T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FONKSİYON GRAFİKLERİ ÜZERİNE

Başak YILDIRIM

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **17.06.2010**

Tez Danışmanı:

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Başak YILDIRIM tarafından **Doç. Dr. Erdal EKİCİ** yönetiminde hazırlanan **"FONKSİYON GRAFİKLERİ ÜZERİNE"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

____

Yönetici

Doç. Dr. Esin SOYDUGAN	Yrd. Doç. Dr. İlhan HACIOĞLU
______________________________	______________________________
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi: 17/06/2010

Prof. Dr. İsmail TARHAN

____

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2010/11 no'lu projeden desteklenmiştir.

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Başak YILDIRIM

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez çalışmalarımın her aşamasında büyük yardımlarını ve desteğini gördüğüm tez danışmanım, Sn. Doç. Dr. Erdal Ekici’ye, sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarken, bilgilerini bizden esirgemeyen başta Sn. Prof. Dr. Neşet Aydın olmak üzere tüm bölüm hocalarıma aynı zamanda her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşım Selin Vurkaç’ a da teşekkürleri bir borç bilirim.

Başak YILDIRIM

ÖZET

FONKSİYON GRAFİKLERİ ÜZERİNE

Başak YILDIRIM

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Erdal EKİCİ

17.06.2010, 57

Bu tezde gδpr-kapalı grafik ve kuvvetli gδpr-kapalı grafik konuları üzerinde çalışılmıştır. gδpr-kapalı grafik özellikleri ve kuvvetli gδpr-kapalı grafiklerin özellikleri araştırılmıştır. Üstelik gδpr-kapalı grafik ve kuvvetli gδpr-kapalı grafik konularının gδpr-T_0, gδpr-T_1, gδpr-T_2 uzaylarla olan ilişkileri araştırılmıştır.

Anahtar sözcükler: Grafik, gδpr-kapalı grafik, kuvvetli gδpr-kapalı grafik

ABSTRACT

ON THE GRAPHS OF A FUNCTION

Başak YILDIRIM

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Science and Engineering

Chair for Mathematics Thesis of Master of Science

Advisor: Assoc. Prof. Erdal EKİCİ

17.06.2010, 57

In this thesis, the subjects of gδpr-closed graphs and strongly gδpr-closed graphs are studied. The properties of gδpr-closed graphs and strongly gδpr-closed ghraphs are investigated. Moreover, the relationships between gδpr-closed graphs, strongly-closed graphs and gδpr-To, gδpr-T_1, gδpr-T_2 spaces are discussed.

Keywords: Graph, gδpr-closed graph, strongly gδpr-closed graph

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Long, 1969 yılında ayrıntılı olarak kapalı grafik ile fonksiyonların özelliklerini incelemiştir.

Literatürde sürekliliğin çeşitli şekilleri ile bir arada yer alan kapalı grafiğin çeşitli genelleştirilmiş kavramları ortaya çıkmıştır.

Levine, 1970 yılında genelleştirilmiş kapalı kümeler kavramını sunduktan sonra bu konuda birçok çalışma yapılmıştır.

Mashhour ve arkadaşları, 1982 yılında ön açık küme tanımlarını vermiş ve Bandyopadhyay ve Bhattacharyya, 2005 yılında ön kapalı grafikler, özellikleri ve ayırma aksiyomları ile olan ilişkisini araştırmışlardır.

Dube ve arkadaşları, 1983 yılında Levine tarafından gösterilen yarı açık kümelerin gösteriminden yararlanarak yarı kapalı grafik kavramını ortaya koymuşlardır.

Ekici ve Noiri, 2006 yılında gδpr-kapalı kümeler üzerine çalışmışlardır. Bu çalışmalarında çeşitli özelliklerin korunmasını da araştırmışlardır.

Bu tezde gδpr-kapalı grafik ve kuvvetli gδpr-kapalı grafik konuları üzerinde çalışılmıştır. gδpr-kapalı grafik özellikleri ve kuvvetli gδpr-kapalı grafiklerin özellikleri araştırılmıştır.

Üstelik gδpr-kapalı grafik ve kuvvetli gδpr-kapalı grafik konularını gδpr-T_0, gδpr-T_1, gδpr-T_2 uzaylarla olan ilişkileri araştırılmıştır.

Sunulan tez ondört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümü, bu bölümde tezimizi tanıtacak bilgiler sunulmuştur.

İkinci bölüm önceki çalışmalar, bu bölümde tezde yararlanılacak temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm gδpr-kapalı grafik, bu bölümde gδpr-kapalı grafik konusu çalışılmıştır.

Dördüncü bölüm gδpr-kapalı grafik ve gδpr-T_0 uzaylar, bu bölümde gδpr-T_0 uzaylarla gδpr-kapalı grafikler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Beşinci bölüm gδpr-kapalı grafik ve gδpr-T_1 uzaylar, bu bölümde gδpr-T_1 uzaylarla gδpr-kapalı grafikler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Altıncı bölüm gδpr-kapalı grafik ve gδpr-T_2 uzaylar, bu bölümde gδpr-T_2 uzaylarla gδpr-kapalı grafikler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Yedinci bölüm gδpr-kapalı grafik ve gδpr-kompaktlık, bu bölümde gδpr-kompakt uzaylarla gδpr-kapalı grafikler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Sekizinci bölüm kuvvetli gδpr-kapalı grafik, bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafikler çalışılmıştır.

Dokuzuncu bölüm kuvvetli gδpr-kapalı grafik ve gδpr-T_0 uzaylar, bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafikler ve gδpr-T_0 uzaylar çalışılmıştır.

Onuncu bölüm kuvvetli gδpr-kapalı grafik ve gδpr-T_1 uzaylar, bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafikler ve gδpr-T_1 uzaylar çalışılmıştır.

Onbirinci bölüm kuvvetli gδpr-kapalı grafik ve gδpr-T_2 uzaylar, bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafikler ve gδpr-T_2 uzaylar incelenmiştir.

Onikinci bölüm kuvvetli gδpr-kapalı grafik ve kompaktlık, bu bölümde kuvvetli gδpr-grafikler ve gδpr-kompaktlık incelenmiştir.

Onüçüncü bölüm gδpr-kapalı grafik ile kuvvetli gδpr-kapalı grafik arasındaki ilişkiler, bu bölümde gδpr-kapalı grafik ile kuvvetli gδpr-kapalı grafik arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son bölümde gδpr-sürekli fonksiyonlar, gδpr-sürekli fonksiyonların özellikleri araştırılmıştır.

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu temel tanım ve teoremler tez boyunca kullanılmaktadır.

Bu tezde topolojik uzayları (X, τ) ve (Y, σ) şeklinde veya X, Y şeklinde göstereceğiz.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A kümesinin kapanışını Cl(A) şeklinde, aynı şekilde A kümesinin içini Int(A) şeklinde göstereceğiz.

X bir topolojik uzay olmak üzere, $A\subset X$ kümesi için $\{U\in\tau: A\subset U\}$ ailesini $\gamma(A)$ ve $x\in X$ noktası için $\{U\in\tau: x\in U\}$ ailesini $\gamma(x)$şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer $A\subset \text{int}(\text{cl}(A))$ ise A kümesine ön açık küme denir. (Mashhour, Abd El-Monsef ve El-Deeb, 1982)

Bütün ön açık kümelerinin ailesine ÖA(X) şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.2. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer $X\setminus A\in$ÖA(X) ise A kümesine ön kapalı küme denir. (Mashhour, Abd El-Monsef ve El-Deeb, 1982)

Bütün ön kapalı kümelerinin ailesini ÖK(X) ile göstereceğiz.

Tanım 2.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun.

$$\text{pcl}(A)=\cap\{B: B \text{ ön kapalı } B\supset A\}$$

ile tanımlı pcl(A)'ya A kümesinin kapanışı denir. (El-Deeb, Hasanein, Mashhour ve Noiri 1983)

Tanım 2.4. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. X uzayındaki ∀A∈ÖA(X) için f(A) ∈ ÖA(Y) ise f fonksiyonuna p-açık denir. (Janković, 1985)

Tanım 2.5. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her A⊂Y açık kümesi için f^{-1}(A)⊂X ön açık küme ise f fonksiyonuna ön sürekli fonksiyon denir. (Mashhour, Abd El-Monsef ve El-Deeb, 1982)

Tanım 2.6. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Y uzayındaki her ön açık V kümesi için f^{-1}(V), X uzayında ön açık oluyorsa f fonksiyonuna ön kararsız fonksiyon denir. (Reilly ve Vamanamurthy, 1985)

Tanım 2.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve A⊂X olsun. ∀ (x∈) G∈τ için int(cl(G))∩A≠ ∅ olan x noktasına A kümesinin δ-kapanış noktası denir. (Velicko, 1968)

Tanım 2.8. A kümesinin tüm δ-kapanış noktalarının kümesine A kümesinin δ-kapanışı denir ve δ-cl(A) ile gösterilir. (Velicko, 1968)

Tanım 2.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve A⊂X olsun. Eğer A⊂int(δ-cl(A)) ise A kümesine δ-ön açık küme denir. (Raychaudhuri ve Mukherje, 1993)

Bütün δ-ön açık kümelerinin ailesi δ-ÖA(X) şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.10. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. δ-ön açık kümelerinin tümleyenlerine δ-ön kapalı kümeler denir. (Raychaudhuri ve Mukherje, 1993)

Bütün δ-ön kapalı kümelerinin ailesi δ-ÖA(X) şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.11. (X, τ) bir topolojik uzay ve A⊂X olsun. A kümesini kapsayan δ-ön kapalı kümelerinin arakesitine A kümesinin δ-ön kapanışı denir. (Raychaudhuri ve Mukherje, 1993)

A kümesinin δ-ön kapanışı δ-pcl(A) ile gösterilir.

Tanım 2.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve A⊂X olsun. A kümesinde bulunan tüm δ-ön açık kümelerinin birleşimine A kümesinin δ-ön içi denir. (Raychaudhuri ve Mukherje, 1993)

A kümesinin δ-ön içi δ-pint(A) ile gösterilir.

Teorem 2.13. (X, τ) bir topolojik uzay ve A⊂X olsun. Bu durumda A kümesinin δ-ön kapalı olması için gerek ve yeter koşul A= δ-pcl(A) olmasıdır. (Raychaudhuri ve Mukherje, 1993)

Tanım 2.14. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her δ-ön açık kümenin görüntüsü δ-ön açık küme ise f fonksiyonuna δ-ön açık fonksiyon denir. (Ekici, 2004)

Tanım 2.15. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her δ-ön kapalı kümenin görüntüsü δ-ön kapalı ise f fonksiyonuna δ-ön kapalı fonksiyon denir. (Ekici, 2004)

Tanım 2.16. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her δ-ön kapalı A⊂Y kümesi için f^{-1}(A)⊂X δ-ön kapalı ise f fonksiyonuna δ-ön kararsız denir.(Ekici, 2004)

Tanım 2.17. (X, τ) bir topolojik uzay ve A⊂X olsun. B açık küme olmak üzere A⊆ B iken cl(A)⊆B oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş kapalı küme denir. (Levine, 1970)

Genelleştirilmiş kapalı küme kısaca g-kapalı küme şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.18. (X, τ) bir topolojik uzay ve A⊂X olsun. X\A g-kapalı ise A kümesine genelleştirilmiş açık küme denir. (Levine, 1970)

Genelleştirilmiş açık kümeleri g-açık küme şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.19. (X, τ) bir topolojik uzay ve A⊂X olsun. A⊂B ve B⊂X açık olduğunda pcl(A)⊂B oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş p-kapalı küme denir. (Maki ve ark., 1996)

Genelleştirilmiş p-kapalı küme gp-kapalı şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.20. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A\subset B$ ve $B\subset X$ açık olduğunda δ-pcl(A)$\subset$B oluyorsa A kümesine gδp-kapalı küme denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Bütün gδp-kapalı kümelerinin ailesi gδp-K(X) şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.21. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. X\A gδp-kapalı ise A kümesine gδp-açık küme denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Bütün gδp-açık kümelerinin ailesi gδp-A(X) şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.22. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A=int(cl(A)) ise A kümesine düzenli açık küme denir. (Stone, 1937)

Tanım 2.23. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A=cl(int(A)) ise A kümesine düzenli kapalı küme denir. (Stone, 1937)

Tanım 2.24. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A\subset B$ ve $B\subset X$ düzenli açık olduğunda δ-pcl(A)$\subset$B oluyorsa A kümesine gδpr-kapalı küme denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Tüm gδpr-kapalı kümelerinin ailesine gδpr-K(X) şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.25. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. X\A gδpr-kapalı ise A kümesine gδpr-açık küme denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Tüm gδpr-açık kümelerinin ailesine gδpr-A(X) şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.26. (X, τ) topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A kümesinde bulunan tüm gδpr-açık kümelerinin birleşimine A kümesinin gδpr-içi denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

A kümesinin gδpr-içi, gδpr-int(A) ile gösterilir.

Tanım 2.27. Bir (X, τ) topolojik uzayındaki bir $A \subset X$ olsun. A kümesinin gδpr-kapanışı gδpr-cl(A)=$\cap$\{G: $A \subset G$ ve G, X uzayında gδpr-kapalı\} olarak tanımlanır. (Ekici ve Noiri, 2006)

Tanım 2.28. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr-sürekli fonksiyon denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Tanım 2.29. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her $A \subset Y$ gδpr-kapalı kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ gδpr- kapalı ise f fonksiyonuna gδpr-kararsız fonksiyon denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Tanım 2.30. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun G(f) grafiği X×Y çarpım uzayında kapalıysa f fonksiyonuna kapalı grafiğe sahiptir denir. (Husain, 1977)

Tanım 2.31. x, $y \in X$ için $x \neq y$ olacak şekilde x'i bulundurup y'yi bulundurmayan ve y'yi bulundurup x'i bulundurmayan ön açık kümeleri varsa X uzayına ön-T_1 uzayı denir. (Kar, Bhattacharyya 1990)

Tanım 2.32. X bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olan $\forall$ x, $y \in X$ için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in$ ÖA(X,x), $V \in$ ÖA(Y,y) varsa X uzayına ön-T_2 uzayı denir. (Kar, Bhattacharyya 1990)

Tanım 2.33. X topolojik uzayının her ön açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına kuvvetli kompakt uzay denir. (Mashhour, Abd El- Monsef, Hasanein, Noiri, 1984)

Teorem 2.34. Kuvvetli kompakt uzayın her ön kapalı alt kümesi kuvvetli kompakttır. (Mashhour, Abd El- Monsef, Hasanein, Noiri, 1984)

Tanım 2.35. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset B$ ve $B \subset X$ düzenli açık olduğundan $Cl(A) \subset B$ oluyorsa A kümesine düzenli genelleştirilmiş kapalı küme denir. (Palaniappan ve Rao, 1993)

Düzenli genelleştirilmiş kapalı küme rg-kapalı küme şeklinde gösterilir. (Palaniappan ve Rao, 1993)

Tanım 2.36. (X, τ) topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. A$\subset$B ve B$\subset$X düzenli açık olduğundan pcl(A)$\subset$B oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş ön düzenli kapalı küme ve düzenli genelleştirilmiş ön kapalı küme denir. (Gnanambal, 1997)

Düzenli genelleştirilmiş ön kapalı küme gpr-kapalı küme şeklinde gösterilir. (Gnanambal, 1997)

Uyarı 2.37. (X, τ) topolojik uzay ve A$\subset$X olsun. Bu durumda aşağıdaki diyagram geçerlidir. (Ekici ve Noiri, 2006)

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Kapalı} & \Rightarrow & \text{g-kapalı} & \Rightarrow & \text{rg-kapalı} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{ön kapalı} & \Rightarrow & \text{gp- kapalı} & \Rightarrow & \text{gpr-kapalı} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\delta\text{-ön kapalı} & \Rightarrow & \text{g}\delta\text{p-kapalı} & \Rightarrow & \text{g}\delta\text{pr-kapalı}
\end{array}$$

Tanım 2.38. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her A$\subset$Y kapalı kümesi için f^{-1}(A)$\subset$X gδp-kapalı ise f fonksiyonuna gδp-sürekli denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Tanım 2.39. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her A$\subset$Y gδp-kapalı kümesi için f^{-1}(A)$\subset$X gδp-kapalı ise f fonksiyonuna gδp-kararsız fonksiyon denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Tanım 2.40. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her A$\subset$Y δ-ön kapalı kümesi için f^{-1}(A)$\subset$X gδp-kapalı ise f fonksiyonuna δp-gδp-sürekli fonksiyon denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Tanım 2.41. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. Her A⊂Y δ-ön kapalı kümesi için f^{-1}(A)⊂X gδpr-kapalı ise f fonksiyonuna δp-gδpr-sürekli fonksiyon denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Uyarı 2.42. (X, τ) topolojik uzay ve A⊂X olsun. Bu durumda aşağıdaki diyagram geçerlidir. (Ekici ve Noiri, 2006)

$$\begin{array}{ccccc} g\delta pr\text{-kararsızlık} & \Rightarrow & \delta p\text{-}g\delta pr\text{-süreklilik} & \Rightarrow & g\delta pr\text{-süreklilik} \\ & & \Uparrow & & \Uparrow \\ g\delta p\text{-kararsızlık} & \Rightarrow & \delta p\text{-}g\delta p\text{-süreklilik} & \Rightarrow & g\delta p\text{-süreklilik} \\ & & \Uparrow & & \Uparrow \\ & & \delta\text{-ön kararsızlık} & \Rightarrow & \delta\text{-ön süreklilik} \end{array}$$

Teorem 2.43. (X, τ) topolojik uzay ve A⊂X olsun. Bu durumda δ-pcl(A)=A∪cl(δ-int(A)) olur. (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993)

Teorem 2.44. (X, τ) topolojik uzay ve A⊂X olsun. Bu durumda A, δ-ön kapalı olması için gerek ve yeter şart A= δ-pcl(A) olmasıdır. (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993)

Teorem 2.45. (X, τ) topolojik uzay ve A⊂X olsun. Bu durumda;

A⊂B ise δ-pcl(A) ⊂ δ-pcl(B) olur. (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993)

Teorem 2.46. (X, τ) topolojik uzay ve A⊂X olsun. Bu durumda δ-pcl(A) kümesi δ-ön kapalıdır. (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993)

Teorem 2.47. (X, τ) topolojik uzay ve A⊂X olsun. Bu durumda;

δ-pcl (δ-pcl(A))= δ-pcl(A) dır. (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993)

Teorem 2.48. (X, τ) topolojik uzay ve A, B (X, τ) topolojik uzayının alt kümeleri olsun. Bu durumda A⊂B ise gδpr-cl(A)⊂gδpr-cl(B) olur. (Ekici ve Noiri, 2006)

Teorem 2.49. (X, τ) topolojik uzay ve A kümesi (X, τ) topolojik uzayının alt kümesi olsun. Bu durumda $A \subset g\delta pr\text{-}cl(A)$ olur. (Ekici ve Noiri, 2006)

Teorem 2.50. (X, τ) topolojik uzay ve A kümesi (X, τ) topolojik uzayının alt kümesi olsun. Bu durumda $g\delta pr\text{-}cl(A) = g\delta pr\text{-}cl(g\delta pr\text{-}cl(A))$dır. (Ekici ve Noiri, 2006)

BÖLÜM 3

gδpr-KAPALI GRAFİKLER

Bu bölümde gδpr-kapalı grafikler çalışılmaktadır. Ayrıca gδpr-kapalı grafiğin özellikleri verilerek gδpr-kapalı grafiğin kapalılıkla ve gδpr-süreklilikle olan ilişkileri incelenmiştir.

Tanım 3.1. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau)\to(Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun.

$\forall(x, y)\in(X\times Y)\setminus G(f)$ için

$$(U\times V)\cap G(f)= \emptyset$$

olacak biçimde $x\in U\subset X$ ve $y\in V\subset Y$ gδpr-açık kümeleri var ise $G(f)$ grafiğine gδpr-kapalı grafik denir.

Teorem 3.2. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau)\to(Y, \sigma)$ fonksiyonun gδpr-kapalı grafiğine sahip bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $\forall(x, y)\in(X\times Y)\setminus G(f)$ için $f(U)\cap V= \emptyset$ olacak şekilde $U\in g\delta pr\text{-}A(X, x)$ ve $V\in g\delta pr\text{-}A(Y, y)$ kümeleri olmasıdır.

İspat:

(⇒) $f: X\to Y$ gδpr–kapalı grafiğine sahip bir fonksiyon olsun.

$\forall$ $(x,y) \in (X\times Y)\setminus G(f)$ için

$$(U\times V)\cap G(f)= \emptyset$$

olacak biçimde $x\in U\subset X$ ve $y\in V\subset Y$ gδpr–açık kümeleri vardır.

Kabul edelim ki; $y\in f(U)\cap V\neq \emptyset$

Bu durumda $y \in f(U) \wedge y \in V$ elde ederiz.

Buradan $\exists x_0 \in U$ için

$$y = f(x_0) \in f(U) \wedge y \in V$$

Bu ise

$$(x_0, y) \in G(f) \wedge (x_0, y) \in U \times V$$

olduğunu yani

$$(U \times V) \cap G(f) \neq \emptyset$$

olduğunu verir.

Tanım 3.1'den $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$ olmalıydı bulduğumuz sonuç kabulümüzle çelişir.

O zaman $f(U) \cap V = \emptyset$ dir.

(⇐) $\forall (x,y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V gδpr-açık kümeleri $x \in U$ ve $y \in V$ olacak biçimde vardır.

Kabul edelim ki;

$$(x, y) \in (U \times V) \cap G(f) \neq \emptyset$$

olsun. Bu durumda

$$(x, y) \in (U \times V) \wedge (x, y) \in G(f)$$

ve buradan

$$(x \in U \wedge y \in V) \wedge y = f(x) \in f(U)$$

elde edilir. Buradan $y \in f(U) \cap V$ ve böylece

$$f(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

Hipotezden f(U)∩V= ∅ verilmişti. Bu ise bir çelişkidir.

O zaman (U×V)∩G(f)= ∅ dir.

Uyarı 3.3. Ekici ve Noiri' nin 2006 yılındaki makalesine baktığımızda Uyarı 2.37'deki diyagram her açık kümenin gδpr-açık küme olduğunu gösterir.

Teorem 3.4. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. f kapalı grafiğe sahipse bu grafik gδpr-kapalı grafiktir.

İspat:

(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olmak üzere G(f), f fonksiyonunun kapalı grafiği olsun.

Bu durumda

$$\forall (x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f) \text{ için } f(U) \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde X uzayında U ve Y uzayında V açık kümeleri x∈ U ve y∈ V olacak biçimde vardır.

Uyarı 3.3'den her açık küme gδpr-açık kümedir. Bu nedenle U,V açık kümeleri gδpr-açık kümelerdir. Buradan

$$\forall (x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f) \text{ için } f(U) \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde X uzayında U ve Y uzayında V gδpr-açık kümeleri vardır.

Böylece G(f) grafiğinin gδpr-kapalı grafik olduğunu elde ederiz.

Uyarı 3.5. Yukarıdaki teoremin ifadesinden "her kapalı grafik gδpr-kapalı grafiktir." ifadesinin tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

Örnek 3.6. X={a, b}, Y={a, b, c, d} olsun. X üzerindeki topoloji ayrık topoloji τ, $\sigma=\{\emptyset, \{c, d\}, Y\}$ olsun. f fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım; f(a)=a ve f(b)=b bu durumda G(f) grafiği $g\delta$pr-kapalıdır ancak kapalı değildir.

Örneğin,

$(a, c)\in(X\times Y)\backslash G(f)$ olsun.

$(a, c)\notin G(f)$ olur. $f(U)\cap V=\emptyset$ olacak şekilde

$$a\in U\in g\delta pr\text{-}A(X),\ c\in V\in g\delta pr\text{-}A(Y)$$

vardır. Gösterelim;

$$a\in\{a\}=U\in g\delta pr\text{-}A(X) \text{ öyle ki } f(\{a\})=f(U)=\{a\}$$

ve

$$c\in\{c\}=V\in g\delta pr\text{-}A(Y) \text{ öyle ki } f(U)\cap V=\emptyset$$

olur.

Buradan G(f) grafiği $g\delta$pr-kapalı grafiktir.

Ancak G(f) grafiği kapalı değildir.

Uyarı 3.7. $g\delta$pr-kapalı grafiğine sahip fonksiyonların sürekli olmaları gerekmez. Bunu aşağıdaki örnekte gösterelim.

Örnek 3.8. (X, τ_1) ve (X, τ_2) topolojik uzaylar ve X={a, b, c, d} olsun. $\tau_1=\{\emptyset, X, \{c, d\}\}$ ve τ_2 ayrık topoloji olsun.

$$i: (X, \tau_1)\rightarrow(X, \tau_2)$$

birim fonksiyonunun $G(i)$ grafiği $g\delta$pr-kapalıdır ancak sürekli değildir.

f fonksiyonunun grafiğinin $g\delta$pr-kapalı olduğunu göstermek için, örneğin,

$(c, d) \in (X \times Y) \setminus G(i)$ olsun.

$$(c,d) \notin G(i) \text{ için } f(U) \cap V = \varnothing$$

olacak şekilde

$$c \in \{c\} \in g\delta pr\text{-}A(X),\ d \in \{b, d\} \in g\delta pr\text{-}A(Y)$$

vardır.

Gösterelim;

$$c \in \{c\} = U \in g\delta pr\text{-}A(X) \text{ öyle ki } f(\{c\}) = f(U) = \{c\}$$

$$d \in \{b, d\} = V \in g\delta pr\text{-}A(Y) \text{ öyle ki } \{c\} \cap \{b, d\} = \varnothing$$

olduğundan $f(U) \cap V = \varnothing$ olur.

Buradan G(f) gδpr-kapalıdır.

f fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterelim;

$\{a, b\} \in X$ açık için

$f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\} \notin \tau_1$

olur.

Bundan dolayı f fonksiyonu sürekli değildir.

BÖLÜM 4

gδpr- KAPALI GRAFİK

VE

gδpr-T_0 UZAYLAR

Bu bölümde gδpr-kapalı grafikler ile gδpr-T_0 uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 4.1. X topolojik uzay olmak üzere $x \neq y$ olan $\forall x, y \in X$ için $x \in U$, $y \notin U$ veya $x \notin V$, $y \in V$ olacak biçimde U, V gδpr-açık kümeleri varsa X uzayına gδpr-T_0 uzayı denir. (Aslan, 2009)

Örnek 4.2. $X=\{a, b\}$ olsun. $\tau=\{\emptyset, X, \{a\}\}$ olsun. Bu durumda X uzayı gδpr-T_0 uzayıdır. Burada $\{a\}=U$ diyelim. $a \in U$, $b \notin U$ ve $U \in \tau$ olur.

Böylece

$$a \in U,\ b \notin U \text{ veya } b \in V,\ a \notin V$$

olacak şekilde U gδpr-açık kümesi var olduğundan X uzayı gδpr-T_0 uzaydır.

Teorem 4.3. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ örten bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği gδpr- kapalı ise Y uzayı gδpr-T_0 uzaydır.

İspat:

$y_1, y_2 \in Y$ ve $y_1 \neq y_2$ olsun.

f fonksiyonunun örtenliğinden $f(x_0)=y_1$ olacak şekilde $\exists\ x_0 \in X$ vardır. $(x_0, y_2) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ alalım. G(f) grafiğini gδpr-kapalı olmasından ve Teorem 3.2'den;

$f(U_1)\cap V_1=\emptyset$ olacak biçimde

$$U_1\in g\delta pr\text{-}A(X, x_0),\ V_1\in g\delta pr\text{-}A(Y, y_2)$$

vardır. Buradan;

$x_0\in U_1$ olduğundan $f(x_0)=y_1\in f(U_1)$ olur.

$f(U_1)\cap V_1=\emptyset$ olduğundan $y_1\notin V_1$ olur. $y_2\in V_1$ dir.

Buradan $y_2\in V_1$, $y_1\notin V_1$ olan V_1 gδpr-açığı bulunduğundan Y gδpr-T_0 uzaydır.

Teorem 4.4. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau)\to(Y, \sigma)$ birebir fonksiyon olsun. G(f) grafiği gδpr-kapalı ise X uzayı gδpr-T_0 uzaydır.

İspat:

$x_1, x_2\in X$ ve $x_1\neq x_2$ olsun.

f fonksiyonunun birebirliğinden $f(x_1)\neq f(x_2)$ yazarız. G(f) gδpr-kapalı grafik tanımından $(x_1, f(x_2))\in(X\times Y)\backslash G(f)$dir.

G(f)'in gδpr-kapalılığından ve Teorem 3.2.'den;

$f(U)\cap V=\emptyset$ olacak biçimde

$$U\in g\delta pr\text{-}A(X, x_1),\ V\in g\delta pr\text{-}A(Y, f(x_2))$$

vardır. Buradan;

$f(x_2)\notin f(U)$ olduğundan $x_2\notin U$ olur. $x_1\in U$, $x_2\notin U$ dir.

Böylece $x_1\in U$, $x_2\notin U$ olan U gδpr- açığı var olduğundan X uzayı gδpr-T_0 uzay olarak elde ederiz.

Sonuç 4.5. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau)\to(Y, \sigma)$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği gδpr-kapalı ise X ve Y uzayı gδpr-T_0 uzaydır.

İspat:

Teorem 4.4’de f fonksiyonunun birebir ve G(f) grafiğinin gδpr-kapalı olmasından X uzayının gδpr-T_0 uzay olduğunu elde ederiz.

Teorem 4.3’te f fonksiyonunun örten ve G(f) grafiğinin gδpr-kapalı olmasından Y uzayının gδpr-T_0 uzay olduğunu elde ederiz.

Buradan f fonksiyonunun birebir ve örten olması ve G(f) grafiğinin gδpr-kapalı olmasından dolayı X ve Y uzayları gδpr-T_0 uzay olur.

Teorem 4.6. Her T_0 topolojik uzay gδpr-T_0 topolojik uzaydır.

İspat:

X bir T_0 topolojik uzay olsun. T_0 uzay tanımından $\forall x, y \in X$ için $x \neq y$ olacak şekilde x noktasını bulundurup y noktasını bulundurmayan U açığı veya y noktasını bulundurup x noktasını bulundurmayan V açık kümesi vardır.

Uyarı 3.3.’den her açık küme gδpr-açık küme olduğundan $\forall x, y \in X$ için $x \neq y$ olacak şekilde x noktasını içerip y noktasını içermeyen U gδpr-açığı veya y noktasını içerip x noktasını içermeyen V gδpr-açık kümesi vardır. Bu yüzden X uzayı gδpr- T_0 uzayıdır.

BÖLÜM 5

gδpr-KAPALI GRAFİK

VE

gδpr-T_1 UZAYLAR

Bu bölümde gδpr-kapalı grafikler ile gδpr-T_1 uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 5.1. X topolojik uzay olmak üzere $x \neq y$ olan $\forall x, y \in X$ için $x \in U$, $y \notin U$ ve $x \notin V$, $y \in V$ olacak biçimde $U \in g\delta pr\text{-}A(X)$ ve $V \in g\delta pr\text{-}A(Y)$ gδpr-açık kümeleri varsa X uzayına gδpr-T_1 uzayı denir. (Aslan, 2009)

Örnek 5.2. $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı verilsin. $x \neq y$ olan $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $\{x\}$, $\{y\}$ kümeleri gδpr-açıktır. Üstelik $x \in \{x\}$, $y \notin \{x\}$ ve $y \in \{y\}$, $x \notin \{y\}$ dir. Böylece bu uzay bir gδpr-T_1 uzayıdır.

Teorem 5.3. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ örten bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği gδpr-kapalı ise Y uzayı gδpr-T_1 uzaydır.

İspat:

$y_1, y_2 \in Y$ ve $y_1 \neq y_2$ olsun.

f fonksiyonunun örtenliğinden $f(x_0)=y_2$ olacak şekilde $\exists x_0 \in X$ vardır.

$(x_0, y_1) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ alalım. G(f) grafiğinin gδpr-kapalı olmasından ve Teorem 3.2'den $f(U_1) \cap V_1 = \emptyset$ olacak biçimde

$$U_1 \in g\delta pr\text{-}A(X, x_0),\ V_1 \in g\delta pr\text{-}A(Y, y_1)$$

vardır. Buradan;

$x_0 \in U_1$ olduğundan $f(x_0)=y_2 \in f(U_1)$ olur.

$f(U_1) \cap V_1 = \emptyset$ olduğundan $y_2 \notin V_1$ olur.

f fonksiyonunun örtenliğinden $f(x_1)=y_1$ olacak şekilde $\exists\ x_1 \in X$ vardır.

$(x_1, y_2) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ alalım.

G(f) grafiğinin gδpr- kapalı olmasından ve Teorem 3.2'den $f(U_2) \cap V_2 = \emptyset$ olacak biçimde

$$U_2 \in g\delta pr\text{-}A(X, x_1),\ V_2 \in g\delta pr\text{-}A(Y, y_2)$$

vardır. Buradan;

$x_1 \in U_2$ olduğundan $f(x_1)=y_1 \in f(U_2)$ olur.

$f(U_2) \cap V_2 = \emptyset$ olduğundan $y_1 \notin V_2$ olur.

Buradan

$$y_1 \in V_1,\ y_2 \notin V_1 \text{ ve } y_2 \in V_2,\ y_1 \notin V_2$$

olacak şekilde $V_1, V_2 \in g\delta pr\text{-}A(Y)$ elde ederiz.

Bu nedenle Y gδpr-T_1 uzaydır.

Teorem 5.4. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği gδpr-kapalı ise X uzayı gδpr-T_1 uzaydır.

İspat:

$x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun.

f fonksiyonunun birebirliğinden $f(x_1) \neq f(x_2)$ yazarız.

$(x_1, f(x_2)) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ alalım. G(f)'in gδpr-kapalılığından ve Teorem 3.2'den $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak biçimde

$$U \in g\delta pr\text{-}A(X, x_1),\ V \in g\delta pr\text{-}A(Y, f(x_2))$$

vardır. Buradan;

$f(x_2) \notin f(U)$ olduğundan $x_2 \notin U$ olur.

$(x_2, f(x_1)) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ alalım. G(f) grafiğinin gδpr-kapalılığından ve Teorem 3.2'den;

$f(A) \cap B = \emptyset$ olacak biçimde

$$A \in g\delta pr\text{-}A(X, x_2),\ B \in g\delta pr\text{-}A(Y, f(x_1))$$

vardır.

Buradan; $f(x_1) \notin f(A)$ olduğundan $x_1 \notin A$ olur.

Böylece U, A∈ gδpr-A(X) buluruz ki;

$$x_1 \in U,\ x_2 \notin U \text{ ve } x_2 \in A,\ x_1 \notin A$$

olur.

Buradan X uzayının gδpr-T_1 uzayı olduğunu elde ederiz.

Sonuç 5.5. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği gδpr-kapalı ise X ve Y uzayı gδpr-T_1 uzaydır.

İspat:

Teorem 5.4'de f fonksiyonunun birebir ve G(f) grafiğinin gδpr- kapalı olmasından X uzayının gδpr-T_1 olduğunu elde ederiz.

Teorem 5.3'de f fonksiyonunun örten ve G(f) grafiğinin gδpr- kapalı olmasından Y uzayının gδpr-T_1 olduğunu elde ederiz.

Buradan f fonksiyonunun birebir ve örten olması ve G(f) grafiğinin gδpr-kapalı olmasından dolayı X ve Y uzayları gδpr-T_1 uzay olur.

Teorem 5.6. Her T_1 topolojik uzay gδpr-T_1 topolojik uzaydır.

İspat: X bir T_1 topolojik uzay olsun.

T_1 uzay tanımından $\forall x, y \in X$ için $x \neq y$ olacak şekilde x noktasını bulundurup y noktasını bulundurmayan ve y noktasını bulundurup x noktasını bulundurmayan U ve V açık kümeleri vardır.

Uyarı 3.3.'den her açık küme gδpr-açık küme olduğundan $\forall x, y \in X$ için $x \neq y$ olacak şekilde x noktasını bulunduran y noktasını bulundurmayan ve y noktasını bulundurup x noktasını bulundurmayan U, V gδpr-açık kümesi vardır. Buradan X uzayı gδpr- T_1 uzayı olur.

BÖLÜM 6

gδpr-KAPALI GRAFİK

VE

gδpr-T_2 UZAYLAR

Bu bölümde gδpr-kapalı grafikler ile gδpr-T_2 uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 6.1. X bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olan $\forall x, y \in X$ için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in$ gδpr-A(X, x), $V \in$ gδpr-A(Y, y) varsa X uzayına gδpr-T_2 uzayı denir. (aslan, 2009)

Teorem 6.2. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) gδpr-kararsız olsun. X keyfi bir topolojik uzay ve Y uzayı gδpr-T_2 uzay ise G(f) grafiği gδpr-kapalıdır.

İspat:

$\forall (x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$olsun.

Bu durumda $f(x) \neq y$ dir. Y uzayı gδpr-T_2 uzayı $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $U \in$gδpr-A(Y, f(x)) ve $V \in$gδpr-A(Y, y) kümeleri vardır.

Buradan f fonksiyonunun kararsızlığından $f^{-1}(U) \in$gδpr-A(X, x)dir.

$f^{-1}(U)=A$ diyelim. $A \in$ gδpr-A(X, x) olur. Buradan;

$$f(A) = f f^{-1}(U) \subset U$$

olur. $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $f(A) \cap V = \emptyset$ olur. Bu nedenle G(f) grafiği gδpr-kapalıdır.

Teorem 6.3. Her T_2 uzay gδpr-T_2 uzaydır.

İspat:

X bir T_2 uzay olsun.

T_2 tanımından x≠y özelliğindeki

$$\forall\ x, y\in X \text{ için } x\in U,\ y\in V \text{ ve } U\cap V=\emptyset$$

olacak şekilde U, V açık kümeleri vardır.

Her açık küme gδpr-açık küme olduğundan X uzayında $U\cap V=\emptyset$ olacak şekilde U, V gδpr-açık kümeleri vardır.

Bu nedenle X uzayı gδpr-T_2 uzayıdır.

Uyarı 6.4. Yukarıdaki teoremden her T_2 uzayı bir gδpr-T_2 uzayı olduğundan yukarıdaki teoremde gδpr-T_2 uzay yerine T_2 uzay yazılabiliriz. Yani aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 6.5. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) gδpr-kararsız olsun. X keyfi bir topolojik uzay ve Y uzayı T_2 uzay ise G(f) grafiği gδpr-kapalıdır.

İspat:

$\forall(x, y)\in(X\times Y)\setminus G(f)$olsun.

Bu durumda f(x)≠y dir. Y uzayı T_2 uzayı $U\cap V=\emptyset$ olacak biçimde

$$U\in \gamma(Y, f(x)) \text{ ve } V\in \gamma(Y, y)$$

kümeleri vardır.

Aynı zamanda U ve V gδpr-açıktır.

Buradan f fonksiyonunun kararsızlığından f^{-1}(U)∈gδpr-A(X, x)dir.

$$f^{-1}(U)=A$$

diyelim. A$\in$ gδpr-A(X, x) olur. Buradan;

$$f(A)= ff^{-1}(U)\subset U$$

olur. U$\cap$V$=\emptyset$ olduğundan f(A)$\cap$V$=\emptyset$ olur.

Bu nedenle G(f) grafiği gδpr-kapalıdır.

Teorem 6.6. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) gδpr-açık, örten bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği gδpr-kapalı grafik ise Y uzayı gδpr-T_2 uzaydır.

İspat:

y_1, y_2 $\in$Y ve $y_1 \neq y_2$ olsun.

f fonksiyonunun öretenliğinden f(x)=y_2 olacak şekilde $\exists$x$\in$X vardır.

(x, y_1)$\in$(X×Y)\G(f) alalım. G(f) grafiği gδpr-kapalı olduğundan ve Teorem 3.1'den;

$$f(U)\cap V=\emptyset$$

olacak şekilde U$\in$gδpr-A(X, x) ve V$\in$ gδpr-A(Y, y_1) vardır.

f fonksiyonunun gδpr- açık fonksiyon olmasından U$\in$ $g\delta pr-$A(X, x) için

$$f(U)\in g\delta pr - A(Y, y_2)$$

olur. Yani f(U) hem gδpr-açıktır, hem de $y_2$$\in$f(U) dir. Buradan;

$$V\in g\delta pr\text{-}A(Y,\ y_1) \text{ ve } f(U)\in(Y, y_2) \text{ için } f(U)\cap V=\emptyset$$

olduğundan Y uzayı gδpr-T_2 uzaydır.

Teorem 6.7. (X τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) birebir ve gδpr-karasız fonksiyonu için G(f) grafiği gδpr-kapalı ise X uzayı gδpr-T_2 uzaydır.

İspat:

$x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun.

f fonksiyonunun birebirliğinden $f(x_1) \neq f(x_2)$ olur.

G(f) grafiğinin gδpr-kapalı olmasından

$$(x_1, f(x_2)) \in (X \times Y) \setminus G(f) \text{ için } f(U) \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U \in g\delta pr\text{-}A(X, x_1)$ ve $V \in g\delta pr\text{-}A(Y, f(x_2))$ vardır.

f fonksiyonu gδpr-kararsız olduğu için;

$V \in g\delta pr\text{-}A(Y, f(x_2))$ iken $f^{-1}(V) \in g\delta pr\text{-}A(X, x_2)$ olur. Buradan

$$U \cap f^{-1}(V) = \emptyset$$

dir. Bu da X uzayının gδpr-T_2 uzay olduğunu verir.

Sonuç 6.8. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ birebir, örten ve gδpr-açık ve gδpr-kararsız bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği gδpr-kapalı ise X ve Y uzayları gδpr-T_2 uzay olur.

İspat:

Teorem 6.6' de f fonksiyonunun gδpr-açık, örten fonksiyon olmasından ve G(f) grafiğinin gδpr- kapalı olmasından Y uzayının gδpr-T_2 uzay olduğunu elde ederiz.

Teorem 6.7.' de f fonksiyonunun birebir, gδpr-kararsız ve G(f) grafiğinin gδpr-kapalı olmasından X uzayının gδpr-T_2 uzay olduğunu elde ederiz.

Buradan f fonksiyonunun birebir, örten ve gδpr-açık gδpr-kararsız olmasından ve G(f) grafiğinin gδpr- kapalı olmasından dolayı X ve Y uzayları gδpr-T_2 uzaydır.

BÖLÜM 7

gδpr- KAPALI GRAFİK

VE

gδpr-KOMPAKTLIK

Bu bölümde gδpr-kapalı grafikler ile gδpr-Kompakt uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 7.1. (X, τ) bir topolojik uzay A⊂X olmak üzere A kümesinin (X, τ) uzayındaki her gδpr-açık örtüsünün A kümesini örten sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine X uzayına göre gδpr-kompakt denir. (Aslan, 2009)

Tanım 7.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve A kümesi X uzayına göre gδpr-kompakt ise X uzayına gδpr-kompakt denir. (Aslan, 2009)

Teorem 7.3. (X, τ) bir topolojik uzayolsun. (X, τ) gδpr-kompakt uzay ise kompakt uzaydır.

İspat:

(X, τ) topolojik uzay olmak üzere X kümesi gδpr-kompakt olduğundan (X, τ) uzayındaki her gδpr-açık örtüsünün X kümesini örten sonlu bir alt örtüsü vardır.

U={U_i : i∈I}, X kümesinin açık bir örtüsüdür. Bu açık örtünün J⊂I olmak üzere {U_i : i∈J} olan sonlu bir alt örtüsü olduğunu göstereceğiz. Yani

$$X= \bigcup_{j=1}^{n} U_j$$

olacak.

Her açık gδpr-açık olduğundan U_j gδpr-açık kümedir. X= $\bigcup_{j=1}^{n} U_j$ olacak biçimde sonlu alt örtüsü vardır. Buradan X kümesinin (X, τ) uzayındaki her

$U=\{U_i : i\in I\}$ gδpr-açık örtüsünün X kümesini örten $J\subset I$ olmak üzere $\{U_i : i\in J\}$ olan sonlu bir alt örtüsü

$$X= \bigcup_{j=1}^{n} U_j$$

olur. Buradan X kompakttır.

Teorem 7.4. X bir topolojik uzay olmak üzere gδpr-A(X) bir topoloji olsun.

f: X→Y bir fonksiyon, Y gδpr-kompakt ve G(f) gδpr-kapalı grafik ise f fonksiyonu gδpr-süreklidir.

İspat:

x$\in$X, f(x)$\in$V, V bir açık küme ve y$\in$Y\V olsun.

G(f) gδpr-kapalı grafiğinin tanımından

$$(x, y) \in (X\times Y)\setminus G(f) \text{ için } f(U_y) \cap V_y= \emptyset$$

olacak şekilde

$$U_y \in g\delta pr\text{-}A(X, x) \text{ ve } V_y \in g\delta pr\text{-}A(Y, y) \text{ vardır.}$$

$\forall$ y$\in$Y\V için gδpr-açık olan V_y elde ederiz.

$$\vartheta = \{V_y : y\in Y\setminus V\}$$

ailesi Y\V'nin gδpr-açık kümelerinden oluşan Y\V'nin bir örtüsüdür. Y gδpr-kompakt ve Y\V gδpr-kapalı olduğunu biliyoruz. Buradan Y\V gδpr-kompakttır. Buradan

$$Y\setminus V\subset\bigcup_{i=1}^{n} V_{yi}$$

olan sonlu örtü elde ederiz.

$$U=\bigcap_{i=1}^{n} U_{yi}$$

alalım. U gδpr-açık ve $x \in U$ olacaktır. Her i=1,2,...,n için $u \in U$ için $f(u) \notin V_{yi}$ olur. Buradan

$$f(u) \notin Y \setminus V \text{ ve } f(u) \in V$$

olur. O halde $f(U) \subset V$ elde ederiz.

O halde f fonksiyon gδpr-süreklidir.

BÖLÜM 8

KUVVETLİ gδpr-KAPALI GRAFİKLER

Bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafikler çalışılarak bu grafiklerin özellikleri incelenmiştir.

Tanım 8.1. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) bir fonksiyon olsun. $\forall(x, y)\in(X\times Y)\backslash G(f)$ için $(U\times V)\cap G(f)=\emptyset$ olacak biçimde $x\in U\subset X$ gδpr-açık ve $y\in V\subset Y$ açık kümesi var ise G(f) kuvvetli gδpr-kapalı grafik denir.

Teorem 8.2. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) kuvvetli gδpr-kapalı grafiğine sahip bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $\forall(x, y)\in(X\times Y)\backslash G(f)$ için $f(U)\cap V=\emptyset$ olacak şekilde U gδpr-açık ve V açık kümelerinin $x\in U$ ve $y\in V$ olacak biçimde var olmasıdır.

İspat :

(⇒) (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) kuvvetli gδpr–kapalı grafiğine sahip bir fonksiyon olsun.

$$\forall\ (x, y)\in(X\times Y)\backslash G(f) \text{ için } (U\times V)\cap G(f)=\emptyset$$

olacak biçimde $x\in U\subset X$ gδpr–açık ve $y\in V\subset Y$ açık kümeleri vardır.

Kabul edelim ki; $y\in f(U)\cap V\neq\emptyset$ olsun.

Buradan

$$y\in f(U)\wedge y\in V$$

elde ederiz. Üstelik

$$\exists x_0\in U \text{ için } y=f(x_0)\in f(U)\wedge y\in V$$

ve buradan

$$(x_0, y) \in G(f) \wedge (x_0, y) \in U \times V$$

olur. Bu ise

$$(U \times V) \cap G(f) \neq \emptyset$$

olduğunu verir.

Tanım 8.1' den $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$ olmalıydı bulduğumuz sonuç kabulümüzle çelişir.

O zaman $f(U) \cap V = \emptyset$ dir.

($\Leftarrow$) $\forall (x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U gδpr-açık ve V açık kümeleri $x \in U$ ve $y \in V$ olacak biçimde var olsun.

Kabul edelim ki; $(x, y) \in (U \times V) \cap G(f) \neq \emptyset$ olsun.

Buradan

$$(x, y) \in (U \times V) \wedge (x, y) \in G(f)$$

olur. Bu ise

$$(x \in U \wedge y \in V) \wedge y = f(x) \in f(U)$$

ve

$$y \in f(U) \cap V$$

olacaktır. O halde

$$f(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

Hipotezden $f(U) \cap V = \emptyset$ verilmişti. Bu ifade kabulümüzle çelişir.

O zaman $(U\times V)\cap G(f)=\emptyset$ dir.

Teorem 8.3. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: $(X, \tau)\rightarrow(Y, \sigma)$ kapalı grafiğine sahip bir fonksiyon olsun. Buradaki her kapalı grafik kuvvetl gδpr-kapalı grafiktir.

İspat:

(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: $(X, \tau)\rightarrow(Y, \sigma)$ fonksiyonu G(f) kapalı grafiğe sahip bir fonksiyon olsun.

Buradan

$$\forall(x, y)\in(X\times Y)\setminus G(f) \text{ için } f(U)\cap V=\emptyset$$

olacak şekilde X'de U ve Y'de V açık kümeleri $x\in U$ ve $y\in V$ olacak biçimde vardır.

Her açık küme gδpr-açık kümedir.

$$\forall(x, y)\in(X\times Y)\setminus G(f) \text{ için } f(U)\cap V=\emptyset$$

olacak şekilde X uzayında U gδpr-açık ve Y uzayında V açık kümeleri vardır. Buradan G(f)'nin kuvvetli gδpr-kapalı grafik olduğunu elde ederiz.

Uyarı 8.4. kuvvetli gδpr-kapalı grafiğine sahip fonksiyonların sürekli olmaları gerekmez. Bunu aşağıdaki örnekte gösterelim.

Örnek 8.5. $X=\{a, b, c, d\}$ olsun. $\tau_1=\{\emptyset, X, \{a, c\}\}$ ve τ_2 ayrık topoloji olsun. i: $(X, \tau_1)\rightarrow(X, \tau_2)$ birim fonksiyonunun $G(i)$ grafiği kuvvetli gδpr-kapalıdır ancak sürekli değildir.

f fonksiyonunun kuvvetli gδpr-kapalı olduğunu gösterelim;

Örneğin,

$(a, c)\notin G(i)$ için $f(U)\cap V=\emptyset$ olacak şekilde

$$a\in\{a\}\in g\delta pr\text{-}A(X),\ c\in\{c\}\in \gamma(Y)$$

vardır. Gösterelim;

$$a \in \{a\} = U \in g\delta pr\text{-}A(X) \text{ öyle ki } f(\{a\}) = f(U) = \{a\}$$

$$c \in \{c\} = V \in \gamma\ (Y) \text{ öyle ki } \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$$

olduğundan $f(U) \cap V = \emptyset$ olur.

Buradan G(f) kuvvetli gδpr-kapalıdır.

f fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterelim;

$$\{a, b\} \text{ açık kümesi için } f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\} \notin \tau_1$$

olur.

Bundan dolayı f fonksiyonu sürekli değildir.

BÖLÜM 9

KUVVETLİ gδpr-KAPALI GRAFİK

VE

gδpr-T_0 UZAYLAR

Bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafik ile T_0 uzaylar ve gδpr-T_0 uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Teorem 9.1. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau)\rightarrow(Y, \sigma)$ örten bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği kuvvetli gδpr- kapalı grafik ise Y uzayı T_0 uzaydır.

İspat:

$y_1, y_2 \in Y$ ve $y_1\neq y_2$ olsun.

f fonksiyonunun örtenliğinden $f(x_0)=y_1$ olacak şekilde $\exists x_0\in X$ vardır. G(f) grafik tanımından $(x_0, y_2)\in(X\times Y)\setminus G(f)$dir. G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr-kapalı olmasından ve Teorem 8.2'den;

$f(U_1)\cap V_1= \emptyset$ olacak biçimde

$$U_1\in g\delta pr\text{-}A(X, x_0),\ V_1\in \gamma(Y, y_2)$$

vardır.

$V_1\in \gamma(Y, y_2)$ dir. Buradan;

$x_0\in U_1$ olduğundan $f(x_0)=y_1\in f(U_1)$ olur.

$f(U_1)\cap V_1= \emptyset$ olduğundan $y_1\notin V_1$ olur. $y_2\in V_1$ dir.

Buradan $y_2 \in V_1$, $y_1 \notin V_1$ olan V_1 açığı bulunduğundan Y T_0 uzaydır.

Teorem 9.2. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ birebir fonksiyon olsun. G(f) grafiği kuvvetli gδpr-kapalı ise X uzayı gδpr-T_0 uzaydır.

İspat:

x_1, $x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun.

f fonksiyonunun birebirliğinden $f(x_1) \neq f(x_2)$ yazarız. G(f) grafik tanımından $(x_1, f(x_2)) \in (X \times Y) \setminus G(f)$dir. G(f)'in kuvvetli g$\delta$pr-kapalılığından ve Teorem 8.2.'den; $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak biçimde

$$U \in g\delta pr\text{-}A(X, x_1),\ V \in \gamma(Y, f(x_2))$$

vardır. $V \in \gamma(Y, f(x_2))$ dir.

Buradan;

$f(x_2) \notin f(U)$ olduğundan $x_2 \notin U$ olur. $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$ dir. (1)

Böylece (1) geçerli olduğundan X uzayı gδpr-T_0 uzaydır.

Sonuç 9.3. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: $(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ birebir ve örten fonksiyon olsun. G(f) grafiği kuvvetli gδpr-kapalı ise X uzayı gδpr-T_0 uzaydır ve ve Y uzayı T_0.uzaydır.

İspat:

Teorem 9.2'de f fonksiyonunun birebir ve G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr- kapalı olmasından X uzayının gδpr-T_0 olduğunu elde ederiz.

Teorem 9.3'de f fonksiyonunun örten ve G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr- kapalı olmasından Y uzayının T_0 olduğunu elde ederiz.

Buradan f fonksiyonunun birebir ve örten olması ve G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr- kapalı olmasından dolayı X uzayı gδpr-T_0 uzaydır ve Y uzayı T_0 uzaydır.

BÖLÜM 10

KUVVETLİ gδpr-KAPALI GRAFİK

VE

gδpr-T_1 UZAYLAR

Bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafik ile T_1 uzaylar ve gδpr-T_1 uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Teorem 10.1. **(**X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) örten bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği kuvvetli gδpr-kapalı ise Y uzayı T_1 uzaydır.

İspat:

y_1, $y_2 \in Y$ ve $y_1 \neq y_2$ olsun.

f fonksiyonunun örtenliğinden $f(x_0)=y_2$ olacak şekilde $\exists x_0 \in X$ vardır.

G(f) grafik tanımından $(x_0, y_1) \in (X \times Y) \setminus G(f)$dir. G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr-kapalı olmasından ve Teorem 8.2'den $f(U_1) \cap V_1 = \emptyset$ olacak biçimde

$$U_1 \in g\delta pr\text{-}A(X, x_0),\ V_1 \in \gamma(Y, y_1)$$

vardır. $V_1 \in \gamma(Y, y_1)$dir. Buradan;

$x_0 \in U_1$ olduğundan $f(x_0)=y_2 \in f(U_1)$ olur.

$f(U_1) \cap V_1 = \emptyset$ olduğundan $y_2 \notin V_1$ olur.

f fonksiyonunun örtenliğinden $f(x_1)=y_1$ olacak şekilde $\exists\ x_1 \in X$ vardır.

G(f) grafik tanımından $(x_1, y_2)\in(X\times Y)\setminus G(f)$dir. G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr-kapalı olmasından ve Teorem 8.2'den $f(U_2)\cap V_2=\emptyset$ olacak biçimde $U_2\in g\delta pr\text{-}A(X, x_1)$, $V_2\in\gamma(Y, y_2)$ vardır. $V_2\in\gamma(Y, y_2)$dir.

Buradan;

$x_1\in U_2$ olduğundan

$$f(x_1)=y_1\in f(U_2) \text{ olur. } f(U_2)\cap V_2=\emptyset$$

olduğundan $y_1\notin V_2$ olur.

Buradan

$$y_1\in V_1,\ y_2\notin V_1 \text{ ve } y_2\in V_2,\ y_1\notin V_2$$

olacak şekilde $V_1, V_2\in \gamma(Y)$ elde ederiz.

Bu nedenle Y T_1 uzaydır.

Teorem 10.2. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau)\to(Y, \sigma)$ birebir bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği kuvvetli gδpr- kapalı ise X uzayı gδpr-T_1 uzaydır.

İspat:

$x_1, x_2 \in X$ ve $x_1\neq x_2$ olsun.

f fonksiyonunun birebirliğinden $f(x_1)\neq f(x_2)$ yazarız.

G(f) grafik tanımından $(x_1, f(x_2))\in(X\times Y)\setminus G(f)$dir. G(f)'in g$\delta$pr-kapalılığından ve Teorem 8.2'den;

$f(U)\cap V=\emptyset$ olacak biçimde

$$U\in g\delta pr\text{-}A(X, x_1)$$

ve

$$V\in\gamma(Y, f(x_2))$$

vardır. $V\in\gamma(Y, f(x_2))$dir. V her açık gδpr-açık olduğundan V gδpr-açık olur. Buradan;

$f(x_2)\notin f(U)$ olduğundan $x_2\notin U$ olur.

$(x_2, f(x_1))\in(X\times Y)\setminus G(f)$dir. G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr-kapalılığından ve Teorem 8.2'den;

$f(A)\cap B=\emptyset$ olacak biçimde

$$A\in g\delta pr\text{-}A(X, x_2)$$

ve

$$B\in\gamma\ (Y, f(x_1))$$

vardır. $B\in\gamma(Y, f(x_1))$dir. B her açık gδpr-açık olduğundan B gδpr-açık olur.

Buradan; $f(x_1)\notin f(A)$ olduğundan $x_1\notin A$ olur.

Böylece U, A∈ gδpr-A(X) buluruz ki;

$$x_1\in U,\ x_2\notin U \text{ ve } x_2\in A,\ x_1\notin A$$

olur.

Buradan X uzayının gδpr-T_1 uzayı olduğunu elde ederiz.

Sonuç 10.3. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau)\rightarrow(Y, \sigma)$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği kuvvetli gδpr-kapalı ise Y uzayı T_1 uzaydır ve X uzayı gδpr-T_1 uzaydır.

İspat:

Teorem 10.3' de f fonksiyonunun birebir ve G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr- kapalı olmasından X uzayının gδpr-T_1 olduğunu elde ederiz.

Teorem 10.2' de f fonksiyonunun örten ve G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr- kapalı olmasından Y uzayının T_1 olduğunu elde ederiz.

Buradan f fonksiyonunun birebir ve örten olması ve G(f) grafiğinin gδpr-kapalı olmasından dolayı Y uzayı T_1 uzaydır ve X uzayı gδpr-T_1 uzaydır.

BÖLÜM 11

KUVVETLİ gδpr-KAPALI GRAFİK

VE

gδpr-T_2 UZAYLAR

Bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafik ile gδpr-T_2 uzaylar arasındaki ilişki incelenmiştir.

Teorem 11.1. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) fonksiyonu gδpr-sürekli olsun. X keyfi bir topolojik uzay ve Y uzayı T_2 uzay ise G(f) kuvvetli gδpr-kapalıdır.

İspat:

$\forall$(x, y)$\in$(X$\times$Y)\G(f)olsun.

Bu durumda f(x)$\neq$y dir. Y uzayı T_2 uzayı U$\cap$V$=\emptyset$ olacak biçimde

$$U\in \gamma(Y, f(x)) \text{ ve } V\in \gamma(Y, y)$$

kümeleri vardır. Buradan f fonksiyonunun gδpr-sürekliliğinden f^{-1}(U)$\in$gδpr-A(X, x)dir.

f^{-1}(U)=A diyelim. A$\in \gamma$(X, x) olur. Buradan;

$$f(A)= ff^{-1}(U)\subset U$$

olur. U$\cap$V$=\emptyset$ olduğundan f(A)$\cap$V$=\emptyset$ olur.

Bu nedenle G(f) kuvvetli gδpr-kapalıdır.

Teorem 11.2. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) fonksiyonu gδpr-açık, örten bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği kuvvetli gδpr-kapalı grafik ise Y uzayı gδpr-T_2 uzaydır.

İspat:

y_1, y_2 ∈Y ve $y_1 \neq y_2$ olsun.

f fonksiyonunun örtenliğinden f(x)=y_2 olacak şekilde ∃x∈V vardır. Diğer taraftan G(f) grafiği tanımından (x, y_1)∈(X×Y)\G(f) için G(f) kuvvetli gδpr-kapalı olduğundan ve Teorem 8.2' den;

f(U)∩V= ∅ olacak şekilde

$$U \in g\delta pr\text{-}A(X, x) \text{ ve } V \in \gamma(Y, y_1)$$

vardır. V∈γ(Y, y_1))dir. V her açık gδpr-açık olduğundan V gδpr-açık olur.

f fonksiyonunun gδpr- açık olmasından;

U∈ $g\delta pr - A(X,\ x)$ için f(U)∈ $g\delta pr - A(Y,\ y_2)$ olur. Yani f(U) hem gδpr-açıktır, hem de y_2∈f(U) dir.

Buradan

$$V \in g\delta pr\text{-}A\ (Y,\ y_1) \text{ ve } f(U) \in g\delta pr - A(Y, y_2)$$

için f(U)∩V= ∅ olduğundan Y uzayı gδpr-T_2 uzaydır.

Teorem 11.3. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) birebir ve gδpr-karasız fonksiyonu için G(f) grafiği kuvvetli gδpr-kapalı ise X uzayı gδpr-T_2 uzaydır.

İspat:

x_1, x_2 ∈X ve $x_1 \neq x_2$ olsun.

f fonksiyonunun birebirliğinden f(x_1)≠f(x_2) olur.

G(f) grafiğinin gδpr-kapalı tanımından $(x_1, f(x_2)) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için

$$f(U) \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde

$$U \in g\delta pr\text{-}A(X, x_1) \text{ ve } V \in \gamma(Y, f(x_2))$$

vardır. $V \in \gamma(Y, f(x_2))$dir. V her açık gδpr-açık olduğundan V gδpr-açık olur.

f fonksiyonu gδpr-kararsız olduğu için;

$V \in g\delta pr\text{-}A(Y, f(x_2))$ iken $f^{-1}(V) \in g\delta pr\text{-}A(X, x_2)$ olur. Buradan $U \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ dir.

Bu da X uzayının gδpr-T_2 uzay olduğunu verir.

Sonuç 11.4. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere f: (X, τ)→(Y, σ) birebir, örten ve gδpr-açık ve gδpr-kararsız bir fonksiyon olsun. G(f) grafiği kuvvetli gδpr-kapalı ise X ve Y uzaylarına gδpr-T_2 uzay olur.

İspat:

Teorem 11.2.' de f fonksiyonunun gδpr-açık, örten olmasından ve G(f) grafiğinin gδpr- kapalı olmasından Y uzayının gδpr-T_2 olduğunu elde ederiz.

Teorem 11.1.' de f fonksiyonunun birebir, gδpr-kararsız ve G(f) grafiğinin kuvvetli gδpr- kapalı olmasından X uzayının gδpr-T_2 olduğunu elde ederiz.

Buradan f fonksiyonunun birebir, örten ve $g\delta$pr-açık gδpr-kararsız olmasından ve G(f) grafiğinin gδpr- kapalı olmasından dolayı X ve Y uzayları gδpr-T_2 uzaydır.

BÖLÜM 12

KUVVETLİ gδpr-KAPALI GRAFİK

VE

KOMPAKTLIK

Bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafik ile kompakt uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Teorem 12.1. X bir topolojik uzay olmak üzere gδpr-A(X) bir topoloji olsun.

f: $X \to Y$ bir fonksiyon, Y kompakt ve G(f) kuvvetli gδpr-kapalı grafik ise f fonksiyonu gδpr-süreklidir.

İspat:

$x \in X$, $f(x) \in V$, V bir açık küme ve $y \in Y \setminus V$ olsun.

G(f) kuvvetli gδpr-kapalı grafiğinin tanımından $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için $f(U_y) \cap V_y = \emptyset$ olacak şekilde

$$U_y \in g\delta pr\text{-}A(X, x) \text{ ve } V_y \in \gamma(Y, y)$$

vardır. $\forall\ y \in Y \setminus V$ olan açık olan V_y elde ederiz.

$$\vartheta = \{V_y : y \in Y \setminus V\}$$

ailesi Y\V'nin açık kümelerinden oluşan Y\V'nin bir örtüsüdür. Y kompakt ve Y\V kapalı olduğunu biliyoruz. Buradan Y\V kompakttır. Buradan

$$Y \setminus V \subset \cup^{n}_{i=1} V_{yi}$$

olan sonlu örtü elde ederiz.

$$U=\cap^{n}_{i=1} U_{yi}$$

alalım. U gδpr-açık ve $x\in U$ olacaktır. Her i=1,2,...,n için $u\in U$ için $f(u)\notin V_{yi}$ olur. Buradan

$$f(u)\notin Y\backslash V \text{ ve } f(u)\in V$$

olur. Ohalde $f(U)\subset V$ elde ederiz.

O halde f fonksiyon gδpr-süreklidir.

Teorem 12.2. X bir topolojik uzay olmak üzere gδpr-A(X) bir topoloji olsun.

f: $X\rightarrow Y$ bir fonksiyon, Y gδpr-kompakt ve G(f) kuvvetli gδpr-kapalı grafik ise f fonksiyonu gδpr-süreklidir.

İspat:

Kabul edelimki f: $X\rightarrow Y$ bir fonksiyon, Y gδpr-kompakt ve G(f) kuvvetli gδpr-kapalı grafik olsun.

Her gδpr-kompakt uzay kompakt uzay olduğundan bir önceki teoremden f fonksiyonu gδpr-süreklidir.

BÖLÜM 13

gδpr-KAPALI GRAFİK

İLE

KUVVETLİ gδpr-KAPALI GRAFİK

ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde kuvvetli gδpr-kapalı grafik ile gδpr-kapalı grafik arasındaki ilişki incelenmiştir.

Teorem 13.1. Her kuvvetli gδpr-kapalı grafik gδpr-kapalı grafiktir.

İspat: f: $X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve G(f), f fonksiyonunun kuvvetli gδpr-kapalı grafiği olsun.

Teorem 4.2.'den

$$\forall (x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f) \text{ için } f(U) \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde X uzayında U gδpr-açık kümesi ve Y uzayında V açık kümesi $x \in U$ ve $y \in V$ olacak biçimde vardır.

Her açık küme gδpr-açık kümedir. $\forall (x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde X'de U ve Y'de V gδpr-açık kümeleri

$$x \in U \text{ ve } y \in V$$

olacak biçimde vardır.

Buradan G(f)'nin gδpr-kapalı grafik olduğunu elde ederiz.

Uyarı 13.2. Yukarıdaki teoremde ifade edilen "Her kuvvetli gδpr-kapalı grafik gδpr-kapalı grafiktir." İfadesi geçerli olup tersi doğru değildir. Bunu aşağıdaki örnekte gösterelim.

Örnek 13.3. X={a, b} ve Y={a, b, c}olsun. X ve Y üzerinde tanımlana topolojilerde sırasıyla

$$\tau=\{\emptyset, X, \{a\}\} \text{ ve } \sigma=\{\emptyset, X, \{a, c\}\}$$

olsun. f fonksiyonunu da

birim dönüşümü

$$i: X\rightarrow Y$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonun grafiği gδpr-kapalı olmasına rağmen kuvvetli gδpr-kapalı değildir.

gδpr-kapalı olduğunu gösterelim.

Örneğin,

(a, c)$\in$(X$\times$Y)\G(f) alalım.

(a, c) $\notin$G(f) için f(U)$\cap$V= $\emptyset$ olacak şekilde

$$a\in U\in g\delta pr\text{-}A(X) \text{ ve } c\in V \in g\delta pr\text{-}A(Y)$$

vardır.

$$a\in\{a\}=U\in g\delta pr\text{-}A(X) \text{ ve } f(\{a\})=\{a\}$$

olur.

Buradan f(U)$\cap$V={a}$\cap${c}= $\emptyset$dir.

Kuvvetli gδpr-kapalı olmadığını gösterelim.

(a, c) $\notin$G(f) için f(U)$\cap$V= $\emptyset$ olacak şekilde

$$a \in U \in g\delta pr\text{-}A(X) \text{ ve } c \in V \in \gamma\text{-}A(Y)$$

olan V kümesi bulunamaz.

O halde G(f) kuvvetli gδpr-kapalı grafik değildir.

BÖLÜM 14

gδpr-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde gδpr-sürekli fonksiyonların özellikleri incelenmiştir. gδpr-sürekli fonksiyonların karakterizasyonları aratırılmıştır.

Tanım 14.1. f: X→Y bir fonksiyon olsun. Her A⊂Y kapalı kümesi için f^{-1}(A)⊂X gδpr-kapalı ise f fonksiyonuna gδpr-sürekli fonksiyon denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Teorem 14.2. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve f: (X, τ)→ (Y, σ) bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun gδpr-sürekli olması için gerek ve yeter koşul her A açık kümesi için f^{-1}(Y\A) kümesinin gδpr-kapalı olmasıdır.

İspat:

f: (X, τ)→ (Y, σ) fonksiyonu gδpr-sürekli olsun. A⊂Y açık kümesini alalım. f fonksiyonu gδpr-sürekli olduğundan f^{-1}(A) gδpr-açık olacaktır. Buradan X\\f^{-1}(A) gδpr-kapalıdır.

$$X\setminus f^{-1}(A)= f^{-1}(Y\setminus A)$$

böylece f^{-1}(Y\A) gδpr-kapalıdır.

Tersine: Her A açık kümesi için f^{-1}(Y\A) kümesi gδpr-kapalı olsun. A⊂Y açık kümesini alalım. Buradan f^{-1}(Y\A) gδpr-kapalıdır. Bu durumda;

$$f^{-1}(Y\setminus A)= X\setminus f^{-1}(A)$$

ve f^{-1}(A) gδpr-açık olur.

Buradan f fonksiyonu gδpr-süreklidir.

Tanım 14.3. (X, τ) topolojik uzay olmak üzere her gδpr-kapalı küme δ-ön kapalı küme ise bu uzaya δp-regüler $T_{1\backslash 2}$ uzay denir. (Ekici ve Noiri, 2006)

Teorem 14.4. (X, τ) ve (Y, σ) δp-regüler $T_{1\backslash 2}$ uzaylar ve f: (X, τ)→ (Y, σ) gδpr-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul A⊂Y için f^{-1}(int(A)) ⊂gδpr-int(f^{-1}(A)) olmasıdır.

İspat:

f: (X, τ)→ (Y, σ) fonksiyonu gδpr-sürekli olsun. A⊂Y alalım. Bu durumda int(A) kümesi açık küme olduğundan f^{-1}(int(A)) kümesi de gδpr-açık olacaktır.

Buradan; int(A) ⊂A olur ve böylece

$$f^{-1}(\mathrm{int}(A)) \subset f^{-1}(A)$$

olacaktır. Üstelik

$$g\delta\text{pr-int}(f^{-1}(\mathrm{int}(A)) = f^{-1}(\mathrm{int}(A))$$

$$\subset g\delta\text{pr-int}(f^{-1}(A))$$

olur.

Buradan da

$$f^{-1}(\mathrm{int}(A)) \subset g\delta\text{pr-int}(f^{-1}(A))$$

olduğunu elde ederiz.

Tersine: Her A⊂Y için f^{-1}(int(A)) ⊂gδpr-int(f^{-1}(A)) olsun. A bir açık küme olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(\mathrm{int}(A)) \subset g\delta\text{pr-int}(f^{-1}(A))$$

ve

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathrm{int}(A))$$

Olacağından

$$f^{-1}(A) \subset g\delta pr\text{-}int(f^{-1}(A))$$

ve f^{-1}(A) gδpr- açık olacağından f fonksiyonu gδpr- süreklidir.

Teorem 14.5. (X, τ) ve (Y, σ) δp-regüler $T_{1\backslash 2}$ uzaylar ve f: (X, τ)→ (Y, σ) fonksiyon olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

1. f fonksiyonu gδpr- sürekli fonksiyon,
2. her A⊂Y için gδpr-cl(f^{-1}(A)) ⊂ f^{-1}(cl(A))
3. her A⊂X için f(gδpr-cl(A))⊂ cl(f(A)) olur.

İspat:

(1)⇒(2) f fonksiyonu gδpr-sürekli fonksiyon olsun. A⊂Y alalım. Buradan cl(A) kapalı olduğundan f^{-1} (cl(A)) gδpr-kapalı olur. A⊂ cl(A) olduğu açıktır. Böylece

$$f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(cl(A))$$

elde ederiz. f^{-1} (cl(A)) gδpr- kapalı olduğundan

$$g\delta pr\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(cl(A)) = g\delta pr\text{-}cl(f^{-1}(cl(A)))$$

olur.

Buradan gδpr-cl(f^{-1}(A)) ⊂ f^{-1}(cl(A))elde ederiz.

(2)⇒(3) Her A⊂Y için

$$g\delta pr\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset (f^{-1}(clA))$$

olsun. f(A)⊂Y alalım. Bu durumda

$$g\delta pr\text{-}cl(f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(cl(f(A))$$

ve buradan

$$g\delta pr\text{-}cl(A) \subset f^{-1}(cl(f(A))$$

elde ederiz.

Bu durumda

$$f(g\delta pr\text{-}cl(A)) \subset f(f^{-1}(cl(f(A)))$$

$$\subset cl(f(A))$$

olacaktır.

Yani f(gδpr-cl(A))$\subset$ cl(f(A)) olur.

(3)⇒(1) her A$\subset$X için f(gδpr-cl(A))$\subset$ cl(f(A)) olsun. A$\subset$Y kümesi kapalı bir küme olsun. Bu durumda

$$f(g\delta pr\text{-}cl(f^{-1}(A))) \subset cl(f(f^{-1}(A)))$$

$$\subset cl(A)=A$$

olacaktır.

Buradan

$$g\delta pr\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(A)$$

elde ederiz. Yani f^{-1}(A) kümesi gδpr- kapalı bir kümedir.

Böylece f fonksiyonu gδpr-süreklidir.

Teorem 14.6. (X, τ) ve (Y, σ) δp-regüler $T_{1\backslash 2}$ uzaylar ve f: (X, τ)→ (Y, σ) fonksiyonunun gδpr-sürekli olması için gerek ve yeter koşul her x∈X ve f(x) ∈A olan A açık kümesi için f(B)$\subset$A olacak biçimde x∈B olan gδpr-açık olmasıdır.

İspat:

f bir gδpr-sürekli fonksiyon olsun.

x∈X ve f(x) ∈A olan A açık bir küme olsun. f gδpr-sürekli olduğundan Buradan x∈ f^{-1}(A) ve f^{-1}(A) gδpr-açık bir kümedir. f^{-1}(A)=B diyelim. f(B)$\subset$A olur.

Tersine: Her x∈X için f(x) ∈A olan A açık kümesi için f(B)⊂A olacak biçimde x∈B olan B gδpr-açık kümesi var olsun.

A açık küme ve x∈ f^{-1}(A) olsun. Bu durumda f(x) ∈Aolduğundan f(x) ∈B⊂A olacak biçimde B gδpr-açık kümesi vardır. Buradan x ∈B⊂ f^{-1}(A) ve böylece f^{-1}(A) gδpr-açık olur.

Yani f bir gδpr-sürekli fonksiyon olur.

KAYNAKLAR

Aslan H., 2009. *Topolojik Özellikler Üzerine*. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (Yüksek Lisans Tezi).

Bandyopadhyay N. ve Bhattacharyya P., 2005. Function with Preclosed Graphs. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2)28(1): 87-93

Bhattacharyya P., 1992. A note on preopen sets. *North Bengal Univ.*, 7(1): 46-52.

Dube K. K., Lee J. Y. and Panwar O.S., 1983. A note on semiclosed graph. *Ulsan InstTech. Rep.* 14(2): 379-383.

Ekici E., 2004. (δ-pre, s)-continuous Functions. *Bull. Malay. Math. Sci. Soc.*, 27 (2) : 237-251.

Ekici E., 2005. On δ-preopen Sets. *Mathematica*, 47 (70), (2) : 157-164.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-I. *Math. Mor.*, 10 : 9-20.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-II. *Filom*, 20 (2) : 67-80.

El-Deeb N., Hasanein I.A, Mashhour A.S. and Noiri T., (1983), On p-regüler spaces. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie* (N.S.) 27(75)(4): 311-315.

Gnanambal Y., 1997. On Generalized Preregular Closed Sets in Topological Spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 28 (3) : 351-360.

Husain T., 1977. *Topology and Maps.* Plenum, New York.

Jankovic D.S., 1985. A Note on mappings of extremally disconnected spaces. *Acta. Math. Hungar*. 46(1-2): 83-92.

Kar A. an Bhattacharyya P., (1990). Some weak separation axioms. *Bull Calcutta Math. Soc.* 82(5): 415-422.

Levine N., (1963). Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces. *Amer. Math. Monthly* 70:36-41

Levine N., 1970. Generalized Closed Sets in Topology. *Rend. Circ. Mat. Palermo*,19(2): 89-96.

Long P. E., (1969). Functions with closed graphs. *Amer. Math. Monthly*.76(8): 930-932.

Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E. ve El-Deeb S. N., 1982. On precontinuous ve weak precontinuous mappings. *Proc. Math. Phys. Soc.* Egypt No. 51: 47-53.

Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E.ve Hasanein I. A., 1984. On pretopological spaces. *Bull. Math. Soc. Sci. Math.* R. S. Roumanie (N.S.) 28(76)(1): 39-45.

Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E., Hasanein I. A. ve Noiri T., 1984. Strongly compact spaces. *Delta J. Sci.* 8(1): 36-40.

Mashhour A. S., Allam A. A., Hasanein I. A., Abd El-Hakeim K. M., 1987. On strongly compactness. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 79(4): 243-248

Maki H., Umehara J. ve Noiri T., 1996. Every Topological Space is pre-$T_{1/2}$. *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, 17 : 33-42.

Pal M.C. ve Bhattacharyya P., 1996. Feeble ve strong forms of preirresolute functions. *Bull. Malaysian Math Soc.* (2)19(2): 63-75.

Palaniappan N. ve Rao K. C., 1993. Regular Generalized Closed Sets. *Kyungpook Math. J.*, 33 (2) : 211-219.

Paul R.ve Bhattacharyya P., 1992, Quasi-precontinuous function. *J. Indian Acad. Math.* 14(2): 115-126.

Paul R.ve Bhattacharyya P., 1996. Properties of quasi-precontinuous function. *Indian J. Pure Appl. Math.* 27(5): 475-486 .

Raychaudhuri S. ve Mukherjee M. N., 1993. On δ-almost Continuity and δ-preopen Sets. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 21 (4) : 357-366.

Reilly I. L. ve Vamanamurthy M. K., 1985. On α-contunuity in topological spaces. *Acta Math. Hungar.* 45(1-2): 27-32.

Stone M. H., 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology. *TAMS*, 41 : 375-381.

Thakur S. S. ve Paik P., 1987. Locally P-connected space., J. Indian Acad. Math. 9(1): 34-56.

Velicko N. V., 1968. H-Closed Topological Spaces. *Amer.Math. Soc.Transl.* 78:103-118

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Başak YILDIRIM

Doğum Yeri : Van

Doğum Tarihi : 25.06.1983

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Dumlupınar Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Yabancı Dili : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLER

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Ödemiş Devlet Hastanesi 2004-2008

Balıkesir Devlet Hastanesi 2008-

İLETİŞİM

E-posta Adresi : bynyks@gmail.com