2F} \left( \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U \right) \quad (4.6.8)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, (4.6.2) ile verilen (0-0)- Einstein alan denkleminin  $E_L = 0$  denklemine eşit olduğu görülmektedir. (4.6.2)-(4.6.7) denklemlerinden ivmeli terimleri yok ederek (4.2.8) süreklilik denklemini elde edilir. Noether simetri koşulundan elde edilecek olan  $F(\Phi)$  ve  $U(\Phi)$  fonksiyonları (4.6.2)-(4.6.7) alan denklemlerini ve süreklilik denklemini sağlamalıdır.

(3.3.6.1) ile verilen Bianchi tip VIII ve IX uzay-zamanları için (4.6.1) Lagrange fonksiyoneline ait Noether simetri denklemleri (4.2.11)-(4.2.20) denklemlerine ilave olarak

$$2q \frac{F}{B^2} \left( \alpha BC - \beta AC + \gamma AB + \frac{F'}{F} ABC \delta \right) + \frac{F}{2} \frac{A^2}{B^2 C^2} \left( -3\alpha BC + \beta AC + \gamma AB - \frac{F'}{F} ABC \delta \right) - U(\alpha BC + \beta AC + \gamma AB) - \frac{U'}{U} ABC \delta = 0 \quad (4.6.9)$$

denklemini de içermektedir. LRS olmayan bu Bianchi tip VIII ve IX uzay-zamanları durumunda, (4.2.31) çiftlenim fonksiyonu, (4.2.35) potansiyeli ve (4.2.37) çözümleri (4.6.9) denkleminde yerine konursa  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  olur. Dolayısıyla Noether simetrisini doğuran vektör alanı yoktur.

Bianchi tip VIII ve IX uzay-zamanlarının LRS durumları için Lagrange fonksiyoneli

$$L = -2F'B^2 \dot{A}\dot{\Phi} - 4F'AB\dot{B}\dot{\Phi} - 4FB\dot{A}\dot{B} - 2FAB^2 + 2qFA - \frac{FA^3}{2B^2} + AB^2 \left( \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - U(\Phi) \right) \quad (4.6.10)$$

olup Noether simetri denklemleri, (4.2.23)-(4.2.28) denklemleri ve



$$\begin{aligned} \frac{2qF}{B} \left( \alpha B + \frac{F'}{F} AB\gamma \right) + \frac{FA^2}{2B^3} \left( -3\alpha B + 2\beta A - \frac{F'}{F} AB\gamma \right) \\ - U \left( \alpha B + 2\beta A + \frac{U'}{U} AB\gamma \right) B = 0 \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

denkleminde oluşmaktadır. (4.2.31)-( 4.2.35) çözümleri (4.6.11) denkleminde kullanıldığında  $l = 0$  olur. Bu nedenle ele alınan bu durum için de Noether simetrisini doğuran herhangi bir vektör alanı yoktur.

#### **4.7. $f(R)$ Teorisinde Bianchi I Uzay-Zamanları İçin Noether Simetri Yaklaşımı**

Einstein-Hilbert etki integralindeki  $R$  Ricci skaleri yerine  $R$ 'nin analitik bir fonksiyonu olan  $f(R)$  alınmakta ve bu durumdaki çekim teorisi için etki integrali

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (4.7.1)$$

ile verilmektedir. Burada madde alanı dikkate alınmamıştır. Metrik formalizmi kullanılarak bu etki integralinin metrik tensöre göre varyasyonu alındığında alan denklemleri şu şekilde bulunur:

$$f_R(R)R_{ab} - \frac{1}{2}f(R)g_{ab} - \nabla_a \nabla_b f_R(R) + g_{ab} \square f_R(R) = 0 \quad (4.7.2)$$

(3.3.1.4) ile verilen Bianchi tip I kozmolojik modeli için (4.7.1) etki integrali

$$A = \int dt L(A, B, C, R, \dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{R}) \quad (4.7.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;  $R$  Ricci skaler ve  $A, B, C$  metrik potansiyelleri, *konfigürasyon* uzayını tanımlayan bağımsız değişkenler kümesini oluşturur. Nokta ise kozmik zamana göre türevi göstermektedir. Bu konfigürasyon uzayı kümesini kullanarak Lagrange fonksiyoneli elde etmek için (4.7.1) etki integrali

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f(R) - \lambda [R - \tilde{R}] \right] \quad (4.7.4)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada  $\lambda$  Lagrange çarpanıdır (multiplier) ve  $\tilde{R}$  Bianchi tip I uzay-zaman metriğine göre ifade edilen Ricci skaleridir. Dolayısıyla bu metriktir Ricci skaleri

$$\tilde{R} = 2 \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right] \quad (4.7.5)$$

olarak elde edilir. Burada, (4.7.4) etki integralinde görünen  $R - \tilde{R} = 0$  ifadesi bir kısıtlama denklemi olarak karşımıza çıkar. Bu durumda  $\lambda$  çarpanını bulmak için Lagrange çarpanı yöntemi kullanılır. Bunun için (4.7.4) integralinin  $R'$  ye göre varyasyonu alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\lambda = f_R(R) \quad (4.7.6)$$

bulunur.  $g_{ab}$  metrik tensörün determinanı  $g$ , (4.7.6) Ricci skaleri ve  $\lambda$  nın değeri (4.7.5) integralinde yerine konursa

$$A = \int dt ABC \left[ f - f_R \left[ R - 2 \left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right) \right] \right] \quad (4.7.7)$$

denklemini elde edilir. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak ivmeli terimleri yok edilirse Lagrange fonksiyoneli

$$L = ABC(f - Rf_R) - 2f_{RR}(BC\dot{A} + AC\dot{B} + AB\dot{C})\dot{R} - 2f_R(C\dot{A}\dot{B} + B\dot{A}\dot{C} + A\dot{B}\dot{C}) \quad (4.7.8)$$

şeklinde bulunur.

Bianchi tip I metriği için (4.7.2) alan denklemlerinden veya (4.7.8) Lagrangianının varyasyonu alındığı zaman

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{f_{RR}}{f_R} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{R} + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R) = 0, \quad (4.7.9)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \frac{f_{RR}}{f_R} \left[ \ddot{R} + \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{R} \right] + \frac{f_{RRR}}{f_R} \dot{R}^2 + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R) = 0, \quad (4.7.10)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{f_{RR}}{f_R} \left[ \ddot{R} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \dot{R} \right] + \frac{f_{RRR}}{f_R} \dot{R}^2 + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R) = 0, \quad (4.7.11)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{f_{RR}}{f_R} \left[ \ddot{R} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{R} \right] + \frac{f_{RRR}}{f_R} \dot{R}^2 + \frac{1}{2f_R} (f - Rf_R) = 0 \quad (4.7.12)$$

$$f_{RR} \left[ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{R}{2} \right] = 0 \quad (4.7.13)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$f(R)$  çekim teorisinde Bianchi tip I uzay-zamanı için  $L$  Lagrange fonksiyonunun tanımlandığı konfigürasyon uzayı  $Q \equiv \{A, B, C, R\}$  ve konfigürasyon teğet uzayı ise  $TQ \equiv \{A, B, C, R, \dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{R}\}$  şeklindedir. (3.2.3) ile verilen Noether teoremi koşulunun sağlanması durumunda  $\bar{X}$  vektör alanı

$$\bar{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial A} + \beta \frac{\partial}{\partial B} + \gamma \frac{\partial}{\partial C} + \delta \frac{\partial}{\partial R} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{A}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \dot{C}} + \dot{\delta} \frac{\partial}{\partial \dot{R}} \quad (4.7.14)$$

şeklinde olması gerekir. Burada  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$  ve  $\dot{\delta}$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\partial \alpha}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \alpha}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \alpha}{\partial C} \dot{C} + \frac{\partial \alpha}{\partial R} \dot{R}, \\ \dot{\beta} &= \frac{\partial \beta}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \beta}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \beta}{\partial C} \dot{C} + \frac{\partial \beta}{\partial R} \dot{R} \\ \dot{\gamma} &= \frac{\partial \gamma}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \gamma}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \gamma}{\partial C} \dot{C} + \frac{\partial \gamma}{\partial R} \dot{R} \\ \dot{\delta} &= \frac{\partial \delta}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \delta}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \delta}{\partial C} \dot{C} + \frac{\partial \delta}{\partial R} \dot{R} \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

biçiminde tanımlıdır.

Bianchi tip I metrik için Noether simetri koşulundan, (4.7.14) vektör alanı ve (4.7.8) Lagrangianı kullanıldığında aşağıdaki 11 denklemden oluşan sistem elde edilir:

$$C \frac{\partial \beta}{\partial A} + B \frac{\partial \gamma}{\partial A} + \frac{f_{RR}}{f_R} BC \frac{\partial \delta}{\partial A} = 0, \quad (4.7.16)$$

$$C \frac{\partial \alpha}{\partial B} + A \frac{\partial \gamma}{\partial B} + \frac{f_{RR}}{f_R} AC \frac{\partial \delta}{\partial B} = 0, \quad (4.7.17)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial C} + A \frac{\partial \beta}{\partial C} + \frac{f_{RR}}{f_R} AB \frac{\partial \delta}{\partial C} = 0, \quad (4.7.18)$$

$$f_{RR} \left( BC \frac{\partial \alpha}{\partial R} + AC \frac{\partial \beta}{\partial R} + AB \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right) = 0, \quad (4.7.19)$$

$$\gamma + C \frac{\partial \alpha}{\partial A} + A \frac{\partial \gamma}{\partial A} + C \frac{\partial \beta}{\partial B} + B \frac{\partial \gamma}{\partial B} + \frac{f_{RR}}{f_R} C \left( \delta + A \frac{\partial \delta}{\partial A} + B \frac{\partial \delta}{\partial B} \right) = 0, \quad (4.7.20)$$

$$\beta + B \frac{\partial \alpha}{\partial A} + A \frac{\partial \beta}{\partial A} + C \frac{\partial \beta}{\partial C} + B \frac{\partial \gamma}{\partial C} + \frac{f_{RR}}{f_R} B \left( \delta + A \frac{\partial \delta}{\partial A} + C \frac{\partial \delta}{\partial C} \right) = 0, \quad (4.7.21)$$

$$\alpha + C \frac{\partial \alpha}{\partial C} + A \frac{\partial \gamma}{\partial C} + B \frac{\partial \alpha}{\partial B} + A \frac{\partial \beta}{\partial B} + \frac{f_{RR}}{f_R} A \left( \delta + C \frac{\partial \delta}{\partial C} + B \frac{\partial \delta}{\partial B} \right) = 0, \quad (4.7.22)$$

$$C \frac{\partial \beta}{\partial R} + B \frac{\partial \gamma}{\partial R} + \frac{f_{RR}}{f_R} \left( C\beta + B\gamma + BC \frac{\partial \alpha}{\partial A} + AC \frac{\partial \beta}{\partial A} + AB \frac{\partial \gamma}{\partial A} + BC \frac{\partial \delta}{\partial R} \right) + \frac{f_{RRR}}{f_R} BC \delta = 0, \quad (4.7.23)$$

$$C \frac{\partial \alpha}{\partial R} + A \frac{\partial \gamma}{\partial R} + \frac{f_{RR}}{f_R} \left( C\alpha + A\gamma + BC \frac{\partial \alpha}{\partial B} + AC \frac{\partial \beta}{\partial B} + AB \frac{\partial \gamma}{\partial B} + AC \frac{\partial \delta}{\partial R} \right) + \frac{f_{RRR}}{f_R} AC \delta = 0 \quad (4.7.24)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial R} + A \frac{\partial \beta}{\partial R} + \frac{f_{RR}}{f_R} \left( B\alpha + A\beta + BC \frac{\partial \alpha}{\partial C} + AC \frac{\partial \beta}{\partial C} + AB \frac{\partial \gamma}{\partial C} + AB \frac{\partial \delta}{\partial R} \right) + \frac{f_{RRR}}{f_R} AB \delta = 0 \quad (4.7.25)$$

$$(f - Rf_R)(BC\alpha + AC\beta + AB\gamma) - f_{RR} ABCR\delta = 0 \quad (4.7.26)$$

Burada, konfigürasyon uzayının boyutu 4 olduğundan dolayı 11 tane diferansiyel denklem elde edilmiştir.

(4.7.19) denklemini dikkate alındığında iki durum karşımıza çıkar:

$$4.7.i. \quad f_{RR} = 0 \quad (4.7.27)$$

$$4.7.ii. \quad BC \frac{\partial \alpha}{\partial R} + AC \frac{\partial \beta}{\partial R} + AB \frac{\partial \gamma}{\partial R} = 0 \quad (4.7.28)$$

**Durum (4.7.i):** Bu durumda, (4.7.8) ile verilen Lagrange fonksiyonelinin Hessian determinanı ( $W = -48(ABCf_R f_{RR})^2$ ) sıfır olduğundan Lagrangian dejeneredir.  $f_{RR} = 0$  iken çekim teorisinin şekli

$$f(R) = a_0 R + a_1 \quad (4.7.29)$$

olur. Eğer  $a_0 = 1$  ve  $a_1 = \Lambda$  alınır (Burada  $\Lambda$  kozmolojik sabittir) kozmolojik sabit içeren Einstein çekim teorisi elde edilir.

(4.7.29) ile verilen  $f(R)$  kullanılıp, Noether simetrisine ait (4.7.16)-(4.7.26) denklem sistemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözüldüğünde

$$\alpha = c_1 A, \quad \beta = c_1 B, \quad \gamma = -2c_1 C \quad \delta = \delta(A, B, C, R) \quad (4.7.30)$$

elde edilir. Burada  $c_1$  keyfi bir integrasyon sabitidir. (4.7.29) ile verilen çekim teorisinde; Bianchi tip I uzay-zamanları Noether simetrisine sahiptir ve simetriyi doğuran vektör alanı şu şekilde bulunur:

$$\vec{X} = c_1 \left[ A \frac{\partial}{\partial A} + B \frac{\partial}{\partial B} - 2C \frac{\partial}{\partial C} + \delta \frac{\partial}{\partial R} + \dot{A} \frac{\partial}{\partial \dot{A}} + \dot{B} \frac{\partial}{\partial \dot{B}} - 2\dot{C} \frac{\partial}{\partial \dot{C}} + \dot{\delta} \frac{\partial}{\partial \dot{R}} \right] \quad (4.7.31)$$

(4.7.29) çekim teorisi için (4.7.8) Lagrangianı,  $a_0 = 1$  ve  $a_1 = \Lambda$  olmak üzere

$$L = ABC\Lambda - 2(C\dot{A}\dot{B} + B\dot{A}\dot{C} + A\dot{B}\dot{C}) \quad (4.7.32)$$

şekline indirgenir. Bu Lagrangianıdan konfigürasyon uzayının boyutunun 3 olduğu görülmekte olup  $Q \equiv \{A, B, C\}$  şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla Noether simetrisini doğuran vektör alanı R'den bağımsızdır ve

$$X = c_1 \left[ A \frac{\partial}{\partial A} + B \frac{\partial}{\partial B} - 2C \frac{\partial}{\partial C} + \dot{A} \frac{\partial}{\partial \dot{A}} + \dot{B} \frac{\partial}{\partial \dot{B}} - 2\dot{C} \frac{\partial}{\partial \dot{C}} \right] \quad (4.7.33)$$

olur. Elde edilen bu Noether simetrisi  $L(A, B, C, \dot{A}, \dot{B}, \dot{C}) \leftrightarrow L(u, v, \dot{w}, \dot{u}, \dot{v})$  dönüşümünü yapmamıza olanak sağlar. Burada  $w = w(A, B, C)$ ,  $u = u(A, B, C)$  ve  $v = v(A, B, C)$  dir. Ancak ve ancak

$$i_x(dw) = 1, \quad i_x(du) = 0, \quad i_x(dv) = 0 \quad (4.7.34)$$

durumu gerçekleşirse  $w$ , *dönümlü* (cyclic) değişkendir. (4.7.34) eşitlikleri açık olarak yazılırsa

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial A} + \beta \frac{\partial w}{\partial B} + \gamma \frac{\partial w}{\partial C} = 1 \quad (4.7.35)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial A} + \beta \frac{\partial u}{\partial B} + \gamma \frac{\partial u}{\partial C} = 0 \quad (4.7.36)$$

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial A} + \beta \frac{\partial v}{\partial B} + \gamma \frac{\partial v}{\partial C} = 0 \quad (4.7.37)$$

elde edilir. (4.7.35)-(4.7.37) denklem sisteminin genel çözümü  $w = c_1^{-1} \ln(A) + g_1(BA^{-1}, A^2C)$ ,  $u = g_2(BA^{-1}, A^2C)$  ve  $v = g_3(BA^{-1}, A^2C)$  olmak üzere

$$w = \frac{1}{c_1} \ln(A), \quad u = BA^{-1}, \quad v = A^2C \quad (4.7.38)$$

çözümünü dikkate alalım. Bu durumda

$$A = e^{c_1 w}, \quad B = u e^{c_1 w}, \quad C = v e^{-2c_1 w}, \quad (4.7.39)$$

ters dönüşümü alımp ve bu ifadeler (4.7.32) Lagrange fonksiyoneline yerine konulursa dönüştümlü Lagrangian

$$L = 6c_1^2 uv\dot{w}^2 + 2c_1 v\dot{u}\dot{w} - 4c_1 u\dot{v}\dot{w} - 2\dot{u}\dot{v} + \Lambda uv \quad (4.7.40)$$

olur. Böylece;  $w'$  nun dönümlü değişken (yani  $\frac{\partial L}{\partial w} = 0$ ) olmasının sağlandığı görülür.

(4.7.40) ile verilen Lagrangiyandan, Euler-Lagrange hareket denklemleri ve  $E_L = 0$  enerji fonksiyoneli aşağıdaki gibi bulunur:

$$3c_1^2 \dot{w}^2 + c_1 \left( \frac{\dot{u}}{u} - 2 \frac{\dot{v}}{v} \right) \dot{w} - \frac{\dot{u}\dot{v}}{uv} - \frac{\Lambda}{2} = 0, \quad (4.7.41)$$

$$6c_1 \dot{w} + \frac{\dot{u}}{u} - 2 \frac{\dot{v}}{v} = \frac{l}{2c_1 uv}, \quad (4.7.42)$$

$$\frac{\ddot{v}}{v} - c_1 \ddot{w} + 3c_1^2 \dot{w}^2 - 3c_1 \frac{\dot{v}\dot{w}}{v} + \frac{\Lambda}{2} = 0, \quad (4.7.43)$$

$$\frac{\ddot{u}}{u} + 2c_1 \ddot{w} + 3c_1^2 \dot{w}^2 + 3c_1 \frac{\dot{u}\dot{w}}{u} + \frac{\Lambda}{2} = 0, \quad (4.7.44)$$

Burada  $c_1 \neq 0$  ve  $l$  hareket sabitidir. Bu denklem sisteminden

$$u(t) = b_1, \quad (4.7.45)$$

$$v(t) = \frac{\sqrt{6}l}{12b_1 c_1 \sqrt{\Lambda}} \sin\left(\frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t\right), \quad (4.7.46)$$

$$w(t) = -\frac{1}{3c_1} \ln\left[\frac{\Lambda}{6c_1^2 b_2^2 \sin^2\left(\frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t\right)}\right] \quad (4.7.47)$$

çözümleri bulunur. Burada  $b_1$  ve  $b_2$  sıfırdan farklı sabitlerdir. Dolayısıyla (4.7.39) dönüşümünü kullanarak Bianchi tip I uzay zamanları için metrik potansiyelleri

$$A(t) = \left[ \frac{6b_2^2 c_1^2}{\Lambda} \sin^2\left(\frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t\right) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (4.7.48)$$

$$B(t) = b_1 \left[ \frac{6b_2^2 c_1^2}{\Lambda} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (4.7.49)$$

$$C(t) = \frac{6^{5/6} l}{72b_1 c_1 \sqrt{\Lambda}} \sin \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t \right) \left[ \frac{\Lambda}{b_2^2 c_1^2 \sin^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right)} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (4.7.50)$$

şeklindedir.

Bianchi tip I modeli için  $x$ ,  $y$  ve  $z$  yönlerindeki Hubble parametreleri

$$H_x = \frac{\dot{A}}{A}, \quad H_y = \frac{\dot{B}}{B}, \quad H_z = \frac{\dot{C}}{C} \quad (4.7.51)$$

olarak verilir. Bianchi tip I uzay-zamanı için evrenin hacmi  $V(t) = ABC$  olmak üzere, *kozmojik sabit* içeren çekim teorisinde

$$V(t) = \frac{\sqrt{6}l}{12c_1 \sqrt{\Lambda}} \sin \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t \right) \quad (4.7.52)$$

olarak bulunur. Aynı model için ortalama ölçek çarpanı

$$a(t) = \left[ \frac{\sqrt{6}l}{12c_1 \sqrt{\Lambda}} \sin \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t \right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (4.7.53)$$

olur. Ortalama Hubble parametresi

$$H(t) = \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \quad (4.7.54)$$

hesaplandığında

$$H(t) = \frac{\sqrt{6\Lambda}}{6} \cot \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t \right) \quad (4.7.55)$$

elde edilir. (4.7.51) ile verilen yönlü Hubble parametreleri ve (4.7.54) ile verilen ortalama Hubble parametresi kullanılarak genişlemenin anizotropisi yani *anizotropi parametresi*



$$\Delta = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{H_i - H}{H} \right)^2 \quad (4.7.56)$$

ile verilir (Kumar ve Singh, 2007). Burada  $H_i$  ( $i=1,2,3$ ) yönlü Hubble parametrelerini göstermektedir. Ele aldığımız Bianchi tip I kozmolojik model için anizotropi parametresi

$$\Delta = \frac{2}{1 - 4 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right) \sin^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right)} \quad (4.7.57)$$

dir. Bu model için yavaşlama parametresi ( $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ ) ise

$$q = \frac{2 \left[ 1 - 2 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right) \sin^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right) \right]}{1 - 4 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right) \sin^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right)} \quad (4.7.58)$$

olmaktadır. (4.7.53) ile verilen ölçek çarpanının birinci ve ikinci türevleri hesaplanırsa

$$\dot{a}(t) = \frac{6^{\frac{1}{3}} l}{12c_1} \cos \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t \right) \left[ \frac{l}{2c_1 \sqrt{\Lambda}} \sin \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t \right) \right]^{\frac{2}{3}} \quad (4.7.59)$$

$$\ddot{a}(t) = -\frac{6^{\frac{5}{6}} l \sqrt{\Lambda}}{36c_1} \frac{2 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right) \sin^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right) + 1}{\sin \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t \right) \left[ \frac{l}{2c_1 \sqrt{\Lambda}} \sin \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t \right) \right]^{\frac{2}{3}}} \quad (4.7.60)$$

bulunur. Bu model için genişleme skaleri

$$\Theta = 3H = \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} \cot \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{2} t \right) \quad (4.7.61)$$

ve shear skaleri

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (H_i - 3H^2) = - \frac{\Lambda}{8 \cos^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right) \sin^2 \left( \frac{\sqrt{6\Lambda}}{4} t \right)} \quad (4.7.62)$$

şeklinde elde edilir

**Durum (4.7.ii):** Bu durumda (4.7.16) –(4.7.26) Noether simetri denklemleri

$$f(R) = R^n \quad (4.7.63)$$

şekli seçildiğinde

$$\alpha = -2c_1 A, \quad \beta = c_1 B, \quad \gamma = c_1 C \quad \delta = 0 \quad (4.7.64)$$

çözümlerini sağlamaktadır. Burada  $n$  sabit olup  $n \neq 0,1$  dir. Eğer  $n = 1$  olursa standart Einstein çekim teorisine indirgenir. (4.7.63) ile verilen çekim teorisi için (4.7.8) Lagrangianı dejenere olmaz. (4.7.64) değerleri için Noether simetrisini doğuran vektör alanı

$$\bar{X} = c_1 \left[ -2A \frac{\partial}{\partial A} + B \frac{\partial}{\partial B} + C \frac{\partial}{\partial C} - 2\dot{A} \frac{\partial}{\partial \dot{A}} + \dot{B} \frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \dot{C} \frac{\partial}{\partial \dot{C}} \right] \quad (4.7.65)$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen bu Noether simetrisi  $L(A, B, C, R, \dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{R}) \leftrightarrow L(w, u, v, \dot{s}, \dot{w}, \dot{u}, \dot{v})$  dönüşümünü yapmamıza olanak sağlar. Burada  $s = s(A, B, C, R)$ ,  $w = w(A, B, C, R)$ ,  $u = u(A, B, C, R)$  ve  $v = v(A, B, C, R)$  dir ve konfigürasyon uzayının boyutu dördür. Böylece

$$i_X(ds) = 1, \quad i_X(dw) = 0, \quad i_X(du) = 0, \quad i_X(dv) = 0 \quad (4.7.66)$$

durumu gerçekleşirse  $s$ , *dönümlü* (cyclic) değişken olduğu söylenebilir. (4.7.66) eşitlikleri açık olarak yazılırsa

$$\alpha \frac{\partial s}{\partial A} + \beta \frac{\partial s}{\partial B} + \gamma \frac{\partial s}{\partial C} = 1 \quad (4.7.67)$$

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial A} + \beta \frac{\partial w}{\partial B} + \gamma \frac{\partial w}{\partial C} = 0 \quad (4.7.68)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial A} + \beta \frac{\partial u}{\partial B} + \gamma \frac{\partial u}{\partial C} = 0 \quad (4.7.69)$$

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial A} + \beta \frac{\partial v}{\partial B} + \gamma \frac{\partial v}{\partial C} = 0 \quad (4.7.70)$$

olur. Bu denklem sisteminin genel çözümü  $s = -(2c_1)^{-1} \ln(A) + f_1(A^{1/2}B, A^{1/2}C, R)$  ,  
 $w = f_2(A^{1/2}B, A^{1/2}C, R)$  ,  $u = f_3(BA^{-1}, A^2C)$  ve  $v = f_1(A^{1/2}B, A^{1/2}C, R)$  olmak üzere

$$s = -\frac{1}{2c_1} \ln(A), \quad w = A^{1/2}B, \quad u = A^{1/2}C, \quad v = R \quad (4.7.71)$$

çözümlerini dikkate alalım. (4.7.71) eşitliklerinin ters dönüşümleri alınırsa

$$A = e^{-2c_1s}, \quad B = we^{c_1s}, \quad C = ue^{c_1s}, \quad R = v \quad (4.7.72)$$

elde edilir. Bu ifadeler ve (4.7.63)  $f(R)$  formu (4.7.8) Lagrange fonksiyonelinde yerine konursa

$$L = 6c_1^2 n w u v^{n-1} \dot{s}^2 + 2c_1 n v^{n-1} (u\dot{w} + w\dot{u})\dot{s} - 2n(n-1)v^{n-2} (u\dot{w} + w\dot{u})\dot{v} \\ - 2n v^{n-1} \dot{w}\dot{u} - (n-1)w u v^n \quad (4.7.73)$$

olur. Bu Lagrange fonksiyonelinde de  $\frac{\partial L}{\partial s} = 0$  olduğu görünmektedir. Dolayısıyla  $s$  dönümlü değişkendir. (4.7.73) ile verilen Lagrangiana ait  $E_L = 0$  enerji fonksiyoneli ve Euler-Lagrange hareket denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$3c_1^2 \dot{s}^2 + c_1 \left( \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{u}}{u} \right) \dot{s} - (n-1) \left( \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{u}}{u} \right) \frac{\dot{v}}{v} - \frac{\dot{w}\dot{u}}{wu} + \frac{n-1}{2n} v = 0, \quad (4.7.74)$$

$$6c_1 \dot{s} + \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{u}}{u} = \frac{l_0}{w u v^{n-1}}, \quad (4.7.75)$$

$$\frac{\ddot{u}}{u} - c_1 \dot{s} + (n-1) \frac{\ddot{v}}{v} + 3c_1^2 \dot{s}^2 + (n-1)(n-2) \frac{\dot{v}^2}{v^2} - (n-1) \left( c_1 \dot{s} - \frac{\dot{u}}{u} \right) \frac{\dot{v}}{v} - \frac{n-1}{2n} v = 0, \quad (4.7.76)$$

$$\frac{\ddot{w}}{w} - c_1 \dot{s} + (n-1) \frac{\ddot{v}}{v} + 3c_1^2 \dot{s}^2 + (n-1)(n-2) \frac{\dot{v}^2}{v^2} - (n-1) \left( c_1 \dot{s} - \frac{\dot{w}}{w} \right) \frac{\dot{v}}{v} - \frac{n-1}{2n} v = 0, \quad (4.7.77)$$

$$\frac{\ddot{w}}{w} + \frac{\ddot{u}}{u} + 3c_1^2 \dot{s}^2 + c_1 \left( \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{u}}{u} \right) \dot{s} + \frac{\dot{w}\dot{u}}{wu} - \frac{v}{2} = 0. \quad (4.7.78)$$

Burada  $l_0$  korunumlu niceliğe karşılık gelen hareket sabitidir. (4.7.77) denkleminde (4.7.76) denklemi çıkartılırsa

$$\frac{\ddot{w}}{w} - \frac{\ddot{u}}{u} + (n-1) \left( \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{u}}{u} \right) \frac{\dot{v}}{v} = 0 \quad (4.7.79)$$

bulunur. Bu denklemden

$$\frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{u}}{u} = \frac{a_0}{wuv^{n-1}} \quad (4.7.80)$$

elde edilir. Burada  $a_0$  integral sabitidir. (4.7.74), (4.7.75), (4.7.76), (4.7.78) ve (4.7.80) denklemlerini çözmek için

$$dt = wuv^{n-1} d\tau \quad (4.7.81)$$

zaman dönüşümünü kullanalım. Bu dönüşüm altında (4.7.75) ve (4.7.80) denklemleri

$$6c_1 s_\tau + \frac{w_\tau}{w} + \frac{u_\tau}{u} = l_0, \quad (4.7.82)$$

$$\frac{w_\tau}{w} - \frac{u_\tau}{u} = a_0 \quad (4.7.83)$$

şekline gelir. Bu iki denklem  $u(\tau)$  cinsinden çözümlerse

$$w(\tau) = l_1 u(\tau) e^{a_0 \tau} \quad (4.7.84)$$

ve

$$s(\tau) = \frac{1}{3c_1} \left[ \frac{(l_0 - a_0)\tau}{2} - \ln(u) \right] + l_2 \quad (4.7.85)$$

elde edilir. Burada  $l_1$  ve  $l_2$  integral sabitleridir. (4.7.71) dönüşümünü kullanarak (4.7.84) ve (4.7.85) çözümleri (4.7.74), (4.7.75) ve (4.7.78) denklemlerinde yerine konursa

$$\frac{u_\tau^2}{u^2} + a_0 \frac{u_\tau}{u} + \frac{3(n-1)}{4} \left( a_0 + 2 \frac{u_\tau}{u} \right) \frac{v_\tau}{v} - \frac{3l_1^2(n-1)}{8n} u^4 v^{2n-1} e^{2a_0 \tau} - \frac{(l_0 - a_0)(l_0 + a_0)}{16} = 0, \quad (4.7.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{\tau\tau}}{u} + \frac{3}{4} (n-1) \frac{v_{\tau\tau}}{v} - \frac{2u_\tau^2}{u^2} - a_0 \frac{u_\tau}{u} - \frac{3(n-1)}{4} \left( a_0 + 2 \frac{u_\tau}{u} + \frac{v_\tau}{v} \right) \frac{v_\tau}{v} \\ - \frac{3l_1^2(n-1)}{8n} u^4 v^{2n-1} e^{2a_0 \tau} + \frac{(l_0 - a_0)(l_0 + a_0)}{16} = 0 \end{aligned} \quad (4.7.87)$$

$$\frac{2u_{\tau\tau}}{u} - \frac{10}{3} \frac{u_\tau^2}{u^2} - \frac{4a_0}{3} \frac{u_\tau}{u} - (n-1) \left( a_0 + 2 \frac{u_\tau}{u} \right) \frac{v_\tau}{v} - \frac{l_1^2}{2} u^4 v^{2n-1} e^{2a_0 \tau} + \frac{(l_0 - a_0)(l_0 + a_0)}{12} = 0 \quad (4.7.88)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$u(\tau) = \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{3(n-1)}{4(4n-5)}} \exp \left[ - \frac{6l_3(n-1)\tau + (4n-5)(a_0\tau - 4l_4)}{4(4n-5)} \right] \quad (4.7.89)$$

$$v(\tau) = \left[ \frac{nh \exp \left[ \frac{6l_3(n-1)\tau + (4n-5)(a_0\tau - 4l_4)}{(4n-5)} \right] \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{n-2}{4n-5}}}{6l_1^2(n-1)(2n-1)(4n-5)} \right]^{\frac{1}{2n-1}} e^{\frac{-2a_0}{2n-1}\tau} \quad (4.7.90)$$

elde edilir. Burada  $l_3$ ,  $l_4$  ve  $l_5$  integral sabitleridir ve

$$h \equiv -l_0^2(8n^2 - 14n + 5) - 2a_0^2(20n^2 - 41n + 20) + 12a_0l_3(4n^2 - 9n + 5) - 36l_3^2(n-1)^2 \quad (4.7.91)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca  $n \neq \frac{1}{2}$  ve  $n \neq \frac{5}{4}$  dir. (4.7.89) çözümü (4.7.84) ve

(4.7.85) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$w(\tau) = l_1 \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{3(n-1)}{4(4n-5)}} \exp \left[ -\frac{6l_3(n-1)\tau - (4n-5)(3a_0\tau + 4l_4)}{4(4n-5)} \right] \quad (4.7.92)$$

$$s(\tau) = \frac{1}{6c_1} \left[ \frac{6l_3(n-1)\tau + (4n-5)(2l_0\tau - a_0\tau - 4l_4)}{2(4n-5)} \right] - \frac{1}{3c_1} \ln \left\{ \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{3(n-1)}{4(4n-5)}} \right\} + l_2 \quad (4.7.93)$$

bulunur. (4.7.89)-(4.7.93) çözümleri (4.7.72) eşitliklerinde kullanıldığı zaman Bianchi tip I modeli için metrik potansiyelleri ve  $R$  eğrilik skaleri

$$A(\tau) = \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{(n-1)}{2(4n-5)}} \exp \left[ -\frac{6l_3(n-1)\tau + (4n-5)(2l_0\tau - a_0\tau - 4l_4 + 12c_1l_2)}{6(4n-5)} \right] \quad (4.7.94)$$

$$B(\tau) = l_1 \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{(n-1)}{2(4n-5)}} \exp \left[ -\frac{6l_3(n-1)\tau - (4n-5)(l_0\tau + 4a_0\tau + 4l_4 + 6c_1l_2)}{6(4n-5)} \right] \quad (4.7.95)$$

$$C(\tau) = \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{(n-1)}{2(4n-5)}} \exp \left[ -\frac{6l_3(n-1)\tau + (4n-5)(-l_0\tau + 2a_0\tau - 4l_4 - 6c_1l_2)}{6(4n-5)} \right] \quad (4.7.96)$$

$$R(\tau) = \left[ \frac{nh \exp \left[ \frac{6l_3(n-1)\tau + (4n-5)(a_0\tau - 4l_4)}{(4n-5)} \right] \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{n-2}{4n-5}}}{6l_1^2(n-1)(2n-1)(4n-5)} \right]^{\frac{1}{2n-1}} e^{\frac{-2a_0\tau}{2n-1}} \quad (4.7.97)$$

olarak bulunur.

Elde edilen bu metrik potansiyelleri kullanıldığında,  $f(R) = R^n$  çekim teorisinde, Bianchi tip I uzay-zamanı için evrenin uzaysal hacmi

$$V(\tau) = l_1 \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{3(n-1)}{2(4n-5)}} \exp \left[ -\frac{6l_3(n-1)\tau - (4n-5)(a_0\tau + 4l_4)}{2(4n-5)} \right] \quad (4.7.98)$$

olur. Bu model için ortalama ölçek çarpanı

$$a(\tau) = l_1^{1/3} \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) \right]^{\frac{(n-1)}{2(4n-5)}} \exp \left[ -\frac{6l_3(n-1)\tau - (4n-5)(a_0\tau + 4l_4)}{6(4n-5)} \right] \quad (4.7.99)$$

şeklinde bulunur. Ortalama Hubble parametresi

$$H(\tau) = \frac{1}{3} \frac{V_\tau}{V} = \frac{a_\tau}{a} = \frac{1}{3} \left( \frac{A_\tau}{A} + \frac{B_\tau}{B} + \frac{C_\tau}{C} \right), \quad (4.7.100)$$

hesaplandığında

$$H(\tau) = \frac{\sqrt{h} \tan \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) - 6l_3(n-1) + (4n-5)a_0}{6(4n-5)} \quad (4.7.101)$$

elde edilir. (4.7.51) ile verilen yönlü Hubble parametreleri ve (4.7.101) ile verilen ortalama Hubble parametresi kullanıldığında (4.7.56)denkleminde *anizotropi parametresi*

$$\Delta = 2(l_0^2 + 3a_0^2)(4n-5)^2 \left( \sqrt{h} \tan \left( \frac{\sqrt{h}(\tau + l_5)}{6(n-1)} \right) - 6l_3(n-1) + (4n-5)a_0 \right)^{-2} \quad (4.7.102)$$

elde edilir. Bu model için yavaşlama parametresi ise

$$q = - \frac{h \left[ (5n-6) \tan^2 \left( \frac{\sqrt{h}(\tau+l_3)}{6(n-1)} \right) + (4n-5) \right] + 2\sqrt{h}(n-1) \tan \left( \frac{\sqrt{h}(\tau+l_3)}{6(n-1)} \right) [(4n-5)a_0 - 6l_3(n-1)] + g}{(n-1) \left[ \sqrt{h} \tan \left( \frac{\sqrt{h}(\tau+l_3)}{6(n-1)} \right) + (4n-5)a_0 - 6l_3(n-1) \right]^2} \quad (4.7.103)$$

şeklinde olur. Burada  $g \equiv (n-1)[a_0^2(4n-5)^2 - 12l_3(n-1)[(4n-5)l_0 - 3l_3(n-1)]]$  dir.

Şimdi (4.7.89) ve (4.7.90) genel çözümlerinin tanımsız olduğu  $n = \frac{1}{2}$  ve  $n = \frac{5}{4}$

değerleri için bu denklemleri inceleyelim.

$n = \frac{1}{2}$  **Durumu:** Bu durumda çekim teorisi  $f(R) = R^{\frac{1}{2}}$  şekline sahiptir.  $n$ 'nin bu değeri

(4.7.86)-(4.7.88) denklem sisteminde yerine yazılırsa bu denklem sistemi

$$u(\tau) = l_3 e^{l_4 \tau}, \quad (4.7.104)$$

$$v(\tau) = l_5 \exp \left[ \frac{16l_4(a_0 + l_4) + a_0^2 - l_0^2}{6(a_0 + 2l_4)} \tau + \frac{l_1^2 l_3^4}{2(a_0 + 2l_4)^2} e^{2(a_0 + 2l_4)\tau} \right] \quad (4.7.105)$$

çözümlerini sağlar. Burada  $a_0 \neq -2l_4$  ve  $l_i (i = 3,4,5)$  integral sabitleridir. Bu çözümler (4.7.84) ve (4.7.85) eşitliklerinde yerine konursa

$$w(\tau) = l_1 l_3 e^{(a_0 + l_4)\tau}, \quad (4.7.106)$$

$$s(\tau) = \frac{(l_0 - a_0 - 2l_4)\tau}{6c_1} - \frac{\ln l_3}{3c_1} + l_2 \quad (4.7.107)$$

elde edilir. Bu çözümler (4.7.72) denkleminde yerine konulduğunda,  $R^{\frac{1}{2}}$  çekim teorisinde Bianchi tip I uzay-zamanı için metrik katsayıları ve Ricci skaları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A(\tau) = l_3^{2/3} e^{\left( \frac{a_0 - l_0 + 2l_4}{3} \tau - 2c_1 l_2 \right)}, \quad (4.7.108)$$

$$B(\tau) = l_1 l_3^{2/3} e^{\left( \frac{(5a_0 + l_0 + 4l_4)}{6} \tau + c_1 l_2 \right)}, \quad (4.7.109)$$

$$C(\tau) = l_3^{2/3} e^{\left( \frac{l_0 - a_0 + 4l_4}{6} \tau + c_1 l_2 \right)}, \quad (4.7.110)$$



$$R(\tau) = l_5 \exp \left[ \frac{16l_4(a_0 + l_4) + a_0^2 - l_0^2}{6(a_0 + 2l_4)} \tau + \frac{l_1^2 l_3^4}{2(a_0 + 2l_4)^2} e^{2(a_0 + 2l_4)\tau} \right] \quad (4.7.111)$$

Bu çekim teorisi için  $x$ ,  $y$  ve  $z$  yönlerindeki Hubble parametreleri arasında

$$H_x = \frac{2l_4 + a_0 - l_0}{3}, \quad H_y = \frac{4l_4 + 5a_0 + l_0}{6}, \quad H_z = H_y - a_0 \quad (4.7.112)$$

şeklinde elde edilir. Bianchi tip I uzay-zamanı için evrenin uzaysal hacmi  $V(\tau) = ABC$  olmak üzere,  $R^{\frac{1}{2}}$  çekim teorisinde

$$V(\tau) = l_1 l_3^2 e^{(a_0 + 2l_4)\tau} \quad (4.7.113)$$

olarak bulunur. Aynı model için sırasıyla ortalama ölçek çarpanı, ortalama Hubble parametresi ve anizotropi parametresi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$a(\tau) = (l_1 l_3^2)^{1/3} e^{\left(\frac{a_0 + 2l_4}{3}\right)\tau}, \quad (4.7.114)$$

$$H(\tau) = \frac{a_0 + 2l_4}{3}, \quad (4.7.115)$$

$$\Delta = \frac{l_0^2 + 3a_0^2}{2(l_0 + 2l_4)^2} \quad (4.7.116)$$

Bu model için yavaşlama parametresi  $q = -1$  olur.

$n = \frac{5}{4}$  **Durumu:** Bu durumda çekim teorisi  $f(R) = R^{\frac{5}{4}}$  şekline sahiptir.  $n$ ' nin bu değeri

(4.7.86)-(4.7.88) denklem sisteminde yerine yazılırsa ve  $a_0 = 0$  kabul edilirse bu denklem sisteminden

$$u(\tau) = \exp\left[\frac{1}{4l_3^2} \left(4e^{l_3(\tau+l_4)} + l_0^2 l_3 \tau\right)\right], \quad (4.7.117)$$

$$v(\tau) = \frac{90^{2/3}}{9l_1^{4/3}} \exp\left[\frac{2}{3} \left(\frac{4}{l_3^2} e^{l_3(\tau+l_4)} + \left(\frac{l_0^2}{l_3} - l_3\right) \tau - l_3 l_4\right)\right] \quad (4.7.118)$$

çözümleri bulunur. Burada  $l_3 > 0, l_1 \neq 0$  ve  $l_i (i=3,4)$  integral sabitleridir. Bu çözümler (4.7.84) ve (4.7.85) eşitliklerinde yerine konursa

$$w(\tau) = l_1 \exp\left[\frac{1}{4l_3^2} \left(4e^{l_3(\tau+l_4)} + l_0^2 l_3 \tau\right)\right], \quad (4.7.119)$$

$$s(\tau) = -\frac{1}{3c_1} \exp\left[\frac{1}{4l_3^2} \left(4e^{l_3(\tau+l_4)} + l_0^2 l_3 \tau\right)\right] + \frac{l_0 t}{6c_1} + l_2 \quad (4.7.120)$$

elde edilir. Bu çözümler (4.7.72) denkleminde yerine konulduğunda,  $R^{\frac{5}{4}}$  çekim teorisinde Bianchi tip I kozmolojik modeli için metrik potansiyelleri ve Ricci skaleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$A(\tau) = \exp\left[\frac{2}{3l_3^2} e^{l_3(\tau+l_4)} + \frac{l_0}{6l_3} (l_0 - 2l_3) \tau - 2l_2 c_1\right], \quad (4.7.121)$$

$$B(\tau) = l_1 \exp\left[\frac{2}{3l_3^2} e^{l_3(\tau+l_4)} + \frac{l_0}{6l_3} (l_0 + l_3) \tau + l_2 c_1\right], \quad (4.7.122)$$

$$B(\tau) = l_1 C(\tau), \quad (4.7.123)$$

$$R(\tau) = \frac{90^{2/3}}{9l_1^{4/3}} \exp\left[\frac{2}{3} \left(\frac{4}{l_3^2} e^{l_3(\tau+l_4)} + \left(\frac{l_0^2}{l_3} - l_3\right) \tau - l_3 l_4\right)\right] \quad (4.7.124)$$

Bu çekim teorisi için  $x, y$  ve  $z$  yönlerindeki Hubble parametreleri arasında

$$H_x = \frac{l_0(l_0 - 2l_3) + 4e^{-2l_3(\tau+l_4)}}{6l_3}, \quad H_y = H_z = H_x + \frac{l_0}{2} \quad (4.7.125)$$

ilişkisi vardır. Bianchi tip I uzay-zamanı için evrenin hacmi  $R^4$  çekim teorisinde

$$V(\tau) = l_1 \exp\left[\frac{1}{2l_3^2} \left(4e^{l_3(\tau+l_4)} + l_0^2 l_3 \tau\right)\right] \quad (4.7.126)$$

olarak bulunur. Aynı model için sırasıyla ortalama ölçek çarpanı, ortalama Hubble parametresi ve anizotropi parametresi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$a(\tau) = l_1^{1/3} \exp\left[\frac{1}{6l_3^2} \left(4e^{l_3(\tau+l_4)} + l_0^2 l_3 \tau\right)\right], \quad (4.7.127)$$

$$H(\tau) = \frac{1}{6l_3} \left[4e^{l_3(\tau+l_4)} + l_0^2\right], \quad (4.7.128)$$

$$\Delta = 2 \left[ \frac{l_0 l_3}{4e^{l_3(\tau+l_4)} + l_0^2} \right]^2 \quad (4.7.129)$$

Bu model için yavaşlama parametresi

$$q = -1 - \frac{24l_3^2 e^{l_3(\tau+l_4)}}{\left[4e^{l_3(\tau+l_4)} + l_0^2\right]^2} \quad (6.7.130)$$

şeklinde olur.

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Uzay-zaman metriği üzerinde bazı simetri kabulleri yaparak Einstein alan denklemlerine kesin çözümler araştırmak çok sık kullanılan yöntemlerden biridir. Lagrange fonksiyonelinin varyasyonu alınarak elde edilen Euler-Lagrange hareket denklemlerinin invaryantlığını sağlamak ve hareket denklemlerine çözüm elde edebilmek amacıyla simetriler kullanılmaktadır. Bu simetri kabullerinden birisi, Lagrange fonksiyoneli için Noether simetri yaklaşımıdır. Dikkate alınan gravitasyon teorisinde, hareket sabiti elde etmek için Noether simetri yaklaşımı kullanışlı bir yöntemdir. Bu simetri yaklaşımı skaler tensör teorilerinde çiftlenim fonksiyonu ve potansiyelin,  $f(R)$  gravitasyon teorisinde ise  $f(R)$ 'nin şeklini belirlememize olanak sağlar.

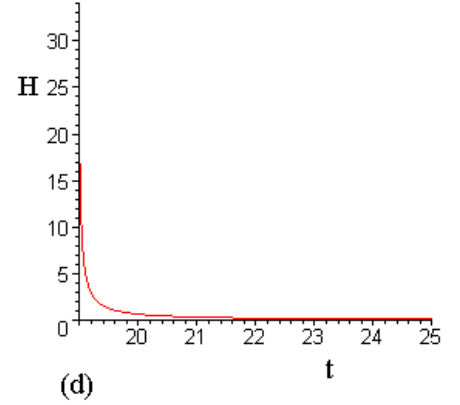
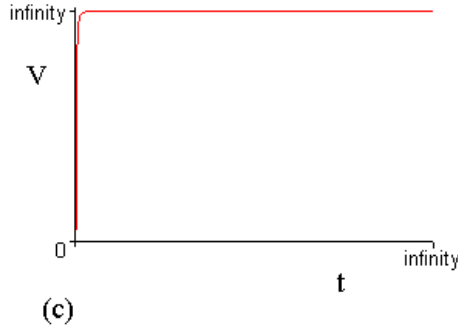
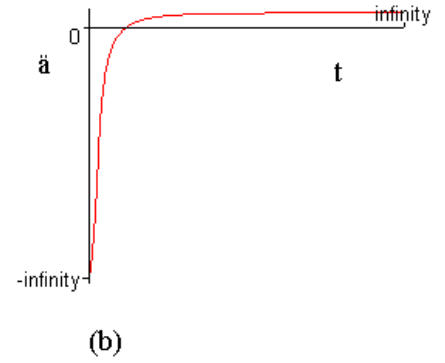
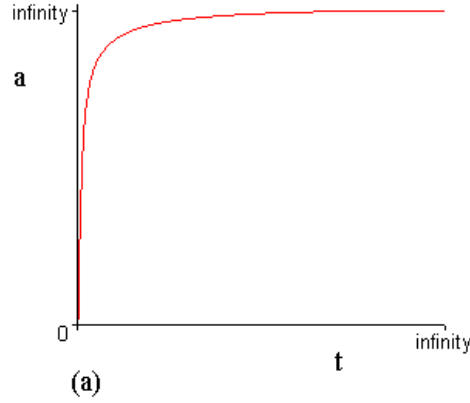
Bu çalışmanın ilk bölümünde tezin amacı anlatılmış ve ikinci bölümde temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ise öncelikle genelleştirilmiş gravitasyon teorilerinden skaler tensör teorileri ve  $f(R)$  teorisi hakkında genel bilgiler ele alınmıştır. (3.2) bölümünde, Noether simetri yaklaşımı ele alınmış ve incelenmiştir. Daha sonra; (3.3) bölümünde Bianchi kozmolojik modellerinin bazı özellikleri verilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde Bianchi uzay-zamanları için Noether simetri yaklaşımı araştırılmıştır. (4.1) alt bölümünde; skaler tensör teorilerinde, LRS Bianchi tip I, Bianchi tip III ve Kantowski-Sachs uzay-zamanları için Noether simetrisinin belirlenmesi ve bu uzay-zamanlara ait alan denklemlerine çözümler araştırılmıştır. Bu durumda; (4.1.8) Lagrange fonksiyoneli dejenere yapan (4.1.19) ile verilen çiftlenim fonksiyonu ve Brans-Dicke parametresi, (4.1.23) ile verilen skaler alanın potansiyeli seçildiğinde, Noether simetrisini doğuran vektör alanı (4.1.24) ile verilmiştir. Bu simetri; (4.1.35) dönüşümünü yapmamıza olanak sağlar. Bu dönüşümler alan denklemlerinde kullanılarak, ele alınan uzay-zamana ait metrik potansiyelleri için (4.1.45) ve (4.1.46) ifadeleri,  $\Phi(t)$  skaler alanı için (4.1.47) ifadesi elde edilmiştir. BI ( $\chi=0$ ) uzay-zamanı için

$$t = t_0 = \frac{2a_1}{3c_1 l_0^3 a_4} \frac{2^{1/3} a_1 (\lambda \mu_1^2)^{2/3} + 2^{5/3} \lambda a_1^2 m + \mu_2 (\lambda \mu_1^2)^{1/3}}{(\lambda \mu_1^2)^{1/3}} \quad (5.1)$$

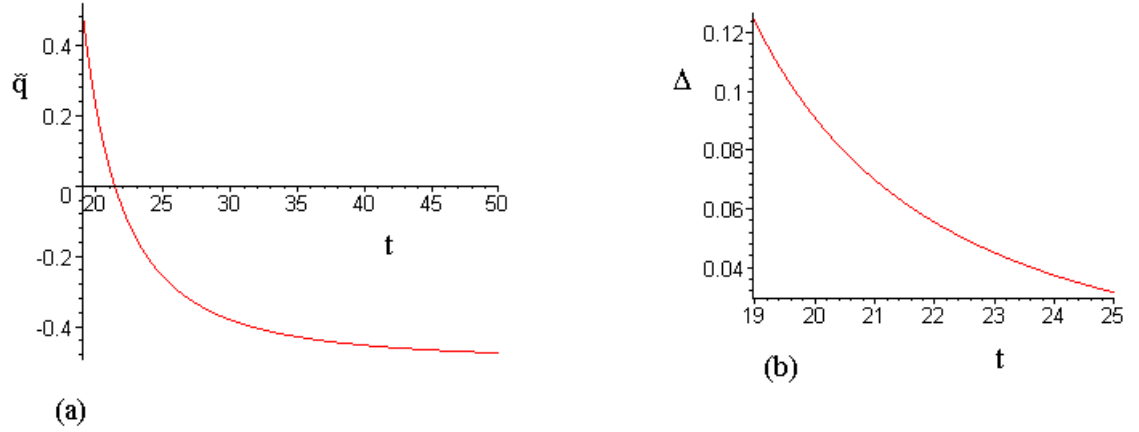
anında (4.1.51) ile verilen ortalama hacim ve (4.1.53) ile verilen ortalama ölçek çarpanı sıfırlanır. Dolayısıyla modelimiz  $t=t_0$  anında bir başlangıç tekilliğine sahiptir. Burada;

$$\mu_1 \equiv 3c_1 l_0^2 a_4 + 16\lambda a_1^3 a_3^3, \mu_2 \equiv 3c_1 l_0^2 a_4 a_2 + 8\lambda a_1^3 a_3^3 \text{ tür ve } a_4 \neq 0 \text{ ve } \lambda \neq -\frac{3c_1 l_0^2 a_4}{16a_1^3 a_3^3} \text{ dır.}$$

Başlangıç tekilliği,  $t=t_0$  anında metrik potansiyelleri sıfır olduğu için *nokta türü* tekilliktir.



Şekil-1. BI ( $\chi=0$ ) için (a) Ortalama ölçek çarpanı,(b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim ve (d) Hubble parametresinin zamanla değişimi.

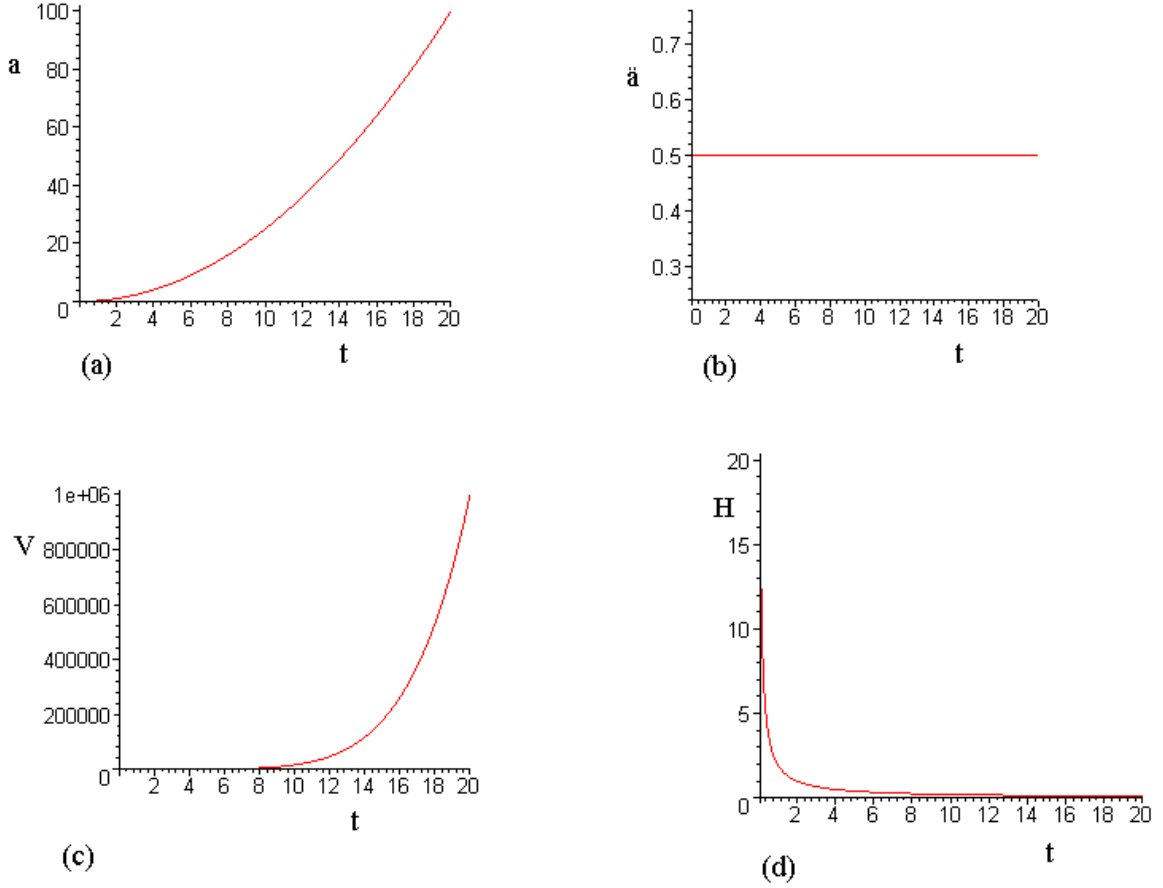


Şekil-2.  $BI(\chi=0)$  (a)Yavaşlama parametresi (b) Anizotropi parametresinin zamanla değişimi.

Şekil-1 ve Şekil-2 de görüldüğü gibi evren  $t=t_0$  anında büyük patlama ile başlamış, evrenin genişleme hızı belirli bir süre azaldıktan sonra sıfırlanmıştır. Bu şekilde, yavaşlayarak genişleme durumundan ivmelenecek genişleme durumuna geçiş meydana gelir (Şekil-1b veya Şekil-2a). Bu geçişten sonra, daima  $\ddot{a} > 0$  ve  $q < 0$  olduğu için ivmelenecek genişleme dönemi sonsuza kadar devam etmektedir. Bu model için ortalama ölçek çarpanı ve hacim  $a(t) \rightarrow \infty$ ,  $V(t) \rightarrow \infty$  limitinde sonsuz olmaktadır. Ortalama Hubble parametresi ve  $\Phi(t)$  skaler alanı ise  $H(t) \rightarrow \infty$ ,  $\Phi(t) \rightarrow \infty$  limitinde sıfırlanır.  $\Delta(t)$  Anizotropi parametresi için  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = 0$  dır. Bu ise modelimizin  $t \rightarrow \infty$  iken evrenin izotrop duruma geçeceğini gösterir. Şekil-1 ve Şekil-2 deki grafiklerin çiziminde  $\lambda = l_0 = c_1 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$  alınmıştır.

Şimdi (5.1)' de  $t = t_0$  anını sonsuz yapan  $\lambda = -\frac{3c_1 l_0^2 a_4}{16a_1^3 a_3^3}$  özel durumunu

inceleyelim.  $a_2 = \frac{1}{2a_3}$  seçildiğinde modelimiz  $t_0 = 0$  anında bir başlangıç tekilliğine sahiptir; yani  $a(t=0) = V(t=0) = 0$  dır. Bu tekillik noktasında ( $t = t_0 = 0$  anında),  $B(t)$  metrik potansiyeli sıfır olurken  $A(t)$  metrik potansiyeli sonsuza gitmektedir. Dolayısıyla modelimizin *puro (cigar)* tekilliğine sahip olduğu söylenebilir(Höhn, 2006).



Şekil-3. BI( $\chi=0$ ) için  $\lambda = -\frac{3c_1 l_0^2 a_4}{16a_1^3 a_3^3}$  durumunda (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim ve (d) Hubble parametresinin zamanla değişimi.

Ele alınan bu durum için (4.1.53) ile verilen ortalama ölçek çarpanı

$$a(t) = \frac{l_0^2 (c_1 a_4)^{2/3}}{4a_1^2} t^2 \quad (5.2)$$

şekline indirgenir. Şekil-3(b)' de de görüldüğü gibi  $\ddot{a} > 0$  olmaktadır. Ayrıca (4.1.55) ile verilen yavaşlama parametresi  $q = -\frac{1}{2}$  olur. Dolayısıyla  $a(t)$ 'nin bu değeri, modelimizin üstel şişme yasasına (*power law inflation*) (Lucchin ve Matarrese, 1985; Yokoyama ve Maeda, 1988) uygun olduğunu göstermektedir. Ayrıca bu durumda (4.1.54) ile verilen anizotropi parametresi  $\Delta = 0$  olur. Dolayısıyla modelimiz öngördüğü evren izotropudur.

BIII ( $\chi = -1$ ) ve K-S ( $\chi = 1$ ) uzay-zamanları için  $a_4 = 0$  alındığında (4.1.53) ile verilen ölçek çarpanı ve (4.1.51) ile verilen ortalama hacim

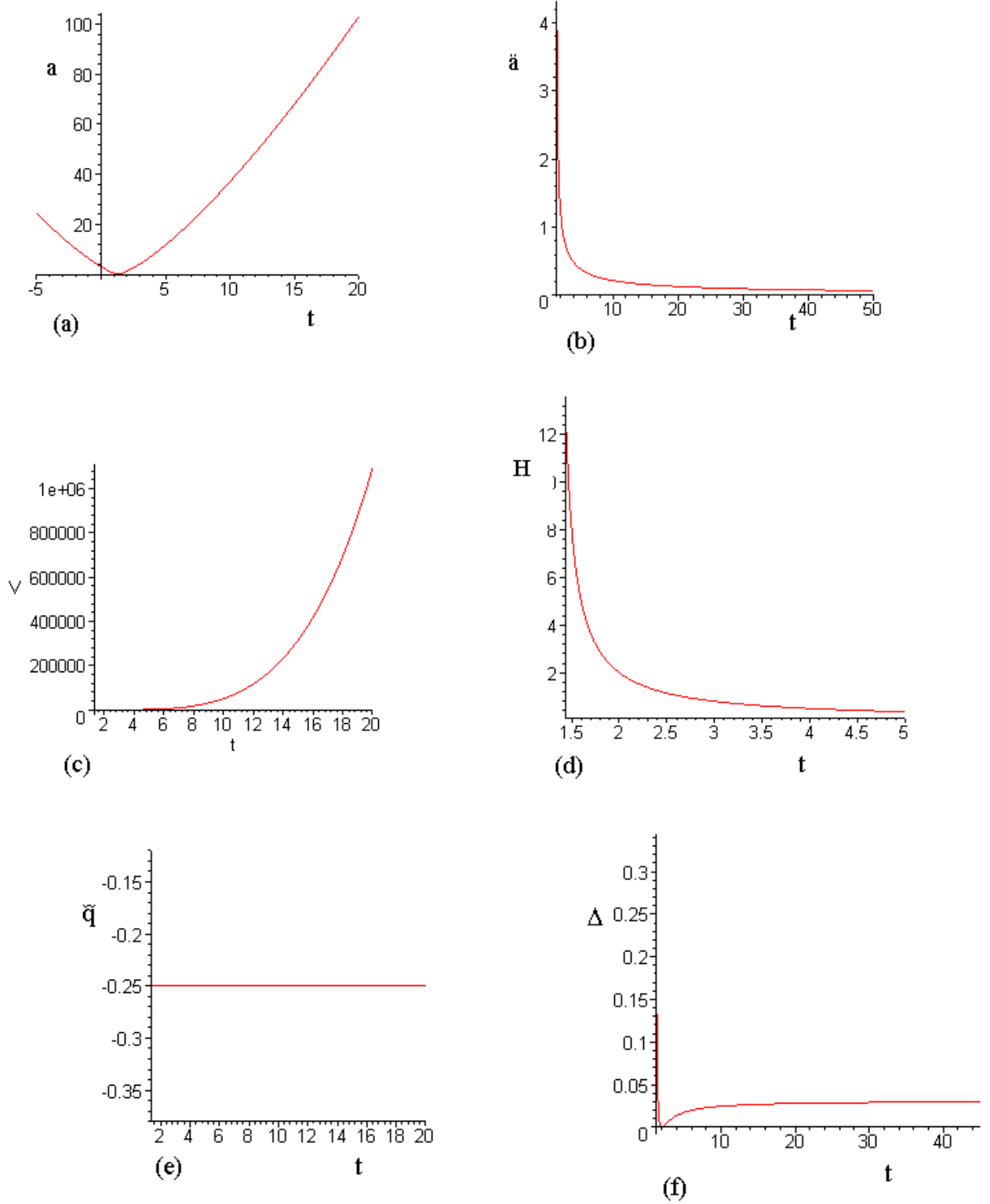
$$t = t_0 = \frac{a_1 \left[ 3\lambda a_1^2 a_3 (4a_2 a_3 - 1) - 6qa_2 + \sqrt{3\lambda a_1^2 (2q - \lambda a_1^2 a_3^2)} \right]}{2l(2\lambda a_1^2 a_3^2 - \chi)}$$

anında sıfırlanır. Burada  $\lambda \neq \frac{\chi}{2a_1^2 a_3^2}$  ve  $t_0$   $2\chi - \lambda a_1^2 a_3^2 \geq 0$  olmalıdır. Dolayısıyla her iki model  $t = t_0$  anında başlangıç tekilliğine sahiptir. Bu  $t_0$  anında  $A(t)$  ve  $B(t)$  metrik potansiyelleri sıfır olduğundan başlangıç tekilliğinin nokta türü tekillik olduğu söylenebilir. Son incelenen iki modelin evriminin nasıl olduğu Şekil-4'te verilmektedir (Grafik çizimlerinde  $l_0 = c_1 = a_1 = a_2 = a_3 = 1, \lambda = 2, \chi = \pm 1$  alınmıştır). Bu durumda evren  $t = t_0$  anında bir büyük patlama ile başlamış ve tüm evrimi boyunca genişlemiştir. Örneğin  $2q - \lambda a_1^2 a_3^2 = 0$  seçildiğinde (4.1.53) ortalama ölçek çarpanı

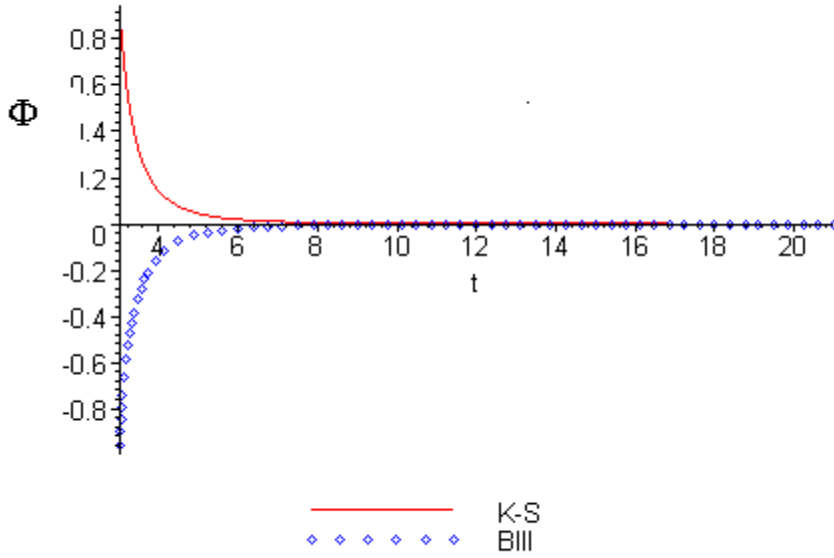
$$a(t) = (3l_0^2 a_1 a_3)^{-2/3} (-3la_3 t + 6a_1 a_2 a_3 - 2a_1)^{4/3} \quad (5.3)$$

şekline indirgenir. Şekil-4(b) den görüldüğü gibi  $\ddot{a} > 0$  dır. Yavaşlama parametresi ise  $q = -\frac{1}{4}$  olur (Şekil-4e). Dolayısıyla evrenimiz evrimi boyunca ivmelenerek genişlemektedir.  $t$ ' nin büyük değerlerinde  $a_3 \neq 0$  iken (5.3) ile verilen çözüm üstel şişme yasası durumuna karşılık gelir. Anizotropi parametresi için  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t)$  limitinde sonlu bir değere sahiptir. Bu nedenle evrenin gelecekte izotrop hale gelmeyeceği söylenebilir. Şekil-5 ise skaler alanın zamanla değişimi verilmiştir. İki metrik için de skaler alan  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$  olmaktadır. Dolayısıyla skaler alan, evrenin ilk dönemlerinde yani şişme döneminde etkili olmuş ve daha sonra etkisini kaybetmiştir.





Şekil-4.  $\chi = +1$  için  $a_4 = 0$  durumunda (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim ve (d) Hubble parametresinin (e) yavaşlama parametresi ve (f) anizotropi parametresinin zamanla değişimleri.



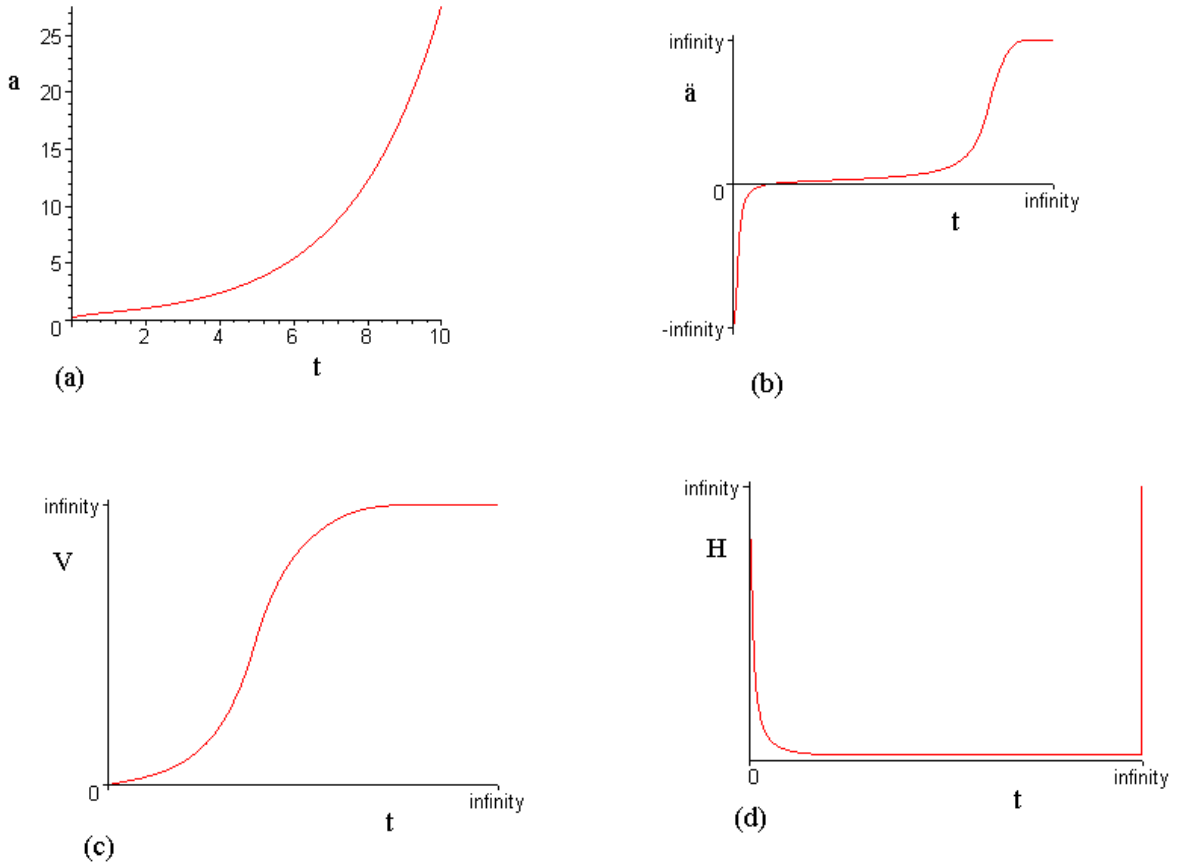
Şekil-5. BIII ve K-S uzay zamanları için Skaler alanın zamanla değişimleri.

(4.2)-(4.6) bölümlerinde, skaler tensör teorisinde, Bianchi tip II, IV, V, VI<sub>h</sub>, VIII ve IX uzay-zamanlarının LSR ve LRS olmayan durumları için Noether simetri yaklaşımları araştırılmıştır. Mevcut olan durumlar için hareket sabitleri belirlenmiştir.

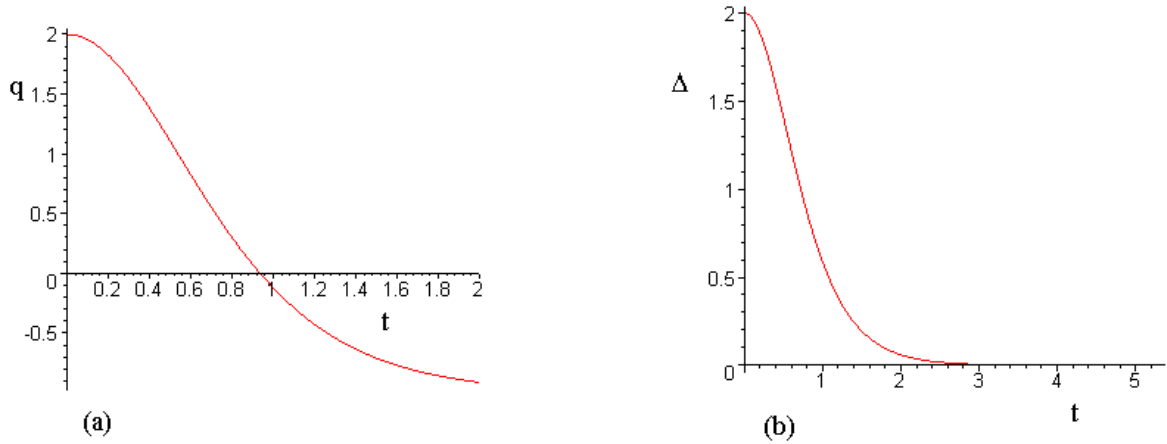
(4.7) alt bölümünde  $f(R)$  teorisinde Bianchi I uzay-zamanları için Noether simetri yaklaşımıyla alan denklemlerine çözümler araştırılmıştır. Burada karşımıza iki durum çıkmıştır. Birincisi,  $f(R)$ 'nin şeklinin lineer olduğu durumdur ve Kozmolojik sabit içeren EFE'yi verir. Bu durumda, Bianchi I uzay-zamanı için EFE'lerin çözümü (4.7.48)-(4.7.50) ile verilmektedir. Bu model için ortalama ölçek çarpanı (4.7.53) şeklinde elde edilmiştir. Bu durum için tekillik analizi yapıldığında ölçek çarpanı  $t=0$  anında sıfır olur. Dolayısıyla modelimiz  $t=0$  anında bir tekilliktedir. Bu tekillik noktası limitinde  $A(t)$  ve  $B(t)$  metrik potansiyelleri sıfır olurken  $C(t)$  metrik potansiyeli sonsuza gitmektedir. Dolayısıyla modelimizin *cigar* tekilliğine sahip olduğu söylenebilir.

Bu model için,  $\Lambda < 0$  alındığını yani Kozmolojik sabitin EFE'lerin sağ tarafına eklendiğini varsayalım. Bu durumda; model, evrenin yavaşlayarak genişleme (Decelerated Expansion) evresiyle devam eden  $t=0$  anındaki bir büyük patlama ile başladığını

öngörmektedir. Genişlemenin yavaşlaması zamanla azalarak belirli bir süre sonra sıfırlanır. Daha sonra yavaşlayarak genişleme evresinden ivmelenecek genişleme evresine (Accelerated Expansion) geçiş meydana gelir. İvmelenerek genişleme dönemi sonsuza kadar devam eder. Bu durumu ifade eden ve modelin zamanla gelişimi Şekil-6 de verilmiştir. Burada genelliği bozmaksızın  $\Lambda = -1$ ,  $l = c_1 = b_1 = b_2 = 1$  alınmıştır. Bu grafiklerden de görüldüğü gibi evrenin ölçek çarpanı ve hacmi  $a(t) \rightarrow 0$ ,  $V(t) \rightarrow 0$  limitinde sıfır olurken,  $a(t) \rightarrow \infty$ ,  $V(t) \rightarrow \infty$  limitinde sonsuz olmaktadır. Bu evrenin  $t = 0$  anından sonsuza kadar genişlediğini göstermektedir. Hubble parametresi  $H(t) \rightarrow 0$  limitinde sıfır iken  $H(t) \rightarrow \infty$  limitinde  $\frac{\sqrt{-6\Lambda}}{6}$  şeklinde sonlu bir değerden bir anda sonsuza gitmektedir. Şekil-6(b) de ölçek çarpanının ikinci türevinin  $t$ -ksenini kestiği noktada yavaşlayarak genişleme evresinden ivmelenecek genişleme evresine geçiş görülmektedir. Ayrıca  $\lim_{t \rightarrow 0} \ddot{a}(t) = -\infty$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{a}(t) = \infty$  şeklinde asimptotik davranış göstermektedir.



Şekil-6.  $\Lambda$  içeren BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim ve (d) Hubble parametresinin zamanla değişimi.



Şekil-7.  $\Lambda$  içeren BI modeli için (a)Yavaşlama parametresi ile (b) Anizotropi parametresinin zamanla değişimi.

Şekil-7(a) da görüldüğü gibi yavaşlama parametresinin sıfırdan büyük olduğu bölgelerde modelimiz yavaşlayarak genişlemeyi öngörürken sıfırdan küçük bölgelerde ivmelenerek genişlemeyi öngörmektedir. Şekil-7(b) den ve (4.7.57) denkleminde de görüldüğü gibi anizotropi parametresi  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = 0$  olmaktadır. Bu ise evrenin izotrop duruma geçeceğinin göstergesidir.

İkinci durumda  $R^n$  teorisi incelenmiştir. Bu durumda Noether simetrisini doğuran vektör alanı  $R$  yönünden bağımsız olup (4.7.65) ifadesi ile verilmektedir. Bu durum için alan denklemleri  $n \neq 0, 1, 1/2, 5/4$  olmak üzere (4.7.94)-(4.7.96) ile verilen genel çözümlere sahiptir. Bu modele ait ortalama ölçek çarpanı (4.7.99) şeklindedir. Herhangi bir sonlu  $t$  anında ölçek çarpanı sıfır olmadığı için modelimiz başlangıç tekilliğine sahip değildir. Bu modelin evrimini analiz etmek için (4.7.97) ile verilen Ricci skalerini dikkate alalım. Bu ifadedeki  $h$  değeri için evren modeli iki farklı davranış gösterir. Eğer  $h > 0$  ise bu model, osilasyon yapan bir evrene karşılık gelir.

$h < 0$  durumu dikkate alındığında (4.7.97) ile verilen Ricci skalerinin reel olması için ya

$$\frac{nh}{(n-1)(2n-1)(4n-5)} > 0 \quad (5.4)$$

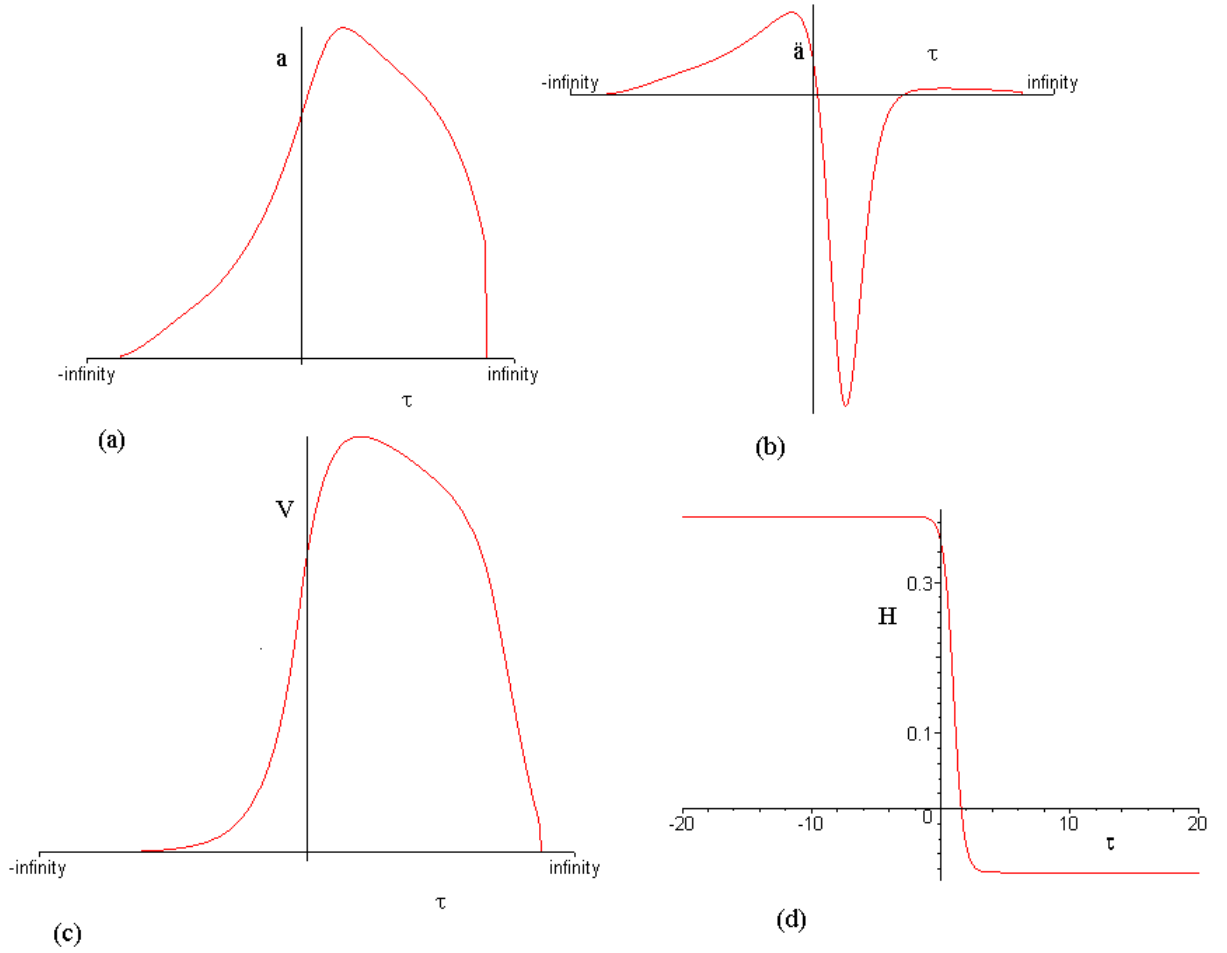
olmalı ya da

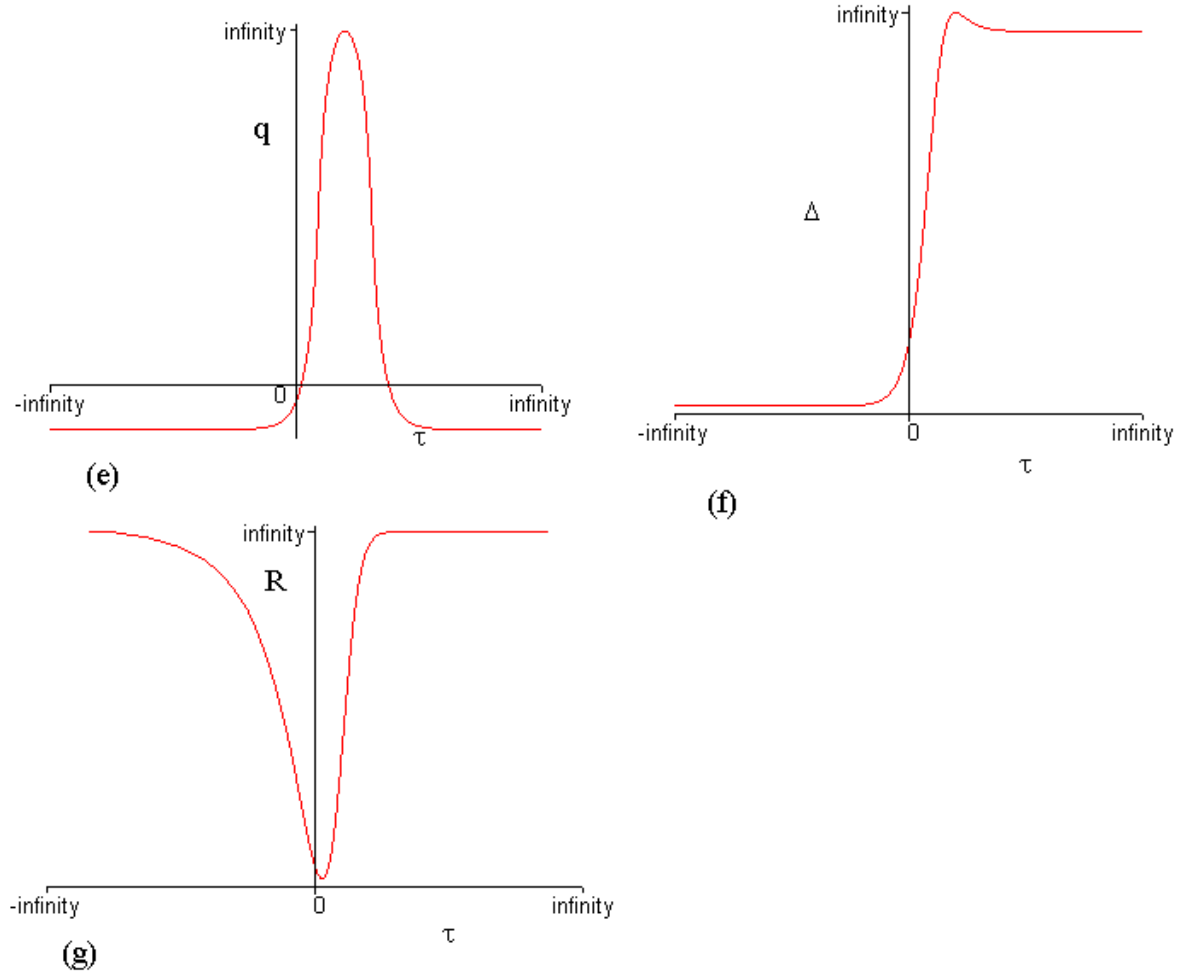
$$\frac{nh}{(n-1)(2n-1)(4n-5)} < 0 \quad (5.5)$$

ise  $\frac{1}{2n-1} = k$  olmalıdır. Burada  $k \in \mathbb{Z}^+$  ve  $k \neq 1$  dir.  $k$ 'nın bu değerlerinde  $\frac{1}{2} < n < 1$  olur.

Eğer  $0 < n < \frac{1}{2}$  ve  $1 < n < \frac{5}{4}$  ise (5.4) ile verilen ifade geçerli olur. Şimdi  $0 < n < \frac{1}{2}$

durumu için modelimizi inceleyelim: Bu durumda everenin evrimi ile ilgili grafikler Şekil-8 verilmektedir. Bu grafiklerin çiziminde  $n=1/3, a_0=2, l_5=-1, l_0=c_1=l_1=l_2=l_3=l_4=1$  alınmıştır.



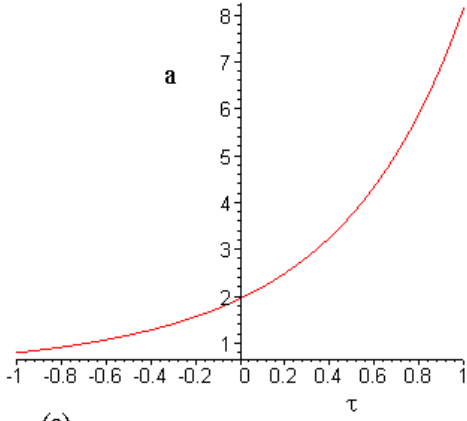


Şekil-8.  $R^n$  ( $0 < n < \frac{1}{2}$ ) teorisinde BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim (d) Hubble parametresi (e)Yavaşlama parametresi ile (f) Anizotropi parametresi ve (g) Ricci skalerinin zamanla değişimi.

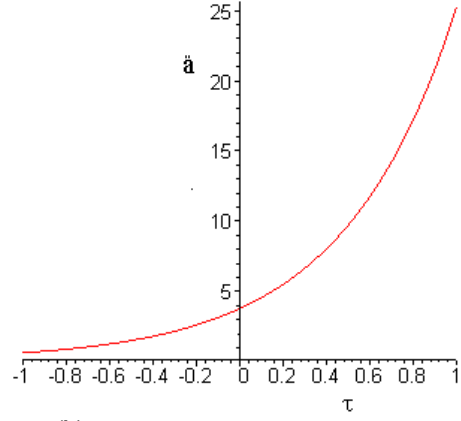
Şekil-8 de görüldüğü gibi evren  $\tau=0$  anında büyük patlama ile başlamış olduğu kabul edilirse evrenin  $\tau=0$  anında sonlu bir hacimden başlayarak genişlemekte olduğu görülür.  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a(\tau) = 0$  ve  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} V(\tau) = 0$  olduğu için evren gelecekte kendi içine çökmüştür (Şekil-8a, c). Bu dönem boyunca evren, önce ivmelenerek genişlemeye başlamış sonra ivmelenerek genişleme durumundan yavaşlayarak genişleme durumuna geçiş meydana gelmiş, sonra tekrar ivmelenerek genişleme durumuna geçmiştir. (Şekil-9 b, e).  $\Delta(\tau)$  Anizotropi parametresi için  $\tau \rightarrow \infty$  limitinde sonlu olduğu için evrenin izotrop duruma geçmeyeceğini söyleyebiliriz.

$1 < n < \frac{5}{4}$  durumda everenin evrimi ile ilgili grafikler Şekil-9 verilmektedir. Bu

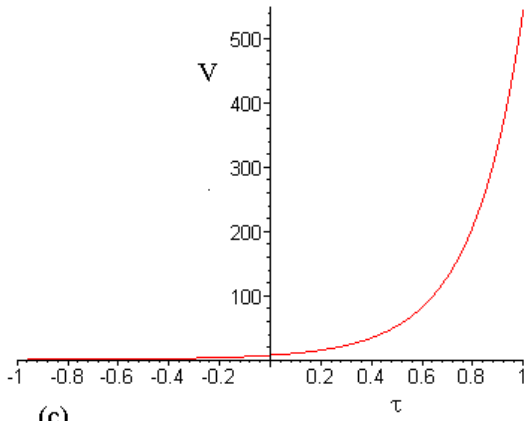
grafiklerin çiziminde ise  $n=6/5, l_5=0, a_0=l_0=c_1=l_1=l_2=l_3=l_4=1$  alınmıştır.



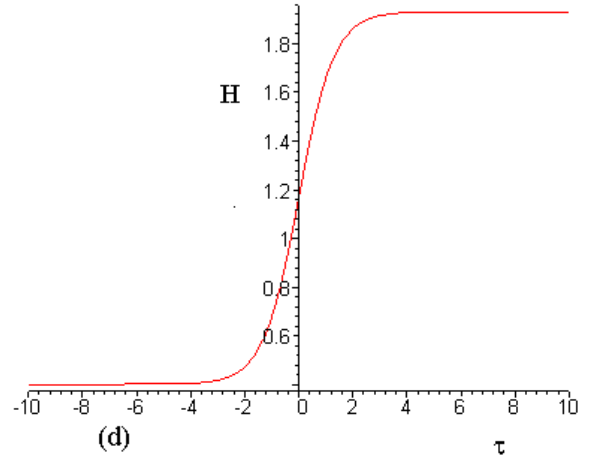
(a)



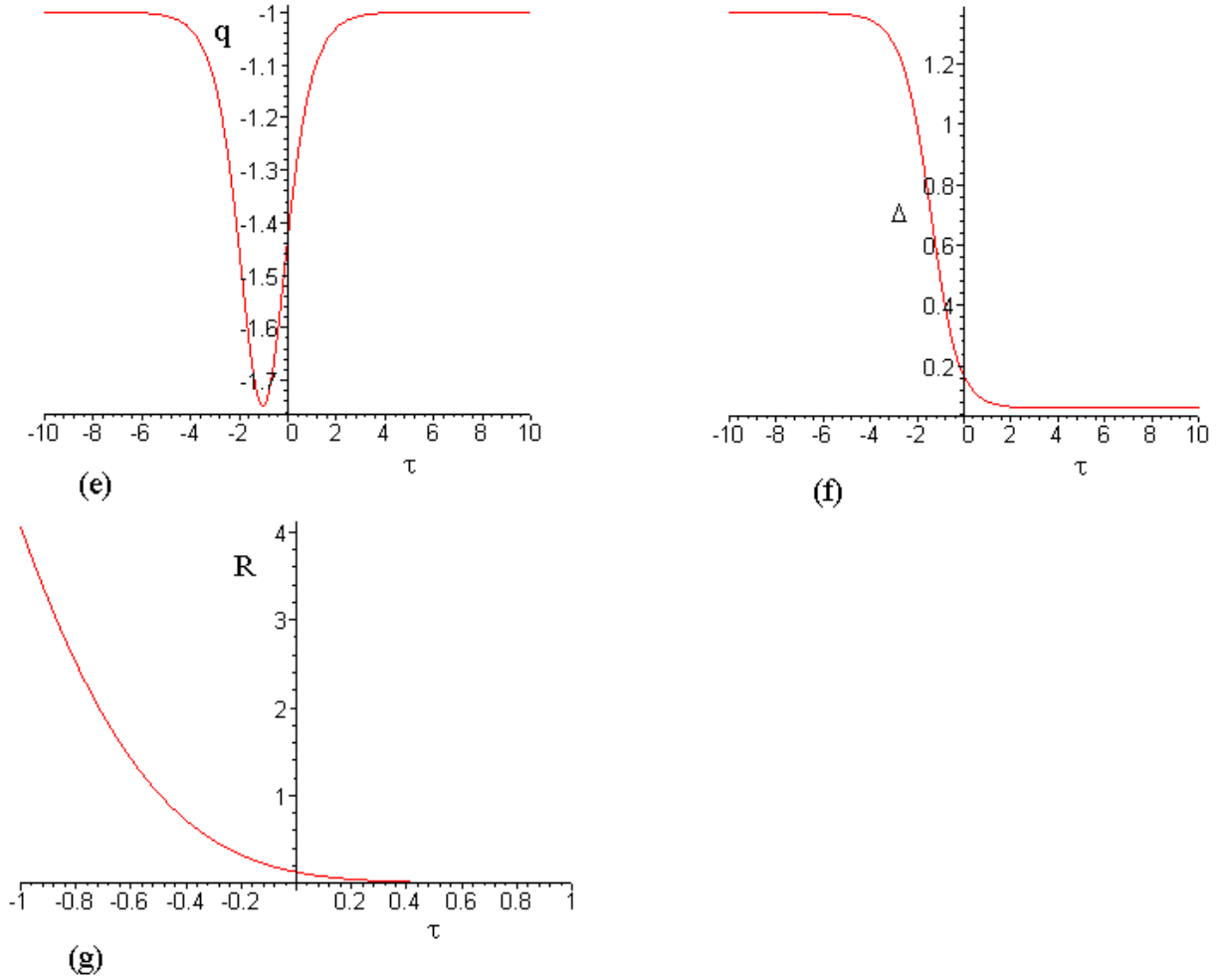
(b)



(c)



(d)



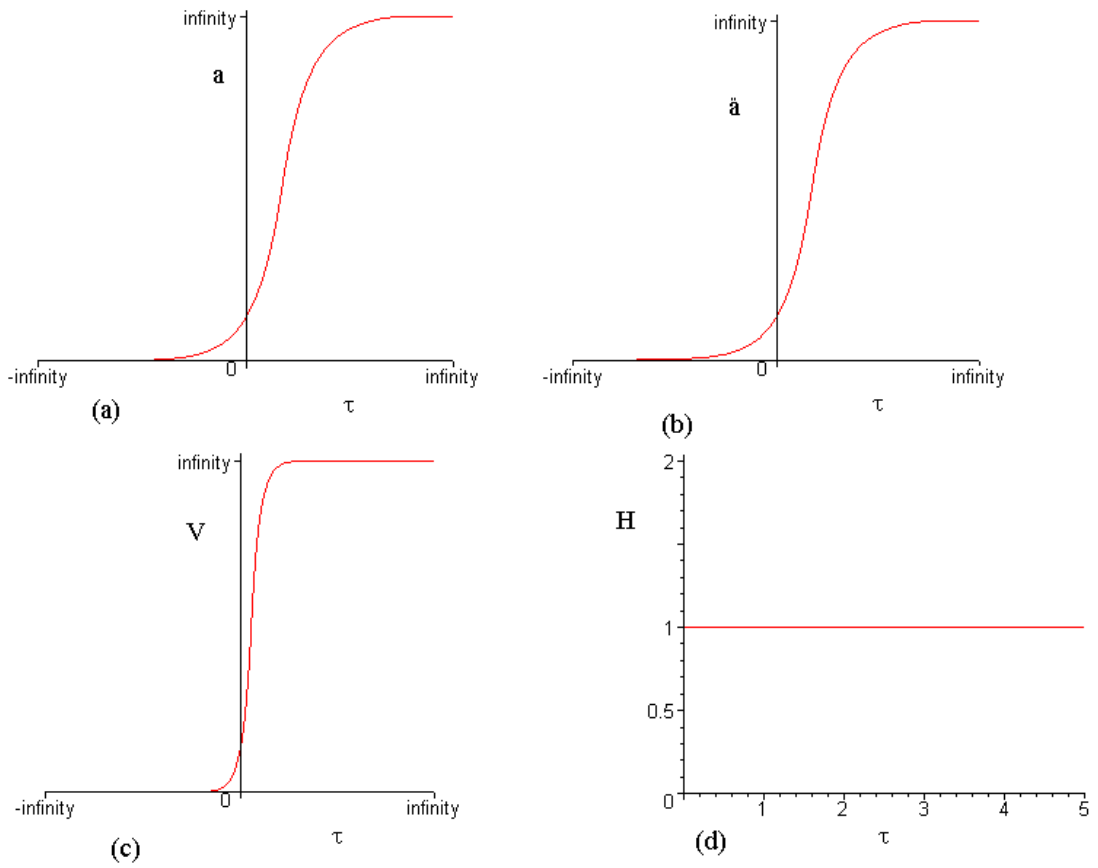
Şekil-9.  $R^n$  ( $1 < n < \frac{5}{4}$ ) teorisinde BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim (d) Hubble parametresi (e)Yavaşlama parametresi ile (f) Anizotropi parametresi ve (g) Ricci skalerinin zamanla değişimi.

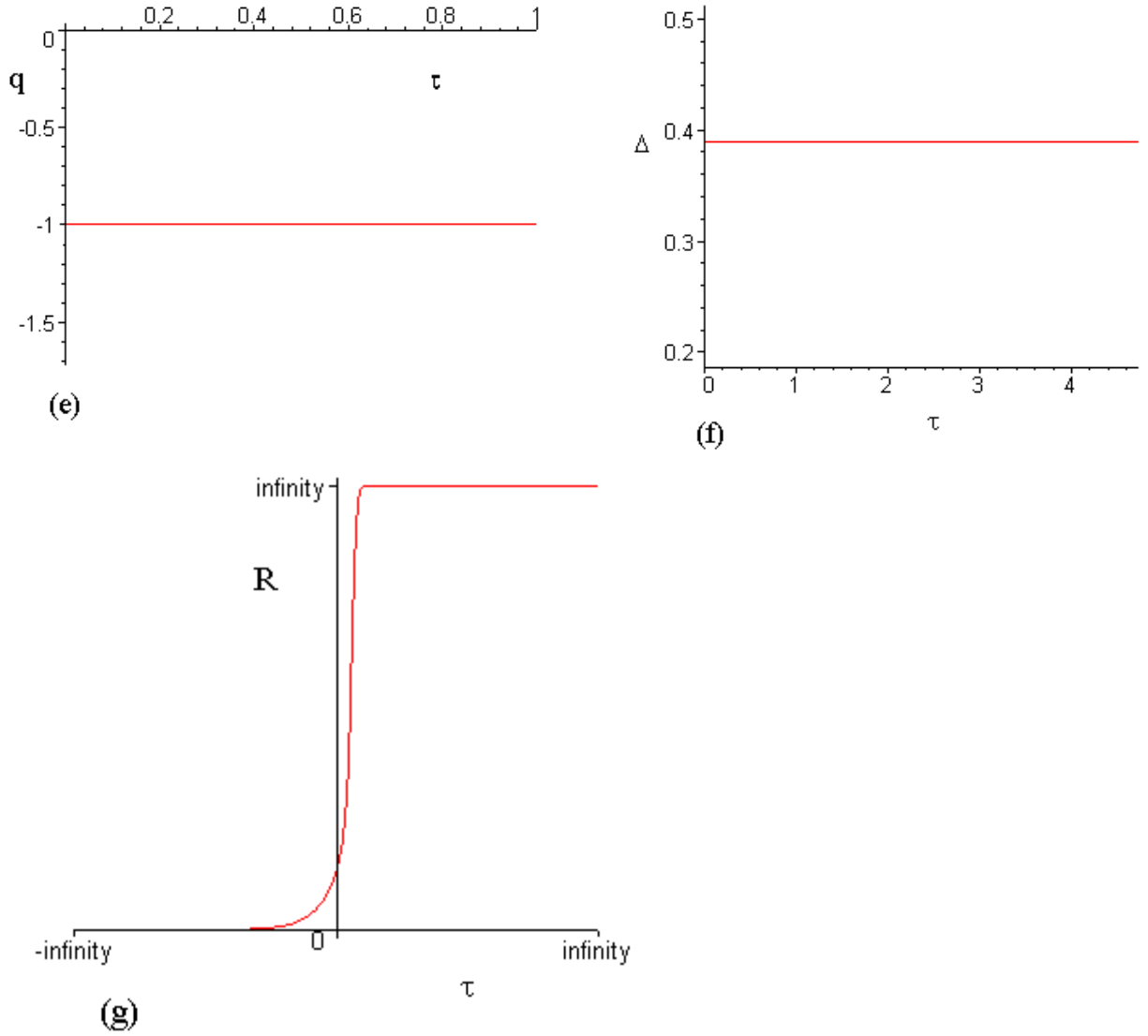
Evrenin  $\tau = 0$  anında büyük patlama ile başlamış olduğu kabul edilirse Şekil-9 de görüldüğü gibi  $\tau = 0$  anında sonlu bir hacimden başlayarak genişlemekte olduğu görülür. Bu genişleme evrenin tüm evrimi boyunca devam etmiştir (Şekil-9a, c). Bu durumda elde edilen çözüm  $\ddot{a} > 0$  olduğu için şişme çözümlerine uygun olduğu görülür (Şekil-9b). Ayrıca evrenin tüm evrimi boyunca, yavaşlama parametresi  $q < 0$  olduğu için evrenin ivmelenerek genişlemekte olduğu söylenebilir (Şekil-9e). Bu dönem boyunca evren, önce ivmelenerek genişlemeye başlamış sonra ivmelenerek genişleme durumundan yavaşlayarak genişleme durumuna geçiş meydana gelmiş, sonra tekrar ivmelenerek



genişleme durumuna geçmiştir. (Şekil-9 b, e).  $\Delta(\tau)$  Anizotropi parametresi için  $\tau \rightarrow \infty$  limitinde sonlu olduğu için evrenin izotrop duruma geçmeyeceğini söyleyebiliriz (Şekil-9f).

$R^{1/2}$  gravitasyon teorisinde Bianchi Tip I uzay zamanına ait metrik potansiyelleri Ricci skaleri (4.7.108)-(4.7.111) ifadeleri ile verilmektedir. Ortalama hacim, ortalama ölçek çarpanı, ortalama Hubble parametresi ve Anizotropi parametresi ise (4.7.113)-(4.7.116) ifadeleri ile verilmektedir. Bu model için yavaşlama parametresi ise  $-1$  dir. Bu modelin evrimi ile ilgili grafikler Şekil-10 verilmektedir. Bu grafiklerin çiziminde ise  $l_0 = 2$ ,  $a_0 = c_1 = l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = 1$  alınmıştır.

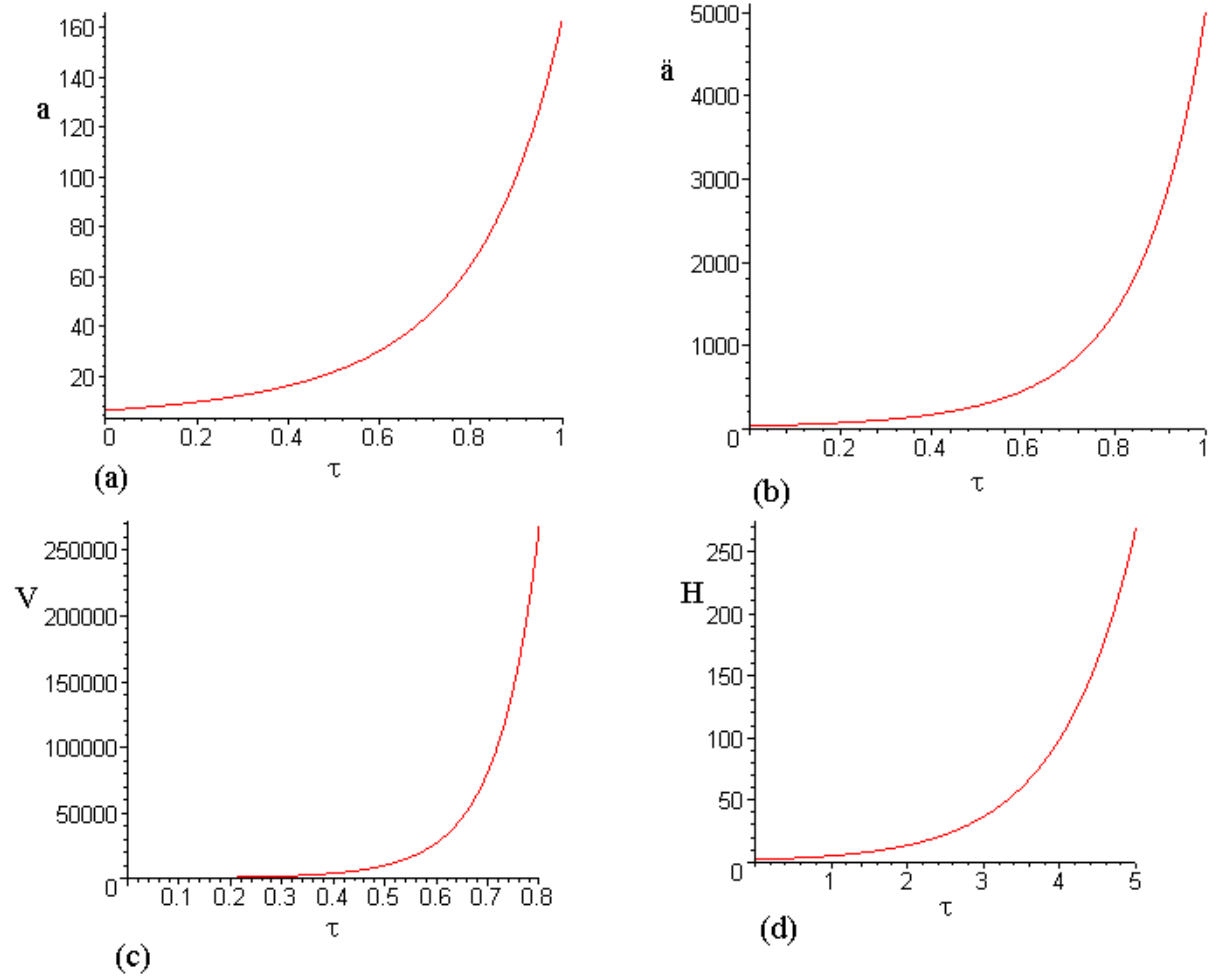


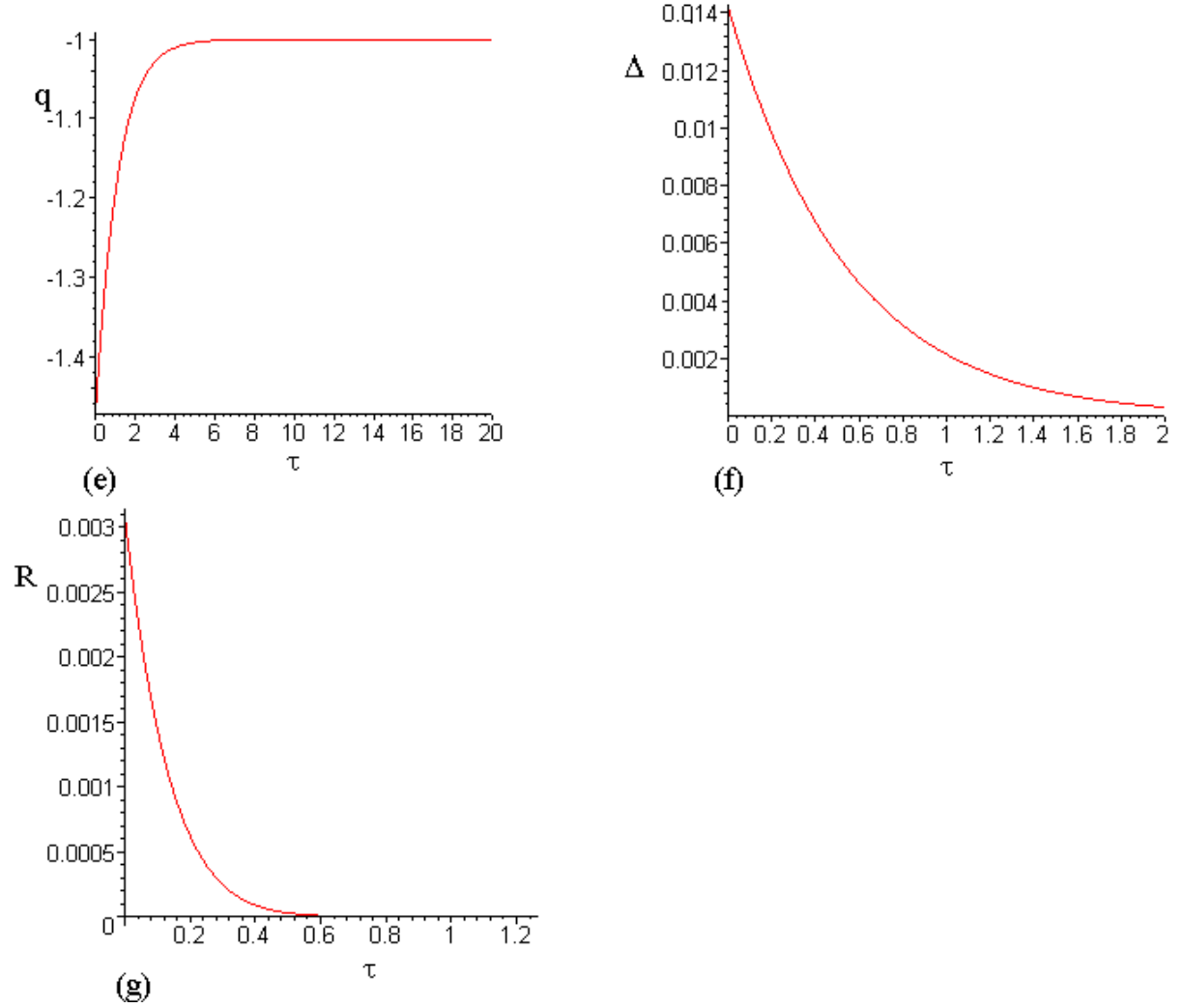


Şekil-10.  $R^{1/2}$  teorisinde BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim (d) Hubble parametresi (e)Yavaşlama parametresi ile (f) Anizotropi parametresi ve (g) Ricci skalerinin zamanla değişimi.

Modelimiz başlangıç tekilliğinin olmadığı bir evreni öngörmektedir. Ortalama ölçek çarpanı, hacim ve Hubble parametresi  $\tau = 0$  anında sabittirler. Bundan dolayı evren;  $t = 0$  anında sabit hacimle başlamış ve  $a_0 + 2l_4 > 0$  ise hacim exponansiyel olarak artmış,  $a_0 + 2l_4 < 0$  ise hacim exponansiyel olarak azalmıştır.  $q = -1$  olduğu için evren ivmelenerek genişlemektedir.  $\ddot{a} > 0$  olduğundan dolayı bu model exponasiyel şişme modeli ile uyum içindedir. Evrenin tüm evrimi boyunca Anizotropi parametresi sabit olduğu için evrenin izotrop duruma geçmeyeceğini söyleyebiliriz.

Son olarak  $n=5/4$  durumu dikkate alındığında gravitasyon teorisi  $R^{\frac{5}{4}}$  şeklinde olur. Bu durumda ele alınan uzay zamanına ait metrik katsayıları ve Ricci skaleri (4.7.121)-(4.7.124) ifadeleri ile verilmektedir. Ortalama hacim, ortalama ölçek çarpanı, ortalama Hubble parametresi Anizotropi parametresi ve yavaşlama parametresi ise (4.7.126)-(4.7.130) ifadeleri ile verilmektedir. Bu modelin evrimi ile ilgili grafikler Şekil-11 verilmektedir. Bu grafiklerin çiziminde ise  $l_0 = c_1 = l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$  alınmıştır.





Şekil-11.  $R^{5/4}$  teorisinde BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim (d) Hubble parametresi (e)Yavaşlama parametresi ile (f) Anizotropi parametresi ve (g) Ricci skalerinin zamanla değişimi.

Sonlu bir  $\tau$  anında (4.7.126) ile verilen ortalama hacim sıfır olmadığı için modelimiz başlangıç tekilliğinin sahip değildir. Ortalama ölçek çarpanı, hacim, Hubble parametresi ve Ricci skaleri  $\tau = 0$  anında sabittirler. Bundan dolayı evren;  $\tau = 0$  anında sabit hacimle başlamış ve hacim sürekli olarak artmıştır (Şekil-11c).  $q < 0$  olduğu için evren ivmelenerek genişlemektedir (Şekil-11e) ve  $\tau \rightarrow \infty$  iken yavaşlama parametresi  $-1$  olmaktadır.  $\ddot{a} > 0$  olduğu için bu model şişme modeli ile uyum içindedir (Şekil-11b).  $l_0 = 0$  iken  $\Delta = 0$  olur ve düz FRW çözümleri elde edilir.  $l_0 \neq 0$  iken Anizotropi

parametresi için  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(\tau) = 0$  olmaktadır. Bu ise evrenin izotrop duruma geçeceğinin göstergesidir (Şekil-11f). Ricci skaleri ise  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(\tau) = \infty$  olmaktadır.

## KAYNAKLAR

- Adler. S.L., 1980. Order- $R$  Vacuum Action Functional in Scalar-Free Unified Theories with Spontaneous Scale Breaking. *Physical Review Letters*. 44, (24): 1567-1569.
- Amendola. L., ve Tsujikawa. S., 2008. Phantom crossing, equation-of-state singularities, and local gravity constraints in  $f(R)$  models. *Physics Letters B*, 660, (3): 125-132.
- Atazadeh. K., ve Sepangi. H., R., 2007. Accelerated expansion in modified with a Yukawa-like term. *International Journal of Modern Physics D*, 16, (4): 687-697.
- Azadi. A., Momeni. D., ve Nouri-Zonoz. M., 2008. Cylindrical solutions in metric  $f(R)$  gravity. *Physics Letters B*, 670, (3): 210-214.
- Barrow. J.D. ve Hervik. S., 2006. Anisotropically inflating universes. *Physical Review D*, 73, (2): 023007.
- Bennett. C. L., Hill. R. S., Hinshaw. G., Nolta. M. R., Odegard. N., Page. L., Spergel. D. N., Weiland. J. L., Wright. E. L., Halpern. M., Jarosik. N., Kogut. A., Limon. M., Meyer. S. S., Tucker. G. S., ve Wollack. E., 2003. First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Foreground emission. *Astronomical Journal Supplement Series*, 148, (1): 97-117.
- Berman. M.S., 1983. A special law of variation for Hubble's parameter. *Nuovo Cimento B*, 74, 182-186.
- Bertolami. O., Bohmer. C. G., Harko. T., ve Lobo. F.,S.,N., 2007. Extra force in  $f(R)$  modified theories of gravity. *Physical Review D*, 75, (10): 104016.
- Bonanno .A., Esposito. G., Rubano. C., ve Scudellaro. P., 2007. Noether symmetry approach in pure gravity with variable  $G$  and  $\Lambda$ . *Classical and Quantum Gravity*, 24, (6): 1443-1455.

- Bohmer. C.G., Hollenstein. L. Ve Lobo. F.S.N., 2007. Stability of the Einstein static universe in  $f(R)$  gravity. *Physical Review D*, 76, (8): 084005.
- Brans. C., Dicke. R.H., 1961. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Physical Review*, 124, (3): 925-935.
- Buchdahl. H. A., 1970. Non-Linear Lagrangians and Cosmological Theory. *Monthly Notices of The Royal Astronomical*, 150, (1): 1.
- Camci. U., ve Kucukakca. Y., 2007. Noether symmetries of Bianchi I, Bianchi III, and Kantowski-Sachs spacetimes in scalar-coupled gravity theories. *Physical Review D*, 76 (8): 084023.
- Capozziello. S., ve De Felice. A., 2008.  $f(R)$  cosmology from Noether's symmetry. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 8, 016.
- Capozziello. S., de Ritis. R., ve Marino. A., A., 1997. Conformal Equivalence and Noether Symmetries in Cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 14, 3259–3268.
- Capozziello, S., ve Lambiase, G., 2000. Selection Rules in Minisuperspace Quantum Cosmology, *General Relativity and Gravitation*, 32, 673-686.
- Capozziello. S., Marmo. G., Rubano. C., ve Scudellaro. P., 1997. Noether symmetries in Bianchi universes. *International Journal of Modern Physics*, 6 (4): 491-503.
- Capozziello. S., Martin-Moruno. P., ve Rubano. C., 2009. Exact  $f(R)$ -cosmological model coming from the request of the existence of a Noether symmetry. *AIP Conference Proceedings*, 1122, 213-216.
- Capozziello. S., Nojiri. S., Odintsov. S.D. ve Troisi. A., 2007. Cosmological viability of  $f(R)$ -gravity as an ideal fluid and its compatibility with a matter dominated phase. *Physics Letters B*, 639, (3): 134-143.

- Capozziello. S., Piedipalumbo. E., Rubano. C., ve Scudellaro. P., 2009. Noether symmetry approach in phantom quintessence cosmology. *Physical Review D*, 80, (10): 104030.
- Capozziello. S., Stabile. A., ve Troisi. A., 2007. Spherically symmetric solutions in  $f(R)$  gravity via the Noether symmetry approach. *Classical and Quantum Gravity*, 24, (8): 2153-2166.
- Capozziello. S., ve Tsujikawa. S., 2008. Solar system and equivalence principle constraints on  $f(R)$  gravity by the chameleon approach. *Physical Review D*, 77, (10): 107501.
- Carloni. S., Dunsby. P. K. S., Capozziello. S., ve Troisi. A., 2005. Cosmological dynamics of  $R$ - $n$  gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 22, (22): 4839-4868.
- Cognola. G., Elizalde. E., Odintsov. S. D., Tretyakov. P., ve Zerbini. S., 2009. Initial and final de Sitter universes from modified  $f(R)$  gravity. *Physical Review D*, 79, (4): 044001.
- Demiański. M., de Ritis. R., Marmo. G., Platania. G., Rubano. C., Scudellaro. P., ve Stornaiolo. C., 1991. Scalar field, nonminimal coupling, and cosmology. *Physical Review D*, 44 (10): 3136-3146.
- Demianski. M., De Ritis. R., Rubano. C., ve Scudellaro. P., 1992. Scalar Fields and Anisotropy in Cosmological Models. *Physical Review D*, 46 (4): 1391-1398.
- de Ritis. R., Marmo. G., Platania. G., Rubano. C., Scudellaro. P. ve Stornaiolo. C., 1990. New Approach to Find Exact Solutions for Cosmological Models with a Scalar Field. *Physical Review D*, 42, (4): 1091-1097.
- D'Inverno, R., 1992. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 28.
- Dolgov. A.D. ve Kawasaki. M., 2003. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?. *Physics Letters B*, 573, 1-4.



- Ellis. G. F. R., ve MacCallum, M. A. H., 1969. A Class of Homogeneous Cosmological Models, *Communications in Mathematical Physics*, 12, 108.
- Faraoni. V., 2006. Matter instability in modified gravity. *Physical Review D*, 74, (10): 104017.
- Fujii. Y., ve Maeda. K., 2004. The Scalar–Tensor Theory of Gravitation. Cambridge University Press, Cambridge.
- Goldstein. H., Poole. C., ve Safko. J., 2000. Classical Mechanics. (3th ed.), Addison Wesley Press, New York.
- Griffiths. J. B., ve Podolski. J., 2009. Exact Space-Times in Einstein General Relativity. Cambridge University Press, p439.
- Guth. A., H., 1981. Inflationary universe-a possible Solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23, (2): 347-356.
- Hall. G., S., 2004. Symmetries and Curvature Structure in General Relativity. World Scientific.
- Höhn. P. A., 2006. Encoding Possible Final States of the Universe with Conformal Structures. Bachelor of Science, Australian National University, Canberra. Avustralya.
- Hu. W., ve Sawicki. I., 2007. Models of  $f(R)$  cosmic acceleration that evade solar system tests. *Physical Review D*, 76, (6): 1064004.
- Kamilya. S., ve Modak. B., 2004. Noether Symmetry in General Scaler Tensor Theory. *General Relativity and Gravitation*, 36, (4) 673-688.
- Kamilya, S., ve Modak, B., 2004. Noether Symmetry study in General Scalar Tensor Theory. *General Relativity and Gravitation*, 36, 673-688.
- Kamilya, S., Modak, B., ve Biswas, S., 2004. Induced Gravity Theory from Noether Symmtry, *General Relativity and Gravitation*, 36, 661-668.

- Kofman. L., Mukohyama. S., 2008. Rapid roll inflation with conformal coupling. *Physical Review D*, 77 (4): 043519.
- Kramer, D., Stephani, H., MacCallum, M.A.H., Herlt, E., 1980. Exact solutions of Einstein Field Equations. Cambridge University Press, Cambridge .
- Kumar. S., ve Singh C.P., 2007. Anisotropic Bianchi type-I models with constant deceleration parameter in general relativity. *Astrophysics and Space Science*, 312, (1-2) 57-62.
- Li. B. J., ve Barrow. J. D., 2007. Cosmology of  $f(R)$  gravity in the metric variational approach. *Physical Review D*, 75, (8): 084010.
- Liddle. A.R., (11. Jan.1999). An Introduction to Cosmological Inflation, from: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9901124>.
- Liddle. A.R., 2003. An Introduction to Modern Cosmology. (2th ed.), John Wiley and Sons, England.
- Linde. A., 1990. Extended Chaotic Inflation and Spatial Variations of the Gravitational Constant. *Physics Letters B* 238, (2-4): 160-165.
- Lucchin. F., ve Matarrese. S., 1985. Power-law inflation. *Physical Review D*, 32, (6): 1316-1322.
- Marion J. B. Ve Thornton S. T., 1995. Classical Dynamics of Particles and Systems. (4th ed.), Harcourt College Publishers, 214p.
- Modak. B., Kamilya. S.,ve Biswas. S., 2000. Evolution of Dynamical Coupling in Scalar Tensor Theory from Noether Symmetry. *General Relativity and Gravitation*, 32, (8): 1615-1626..
- Nakahara. M., 2003. Geometry, Topology and Physics. (2th ed.), IoP, 196p.

- Narlikar. J.,V., ve Padmanabhan. T., 1986. Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology. D. Reidel Publishin Company.
- Nojiri. S., ve Odintsov. S.D., 2003. Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration. *Physical Review D*, 68, (12): 123512.
- Nojiri. S., ve Odintsov. S. D., 2006. Modified f(R) gravity consistent with realistic cosmology: From a matter dominated epoch to a dark energy universe. *Physical Review D*, 74 (8): 086005.
- Nojiri. S., ve Odintsov. S. D., 2008. Modified f(R) gravity unifying R-m inflation with the Lambda CDM epoch. *Physical Review D*, 77 (2): 026007.
- Nojiri. S., ve Odintsov. S. D., ve Sami., M., 2006. Dark energy cosmology from higher-order, string-inspired gravity, and its reconstruction. *Physical Review D*, 74, (4): 046004.
- Olmo. G. J., 2007. Limit to general relativity in f(R) theories of gravity. *Physical Review D*, 75 (2): 023511.
- Patmanabhan. T., 2003. Cosmological constant-the weight of the vacuum. *Physics Reports*. 380, (5-6): 235-331.
- Perlmutter. S., Aldering. G., Goldhaber. G., Knop. R. A., Nugent. P., Castro. P..G., Deustua. S., Fabbro. S., Goobar. A., Groom. D. E., Hook. I..M., Kim. A. G., Kim. M. Y., Lee. J. C., Nunes. N. J., Pain. R., Pennypacker. C. R., Quimby. R., Lidman. C., Ellis. R..S., Irwin. M., McMahon. R. G., Ruiz-Lapuente. P., Walton. N., Schaefer. B., Boyle. B.J., Filippenko. A. V., Matheson. T., Fruchter. A.S., Panagia. N., Newberg. H. J. M., ve Couch. W.J., 1999. Measurements of Omega and Lambda from 42 high-redshift supernovae. *Astronomical Journal*, 517, (2): 565-586.

- Poplawski. N. J., 2006. Interacting dark energy in  $f(R)$  gravity. *Physical Review D*, 74, (8): 084032.
- Rao. V. U. M., Santhi. M. V., ve Vinutha. T., 2008. Exact Bianchi type-II, VIII and IX perfect fluid cosmological models in Saez-Ballester theory of gravitation. *Astrophysics and Space Science*, 317, 27–30.
- Riess. A.G., Filippenko. A.V., Challis. P., Clocchiatti. A., Diercks. A., Garnavich. P.M., Gilliland. R.L., Hogan. C.J., Jha. S., Kirshner. R.P., Leibundgut. B., Phillips. M.M., Reiss. D., Schmidt. B. P., Schommer. R.A., Smith. R. C., Spyromilio. J., Stubbs. C., Suntzeff. N.B., ve Tonry. J., 1998. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astronomical Journal*, 116, (3): 1009-1038.
- Ross. M., 2003. *Introduction to Cosmology*. (3th ed.), John Wiley and Sons, New York, 49p.
- Ryan, M.P., ve Shepley, L.C., 1975. *Homogeneous Relativistic Cosmologies*. Princeton Univ.Press.
- Ryden. B., 2003. *Introduction to Cosmology*. Addison-Wesley, New York.
- Santos. J., Alcaniz. J.S., Raboucas. M.J ve Carvalho. F.C., 2007. Energy conditions in  $f(R)$  gravity. *Physical Review D*, 76, (8): 083513.
- Sanyal. A.K., 2002. Noether and Some Other Dynamical Symmetries in Kantowski-Sachs Model, *Physics Letter B*, 524, 177-184.
- Sanyal. A.K., 2005. Scalar-tensor theory of gravity carrying a conserved current. *Physics Letter B*, 624, 81-92.
- Sanyal. A.K., Rubano. C., ve Piedipalumbo. E., 2003. Coupling Parameters and the Form of the Potential via Noether Symmetry. *General Relativity and Gravitation*, 35, (9): 1617-1635.

- Sawicki. I., ve Hu. W., 2007. S Stability of cosmological solutions in  $f(R)$  models of gravity . *Physical Review D*, 75, (12): 127502.
- Sen, S., ve Sen, A.A., 2001. Late time acceleration in Brans-Dicke cosmology. *Physical Review D*, 63, (12): 124006.
- Smolin. L.,1979. Towards a theory of spacetime structure at very short distances. *Nuclear Physics B*, 160, (2): 253-268.
- Sotiriou. T. P., ve Faraoni. V., 2010.  $f(R)$  theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82, (1) : 451-497
- Spergel. D. N., Bean. R., Doré. O., Nolta. M. R., Bennett. C. L., Dunkley. J., Hinshaw. G., Jarosik. N., Komatsu. E., Page. L., Peiris. H. V., Verde. L., Halpern. M., Hill. R. S., Kogut. A., Limon. M., Meyer. S. S., Odegard. N., Tucker. G. S., Weiland. J. L., Wollack. E. ve Wright. E. L., 2007. Three-Year *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* Observations: Implications for Cosmology. *Astrophysical Journal Supplement Series*, 170, (2): 377-408.
- Spergel. D. N., Verde. L., Peiris. H.V., Komatsu. E., Nolta. M.R., Bennett. C.L., Halpern. M., Hinshaw. G., Jarosik. N., Kogut. A., Limon. M., Meyer. S.S., Page. L., Tucker. G. S., Weiland. J. L., Wollack. E. ve Wright. E. L., 2003. First-Year *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* Observations: Determination of Cosmological Parameters. *Astrophysical Journal Supplement Series*, 148, (1): 175-194.
- Starobinsky. A. A., 2007. Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity. *JETP Letters*, 86, (3): 157-163.
- Stephani, H., Kramer, D., Hoenselaers. C., MacCallum, M., ve Herlt, E., 2003. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. (2th ed.) Cambridge University Press, Cambridge.

Tegmark. M., Strauss. M. A., Blanton. M. R., Abazajian .K., Dodelson. S., Sandvik. H., Wang. X. M., Weinberg. D. H., Zehavi. .I, Bahcall. N.A., Hoyle. F., Schlegel. D., Scoccimarro. R., Vogeley. M.S., Berlind. A., Budavari. T., Connolly. A., Eisenstein. D. J., Finkbeiner. D., Frieman. J.A., Gunn. J.E., Hui. L., Jain. B., Johnston. D., Kent. S., Lin. H., Nakajima. R., Nichol. R. C., Ostriker. J. P., Pope. A., Scranton. R., Seljak. U., Sheth. R. K., Stebbins. A., Szalay. A. S., Szapudi. I., Xu. Y. Z., Annis. J., Brinkmann. J., Burles. S., Castander. F.J., Csabai. I., Loveday. J., Doi. M., Fukugita. M., Gillespie. B., Hennessy. G., Hogg. D. W., Ivezić. Z., Knapp. G. R., Lamb. D. Q., Lee. B. C., Lupton. R. H., McKay. T.A., Kunszt. P., Munn. J. A., O'Connell. L., Peoples. J., Pier. J. R., Richmond. M., Rockosi. C., Schneider. D. P., Stoughton. C., Tucker. D. L., Vanden. Berk. D. E., Yanny. B., ve York. D. G., 2004. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Physical Review D*, 69 (10): 103501.

Vakili. B., 2008. Noether symmetry in  $f(R)$  cosmology. *Physics Letters B*, 664, (1-2): 16-20.

Weinberg. S., 1972. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley and Sons Inc. Canada.

Yokoyama . J., ve Maeda. K., 1988. On the dynamics of the power law inflation due to an exponential potential. . *Physics Letters B*, 207, (1): 31-35.

Zee, A., 1979. Broken-Symmetric Theory of Gravity, *Physical Review Letters*. 42, (7): 417-421.

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

- Şekil-1. BI ( $\chi=0$ ) için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim ve (d) Hubble parametresinin zamanla değişimi,.....76
- Şekil-2. BI( $\chi=0$ ) (a) Yavaşlama parametresi (b) Anizotropi parametresinin zamanla değişimi,.....77
- Şekil-3. BI( $\chi=0$ ) için  $\lambda = -\frac{3c_1 l^2 a_4}{16a_1^3 a_3^3}$  durumunda (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim ve (d) Hubble parametresinin zamanla değişimi,.....78
- Şekil-4.  $\chi=+1$  için  $a_4=0$  durumunda (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim ve (d) Hubble parametresinin (e) yavaşlama parametresi ve (f) anizotropi parametresinin zamanla değişimleri ,.....80
- Şekil-5. BIII ve K-S uzay zamanları için Skaler alanın zamanla değişimleri,.....81
- Şekil-6.  $\Lambda$  içeren BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim ve (d) Hubble parametresinin zamanla değişimi.....82
- Şekil-7.  $\Lambda$  içeren BI modeli için (a) Yavaşlama parametresi ile (b) Anizotropi parametresinin zamanla değişimi .....83
- Şekil-8.  $R^n$  ( $0 < n < \frac{1}{2}$ ) teorisinde BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim (d) Hubble parametresi (e) Yavaşlama parametresi ile (f) Anizotropi parametresi ve (g) Ricci skalerinin zamanla değişimi,.....85

Şekil-9.  $R^n$  ( $1 < n < \frac{5}{4}$ ) teorisinde BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim (d) Hubble parametresi (e)Yavaşlama parametresi ile (f) Anizotropi parametresi ve (g) Ricci skalerinin zamanla değişimi,.....87

Şekil-10.  $R^{1/2}$  teorisinde BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim (d) Hubble parametresi (e)Yavaşlama parametresi ile (f) Anizotropi parametresi ve (g) Ricci skalerinin zamanla değişimi.....89

Şekil-11.  $R^{5/4}$  teorisinde BI modeli için (a) Ortalama ölçek çarpanı, (b) Ölçek çarpanının ikinci türevi, (c) Ortalama hacim (d) Hubble parametresi (e)Yavaşlama parametresi ile (f) Anizotropi parametresi ve (g) Ricci skalerinin zamanla değişimi.....91



## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Doğum Yeri: Antalya

Doğum Tarihi: 30.07.1979

### EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Akdeniz Üniversitesi Fizik (2002)

Yüksek Lisans Öğrenimi: - ÇOMÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, FİZİK ABD (2006)

Bildiği Yabancı Dil: İngilizce

### BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a)Yayınlar:

a) Noether symmetries of Bianchi I, Bianchi III, and Kantowski-Sachs spacetimes in scalar-coupled gravity theories, Camcı U., **Kucukakca Y.**, PHYSICAL REVIEW, 76 (8): 084023, 2007.

b) Curvature and Weyl collineations of Bianchi type V spacetimes, Camcı U., Hussain I., **Kucukakca Y.**, JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS, 59 (11): 1476-1484,2009.

b) Uluslararası Bildiriler:

- Curvature Collinations of Some Spherically Symmetric Spacetimes, M. Başer, U. Camcı, N. Yücel, **Y. Küçükakça**, 24. Uluslararası Fizik Kongresi, 2007
- Bianchi Tip II Uzay Zamanının Eğrilik Simetrileri, N. Yücel, U. Camcı, **Y. Küçükakça**, 25. Uluslararası Fizik Kongresi, 2008
- Bianchi Tip Uzay Zamanların Madde ve Eğrilik Simetrileri Arasındaki İlişkiler, N. Yücel, U. Camcı, **Y. Küçükakça**, 26. Uluslararası Fizik Kongresi, 2009

c) Katıldığı Projeler:

- Uzay-Zamanların Eğrilik Simetrilerinin ve Bunların Diğer Geometrik Simetriler ile İlişkilerinin Belirlenmesi (TÜBİTAK, 106T669) Bursiyer, 2007-2009.

### İLETİŞİM

E-posta Adresi: ykucukakca@comu.edu.tr