T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASAL HALKALARDA TEK YANLI (σ,τ)-LİE İDEALLER

Yasemin BALLIKAYA

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **21/06/2010**

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

YASEMİN BALLIKAYA tarafından **PROF. DR. NEŞET AYDIN** yönetiminde hazırlanan **"ASAL HALKALARDA TEK YANLI (σ,τ) - LİE İDEALLER"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN	Doç. Dr. Vildan BİLGİN
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Sıra No:

Tez Savunma Tarihi: 21/06/2010

Prof.Dr. İsmail TARHAN

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Yasemin BALLIKAYA

TEŞEKKÜR

Bu tezi yazma ve hazırlama aşamasında yardım ve katkılarından dolayı tez danışmanım sayın Prof. Dr. Neşet AYDIN a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yasemin BALLIKAYA

SEMBOL VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\forall$	Her
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\subset$	Alt kümedir
$\not\subset$	Alt küme değildir
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\varnothing$	Boş küme
Z	R halkasının merkezi
CharR	R halkasının karakteristiği
Kerf	f homomorfizminin çekirdeği
C	R halkasının extended centroidi
S = RC	R halkasının merkezi kapanışı
$C_{\sigma,\tau}$	R halkasının (σ,τ) -merkezi
$C_R(A) = \{a \in A : [a,r] = 0, \forall r \in R\}$	A kümesinin R içindeki merkezileştiricisi

ÖZET

ASAL HALKALARDA
TEK YANLI (σ,τ) LİE İDEALLER

Yasemin BALLIKAYA
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Neşet AYDIN
21/06/2010, 89

Bu tezde, halkalarda tek yanlı (σ,τ)-Lie idealler ve türevler arasındaki ilişkiler kullanılarak halkaların değişmeliliğini araştıran makaleler verilecektir. Bunun için Bölüm 2 de asal halka için bilinmesi gereken temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bölüm 3 de 1957 yılında Posner' ın yazmış olduğu makaleden başlayarak asal halka üzerinde türev ve yarı türev kavramları verilerek bunlarla ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir. 4. Bölümde ise halka yerine ideal ve Lie ideal alınarak türev ve yarı türev için Bölüm 3 deki durumlar incelenmiştir. Son bölümde ise (σ,τ) türevli bir halkada ve onun bir ideali üzerinde değişmelilik ile ilgili sağlanan özellikler ve halkanın ideali yerine tek yanlı (σ,τ)-Lie ideali alınarak yapılan genelleştirmeler incelenerek tez sonuçlandırılmıştır.

Anahtar sözcükler : Asal halka, İdeal, Lie İdeal, Tek Yanlı (σ, τ) - Lie İdeal

ABSTRACT

ONE SIDED (σ,τ)- LIE IDEALS IN PRIME RINGS

Yasemin BALLIKAYA
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversity
Graduate School of Science and Engineering

Chair for Mathematics Thesis of Master of Science

Advisor: Professor Dr. Neşet AYDIN

21/06/2010, 89

In this thesis, the one-sided (σ, τ)-Lie ideals and derivations using the relation between the commutativity of the public will be given research articles. For this you need to know for prime rings in Chapter 2 the basic definitions and theorems are given. In Chapter 3 the 1957 Posner's been writing articles,starting from the semiderivations and derivations on prime rings related these studies examined. 4. Chapter instead of the ring ideal public and semiderivations and derivations to be the Lie ideal situation is examined in Chapter 3. In the last chapter (σ, τ)-derivation a ring and it's an ideal on the resulting commutativity with the right features and the public's right instead of the one-sided (σ, τ)-Lie ideal of taking the overall improvements by examining the thesis has been finalized.

Keywords : Prime Ring, Ideal, Lie Ideal, One-Sided (σ, τ)-Lie Ideal

İÇERİK

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Bir halkanın değişmeli olup olamadığına onun bir alt kümesi, türev veya polinom özdeşliği yardımı ile karar vermek oldukça önemli bir problemdir. Bunun için çeşitli problemler ele alınmıştır. Bunlardan bazıları türevli halkalarda yapılan çalışmalardır. Bunun yanı sıra halkanın idealleri ve Lie idealler üzerine çalışmalar yapılarak genelleştirmeler yapılmaya devam etmektedir.

Halkalarda tek yanlı (σ,τ)- Lie idealler yardımı ile halkanın değişmeli olup olmadığına karar vermek, bir halkanın ideali, tek yanlı idealleri veya Lie idealleri ile yapılan çalışmaları genelleştirmiş olacaktır.

Asal halkalarda türev ile ilgili makaleler 1957 yılında Posner ın "Derivations in Prime Rings" adlı makalesi ile başlamıştır. Onun temel teoremleri olan d: $R \to R$ bir türev olmak üzere

1. Eğer her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.
2. d_1, d_2, R halkasının türevleri olmak üzere d_1d_2 türev ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.
3. Her $a \in R$ için $[a, d(a)] \in Z$ ise $d = 0$ veya R değişmeli bir halkadır.

ifadeleri ve P.H. Lee ve T.K. Lee lerin 1981 yılında buldukları ifadeler, 1980 yılında Jeffrey Bergen, İ. N. Herstein ve Jeanne Wald Kerr ve 1983 yılında P.H. Lee ve T.K. Lee tarafından halka yerine ideal alarak 1) $U \not\subset Z$ Lie ideal ve $td(U) = 0$ $(d(U)t = 0)$ ise $t = 0$ dır. 2) Eğer $a \in R$ ve $[a, d(U)] \subseteq Z$ ise $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir. 3) $d^2(U) \subseteq Z$ ise $U \subseteq Z$ dir. 4) $[d(U), d(U)] \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir. 5) Eğer $d\delta(U) \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir. 6) Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise $U \subset Z$ dir. 7) Eğer $ad(U) \subset Z$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir. olduğu gösterilerek genelleştirmeler yapılmıştır. Öte yandan asal halkada türev yerine yarı türev alınarak benzer özellikler gösterilmiştir. Bu incelemelerden sonra türev yerine (σ,τ) türevi alınarak asal halka üzerindeki çalışmalar incelenmiş ve bunların halka yerine halkanın bir ideali ve daha sonra halkanın bir Lie ideali alınarak sırasıyla 1984 yılında Hirano, Y. ve Tominaga, 1988 yılında K. Kaya ve 1992 yılında H. Kandamar ve K. Kaya tarafından genelleştirmeleri yapılmıştır. Son olarak bir halkada türev ve onun tek yanlı (σ,τ)-Lie idealleri alınarak halkanın değişmeli olmasını araştıran makaleler incelenerek tez sonuçlandırılmıştır.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1. Bir R kümesi üzerinde,

"+" : $RxR \to R$, $(a, b) \to a + b$ ve "·" : $R \to R$, $(a, b) \to a \cdot b$,

işlemleri tanımlansın. Buna göre,

l) Her a, b, $c \in R$ için, $a + (b + c) = (a + b) + c$ (birleşme özelliği)

2) Her $a \in R$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olacak biçimde $0 \in R$ var (toplamsal birim)

3) Her $a \in R$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olacak biçimde $-a \in R$ var (ters eleman)

koşulları sağlanıyorsa, R kümesine **grup** denir. Ayrıca

4) Her a, $b \in R$ için $a + b = b + a$ (değişme özelliği)

5) Her a, b, $c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ (birleşme özelliği)

6) Her a, b, $c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ (dağılma özelliği)

koşulları da sağlanıyorsa, R kümesine bir **halka** denir.

Tanım 2.2. R bir halka ve $\varnothing \neq A \subset R$ olsun. Eğer A, R deki işlemlere göre bir halka oluyorsa, A kümesine R halkasının bir **alt halkası** denir.

Tanım 2.3. $\varnothing \neq A \subset R$ toplamsal alt grubu için, $AR = \{ar : a \in A, r \in R\} \subset A$ ise A ya R halkasının **sağ ideali** ve $RA = \{ra : a \in A, r \in R\} \subset A$ ise A ya R halkasının **sol ideali** denir. Eğer her ikisi birden sağlanıyorsa A ya, R halkasının bir **ideali** denir.

Tanım 2.4. R bir halka olmak üzere $Z = \{z \in R \mid zx = xz \ , \ \forall x \in R\}$ şeklinde tanımlanan kümeye R halkasının **merkezi** denir.

Tanım 2.5. R bir halka, A, B ve P, R halkasının idealleri olsun. $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ koşulu sağlanıyorsa, P ye asal ideal denir.

Tanım 2.6. (0) ideali asal ideal olan halkaya **asal halka** denir.

Önerme 2.1. R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

1) R bir asal halkadır.
2) a, $b \in R$ için $aRb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.
3) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.
4) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 2.7. $n \in Z^+$ tamsayısı, her $a \in R$ için $na = 0$ olacak biçimde en küçük tamsayı ise n ye R halkasının karakteristiği denir. Char R = n ile gösterilir.

Tanım 2.8. R bir halka ve A, R halkasının toplamsal bir alt grubu olsun. Her $x, y \in R$ için $xy - yx \in A$ oluyorsa A ya **Lie halkası** denir.

Tanım 2.9. A bir Lie halkası ve $U \subset A$ olan toplamsal bir alt grubu olsun. Her $u \in U$ ve her $a \in A$ için $ua - au \in U$ oluyorsa, U ya A nın bir **Lie ideali** denir.

Uyarı 2.1. U, R asal halkasında sıfırdan farklı bir Lie ideal ise $[U,U]$, R halkasında bir Lie idealdir.

İspat : U Lie ideal olmak üzere $[U,U] = \left\{ \sum_{i}^{\text{sonlu}} [u_i, v_i] : u_i, v_i \in U \right\}$ kümesinin Lie ideal olduğu gösterilsin. Burada $x = \sum_{i=1}^{n} [u_i, v_i]$, $y = \sum_{j=1}^{m} [t_j, s_j] \in [U,U]$ elemanları için $u_i, v_i, t_j, s_j \in U$ olup $k = 1,\ldots,n$ için $a_k = u_i$, $b_k = v_i$ ve $k = n+1,\ldots,n+m$ için $a_k = t_j$, $b_k = s_j$ olmak üzere $x\text{-}y = \sum_{k=1}^{n+m} [a_k, b_k] \in [U,U]$ bulunur. Ayrıca her $r \in R$, her $x \in [U,U]$ için U nun Lie ideal olması kullanılarak benzer indis işlemleri yapılırsa $[r,x] \in [U,U]$ olur. O halde $[U,U]$, R halkası üzerinde bir Lie idealdir.

Önerme 2.2. Her ideal bir Lie idealdir.

İspat : U bir ideal ise her $u \in U$ ve her $a \in R$ için $ua \in U$ ve $au \in U$ olur. U toplamsal alt grup olduğundan $ua - au \in U$ olur. O halde U bir Lie idealdir.

Tanım 2.10. $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesi komütatör çarpımı olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

eşitliğine **Jacobi özdeşliği** denir.

Tanım 2.11. R bir halka, $\sigma, \tau : R \to R$ iki dönüşüm olsun. $x, y \in R$ için $x\sigma(y) - \tau(y)x$ ifadesi $[x,y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilsin. R halkasının bir U toplamsal alt grubu için

(1) $[U,R]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U ya R halkasının **(σ,τ)-sağ Lie ideali** denir.

(2) $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U ya R halkasının **(σ,τ)-sol Lie ideali** denir.

(3) U, R halkasının hem (σ, τ)-sağ Lie ideali ve hem de (σ, τ) sol Lie ideali ise U ya R halkasının **(σ, τ)- Lie ideali** denir.

R halkasının her Lie ideali “1”, R halkasının özdeşlik dönüşümü olmak üzere (1,1)-sağ, sol (iki yanlı) Lie idealidir.

Tanım 2.12. $C_{\sigma,\tau} = \{c\in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c, \ \forall x\in R\}$ kümesine R halkasının **(σ, τ)- merkezi** denir.

Tanım 2.13. d : R→R tanımlı bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer,

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

ise d ye R halkasının bir **türevi** denir.

Tanım 2.14. R bir halka, f : R → R tanımlı bir toplamsal dönüşüm ve g : R → R tanımlı bir fonksiyon olmak üzere her x, y∈R için;

1. $f(xy) = f(x)g(y) + xf(y) = f(x)y + g(x)f(y)$
2. $f(g(x)) = g(f(x))$

koşulları sağlanıyorsa f dönüşümüne R halkası üzerinde bir **yarı türev** denir.

Tanım 2.15. σ : R → R ve τ : R→ R tanımlı, R halkasının iki otomorfizması ve

$$d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$$

koşulunu sağlayan toplamsal d dönüşümüne bir **(σ,τ)- türevi** denir.

Tanım 2.16. R halkasında a∈R sabit bir eleman olmak üzere $d_a : R \to R$ tanımlı dönüşümü, her x∈ R için $d_a(x) = [a,x]$ olarak tanımlansın. d_a ya R halkasının a elemanı tarafından belirlenmiş **iç türevi** denir.

Tanım 2.17. R halkasında a∈R sabit bir eleman olmak üzere $d_a : R \to R$ dönüşümü her x∈R için $d_a(x) = [a, x]_{\sigma,\tau}$ olarak tanımlansın. d_a ya **(σ,τ) -iç türev** denir.

Tanım 2.18. R bir halka olsun. a∈R için $a^n = 0$ olacak biçimde bir n tamsayısı var ise a elemanına "**nilpotent eleman**" denir. Bu şekildeki n tamsayılarının en küçüğüne ise a elemanının "**nilpotentlik indeksi**" denir.

Tanım 2.19. Her elemanı nilpotent eleman olan ideale **nilpotent ideal** denir.

Önerme 2.3. Bir asal halkanın merkezinde sıfırdan farklı nilpotent ideal yoktur.

Önerme 2.4. Asal halkada sıfırdan farklı tek taraflı idealinin merkezileştiricisi halkanın merkezince kapsanır. Eğer halkanın merkezi sıfırdan farklı bir ideal ise halka değişmelidir.

Tanım 2.20. R bir halka ve M bir toplamsal değişmeli grup olmak üzere $\alpha : MxR \to M$, (m, r)→ mr ve β :RxM→M , (r, m) →rm dönüşümleri tanımlansın. Bu işlemler altında her m, m_1, m_2 ∈M ve a, b∈R için

(i) $\alpha(m, a+b) = \alpha(m, a) + \alpha(m, b)$

(ii) $\alpha(m_1 + m_2, a) = \alpha(m_1, a) + \alpha(m_2, a)$

(iii) $\alpha(m, ab) = \alpha(ma, b)$

koşulları sağlanıyorsa M'ye **sağ R-modül**,

(i) $\beta\ (a + b, m) = \beta(a, m) + \beta(b, m)$

(ii) $\beta(a, m_1 + m_2) = \beta(a, m_1) + \beta(a, m_2)$

(iii) $\beta\ (ab, m) = \beta(a, bm)$

koşullarını sağlıyorsa M'ye **sol R-modül** denir. M hem sağ hem sol R-modül ise M'ye **R-bimodül** denir.

Tanım 2.21. A ve B herhangi iki R-bimodül ve $f : A \to B$ bir dönüşüm olsun. Her $a_1, a_2 \in A$, $r \in R$ için

(i) $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

(ii) $f(ar) = f(a)r$

koşulları sağlanıyorsa f'ye **sağ R-modül homomorfizmi** denir. Ayrıca (ii) özelliği $f(ra) = rf(a)$ şeklinde ise f'ye **sol R-modül homomorfizmi** denir.

Tanım 2.22. R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu durumda,

$$M = \{(U, f) \mid f : U \to R \text{ sağ R-modül homomorfizm}\}$$

kümesi üzerinde aşağıdaki biçimde tanımlanan $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.
$(U, f) \approx (V, g)$ olması için gerek ve yeter koşul R halkasının sıfırdan farklı $W \subset U \cap V$ ideali üzerinde $f = g$ dir.

$cl(U, f) = \hat{f}$ ve denklik sınıflarının kümesi Q olsun. Buna göre,

$$\hat{f} + \hat{g} = cl(U \cap V, f + g)$$

$$\hat{f}\hat{g} = cl(VU, fg)$$

işlemlerine göre Q, R halkasını kapsayan birimli bir asal halkadır. Bu halkaya **Martindale Kesirler halkası** denir. R halkası üzerinde tanımlı sağ Martindale Kesirler Halkası $Q_r(R)$ ile gösterilir ve bu halka aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $R \subseteq Q_r(R)$

(ii) $q \in Q_r(R)$ olmak üzere R halkasının sıfırdan farklı bir I ideali için $qI \subseteq R$ dir.

(iii) $q \in Q_r(R)$ olmak üzere R halkasının sıfırdan farklı bir I ideali için $qI = 0$ oluyorsa $q = 0$ dır.

(iv) I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $\varphi : I \to R$ bir sağ R-modül dönüşümü ise her $x \in R$ için $\varphi(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R)$ vardır.

Tanım 2.23. Q halkasının merkezi

$$C = \{ \hat{x} \in Q : \hat{x}\hat{q} = \hat{q}\hat{x}, \forall \hat{q} \in Q \}$$

dir ve bu kümeye **R halkasının genişletilmiş merkezi (extended centroidi**) denir. C kümesi bir cisimdir.

Tanım 2.24. R bir halka ve C, R halkasının Q içindeki genişletilmiş merkezi olmak üzere RC kümesine **merkezi kapanış** denir ve R_C ile gösterilir.

Önerme 2.5. (Brauer's Trick) Herhangi bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat : $(G,\circ)$ bir grup ve A, B, G nin G = $A \cup B$ olan iki öz alt grubu olarak düşünülsün. Kabul edelim ki $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ olsun. O halde $x \in$ A ve $x \notin$ B olan ve y $\in$ B ve $y \notin$ A olan x, y $\in$ G vardır. O halde $x \circ y \in$ G = $A \cup B$ olur. Bileşke tanımından $x \circ y$ $\in$ A veya $x \circ y \in$ B olmalıdır. $x \circ y \in$ A ise x elemanının $\circ$ işlemine göre tersi –x olmak üzere A bir grup olduğundan y = $(-x) \circ x \circ y \in$ A bulunur. Bu ise $y \notin$ A ile çelişir. Öyleyse $x \circ y \in$ B olur. Buradan y elemanının $\circ$ işlemine göre tersi –y olmak üzere B bir grup olduğundan x = $x \circ y \circ$ (-y) $\in$B bulunur. Bu da $x \notin$ B ile çelişir. O halde kabul yanlıştır. Yani $A \subset B$ veya $B \subset A$ olur. $A \subset B$ ise kapsama tanımından $A \cup B \subset B$ olup $G \subset B$ elde edilir. Öte yandan $B \subset G$ her zaman vardır. O halde G = B bulunur. Diğer taraftan $B \subset A$ ise $A \cup B \subset A$ olacağından $G \subset A$ bulunur. $A \subset G$ her zaman var olduğu için G = A elde edilir. O halde G = $A \cup B$ olan iki öz alt grup var ise G = A veya G = B olur.

Önerme 2.6. R asal halka olsun. Eğer $a \neq 0$, a, b $\in$ R elemanları ve her $x \in$ R için axb = bxa sağlanıyorsa $\lambda \in$ C olmak üzere b = λa olarak yazılır.

Önerme 2.7. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, 2x $\in$ Z ise $x \in$ Z olur.

İspat : 2x $\in$ Z ise her a $\in$ R için $[2x,a] = [x+x,a] = 2[x,a] = 0$ olur. char$R \neq 2$ olduğundan her a $\in$ R için $[x,a] = 0$ bulunur. O halde x $\in$ Z elde edilir.

Önerme 2.8. Bir R asal halkasında x $\in$ Z ve xy $\in$ Z ise x = 0 veya y $\in$ Z olur.

İspat : xy $\in$ Z olduğundan her a $\in$ R için $[xy,a] = [x,a]y + x[y,a] = x[y,a] = 0$ olur. Burada x $\in$ Z olduğundan 0 = $xR[y,a]$ bulunur. R asal halka olduğundan x = 0 veya her a $\in$ R için $[y,a] = 0$ olur. Buradan x = 0 veya y $\in$ Z elde edilir.

Önerme 2.9.[Herstein, 1969, Lemma 1.3] R halkası sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve 2x = 0 iken x = 0 olan bir halka olsun. Kabul edelim ki $(0) \neq$ U, R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olsun. O zaman $U \subseteq Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat : Kabul edelim ki U alt halkası değişmeli olmasın. O zaman $xy - yx \neq 0$ olacak şekilde $x, y \in U$ elemanları vardır. Herhangi $r \in R$ için $x(yr) - (yr)x \in U$ olur. Öte yandan $x(yr) - (yr)x = (xy - yx)r + y(xr - rx) \in U$ olur. Bu ifade de $y, xr - rx \in U$ ve U alt halka olduğundan $y(xr - rx) \in U$ bulunur. Böylece her $r \in R$ için $(xy - yx)r \in U$ elde edilir. Yani

$$(xy - yx)R \subseteq U \tag{2.1}$$

olur. U Lie ideal olduğundan her $r, s \in R$ için

$$((xy - yx)r)s - s((xy - yx)r) \in U$$

bulunur. Burada (2.1) eşitliği kullanılırsa

$$R(xy - yx)R \subseteq U$$

elde edilir. Burada her asal halka aynı zamanda yarı asal olduğundan $R(xy - yx)R = 0$ ise $(R(xy - yx))^2 = (0)$ olur. Bu durumda R halkasının sıfırdan faklı nilpotent ideali olmadığı için $xy - yx = 0$ bulunur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $R(xy - yx)R \neq (0)$ olur. Şimdi kabul edelim ki U değişmeli alt halka olsun. Her $a \in U$, her $x, y \in R$ için $ax - xa \in U$ ve U değişmeli halka olduğundan

$$a(a(xy) - (xy)a) = (a(xy) - (xy)a)a$$
$$axay - axya = axya - xaya$$

olur. Yani düzenleme yapılırsa

$$0 = ax(ay - ya) - xa(ay - ya)$$
$$= (ax - xa)(ay - ya)$$

elde edilir. Burada y yerine x yazılır ve U değişmeli olduğundan düzenleme yapılırsa

$$0 = (ax - xa)R(ax - xa)$$
$$= R(ax - xa)^2$$

bulunur. Bu durum R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali olmadığından her $x \in R$ için $ax - xa = 0$ elde edilir. Yani her $a \in U$ için $a \in Z$ bulunur. O halde $U \subseteq Z$ olur. Bu ise ispatı bitirir.

Önerme 2.10.[Bell ve Martindale, 1987, Lemma 1] T, R asal halkasında bir endomorfizm ve U, R asal halkasının sol ideali olsun. O zaman

(i) Eğer her $u \in U$ için $T(u) = u$ ise T, R asal halkasında özdeşlik dönüşümüdür

(ii) T, U üzerinde birebir ise R üzerinde de birebirdir.

İspat : (i) Her $r \in R$, her $u \in U$ için $ru \in U$ olur. Yani $T(ru) = T(r)T(u) = T(r)u = ru$ olur. Buradan $(T(r) - r)U = 0$ bulunur. $RU \subset U$ ve R asal halka olduğundan $U = 0$ veya her $r \in R$ için $T(r) = r$ elde edilir. $U \neq 0$ olduğundan T özdeşlik dönüşümü bulunur.

(ii) Burada T, U üzerinde birebir olduğundan $KerT_U = 0$ olur. $(KerT)U \subseteq KerT \cap U \subseteq \{0\}$ olduğundan $(KerT)U = \{0\}$ olur. O halde her $a \in KerT$ ve her $u \in U$ için $au = 0$ olduğundan $r \in R$ olmak üzere her $r \in R$ için $aru = 0$ bulunur. Burada R asal halka olduğundan her $a \in KerT$ için $a = 0$ veya $U = \{0\}$ olur. $U \neq \{0\}$ olduğundan $KerT = \{0\}$ elde edilir. Yani T, R üzerinde birebirdir.

Önerme 2.11.[Bell ve Martindale, 1987, Lemma 2] R bir asal halka, U, R halkasında sıfırdan farklı bir sol ideal olsun. Eğer T, özdeşlik dönüşümünden farklı, birebir ve U üzerinde merkezileşen bir endomorfizm ve U idealinin sıfırdan farklı bir elemanını sabit bırakıyorsa R halkası değişmelidir.

Teorem 2.1.[Bell ve Martindale, 1987, Teorem 2] R bir asal halka ve $U \neq 0$, R halkasından sıfırdan farklı bir sol ideal olsun. Eğer $T \neq I$, U idealinde birebir ve merkezileştiren bir endomorfizm ise R değişmelidir.

İspat : Burada Önerme 2.10 da (i) göz önüne alınırsa T, R üzerinde özdeşlikten farklı olduğundan T, U üzerinde de özdeşlikten farklıdır. O halde her $x \in U$ için $[T(x), x] \in Z$ olduğundan ifadeyi lineerleştirirsek her $x, y \in U$ için

$$[T(x+y), x+y] = [T(x)+T(y), x+y]$$
$$= [T(x), x] + [T(x), y] + [T(y), x] + [T(y), y]$$

olur. Burada Z toplamsal grup olduğundan

$$[T(x), y] + [T(y), x] \in Z, \ \forall x, y \in U \qquad (2.2)$$

bulunur. (2.2) eşitliğinde y yerine x^2 yazılırsa

$$[x, T(x^2)] + [x^2, T(x)] \in Z, \ \forall x \in U$$

elde edilir. Yani

$$2T(x)[x, T(x)] + 2x[x, T(x)] \in Z, \ \forall x \in U$$

olur. Bu ifadeyi x ile değişmeli yaparsak

$$0 = [x, 2T(x)[x, T(x)]] + [x, 2x[x, T(x)]]$$
$$= 2[x, T(x)]^2 + 2[x, x][x, T(x)] = 2[x, T(x)]^2$$

bulunur. Önerme 2.3 gereği $2[x, T(x)] = 0$ olur. Bu ifadeyi lineerleştirirsek

$$0 = 2([x,T(y)]+[y,T(x)]),\ \forall\, x, y \in U$$

elde edilir. Burada $[xy+yx,T(x)]+[x^2,T(y)] = 2x([x,T(y)]+[y,T(x)])+2[x,T(x)]y = 0$ olduğundan

$$0 = [xy+yx,T(x)]+[x^2,T(y)],\ \forall\, x, y \in U \quad (2.3)$$

olur. (2.3) eşitliğinde y yerine $T(x)x^2$ yazarsak

$$0 = [x^2,T^2(x)]T(x^2),\ \forall\, x \in U$$

elde edilir. Bu kez (2.3) eşitliğinde y yerine T(x)x yazarsak

$$0 = [x,T(x)]^4,\ \forall\, x \in U$$

elde edilir. Burada yine Önerme 2.3 gereği her $x \in U$ için $[x,T(x)] = 0$ olur. O halde bu ifadeyi lineerleştirirsek

$$0 = [T(x),y]+[T(y),x],\ \forall\, x, y \in U \quad (2.4)$$

bulunur. (2.4) eşitliğinde y yerine xy yazarsak

$$\begin{aligned} 0 &= [T(x),xy]+[T(xy),x] \\ &= x[T(x),y]+T(x)[T(y),x] \\ &= (x-T(x))[T(x),y] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada y yerine $t \in U$ için ty yazarsak

$$0 = (x-T(x))tU[T(x),y],\ \forall\, t \in U$$

olur. R asal halka olduğundan her $x \in U$ için T(x) = x veya her $x, y \in U$ için $U[T(x),y] = 0$ bulunur. Hipotezden $T \neq I$ olduğundan her $x, y \in U$ için $U[T(x),y] = 0$ elde edilir. Bu kez (2.4) eşitliğinde x yerine xy yazarsak

$$0 = [T(x),y](y-T(y)),\ \forall\, x, y \in U$$

elde edilir. Burada y yerine $t \in R$ olmak üzere yt yazıp R'nin asal halka olması kullanılırsa

$$0 = [T(x),y],\ \forall\, x, y \in U \text{ veya } 0 = U(y-T(y)),\ \forall\, y \in U$$

bulunur. Eğer her $y \in U$ için $[T(x),y] = 0$ ise $T(U) \subset C_R(U) \subset Z$ olduğundan $U \subset Z$ olur. Bu ise T birebir olduğundan R halkasının değişmeli olması anlamına gelir. O halde her $y \in U$ için U(y – T(y)) = 0 olmalıdır.

Yani Uy = UT(y) olur. Burada y yerine yx yazarsak Uyx = UT(y)T(x) bulunur. Öte yandan her $x, y \in U$ için $U[T(x),y] = 0$ olduğundan UT(x)y = UyT(x) olur. Her ikisi birleştirilirse her x, y $\in$ U için $U[x,y] = 0$ bulunur. Burada eğer bir a $\in$ U için T(a) = a oluyorsa R değişmelidir. O zaman kabul edelim ki böyle bir a olmasın. Kabul edelim ki a $\in$ U için $a^3 \neq 0$ olsun. Burada $[a, T(a)] = 0$ olduğundan a^2 = aT(a) = T(a)a ve a(a – T(a)) = 0 olur. Her x, y $\in$ R, her a $\in$ U için 0 = $a[xa, ya]$ olup axaya = ayaxa elde edilir. O halde axa = $\lambda(x)$a olan $\lambda(x) \in$ C vardır. $[axa, a] = [\lambda a, a] = \lambda[a, a] = 0$ ve $axa^2 = a^2xa$ olduğundan $a^2 = \lambda a$ olur. O halde $a = \lambda^{-1}a^2 = \lambda^{-1}aT(a) = \lambda^{-1}T(a)a$ olur. Yani a^2 = aT(a) ve a(T(a) – a) = 0 olur. Buradan

$$T(a(T(a) - a)) = T(a)(T^2(a) - T(a)) = 0,\ a \in U \tag{2.5}$$

elde edilir. Burada tekrar T dönüşümünü uygularsak

$$T^2(a)(T^3(a) - T^2(a)) = 0,\ a \in U \tag{2.6}$$

bulunur. (2.5) eşitliğini $\lambda^{-1}a$ ile çarpıp $\lambda^{-1}aT(a) = 0$ olduğunu kullanırsak

$$a(T^2(a) - T(a)) = 0,\ a \in U \tag{2.7}$$

$$T(a)(T^3(a) - T^2(a)) = 0,\ a \in U \tag{2.8}$$

olur. (2.8) eşitliğini a ile çarparsak $aT(a) = a^2$ olmasını kullanırsak

$$a^2(T^3(a) - T^2(a)) = 0,\ a \in U \tag{2.9}$$

bulunur. (2.6) ve (2.8) eşitliğinde

$$(T^2(a) - T(a))(T^3(a) - T^2(a)) = 0 \tag{2.10}$$

olur. Buradan her $x \in$ R için

$$\begin{aligned} 0 &= \left[a^2 + (T^2(a) - T(a))xa, T(a^2) + (T^3(a) - T^2(a))T(xa)\right] \\ &= \left[a^2, T(a^2)\right] + \left[a^2, (T^3(a) - T^2(a))T(xa)\right] + \left[(T^2(a) - T(a))xa, T(a^2)\right] \\ &\quad + \left[(T^2(a) - T(a))xa, (T^3(a) - T^2(a))T(xa)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. (2.5), (2.9) ve (2.10) eşitlikleri kullanılarak gerekli işlemler yapıldığında

$$0 = (T^2(a) - T(a))^2xa^3,\ \forall x \in R$$

bulunur. Burada R asal halka olduğundan $a^3 = 0$ veya $(T^2(a) - T(a))^2 = 0$ olur. $a^3 \neq 0$ olduğundan $T(T(a) - a)^2 = 0$ olmalıdır. O halde $(T(a) - a)^2 = 0$ olur. Buradan

$$0 = T(a^2) - 2aT(a) + a^2 = T(a^2) - a^2,\ a \in U$$

olur. Bu ise T dönüşümünün a^2'yi sabit bırakması anlamına gelir. O halde çelişki elde edildi. O zaman T, $x \in$ U elemanını sabit bırakır. Böylece R halkasının değişmeli bulunur.

Teorem 2.2.[Herstein, 1976, Teorem 2.1.2] R bir halka, A, R nin bir alt halkası ve Lie ideali olsun. O zaman A, $R\left[A,A\right]R$ de kapsanan bir idealdir.

Burada R yarı asal halka ise

(i) Eğer A değişmeli değilse A, R nin sıfırdan farklı idealini kapsar.

(ii) Eğer A değişmeli ise $a\in A$ için $a^2 \in Z$ olur.

(iii) Eğer A değişmeli ve CharR $\neq 2$ ise $A \subset Z$ olur.

Teorem 2.3.[Herstein, 1969, Teorem 1.4] R karakteristiği ikiden farklı bir halka olsun. Eğer $a\in R$ için $a\notin Z$, $a^2\in Z$ ve her $x\in R$ için $(ax + xa)^4\in Z$ ise R merkezi 4 boyutlu basit cebirdir.

Önerme 2.12.[Breaser, 1993, Lemma 2.1] R bir asal halka, d ve g, R halkasının türevleri ve her $x, y\in R$ için,

$$d(x)g(y) = g(x)d(y) \tag{2.11}$$

olsun. $d \neq 0$ ise her $x\in R$ için, $g(x) = \lambda d(x)$ olacak biçimde en az bir λ elemanı vardır.

İspat: (2.11) özdeşliğinde, $z\in R$ olmak üzere, y yerine yz yazılır, türev tanımı ve (2.11) eşitliği kullanılırsa

$$d(x)yg(z) = g(x)yd(z),\ \forall\ x, y, z \in R \tag{2.12}$$

elde edilir. (2.12) ifadesinde, z yerine x yazarak $d(x)yg(x) = g(x)yd(x)$ bulunur. Kabulümüzden, $d \neq 0$ olduğu için $d(x_0) \neq 0$ olacak biçimde en az bir tane x_0 elemanı vardır. Önerme 2.6 dan $d(x_0) \neq 0$ olarak seçilen her $x_0\in R$ için,

$$g(x_0) = \lambda(x_0)d(x_0)$$

olacak biçimde en az bir $\lambda(x_0)$ elemanı vardır. $d(x_0) \neq 0$ ve $d(z_0) \neq 0$ olacak şekilde x_0 ve z_0 elemanları seçilir ve (2.12) özdeşliği bu elemanlar için düzenlenirse $d(x_0)y\lambda(z_0)d(z_0) = (x_0)d(x_0)yd(z_0)$ bulunur. Yani,

$$0 = (\lambda(x_0) - \lambda(z_0))d(x_0)yd(z_0)\ ,\ \forall\ y \in R$$

elde edilir. Yukarıda R nin asal halka olması kullanılırsa $(\lambda(x_0) - \lambda(z_0))d(x_0) = 0$ veya $d(z_0) = 0$ olur. $d(z_0) \neq 0$ seçildiği için $(\lambda(x_0) - \lambda(z_0))d(x_0) = 0$ elde edilir. $d(x_0) \neq 0$ olduğu da kullanılırsa $\lambda(x_0) = \lambda(z_0)$ bulunur. Bu ise, λ nın temsilcilerden bağımsız olarak seçilmesi demektir. O halde, $d(x) \neq 0$ olacak biçimde seçilen her $x\in R$ için $g(x) = \lambda(x)d(x)$ olacak şekilde bir $\lambda\in C$ vardır.

Şimdi $d(x_0) = 0$ olacak biçimde bir $x_0\in R$ seçilir ve (2.12) ifadesi bu eleman için düzenlenirse,

$$0 = g(x_0)yd(z),\ \ \forall\ y, z\in R$$

olur. R nin asal halka olmasından $g(x_0) = 0$ veya her $z \in R$ için, $d(z) = 0$ olur. Kabulümüzden $d \neq 0$ olduğu için $g(x_0) = 0$ elde edilir. O halde,
$0 = g(x_0) = \lambda.0 = \lambda d(x_0)$ biçiminde yazılır. Böylece $d(x) = 0$ olan her $x \in R$ için $g(x) = \lambda d(x)$ sağlanır.

O halde, her $x \in R$ için, $g(x) = \lambda d(x)$ olacak biçimde en az bir λ elemanı vardır. Böylece ispat sonlanır.

Ayrıca aşağıdaki özdeşlikler sıkça kullanılır.

(1) $\left[[x,y],z\right]+\left[[y,z],x\right]+\left[[z,x],y\right]=0$

(2) $[xy,z]_{\sigma,\tau} = x[y,z]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(z)]y = x[y,\sigma(z)] + [x,z]_{\sigma,\tau}\, y$

(3) $\left[[x,y]_{\sigma,\tau},z\right]_{\sigma,\tau} = \left[[x,z]_{\sigma,\tau},y\right]_{\sigma,\tau} + \left[x,[y,z]\right]_{\sigma,\tau}$

(4) $[x,yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\,\sigma(z)$

BÖLÜM 3
TÜREVLİ VE YARI TÜREVLİ HALKALAR

Bu bölümde Posner, E. C., Awtar, R. ve Herstein, İ. N. tarafından R, $\mathrm{Char}R \neq 2$ olan bir asal halka, d bir türev ve $a \in R$ olmak üzere ad(R) = 0, $[a, d(a)] \in Z$, $[a, d(R)] \subseteq Z$, $[d(R), d(R)] \subseteq Z$, $d_1 d_2(R) \subseteq Z$ ve her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ olması durumunda halkanın değişmeli olduğunu gösteren çalışmalar ile Chang, Jui-Chi tarafından R bir asal halka, $a \in R$ ve f, g örten fonksiyonu ile belirlenen bir yarı türev olmak üzere $f(R) \subset Z$, $af(R) \subset Z$ ve $\mathrm{Char}R \neq 2$ olmak üzere $[a, f(R)] \subset Z$, $[f(R), f(R)] \subset Z$, $f_1 f_2(R) \subset Z$ ve her $a \in R$ için $[a, f(a)] \in Z$ olması durumunda halkanın değişmeli olduğunu gösteren çalışmalar incelenmiştir.

3.1 Türevli Halkalar

Posner, E. C., 1957

Lemma 3.1.1. R bir asal halka, d, R halkasında bir türev ve $a \in R$ olsun. Eğer her $x \in R$ için ad(x) = 0 ise a = 0 veya d = 0 dır.

İspat : Hipotezden her x, y $\in$ R için 0 = ad(xy) = ad(x)y + axd(y) = axd(y) olur. Burada her $y \in R$ için

$$0 = aRd(y)$$

bulunur. R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } d(y) = 0, \forall\ y \in R$$

elde edilir. Bu da a = 0 veya d = 0 demektir.

Lemma 3.1.2. R bir asal halka, p, q, r $\in$ R ve her a $\in$ R için paqar = 0 ise p = 0 veya q = 0 veya r = 0 dır.

İspat : Burada a, b $\in$ R olmak üzere a yerine a + b yazılarak ifade lineerleştirilir ve her $a \in R$ için paqar = 0 olması kullanılırsa

$$0 = paqbr + pbqar\ ,\ \forall\, a, b \in R$$

elde edilir. Eğer sabit bir a elemanı için pa = 0 ise her $b \in R$ için pbqar = 0 bulunur. R asal halka olduğundan

$$p = 0 \text{ veya } qar = 0$$

bulunur. Burada her $t \in R$ için pat = 0 olduğundan ifade

$$p = 0 \text{ veya } qatr = 0 \,,\ \forall t \in R$$

şeklini alır. O halde yine R asal halka olduğundan

$$p = 0 \text{ veya } qa = 0 \text{ veya } r = 0$$

olur. Bu kez a yerine aqar yazılırsa

$$p = 0 \text{ veya } qaqar = 0 \text{ veya } r = 0 \,,\ \forall a \in R$$

elde edilir. Eğer $p = 0$ veya $r = 0$ ise ispat biter. O halde her $a \in R$ için $qaqar = 0$ olmalıdır. Burada a yerine $a + b$ yazarak lineerleştirir ve $qaqar = 0$ olmasını kullanılırsak

$$0 = qaqbr + qbqar \,,\ \forall a, b \in R$$

bulunur. Bu kez $ar = 0$ alırsak ifade her $b \in R$ için $paqbr = 0$ olur. R asal halka olduğundan

$$paq = 0 \text{ veya } r = 0$$

olur. Burada her $t \in r$ için $tar = 0$ olduğundan ifade

$$ptaq = 0 \text{ veya } r = 0 \,,\ \forall t \in R$$

elde edilir. R asal halka olduğundan

$$p = 0 \text{ veya } aq = 0 \text{ veya } r = 0$$

bulunur. Burada a yerine qaqa yazarsak

$$p = 0 \text{ veya } r = 0 \text{ veya } qaqaq = 0 \,,\ \forall a \in R$$

elde edilir. Burada $p \neq 0$, $r \neq 0$ olduğundan her $a \in R$ için $qaqaq = 0$ olur. Bu ifade de a yerine $a + b$ yazarsak

$$0 = qaqbq + qbqaq \,,\ \forall a, b \in R$$

bulunur. Şimdi b yerine aqb yazılıp, $qaqaq = 0$ ve R' nin asal halka olması kullanılırsa

$$q = 0$$

bulunur. O halde ispat biter.

Teorem 3.1.1. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d_1, d_2 R halkasının türevleri olmak üzere d_1d_2 çarpımı da bir türev ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : d_1d_2 türev olduğundan her $a, b \in R$ için

$$d_1d_2(ab) = d_1d_2(a)b + ad_1d_2(b)$$

olur. Aynı zamanda d_1, d_2 ayrı ayrı türev olduklarından

$$d_1d_2(ab) = d_1d_2(a)b + d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) + ad_1d_2(b)$$

olur. Bu iki ifadenin eşitliği kullanılırsa

$$0 = d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b),\ \forall a, b \in R \tag{3.1}$$

bulunur. Burada $c \in R$ olmak üzere a yerine $ad_1(c)$ yazar ve (3.1) eşitliğini kullanırsak

$$0 = d_2(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) \,,\ \forall a, b, c \in R \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.1) eşitliğinde a yerine c yazılıp (3.2) eşitliğinde uygularsak

$$0 = (d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c))d_1(b) \,,\ \forall a, b, c \in R$$

olur. Burada Lemma 3.1.1 gereği $d_1 = 0$ veya her a, c $\in$ R için $d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0$ bulunur. $d_1 = 0$ ise ispat biter. O halde her a, b, c $\in$ R için $d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0$ olmalıdır. Bu ifadeyi (3.1) eşitliği ile toplarsak her a, c $\in$ R için $2d_2(a)d_1(c) = 0$ elde edilir. Burada charR $\neq 2$ olduğundan her a, c $\in$ R için $d_2(a)d_1(c) = 0$ olur. Lemma 3.1.1 gereği her a $\in$ R için $d_2(a) = 0$ veya her c $\in$ R için $d_1(c) = 0$ elde edilir. $d_1 \neq 0$ olduğundan $d_2 = 0$ bulunur.

Lemma 3.1.3. R bir asal halka ve d, R halkasında bir türev olsun. Her a $\in$ R için $ad(a) - d(a)a = 0$ ise R değişmeli bir halkadır veya d = 0 dır.

İspat : Burada her a, b $\in$ R için a + b yazıp hipotezi kullanırsak

$$ad(b) - d(a)b = d(b)a - bd(a)\ , \ \forall\, a, b \in R$$

bulunur. Bu ifadeyi $d(ab) = ad(b) + d(a)b$ ile toplarsak

$$2ad(b) = d(b)a - bd(a) + d(ab)\ , \ \forall\, a, b \in R \qquad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) eşitliğinde b yerine önce ax ve sonra da xa yazılıp çıkan sonuçlar toplanırsa

$$a^2d(x) + d(x)a^2 = 2ad(x)a\ , \ \forall\ a, x \in R \qquad (3.4)$$

bulunur. Aynı zamanda

$$a(d(x)a - ad(x)) = (d(x)a - ad(x))a\ , \ \forall\ a, x \in R$$

olur. Burada a yerine $a + d(x)$ yazarsak

$$\left[d(x),\left[d(x),a\right]\right] = 0\ , \ \forall\ a, x \in R$$

elde edilir. Bu ifade $I_{d(x)} : R \rightarrow R$ iç türevi olmak üzere $I_{d(x)}^2 = 0$ şeklini alır. Kabul edelim ki charR $\neq 2$ olsun. O zaman $I_{d(x)} = 0$ olur. O halde her x $\in$ R için d(x) $\in$ Z bulunur. Bu durumda her a, x $\in$ R için $\left[a, d(x)\right] = 0$ yani $I_a(d(x)) = 0$ olur. Buradan her a $\in$ R için a $\in$ Z veya d = 0 bulunur. Bu durumda d = 0 veya R halkası değişmeli olduğundan ispat biter. O halde charR = 2 olmalıdır. O zaman (3.4) eşitliği $a^2d(x) + d(x)a^2 = 0$ olur. Yani her x $\in$ R için d(x) , R halkasının elemanlarının karesi ile değişmelidir. Burada her a $\in$ R için a^2, e $\in$ R ile değişmeli olsun.

$$a^2e = ea^2\ , \ \forall\, a \in R$$

olur. a yerine a + b yazılıp düzenlenirse

$$(ab + ba)e = e(ab + ba)\ , \ \forall\ a, b \in R \qquad (3.5)$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinde b yerine ae yazılırsa

$$aeae = eaea\ , \ \forall\, a \in R \qquad (3.6)$$

bulunur. (3.5) eşitliğinde b yerine e yazılırsa

$$ae^2 + eae = eae + e^2a\ , \ \forall\, a \in R \qquad (3.7)$$

olur. Yani $e^2 \in Z$ dir. $(ae + ea)^2 = aeae + eaea + ae^2a + ea^2e$ ifadesinde (3.6) ve (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$0 = (ae + ea)^2 , \ \forall a \in R \tag{3.8}$$

bulunur. Kabul edelim ki $x, y \in R$ için $xy = 0$ olsun. (3.5) eşitliğini kullanırsak

$$(xy + yx)e = e(xy + yx)$$

O halde $xy = 0$ ise $yxe = eyx$ olur. O zaman $x^2y = 0$ ise $yx^2e = eyx^2$ olur. Yani $x^2y = 0$ ise $(ye + ey)x^2 = 0$ olur. Burada her $a \in R$ için x yerine ax yazarsak

$$(ye + ey)(ax)(ax) = 0 , \ \forall a \in R$$

elde edilir. Lemma 3.1.2 gereği $x = 0$ veya $ye + ey = 0$ olur. Şimdi her $v \in R$ için $x(yv) = 0$ ise ifade $x = 0$ veya $yve + eyv = 0$ bulunur. O halde $x = 0$ veya her $v \in R$ için $y(ev + ve) = 0$ olur. İfade $I_e : R \to R$ iç türevi olmak üzere $x = 0$ veya $yI_e(R) = 0$ olur. Lemma 3.1.1 gereği

$$x = 0 \text{ veya } y = 0 \text{ veya } e \in Z$$

elde edilir. Bulunan sonuç (3.8) eşitliği için düşünülürse

$$x = ae + ea = 0 \text{ veya } e \in Z$$

bulunur. Sonuçta her durumda $e \in Z$ olur. O halde $x \in R$ için $d(x) \in Z$ bulunur. Şimdi her $a \in R$ ve $d(b) = 0$ için $d(ab) = d(a)b + ad(b) = d(a)b \in Z$ olur. Eğer $d \neq 0$ ise en az bir $a \in R$ için $d(a) \neq 0$ olur. Her $x \in R$ için $d(a)bx = xd(a)b$ olduğundan $d(a)(bx + xb) = 0$ bulunur. O halde her $t \in R$ için $d(a) \in Z$ olduğundan $d(a)t(bx + xb) = 0$ olur. R asal halka ve $d(a) \neq 0$ oluğundan

$$d(b) = 0 \text{ ise } b \in Z \tag{3.9}$$

elde edilir. Her $c \in R$ için $d(c^2) = d(c)c + cd(c) = 2cd(c) = 0$ olduğundan $c^2 \in Z$ olur. Yani her $y \in R$ için $c^2y = yc^2$ olur. Buda her $y \in R$ için $y \in Z$ demektir. Sonuçta $d = 0$ veya R değişmeli bir halkadır.

Teorem 3.1.2. R bir asal halka ve d, R halkasında bir türevi olsun. Eğer her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a \in Z$ ise $d = 0$ veya R değişmeli bir halkadır.

İspat : A, R'nin türevlerinin Lie halkası ve I, A'nın iç türevlerinin ideali olsun. A'nın türevlerinin çarpımı $d_1, d_2 \in A$ için $[d_1, d_2]$ şeklinde tanımlansın. O halde hipotezimiz $[(d, I_a), I_a] = 0$ halini alır. Burada her $x \in R$ ve her $I_x \in I$ için düşünüldüğünde

$$[[[d, I_x]I_a]I_a] = 0 \ , \ \forall a \in R$$

olur. Yani her $x, a \in R$ için $a(ad(x) - d(x)a) - (ad(x) - d(x)a)a \in Z$ elde edilir. Buradan

$$a2d(x) + d(x)a2 - 2ad(x)a \in Z , \ \forall x, a \in R \tag{3.10}$$

bulunur. Bu ifade a ile değişmeli yapılırsa

$$3ad(x)a^2 + a^3d(x) = 3a^2d(x)a + d(x)a^3\ ,\ \forall x, a \in R \tag{3.11}$$

elde edilir. Kabul edelim ki charR = 3 olsun. O zaman her a $\in$ R için $I_{a^3}d(R) = 0$ olur. charR $\neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.1 gereği $a^3 \in Z$ veya d = 0 olmalıdır. d = 0 ise ispat biter. O halde her a $\in$ R için $a^3 \in Z$ olur. Yani her a, b $\in$ R için

$$(a + b)^3 - a^3 - b^3 = a^2b + aba + ba^2 + b^2a + bab + ab^2 \in Z$$

olur. a yerine –a yazılıp düzenleme yapılırsa

$$a^2b + aba + ba^2 \in Z\ ,\ \forall a, b \in R \tag{3.12}$$

elde edilir. Daha sonra b yerine ab yazılıp düzenlenirse $a(a^2b + aba + ba^2) \in Z$ bulunur. Burada ifade (3.12) ile birlikte düşünülürse $a \in Z$ veya her a, b $\in$ R için $a^2b + aba + ba^2 = 0$ olur. a $\in$ Z ise ispat biter. O halde $a^2b + aba + ba^2 = 0$ olur.

$$0 = -\,3aba + a^2b + aba + ba^2 = a(ab - ba) - (ab - ba)a\ ,\ \forall\ b \in R$$

Bulunur. Yani $I_a^2 = 0$ olur. Teorem 3.1.1 gereği $a \in Z$ olur ve ispat biter. O halde kabul yanlıştır ve charR $\neq 3$ olmalıdır. Şimdi (3.11) eşitliğinde d(x) yerine x' düşünülüp x yerine a, yazılırsa

$$3aa'a^2 + a^3a' - 3a^2a'a - a'a^3 = 0\ ,\ \forall a \in R \tag{3.13}$$

olur. Hipoteze göre düzenleme yapılırsa

$$a^3a' - a'a^3 = 3(aa' - a'a)a^2,\ \ \forall a \in R \tag{3.14}$$

elde edilir. Tekrar hipotez kullanılırsa

$$a^2a' - a'a^2 = 2(aa' - a'a)\ ,\ \forall a \in R \tag{3.15}$$

bulunur. Kabul edelim ki $aa' - a'a \neq 0$ olsun. (3.11) eşitliğinde x yerine ax' yazılırsa

$$3a^2x''a^2 + a^4x'' - 3a^3x''a - ax''a^3 + 3aa'x'a^2 + a^3a'x' - 3a^2a'x'a - a'x'a^3 = 0$$

olur. Burada $a(3ax''a^2 + a^3x'' - 3a^2x''a - x''a^3) = 0$ olduğundan

$$3aa'x'a^2 + a^3a'x' - 3a^2a'x'a - a'x'a^3 = 0\ ,\ \forall x, a \in R \tag{3.16}$$

elde edilir. Bu kez (3.11) eşitliği a' ile soldan çarpılıp (3.16) ile toplanıp $aa' - a'a$ parantezine alarak 3 ile bölünürse

$$(a\ a' - a'a)(x'a^2 + a^2x' - 2ax'a) = 0\ ,\ \forall x, a \in R$$

bulunur. R asal halka olduğundan ve kabulümüzden

$$x'a^2 + a^2x' - 2ax'a = 0\ ,\forall x, a \in R \tag{3.17}$$

olur. Burada x yerine ax yazılıp düzenleme yapılırsa

$$a'xa^2 + a^2a'x - 2aa'xa = 0\ ,\ \forall x \in R \tag{3.18}$$

elde edilir. Şimdi (3.17) eşitliğinde x yerine a yazılıp sonra x ile sağdan çarpılırsa

$$a'a^2x + a^2a'x - 2aa'ax = 0\ ,\ \forall x \in R \tag{3.19}$$

bulunur. (3.18) ve (3.19) eşitlikleri toplanırsa

$$a'(xa^2 - a^2x) - 2aa'(xa - ax) = 0\ ,\ \forall x \in R \qquad (3.20)$$

olur. (3.20) eşitliğinde x yerine ax yazıp, sonucu (3.20) eşitliğinin a ile soldan çarpımından çıkartırsak

$$(aa' - a'a)(xa^2 - a^2x) - 2a(aa' - a'a)(xa - ax) = 0\ ,\ \forall x \in R$$

bulunur. Burada R asal halka olduğundan

$$(aa' - a'a) = 0 \text{ veya } xa^2 - a^2x - 2a(xa - ax) = 0\ ,\ \forall x \in R \qquad (3.21)$$

elde edilir. $(aa' - a'a) \neq 0$ ise

$$xa^2 + a^2x +\text{-}2axa = 0\ \ \forall x \in R \qquad (3.22)$$

olur. Bu ifade a(ax – xa) = (ax – xa)a şeklinde düzenlenirse $I_a^2(R) = 0$ olur. Eğer $\text{charR} \neq 2$ ise $a \in Z$ bulunur ve ispat biter. O halde $(aa' - a'a) = 0$ olmalıdır. Buda Lemma 3.1.3 gereği ispatı sonlandırır. O zaman CharR = 2 olmalıdır. O halde (3.21) eşitliği $(aa' - a'a) = 0$ veya $a^2 \in Z$ olur. Burada eğer bir $a \in R$ için $(aa' - a'a) \neq 0$ ise $a^2 \neq 0$ ve $a^2 \in Z$ olur. Eğer $a^2 = 0$ olsaydı $(a^2)' = aa' + a'a$ yani CharR = 2 olduğundan $aa' = a'a$ olup çelişki olurdu. Sonuçta $a^2 \in Z$ ve $a^2 \neq 0$ dır. O zaman her $x \in R$ için $axa \in R$ olduğundan (3.22)'de kullanırsak

$$(axa)^2 \in Z \text{ veya } (axa)(axa)' = (axa)'(axa)\ ,\ \forall x \in R$$

olur. Eğer $(axa)^2 \in Z$ ise $a^2 \in Z$ olduğundan $(axa)^2 = axa^2xa = a^2(ax^2a) \in Z$ ve $a^2 \neq 0$ olduğundan $ax^2a \in Z$ bulunur. Bir $c \in Z$ için $aca = a^2c \in Z$ olduğundan c yerine ax^2a yazarsak $a^2 \neq 0$ olduğundan $x^2 \in Z$ bulunur. Yani $(axa)^2 \in Z$ ise $x^2 \in Z$ olur. Eğer $x^2 \notin Z$ ise $(axa)(axa)' = (axa)'(axa)$ olur. Burada ifade açılıp düzenlenirse $axaa'xa + axa^2x'a + axa^2xa = a'xa^2xa + ax'a^2xa + axa'axa$ elde edilir. $xx' + x'x = 0$, $aa' + a'a \in Z$ ve a sol sıfır bölensiz olduğundan $(aa' + a'a)\,ax^2 + (ax^2a' + a'x^2a)a = 0$ olur. Burada $a^2 \in Z$ olduğundan düzenleme yapılırsa $ax^2aa' + a^2a'x^2 = 0$ bulunur. a sol sıfır bölensiz olduğundan her $x \in R$ için $x^2aa' + aa'x^2 = 0$ elde edilir. $x^2 \notin Z$ ve a sıfır bölensiz olduğundan her $a \in R$ için $aa' = a'a$ olur. Bu durumda Lemma 3.1.3 gereği ispat biter.

Awtar, R., 1972

Teorem 3.1.3. R bir asal halka ve her $a \in R$ için ad(a) – d(a)a $\in Z$ ise d = 0 veya R değişmeli bir halkadır.

İspat : x, y $\in$ R için $[x, y]$ = xy – yx olarak tanımlansın. O halde her $a \in R$ için $[a, d(a)] \in Z$ olur. Burada her a, x $\in$ R için a yerine a + $[a, x]$ yazılırsa

$$\left[a+[a,x],d(a)+d([a,x])\right]$$

$$=[a,d(a)]+\left[a,d([a,x])\right]+\left[[a,x],d(a)\right]+\left[[a,x],d([a,x])\right]\in Z$$

olur. $[a,d(a)]\in Z$, $\left[[a,x],d([a,x])\right]\in Z$ ve Z, R'nin alt halkası olduğundan

$$\left[a,d([a,x])\right]+\left[[a,x],d(a)\right]\in Z,\ \forall x,a\in R$$

bulunur. $d([a,x])=[d(a),x]+[a,d(x)]$ olduğundan jacobi özdeşliği kullanılırsa

$$\left[a,[a,d(x)]\right]\in Z, \forall x,a\in R \tag{3.23}$$

elde edilir. Kabul edelim ki charR = 2 olsun. (3.23) eşitliği açık yazılırsa

$$a^2d(x)+d(x)a^2\in Z,\ \forall x,a\in R \tag{3.24}$$

olur. Burada (3.24) eşitliğini d(x) ile değişmeli yaparsak

$$0=\left[d(x),a^2d(x)+d(x)a^2\right]=\left[d(x),a^2d(x)\right]+\left[d(x),d(x)a^2\right]$$

$$=\left[d(x),a^2\right]d(x)+d(x)\left[d(x),a^2\right]$$

bulunur. İfade açılırsa

$$a^2d(x)^2=d(x)^2a^2,\ \forall x,a\in R \tag{3.25}$$

elde edilir. Bu kez (3.24) eşitliği a^2 ile değişmeli yapılırsa

$$a^4d(x)=d(x)a^4,\ \forall x,a\in R \tag{3.26}$$

olur. (3.25) eşitliğinde x yerine $x+a^2x$ yazılır ve (3.25) eşitliği kullanılarak sadeleştirme yapılırsa

$$a^2d(x)d(a^2x)+a^2d(a^2x)d(x)=d(x)d(a^2x)a^2+d(a^2x)d(x)a^2$$

$$(a^2d(x))^2+a^2d(x)d(a^2)x+a^2d(a^2)xd(x)+a^4d(x)^2$$

$$=(d(x)a^2)^2+d(x)d(a^2)xa^2+d(a^2)xd(x)a2+a^4d(x)^2$$

olur. Burada $x\in R$ için $d(x^2)=xd(x)+d(x)x=xd(x)-d(x)x\in Z$ olması kullanılarak düzenleme yapılırsa

$$0=(a^2d(x))^2-(d(x)a^2)^2+d(a^2)(\left[a^2,d(x)x\right]+\left[d(x)x,a^2\right])$$

$$=(a^2d(x))^2-(d(x)a^2)^2+d(a^2)(\left[a^2,d(x)x-xd(x)\right])$$

$$=(a^2d(x))^2-(d(x)a^2)^2,\ \forall x,a\in R$$

bulunur. (3.25) eşitliğinde her $x,a\in R$ için $(a^2d(x)^2+d(x)^2a^2)^2=0$ olduğundan (3.25) ve (3.26) eşitlikleri ile charR = 2 olması kullanılırsa

$$a^2d(x)=d(x)a^2,\ \forall x,a\in R \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.27) eşitliğinde her $a,b\in R$ için a yerine a + b yazılırsa

$$(a+b)^2d(x)=d(x)(a+b)^2$$

$$(a^2 + ab + ba + b^2)d(x) = d(x)\,(a^2 + ab + ba + b^2)$$

olur. charR = 2 olduğundan a = -a olması göz önüne alınırsa

$$(ab - ba)d(x) = d(x)(ab - ba)\ ,\ \forall\, x, a, b \in R \qquad (3.28)$$

bulunur. Burada a yerine ab yazılıp (3.28) kullanılırsa

$$(ab - ba)(bd(x) - d(x)b) = 0\ ,\ \forall\, x, a, b \in R \qquad (3.29)$$

olur. (3.29) eşitliğinde b yerine b+ c yazarak lineerleştirme yaparsak

$$(ac - ca)(bd(x) - d(x)b) + (ab - ba)(cd(x) - d(x)c) = 0\ ,\forall\, x, a, b, c \in R \qquad (3.30)$$

elde edilir. (3.30) de b yerine b^2 yazıp (3.27) eşitliğini kullanırsak

$$(ab^2 - b^2a)(cd(x) - d(x)c) = 0\ ,\ \forall\, x, a, b, c \in R$$

olur. Bu ifade $I_{b^2}(a)(cd(x) - d(x)c) = 0$ olarak düşünülürse Lemma 3.1.1 gereği

$$b^2 \in Z \text{ veya } d(x) \in Z$$

bulunur. Eğer $b^2 \notin Z$ ise $d(x) \in Z$ olur. Burada charR = 2 olduğundan $d(x^2) = xd(x) + d(x)x = 2d(x)x = 0$ dır. Her $x, y \in R$ için $d(x^2y) = d(x^2)y + x^2d(y) \in Z$ dir. O halde her $x \in R$ için $x^2 \in Z$ veya her $y \in R$ için $d(y) = 0$ olur. $d = 0$ ise ispat biter. O zaman $x^2 \in Z$ olmalıdır. Her $x, y \in R$ için $(x + y)^2 = xy - yx \in Z$ olur.
Burada x yerine xy yazarsak $(xy - yx)y \in Z$ bulunur. $xy - yx \in Z$ olduğundan her $y \in R$ için $y \in Z$ veya her $x \in R$ için $xy = yx$ olur. Her iki durumda da R değişmeli halka olup ispat biter. O halde kabulümüz yanlıştır $\text{charR} \neq 2$ olmalıdır. O zaman (3.23) eşitliğinde a yerine $a + d(x)$ yazarsak

$$\left[a + d(x), \left[a + d(x), d(x)\right]\right] = \left[a + d(x), \left[a, d(x)\right]\right]$$
$$= \left[a, \left[a, d(x)\right]\right] + \left[d(x), \left[a, d(x)\right]\right] \in Z$$

olur. Buradan

$$\left[d(x), \left[a, d(x)\right]\right] \in Z,\ \forall\, x, a \in R \qquad (3.31)$$

elde edilir. Şimdi $a \in R$ için $t = d(x)$ olmak üzere $p(a) = \left[t, a\right]$ olarak tanımlayalım. (3.31) eşitliğinden her $a \in R$ için $p^2(a) \in Z$ olur. O zaman $p^2(at) = p^2(a)t + p(a)p(t) + p(t)p(a) + ap^2(t) = p^2(a)t \in Z$ bulunur. O halde $p^2(a) = 0$ veya $t \in Z$ olmalıdır. Kabul edelim ki $t \notin Z$ olsun. Eğer sabit bir $b \in R$ için $p^2(b) \neq 0$ olsaydı. $p^2(b), p^2(b)t \in Z$ olduğundan $t \in Z$ olup kabulümüzle çelişirdi. O halde her $a \in R$ için $p^2(a) = 0$ olur. Her $a, b \in R$ için $0 = p^2(ab) = p(a)p(b)$ dir. Burada b yerine ba yazarsak her $a, b \in R$ için $0 = p(a)bp(a)$ bulunur. R asal halka olduğundan her $a \in R$ için $p(a) = \left[t, a\right] = 0$ yani $t = d(x) \in Z$ elde edilir. Burada her x, y, z $\in$ R için d(xy) =xd(y) + d(x)y ve d(yz) = yd(z) + d(y)z ifadelerinden birincisi d(z) ikincisi d(x) ile soldan çarpılıp farkları alınırsa

$$(xd(z) - d(x)z)d(y) \in Z\ ,\ \forall\ x, y, z \in R$$

bulunur. O halde her y $\in$ R için d(y) = 0 veya her x, z $\in$ R için (xd(z) – d(z)x) $\in$ Z olur. O zaman en az bir y $\in$ R için d(y) $\neq 0$ olsun. Bu durumda her x, z $\in$ R için (xd(z) – d(z)x) $\in$ Z olur. d(xz) $\in$ Z olduğundan bu ifadeyle toplanırsa xd(z) $\in$ Z elde edilir. Burada her x $\in$ R için x $\in$ Z veya d(z) = 0 olur. O halde d = 0 veya R değişmelidir.

Herstein, İ.N., 1978

Teorem 3.1.4. R bir asal halka d, R halkasının $d^3 \neq 0$ olan bir türevi ve A = $\langle \{d(r) : \forall r \in R\} \rangle$ şeklinde tanımlı R halkasının alt halkası ise R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat : d(R) $\subset$ A ve $d^3 \neq 0$ olduğundan $d^3(R) \subset d^2(A) \neq 0$ olur. Ve y $\in$ A için $d^2(y) \neq 0$ vardır. O halde her x, y$\in$ R için d(xy) = d(x)y + xd(y) $\in$ A olduğundan her x $\in$ R için xd(y) $\in$ A olur. Yani Rd(y) $\subset$ A dır. Aynı şekilde d(yx) = d(y)x + yd(x) $\in$ A olduğundan her x $\in$ R için d(y)x $\in$ A olur. Yani d(y)R$\subset$ A dır. Eğer y $\in$ A ve r, s $\in$ R ise d(rd(y)) = d(r)d(y) + $rd^2(y)$ $\in$ A olduğundan her r $\in$ R için $rd^2(y) \in$ A olur. Yani $Rd^2(y)$ $\subset$ A dır. Öte yandan d(d(y)s) = $d^2(y)s$ + d(y)d(s) $\in$ A olduğundan $d^2(y)R \subset$ A olur. Ve d(rd(y)s) = d(r)d(y)s + $rd^2(y)s$ + rd(y)d(s) $\in$ A olduğundan $Rd^2(y)R \subset$ A olur. Bu durumda her y $\in$ R için $d^2(y) \neq 0$ ve A ideal olduğundan $Rd^2(y) \subset$ A, $d^2(y)R \subset$ A ve $Rd^2(y)R \subset$ A, R'nin idealleridir. Eğer d^3 = 0 olsaydı. R asal halka ve a $\in$ R, a $\neq 0$ nilpotent eleman olsun. O halde a^2 = 0 olur. d : R$\rightarrow$R her x $\in$ R için d(x) = ax – xa olsun. B = aR + Ra alt halkası için d(R) $\subset$ B olur. Öte yandan d^3 = 0 ve charR $\neq 2$ ise $d^2 \neq 0$ olur. Kabul edelim ki I $\subset$ B ve aBa = 0 olsun. O zaman aIa $\subset$ aBa = 0 olur.
Buradan aRIa = 0 olup R asal halka olduğundan a = 0 veya I = 0 bulunur. a $\neq 0$ olduğundan I = 0 bulunur. Yani bu koşula uygun R'nin sıfırdan farklı ideali yoktur.

Teorem 3.1.5. R bir asal halka ve d, sıfırdan farklı R'nin bir türevi ve her x, y $\in$ R için d(x)d(y) = d(y)d(x) olsun. Eğer karakteristik ikiden farklı ise R değişmeli tamlık bölgesidir. Eğer karakteristik iki ise R değişmeli bir halka ve merkezi 4 boyutlu basit cebirdir.

İspat : Hipotez gereği A değişmeli bir halkadır. a $\in$ A ve x $\in$ R için d(ax) = d(a)x + ad(x) olduğundan b $\in$ A için 0 = bd(ax) – d(ax)b = d(a)(bx – xb) olur. Kabul edelim ki A$\not\subset$ Z olsun. Bu ifadeyi I_b : R$\rightarrow$R iç türevi için d(a)I_b(x) = 0 olarak yazarsak her a, b $\in$ A için d(a) = 0 veya için $I_b = 0$ olur. Yani d(A) = 0 veya A $\subset$ Z olur. A $\not\subset$ Z olduğundan d(A) = $d^2(R) = 0$ bulunur. Her x, y $\in$ R için $0 = d^2(xy) = 2d(x)d(y)$ dir. Eğer charR $\neq$ 2 ise 0 =d(x)d(y) elde edilir. Burada z $\in$ R için y yerine zx yazarsak

$$0 = d(x)d(zx) = d(x)zd(x) + d(x)d(z)x = d(x)zd(x)\ ,\ \forall x, z \in R$$

olur. R asal halka olduğundan her x $\in$ R için d(x) = 0 elde edilir. Buda d $\neq 0$ ile çelişir. O halde charR = 2 olmalıdır. $T = \{x \in R : d(x) = 0\}$ olsun. Her x $\in$ A için $d(d(x)) = d^2(x) = 0$ olduğundan A $\subset$ T olur. Her t $\in$ T ve x $\in$ R için d(tx) = d(t)x + td(x) $\in$ A dır. Her a $\in$ A için

$$0 = [a, td(x)] = atd(x) - td(x)a = (at - ta)d(x)\ ,\ \forall x \in R$$

bulunur. d(x) $\in$ Z ve R asal halka olduğundan d = 0 veya at – ta = 0 olur. d $\neq$ 0 olduğu için her a $\in$ A için at = ta elde edilir. $C_T(A) = \{t \in T : at - ta = 0, \forall a \in A\}$ olarak tanımlansın. Her t $\in$ T ve her x $\in$ R için d(t) = 0 olduğundan d(tx – xt) =d(t)x – td(x) bulunur. O halde d(x) $\in$ $C_T(A)$ ve tx – xt $\in$ T olduğundan T, R'nin bir alt halkası ve lie idealidir. Bu durumda Teorem 2.2 gereği T, R'nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar veya T değişmeli bir halka ve her t $\in$ T için $t^2 \in Z$ dir. Eğer T, R'nin sıfırdan farklı bir idealini kapsıyorsa $C_T(A)$ = A $\subset$ Z olur ki buda kabulümüzle çelişir. O halde T değişmeli ve her t $\in$ T için $t^2 \in Z$ dir. Bu durumda a $\in$ A ve a $\notin$ Z olsun. O zaman a $\in$ T olduğundan $a^2 \in Z$ ve her x $\in$ R için ax – xa $\in$ T olduğundan $(ax - xa)^2 \in Z$ olur. O halde Teorem 2.3 gereği R merkezi 4 boyutlu basit cebir olur. A $\not\subset$ Z için ispat bitti. O zaman A $\subset$ Z olsun. Her x $\in$ R için d(x) $\in$ Z ve d(xy) = d(x)y + xd(y) $\in$ Z olduğundan x ile değişmeli yaparsak

$$d(x)(xy - yx) = 0,\ \forall\ y \in R$$

olur. R asal halka olduğundan d(x) = 0 veya her y $\in$ R için xy – yx = 0 bulunur.
İkinci durumdan x $\in$ Z ise ispat biter. O halde x $\in$ R için d(x) = 0 olur. Burada d $\neq 0$ olduğundan $d(x_0) \neq 0$ olan $x_0 \in R$ vardır. O zaman $d(x_0) \neq 0$ ise $x_0 \in Z$ dir. Bu durumda x, $x_0 \in$ R için $d(x + x_0) = d(x) + d(x_0) \neq 0$ olur $x + x_0 \in Z$ elde edilir. Z alt halka olduğunda x $\in$ Z bulunur. Her x $\in$ R için düşünüldüğünde R değişmeli olur.

Herstein, İ. N., 1979

Teorem 3.1.6. R bir asal halka ve d, R'nin sıfırdan farklı türevi, a $\in$ R ve her x $\in$ R için ad(x) = d(x)a olsun. Eğer karakteristik ikiden farklı ise a $\in$ Z dir. Eğer karakteristik iki ise $a^2 \in Z$ dir. Üstelik a $\notin$ Z ise her x $\in$ R için $d(x) = (\lambda a)x - x(\lambda a)$ ile tanımlı türev olmak üzere $\lambda \in C$ (extended centroid) vardır.

İspat : Kabul edelim ki $a \notin Z$ olsun. Hipotezde her $x \in R$ için $[a, d(x)] = 0$ olduğundan her x, $y \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [a, d(xy)] = [a, d(x)y] + [a, xd(y)] \\ &= [a, d(x)]y + d(x)[a, y] + [a, x]d(y) + x[a, d(y)] \\ &= d(x)[a, y] + [a, x]d(y) \end{aligned}$$

olur. Yani

$$0 = d(x)[a, y] + [a, x]d(y) \ , \ \forall x, y \in R \tag{3.32}$$

elde edilir. $C_R(a) = \{t \in R \ : [a, t] = 0, \forall a \in R\}$ olmak üzere $y \in C_R(a)$ ise (3.32) eşitliğinde

$$0 = [a, x]d(y), \forall x \in R$$

bulunur. Burada $u \in R$ olmak üzere $A = \{a \in R : a[u, x] = 0, \forall x \in R\}$, R'nin bir idealidir. O halde $d(y) \in A$ olup R asal halka olduğundan d(y) = 0 veya $a \in Z$ olur.

Kabulümüzde $a \notin Z$ olduğundan d(y) = 0 bulunur. Sonuçta $[a, y] = 0$ olduğunda d(y) = 0 elde edilir. Bu durumu hipotez için düşünürsek her $x \in R$ için $[a, d(x)] = 0$ olduğunda $d(d(x)) = d^2(x) = 0$ olur. R asal halka d, R'nin türevi karakteristik ikiden farklı iken $d^2 = 0$ ise d = 0 dır. O halde charR $\neq$ 2 ise d = 0 olur ki bu bir çelişkidir. O zaman kabul yanlış demektir. Yani $a \in Z$ bulunur. Eğer charR = 2 ise (3.32) eşitliği

$$[a, y]d(x) = d(y)[a, x] \ , \ \forall x, y \in R \tag{3.33}$$

olur. Burada d(y) = 0 ise (3.33) eşitliği her $x \in R$ için $0 = d(x)[a, y]$ şeklini alır. O halde her $r \in R$ için

$$0 = [a, y]d(rx) = [a, y]d(r)x + [a, y]rd(x) = [a, y]rd(x)$$

elde edilir. R asal halka olduğundan $[a, y] = 0$ veya her $x \in R$ için d(x) = 0 olur. $d \neq 0$ olduğundan $[a, y] = 0$ olur. Buradan $y \in C_R(a)$ yani d(y) = 0 bulunur. O halde $C_R(a) = \{t \in R : d(t) = 0\}$ şeklini alır. Şimdi $w \in R$ olmak üzere (3.33) eşitliğinde x yerine xw yazarsak

$$[a, xw]d(y) = d(xw)[a, y]$$

$$[a, x]wd(y) + x[a, w]d(y) = d(x)w[a, y] + xd(w)[a, y]$$

olur. (3.33) eşitliği kullanarak sadeleştirme yaparsak

$$[a,x]wd(y) = d(x)w[a,y], \forall x,y,w \in R \qquad (3.34)$$

elde edilir. (3.34) eşitliğinde y yerine x yazarsak

$$[a,x]wd(x) = d(x)w[a,x], \forall x,w \in R$$

olur. Burada a, b $\in$ R olmak üzere her x $\in$ R için axb = bxa olduğunda $a \neq 0$ ise b = λa olan $\lambda \in C$ var olduğundan $[a,x] \neq 0$ ise her x $\in$ R için d(x) = $\lambda(x)[a,x]$ olan $\lambda(x) \in C$ vardır. Eğer $[a,x] = 0$ ise her $x \in R$ için d(x) = 0 olur ki bu $d \neq 0$ ile çelişir. O halde $[a,x] \neq 0$ olmalıdır. Burada x $\notin$ $C_R(a)$ olduğundan d(x) $\neq$ 0 yani $\lambda(x) \neq 0$ olur. Hipotezden

$$0 = [a,d(x)] = [a,\lambda(x)[a,x]] = \lambda(x)[a,[a,x]] + [a,\lambda(x)][a,x]$$

$$= \lambda(x)[a,[a,x]]$$

elde edilir. $\lambda \in C$ olduğundan

$$0 = \lambda(x)R[a,[a,x]]$$

olur. R asal halka olduğundan her x $\in$ R için $\lambda(x) = 0$ veya $[a,[a,x]] = 0$ olur. $\lambda(x) \neq 0$ olduğundan her x $\in$ R için $[a,[a,x]] = 0$ elde edilir. Buradan charR = 2 olduğundan

$$0 = [a,[a,x]] = a(ax - xa) - (ax - xa)a = a^2x + xa^2$$

bulunur. Yani $a^2 \in Z$ olur. Burada $a \notin Z$ iken yani charR = 2 olduğunda her $x \in$ R için d(x) = $\lambda(x)[a,x]$ olan $\lambda(x) \in C$ var olduğu gösterildi. O zaman her x, y $\in$ R için

$$d(xy) = \lambda(xy)[a,xy]$$

$$d(x)y + xd(y) = \lambda(xy)[a,x]y + \lambda(xy)x[a,y]$$

$$\lambda(x)[a,x]y + x\lambda(y)[a,y] = \lambda(xy)[a,x]y + \lambda(xy)x[a,y]$$

$$(\lambda(x) - \lambda(xy))[a,x]y = (\lambda(xy) - \lambda(y))x[a,y]$$

olur. Burada $\lambda(x) - \lambda(xy) = \mu$ ve $\lambda(xy) - \lambda(y) = \upsilon$ olmak üzere ifade

$$\mu[a,x]y = \upsilon x[a,y], \forall x,y \in R \qquad (3.35)$$

şeklini alır. (3.35) eşitliğinde x yerine $[a,x]$ yazarsak $a^2 \in Z$ olduğundan

$$0 = \upsilon[a,x][a,y], \forall x,y \in R \qquad (3.36)$$

olur. Tekrar (3.35) eşitliğinde y yerine $[a,y]$ yazarsak yine $a^2 \in Z$ olduğundan

$$0 = \mu[a,x][a,y], \forall x,y \in R \tag{3.37}$$

bulunur. Şimdi (3.36) ve (3.37) eşitlikleri toplanırsa

$$0 = (\mu+\upsilon)[a,x][a,y], \forall\, x, y \in R \tag{3.38}$$

elde edilir. Burada $\mu,\ \upsilon \in$ C olduğundan 0 = $(\mu+\upsilon)R[a,x][a,y]$ yazılabilir. R asal halka olduğundan $\mu+\upsilon=0$ veya her x, y $\in$ R için $[a,x][a,y]=0$ olur. Eğer $[a,x][a,y]\neq 0$ ise her x, y $\in$ R için $0=\mu+\upsilon$ = $\lambda(x)-\lambda(xy)$ + $\lambda(xy)-\lambda(y)$ = $\lambda(x)-\lambda(y)$ bulunur. Yani her x, y $\in$ R için $\lambda(x)=\lambda(y)$ olur. Şimdi (3.38) eşitliğinde x yerine w yazarsak

$$0 = (\mu+\upsilon)[a,w][a,y], \forall\, w, y \in R$$

olur. Burada $[a,w][a,y]\neq 0$ ise her w, y $\in$ R için $\lambda(w)=\lambda(y)$ bulunur. Bu kez (3.38) eşitliğinde y yerine w yazarsak

$$0 = (\mu+\upsilon)[a,x][a,w], \forall\, x, w \in R$$

bulunur. Burada $[a,x][a,w]\neq 0$ ise her x, w $\in$ R için $\lambda(x)=\lambda(w)$ elde edilir. O halde $\lambda\in C$ sabittir. O zaman her x $\in$ R için d(x) = $\lambda(x)[a,x]$ = $[\lambda_a, x]$ olan $\lambda\in C$ vardır.

Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1981

Teorem 3.1.7. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka a$\in$ R ve d, R halkasında sıfırdan farklı bir türev olsun. Eğer $[a,d(R)]\subseteq Z$ ise a $\in$ Z dir.

İspat : Hipotezden $a^2 \in$ R için $\left[a,d(a^2)\right]\in Z$ olur. Her a $\in$ R için $[a,d(a)]\in Z$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left[a,d(a^2)\right] &= [a,d(a)a]+[a,ad(a)]\\ &= [a,d(a)]a+a[a,d(a)]\\ &= 2a[a,d(a)]\in Z\end{aligned}$$

olur. Burada char$R\neq 2$ olduğundan $a[a,d(a)]\in Z$ bulunur. Char$R\ \neq 2$ ve $[a,d(a)]\ \in Z$ olduğundan Önerme 2.8 gereği a$\in$ Z veya $[a,d(a)]$ = 0 olur. a$\in$Z ise $[a,d(a)]$ = 0 dır. O halde $[a,d(a)]$ = 0 olmalıdır. Öte yandan her x$\in$ R için $\left[a,d([a,x])\right]=\left[a,[d(a),x]\right]+\left[a,[a,d(x)]\right]\in Z$ olduğundan

$$\left[a,[d(a),x]\right] \in Z,\ \forall x\in R \tag{3.39}$$

bulunur. (3.39) eşitliğinde x yerine ax yazarsak $[a,a]=0$ ve $[a,d(a)]$ = 0 olduğundan

$$\left[a,\left[d(a),ax\right]\right]=\left[a,a\left[d(a),x\right]+\left[d(a),a\right]x\right]$$
$$=\left[a,a\right]\left[d(a),x\right]+a\left[a,\left[d(a),x\right]\right]$$
$$=a\left[a,\left[d(a),x\right]\right]$$

elde edilir. Yani

$$a\left[a,\left[d(a),x\right]\right]\in Z,\ \forall x\in R$$

olur. Burada (3.39) eşitliği dikkate alınırsa a $\in$ Z veya her x $\in$ R için $\left[a,\left[d(a),x\right]\right]$ = 0 olmalıdır. Eğer a $\in$ Z ise $\left[a,\left[d(a),x\right]\right]$ = 0 dır. O halde her x $\in$ R için $\left[a,\left[d(a),x\right]\right]$ = 0 olur. İfade $I_a : R\rightarrow R$ ve $I_{d(a)} : R\rightarrow R$ iç türevler olmak üzere $I_aI_{d(a)} = 0$ olarak yazılırsa $charR\neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.1 gereği $I_a = 0$ veya $I_{d(a)} = 0$ olur. Yani

$$a\in Z \text{ veya } d(a)\in Z \qquad (3.40)$$

bulunur. a$\in$ Z ise ispat biter. O halde d(a) $\in$ Z olur. Her x $\in$ R için $\left[a,d(ax)\right]\in Z$ olduğundan

$$\left[a,d(ax)\right]=\left[a,d(a)x\right]+\left[a,ad(x)\right]=d(a)\left[a,x\right]+a\left[a,d(x)\right]$$

olur. Yani

$$d(a)\left[a,x\right]+a\left[a,d(x)\right]\in Z,\ \forall x\in R \qquad (3.41)$$

bulunur. Burada her t$\in$ R ile (3.41) eşitliğini değişmeli yaparsak d(a) $\in$ Z olduğundan

$$0=\left[t,d(a)\left[a,x\right]+a\left[a,d(x)\right]\right]=\left[t,d(a)\left[a,x\right]\right]+\left[t,a\left[a,d(x)\right]\right]$$
$$=d(a)\left[t,\left[a,x\right]\right]+\left[t,a\right]\left[a,d(x)\right]$$

elde edilir. Burada t yerine a yazarsak

$$0=d(a)\left[a,\left[a,x\right]\right],\forall x\in R$$

bulunur. d(a) $\in$ Z ve R asal halka olduğundan d(a) = 0 veya her x $\in$ R için $\left[a,\left[a,x\right]\right]$ = 0 olur. Kabul edelim ki d(a) $\neq$ 0 olsun. O zaman $I_a : R\rightarrow R$ iç türevi için $I_a^2=0$ olur. charR $\neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.1 gereği $I_a = 0$ bulunur. Yani a $\in$ Z dir. O halde ispat biter. O zaman kabul yanlıştır. Yani d(a) = 0 olmalıdır. O halde (3.41) eşitliği

$$a\left[a,d(x)\right]\in Z,\forall x\in R$$

şeklini alır. Hipotezden $\left[a,d(x)\right]\in$ Z olduğundan a $\in$ Z veya $\left[a,d(x)\right]$ = 0 olur.

$[a, d(x)] = 0$ ise Teorem 3.1.6 gereği $a \in Z$ bulunur. O halde her iki durumda da $a \in Z$ elde edilir. Ve ispat biter.

Teorem 3.1.8. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d, R halkasında sıfırdan farklı bir türev olsun. Eğer $[d(R), d(R)] \subseteq Z$ ise R değişmeli bir halkadır.

İspat : Hipotezi her $x \in R$ için $[d(x), d(R)] \subseteq Z$ olarak düşünürsek Teorem 3.1.7 gereği her $x \in R$ için $d(x) \in Z$ bulunur. O zaman her $x, y \in R$ için $d(xy) = xd(y) + d(x)y \in Z$ olur. Buradan her $k \in R$ için

$$0 = [k, d(x)y + xd(y)] = [k, d(x)y] + [k, xd(y)]$$

$$= d(x)[k, y] + [k, x]d(y)$$

bulunur. Burada k yerine x yazarsak

$$0 = d(x)[x, y] \ , \ \forall x, y \in R$$

elde edilir. $I_x : R \to R$ iç türev olmak üzere ifade $d(x)I_x(y) = 0$ şeklini alır. CharR $\neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.1 gereği her $x \in R$ için $d(x) = 0$ veya $x \in Z$ olur.

$A = \{x \in R : x \in Z\}$ ve $B = \{x \in R : d(x) = 0\}$, $R = A \cup B$ olan R halkasının iki öz alt grubudur. Bu durumda Brauer's Trick'ten R = A veya R = B olmalıdır. R = B ise her $x \in R$ için $d(x) = 0$ olur. $d \neq 0$ olduğundan çelişkidir. O halde $R \neq B$ dir. Yani R = A olur. O halde her $x \in R$ için $x \in Z$ olur. Bu da R halkasının değişmeli olması demektir. Böylece ispat biter.

Teorem 3.1.9. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d, R halkasında sıfırdan farklı bir türev olsun. Eğer $d^2(R) \subset Z$ ise R değişmeli bir halkadır.

İspat : Hipotezden her $x,y \in R$ için $d^2([x, y]) \in Z$ olur.$d^2(x),d^2(y) \in Z$ olduğundan

$$d^2([x, y]) = [d^2(x), y] + 2[d(x), d(y)] + [x, d^2(y)]$$

$$= 2[d(x), d(y)]$$

bulunur. Buradan her $x, y \in R$ için $[d(x), d(y)] \in Z$ elde edilir. Yani $[d(R), d(R)] \subset Z$ olur. charR $\neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.8 gereği R halkası değişmelidir.

Teorem 3.1.10. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d_1,d_2 R'nin sıfırdan farklı türevleri olsun. Eğer $d_1d_2(R) \subseteq Z$ ise R değişmeli bir halkadır.

İspat : Her $x, y \in R$ için $d_1d_2([x, y]) \in Z$ olur.

$$d_1d_2([x,y]) = d_1([d_2(x),y]+[x,d_2(y)])$$

$$= [d_1d_2(x),y]+[d_2(x),d_1(y)]+[d_1(x),d_2(y)]+[x,d_1d_2(y)]$$

$$= [d_2(x),d_1(y)]+[d_1(x),d_2(y)]$$

bulunur. Yani

$$[d_2(x),d_1(y)]+[d_1(x),d_2(y)] \in Z,\ \forall x,y \in R \qquad (3.42)$$

elde edilir. (3.42) eşitliğinde y yerine $d_2(y)$ yazarsak

$$[d_2(x),d_1d_2(y)]+[d_1(x),d_2^2(y)] \in Z,\ \forall x,y \in R$$

olur. Hipotezi kullanırsak her x, y $\in$ R için $[d_1(x),d_2^2(y)] \in$ Z bulunur. Yani

$$[d_1(R),d_2^2(y)] \subseteq Z, \forall y \in R$$

bulunur. Burada char$R \neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.7 gereği her y$\in$ R için $d_2^2(y) \in$ Z olur. Bu durum da Teorem 3.1.9 gereği R halkasının değişmeli olduğunu söyler.

Teorem 3.1.11. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d, R halkasında sıfırdan farklı bir türev olsun. Eğer her x $\in$ R için $[x,d(x)]$ $\in$ Z ise R değişmeli bir halkadır.

İspat : Burada her x, y $\in$ R için hipotezi lineerleştirirsek

$$[x+y,d(x+y)] = [x+y,d(x)+d(y)]$$

$$= [x,d(x)]+[x,d(y)]+[y,d(y)]+[y,d(x)]$$

olur. Z, R halkasının alt halkası olduğundan toplamaya kapalıdır. O halde

$$[x,d(y)]+[y,d(x)] \in Z\ , \forall x,y \in R \qquad (3.43)$$

elde edilir. (3.43) eşitliğinde y yerine $[x,y]$ yazarsak

$$[x,d([x,y])]+[[x,y],d(x)] = [x,[d(x),y]]+[x,[x,d(y)]]+[[x,y],d(x)] \in Z \qquad (3.44)$$

bulunur. Öte yandan jacobi özdeşliğinden $[x,[d(x),y]]+[y,[x,d(x)]]+[d(x),[y,x]] = 0$ dır. Burada $[d(x),[y,x]] = -[-[x,y],d(x)] = [[x,y],d(x)]$ olduğunu göz önüne alırsak (3.44) eşitliği

$$[x,[x,d(y)]] \in Z, \forall x \in R \qquad (3.45)$$

şeklini alır. (3.45) eşitliğinde x yerine x + d(y) yazarsak

$$[x+d(y),[x+d(y),d(y)]] = [x+d(y),[x,d(y)]]$$

$$= \left[x,\left[x,d(y)\right]\right]+\left[d(y),\left[x,d(y)\right]\right]$$

olur. Burada (3.45) eşitliği ve Z'nin alt halka olması dikkate alınırsa

$$\left[d(y),\left[d(y),x\right]\right]\in Z, \forall x,y\in R$$

elde edilir. $I_{d(y)}$: $R\rightarrow R$ iç türev olmak üzere ifade $I^2_{d(y)}\in Z$ şeklini alır. $\operatorname{char}R\neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.9 gereği R halkası değişmelidir veya $I_{d(y)} = 0$ olur. R halkası değişmeli değilse her $y \in R$ için $d(y) \in Z$ olur. Yani $d(R)\subset Z$ dir. Bu durumda R halkasının değişmeli olması demektir. O halde R değişmeli bir halkadır.

3.2 Yarı Türevli Halkalar

Chang, J., 1984

Bu makalede R bir asal halka, Z, R halkasının merkezi ve f, g örten fonksiyonu ile belirlenen bir yarı türev olarak kullanılacaktır.

Lemma 3.2.1. f, R halkasında g fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev ve $a\in R$ olsun. Eğer her $x\in R$ için af(x) = 0 (veya f(x)a = 0) ise a = 0 dır.

İspat : R bir halka olduğundan keyfi $x, y\in R$ için;

$$\begin{aligned} 0 &= af(xy) = a(f(x)g(y) + xf(y)) \\ &= af(x)g(y) + axf(y) \\ &= axf(y) \end{aligned}$$

olur. Her $x\in R$ elemanı için düşünüldüğünde

$$aRf(y) = 0$$

bulunur. R'nin asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } f(y) = 0, \forall y\in R$$

olur. $f\neq 0$ olması kullanılırsa a = 0 elde edilir. Benzer şekilde her $x\in R$ için f(x)a = 0 ise her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= f(xy)a = (f(x)g(y) + xf(y))a \\ &= f(x)g(y)a + xf(y)a \\ &= f(x)g(y)a \end{aligned}$$

bulunur. g'nin örtenliği dikkate alınıp, her $y\in R$ elemanı için düşünüldüğünde

$$f(x)Ra = 0, \forall x\in R$$

olur. R'nin asal halka olması ve $f\neq 0$ olması kullanılırsa a = 0 bulunur.

Teorem 3.2.1. f, R asal halkasında g fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev ise $g: R \rightarrow R$ bir halka homomorfizmdir.

İspat : g fonksiyonunun bir homomorfizm olması için iyi tanımlı, toplama ve çarpma işlemlerini koruması gerekir. g bir fonksiyon olduğundan iyi tanımlıdır. O halde toplama ve çarpma işlemlerini koruduğunun gösterilmesi gerekir. Keyfi x, y, $z \in R$ alınsın. Bu durumda yarı türev tanımı uygulansın.

$$\begin{aligned} f(z(x+y)) &= f(z)g(x+y) + zf(x+y) \\ &= f(z)g(x+y) + z(f(x)+f(y)) \\ &= f(z)g(x+y) + zf(x) + zf(y) \end{aligned}$$

Öte yandan

$$\begin{aligned} f(z(x+y)) &= f(zx+zy) \\ &= f(zx) + f(zy) \\ &= f(z)g(x) + zf(x) + f(z)g(y) + zf(y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu iki ifadenin eşitliği kullanılarak her $z \in R$ için düşünüldüğünde

$$f(R)(g(x+y) - g(x) - g(y)) = 0 \ , \ \forall x, y \in R$$

olur. Lemma 3.2.1 göz önüne alındığında $f \neq 0$ olduğundan

$$g(x+y) - g(x) - g(y) = 0 \ , \ \forall x, y \in R$$

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \ , \ \forall x, y \in R$$

elde edilir. Buda bize g'nin toplama işlemini koruduğunu gösterir.

Şimdi çarpma işlemini koruduğunu gösterelim. Yine keyfi x, y, $z \in R$ için yarı türev tanımını kullanalım

$$\begin{aligned} f((xy)z) &= f(xy)z + g(xy)f(z) \\ &= (f(x)y + g(x)f(y))z + g(xy)f(z) \\ &= f(x)yz + g(x)f(y)z + g(xy)f(z) \end{aligned}$$

Öte yandan

$$\begin{aligned} f(x(yz)) &= f(x)yz + g(x)f(yz) \\ &= f(x)yz + g(x)(f(y)z + g(y)f(z)) \\ &= f(x)yz + g(x)f(y)z + g(x)g(y)f(z) \end{aligned}$$

bulunur. Bu iki ifadenin eşit olması kullanılarak her $z \in R$ için düşünüldüğünde

$$(g(xy) - g(x)g(y))f(R) = 0 \ , \ \forall x, y \in R$$

olur. Lemma 3.2.1 göz önüne alındığında $f \neq 0$ olduğundan

$$g(xy) - g(x)g(y) = 0 \ , \ \forall x, y \in R$$

elde edilir. Bu ifadede bize g'nin çarpmayı koruduğunu gösterir. O halde g fonksiyonu aynı zamanda R üzerinde bir halka homomorfizmidir.

Lemma 3.2.2. f, R asal halkasında g fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev olmak üzere eğer f(R) $\subset$ Z ise R halkası bir değişmeli tamlık bölgesidir.

İspat : R halkasının değişmeli tamlık bölgesi olması için değişmeli ve sıfır bölensiz olduğunu göstermemiz gerekir. R bir halka olduğundan keyfi x, y$\in$ R için f(xy) $\in$ Z olur. O halde $\left[f(x),x\right] = 0$, $\left[x,x\right] = 0$, her y$\in$ R için f(y) $\in$ Z olması kullanılırsa

$$0 = \left[f(xy),x\right] = \left[f(x)g(y),x\right]+\left[xf(y),x\right]$$

$$= \left[f(x),x\right]g(y) + f(x)\left[g(y),x\right] + \left[x,x\right]f(y) + x\left[f(y),x\right]$$

$$= f(x)\ \left[g(y),x\right]$$

olur. g örten bir fonksiyon olduğundan her y$\in$ R için $f(x)\left[y,x\right] = 0$ elde edilir.

O halde her k$\in$ R için

$$0 = f(x)\left[ky,x\right] = f(x)k\left[y,x\right] + f(x)\left[k,x\right]y$$

$$= f(x)k\left[y,x\right]$$

elde edilir. Yani

$$f(x)R\left[y,x\right] = 0\ ,\ \forall x, y\in R$$

R asal halka olduğundan

$$f(x) = 0 \text{ veya } \left[y,x\right] = 0\ ,\ \forall x,y\in R$$

$$f(x) = 0 \text{ veya } x \in Z,\ \forall x\in R$$

olur. Burada A = $\left\{x\in R : f(x)=0\right\}$ = Kerf ve B = $\left\{x\in R : x\in Z\right\}$ şeklinde tanımlanırsa g özdeşlik dönüşümünden farklı olduğundan A$\cap$ B$\neq$ 0 ve R =A$\cup$ B olarak yazılabileceği görülür. Kerf ve Z, R halkasının iki ideali olduğundan aynı zamanda alt grupturlar. O halde Brauer's Trick ten R = A veya R = B olur. R = A ise her x $\in$ R için f(x) = 0 olur. Buda f$\neq$ 0 ile çelişir. Yani R$\neq$ A dır. O halde R = B olmalıdır. Bu durumda da her x$\in$ R için x$\in$ Z olur. Buda R halkasının değişmeli olması demektir.

Şimdi sıfır bölensizliği incelensin. Kabul edelim ki a, b$\in$ R ve a$\neq$0 olmak üzere ab = 0 olsun. R'nin değişmeli olmasını kullanırsak

$$0 = xab = axb$$

olur. Her x$\in$ R için

$$0 = aRb$$

bulunur. R'nin asal halka olması ve $a \neq 0$ olması kullanılırsa $b = 0$ elde edilir. Buda bize R halkasının sıfır bölensiz olduğunu söyler. Sonuçta R halkası değişmeli tamlık bölgesi bulunmuş olur.

Teorem 3.2.2. f, R asal halkasında g fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev ve $\left[f(R), f(R)\right] = 0$ olsun. Eğer karakteristik ikiden farklıysa R değişmeli tamlık bölgesidir. Eğer karakteristik iki ise R değişmeli veya merkezi 4 boyutlu basit cebirdir.

İspat : Hipotezi ve f'nin yarı türev olmasını kullanarak keyfi $x, y, z \in R$ için

$$0 = \left[f(x), f(yf(x))\right] = \left[f(x), f(y)f(z)\right] + \left[f(x), g(y)f^2(z)\right]$$

$$= \left[f(x), g(y)\right] f^2(z)$$

elde edilir. g örten bir fonksiyon olduğundan her $y \in R$ için

$$\left[f(x), y\right] f^2(z) = 0 \ , \ \forall x, z \in R$$

olur. Burada her $k \in R$ için

$$0 = \left[f(x), yk\right] f^2(z)$$

$$= \left[f(x), y\right] k f^2(z) + y\left[f(x), k\right] f^2(z)$$

$$= \left[f(x), y\right] k f^2(z)$$

bulunur. Bu durumda

$$\left[f(x), y\right] R f^2(z) = 0 \ , \ \forall x, y, z \in R$$

R asal olduğundan

$$\left[f(x), y\right] = 0 \text{ veya } f^2(z) = 0 \ , \ \forall x, y, z \in R$$

$$f(x) \in Z \text{ veya } f^2(z) = 0, \ \forall x, z \in R$$

$$f(R) \subset Z \text{ veya } f^2 = 0$$

Eğer $f(R) \subset Z$ ise $f \neq 0$ olduğundan Lemma 3.2.2 kullanılırsa R'nin değişmeli olduğu görülür. Bu durumda ispat biter. O halde $f^2 = 0$ olmalıdır. Şimdi iki farklı durumda inceleyelim. Kabul edelim ki $\text{char} R \neq 2$ olsun. O zaman $x, y \in R$ için $f^2(xy) = 0$ ve $fg = gf$ olmasını kullanılırsak

$$0 = f(f(xy))$$

$$= f(f(x)y + g(x)f(y))$$

$$= f^2(x)y + g(f(x))f(y) + f(g(x))f(y) + g^2(x) \ f^2(y)$$

$$=2f(g(x))f(y)$$

olur. $\mathrm{char}R \neq 2$ ve g'nin örtenliğini göz önüne aldığımızda

$$f(x)f(y)=0\ ,\ \forall x,y\in R$$

bulunur. $f\neq 0$ olduğundan Lemma 3.1.1'i kullanırsak her $y\in R$ için f(y) = 0 elde edilir. Bu ifade de $f\neq 0$ ile çelişir. O halde charR = 2 olmalıdır. $f^2=0$ olmasını kullanırsak

$$f(f(x))=0\ ,\ \forall x\in R$$

$$f(x)\in \mathrm{Ker}f\ ,\ \forall x\in R$$

elde edilir. Şimdi her $x\in \mathrm{Ker}f$ ve her $y,z\in R$ olmak üzere hipotezi uygularsak

$$0=\left[f(xy),f(z)\right]=\left[f(x)g(y)+xf(y),f(z)\right]$$

$$=\left[xf(y),f(z)\right]=\left[x,f(z)\right]f(y)\ ,\ \forall x\in \mathrm{Ker}f\ ,\ \forall y,z\in R$$

bulunur. Her $k\in R$ için ifade düzenlenirse

$$0=\left[xk,f(z)\right]f(y)$$

$$=\left[x,f(z)\right]kf(y)+x\left[f(y),f(z)\right]$$

olur. Yani

$$\left[x,f(z)\right]Rf(y)=0\ ,\ \forall x\in \mathrm{Ker}f\ ,\ \forall y,z\in R$$

elde edilir. R'nin asal olması kullanılırsa

$$\left[x,f(z)\right]=0 \text{ veya } f(y)=0\ ,\ \forall x\in \mathrm{Ker}f\ ,\ \forall y,z\in R$$

bulunur. $f\neq 0$ olduğundan her $x\in \mathrm{Ker}f$ ve $z\in R$ için $\left[x,f(z)\right]=0$ olur. Sonuçta

$$\left[\mathrm{Ker}f,f(R)\right]=0$$

olur. Kerf, R'nin bir ideali olduğundan $x\in \mathrm{Ker}f$ ve $y\in R$ için

$$f(\left[x,y\right])=\left[f(x),g(y)\right]+\left[x,f(y)\right]=0$$

bulunur. Yani her $x\in \mathrm{Ker}f$ ve her $y\in R$ için $\left[x,y\right]\in \mathrm{Ker}f$ olur. Bu durumda Kerf'in aynı zamanda bir Lie ideal olduğunu gösterir. O halde Teorem 2.2 gereği Kerf, R'nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar veya Kerf değişmeli ve her $a\in \mathrm{Ker}f$ için $a^2\in Z$'dir. Eğer $I\neq 0$, R'nin bir ideali olmak üzere $I\subset Z$ sağlanıyorsa f(I) = 0 olur. Buda f(R) = 0 anlamına gelir ve bir çelişkidir. O zaman Kerf değişmeli ve her $a\in \mathrm{Ker}f$ için $a^2\in Z$ sağlanır. Buda bize Teorem 2.3 den R asal halkasının merkezi 4 boyutlu basit cebir olduğunu söyler.

Teorem 3.2.3. f, R asal halkasında g fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev ve $a\in R$ olsun. Eğer $af(R)\subset Z$ ise a = 0 veya R halkası değişmelidir.

İspat : Kabul edelim ki $a \notin Z$ ve $a \neq 0$ olsun. Bu durumda $[a,a] = 0$ olmasını ve keyfi $x \in R$ için hipotezi kullanırsak

$$0 = [a, af(x)] = a[a, f(x)] \ , \ \forall x \in R$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeyi kullanarak ve $af([a,x]) \in Z$ olmasından faydalanarak

$$af([a,x]) = a([a, f(x)] + [f(a), g(x)])$$

$$= a[f(a), g(x)]$$

elde edilir. g'nin örtenliği dikkate alındığında her $x \in R$ için $a[f(a), x] \in Z$ bulunur. Burada x yerine xf(a) yazar ve bulunan ifadeyi kullanırsak

$$a[f(a), xf(a)] = a[f(a), x]f(a) + ax[f(a), f(a)]$$

bulunur. $a[f(a), x] \in Z$ ve $a[f(a), x]f(a) \in Z$ olduğundan $a[f(a), x] = 0$ veya $f(a) \in Z$ olur. Eğer $a[f(a), x] = 0$ ise her $k \in R$ için

$$0 = a[f(a), kx] = ak[f(a), x] + a[f(a), k]x$$

$$aR[f(a), x] = 0 \ , \ \forall x \in R$$

olur. R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } f(a) \in Z$$

bulunur. Her iki durumda da $f(a) \in Z$ olduğuna göre koşul $a = 0$ veya $f(a) \in Z$ şeklini alır. Eğer $a = 0$ ise bu kabulümüzle çelişir. O zaman $f(a) \in Z$ demektir. Hipotezden $af(a) \in Z$ olduğundan $a \in Z$ veya $f(a) = 0$ olmalıdır. $a \notin Z$ olduğundan $f(a) = 0$ olur. Şimdi $x \in R$ için

$$f(ax) = f(a)g(x) + af(x) = af(x) \in Z$$

bulunur. $af(x) \in Z$ ve hipotezden $af(ax) \in Z$ olduğundan $a \in Z$ veya her $x \in R$ için $af(x) = 0$ olur. $a \notin Z$ olduğundan her $x \in R$ için $af(x) = 0$ bulunur. $f \neq 0$ ve $a \in R$ olduğundan Lemma 3.2.1 göz önüne alındığında $a = 0$ olur. Buda kabulümüzle çelişir. O halde $a \in Z$ olmalıdır. Her $x \in R$ için $af(x) \in Z$ olduğundan eğer $a \in Z$ ise $a = 0$ veya her $x \in R$ için $f(x) \in Z$ olur. İlk durumda ispat biter. İkinci durumda $f \neq 0$ ve $f(R) \subset Z$ olması göz önüne alındığında Lemma 3.2.2 den R değişmelidir ve ispat biter.

Sonuç 3.2.1. d, R asal halkasında sıfırdan farklı bir türev ve $a \in R$ olsun. Eğer $ad(R) \subset Z$ ise $a = 0$ veya R değişmeli bir asal halkadır.

Sonuç 3.2.2. g, R asal halkasında özdeşlikten farklı bir epimorfizm ve $a \in R$ olsun. Eğer her $x \in R$ için $a(g(x) - x) \in Z$ ise $a = 0$ veya R değişmeli bir asal halkadır.

Makalenin bu bölümünden sonrası karakteristiğin ikiden farklı olması durumunda incelenmiştir.

Teorem 3.2.4. f, R asal halkasında g fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev ve $a \in R$ olsun. Eğer $[a, f(R)] = 0$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $a \notin Z$ olsun. Keyfi $x, y \in R$ için hipotezi uygularsak

$$\begin{aligned} 0 &= [a, f(xf(y))] \\ &= [a, f(x)f(y) + g(x)f^2(y)] \\ &= [a, g(x)]\, f^2(y) \end{aligned}$$

olur. g örten olduğundan her $x \in R$ için

$$[a, x]\, f^2(y) = 0 \ , \forall\, y \in R$$

bulunur. Her $k \in R$ için yukarıdaki ifadeyi kullanırsak

$$\begin{aligned} 0 &= [a, xk]\, f^2(y) \\ &= [a, x]\, k\, f^2(y) + x[a, k]\, f^2(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuçta

$$[a, x]\, R\, f^2(y) = 0 \ , \forall\, x, y \in R$$

olur. R asal halka olduğundan

$$[a, x] \text{ veya } f^2(y) = 0 \ , \ \forall\ x, y \in R$$

$$a \in Z \text{ veya } f^2(y) = 0 \ , \forall\ y \in R$$

bulunur. Eğer $a \in Z$ ise kabulümüzle çelişir. O halde her $y \in R$ için $f^2(y) = 0$ olmalıdır. Şimdi her $x, y \in R$ için incelersek

$$\begin{aligned} 0 &= f(f(xy)) \\ &= f(f(x)y + g(x)f(y)) \\ &= f^2(x)y + g(f(x))f(y) + f(g(x))f(y) + g^2(x)\ f^2(y) \\ &= 2\, f(g(x))f(y) \end{aligned}$$

olur. Burada $\mathrm{char}R \neq 2$ ve g'nin örtenliğini göz önüne aldığımızda

$$f(x)f(y) = 0 \ , \ \forall\, x, y \in R$$

bulunur. $f \neq 0$ olduğundan Lemma 3.1.1'i kullanırsak her $y \in R$ için $f(y) = 0$ elde edilir. Bu ifade de $f \neq 0$ olması ile çelişir. O halde kabul yanlış demektir. Yani $a \in Z$ olur ve ispat biter.

Teorem 3.2.5. f, R asal halkasında g fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev ve $a\in R$ olsun. Eğer $\left[a, f(R)\right]\subset Z$ ise $a\in Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $a\notin Z$ olsun. O zaman her $x\in R$ için $\left[a, f(\left[a, x\right])\right]\in Z$ olur.

$$\begin{aligned}\left[a, f(\left[a, x\right])\right] &= \left[a, \left[f(a), g(x)\right] + \left[a, f(x)\right]\right]\\ &= \left[a, \left[f(a), g(x)\right]\right] + \left[a, \left[a, f(x)\right]\right]\\ &= \left[a, \left[f(a), g(x)\right]\right]\end{aligned}$$

bulunur. O halde her $x\in R$ için g'nin örtenliği göz önüne alındığında $\left[a, \left[f(a), g(x)\right]\right]\in Z$ elde edilir.

Şimdi I_a: $R\rightarrow R$ iç türevini tanımlayalım. Her $x\in R$ için $I_a(x) = ax - xa$ şeklinde verilsin. O zaman ifademiz $I_a I_{f(a)}(R)\subset Z$ halini alır. Burada char$R\neq 2$ ve R asal halka olduğundan Teorem 3.1.10 gereği R değişmeli veya iç türevlerden biri sıfır olmalıdır. R halkasının değişmeliliği ispatı gereksiz kılar. O halde $I_a = 0$ veya $I_{f(a)} = 0$ olmalıdır. Eğer $I_a = 0$ ise $a\in Z$, $I_{f(a)} = 0$ ise $f(a)\in Z$ olur. İlk durum kabulümüz olan $a\notin Z$ ile çelişir. O zaman $f(a)\in Z$ bulunur. Hipotezi ,$\left[a, a\right] = 0$ ve $f(a)\in Z$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left[a, f(ax)\right] &= \left[a, f(a)g(x) + af(x)\right]\\ &= \left[a, f(a)g(x)\right] + \left[a, af(x)\right]\\ &= f(a)\left[a, g(x)\right] + a\left[a, f(x)\right]\end{aligned}$$

olur. Sonuçta

$$f(a)\left[a, g(x)\right] + a\left[a, f(x)\right]\in Z\ ,\ \forall x\in R \tag{3.46}$$

bulunur. (3.46) eşitliğini a ile değişmeli yaparak $\left[a, a\right] = 0$, $f(a)\in Z$ ve hipotezi uygulayarak

$$\begin{aligned}0 &= \left[a, f(a)\left[a, g(x)\right] + a\left[a, f(x)\right]\right]\\ &= f(a)\left[a, \left[a, g(x)\right]\right]\end{aligned}$$

elde edilir. g'nin örtenliği göz önüne alındığında

$$f(a)\left[a, \left[a, x\right]\right] = 0\ ,\ \forall x\in R$$

bulunur. Her $k\in R$ için yukarıdaki ifadeyi kullanırsak

$$f(a)R\left[a, \left[a, x\right]\right] = 0\ ,\ \forall x\in R$$

elde edilir. R asal olduğundan

$$f(a) = 0 \text{ veya } \left[a,\left[a,x\right]\right] = 0,\ \forall x \in R$$

olur. I_a: $R \to R$ iç türevini tanımlayalım. Her $x \in R$ için $I_a(x) = ax - xa$ şeklinde verilsin. O halde yukarıdaki ifade

$$f(a) = 0 \text{ veya } I_a I_a(R) = 0$$

şeklini alır. İki türevin çarpımı yine bir türev oluyorsa en az biri sıfırdır. O zaman koşul

$$f(a) = 0 \text{ veya } I_a = 0\ (a \in Z)$$

olur. Eğer $a \in Z$ ise kabul ile çelişir. Bu durumda $f(a) = 0$ olmalıdır. (3.46) ifadesinde yerine yazarsak

$$a\left[a, f(x)\right] \in Z,\ \forall x \in R$$

elde edilir. Hipotez ve yukarıdaki ifadeyi birlikte düşündüğümüzde

$$a \in Z \text{ veya } \left[a, f(x)\right] = 0,\ \forall x \in R$$

bulunur. Burada $a \notin Z$ olduğundan her $x \in R$ için $\left[a, f(x)\right] = 0$ olur. Bu durumda $f \neq 0$ olması göz önüne alınarak Teorem 3.2.4 uygulanırsa $a \in Z$ elde edilir ve ispat sonuçlandırılır.

Teorem 3.2.6. f, R asal halkasında g fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Eğer $\left[f(R), f(R)\right] \subset Z$ ise R değişmeli bir asal halkadır.

İspat : Hipotezden her $x \in R$ için $\left[f(x), f(R)\right] \in Z$ olur. Burada $f \neq 0$ olduğundan Teorem 3.2.5 kullanılırsa her $x \in R$ için $f(x) \in Z$ olduğu görülür. Şimdi de Lemma 3.2.2 dikkate alınırsa R halkasının değişmeli olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.7. f, R asal halkasında g fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Eğer $f^2(R) \subset Z$ ise R değişmeli bir asal halkadır.

İspat : Burada $x, y \in R$ için $fg = gf$ olmasını ve hipotezi uygulayalım,

$$\begin{aligned} f^2(\left[x,y\right]) &= f(\left[f(x),y\right] + \left[g(x),f(y)\right]) \\ &= \left[f^2(x),y\right] + \left[g(f(x)),f(y)\right] + \left[f(g(x)),f(y)\right] + \left[g^2(x),f^2(y)\right] \\ &= \left[f^2(x),y\right] + 2\left[f(g(x)),f(y)\right] + \left[g^2(x),f^2(y)\right] \\ &= 2\left[f(g(x)),f(y)\right] \end{aligned}$$

bulunur. $\mathrm{char}R \neq 2$ olması ve g'nin örtenliği dikkate alındığında

$$\left[f(x), f(y)\right] \in Z,\ \forall x, y \in R$$

elde edilir. $f \neq 0$ olduğundan Teorem 3.2.6 uygulanırsa R halkasının değişmeli olduğu görülür.

Teorem 3.2.8. f_1, f_2, R asal halkasında sırasıyla g_1, g_2 örten fonksiyonları ile birlikte sıfırdan farklı yarı türevler olsun. Eğer $f_1f_2(R)\subset Z$ ise R değişmeli bir asal halkadır.

İspat : R bir halka olduğundan keyfi x, $y\in R$ için $f_1f_2([x,y])\in Z$ olur.

$$\begin{aligned} f_1f_2([x,y]) &= f_1([f_2(x),y]+[g_2(x),f_2(y)]) \\ &= [f_1f_2(x),y]+[g_1f_2(x),f_1(y)] \\ &+ [f_1g_2(x),f_2(y)]+[g_1g_2(x),f_1f_2(y)] \\ &= [g_1f_2(x),f_1(y)] + [f_1g_2(x),f_2(y)] \end{aligned}$$

olur. $f_1f_2(x)$, $f_1f_2(y) \in Z$ olması kullanılırsa

$$[g_1f_2(x),f_1(y)] + [f_1g_2(x),f_2(y)] \in Z\,,\ \forall\, x, y\in R$$

bulunur. Burada y yerine $f_2(y)$ yazarak düzenlersek

$$[f_1(x),f_2^2(y)]\in Z\,,\ \forall\, x, y\in R$$

elde edilir. İfadeyi her $y\in R$ için $[f_1(R),f_2^2(y)]\in Z$ şeklinde düşünürsek $f_1\neq 0$ olduğundan Teorem 3.2.5 gereği her $y\in R$ için $f_2^2(y)\in Z$ olur. Şimdi de Teorem 3.2.7 kullanılırsa $f_2^2(R)\subset Z$ bulunur. Böylece R halkasının değişmeli olduğu görülür.

Teorem 3.2.9. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve f, R asal halkasında g örten fonksiyonu ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev olsun. Eğer her $a\in R$ için $[a,f(a)]\in Z$ ise R asal halkası değişmelidir.

İspat : Her $a\in R$ için $[a,f(a)]\in Z$ olduğundan ifadeyi lineerleştirirsek

$$\begin{aligned} [a+x,f(a+x)] &= [a,f(a)]+[x,f(a)]+[a,f(x)]+[x,f(x)] \\ &= [x,f(a)]+[a,f(x)] \end{aligned}$$

olur. Sonuçta

$$[x,f(a)]+[a,f(x)] \in Z,\ \forall\, x, a\in R$$

bulunur. Burada x yerine $[a,x]$ yazarak ve jacobi özdeşliğini kullanılarak düzenleme yaparsak

$$[a,[g(a),f(x)]] \in Z,\ \forall\, x, a\in R \tag{3.47}$$

elde edilir. Şimdi her $a\in R$ için

$$0=f([a,a]) = [f(a),a] + [g(a),f(a)]$$

olur. Aynı zamanda $\left[f(a),a\right]\in Z$ ve Z'nin R halkasının alt halkası olması göz önüne alındığında her $a\in R$ için $\left[g(a),f(a)\right]\in Z$ bulunur. Bu ifade de a yerine a + x yazarsak

$$\left[g(a+x),f(a+x)\right]=\left[g(a),f(a)\right]+\left[g(a),f(x)\right]+\left[g(x),f(a)\right]+\left[g(x),f(x)\right]$$

elde edilir. Yine her $a\in R$ için $\left[g(a),f(a)\right]\in Z$ ve Z'nin R halkasının alt halkası olması göz önüne alındığında $\left[g(a),f(x)\right]+\left[g(x),f(a)\right]\in Z$ olduğu görülür. Bu ifadeyi a ile değişmeli yaparsak

$$\left[a,\left[g(a),f(x)\right]\right]+\left[a,\left[g(x),f(a)\right]\right]=0\ ,\ \forall\, x,a\in R$$

bulunur. Burada Z'nin alt halka olması, g'nin örtenliği (3.47) özdeşliği kullanılırsa

$$\left[a,\left[x,f(a)\right]\right]\in Z,\ \forall\, x,a\in R$$

olur. Şimdi I_a: $R\rightarrow R$ iç türevini tanımlayalım. Her $x\in R$ için $I_a(x) = ax - xa$ şeklinde verilsin. O zaman ifademiz $I_a I_{f(a)}(R)\subset Z$ halini alır. Burada char$R\neq 2$ ve R asal halka olduğundan Teorem 3.1.10 gereği R değişmeli veya iç türevlerden biri sıfır olmalıdır. R halkası değişmeli ise ispat biter. O halde $I_a = 0$ veya $I_{f(a)} = 0$ olmalıdır. Bu durumda ifademiz

$$a\in Z \text{ veya } f(a)\in Z,\ \forall\ a\in R$$

olur. Burada $A=\{a\in R : a\in Z\}$ ve $B=\{a\in R : f(a)\in Z\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu iki kümenin her ikisi de R halkasının alt grubu olup $R = A\cup B$ şeklinde yazıldığı görülür. O halde Brauer Trick ten R = A veya R = B olmalıdır. R = A ise her $a\in R$ için $a\in Z$ olur. Buda R halkasının değişmeli olması demektir. O halde $R\neq A$ olur. Yani R = B dir. Bu durumda her $a\in R$ için $f(a)\in Z$ olur. Bu ise $f\neq 0$ olduğundan Lemma 3.2.2 gereği R halkasının değişmeli olması anlamına gelir ve ispat biter.

Sonuç 3.2.3. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve g, R asal halkasında özdeşlik dönüşümünden farklı bir epimorfizm olsun. Eğer her $x\in R$ için $\left[x,g(x)\right]\in Z$ ise R halkası değişmelidir.

BÖLÜM 4
TÜREV VE YARI TÜREVLİ LİE İDEALLER

Bu bölümde 3. bölümde verilen makalelerdeki durumlar için halka yerine halkanın bir Lie ideali alınarak Bergen, J. ve Ark. ile Lee, P. H. ve Lee, T. K.tarafından R, CharR$\neq$ 2 olan bir asal halka, d sıfırdan farklı bir türev ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere aUb = 0, d(U)$\subset$Z, td(U) = 0, $\left[a, d(U)\right] \subset Z$, $d\delta(U) \subset Z$ ve her u$\in$ U için $\left[u, d(u)\right] \in Z$ olması durumunda U$\subset$ Z olduğunu gösteren çalışmalar ile Bell, H. E. ve Martindale, W. S. Tarafından R bir asal halka, f, R halkasının g dönüşümü ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türev, U, R halkasının sıfırdan farklı ideali ve a$\in$ R olmak üzere af(U) = 0, f(U) $\subset$ Z ve $\left[f(U), f(U)\right] \subset Z$ olduğunda halkanın değişmeli olduğu incelenerek Bölüm 3 genişletilmiştir.

4.1 Türevli Halkalar Ve Lie İdealler

Bergen, J., Herstein, İ.N ve Kerr, J.W.,1981

Lemma 4.1.1. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının $U \not\subset Z$ olan bir Lie ideali ise $\left[M, R\right] \subset U$ fakat $\left[M, R\right] \not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının bir M ideali vardır.

İspat : T(U) = $\left\{x \in R : \left[x, R\right] \subset U\right\}$ kümesi tanımlansın. Önce T(U) kümesinin, R halkasının bir lie ideali ve alt halkası olduğu ispatlansın. Burada her u $\in$ U için $\left[u, R\right] \subset U$ olduğundan (0)$\neq$U$\subset$ T(U) olur. Her a, b $\in$ T(U) ve r $\in$ R için $\left[a+b, r\right] = \left[a, r\right] + \left[b, r\right] \in U$ dir. Yani a + b $\in$ T(U) bulunur. Öte yandan T(U) kümesini tanımından $\left[T(U), R\right] \subset U$ olduğundan $\left[T(U), R\right] \subset U \subset T(U)$ olur. Yani $\left[T(U), R\right] \subset T(U)$ elde edilir. O halde T(U) R halkasının bir lie idealidir. Her a, b $\in$ T(U) ve her r $\in$ R için

$$\begin{aligned} \left[a, br\right] + \left[b, ra\right] &= \left[a, b\right]r + b\left[a, r\right] + r\left[b, a\right] + \left[b, r\right]a \\ &= abr - bar + bar - bra + rba - rab + bra - rba \\ &= abr - rab = \left[ab, r\right] \end{aligned}$$

olur. Yani $\left[ab, r\right]$ $\in$ U olduğundan ab $\in$ T(U) bulunur. O halde T(U), R halkasının bir alt halkasıdır. R asal halka, charR$\neq 2$, (0) $\neq$T(U) , R halkasının lie ideali ve alt halkası olduğundan Önerme 2.9 gereği T(U) $\subset$ Z veya R’nin sıfırdan farklı bir M idealini kapsar.

$T(U) \subset Z$ ise $T(U) \subset U \subset Z$ olduğundan $U \subset Z$ bulunur. Buda hipotezimizle çelişir. O halde T(U), R halkasının sıfırdan farklı bir M idealini kapsar. Yani $M \subset T(U)$ olur. O zaman T(U) tanımından $[M,R] \subset U$ bulunur. Burada $[M,R] \subset Z$ ise her x, y $\in$ R ve her m $\in$ M için $[m,xy]=[m,x]y+x[m,y] \in Z$ olduğundan a $\in$ R için ifadeyi değişmeli yaparsak

$$0 = [[m,x]y+x[m,y],a]=[[m,x]y,a]+[x[m,y],a]$$

$$= [m,x][y,a]+[[m,x],a]y+x[[m,y],a]+[x,a][m,y]$$

olur. Burada her m $\in$ M için $[m,x] \in Z$ olması kullanılırsa

$$0 = [m,x][y,a]+[x,a][m,y] \ , \ \forall x,y \in R \, , \ \forall m \in M \tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) eşitliğinde y yerine x alırsak $2[m,x][x,a]=0$ olur. char$R \neq 2$ olduğundan $[m,x][x,a]=0$ bulunur. Her m $\in$ M için $[m,x] \in Z$ olduğu için

$$0 = [m,x]R[x,a], \ \forall x \in R \, , \ \forall m \in M$$

olur. R asal halka olduğundan $[m,x]=0$ veya $[x,a]=0$ bulunur. Burada x $\in$ Z olması $[m,x]=0$ olmasını gerektirdiğinden her m $\in$ M ve her x $\in$ R için $[m,x]=0$ elde edilir. Yani $M \subset Z$ olur. Buda R halkasının değişmeli olması demektir. Bu durum $U \not\subset Z$ ile çelişir. O halde $M \not\subset Z$ ve $[M,R] \not\subset Z$ dir.

Lemma 4.1.2. U, R halkasının bir Lie ideali ve $U \not\subset Z$ ise $C_R(U) = Z$ dir.

İspat : $C_R(U) = \{u \in U : [u,x]=0, \forall x \in R\}$ kümesinin R halkasının bir lie ideali ve alt halkası olduğu gösterilsin. $(0) \neq U$ lie ideal olduğundan $(0) \neq C_R(U)$ olur. O halde her a, b $\in$ $C_R(U)$ ve u $\in$ U için $[a+b,u]=[a,u]+[b,u]$ = 0 olduğundan a + b $\in$ $C_R(U)$ bulunur. Öte yandan $[ab,u]=[a,u]b+a[b,u]=0$ olduğundan ab $\in$ $C_R(U)$ olup $C_R(U)$, R halkasının bir alt halkasıdır. Her a $\in$ $C_R(U)$, her r $\in$ R ve her u $\in$ U için jacobi özdeşliğinden $[[a,r],u]+[[u,a],r]+[[r,u],a]=0$ dır. Her a $\in$ $C_R(U)$ için $[[u,a],r]=0$ ve $[[r,u],a]=0$ olduğundan

$$[[a,r],u]=0 \, , \forall r \in R, \forall u \in U, \forall a \in C_R(U)$$

elde edilir. O halde her $a \in C_R(U)$ ve her $r \in R$ için $[a,r] \in C_R(U)$ olur. O zaman $C_R(U)$ aynı zamanda bir lie idealdir. Burada her $a \in Z$ için $[a,U] \subset [a,R]=(0)$ olup $a \in C_R(U)$ bulunur.

Yani $Z \subset C_R(U)$ olur. Eğer $C_R(U) \not\subset Z$ ise Lemma 4.1.1 gereği $[M,R] \subset C_R(U)$ ve $[M,R] \not\subset Z$ olacak şekilde R halkasında bir M ideali vardır. Burada $C_R(U)$ lie ideal ve alt halka olduğundan Önerme 2.9 gereği $M \subset C_R(U)$ veya $C_R(U) \subset Z$ olur. Eğer $M \subset C_R(U)$ ise $[M,U] = (0)$ olur. Buradan $U \subset Z$ elde edilir. Bu ise $U \not\subset Z$ ile çelişir. O halde $M \not\subset C_R(U)$ olur. Yani $C_R(U) \subset Z$ dir. O zaman $Z \subset C_R(U)$ ve $C_R(U) \subset Z$ olduğundan $C_R(U) = Z$ bulunur.

Lemma 4.1.3. U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $[a,[U,U]] = (0)$ ise $[a,U] = (0)$ olur. O halde $C_R([U,U]) = C_R(U)$ olur.

İspat : Öncelikle $C_R([U,U]) \subset C_R(U)$ olduğu incelesin. $a \in C_R([U,U])$ olsun. Kabul edelim ki $[U,U] \not\subset Z$ olsun. O zaman $[U,U]$ Lie ideal olduğundan Lemma 4.1.2 gereği $C_R([U,U]) = Z$ bulunur. Yani $a \in Z$ dir. Buradan her $a \in C_R([U,U])$ için $[a,U] \subset [a,R] = (0)$ olup $a \in C_R(U)$ elde edilir. Yani $C_R([U,U]) \subset C_R(U)$ dur. $[U,U] \subset Z$ olsaydı her $u \in U$ ve her $x \in R$ için $a = [u,[u,x]] \in [U,U] \subset Z$ ve $[u,[u,ux]] \in Z$ olup

$$\begin{aligned}[u,[u,ux]] &= [u,[u,u]x] + [u,u[u,x]] \\ &= u[u,[u,x]] = ua\end{aligned}$$

bulunur. Burada $a \in Z$ ve $ua \in Z$ olduğundan $a = 0$ veya her $u \in U$ için $u \in Z$ dir. Eğer $a = 0$ ise $I_u : R \rightarrow R$ iç türev olmak üzere $I_u^2 = 0$ olur. R asal halka ve $\mathrm{Char}R \neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.1 gereği $I_u = 0$ bulunur. Yani her $u \in U$ için $u \in Z$ dir. O zaman her iki durumda da her $u \in U$ için $u \in Z$ olup $[a,u] = 0$ bulunur. Yani $a \in C_R(U)$ olur. O halde $C_R([U,U]) \subset C_R(U)$ elde edilir. Şimdi $C_R(U) \subset C_R([U,U])$ olduğu gösterilsin. Her $a \in C_R(U)$ ve her $u \in U$ için $[a,u] = 0$ olur. Burada $[U,U] \subset U$ olduğundan her $u \in [U,U]$ için de $[a,u] = 0$ bulunur. Yani $[a,[U,U]] = 0$ elde edilir. O halde $a \in C_R([U,U])$ olur. O zaman $C_R(U) \subset C_R([U,U])$ bulunmuş oldu. Sonuçta $C_R(U) = C_R([U,U])$ elde edilir.

Lemma 4.1.4. U, R halkasının $U \not\subset Z$ olan bir Lie ideali olsun. aUb = (0) ise a = 0 veya b = 0 dır.

İspat : U, R halkasının lie ideali ve $U \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.1 gereği R halkasında $[M,R] \not\subset Z$ ve $[M,R] \subset U$ olacak şekilde bir M ideali vardır. Her $u \in U$, her $m \in M$ ve her $y \in R$ için $[mau, y] \in [M,R] \subset U$ ve aUb = 0 olduğundan $a[mau, y]b = 0$ olur. Buradan

$$0 = a[mau,y]b = a[ma,y]ub + ama[u,y]b$$
$$= a[ma,y]ub = a(may - yma)ub$$
$$= amayub$$

elde edilir. Bu durumda amaRub = (0) ve R asal halka olduğundan her $m \in M$ için ama = 0 veya her $u \in U$ için ub = 0 olur. Eğer $a \neq 0$ ise her $m \in M$ için $ama \neq 0$ bulunur. O halde her $u \in U$ için ub = 0 elde edilir. Her $x \in R$ ve her $u \in U$ için $[u,x] \in U$ olduğundan

$$0 = [u,x]b = (ux - xu)b = uxb - xub = uxb$$

elde edilir. R asal halka olduğundan her $u \in U$ için u = 0 veya b = 0 olur. $U \neq (0)$ olduğundan b = 0 bulunur.

Lemma 4.1.5. U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. d(U) = (0) ise $U \subset Z$ dir.

İspat : Hipotezden her $x \in R$ ve her $u \in U$ için $[u,x] \in U$ olduğundan $d([u,x]) = 0$ olur.

$$0 = d([u,x]) = [d(u),x] + [u,d(x)] = [u,d(x)]$$

bulunur. Yani her $u \in U$ için $[u,d(R)] = 0$ elde edilir. R asal halka, $d \neq 0$ ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.7 gereği her $u \in U$ için $u \in Z$ olur. Yani $U \subset Z$ bulunur.

Lemma 4.1.6. U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d(U) \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $U \not\subset Z$ olsun. O zaman Lemma 4.1.3 gereği $V = [U,U] \not\subset Z$ olur. Hipotezden her w, $u \in U$ için $d([u,w]) = [d(u),w] + [u,d(w)] = 0$ bulunur. Yani $d([U,U]) = d(V) = (0)$ olur. Burada V lie ideal ve $d \neq 0$ olduğundan Lemma 4.1.5 gereği $V \subset Z$ elde edilir. Bu ise $[U,U] \not\subset Z$ ile çelişir. O halde kabul yanlıştır. Yani $U \subset Z$ olur.

Lemma 4.1.7. U, R halkasının $U \not\subset Z$ olan bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. td(U) = (0) ise t = 0 olur.(veya d(U)t = 0 ise t = 0)

İspat : Her x $\in$ R, her u $\in$ U için $[u,xu] = (uxu - xuu) = (ux - xu)u = [u,x]u \in U$ olur. Hipotezden her x $\in$ R ve her u $\in$ U için

$$0 = td([u,x]u) = td([u,x])u + t[u,x]d(u) = t[u,x]d(u)$$

elde edilir. Burada her v $\in$ U, her y $\in$ R için x yerine d(v)y yazarsak

$$0 = t[u,d(v)y]d(u) = t[u,d(v)]yd(u) + td(v)[u,y]d(u)$$

$$= t[u,d(v)]yd(u)$$

bulunur. Bu durumda her u, v $\in$ U için $t[u,d(v)]Rd(u) = (0)$ olur. R asal halka olduğundan d(u) = 0 veya $t[u,d(v)] = 0$ olmalıdır. d(U) = 0 ise Lemma 4.1.5 gereği $U \subset Z$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde her u, v $\in$ U için $t[u,d(v)] = 0$ olur. Buradan

$$t[u,d(v)] = t(ud(v) - d(v)u) = tud(v)$$

elde edilir. O halde her $v \in U$ için tUd(v) = (0) olur. $U \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.4 gereği t = 0 veya her v $\in$ U için d(v) = 0 bulunur. Eğer d(U) = 0 ise $d \neq 0$ olduğundan Lemma 4.1.5 gereği $U \subset Z$ elde edilir. Bu ise $U \not\subset Z$ ile çelişir. O halde t = 0 bulunur. Aynı şekilde d(U)t = 0 ise her u $\in$ U ve her x $\in$ R için $u[u,x] \in U$ olduğundan $d(u[u,x])t = 0$ olur. Buradan $d(u[u,x])t = d(u)[u,x]t + ud([u,x])t = d(u)[u,x]t = 0$ bulunur. Burada y $\in$ R ve her v $\in$ U için x yerine yd(v) yazılıp işlem yapılırsa $d(u)y[u,d(v)]t = 0$ elde edilir. Bu durumda her u,v $\in$ U için $0 = d(u)R[u,d(v)]t$ olur. R asal halka olduğundan d(U) = 0 veya $[u,d(v)]t = 0$ bulunur. d(U) = 0 ise Lemma 4.1.5 den çelişki bulunur. O halde $[u,d(v)]t = 0$ olmalıdır. O zaman her u, v $\in$ U için

$$0 = [u,d(v)]t = ud(v)t - d(v)ut = -d(v)ut$$

elde edilir. Yani her v $\in$ U için d(v)Ut = 0 olur. $U \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.4 gereği d(U) = 0 veya t = 0 bulunur. d(U) = 0 olması $U \not\subset Z$ ile çelişeceğinden t = 0 elde edilir.

Teorem 4.1.1. U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d^2(U) = (0)$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $U \not\subset Z$ olsun. U lie ideali ve $U \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.1 gereği R halkasının $[M,R] \subset U$ ve $[M,R] \not\subset Z$ olan bir M ideali vardır. Her u $\in$ U, her m

$\in [M,R] \subset M \cap U$ ve her $w = d(u) \in d([U,U]) \subset U$ için $d(w) = d(d(u)) = d^2(u) = 0$ olur. Her $y \in R$, her $mw \in M$ için $[mw,y] \in [M,R] \subset U$ ve $d^2(U) = 0$ olduğundan $d^2([mw,y])$ $= 0$ olur.

$$0 = d^2([mw,y]) = [d^2(mw),y] + 2[d(mw),d(y)] + [mw,d^2(y)]$$

$$= [d^2(m)w + 2d(m)d(w) + md^2(w),y] + [d(m)w + md(w),y] + [mw,d^2(y)]$$

elde edilir. Burada $d^2(m) = d^2([w,y]) = d^2([m,y]) = d(w) = d^2(w) = 0$ olduğundan

$$2d(m)d([w,y]) = 0, \forall m \in M, \forall w \in U, \forall y \in R$$

bulunur. $charR \neq 2$ olduğundan $d(m)d([w,y]) = 0$ olur. Böylece her $u \in [U,U]$, her $x \in R$ için $d([M,R])d([d(u),x]) = 0$ elde edilir. $[M,R] \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.7 gereği her $u \in [U,U]$ ve her $x \in R$ için $d([d(u),x]) = 0$ olur. Buradan

$$0 = d([d(u),x]) = [d^2(u),x] + [d(u),d(x)] = [d(u),d(x)]$$

bulunur. O halde her $u \in [U,U]$ için $[d(u),d(R)] = (0)$ elde edilir. Buradan R asal halka, $charR \neq 2$ ve $d \neq 0$ olduğundan Teorem 3.1.7 gereği her $u \in [U,U]$ için $d(u) \in Z$ olur. Yani $d([U,U]) \subset Z$ bulunur. Buradan Lemma 4.1.6 gereği $[U,U] \subset Z$ olur. Yani her $a \in R$ için $[a,[U,U]] = 0$ olup Lemma 4.1.3 gereği $[a,U] = 0$ bulunur. Burada $I_a : R \to R$ iç türev olmak üzere ifade $I_a(U) = 0$ şeklini alır. O halde Lemma 4.1.5 gereği $U \subset Z$ elde edilir. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Sonuçta $U \subset Z$ bulunur.

Sonuç 4.1.1. R karakteristiği ikiden farklı yarı-asal bir halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $a \in R$ için $[a,[a,U]] = 0$ ise $[a,U] = 0$ olur.

Uyarı 4.1.1 : U ve $[U,U]$, R halkasında sıfırdan farklı bir Lie ideal olmak üzere $[U,U] \subset Z$ ise $U \subset Z$ olur.

İspat : $[U,U] \subset Z$ ise her $x \in R$ için $[x,[U,U]] = (0)$ olur. Buradan Sonuç 4.1.1 gereği $[x,U] = (0)$ bulunur. O halde $U \subset Z$ olur.

Teorem 4.1.2. U, R halkasının $U\not\subset Z$ olan bir Lie ideali, d R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ise $C_R(d(U)) = Z$ dir.

İspat : Öncelikle $C_R(d(U)) \subset Z$ olduğu gösterilsin. Kabul edelim ki $C_R(d(U)) \not\subset Z$ olsun. O halde $a\notin Z$ olacak şekilde en az bir $a \in C_R(d(U))$ vardır. Burada $U \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.3 gereği $[U,U] \not\subset Z$ bulunur. $a \in C_R(d(U))$ olduğundan her $u \in U$ için $[a,d(u)]=0$ olur. Öte yandan $d([U,U])\subset U$ olduğundan her $u \in [U,U]$ için $[a,d^2(u)]=0$ ve $[U,U] \subset U$ olduğundan her $u \in [U,U]$ için $[a,d(u)]=0$ olur. Her $u\in [U,U]$ için

$$0 = d([a,d(u)])=[d(a),d(u)]+[a,d^2(u)]=[d(a),d(u)]$$

elde edilir. Yani $[d(a),d([U,U])]=(0)$ olur. O halde a, $d(a) \in C_R(d([U,U]))$ elde edilir. Her $u \in [U,U]$ için $[a,u]\in[U,U]$ olduğundan $d([a,u]) \in d([U,U])$ yazılır. Buradan

$$d([a,u])=[d(a),u]+[a,d(u)]=[d(a),u] \in d([U,U])$$

bulunur. O halde her $u \in [U,U]$ için $[d(a),[d(a),u]]=0$ olur. Buradan Sonuç 4.1.1 gereği $[d(a),[U,U]]= (0)$ elde edilir. Yani $d(a) \in C_R([U,U])$ olur. $[U,U] \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.2 gereği $C_R([U,U]) = Z$ bulunur. O halde $d(a) \in Z$ elde edilir. Yani $a\in C_R(d(U))$ ise $d(a) \in Z$ dir. Burada her $u\in U$ için $[a^2,d(u)]=[a,d(u)]a+a[a,d(u)]=0$ olduğundan $a^2 \in C_R(d(U))$ dolayısıyla $d(a^2) \in Z$ olur.

$$d(a^2) = ad(a) + d(a)a = 2ad(a) \in Z$$

bulunur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan $ad(a) \in Z$ elde edilir. $d(a) \in Z$ olduğundan $d(a) = 0$ veya $a \in Z$ olur. $a\notin Z$ olduğundan her $a\in C_R(d(U))$ için $d(a) = 0$ bulunur. Şimdi $W = \{x \in R : d(x)=0\}$ kümesi tanımlansın. Her $a\in C_R(d(U))$ için $d(a) = 0$ olduğundan $a \in W$ bulunur. Yani $C_R(d(U)) \subset W$ olur. Her $a\in C_R(d(U))$ ve her $u\in U$ için $d([a,u])=[d(a),u]+[a,d(u)]=0$ olduğundan $[a,u]\in W$ elde edilir. Yani $[a,U]\subset W$ olur. $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.1 gereği $[M,R]\subset U$ ve $[M,R]\not\subset Z$ olacak şekilde bir M ideali vardır. Burada $m\in [M,R]$, $a\in C_R(d(U))$ ve $u\in U$ için $[ma,u]\in U$ olduğundan

$$0 = [a,d([ma,u])]=[a,d(m[a,u]+[m,u]a)]$$

$$= \left[a, d(m)\left[a,u\right] + md(\left[a,u\right])\right] + \left[a, d(\left[m,u\right])a + \left[m,u\right]d(a)\right]$$

elde edilir. Burada $d(\left[a,u\right]) = d(a) = \left[a, d(m)\right] = \left[a, d(\left[m,u\right])\right] = 0$ olması kullanılırsa

$$0 = d(m)\left[a,\left[a,u\right]\right], \ \forall m \in \left[M,R\right], \forall u \in U$$

bulunur. Yani her $u \in U$ için $d(\left[M,R\right])\left[a,\left[a,u\right]\right] = (0)$ olur. Bu durumda $\left[M,R\right] \not\subset Z$ ve $\left[M,R\right]$ Lie ideal olduğundan Lemma 4.1.7 gereği her $u \in U$ için $\left[a,\left[a,u\right]\right] = 0$ elde edilir. O halde Sonuç 4.1.1 gereği her $u \in U$ için $\left[a,u\right] = 0$ olur. Yani $a \in C_R(U)$ elde edilir. Burada $U \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.2 gereği $C_R(U) = Z$ ve dolayısıyla $a \in Z$ bulunur. Bu ise $a \notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde $C_R(d(U)) \subset Z$ olur. Eğer $a \in Z$ ise her $u \in U$ için $\left[a, d(u)\right] = 0$ olur. Yani $a \in C_R(d(U))$ olur. O halde $Z \subset C_R(d(U))$ olup $C_R(d(U)) = Z$ elde edilir.

Teorem 4.1.3. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının $U \not\subset Z$ olan bir Lie ideali, δ ve d, R halkasının türevleri olsun. $\delta d(U) = (0)$ ise $d = 0$ veya $\delta = 0$ olur.

İspat : Kabul edelim ki $d \neq 0$ ve $\delta \neq 0$ olsun. Burada her $v \in V = \left[U,U\right]$, $d(v) \in U$ için hipotezi kullanırsak

$$0 = \delta(d(\left[u, d(v)\right])) = \delta(\left[d(u), d(v)\right] + \left[u, d^2(v)\right])$$

$$= \left[\delta d(u), d(v)\right] + \left[d(u), \delta d(v)\right] + \left[\delta(u), d^2(v)\right] + \left[u, \delta d^2(u)\right]$$

$$= \left[\delta(u), d^2(v)\right]$$

bulunur. Yani her $v \in V$ için $d^2(v) \in C_R(\delta(U))$ elde edilir. $\delta \neq 0$ ve $U \not\subset Z$ olduğundan Teorem 4.1.2 gereği $C_R(\delta(U)) = Z$ olur. O halde $d^2(v) \in Z$ olup her $v \in V$ ve her $r \in R$ için

$$0 = \delta(d(\left[d(v), r\right])) = \delta(\left[d(v), r\right] + \left[d(v), d(r)\right]) = \delta(\left[d(v), d(r)\right])$$

$$= \left[\delta d(v), d(r)\right] + \left[d(v), \delta d(r)\right]$$

elde edilir. Burada her $r \in R$ için $\left[d(V), \delta d(r)\right] = (0)$ olduğundan $\delta d(r) \in C_R(d(V))$ olur. $d \neq 0$ ve $U \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1.3 gereği $\left[U,U\right] \not\subset Z$ ve dolayısıyla Teorem 4.1.2 gereği $C_R(d(V)) = Z$ bulunur. O halde $\delta d(R) \subset Z$ olur. Burada her $v \in V$ ve her $u \in U$ için

$$\delta d(d(v)u) = \delta(d^2(v)u + d(v)d(u))$$

$$= \delta d^2(v)u + d^2(v)\delta(u) + \delta d(v)d(u) + d(v)\delta d(u)$$

$$= d^2(v)\delta(u) \in Z$$

elde edilir. Burada $d^2(v) \in Z$ olduğundan $d^2(v) = 0$ veya $\delta(u) \in Z$ bulunur. $\delta \neq 0$ ve U lie ideal olduğundan Lemma 4.1.6 gereği $U \subset Z$ olur. Bu ise $U \not\subset Z$ ile çelişir. O halde her $v \in V$ için $d^2(v) = 0$ yani $d^2(V) = (0)$ bulunur. Burada V Lie ideal ve $d \neq 0$ olduğundan Teorem 4.1.1 gereği $V \subset Z$ elde edilir. Bu ise $V \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde $d = 0$ veya $\delta = 0$ olur.

Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1983

Lemma 4.1.7. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali, d, R halkasında sıfırdan farklı bir türev ve $d(Z) \neq 0$ olsun. Eğer $a \in R$ ve $[a, d(U)] \subseteq Z$ ise $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

İspat : $d(Z) \neq 0$ olduğudan kabul edelim ki bir $\alpha \in Z$ için $d(\alpha) \neq 0$ olsun. Burada $\alpha \in Z$ olduğundan her $x \in R$ için $[\alpha, x] = 0$ olur. Bu durumda d'nin türev olması kullanılırsa

$$0 = d([\alpha, x]) = [d(\alpha), x] + [\alpha, d(x)]$$

$$= [d(\alpha), x]$$

olur. Buradan her $x \in R$ için sağlandığından $d(\alpha) \in Z$ bulunur. Her $u \in U$ ve her $x \in R$ için U bir Lie ideal olduğundan $\alpha[u, x] = [u, \alpha x] \in U$ olur. Buradan her $a, x \in R$, her $u \in U$ ve $\alpha \in Z$ için kabul ve $d(\alpha) \in Z$ uygulanırsa

$$[a, d(\alpha[u, x])] = [a, d(\alpha)[u, x]] + [a, \alpha d([u, x])]$$

$$= d(\alpha)[a, [u, x]] + [a, d(\alpha)][u, x]$$

$$+ [a, \alpha]d([u, x]) + \alpha[a, d([u, x])]$$

$$= d(\alpha)[a, [u, x]] + \alpha[a, d([u, x])]$$

olur. Hipotez, $\alpha \in Z$ ve Z'nin alt halka olması kullanılarak

$$d(\alpha)[a, [u, x]] \in Z, \ \forall a, x \in R, \ \forall u \in U$$

bulunur. Burada $d(\alpha) \in Z$ olduğu için $d(\alpha) = 0$ veya $[a, [u, x]] \in Z$ elde edilir. $d(\alpha) = 0$ kabul ile çelişeceğinden her $a, x \in R$ ve her $u \in U$ için $[a, [u, x]] \in Z$ olur. Bu durumda

$[a, [U, R]] \subseteq Z$ olduğu için her $a \in R$ için $[a, [a, [U, R]]] = (0)$ olur. $I_a : R \to R$ şeklinde iç türev tanımlansın. $I_a(x) = ax - xa$ olarak verilsin. Buradan ifade $I_a^2([U, R]$

) = (0) şeklini alır. $[U,R]$, R halkasının bir lie ideali olması göz önüne alınırsa Teorem 4.1.3 gereği $I_a = 0$ veya $[U,R] \subseteq Z$ olur. Yani $a \in Z$ veya $[U,R] \subseteq Z$ bulunur. Sonuçta $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ elde edilir.

Teorem 4.1.4. d, R asal halkasında sıfırdan farklı bir türev olsun. $d^2(U) \subseteq Z$ ise $U \subseteq Z$ dir.

İspat : U lie ideal olduğu için $[U,U] \subset U$ kümesi de R halkasının bir lie idealidir. Burada $d^2([U,U]) \subset d(U) \subseteq Z$ ve $d^2(U) \subseteq Z$ olması kullanılırsa, her u, v $\in$ U için;

$$\begin{aligned} d^2([u,v]) &= [d^2(u),v] + 2[d(u),d(v)] + [u,d^2(v)] \\ &= 2[d(u),d(v)] \end{aligned}$$

olur. Buradan her u, v $\in$ U için $[d(u),d(v)] \in Z$ bulunur. Şimdi kabul edelim ki $d(z) \neq 0$ olsun. Burada her u $\in$ U için $[u,d(U)] \subseteq Z$ olur. $d \neq 0$ olduğu için Lemma 4.1.7 gereği her $u \in U$ için $u \in Z$ veya $U \subset Z$ bulunur. Her iki durumda da $U \subset Z$ olup ispat biter. O zaman kabul yanlıştır. Yani d(z) = 0 olmalıdır. Aynı zamanda $d^3(U) = d(d^2(U)) \subseteq d(Z) = 0$ olduğu görülür. Bu $d^3(R) = 0$ demektir. Kabul edelim ki sabit $u \in U$ için $d^2(u) = 0$ olsun. O zaman u, v $\in$ U için $u[u,d(v)] = u(ud(v)) - ud(v)u = [u,ud(v)] \in U$ olur. Bu durum göz önüne alınarak kabul ve hipotez kullanılırsa

$$\begin{aligned} d^2(u[u,d(v)]) &= d^2(u)[u,d(v)] + 2d(u)d([u,d(v)]) + ud^2([u,d(v)]) \\ &= 2d(u)([d(u),d(v)] + [u,d^2(v)]) \\ &\quad + u([d^2(u),d(v)] + 2[d(u),d^2(v)] + [u,d^3(v)]) \\ &= 2\,d(u)[d(u),d(v)] \end{aligned}$$

bulunur. O halde $d(u)[d(u),d(v)] \in Z$ elde edilir. Buradan her v $\in$ U elemanı için $[d(u),d(v)] \in Z$ olması kullanılırsa

$$d(u) \in Z \text{ veya } [d(u),d(v)] = 0,\ \forall v \in U$$

olur. Eğer her $v \in U$ için $[d(u),d(v)] = 0$ ise $d(u) \in C_R(d(U)) = Z$ bulunur. Yani $d^2(u) = 0$ ise d(u) $\in$ Z dir. O zaman her $u \in U$ için

$d^2([u,d^2(R)]) = [d^2(u),d^2(R)] + 2[d(u),d^3(R)] + [u,d^4(R)] \;=\; 0$ ve $[u,d^2(R)] \subseteq U$ olduğundan $d([u,d^2(R)]) \subseteq Z$ olur. Yani her $u \in U$ için $[d(u),d^2(R)] \subseteq Z$ bulunur. Burada her $x \in R$ için

$$[d(u),d^2(ud(x))] = [d(u),d^2(u)d(x)+2d(u)d^2(x)+ud^3(x)]$$
$$= d^2(u)[d(u),d(x)] + 2d(u)[d(u),d^2(x)]$$

olur. Bu durumda

$$d^2(u)[d(u),d(x)] + 2d(u)[d(u),d^2(x)] \in Z,\ \forall u \in U,\ \forall x \in R$$

elde edilir. Bu ifadeyi d(u) ile değişmeli yaparsak

$$0 = [d(u),d^2(u)[d(u),d(x)]] + [d(u),2d(u)[d(u),d^2(x)]]$$
$$= d^2(u)[d(u),[d(u),d(x)]]$$

olur. Hipotez kullanılırsa her $u \in U$ ve her $x \in R$ için $d^2(u)R[d(u),[d(u),d(x)]] = 0$ bulunur. R asal halka olduğundan $d^2(u)=0$ veya $[d(u),[d(u),d(x)]] = 0$ olmalıdır. Eğer Her $u \in U$ ve her $x \in R$ için $[d(u),[d(u),d(x)]] = 0$ ise x yerine d(u)x yazarsak

$$0 = [d(u),[d(u),d(d(u)x)]] = [d(u),[d(u),d^2(u)x]]$$
$$+[d(u),[d(u),d(u)d(x)]]$$
$$= d^2(u)[d(u),[d(u),x]]$$

olur. $d^2(u) \in Z$ ve R asal halka olduğundan $d^2(u)=0$ veya $[d(u),[d(u),d(x)]] = 0$ olmalıdır. Burada $I_{d(u)} : R \to R$ iç türev olarak tanımlansın. $I_{d(u)}(x) = d(u)x - xd(u)$ şeklinde ifade edilsin. Bu durumda koşul her $u \in U$ için $d^2(u)=0$ veya $I^2_{d(u)} = 0$ şeklini alır. Her iki durum da her $u \in U$ için $d(u) \in Z$ demektir. O halde Lemma 4.1.6 gereği $d \neq 0$ olduğu için $U \subseteq Z$ olur ve ispat biter.

Teorem 4.1.5. d, R asal halkasında sıfırdan farklı bir türev ve $a \in R$ olsun. Eğer $[a,d(U)] \subseteq Z$ ise $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $d(Z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $d \neq 0$ olduğundan Lemma 4.1.7 gereği $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ olur ve ispat biter. O halde d(Z) = 0 incelenir. Kabul edelim ki $U \not\subseteq Z$ olsun. Her $u \in U$ ve $a \in R$ için hipotez uygulanırsa

$$[a,d([a,u])] = [a,[d(a),u]] + [a,[a,d(u)]]$$

$$= \left[a,\left[d(a),u\right]\right]$$

bulunur. Her $u\in U$ için $\left[a,\left[d(a),u\right]\right]\in Z$ ve $d(Z) = 0$ olması kullanılırsa

$$\left[d(a),\left[d(a),u\right]\right]\in Z,\ \forall\, u\in U$$

elde edilir. Burada $I_{d(a)} : R\to R$ iç türevi tanımlansın. $I_{d(a)}(x) = d(a)x - xd(a)$ şeklinde verilsin. O halde koşul $I_{d(a)}^2(U)\subseteq Z$ şeklini alır. Bu durumda Teorem 4.1.4 gereği $I_{d(a)} = 0$ veya $U\subseteq Z$ bulunur. $U\subseteq Z$ olması kabul ile çelişir. O halde $d(a)\in Z$ olmalıdır. Burada her $u\in U$ için hipotezi ve koşulu kullanırsak

$$\begin{aligned}\left[a,d(\left[a^2,u\right])\right] &= \left[a,\left[d(a^2),u\right]\right]+\left[a,\left[a^2,d(u)\right]\right]\\ &= \left[a,\left[2ad(a),u\right]\right]=2\left[a,\left[a,u\right]d(a)\right]\\ &= 2\left[a,\left[a,u\right]\right]d(a)\end{aligned}$$

olur. Bu durumda her $u\in U$ için $\left[a,\left[a,u\right]\right]d(a)\in Z$ bulunur. Burada $d(a)\in Z$ olması kullanılırsa $d(a) = 0$ veya $\left[a,\left[a,u\right]\right]=0$ elde edilir. $I_a : R\to R$ iç türev olarak tanımlansın. $I_a(x) = ax - xa$ şeklinde verilsin. O zaman koşul $d(a) = 0$ veya $I_a^2(U) = (0)$ halini alır. Eğer $I_a^2(U) = (0)$ ise $a\in Z$ veya $U\subseteq Z$ olur ki bu $d(a) = 0$ veya $U\subseteq Z$ demektir. $U\subseteq Z$ olması kabul ile çelişir. O halde $d(a) = 0$ olmalıdır. Her $u\in U$ için hipotez ve $d(a) = 0$ olması dikkate alınırsa $0 = d(\left[a,d(u)\right])=\left[a,d^2(u)\right]$ olduğu görülür. Şimdi $V = \left[U,U\right]$ Lie ideali olarak tanımlansın. Burada her $u\in U$ ve her $v\in V$ için $d(v)$, $\left[d(v),u\right]$, $\left[d(v),au\right]\in U$ ve $\left[a,d(\left[d(v),u\right])\right]$, $\left[a,d(\left[d(v),au\right])\right]\in Z$ ve Z'nin alt halka olması kullanılırsa

$$a\left[a,\left[d^2(v),u\right]\right]\in Z,\ \forall\, u\in U,\ \forall\, v\in V$$

bulunur. Her $u\in U$ ve her $v\in V$ için $\left[a,d(\left[d(v),u\right])\right] = \left[a,\left[d^2(v),u\right]\right]\in Z$ olduğundan $a\in Z$ veya $\left[a,\left[d^2(v),u\right]\right] = 0$ elde edilir. Eğer $a\in Z$ ise ispat biter. O halde $\left[a,\left[d^2(v),u\right]\right] = 0$ olmalıdır. Burada $I_a : R\to R$, $I_{d^2(v)} : R\to R$ iç türevleri tanımlansın. Sırasıyla $I_a(x) = ax - xa$ ve $I_{d^2(v)}(x) = d^2(v)x - xd^2(v)$ şeklinde verilsinler. O zaman ifademiz her $v\in V$ için $I_a I_{d^2(v)}(U) = 0$ şeklini alır. Burada $\mathrm{char}R\neq 2$ ve $U\not\subset Z$ olduğundan Teorem 4.1.3 gereği $I_a = 0$ veya her $v\in V$ için $I_{d^2(v)} = 0$ olur. Eğer $I_a = 0$ ise $a\in Z$ olur ve ispat biter. O halde her v $\in$ V için $I_{d^2(v)}$ = 0 olmalıdır. Yani her v$\in$ V için $d^2(v) \in$ Z olur. Kabul gereği U$\not\subset$ Z olduğu için $[U,U] \subset U$ olması göz önüne alınırsa $[U,U] \not\subset Z$ olur. d $\neq 0$ ve U$\not\subset$ Z olduğu düşünüldüğünde Teorem 4.1.4 gereği $d^2([U,U]) \not\subset$ Z bulunur. Bu ise kabul ile çelişir. O halde U$\subset$ Z olur ve ispat biter.

Teorem 4.1.6. d, R asal halkasında sıfırdan farklı bir türev olsun. Eğer $[d(U),d(U)] \subseteq Z$ ise U$\subseteq$ Z dir.

İspat : Her x $\in$ R için $[d(x),d(U)] \subseteq Z$ olur. $d \neq 0$ olduğundan Teorem 4.1.5 kullanılırsa her x$\in$ R için d(x) $\in$ Z veya U$\subseteq$ Z olur. Eğer U$\subseteq$ Z ise ispat biter. O halde d(U) $\subseteq$ Z olmalıdır. Burada $d \neq 0$ olduğundan U$\subseteq$ Z elde edilir.

Teorem 4.1.7. d, δ R asal halkasının sıfırdan farklı türevleri olsun. Eğer $d\delta(U) \subseteq Z$ ise U$\subset$ Z dir.

İspat : Kabul edelim ki U$\not\subset$ Z olsun. Her u$\in$ U ve her v$\in$ $[U,U]$ için $d\delta([u,\delta(v)]$ $)\in$ Z olur. Hipotezi kullanırsak

$$d\delta([u,\delta(v)]) = d([\delta(u),\delta(v)]+[u,\delta^2(v)])$$
$$= [d(u),\delta^2(v)]$$

olur. Buradan $[d(U),\delta^2([U,U])] \subseteq Z$ elde edilir. d $\neq 0$ olması dikkate alınırsa Teorem 4.1.5 gereği $\delta^2([U,U]) \subseteq Z$ veya U$\subseteq$ Z olmalıdır. Kabul gereği $\delta^2([U,U]) \subseteq Z$ olur. δ $\neq 0$ ve Uyarı 2.1 gereği $[U,U]$, R halkasında bir Lie ideal olduğundan $[U,U] \subseteq Z$ olur. Buda U$\subseteq$ Z demektir. O halde kabul yanlış olur. Sonuçta U$\subseteq$ Z bulunur.

Teorem 4.1.8. d, R asal halkasında sıfırdan farklı bir türev olsun. Eğer her u$\in$ U için $[u,d(u)] \in Z$ ise U$\subseteq$ Z dir.

İspat : Her u, v$\in$ U için hipotezi lineerleştirerek $[u,d(u)] \in Z$ ve $[v,d(v)] \in Z$ olması kullanılırsa $[u,d(v)]+[v,d(u)] \in Z$ olur. Burada v yerine $[u,v]$ yazarsak

$$[u,d([u,v])]+[[u,v],d(u)] = [u,[d(u),v]+[u,d(v)]]$$
$$+ [[u,v],d(u)]$$

olur. Jacobi özdeşliğinden yararlanırsak

$$[u,[u,d(v)]] \in Z \,, \forall\, u, v \in U \qquad (4.2)$$

bulunur. Şimdi $v \in [U,U]$ ve $u \in U$ için u yerine u + d(v) yazarsak

$$[u + d(v), [u + d(v), d(v)]] = [u, [u, d(v)]] + [d(v), [u, d(v)]]$$

olur. (4.2) eşitliği ve Z, R halkasının alt halkası olması dikkate alındığında

$$[d(v), [d(v), u]] \in Z \, , \; \forall \, u, v \in U$$

olduğu görülür. $I_{d(v)} : R \rightarrow R$ iç türevi $I_{d(v)}(x) = d(v)x - xd(v)$ olarak tanımlansın. O halde ifade her $v \in [U,U]$ için $I^2_{d(v)}(U) \subseteq Z$ olur. Bu durumda her $v \in [U,U]$ için $d(v) \in Z$ veya $U \subseteq Z$ olmalıdır. Eğer $U \subseteq Z$ ise ispat biter. O halde $d([U,U]) \subseteq Z$ olur. Bu durum $d \neq 0$ olduğundan $[U,U] \subseteq Z$ olması anlamına gelir. Buradan U lie ideal olduğundan Uyarı 4.1.1 gereği $U \subseteq Z$ bulunur.

Teorem 4.1.9. d, R asal halkasında sıfırdan farklı bir türev ve $a \in R$ olsun. Eğer $ad(U) \subseteq Z$ ise a = 0 veya $U \subseteq Z$ dir.

İspat : Burada $a \in Z$ ise a = 0 veya $d(U) \subseteq Z$ olur. $d \neq 0$ olduğundan a = 0 veya $U \subseteq Z$ olur ve ispat biter. O halde $a \notin Z$ olur. Kabul edelim ki $d(Z) \neq 0$ ve $\alpha \in Z$ için $d(\alpha) \neq 0$ olsun. Her $u \in U$ ve $x \in R$ için

$$ad(\alpha[u,x]) = ad([u, \alpha x])$$

$$= ad(\alpha)[u,x] + \alpha d([u,x])$$

olur. Burada Z'nin alt halka olması kullanılırsa

$$ad(\alpha)[u,x] \in Z \, , \; \forall \, u \in U, \; \forall \, x \in R$$

bulunur. $d(\alpha) \in Z$ olduğundan

$$d(\alpha) = 0 \text{ veya } a[u,x] \in Z \, , \forall \, u \in U, \; \forall \, x \in R$$

elde edilir. O halde $d(\alpha) \neq 0$ olduğundan her $u \in U$ ve her $x \in R$ için $a[u,x] \in Z$ olur. Burada a ile değişmeli yaparsak $0 = [a, a[u,x]] = a[a,[u,x]]$ bulunur. Burada $I_a : R \rightarrow R$ iç türevi $I_a(x) = ax - xa$ şeklinde tanımlansın. O zaman ifade $aI_a([U,R]) = 0$ halini alır. Buradan a = 0 veya Ia = 0 veya $[U,R] \subseteq Z$ bulunur. $a \notin Z$ ve U lie ideal olduğundan a = 0 veya $U \subseteq Z$ elde edilir. Bu durumda ispat biter. O halde d(Z) = 0 olmalıdır. Burada her $u \in U$ için $ad([a,u]) = a[d(a),u] + a[a,d(u)] = a[d(a),u] \in Z$ olur. Şimdi $v \in [U,U]$ olsun. Bu durumda $ad(v) \in Z$ ve d(ad(v)) = 0 olur.

$$0 = d(ad(v)) = d(a)d(v) + ad^2(v) \in Z, \; \forall \, v \in [U,U]$$

bulunur. Burada $ad^2(v) \in Z$, her $v \in [U,U]$ ve Z'nin, R halkasının alt halkası olması göz önüne alındığında

$$d(a)d(v) \in Z, \ \forall v \in [U,U]$$

elde edilir. Bu durumda $0 = a[d(a)d(v), d(v)] = a[d(a), d(v)]d(v) \in Z$ olur. Her $v \in [U,U]$ için $a[d(a), d(v)] \in a[d(a), U] \subseteq Z$ olduğundan $a[d(a), d(v)] = 0$ veya $d(v) \in Z$ bulunur. Eğer her $v \in [U,U]$ için $d(v) \in Z$ ise $d([U,U]) \subseteq Z$ olur. Buradan $d \neq 0$ olduğu için $U \subseteq Z$ elde edilir. Bu durumda ispat biter. O halde $d(v) \notin Z$ ve $a[d(a), d(v)] = 0$ olmalıdır. Kabul edelim ki $d(a) \neq 0$ olsun. Burada $U \subseteq Z$ ile çelişeceğinden $d(a)d([U,U]) \neq 0$ olur. O halde en az bir $v_0 \in [U,U]$ için $d(a)d(v_0) \neq 0$ vardır. $\alpha = d(a)d(v_0)$, $\beta = ad(v_0) \in Z$ elemanları alınırsa ve $a[d(a), d(v_0)] = 0$ olması dikkate alındığında $\alpha a = \beta d(a)$ olduğu görülür. Burada her $u \in U$ için $\alpha a[a,u] = a[\alpha a, u] = a[\beta d(a), u] = \beta a[d(a), u] \in Z$ bulunur. $\alpha \in Z$ olduğu için Önerme 2.8 gereği $\alpha = 0$ veya her $u \in U$ için $a[a,u] \in Z$ elde edilir. Burada $d(Z) = 0$ olması kullanılırsa

$$0 = d(a[a,u]) = d(a)[a,u] + a[d(a),u]$$

olur. Şimdi her iki tarafı β ile çarpar $\beta \in Z$ ve $\alpha a = \beta d(a)$ olması kullanılırsa

$$0 = \beta d(a)[a,u] + \beta a[d(a),u] = 2\alpha a[a,u] \ , \ \forall u \in U$$

bulunur. Burada R, $CharR \neq 2$ olan bir asal halka ve $\alpha \in Z$ oluğundan Önerme 2.8 den

$$\alpha = 0 \text{ veya } a[a,u] = 0 \ , \ \forall u \in U$$

elde edilir. $\alpha \neq 0$ olduğundan $I_a : R \to R$ tanımlı ve $I_a(x) = ax - xa$ şeklindeki iç türev için $aI_a(U) = (0)$ olur. O halde

$$a = 0 \text{ veya } I_a = 0 \text{ veya } U \subseteq Z$$

bulunur. $a \notin Z$ olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } U \subseteq Z$$

olur ve ispat biter. O halde $d(a) = 0$ olmalıdır. Her $u \in U$ için $ad(u) \in Z$ olduğundan $0 = d(ad(u)) = ad^2(u)$ olur. Şimdi $W = [[U,U],[U,U]]$ şeklindeki R halkasının bir Lie ideali alınsın. Burada $x \in R$ ve $w \in W$ için $ad([x, d^2(w)]) \in Z$ olur. $d^2(w), d^3(w) \in U$ ve $ad^2(w) = ad^3(w) = 0$ olması kullanılırsa

$$ad(x)d^2(w) + axd^3(w) \in Z, \ \forall w \in W, \ \forall x \in R \qquad (4.3)$$

olur. (4.3) eşitliğinde x yerine d(u) yazarsak

$$ad(u)d^3(w) \in Z,\ \forall w \in W,\ \forall u \in U$$

bulunur. Hipotezden $ad(U) \in Z$ olduğundan $ad(U) = 0$ veya $d^3(W) \subseteq Z$ olur. Yani $d \neq 0$ olduğundan $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ veya $d^3(W) \subseteq Z$ elde edilir. Burada ilk durumda ispat biter. O zaman $d^3(W) \subseteq Z$ olmalıdır. Bu durumda (4.3) eşitliğinden her $x \in R$ ve her $w \in W$ için $ad(x)d^2(w) \in Z$ olur. O halde her $u \in U$ için de $ad(u)d^2(W) \subseteq Z$ sağlanır. Burada $ad(U) \subseteq Z$ olduğundan $ad(U) = (0)$ veya $d^2(W) \subseteq Z$ demektir. Yine ilk durumda ispat biteceğinden $d^2(W) \subseteq Z$ olur. Burada $d \neq 0$ ve W lie ideal olduğundan Teorem 4.1.4 gereği $W \subset Z$ bulunur. Buda $[U, U] \subseteq Z$ ve Uyarı 4.1.1 gereği $U \subseteq Z$ demektir. O halde tüm durumlar için ispat biter.

4.2 Yarı Türevli Halkalar Ve İdealler

Belll, H. E. ve Martındale, W. S., 1988

Lemma 4.2.1. R bir asal halka, f, R halkasının g dönüşümü ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türevi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ise $f(U) \neq 0$ dır.

İspat : Kabul edelim ki $f(U) = 0$ olsun. O zaman her $u \in U$ ve her $x \in R$ elemanları için

$$0 = f(ux) = f(u)g(x) + uf(x) = uf(x)$$

olur. Burada her $x \in R$ için $Uf(x) = 0$ ve $UR \subset U$ olması kullanılırsa

$$0 = URf(x)\ ,\forall x \in R$$

elde edilir. R asal halka olduğundan $U = 0$ veya her $x \in R$ için $f(x) = 0$ bulunur. $U \neq 0$ olduğundan $f = 0$ olur. Bu ise $f \neq 0$ ile çelişir. O halde kabul yanlış demektir. Yani $f(U) \neq 0$ olur.

Lemma 4.2.2. R bir asal halka, f, R halkasının g dönüşümü ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türevi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $a \in R$ için $af(U) = 0$ ise $a = 0$ dır.

İspat : Burada Lemma 4.2.1 gereği en az bir $u \in U$ için $f(u) \neq 0$ vardır. O zaman her $v \in U$ için

$$\begin{aligned} 0 = af(vu) &= a(f(v)g(u) + vf(u)) \\ &= avf(u) \end{aligned}$$

bulunur. Yani $0 = aURf(u)$ elde edilir. Burada R asal olduğundan $aU = 0$ veya $f(u) = 0$ olur. $f(u) \neq 0$ olduğundan $aU = 0$ bulunur. Tekrar $RU \subset U$ olduğundan ifade $aRU = 0$ şekilini alır. Burada yine R asal halka olduğu için a = 0 veya U = (0) olur. U $\neq$ (0) olduğundan a = 0 elde edilir.

Lemma 4.2.3 R bir asal halka, f, R halkasının g dönüşümü ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türevi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ise $f^2(U) \neq 0$ dır.

İspat : Kabul edelim ki $f^2(U) = 0$ olsun. O halde her u, v $\in$ U için

$$\begin{aligned} 0 = f^2(uv) &= f(f(u)v + g(u)f(v)) \\ &= f^2(u)v + gf(u)f(v) + f(g(u)f(v)) \qquad (4.4) \end{aligned}$$

Ve

$$\begin{aligned} 0 = f^2(uv) &= f(f(u)v + g(u)f(v)) \\ &= f^2(u)g(v) + f(u)f(v) + f(g(u)f(v)) \qquad (4.5) \end{aligned}$$

olur. Burada (4.5) eşitliğinde (4.4) eşitliği çıkartılırsa

$$0 = (gf(u) - f(u))f(v)\ ,\ \forall u, v \in U$$

bulunur. f $\neq$ 0 olduğundan Lemma 4.2.2 gereği her u $\in$ U için gf(u) – f(u) = 0 elde edilir. O halde her u$\in$ U için gf(u) = f(u) olur. Buradan (4) eşitliği açık halde yazılırsa her u, v $\in$ U için

$$\begin{aligned} 0 &= f^2(u)g(v) + f(u)f(v) + f(g(u))g(f(v)) + g(u)f^2(v) \\ &= f(u)f(v) + f(g(u))g(f(v)) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada her u $\in$ U için fg(u) = gf(u) = f(u) ve charR $\neq$ 2 olduğundan

$$f(u)f(v) = 0\ ,\ \forall u, v \in U$$

olur. Yani her u $\in$ U için f(u)f(U) = 0 olur. f $\neq$ 0 olduğundan Lemma 4.2.2 gereği her u $\in$ U için f(u) = 0 bulunur. Bu ise Lemma 4.2.1 gereği f(U) $\neq$ 0 olması ile çelişir. O halde kabul yanlıştır. Yani $f^2(U) \neq 0$ dır.

Lemma 4.2.4. U, R halkasının U $\cap$ g(R) = 0 sıfırdan farklı bir ideali ise her x $\in$ R için f(x) = λ(x-g(x)) olacak şekilde $\lambda \in$ C vardır.

İspat : $W = \sum_{x \in R} U(x - g(x))U$, R halkasının bir ideali olarak tanımlansın. $W \neq 0$ olduğu gösterilsin. W = 0 olsaydı her x$\in$ R için U(x – g(x))U = 0 olurdu. Burada UR$\subset$U ve RU $\subset$ U olduğundan UR(x – g(x))U = 0 bulunur. R asal halka olduğundan U = (0) veya her x $\in$ R için (x –g(x))RU = 0 olur. U$\neq$(0) olduğundan Yine R asal halka olduğundan her x $\in$ R için (x – g(x)) = 0 veya U = (0) bulunur. Yine U$\neq$(0) olduğundan her x$\in$ R için x – g(x) = 0 elde edilir. Buradan g = I özdeşlik dönüşümü bulunur. Bu ise f'nin yarı türev olması ile çelişir. O halde W $\neq$ 0 olur. Burada x, y $\in$ W için x = $\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - g(x_i))v_i$ ve

$y = \sum_{j=1}^{m} a_j(y_j - g(y_j))b_j$ olsun. O zaman k = 1,…,n için $c_k = u_i$, $z_k - g(z_k) = x_i - g(x_i)$, $d_k = v_i$ ve k = n + 1,…, n + m için $c_k = a_j$, $z_k - g(z_k) = y_j - g(y_j)$, $d_k = d_j$ olmak üzere $x - y = \sum_{k=1}^{n+m} c_k(z_k - g(z_k))d_k$ olur.O halde $x - y \in W$ bulunur. Yani W, R halkasının sıfırdan farklı bir idealidir. $\phi : W \to R$ dönüşümü $\phi(\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - g(x_i))v_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i f(x_i)v_i$ olarak tanımlansın. Bimodül homomorfizmi olduğu incelensin. Öncelikle x = y iken $\phi(x) = \phi(y)$ ise ϕ iyi tanımlıdır. O halde x – y = 0 iken $\phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y) = 0$ olmalıdır. Burada $w = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - g(x_i))v_i = 0$ olsun. O halde $\phi(w) = \phi(\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - g(x_i))v_i) = 0$ olur.

$$0 = f(\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - g(x_i))v_i) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i x_i v_i - u_i g(x_i)v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i f(x_i v_i) + f(u_i)g(x_i v_i) - f(u_i g(x_i))g(v_i) + u_i g(x_i)f(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i f(x_i)v_i + u_i g(x_i)f(v_i) + f(u_i)g(x_i)g(v_i) - f(u_i)g(x_i)g(v_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} -g(u_i)fg(x_i))g(v_i) - u_i g(x_i)f(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i f(x_i)v_i - g(u_i)gf(x_i)g(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i f(x_i)v_i - g(\sum_{i=1}^{n} u_i f(x_i)v_i)$$

bulunur. Buradan $\sum_{i=1}^{n} u_i f(x_i)v_i = g(\sum_{i=1}^{n} u_i f(x_i)v_i) \in g(R) \cap U = 0$ elde edilir. O halde $\sum_{i=1}^{n} u_i f(x_i)v_i = 0$ olur. Yani ϕ iyi tanımlıdır. Şimdi her $x, y \in W$ için

$$\phi(x + y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - g(x_i))v_i + \sum_{j=1}^{m} a_j(y_j - g(y_j))b_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n+m} c_k(z_k + g(z_k))d_k = \phi(x) + \phi(y)$$

olur. Üstelik U ideal olması kullanılırsa $\phi(rx) = r\phi(x)$ ve $\phi(xr) = \phi(x)r$ sağlanır. Ve ϕ bir bimodul homomorfizmi bulunur. O halde her $w \in W$ için $\phi(w) = \lambda(w)$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır. Buradan her $u, v \in U$ için

$$u\lambda(x - g(x))v = \lambda(u(x - g(x)v) = \phi(u(x - g(x)v) = uf(x)v$$

olur. Ve

$$u(f(x) - \lambda(x - g(x))v = 0, \ \forall u, v \in U, \ \forall x \in R$$

bulunur. Buradan her $x \in R$ için $U(f(x) - \lambda(x - g(x))U = 0$ olur. O halde $UR \subset U$ ve $RU \subset U$ olması kullanılırsa $UR(f(x) - \lambda(x - g(x))U = 0$ bulunur. R asal halka olduğundan $U = 0$ veya $(f(x) - \lambda(x - g(x))U =$ olur. $U \neq 0$ olduğundan $(f(x) - \lambda(x - g(x))RU = 0$ olmalıdır. Yine R asal halka ve $U \neq 0$ olduğundan $f(x) - \lambda(x - g(x) = 0$ elde edilir. O halde her $x \in R$ için $f(x) = \lambda(x - g(x))$ bulunur.

Lemma 4.2.5. f, R halkasının g birebir olmayan dönüşümü ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türevi ve V, R halkasının $V \subset Kerg$ olan sıfırdan farklı bir ideali ise

(a) f(V), R halkasının sıfırdan farklı bir idealidir.

(b) her $x \in R$ için $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır.

İspat : (a) $V \neq 0$ olduğundan Lemma 4.2.1 gereği $f(V) \neq 0$ olur. Burada her $v \in V$, her $x \in R$ için $V \subset Kerg$ olması kullanılırsa

$$f(vr) = f(v)r + g(v)f(r) = f(v)r \in f(V)$$

ve

$$f(rv) = rf(v) + f(r)g(v) = rf(v) \in V$$

olur. O halde f(V), R halkasının bir idealidir. (b) Öte yandan V ve f(V) ideal olduğundan $f : V \rightarrow R$, bir Bimodül homorfizmi vardır . Dolayısıyla her $v \in V$ için $f(v) = \lambda(v)$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır. O zaman her $v \in V$, her $r \in R$ için

$$\lambda vr = f(vr) = vf(r) + f(v)g(r) = vf(r) + \lambda vg(r)$$

olur. Yani her $v \in V$ için $v(f(r) + \lambda g(r) - \lambda r) = 0$ bulunur. Buradan her $r \in R$ için $UR(f(r) + \lambda g(r) - \lambda r) = 0$ elde edilir. Burada R asal halka ve $U \neq 0$ olduğundan her $r \in R$ için $f(r) = \lambda(r - g(r))$ bulunur.

Lemma 4.2.6. R bir asal halka, f, R halkasının g birebir dönüşümü ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türevi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. $f(U) \subset Z$ ise R değişmeli bir halkadır.

İspat : U ideal olduğundan her $u \in U$, her $x \in R$ için $[u,r] \in U$ olduğundan

$$f([u,r]) = [f(u),r] + [g(u),f(r)] = [g(u),f(r)] \in Z$$

olur. Burada r yerine g(r) yazarsak

$$[g(u),f(g(r))] = g([u,f(r)]) \ \in Z$$

bulunur. g birebir olduğundan her $u \in U$, her $r \in R$ için $[u,f(r)] \in Z$ elde edilir. Yani her $u \in U$ için $[u,f(R)] \subset Z$ olur. Buradan $u \in U$ için $u \in Z$ veya $f(R) \subset Z$ olur. $U \subset Z$ ise R değişmeli halka olur ve ispat biter. O halde $f(R) \subset Z$ olmalıdır. Burada hipotezden $f^2(U) \subset f(Z)$ olur. Eğer $f(Z) = 0$ olsaydı $f^2(U) = 0$ olurdu. Bu ise Lemma 4.2.3 ile çelişirdi. O halde en az bir $z_0 \in Z$ için $f(z_0) \neq 0$ dır.Bu $z_0 \in Z$ ve her $r \in R$ elemanları için

$$f(z_0r) = f(z_0)g(r) + z_0f(r) \in Z$$

bulunur. Burada Z alt halka olduğundan her $r \in R$ için $f(z_0)g(r) \in Z$ olur. Öte yandan $f(z_0) \in Z$ olduğundan

$$f(z_0) = 0 \text{ veya } g(R) \subset Z$$

elde edilir. $f(z_0) \neq 0$ olduğundan $g(R) \subset Z$ olur. Burada g birebir olduğundan $R \subset Z$ bulunur. Yani R halkası değişmelidir.

Teorem 4.2.1. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, f, R halkasının g dönüşümü ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türevi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve her $u \in U$ için $[u,f(u)] \in Z$ olsun.

(a) R değişmeli ise f türev veya her $x \in R$ için $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olan $\lambda \in F$ vardır.

(b) R değişmeli olamayan bir halka ise $\text{Ker}g \neq 0$, $g(U) \subset Z$ ve her $x \in R$ için $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olan $\lambda \in C$ vardır. Üstelik $fg(U) \neq 0$ ise $g(R) \subset Z$ ve $\lambda \in F$ olur.

İspat : (a) g = I birim dönüşüm ise f zaten türev olur. O halde $g \neq I$ olsun. O halde en az bir $a \in R$ için $a - g(a) \neq 0$ olur. Her $x \in R$ için

$$f(xa) = f(x)g(a) + xf(a) = f(x)a + g(x)f(a)$$

$$f(a)(x - g(x)) = f(x)(a - g(a))$$

bulunur. Burada $\lambda = f(a)(a - g(a))^{-1}$ olarak alınırsa $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olarak yazılır. Üstelik burada $\lambda \in F$ olur.

(b) Her $u \in U$ için $[u,f(u)] \in Z$ olduğundan ifadeyi lineerleştirirsek her $u, a \in U$ için $[u,f(a)] + [a,f(u)] \in Z$ olur. Burada u yerine $[a,u]$ yazarsak

$$\left[[a,u],f(a)\right]+\left[a,f([a,u])\right]=\left[[a,u],f(a)\right]+\left[a,[f(a),u]\right]+\left[a,[g(a),f(u)]\right]\in Z$$

bulunur. Öte yandan Jacobi özdeşliğinden

$$\left[[a,u],f(a)\right]+\left[[u,f(a)],a\right]+\left[[a,f(a)],u\right]=0$$

olur. O halde $\left[a,[g(a),f(u)]\right]\in Z$, $\forall$ u, a $\in$ U elde edilir. Burada her a $\in$ U için $f([a,a])=[f(a),a]+[g(a),f(a)]=0\in Z$ olduğundan

$$[g(a),f(a)]\in Z,\ \forall a\in U \tag{4.6}$$

olur. (4.6) eşitliği lineerleştirilirse

$$[g(a),f(u)]+[g(u),f(a)]\in Z,\ \forall u,a\in U \tag{4.7}$$

bulunur. (4.7) eşitliği a ile değişmeli yapılırsa

$$0=\left[a,[g(a),f(u)]\right]+\left[a,[g(u),f(a)]\right]\in Z$$

elde edilir. Burada Z alt halka olduğundan

$$\left[a,[g(u),f(a)]\right]\in Z,\ \forall u,a\in U \tag{4.8}$$

olur. Şimdi kabul edelim ki g birebir olsun. V = $g^{-1}(U)$ = $\{v\in R: g(v)\in U\}$ olarak tanımlanan küme R halkasının bir idealidir. Kabul edelim ki V $\neq$ (0) olsun. O halde v $\in$ V için (4.8) eşitliğinde a yerine g(v) yazarsak

$$\left[g(v),[g(u),fg(v)]\right]=g(\left[v,[u,f(v)]\right])\in Z$$

olur. Burada g birebir olduğundan

$$\left[v,[u,f(v)]\right]\in Z,\ \forall u,v\in U$$

elde edilir. Teorem 4.1.5 gereği v $\in$ Z veya f(v) $\in$ Z olur. Burada A = $\{v\in V: v\in Z\}$ ve B = $\{v\in V: f(v)\in Z\}$ olarak tanımlanan kümeler için R = A $\cup$ B yazılabileceği görülür. A ve B, R halkasının iki öz alt grubu olduğundan R = A veya R = B olur. R = A ise V $\subset$ Z bulunur. Yani R değişmelidir. Bu ise (b) koşulu ile çelişir. O halde R = B olmalıdır. Bu durumda her v $\in$ V için f(v) $\in$ Z olur. Burada f $\neq 0$, V $\neq 0$ ve g birebir olduğundan Lemma 4.2.6 gereği R değişmeli bulunur. Bu ise yine (b) koşulu ile çelişir. O halde son kabul yanlıştır. Yani V = (0) olur. O halde

$$0=V\cap R=g^{-1}(U)\cap R$$
$$g(0)=g(g^{-1}(U)\cap R)=U\cap g(R)$$

olur. Burada Lemma 4.2.4 gereği her x $\in$ R için f(x) = λ(x – g(x)) olan λ $\in$ C vardır. O zaman her u $\in$ U için $[f(u),u]=[\lambda(u-g(u)),u]=\lambda[u,u]+\lambda[g(u),u]\in Z$ olur. Z alt halka ve $\lambda \in Z$ olduğundan $\lambda = 0$ veya $[g(u),u] \in Z$ bulunur. $f \neq 0$ olduğu için $\lambda \neq 0$ dır. Bu durumda her $u \in U$ için $[g(u),u] \in Z$ elde edilir. Buradan Teorem 2.1 gereği R değişmelidir. Bu ise (b) koşulu ile çelişir. O halde ilk kabul yanlıştır. Yani g bire bir değildir. O zaman $Kerg \neq 0$ olur. $W = U \cap Kerg$ olarak alınırsa R halkasının bir ideali olup Lemma 4.2.5 gereği $f(W) \neq 0$, R halkasının bir idealidir ve her $x \in R$ için $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olan $\lambda \in C$ vardır. Şimdi her $u \in U$, $w \in W$ için (4.6) eşitliğinde a yerine w yazarsak

$$[g(u), f(w)] \in Z, \ \forall u \in U, \ \forall w \in W$$

bulunur. Yani $[g(u), f(W)] \subset Z$ olur. Burada Lemma 3.2.5 dan $g(U) \subset Z$ bulunur. Son olarak $fg(U) \neq 0$ olsun. O halde en az bir $u \in U$ için $fg(u) \neq 0$ olur. Burada $g(u) \neq 0$ olmalıdır. Burada $u \in U$ ve her $r \in R$ için $g(ur) = g(u)g(r) \in Z$ ve g(u) v Z olduğundan $g(u) = 0$ veya her $r \in R$ için $g(r) \in Z$ olur. $g(u) \neq 0$ olduğundan her $r \in R$ için $g(r) \in Z$ bulunur. Yani $g(R) \subset Z$ elde edilir.

Teorem 4.2.2. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, f, R halkasının g dönüşümü ile belirlenen sıfırdan farklı bir yarı türevi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. $[f(U), f(U)] \subset Z$ ise R değişmeli bir halkadır.

İspat : Burada g dönüşümüne göre iki durumda incelensin. Birinci durum için g bire bir değilse $Kerg \neq 0$ olur. $W = U \cap Kerg$ olarak alırsak Lemma 4.2.5 gereği $f(W) \neq 0$, R halkasının bir idealidir. O halde $w \in W$ için $[f(w), f(W)] \subset Z$ olur. Burada Lemma 4.1.6 dan her $w \in W$ için $f(w) \in Z$ bulunur. Yani R değişmelidir. O halde g birebir değilse ispat biter. O zaman ikinci olarak g birebir ise incelensin. Kabul edelim ki $g(R) \cap U = 0$ olsun. Bu durumda Lemma 4.2.4 gereği her $x \in R$ için $f(x) = \lambda(x - g(x))$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır. O halde hipotezden her $u, v \in U$ ve her $r \in R$ elemanları için

$$\begin{aligned} 0 &= [[u - g(u), v - g(v)], g(r)] \\ &= [[u,v] - [u,g(v)] - [g(u),v] + [g(u),g(v)], g(r)] \end{aligned}$$

$$[[g(u), g(v), g(r)]] = [[u,g(v)] + [g(u),v] - [u,v], g(r)] \in g(R) \cap U$$

bulunur. Yani $[[g(u),g(v)],g(r)] = g([[u,v],r]) = 0$ olur. $I_u : R \to R$ ve $I_v : R \to R$ iç türevleri için ifade $I_u I_v(R) = 0$ şeklini alır. Burada $charR \neq 2$ olduğundan Teorem 3.1.1 gereği her $u, v \in U$ için $I_u = 0$ veya $I_v = 0$ bulunur. Yani her $u \in U$ için $u \in Z$ veya her $v \in U$ için $v \in Z$ olur. Sonuçta her iki durumda da $U \subset Z$ elde edilir. Bu ise R halkasının değişmeli olması anlamına gelir ve ispat biter. O halde kabul yanlış demektir. Yani $g(R) \cap U \neq 0$ olur. Buradan $0 \neq g^{-1}(g(R) \cap U) = R \cap g^{-1}(U) = g^{-1}(U)$ elde edilir. Burada R halkasının $W = U \cap g^{-1}(U)$ sıfırdan farklı ideali alırsak her u, v $\in$ U için $\left[f(u), f([f(u), v])\right] \in Z$ olduğundan her w $\in$ W için u yerine g(w) yazarsak

$$\left[fg(w), \left[f^2(g(w), g(v)\right]\right] \in Z,\ \forall\ v \in U,\ \forall\ w \in W$$

olur. Burada g'nin birebir olmasını kullanırsak

$$\left[f(w), \left[f^2(w), v\right]\right] \in Z,\ \forall\ v \in U,\ \forall\ w \in W$$

bulunur. Yani her w $\in$ W için $\left[f(w), \left[f^2(w), U\right]\right] \subset Z$ olur. Lemma 4.1.5 gereği her w $\in$ W için f(w) $\in$ Z veya $f^2(w) \in Z$ bulunur. $f(W) \subset Z$ ise Lemma 4.2.6 gereği R değişmeli olur. Ve ispat biter. O halde $f^2(W) \subset Z$ olmalıdır. Burada Lemma 4.2.3 gereği $f^2(W) \neq 0$ bulunur. Bu durumda hipotezden

$$\left[f(f(w)u), f(v)\right] \in Z$$

$$\left[f^2(w)g(u), f(v)\right] + \left[f(w)f(u), f(v)\right]$$

elde edilir.Yani

$$f^2(w)\left[g(u), f(v)\right] + \left[f(w), f(v)\right]f(u) + f(w)\left[f(u), f(v)\right] \in Z,\ \forall\ u, v \in U,\ \forall\ w \in W \quad (4.9)$$

bulunur. (4.9) eşitliğini y $\in$ U için f(y) ile değişmeli yaparsak

$$0 = f^2(w)\left[\left[g(u), f(v), f(y)\right]\right] + \left[f(w), f(v)\right]\left[f(u), f(y)\right] + \left[f(w), f(y)\right]\left[f(u), f(v)\right]$$

olur. Burada $f^2(W) \subset Z$ ve $\left[f(U), f(U)\right] \subset Z$ olduğundan

$$f^2(w)\left[\left[g(u), f(v)\right], f(y)\right] \in Z,\ \forall\ u, v, y \in U$$

elde edilir. Burada $f^2(w) \in Z$ ve R asal halka olduğu için $f^2(w) \neq 0$ ise $\left[\left[g(u), f(v)\right], f(y)\right] \in Z$ bulunur. Burada r $\in$ W için v ve y yerine g(r) yazarsak

$$\left[\left[g(u), fg(r)\right], fg(r)\right] = g(\left[\left[u, f(r)\right], f(r)\right]) \in Z$$

bulunur. g birebir olduğundan

$$\left[\left[u, f(r)\right], f(r)\right] \in Z,\ \forall\ u \in U,\ \forall\ r \in W$$

olur. Yani her u $\in$ U için $\left[\left[u, f(W)\right], f(W)\right] \subset Z$ bulunur. $0 \neq f(W)$ ideal olduğundan Lemma 4.1.5 gereği $f(W) \subset Z$ veya $U \subset Z$ elde edilir. Burada her iki durum da R halkasının değişmeli olması anlamına gelir. O halde ispat biter.

BÖLÜM 5
HALKALARDA TEK YANLI (σ,τ)-LİE İDEAL

Bu bölümde 3. ve 4. bölümdeki çalışmalarda türev yerine (σ,τ) türev alınarak Hirano, Y. ve Tominaga ile Kaya, K. tarafından, R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve d, R halkasının bir (σ,τ) türevi olmak üzere her $u \in U$ için $[u', u] = 0$, $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$, $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olması durumunda R halkasının değişmeli olduğu incelenmiştir. Ayrıca Kandamar, H. ve Kaya, K. tarafından R, CharR$\neq$ 2 olan bir asal halka, U onun sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ) türevi olmak üzere td(U) = 0, $d(U) \subset Z$ ve $[U, d(U)] \subset Z$ olması durumunda $U \subset Z$ olduğu gösterilmiştir. 3. kısımda ise Aydın, N. tarafından U, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sol Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $U \subset Z$, $U \subset C_{\sigma,\tau}$, $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$, aUb = (0) olduğunda R halkasının değişmeli olduğunu gösteren çalışmalar incelenerek tez sonlandırılmıştır.

5.1 (σ,τ)-Türevli Halkalar

Hirano, Y. ve Tominaga, H., 1984

Bu bölümde R asal halka, C, R halkasının merkezi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olarak alınmıştır. Ayrıca σ, τ iki halka otomorfizm ve d : $X \to X'$, R nin bir dönüşümü olmak üzere her x, $y \in R$ için $(x+y)' = x' + y'$ ve $(xy)' = x'\sigma(y) + \tau(x)y'$ koşulları sağlanırsa d ye R halkasının bir (σ,τ) türevi denir. $C_{\sigma,\tau} = \{c \in R : c\sigma(x) = \tau(x)c, \text{her } x \in R\}$, $[x, y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$, $(x, y)_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) + \tau(y)x$ şeklinde tanımlanırsa $C_{1,1} = C$ ve $[x, y]_{1,1} = [x, y]$ ve $(x, y)_{1,1} = xy + yx = (x, y)$ olur. O zaman aşağıdakiler denktir.

a) R değişmelidir

b) Her $u \in U$ için $[u', u] = 0$

c) Her $u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$

d) Her $u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$

e) U' değişmelidir

f) $U'' \subseteq C$

Özellik 5.1.1. R bir asal halka, d sıfırdan farklı bir $(\sigma,1)$ türev olsun. O zaman a) ve b) şıkları eşittir.

İspat : Her u, v $\in$ U için b) koşulu lineerleştirilirse

$$0 = \left[(u+v)', u+v\right] = \left[u'+v', u+v\right]$$
$$= \left[u', u\right] + \left[u', v\right] + \left[v', u\right] + \left[v', v\right]$$
$$= \left[u', v\right] + \left[v', u\right]$$

olur. Yani

$$0 = \left[u', v\right] + \left[v', u\right] \ , \ \forall u, v \in U \qquad (5.1)$$

elde edilir. (5.1) eşitliğinde v yerine uv yazılır ve (5.1) kullanılırsa

$$\left[u', uv\right] = \left[u, (uv)'\right] = \left[u, u'\sigma(v) + uv'\right]$$
$$= u'\left[u, \sigma(v)\right] + u\left[u, v'\right]$$
$$= u'\left[u, \sigma(v)\right] + u\left[u', v\right]$$
$$= u'\left[u, \sigma(v)\right] + \left[u', uv\right]$$
$$= u'\left[u, \sigma(v)\right]$$

bulunur. Yani

$$0 = u'\left[u, \sigma(u)\right] \ , \ \forall u, v \in U$$

elde edilir. Burada w $\in$ U alınırsa her u, v w$\in$ U için

$$0 = u'\left[u, \sigma(w)v\right] = u'\sigma(w)\left[u, v\right] + u'\left[u, \sigma(w)\right]v$$
$$= u'\sigma(w)\left[u, v\right]$$

olur. Yani her u, v$\in$ U için $u'\sigma(U)\left[u, v\right]$ = 0 bulunur. Burada σ(U), R halkasının bir ideali olduğundan Lemma 4.1.4 gereği σ(U)$\subset$ Z veya $U' = 0$ veya her u $\in$U için u$\in$ Z olur. Burada σ otomorfizm olduğundan σ(U) $\subset$Z ise U$\subset$ Z bulunur. Sonuçta U$\subset$Z veya $U' = 0$ elde edilir. Kabul edelim ki $U' = 0$ olsun. O zaman her u $\in$U, her r$\in$ R için $(ur)' = u'\sigma(r) + ur'$ = 0 olur. Yani her u $\in$U, her r$\in$ R için 0 = uRr' bulunur. Burada R asal halka olduğundan U = 0 veya R' = 0 elde edilir. U$\neq$0 olduğu için R' = 0 olmalıdır. Bu ise d$\neq$0 olması ile çelişir. O halde kabul yanlıştır. $U' \neq 0$ olmalıdır. O zaman U$\subset$Z bulunur. Buda R halkasının değişmeli olması anlamına gelir ve ispat biter.

Özellik 5.1.2. R bir asal halka ve d, sıfırdan farklı (σ,τ) türev olsun. O zaman c) şıkkı a) şıkkını gerektirir.

İspat : Burada $R'\neq 0$ olduğundan $U'\neq 0$ olur. Bu durumda c) şıkkı lineerleştirilirse

$$0=\left[(u+v)',u+v\right]_{\sigma,\tau}=\left[u',u+v\right]_{\sigma,\tau}+\left[v',u+v\right]_{\sigma,\tau}$$

$$=\left[u',v\right]_{\sigma,\tau}+\left[v',u\right]_{\sigma,\tau}$$

olur. Yani

$$\left[u',v\right]_{\sigma,\tau}=-\left[v',u\right]_{\sigma,\tau}\ ,\ \forall\, u,v\in U$$

elde edilir. Buda $u'\sigma(v)-\tau(v)u'=-v'\sigma(u)+\tau(u)v'$ olması demektir. Yani

$$u'\sigma(v)-\tau(v)u'=\tau(u)v'-v'\tau(u)\ ,\ \forall\, u,v\in U \qquad (5.2)$$

olur. (5.2) eşitliğinde v yerine uv yazarsak

$$0=u'\sigma(uv)-\tau(uv)u'-\tau(u)(uv)'+(uv)'\sigma(u)$$

$$=u'\sigma(u)\sigma(v)-\tau(u)\tau(v)u'-\tau(u)u'\sigma(v)-\tau(u)\tau(u)v'+u'\sigma(v)\sigma(u)+\tau(u)v'\sigma(u)$$

$$=\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}\sigma(v)+\tau(u)\left[v',u\right]_{\sigma,\tau}-\tau(u)\tau(v)u'+u'\sigma(v)\sigma(u)$$

bulunur. Burada (5.2) ve c) şıkkını kullanırsak

$$0=\tau(u)\left[v',u\right]_{\sigma,\tau}-\tau(u)\tau(v)u'+u'\sigma(v)\sigma(u)$$

$$=-\tau(u)\left[u',v\right]_{\sigma,\tau}-\tau(u)\tau(v)u'+u'\sigma(v)\sigma(u)$$

$$=-\tau(u)u'\sigma(v)+u'\sigma(v)\sigma(u)$$

elde edilir. Her $u\in U$ için $\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan $u'\sigma(u)=\tau(u)u'$ olur. O halde

$$0=-u'\sigma(u)\sigma(v)+u'\sigma(v)\sigma(u)$$

$$=u'\sigma(uv-vu)$$

bulunur. Yani

$$0=u'\sigma(\left[u,v\right]),\forall\, u,v\in U$$

olur. Bu da her $u\in U$ için $u'\sigma(\left[u,U\right])=0$ demektir. Burada U ideal olduğundan her $x\in R$ ve her $v\in U$ için $vx\in U$ olması kullanılırsa

$$0=u'\sigma(\left[vx,u\right])=u'\sigma(\left[v,u\right])\sigma(x)+u'\sigma(v)\sigma(\left[x,u\right])$$

$$=u'\sigma(v)\sigma(\left[x,u\right])$$

bulunur. Yani

$$0=u'\sigma(U)\sigma(\left[x,u\right]),\ \forall\, u\in U,\ \forall\, x\in R$$

olur. Yine $\sigma(U) \neq 0$, R de bir ideal olduğundan $U' = 0$ veya $U \subset C$ bulunur. Burada $U' \neq 0$ olduğundan $U \subset C$ ve dolayısıyla R değişmeli bulunur. O zaman her $u \in U$ için

$$0 = [u', u]_{\sigma,\tau} = u'\sigma(u) - \tau(u)u' = u'\sigma(u) - u'\tau(u) = u'(\sigma(u) - \tau(u)), \forall\, u \in U$$

yazılabilir. Burada R asal halka olduğundan her $u \in U$ için $u' = 0$ veya $\sigma(u) = \tau(u)$ olur.

A = $\{u \in U : u' = 0\}$ ve B = $\{u \in U : \sigma(u) = \tau(u)\}$ olarak tanımlanan kümeler R halkasının öz alt grubudurlar. O halde Brauer's Trick ten U = A veya U = B olmalıdır. U = A ise $U' = 0$ olur ve bu $U' \neq 0$ olması ile çelişir. O halde U = B bulunur. Yani her $u \in U$ için $\sigma(u) = \tau(u)$ olur. Bu durumda U ideal olduğundan her $r \in R$ ve her $u \in U$ için

$$\tau(ur) = \sigma(ur)$$

$$\tau(u)\tau(r) = \sigma(u)\sigma(r)$$

$$\sigma(u)\tau(r) = \sigma(u)\sigma(r)$$

$$0 = \sigma(u)(\tau(r) - \sigma(r))$$

elde edilir. $\sigma(U)$, R de sıfırdan farklı bir ideal, $U \neq 0$ ve R asal halka olduğundan

$$\sigma(r) = \tau(r), \forall\, r \in R$$

olur. O halde $\sigma = \tau$ bulunur.

Teorem 5.1.1. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d, R asal halkasında sıfırdan farklı bir (σ,τ) türev olsun. O zaman c) ve d) şıkları eşittir.(bu yüzden d) ve a) şıkları da eşittir)

İspat : Kabul edelim ki d) sağlansın. Keyfi bir $u \in U$ için d) şıkkı kullanılırsa

$$[(u^2)', u^2]_{\sigma,\tau} = [u'\sigma(u) + \tau(u)u', u^2]$$

$$= (u'\sigma(u) + \tau(u)u')\sigma(u^2) - \tau(u^2)(u'\sigma(u) + \tau(u)u')$$

$$= u'\sigma(u)\sigma(u^2) + \tau(u)u'\sigma(u^2) - \tau(u^2)u'\sigma(u) - \tau(u^2)\tau(u)u'$$

$$= u'\sigma(u)\sigma(u^2) + \tau(u)u'\sigma(u^2) - \tau(u^2)u'\sigma(u) - \tau(u^2)\tau(u)u'$$

$$- \tau(u)u'\sigma(u^2) + \tau(u)u'\sigma(u^2) + \tau(u^2)\tau(u)u' - \tau(u^2)\tau(u)u'$$

$$= (u'\sigma(u) - \tau(u)u')\sigma(u^2) - \tau(u^2)(u'\sigma(u) - \tau(u)u')$$

$$+ 2\tau(u)u'\sigma(u^2) - 2\tau(u^2)\tau(u)u'$$

$$= 2\tau(u)(u'\sigma(u)\sigma(u) - \tau(u)\tau(u)u')$$

$$= 2\tau(u)(u'\sigma(u)\sigma(u) - \tau(u)\tau(u)u' - \tau(u)u'\sigma(u) + \tau(u)u'\sigma(u))$$

$$= 2\tau(u)(\tau(u)[u', u]_{\sigma,\tau} + \tau(u)[u', u]_{\sigma,\tau})$$

$$= 4\tau(u^2)[u',u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Burada char$R \neq 2$ ise $\tau(u^2)[u',u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. O halde her $x \in R$ için

$$0 = \left[\tau(u^2)[u',u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, x\right]$$

$$= \tau(u^2)[u',u]_{\sigma,\tau}\sigma(x) - \tau(x)\tau(u^2)[u',u]_{\sigma,\tau}$$

$$= \tau(x)\tau(u^2)[u',u]_{\sigma,\tau} - \tau(x)\tau(u^2)[u',u]_{\sigma,\tau}$$

$$= \tau([x,u^2])[u',u]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Burada $[u',u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ve R asal halka olduğundan

$$[x,u^2] = 0 \text{ veya } [u',u]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall x \in R, \ \forall u \in U$$

olur. Böylece

$$u^2 \in C \text{ veya } [u',u]_{\sigma,\tau} = 0$$

bulunur. Eğer $[u',u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise ispat biter. O halde her $u \in U$ için $u^2 \in C$ olur. O zaman $[u',u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ve $u^2 \in C$ olduğundan

$$[u',u]_{\sigma,\tau}\sigma(u^2) = \tau(u^2)[u',u]_{\sigma,\tau} = [u',u]_{\sigma,\tau}\tau(u^2)$$

olur. Buradan

$$[u',u]_{\sigma,\tau}(\sigma(u^2) - \tau(u^2)) = 0$$

bulunur. Burada $[u',u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ve R asal halka olduğundan

$$[u',u]_{\sigma,\tau} = 0 \text{ veya } \sigma(u^2) = \tau(u^2), \ \forall u \in U$$

elde edilir. Eğer $[u',u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise ispat biter. O halde $\sigma(u^2) = \tau(u^2)$ olur. Öte yandan $u^2 \in C$ olduğundan $\sigma(u^2), \tau(u^2) \in C$ dir. O zaman her $x \in R$ için $\sigma(u^2) = \tau(u^2)$ olmasını kullanırsak

$$0 = ([u^2, x])' = (u^2x - xu^2)' = (u^2x)' - (xu^2)'$$

$$= (u^2)'\sigma(x) + \tau(u^2)x' - x'\sigma(u^2) - \tau(x)(u^2)'$$

$$= [u^2, x]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Böylece $(u^2)' \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani

$$(u^2)' = u'\sigma(u) + \tau(u)u' \in C_{\sigma,\tau} \tag{5.3}$$

olur. Öte yandan

$$\left[u', u\right]_{\sigma,\tau} = u'\sigma(u) - \tau(u)u' \in C_{\sigma,\tau} \tag{5.4}$$

sağlanır. (5.3) ve (5.4) eşitlikler taraf tarafa bir toplanıp bir çıkartılırsa

$$2u'\sigma(u) \in C_{\sigma,\tau} \text{ veya } 2\tau(u)u' \in C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Yani her $u \in U$ için $u'\sigma(u) \in C_{\sigma,\tau}$ veya $\tau(u)u' \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Burada $\tau(u)u' \in C_{\sigma,\tau}$ ise

$$\tau(u)\left[u', u\right]_{\sigma,\tau} = \tau(u)u'\sigma(u) - \tau(u)\tau(u)u'$$
$$= \tau(u)\tau(u)u' - \tau(u)\tau(u)u' = 0$$

bulunur. $\left[u', u\right]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $x \in R$ için

$$0 = \tau(u)\left[u', u\right]_{\sigma,\tau} \sigma(x) = \tau(u)\sigma(x)\left[u', u\right]_{\sigma,\tau}$$

olur. Yani

$$0 = \tau(u)R\left[u', u\right]_{\sigma,\tau}$$

olur. Böylece

$$\tau(u) = 0 \text{ veya } \left[u', u\right]_{\sigma,\tau} = 0, \forall u \in U$$

elde edilir. Burada A = $\{u \in U : \tau(u) = 0\}$ ve B = $\left\{u \in U : \left[u', u\right]_{\sigma,\tau} = 0\right\}$ olarak tanımlansın. U = $A \cup B$ olan A ve B, U nun iki öz alt grubudur. O halde Brauer's Trick ten U = A veya U = B olmalıdır. U = A ise $\tau : R \to R$ bir otomorfizm olduğundan U = 0 olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $U \neq A$ olur. Yani U = B olmalıdır. O halde her $u \in U$ için $\left[u', u\right]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Böylece ispat sonlandırılmış olur.

Kaya, K., 1988

Lemma 5.1.1. R bir asal halka, $d : X \to X'$ sıfırdan farklı bir (σ, τ) türev ve $U \neq 0$, R nin bir ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $(u', u)_{\sigma,\tau} = 0$ ise R değişmeli bir halkadır.

İspat : $U \neq 0$ idealinde her $u \in U$ ve her $x \in R$ için $0 = (ux)' = u'\sigma(x) + \tau(u)x'$ olduğunda $0 = \tau(u)R'$ olur. R asal halka ve $\tau(U) \neq 0$ R nin ideali olduğundan $R' = 0$ bulunur. Bu ise $d \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $U' \neq 0$ olur. O zaman her u, $v \in U$ için hipotez kullanılırsa

$$0 = (u' + v', u + v)_{\sigma,\tau} = (u', v)_{\sigma,\tau} + (v', u)_{\sigma,\tau}, \ \forall u, v \in U \tag{5.5}$$

olur. Yani

$$(u', v)_{\sigma,\tau} = -(v', u)_{\sigma,\tau}, \ \forall u, v \in U \tag{5.6}$$

bulunur. (5.5) de v yerine uv yazar hipotezi ve (5.6) eşitliğini kullanırsak

$$0 = u'\sigma(u)\sigma(v)+\tau(u)\tau(v)u'+u'\sigma(v)\sigma(u)+\tau(u)v'\sigma(u)$$
$$+\ \tau(u)u'\sigma(v)+\tau(u)\tau(u)v'$$
$$= (u',u)_{\sigma,\tau}\sigma(v)+\tau(u)(v',u)_{\sigma,\tau}+\tau(u)\tau(v)u'+u'\sigma(v)\sigma(u)$$
$$= u'\sigma(v)\sigma(u)-\tau(u)u'\sigma(v)$$
$$= u'\sigma(v)\sigma(u)+u'\sigma(u)\sigma(v)$$

elde edilir. Yani

$$0 = u'\sigma((v,u)),\ \forall\, u, v\in U \tag{5.7}$$

bulunur. (5.7) eşitliğinde $x \in R$ olmak üzere v yerine vx alınır ve $(xy,z)=x\left[y,z\right]+(x,z)y$ olması kullanılırsa her $u, v\in U$ ve her $x \in R$ için

$$0 = u'\sigma(v\left[x,u\right]+(v,u)x)=u'\sigma(v\left[x,u\right])+u'\sigma((v,u))\sigma(x)$$
$$= u'\sigma(v)\sigma(\left[x,u\right])$$

olur. Yani her $x \in R$ ve her $u \in U$ için $u'\sigma(U)\sigma(\left[x,u\right]) = 0$ elde edilir. Burada $U\neq 0$ bir ideal ve σ otomorfizm olduğundan $\sigma(U)\neq 0$ idealdir. O halde Lemma 4.1.4 gereği $\sigma(U)\subseteq C$ veya $U'=0$ veya $U \subseteq C$ bulunur. Burada σ otomorfizm olduğundan birinci ve üçüncü koşul aynıdır. Yani ifade $U'=0$ veya $U\subseteq C$ olur. $U'\neq 0$ olduğundan $U\subseteq C$ bulunur. Buda R değişmeli demektir.

Lemma 5.1.2. R bir asal halka, $d : X\rightarrow X'$ sıfırdan farklı bir (σ,τ) türev ve $U\neq 0$, R nin bir sağ ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için (i) $\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}=0$ ise R değişmeli bir halkadır. (ii) $(u',u)_{\sigma,\tau}=0$ ise R değişmeli bir halkadır. Üstelik $\sigma=\tau$ dır.

İspat : (i) Her $u \in U$ için $\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}=0$ olsun. Lemma 5.1.1 de gösterildiği gibi $U'\neq 0$ olur. Kabul her $u, v \in U$ için lineerleştirilirse

$$0 = \left[(u+v)',u+v\right]_{\sigma,\tau}=\left[u',u+v\right]_{\sigma,\tau}+\left[v',u+v\right]_{\sigma,\tau}$$
$$= \left[u',v\right]_{\sigma,\tau}+\left[v',u\right]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Burada v yerine uv alınırsa

$$0 = u'\sigma(u)\sigma(v)-\tau(u)\tau(v)u'+u'\sigma(v)\sigma(u)+\tau(u)v'\sigma(u)$$
$$-\tau(u)u'\sigma(v)-\tau(u)\tau(u)v'$$
$$= \left[u',u\right]_{\sigma,\tau}\sigma(v)+\tau(u)\left[v',u\right]_{\sigma,\tau}-\tau(u)\tau(v)u'+u'\sigma(v)\sigma(u)$$
$$= \tau(u)u'\sigma(v)+\tau(u)\tau(v)u'-\tau(u)\tau(v)u'+u'\sigma(v)\sigma(u)$$

elde edilir. Yani

$$0 = -\tau(u)u'\sigma(v) + u'\sigma(v)\sigma(u)\ ,\ \forall\, u, v \in U \text{ için} \tag{5.8}$$

olur. Hipotezde $u'\sigma(u) = \tau(u)u'$ olduğundan (5.8) de bunu kullanırsak her u, v $\in$ U için

$$0 = u'\sigma(u)\sigma(v) + u'\sigma(v)\sigma(u) = u'\sigma([u, v])$$

bulunur. Burada x $\in$ R olmak üzere v yerine vx yazılırsa

$$0 = u'\sigma(v)\sigma([u, x])\ ,\ \forall\, u, v \in U,\quad \forall\, x \in R \tag{5.9}$$

olur. (5.9) eşitliğinde y $\in$ R olmak üzere v yerine vy yazarsak

$$0 = u'\sigma(v)\sigma(y)\sigma([u, x])$$

elde edilir. R asal halka ve σ otomorfizm olduğundan

$$u'\sigma(v) = 0 \text{ veya } u \in C\ ,\ \forall\, u, v \in U \tag{5.10}$$

bulunur. Şimdi U ideal değilse bir u $\in$ U \ C vardır. Buna göre herhangi bir c $\in$ $C \cap U$ için $u + c \notin C$ olduğundan (5.10) dan her v $\in$ U için

$$0 = (u + c)'\sigma(v) = u'\sigma(v) + c'\sigma(v) = c'\sigma(v)$$

olur. O halde

$$u \in U \text{ ve } u \notin C \Rightarrow u'\sigma(v) = 0\ ,\ \forall\, v \in U \text{ için}$$

$$u \in U \text{ ve } u \in C \Rightarrow u'\sigma(v) = 0\ ,\ \forall\, v \in U \text{ için}$$

bulunur. Buna göre her u, v$\in$ U için $u'\sigma(v) = 0$ olur. Yani

$$U'\sigma(U) = 0 \tag{5.11}$$

elde edilir. Öte yandan $[u', v]_{\sigma,\tau} + [v', u]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan (5.11) burada kullanılırsa,

$$0 = \tau(u)v' + \tau(v)u'\ ,\ \forall\, u, v \in U \tag{5.12}$$

olur. Aynı zamanda hipotez ve(5.11) den

$$0 = v'\sigma(v) = \tau(v)v' \tag{5.13}$$

vardır. O halde (5.12)de x$\in$ R olmak üzere v yerine vx yazılırsa her u, v $\in$ U için

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(u)(v'\sigma(x) + \tau(v)x') + \tau(v)\tau(x)u' \\ &= \tau(u)v'\sigma(x) + \tau(u)\tau(v)x' + \tau(v)\tau(x)u' \end{aligned}$$

bulunur. Burada u yerine v alınırsa (5.11) ve (5.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$0 = \tau(v^2)x' + \tau(v)\tau(x)v'\ ,\ \forall\, x \in R,\ \forall\, v \in U \tag{5.14}$$

elde edilir. Eğer $v' = 0$ ise (5.14) den her x $\in$ R için $\tau(v^2)x' = 0$ olur. Burada y$\in$ R olmak üzere x yerine xy alırsak

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(v^2)(xy)' = \tau(v^2)(x'\sigma(y) + \tau(x)y') \\ &= \tau(v^2)x'\sigma(y) + \tau(v^2)\tau(x)y' \end{aligned}$$

$$= \tau(v^2)\tau(x)y'$$

bulunur. R asal halka ve τ otomorfizm olduğundan

$$\tau(v^2) = 0 \text{ ve } y' = 0, \ \forall v \in U, \ \forall y \in R$$

olur. Burada $R' \neq 0$ olduğundan her $v \in U$ için $\tau(v^2) = 0$ dır. τ otomorfizm olduğundan

$$v' = 0 \text{ ise } v^2 = 0$$

bulunur. (5.14) de x yerine xy alırsak

$$0 = \tau(v^2)(xy)' + \tau(v)\tau(xy)v'$$

$$= \tau(v^2)x'\sigma(y) + \tau(v^2)\tau(x)y' + \tau(v)\tau(x)\tau(y)v' \qquad (5.15)$$

elde edilir. (5.14) de $\tau(v^2)x' = -\tau(v)\tau(x)v'$ olması (5.15) de kullanılırsa ifade

$$0 = -\tau(v)\tau(x)v'\sigma(y) + \tau(v^2)\tau(x)y' + \tau(v)\tau(x)\tau(y)v'$$

(5.16)

şeklini alır. Burada sağdan $\sigma(v)$ ile çarpıp (5.11) kullanılırsa

$$0 = -\tau(v)\tau(x)v'\sigma(y)\sigma(v) + \tau(v^2)\tau(x)y'\sigma(v) \qquad (5.17)$$

bulunur. (5.16) da $v \in U$ için y yerine yv yazılırsa

$$0 = -\tau(v)\tau(x)v'\sigma(y)\sigma(v) + \tau(v^2)\tau(x)y'\sigma(v) + \tau(v^2)\tau(x)\tau(y)v' + \tau(v)\tau(x)\tau(v)v'$$

olur. Burada son terim (5.13) den ilk iki terimde (5.17) den dolayı sıfır olur. O halde her $x, y \in R$ için $\tau(v^2)\tau(x)\tau(y)v' = 0$ olur. R asal ve τ otomorfizm olduğu için

$$\tau(v^2) = 0 \text{ veya } v' = 0$$

bulunur. Oysa daha önce $v' = 0$ ise $v^2 = 0$ olduğunu bulmuştuk. O zaman her $v \in U$ için $v^2 = 0$ olur Buda bize U = 0 olmasını verir. Bu ise çelişkidir. O halde U sıfırdan farklı bir idealdir. Bu durumda Özellik 5.1.2 gereği R halkası değişmeli ve $\sigma = \tau$ bulunur. (ii) Burada (i) şıkkı gibi düşünürsek yine U nun ideal olduğu görülür. O halde Lemma 5.1.1 gereği R değişmeli bir halka bulunur.

Lemma 5.1.3. R bir asal halka, d : $X \to X'$ sıfırdan farklı bir (σ,τ) türev ve b, ab $\in C_{\sigma,\tau}$ ise a $\in$ C veya b = 0 olur.

İspat : b, ab $\in C_{\sigma,\tau}$ olsun. O halde her $x \in R$ için $0 = [b,x]_{\sigma,\tau} = b\sigma(x) - \tau(x)b$

olur. Yani $b\sigma(x) = \tau(x)b$ bulunur. Bunu $ab \in C_{\sigma,\tau}$ için kullanırsak

$$0 = [ab,x]_{\sigma,\tau} = ab\sigma(x) - \tau(x)ab = a\tau(x)b - \tau(x)ab$$

$$= [a,\tau(x)]b$$

bulunur. R asal halka ve $b \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$[a, \tau(x)] = 0 \text{ veya } b = 0$$

olur. Yani τ otomorfizm olduğundan

$$a \in C \text{ veya } b = 0$$

bulunur.

Lemma 5.1.4. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, $d : X \to X'$ sıfırdan farklı bir (σ, τ) türev $U \neq 0$, R nin bir sağ ideali olsun. Buna göre her $u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ise $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ olur.

İspat : Burada $R_2 = \left[\begin{pmatrix} \tau(x) & 0 \\ 0 & \sigma(x) \end{pmatrix} : x,y \in R \right]$ halkasını düşünülsün. O zaman $C_2 = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in C, b \in C_{\sigma,\tau} \right]$ kümesi R_2 halkasının merkezi içindedir. Öte yandan

$$R \to R_2,\ x \to x^* = \begin{pmatrix} \tau(x) & x' \\ 0 & \sigma(x) \end{pmatrix}$$

bir halka homomorfizmi ve

$$R \to R_2,\ x \to \begin{pmatrix} \tau(x) & 0 \\ 0 & \sigma(x) \end{pmatrix}$$

bir içine izomorfizmdir. Dolayısıyla R ye R_2 nin bir alt halkası olarak bakılabilir. Şimdi her $u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$\begin{aligned}[u^*, u] = u^*u - uu^* &= \begin{pmatrix} \tau(u) & u' \\ 0 & \sigma(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(u) & 0 \\ 0 & \sigma(u) \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \tau(u) & 0 \\ 0 & \sigma(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(u) & u' \\ 0 & \sigma(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & [u', u]_{\sigma,\tau} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in C_2 \end{aligned}$$

olur. O halde $[x, yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)[x, z]_{\sigma,\tau} + [x, y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$ ve $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olması kullanılırsa her $u \in U$ için

$$[(u^2)^*, u^2] = (u^2)^* u^2 - u^2 (u^2)^* = \begin{pmatrix} \tau(u^2) & (u^2)' \\ 0 & \sigma(u^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(u^2) & 0 \\ 0 & \sigma(u^2) \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} \tau(u^2) & 0 \\ 0 & \sigma(u^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau(u^2) & (u^2)' \\ 0 & \sigma(u^2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \tau(u^2)^2 & (u^2)'\sigma(u^2) \\ 0 & \sigma(u^2)^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \tau(u^2)^2 & \tau(u^2)(u^2)' \\ 0 & \sigma(u^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & (u^2)'\sigma(u^2)-\tau(u^2)(u^2)' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \left[u',u^3\right]_{\sigma,\tau}+\tau(u)\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}\sigma(u) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \tau(u^2)\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}+\left[u',u^2\right]_{\sigma,\tau}\sigma(u)+\tau(u^2)\left[u',u\right]_{\sigma,\tau} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 4\tau(u^2)\left[u',u\right]_{\sigma,\tau} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Yani her $u\in U$ için $\tau(u^2)\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Burada Lemma 5.1.3 gereği τ otomorfizm olduğundan $u^2\in C$ veya $\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}=0$ elde edilir. Öte yandan hipotezden

$$u'\sigma(u)-\tau(u)u'\in C_{\sigma,\tau} \tag{5.18}$$

olduğu biliniyor. Burada bir $c\in C$ için $\sigma(c)$, $\tau(c)\in C$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} \tau(c) & 0 \\ 0 & \sigma(c) \end{pmatrix}\in C_2 \tag{5.19}$$

olur. C_2, R_2 nin merkezinde olduğu için (5.19) da R_2 nin merkezindedir. Buna göre $u^2\in C$ olduğundan $\left[(u^2)^*,u^2\right]=0$ bulunur. O halde $\tau(u^2)\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}=0$ olur. R asal halka ve $\left[u',u\right]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$\tau(u^2)=0 \text{ veya } \left[u',u\right]_{\sigma,\tau}=0$$

bulunur. Eğer $\tau(u^2)=0$ ise her $x\in R$ için $\tau(ux)(ux)'-(ux)'\sigma(ux)=c\in C_{\sigma,\tau}$ ifadesi soldan ve sağdan $\tau(u)$ ile çarpılıp $\tau(u^2)=0$ olması kullanılırsa

$$0=\tau(u)u'\sigma(x)\sigma(u)\sigma(x)\sigma(u)$$

olur. Burada Lemma 5.1.1 kullanılırsa

$$\tau(u)u'=0 \tag{5.20}$$

bulunur. O halde (5.19) da $u'\sigma(u) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Öte yandan $\tau(u^2) = 0$ ise $u^2 = 0$ olduğundan $\sigma(u^2) = 0$ dır. O zaman $u'\sigma(u)\sigma(u) = 0$, R asal halka ve $u'\sigma(u) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $u'\sigma(u) = 0$ veya $\sigma(u) = 0$ elde edilir. Yani $u'\sigma(u) = 0$ olur. Bunu (5.20) ile beraber düşünürsek $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur.

5.2 (σ,τ)-Türevli Halkalar Ve Lie İdealler

Kandamar, H. Ve Kaya, K. 1992

Bu makalede R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, $d : R \to R$ sıfırdan farklı bir (σ, τ) türev $U \neq 0$, R nin bir Lie ideali olarak alınmıştır.

Lemma 5.2.1. Eğer d(U) =(0) ise $U \subset Z$ dir.

İspat : Her $u \in U$ ve her $x \in R$ için $[u, x] \in U$ olduğundan

$$0 = d([u, x]) = [d(u), x]_{\sigma,\tau} - [d(x), u]_{\sigma,\tau} = -[d(x), u]_{\sigma,\tau}$$

olur. O halde $[d(R), U]_{\sigma,\tau} = (0)$ bulunur. Buda $d \neq 0$ olduğundan $U \subset Z$ demektir.

Lemma 5.2.2. $U \not\subset Z$ ve $t \in R$ için td(u) = 0 (veya d(u)t = 0) ise t = 0 olur.

İspat : Lemma 5.2.1 gereği $U \not\subset Z$ ise $d(U) \neq (0)$ olur.O halde her $u \in U$ ve her $x \in R$ için $0 = td([u, x]u) = td([u, x])\sigma(u) + t\tau([u, x])d(u)$ olur. Yani

$$0 = t\tau([u, x])d(u), \ \forall u \in U, \ \forall x \in R \qquad (5.21)$$

bulunur. (5.21) de $v \in U$ ve $y \in R$ olmak üzere x yerine $\tau^{-1}(d(v)y)$ yazarsak

$$0 = t\tau([u, \tau^{-1}(d(v)y)])d(u) = t\tau(u)d(v)yd(u) - td(v)y\tau(u)d(u)$$
$$= t\tau(u)d(v)yd(u)$$

elde edilir. Buda

$$0 = t\tau(u)d(v)Rd(u), \ \forall u, v \in U$$

demektir. R asal halka olduğundan

$$t\tau(u)d(v) = 0 \ \text{veya} \ d(u) = 0, \ \forall u \in U$$

olur. $K = \{u \in U : d(u) = 0\}$ ve $L = \{u \in U : t\tau(u)d(v), \text{ her } v \in U\}$ olarak tanımlansın. $U = K \cup L$ olan K ve L,U nun iki öz alt grubudur. O halde Brauer's Trick ten U = K veya U = L olmalıdır. U = K ise Lemma 5.2.1 den $U \subset Z$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde U = L olmalıdır. Yani her $u \in U$ için $t\tau(u)d(v) = 0$ olur. Burada $U \not\subset Z$ olan lie ideal ve τ otomorfizm olduğundan Lemma 4.1.4 gereği t = 0 veya her $v \in U$ için d(v) = 0 olur.

Burada d(U) $\neq 0$ olduğundan t = 0 bulunur. Bu kez (5.21) eşitliğinde x yerine $\tau^{-1}(yd(v))$ yazarak işlem yaparsak d(U)t = 0 olma durumunda t = 0 bulunur.

Lemma 5.2.3. Eğer d(U) $\subset$ Z ise U$\subset$ Z dir.

İspat : Kabul edelim ki U$\not\subset$Z olsun. O halde Lemma 5.2.1 gereği d(U) $\neq 0$ olur. Burada x$\in$ R ve u $\in$ U için t = ux – xu olmak üzere bir y $\in$ R için

$$0 = [d(ut), y] = [d(u)\sigma(t) + \tau(u)d(t), y]$$

$$= d(u)[\sigma(t), y] + [\tau(u), y]d(t) \qquad (5.22)$$

olur. (5.22) de y yerine yτ(u) yazarsak

$$0 = d(u)[\sigma(t), y\tau(u)] + [\tau(u), y\tau(u)]d(t)$$

$$= d(u)y[\sigma(t), \tau(u)] + d(u)[\sigma(t), y]\tau(u) + [\tau(u), y]\tau(u)d(t)$$

elde edilir. (5.22) eşitliğinde d(t) $\in$ Z olmasını kullanırsak

$$0 = d(u)R[\sigma(t), \tau(u)]$$

olur. Burada R asal halka olduğundan

$$d(u) = 0 \text{ veya } [\sigma([u, x]), \tau(u)] = 0$$

bulunur. Eğer d(u) $\neq 0$ ise her x$\in$ R için $[\tau(u), [\sigma(u), x]] = 0$ olur. $I_{\tau(u)}(x) = [\tau(u), x]$ ve $I_{\sigma(u)}(x) = [\sigma(u), x]$ iç türevleri tanımlansın. O halde ifade $I_{\tau(u)}I_{\sigma(u)}(R) = 0$ halini alır. Teorem 3.1.1 gereği $\sigma(u)\in$ veya τ(u) $\in$ Z olur. σ ve τ otomorfizm olduklarından u$\in$Z bulunur. Eğer d(u) = 0 ise en az bir v $\in$ U için d(U) $\neq 0$ olduğundan d(v) $\neq 0$ vardır. Diğer yandan d(u + v) = d(u) + d(v) = d(v) $\neq 0$ ve d(u – v) = d(u) – d(v) = d(v) $\neq 0$ olduğundan u + v$\in$ Z ve u – v $\in$ Z bulunur. Burada taraf tarafa toplarsak 2u $\in$ Z ve CharR$\neq 2$ olduğundan u$\in$ Z elde edilir. O halde her durumda U$\subset$Z bulunur.

Teorem 5.2.1. d, R halkasında sıfırdan farklı (σ, τ) türev, U, d(U) $\subset$ U olan R halkasında sıfırdan farklı bir Lie ideal ve $\sigma d = d\sigma, \tau d = d\tau$ olsun. $d^2(U) = (0)$ ise U$\subset$ Z dir.

İspat : Kabul edelim ki U$\not\subset$Z olsun. V = $[U, U]$, Lemma 4.1.3 gereği R nin merkezinde olmayan bir Lie idealdir. O halde V $\subset$Z ise ispat biter. Burada Lemma 4.1.1 gereği $[M, R]$ $\subset$ U ve $[M, R]$ $\not\subset$Z olan R nin sıfırdan farklı bir M ideali vardır. Eğer m$\in$ $[M, R]$ $\subset$U$\cap$ V ve u$\in$ V ise a = d(u) $\in$ d(V) $\subset$U ve d(a) = 0 olur. O halde y $\in$ R için

$$0 = d^2([ma,y]) = d^2(m[a,y]+[m,y]a)$$
$$= d(d(m)\sigma([a,y]) + \tau(m)d([a,y]) + d([m,y])\sigma(a) + \tau([m,y])d(a)$$
$$= \tau(d(m))d(\sigma([a,y])) + d(\tau(m))\sigma(d([a,y]))$$
$$+\tau(d([m,y]))d(\sigma(a)) + d(\tau([m,y]))\sigma(d(a))$$
$$= 2\,d(\tau(m))\sigma(d([a,y]))$$

bulunur. Burada $\mathrm{Char}R \neq 2$ olduğundan

$$0 = d(\tau(m))\sigma(d([a,y]))\,,\ \forall\, m \in [M,R]\,, \forall\, y \in R$$

elde edilir. Yani

$$0 = d(\tau([M,R]))\sigma(d([a,y]))\,,\ \forall\, y \in R \tag{5.23}$$

olur. $\tau([M,R])$, R nin merkezinde olmayan bir Lie ideal olduğundan Lemma 5.2.2 ve Lemma 5.2.3 gereği her $u \in V$ ve her $y \in R$ için $d([d(u),y]) = 0$ bulunur. O halde

$$0 = d([d(u),y]) = [d^2(u),y]_{\sigma,\tau} - [d(y),d(u)]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Yani

$$(0) = [d(R),d(V)]_{\sigma,\tau} \tag{5.24}$$

olur. Burada $d \neq 0$ olduğundan $d(V) \subset Z$ bulunur. Bu ise $V = [U,U] \subset Z$ demektir. Burada her $u \in U$ için $I_u(U) = 0$ olarak düşünürsek her $u \in U$ için $I_u = 0$ veya $U \subset Z$ olur. Sonuçta her iki durumda da $U \subset Z$ bulunur. Bu ise kabul ile çelişir. O halde $U \subset Z$ dir.

Lemma 5.2.4. $U \not\subset Z$ ve $a \in R$ için $[U,a] \subset Z$ ise $a \in Z$ olur.

İspat : Burada $u \in U$ için $u \notin Z$ ise her $x \in R$ için jacobi özdeşliğinden

$$0 = [[u,a],x] = [u,[a,x]] + [[u,x],a]$$

olur. Buradan

$$[u,[a,x]] \in Z\,,\ \forall\, x \in R$$

bulunur. Bu ifade d_u, d_a iç türevleriyle her $x \in R$ için $d_u d_a(x) = 0$ olur. O halde $d_u = 0$ veya $d_a = 0$ elde edilir. Buradan $u \in Z$ veya $a \in Z$ bulunur. $u \notin Z$ olduğundan $a \in Z$ olur.

Teorem 5.2.2. Eğer $[U,d(U)] \subset Z$ ise $U \subset Z$ olur.

İspat : Kabul edelim ki $U \not\subset Z$ olsun. Lemma 5.2.4 gereği $d(U) \subset Z$ olur. Bu durumda Lemma 5.2.3 gereği $U \subset Z$ bulunur. Bu ise kabul ile çelişir. O halde $U \subset Z$ olur.

5.3 Halkalarda Tek Yanlı (σ,τ)-Lie İdealler

Aydın, N. 1997

Lemma 5.3.1.[Aydın, N., 1995, Lemma 4] R bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ) sol Lie ideali olsun. Buna göre $U\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat : U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x\in R$ ve her $u\in U$ için $\left[\tau(u)x,u\right]_{\sigma,\tau}=\tau(u)\left[x,u\right]_{\sigma,\tau}+\left[\tau(u),\tau(u)\right]x=\tau(u)\left[x,u\right]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. O halde hipotez gereği her $x\in R$, her $u\in U$ için $\tau(u)\left[x,u\right]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Burada aynı zamanda $\left[x,u\right]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lemma 5.1.3 gereği

$$\tau(u)\in Z \text{ veya } \left[x,u\right]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall x\in R$$

bulunur. Eğer her $x\in R$ için $\left[x,u\right]_{\sigma,\tau}=0$ ise her $x, y\in R$ için

$$0=\left[xy,u\right]_{\sigma,\tau}=x\left[y,u\right]_{\sigma,\tau}+\left[x,\tau(u)\right]y=\left[x,\tau(u)\right]y$$

elde edilir. Yani $\left[R,\tau(u)\right]R=0$ olur. Buradan R asal olduğundan $\tau(u)\in Z$ bulunur. O halde her iki durumda da $\tau(u)\in Z$ elde edilir. τ otomorfizm olduğu için $U\subset Z$ olur.

Lemma 5.3.2.[Aydın, N., 1994, Lemma 3] R bir asal halka, $a\in R$ ve $aU=(0)$ (veya $Ua=(0)$) olsun.

(i) U, (σ,τ)-sol Lie ideal ise $a=0$ veya $U\subset Z$

(ii) U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ise $a=0$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat : (i) U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x, y\in R$, her $u\in U$ için $a\left[xy,u\right]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Buradan

$$0=a\left[xy,u\right]_{\sigma,\tau}=ax\left[y,\sigma(u)\right]+a\left[x,u\right]_{\sigma,\tau}y=ax\left[y,\sigma(u)\right]$$

bulunur. Yani

$$0=aR\left[y,\sigma(u)\right]$$

olur. R asal olduğundan her $y\in R$ ve $u\in U$ için $a=0$ veya $\left[y,\sigma(u)\right]=0$ elde edilir. σ otomorfizm olduğundan $a=0$ veya $U\subset Z$ olur. Benzer olarak her $x, y\in R$ ve her $u\in U$ için $\left[xy,u\right]_{\sigma,\tau}a=0$ olur. O halde

$$0=\left[xy,u\right]_{\sigma,\tau}a=x\left[y,u\right]_{\sigma,\tau}a+\left[x,\tau(u)\right]ya=\left[x,\tau(u)\right]ya$$

bulunur. Yine R asal halka olduğundan $\left[x,\tau(u)\right]=0$ veya $a=0$ olur. Burada τ otomorfizm olduğundan $a=0$ veya $U\subset Z$ elde edilir.

(ii) U, (σ,τ) - sağ Lie ideal olduğundan her x, y$\in$ R ve her u $\in$ U için $a\left[u,xy\right]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Buradan

$$0=a\left[u,xy\right]_{\sigma,\tau}=a\tau(x)\left[u,y\right]_{\sigma,\tau}+a\left[u,x\right]_{\sigma,\tau}\sigma(y)=a\tau(x)\left[u,y\right]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Yani τ otomorfizm olduğundan

$$0=aR\left[u,y\right]_{\sigma,\tau}$$

olur. R asal olduğundan her y $\in$ R için a = 0 veya $\left[u,y\right]_{\sigma,\tau}=0$ elde edilir. Buradan a = 0 veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Lemma 5.3.3.[Breaser, 1993, Lemma 2.3] R bir asal halka d, f, g ve h, R nin türevleri olsun. Her x, y$\in$ R için

$$d(x)g(y) = h(x)f(y) \tag{5.25}$$

sağlansın. Eğer $d\neq 0$ ve $f\neq 0$ ise her x$\in$ R için g(x) = λ f(x) ve h(x) = λ d(x) olacak şekilde $\lambda\in$ C vardır.

İspat: (5.25) özdeşliğinde, z$\in$R olmak üzere, y yerine zy yazılır, türev tanımı ve (5.25) özdeşliği kullanılırsa

$$d(x)zg(y) = h(x)zf(y)\ ,\ \forall\, x, y, z\in R \tag{5.26}$$

elde edilir. (5.26) özdeşliğinde, w$\in$R olmak üzere, z yerine zf(w) yazılır ve (5.26) özdeşliği kullanarak düzenlenirse d(x)zf(w)g(y) = d(x)zg(w)f(y) olur. Yani,

$$0 = d(x)z(f(w)g(y) - g(w)f(y)),\quad \forall\ x, y, z, w\in R$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede R nin asal halka olması kullanılırsa, her x$\in$R için, d(x) = 0 veya her y, w$\in$R için, f(w)g(y) - g(w)f(y) = 0 olur. Kabulümüzde $d\neq 0$ olduğu için,

$$f(w)g(y) = g(w)f(y),\ \ \forall\, y, w\in R$$

elde edilir. Yukarıdaki özdeşlik ve kabulümüzde $f\neq 0$ olduğu için, Önerme 2.12 den, her y $\in$R için g(y) = λf(y) olacak biçimde en az bir λ$\in$C var olduğu görülür. (5.26) özdeşliği bu eşitlik kullanarak düzenlenirse d(x)zλf(y) = h(x)zf(y) olur. Yani,

$$0 = (\lambda d(x) - h(x))zf(y)\ ,\ \forall\, x, y, z\in R$$

elde edilir. R nin asal halka olması kullanılarak her x, y$\in$R için, λd(x) - h(x) = 0 veya f(y) = 0 olur. Kabulümüzde $f\neq 0$ olduğu için

$$h(x) = \lambda d(x),\quad \forall\, x\in R,\ \lambda\in C$$

elde edilir. Böylece ispat sonlanır.

Lemma 5.3.4. U, R nin bir (σ,τ) -sol Lie ideali olsun. Eğer $U\subset$ Z ise her u $\in$ U için τ(u) = σ(u) veya R değişmeli bir halkadır.

İspat : Her $x \in R$, her $u \in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. $U \subset Z$ olduğundan her $u \in U$ için $\tau(u)$, $\sigma(u)$, $[x,u]_{\sigma,\tau} \in Z$ olur. O halde

$$[x,u]_{\sigma,\tau} = x\sigma(u) - \tau(u)x = x\sigma(u) - x\tau(u) = x(\sigma(u) - \tau(u)) \in Z$$

bulunur. Burada Önerme 2.8 gereği her $x \in R$ için $x \in Z$ veya her $u \in U$ için $\sigma(u) = \tau(u)$ elde edilir. Yani R değişmeli bir halka veya her $u \in U$ için $\sigma(u) = \tau(u)$ olur.

Teorem 5.3.1. R bir asal halka ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise her $u \in U$ için $\sigma(u) = \tau(u)$ veya R değişmeli bir halkadır.

İspat : $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, her $x \in R$, her $u \in U$ için $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan

$$[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau} = \tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} + [\tau(u),\tau(u)]x = \tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Burada $[x,u]_{\sigma,\tau} \in [R,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lemma 5.1.3 gereği her $x \in R$ ve her $u \in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $\tau(u) \in Z$ olur. Yani τ otomorfizm olduğundan $U \subset Z$ veya $[x,u]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. Burada $A = \{u \in U : u \in Z\}$ ve $B = \{u \in U : [R,u]_{\sigma,\tau} = (0)\}$ olarak tanımlan kümeler için A ve B, U nun iki öz alt grubu ve $U = A \cup B$ olduğundan Brauer's Trick ten U = A veya U = B olur. Eğer U = A ise $U \subset Z$ demektir. Buda Lemma 5.3.4 gereği her $u \in U$ için $\tau(u) = \sigma(u)$ veya R değişmeli bir halka bulunur. O halde U = B olmalıdır. Yani her $x, y \in R$,her $u \in U$ için

$$0 = [xy,u]_{\sigma,\tau} = x[y,\sigma(u)] + [x,u]_{\sigma,\tau}\, y = x[y,\sigma(u)]$$

olur. Yani her $u \in U$ için $R[y,\sigma(u)] = 0$ bulunur. Burada σ otomorfizm olduğundan $U \subset Z$ elde edilir. O halde yine Lemma 5.3.4 gereği her $u \in U$ için $\tau(u) = \sigma(u)$ veya R değişmeli bir halka bulunur.

Uyarı 5.3.1. U, (σ,τ) Lie ideal ve ve $a \in R$ için $[a,U] = (0)$ ise $a \in Z$ veya $U \subset Z$ olur. Fakat bu durum U, (σ,τ) - sol Lİe ideal olduğunda sağlanmayabilir.

Örneğin : Burada I tam sayılar kümesi olmak üzere $R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x,y,z,t \in I \right\}$ ve $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} : x,y \in I \right\}$ olsun. Buna göre $\tau : R \to R$, $x \to bxb$, $b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir otomorfizmdir. Ayrıca U, $U \not\subset Z$ olan $(1, \tau)$-sol Lie idealdir.

Burada $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin Z$ olmasına karşın $[a, U] = (0)$ bulunur. Buradan itibaren U, (σ, τ)-sol Lie ideal ve $\tau \neq \sigma$ kabul edilmiştir.

Lemma 5.3.5. R bir asal halka, U, (σ, τ)-sol Lie ideali olmak üzere $a \in R$ için $[a, U] = (0)$ ise her $u \in U$ için $\tau(u) + \sigma(u) \in Z$ veya $a \in Z$ olur.

İspat : Burada $a \in Z$ ise ispat biter. O halde $a \notin Z$ olmalıdır. U, (σ, τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x \in R$, her $u \in U$ için $[\tau(u)x, u]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Buradan

$$[\tau(u)x, u]_{\sigma,\tau} = \tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} + [\tau(u), \tau(u)]x = \tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} \in U$$

bulunur. Burada $[a, U] = (0)$ olduğundan

$$0 = \left[\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}, a\right] = \tau(u)\left[[x, u]_{\sigma,\tau}, a\right] + [\tau(u), a][x, u]_{\sigma,\tau}$$

olur. Yani

$$0 = [\tau(u), a][x, u]_{\sigma,\tau}, \ \forall x \in R, \ \forall u \in U \tag{5.27}$$

elde edilir. Burada (5.27) kullanılarak $y \in R$ için x yerine xy yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [\tau(u), a][xy, u]_{\sigma,\tau} = [\tau(u), a](x[y, \sigma(u)] + [x, u]_{\sigma,\tau} y) \\ &= [\tau(u), a]x[y, \sigma(u)] + [\tau(u), a][x, u]_{\sigma,\tau} \\ &= [\tau(u), a]x[y, \sigma(u)] \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$0 = [\tau(u), a]R[y, \sigma(u)], \forall u \in U, \ \forall y \in R$$

olur. R asal olduğundan $[\tau(u), a] = 0$ veya $[y, \sigma(u)] = 0$ elde edilir. σ otomorfizm olduğundan $[\tau(u), a] = 0$ veya $U \subset Z$ bulunur. $U \subset Z$ ise her $u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ olacağından ispat biter. O halde

$$[\tau(u), a] = 0, \ \forall u \in U \tag{5.28}$$

elde edilir. Öte Yandan U, (σ, τ)-sol Lie ideal ve $[a, U] = (0)$ olduğundan her $x \in R$, her $u \in U$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \left[[x, u]_{\sigma,\tau}, a\right] = [x, u]_{\sigma,\tau}\, a - a[x, u]_{\sigma,\tau} \\ &= (x\sigma(u) - \tau(u)x)a - a(x\sigma(u) - \tau(u)x) \\ &= x\sigma(u)a - \tau(u)xa - ax\sigma(u) + a\tau(u)x \end{aligned}$$

olur. (5.28) dan $a\tau(u) = \tau(u)a$ olduğundan

$$\tau(u)[x,a] = x\sigma(u)a - ax\sigma(u),\ \forall x \in R,\ \forall u \in U \qquad (5.29)$$

bulunur. Burada $v \in U$ için x yerine v alırsak $\tau(u)[v,a] = v\sigma(u)a - av\sigma(u)$ olur. $v \in U$ için $[v,a] = 0$ olduğundan her u, v $\in$ U için

$$\begin{aligned} 0 &= v\sigma(u)a - av\sigma(u) = [v\sigma(u),a] \\ &= v[\sigma(u),a] + [v,a]\sigma(u) = v[\sigma(u),a] \end{aligned}$$

olur. Yani her $u \in U$ için $U[\sigma(u),a]$=(0) bulunur. Burada Lemma 5.3.2 gereği $[\sigma(u),a] = 0$ veya $U \subset Z$ elde edilir. $[\sigma(u),a] = 0$ ise (5.29) eşitliği

$$0 = [x,a]\sigma(u) + \tau(u)[a,x],\ \forall x \in R,\ \forall u \in U \qquad (5.30)$$

şeklini alır. (5.30) eşitliğinde $y \in R$ için x yerine xy yazılıp (5.30) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [xy,a]\sigma(u) + \tau(u)[a,xy] \\ &= x[y,a]\sigma(u) + [x,a]y\sigma(u) + \tau(u)x[a,y] + \tau(u)[a,x]y \\ &= -x\tau(u)[a,y] + [x,a]y\sigma(u) + \tau(u)x[a,y] - [x,a]\sigma(u)y \\ &= (\tau(u)x - x\tau(u))[a,y] + [x,a](y\sigma(u) - \sigma(u)y) \\ &= [\tau(u),x][a,y] + [x,a][y,\sigma(u)] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$[x,\tau(u)][y,a] = [a,x][y,\sigma(u)],\ \forall x, y \in R,\ \forall u \in U \qquad (5.31)$$

elde edilir. Şimdi R üzerinde her x, y $\in$ R ve her u $\in$ U için d(x) = $[x,\tau(u)]$, g(y) = $[y,a]$, h(x) = $[a,x]$ ve f(y) = $[y,\sigma(u)]$ türevlerini tanımlayalım. O halde (5.31) ifadesi $d(x)g(y) = h(x)f(y)$ şeklini alır. Burada d = f = 0 ise her u $\in$ U için $u \in Z$ olup ispat biter. O halde $d \neq 0$ ve $f \neq 0$ olur. O halde Lemma 5.3.3 gereği her $x \in R$ için g(x) = λf(x) ve h(x) = λd(x) olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır. Yani her $x \in R$ için $[x,a] = \lambda[x,\sigma(u)]$ ve $[a,x] = \lambda[x,\tau(u)]$ olan $\lambda \in C$ vardır. Yani $\lambda[x,\sigma(u)] = [x,a] = \lambda[\tau(u),x]$ olur. O zaman her $x \in R$, her $u \in U$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda[x,\sigma(u)] - \lambda[\tau(u),x] = \lambda(x\sigma(u) - \sigma(u)x - \tau(u)x + x\tau(u)) \\ &= \lambda(x(\sigma(u) + \tau(u) - (\sigma(u) + \tau(u))x) = \lambda[x,\sigma(u) + \tau(u)] \end{aligned}$$

olur. Burada $\lambda \neq 0$ olduğundan $[R,\sigma(u) + \tau(u)]$ = (0) bulunur. O halde her u $\in$ U için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ elde edilir.

Lemma 5.3.6. R bir asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $a\in R$ olmak üzere $[a,U]_{\sigma,\tau}$ = 0 ve $[a,U]=(0)$ ise her $u\in U$ için $\tau(u)+\sigma(u)\in Z$ veya a = 0 olur.

İspat : Kabul edelim ki $0\neq u_0\in U$ için $\tau(u_0)\neq\sigma(u_0)$ olsun. $[a,U]=(0)$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan Lemma 5.3.5 gereği $\tau(u)+\sigma(u)\in Z$ veya $a\in Z$ olur. İlk durumda ispat biteceğinden $a\in Z$ olur. $[a,U]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan $u_0\in U$ için

$$0=[a,u_0]_{\sigma,\tau}=a\sigma(u_0)-\tau(u_0)a=a(\sigma(u_0)-\tau(u_0))$$

bulunur. Burada $a\in Z$ olduğundan $aR(\sigma(u_0)-\tau(u_0))=(0)$ olur. R asal olduğundan a = 0 veya $u_0\in U$ için $\tau(u_0)=\sigma(u_0)$ elde edilir. Bu ise kabul ile çelişir. O halde a = 0 olur.

Teorem 5.3.2. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere $[U,U]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve $[U,U]=(0)$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat : Kabul edelim ki $U\not\subset Z$ olsun. $[U,U]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve $[U,U]=(0)$ olduğundan Lemma 5.3.6 gereği $\tau(u)+\sigma(u)\in Z$ olur. Öte yandan her $x\in R$, her $u, v\in U$ için $[xv,u]_{\sigma,\tau}=x[v,u]_{\sigma,\tau}+[x,\tau(u)]v=[x,\tau(u)]v\in U$ olur. $[U,U]=0$ olduğundan her $u, v, w\in U$ için

$$0=[w,[x,\tau(u)]v]=[x,\tau(u)][w,v]+[w,[x,\tau(u)]]v$$
$$=[w,[x,\tau(u)]]v$$

bulunur. Burada her $w, u\in U$, her $x\in R$ için $[w,[x,\tau(u)]]U=0$ olur. Bu durumda Lemma 5.3.2 gereği $U\subset Z$ veya her $w, u\in U$, her $x\in R$ için $[w,[x,\tau(u)]]=0$ elde edilir. $U\not\subset Z$ olduğundan $[w,[x,\tau(u)]]=0$ bulunur. Burada $I_w(x)=[w,x]$, $I_{\tau(u)}(x)=[\tau(u),x]$ olarak tanımlanan iç türevleri düşünülürse ifade $I_wI_{\tau(u)}=0$ halini alır. O halde Teorem 3.1.1 gereği $I_w=0$ veya $I_{\tau(u)}=0$ bulunur. Yani her $w\in U$ için $w\in Z$ veya her $u\in U$ için $\tau(u)\in Z$ olur. Sonuçta her iki durumda τ otomorfizm olduğundan $U\subset Z$ bulunur. Bu ise kabul ile çelişir. O halde $U\subset Z$ olur.

Lemma 5.3.7. R bir asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka ise her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ veya U, R nin sıfırdan farklı sol ve sağ idealini kapsar.

İspat : Kabul eldim ki $u_0\in U$ için $\sigma(u_0)+\tau(u_0)\notin Z$ olsun. Her $x\in R$, her $v\in U$ için $[xu_0,v]_{\sigma,\tau}=x[u_0,\sigma(v)]+[x,v]_{\sigma,\tau}u_0\in U$ ve U alt halka olduğundan $[x,v]_{\sigma,\tau}u_0\in U$

olur. O halde her $x \in$ R, her $v \in$ U için $x\left[u_0, \sigma(v)\right] \in$ U bulunur. Yani $R\left[u_0, \sigma(U)\right] \subset U$ dır. Her $u \in$ U için $R\left[u_0, \sigma(u)\right] = 0$ ise R asal olduğundan $\left[u_0, \sigma(u)\right] = 0$ bulunur. Her u $\in$ U için σ otomorfizm olduğundan $\sigma(\left[\sigma^{-1}(u_0), u\right]) = 0$ olarak yazılabilir. Böylece her u $\in$ U için $\left[\sigma^{-1}(u_0), u\right] = 0$ olur. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan Lemma 5.3.5 gereği her u $\in$ U için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ veya $\sigma^{-1}(u_0) \in$ Z olur. İlk durum kabul ile çelişeceğinden $u_0 \in$ U için $\sigma^{-1}(u_0) \in$ Z bulunur. Burada σ otomorfizm olduğundan $u_0 \in$ U için $u_0 \in$ Z elde edilir. Bu ise $\sigma(u_0)+\tau(u_0) \notin Z$ olması ile çelişir. O halde $R\left[u_0, \sigma(U)\right] \neq (0) \subset U$ demektir. Yani U, R nin sıfırdan faklı bir sol idealini kapsar. Benzer biçimde her $x \in$ R ve her $v \in$ U için $\left[u_0 x, v\right]_{\sigma,\tau} = \left[u_0, \tau(v)\right]x + u_0\left[x, v\right]_{\sigma,\tau} \in$ U olur. Burada $u_0\left[x, v\right]_{\sigma,\tau} \in$ U ve U alt halka olduğundan her $v \in$ U ve her $x \in$ R için $\left[u_0, \tau(v)\right]x \in$ U elde edilir. Yani $\left[u_0, \tau(U)\right]R \subset U$ olur. Burada her $u \in$ U için $\left[u_0, \tau(u)\right]R = 0$ ve R asal olduğundan $\left[u_0, \tau(u)\right] = 0$ bulunur. Her $u \in$ U için τ otomorfizm olduğundan $\tau(\left[\tau^{-1}(u_0), u\right]) = 0$ olarak yazılabilir. Böylece her $u \in$ U için $\left[\tau^{-1}(u_0), u\right] = 0$ olur. Yine U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan Lemma 5.3.5 gereği her $u \in$ U için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ veya $\tau^{-1}(u_0) \in$ Z bulunur. İlk durum kabul ile çelişeceğinden $u_0 \in$ U için $u_0 \in$ Z elde edilir. Bu durumda $\sigma(u_0)+\tau(u_0) \in Z$ olup $\sigma(u_0)+\tau(u_0) \notin Z$ ile çelişir. O halde $0 \neq \left[u_0, \tau(U)\right]R \subset U$ olur. Yani U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini kapsar.

Teorem 5.3.3. R bir asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal olmak üzere $v \in$ U için $\sigma(v)+\tau(v) \notin Z$ ise $\left[R, A\right]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $\left[R, B\right]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $\left[R, A\right]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ ve $\left[R, B\right]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı A sol ideali ve sıfırdan farklı B sağ ideali vardır.

İspat : T = $\left\{x \in R : \left[R, x\right]_{\sigma,\tau} \subset U\right\}$ kümesini tanımlayalım. T, R nin $U \subset$ T olacak şekilde (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkası olduğu gösterilsin. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $\left[R, U\right]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur. O halde $U \subset$ T bulunur. Burada a, $b \in$ T ve $x \in$ R için

$$\left[x, a-b\right]_{\sigma,\tau} = \left[x, a\right]_{\sigma,\tau} - \left[x, b\right]_{\sigma,\tau} \in U$$

olur. O halde a - $b \in$ T bulunur. Ayrıca

$$\left[x, ab\right]_{\sigma,\tau} = \left[x\sigma(a), b\right]_{\sigma,\tau} + \left[\tau(b)x, a\right]_{\sigma,\tau} \in U$$

olur. Yani $ab \in T$ bulunur. O halde T, R nin alt halkasıdır. T nin tanımı gereği $\left[R,T\right]_{\sigma,\tau} \subset U$ dir. Burada $U \subset T$ olduğundan $\left[R,T\right]_{\sigma,\tau} \subset T$ bulunur. O halde T, (σ,τ)-sol Lie idealdir. Bir $v \in U$ için $\sigma(v)+\tau(v) \notin Z$ olduğundan $U \not\subset Z$ olur. $U \subset T$ olduğundan $T \not\subset Z$ bulunur. Öte yandan $v \in U$ için $\sigma(v)+\tau(v) \notin Z$ olduğundan Lemma 5.3.7 gereği T, R nin sıfırdan farklı bir A sol idelini ve sıfırdan farklı bir B idealini kapsar. $A \subset T$ ve $B \subset T$ olduğundan T tanımından $\left[R,A\right]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $\left[R,B\right]_{\sigma,\tau} \subset U$ bulunur. Burada $\left[R,A\right]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ ve $\left[R,B\right]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ olduğunu gösterelim. Eğer $\left[R,A\right]_{\sigma,\tau} \subset Z$ ise, her $x \in R$, her $a \in A$ için $\left[\tau(a)x,a\right]_{\sigma,\tau} \in Z$ olur. Her $x \in R$ ve her $a \in A$ için

$$\left[\tau(a)x,a\right]_{\sigma,\tau} = \tau(a)\left[x,a\right]_{\sigma,\tau} + \left[\tau(a),\tau(a)\right]x = \tau(a)\left[x,a\right]_{\sigma,\tau} \in Z$$

bulunur. Her $x \in R$ için $\left[x,a\right]_{\sigma,\tau} \in Z$ olduğundan Önerme 2.8 gereği her $x \in R$, her $a \in A$ için $\left[x,a\right]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $\tau(a) \in Z$ elde edilir. τ otomorfizm olduğundan $a \in Z$ veya her $x \in R$ için $\left[x,a\right]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Her $x \in R$, her $a \in A$ için $\left[x,a\right]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $y \in R$ olmak üzere x yerine xy yazarsak

$$\begin{aligned} 0 = \left[xy,a\right]_{\sigma,\tau} &= x\left[y,a\right]_{\sigma,\tau} + \left[x,\tau(a)\right]y \\ &= \left[x,\tau(a)\right]y \end{aligned}$$

bulunur. Yani $\left[x,\tau(a)\right]R = 0$ dır. R asal halka olduğundan her $x \in R$ ve her $a \in A$ için $\left[x,\tau(a)\right] = 0$ olur. Buradan da τ otomorfizm olduğundan her $a \in A$ için $a \in Z$ bulunur. Yani $A \subset Z$ dir. Bu durumda R değişmeli olacağından kabul yanlış demektir. O halde $\left[R,A\right]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ elde edilir. Eğer $\left[R,B\right]_{\sigma,\tau} \subset Z$ ise her $x \in R$, her $b \in B$ için

$$\begin{aligned} \left[x\sigma(b),b\right]_{\sigma,\tau} &= x\left[\sigma(b),\sigma(b)\right] + \left[x,b\right]_{\sigma,\tau}\sigma(b) \\ &= \left[x,b\right]_{\sigma,\tau}\sigma(b) \in Z \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x \in R$ için $\left[x,b\right]_{\sigma,\tau} \in Z$ olduğundan Önerme 2.8 gereği her $x \in R$ ve her $b \in B$ için $\left[x,b\right]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $\sigma(b) \in Z$ olur. σ otomorfizm olduğundan $B \subset Z$ veya $\left[x,b\right]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. $B \subset Z$ olması R değişmeli olması demektir bu da $U \not\subset Z$ ile çelişir. O halde $B \not\subset Z$ ve her $x \in R$ ve her $b \in B$ için $\left[x,b\right]_{\sigma,\tau} =$ olur. Burada $y \in R$ olmak üzere x yerine xy yazarsak

$$0 = \left[xy,b\right]_{\sigma,\tau} = x\left[y,b\right]_{\sigma,\tau} + \left[x,\tau(b)\right]y$$

$$= [x,\tau(b)]y$$

bulunur. Yani her $x\in$ R, her $b\in$ B için $[x,\tau(b)]R = 0$ olur. R asal olduğundan $[x,\tau(b)]_{\sigma,\tau}$ = 0 elde edilir. τ otomorfizm olduğundan $B\subset Z$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde kabul yanlıştır. Yani $[R,B]_{\sigma,\tau}\not\subset Z$ bulunur.

Teorem 5.3.4. R bir asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $v\in U$ için $\sigma(v)+\tau(v)\notin Z$ olmak üzere a, $b\in$ R için aUb = (0) ise a = 0 veya b = 0 olur.

İspat : Kabul edelim ki $b\neq 0$ olsun. U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve bir $v\in$ U için $\sigma(v)+\tau(v)\notin Z$ olduğundan Teorem 5.3.3 gereği R nin $[R,B]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $[R,B]_{\sigma,\tau}\not\subset Z$ olan (0) $\neq$ B sağ ideali vardır. Her $x\in$ R, her $s\in$ B için hipotezden $a[x,s]_{\sigma,\tau}b$ = 0 olur. Burada $y\in$ R olmak üzere x yerine zy yazarsak

$$0 = a[xy,s]_{\sigma,\tau}b = a(x[y,s]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(s)]y)b$$
$$= ax[y,s]_{\sigma,\tau}b + a[x,\tau(s)]yb$$

bulunur. Burada $u\in$ U olmak üzere x yerine ub yazarsak

$$0 = aub[y,s]_{\sigma,\tau}b + a[ub,\tau(s)]yb$$
$$= a[ub,\tau(s)]yb$$

elde edilir. Yani her $u\in$ U, her $s\in$ B için $a[ub,\tau(s)]Rb = 0$ olur. R asal olduğu için b = 0 veya $a[ub,\tau(s)]$ = 0 bulunur. Burada $b\neq 0$ olduğundan $a[ub,\tau(s)]$ = 0 olur. O zaman her u $\in$U, her $s\in$ B için

$$0 = a[ub,\tau(s)] = a(ub\tau(s)-\tau(s)ub)$$
$$= aub\tau(s) - a\tau(s)ub = -a\tau(s)ub$$

olur. Yani $a\tau(B)ub$ = 0 dır. τ otomorfizm dolayısıyla τ(B) sağ ideal ve R asal olduğu için $a\tau$(B) = 0 veya Ub = 0 bulunur. Burada $b\neq 0$ ve $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 5.3.2 gereği Ub $\neq$ 0 olur. O halde $a\tau$(B) = 0 elde edilir. $a[x,s]_{\sigma,\tau}b$ = 0 ifadesinde bunu kullanırsak her $x\in$ R ve her $s\in$ B için $aR\sigma$(s)b = (0) bulunur. R asal olduğundan a = 0 veya σ(s)b = 0 olur. a = 0 ise ispat biter. O halde her $s\in$ B için σ(s)b = 0 elde edilir. Burada σ otomorfizm ve B sağ ideal olduğundan b = 0 olur. Bu ise kabul ile çelişir. O halde b = 0 bulunur.

Lemma 5.3.8. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı (σ,τ)-sağ Lie ideali olsun. Eğer $U\subset$ Z ise $\sigma=\tau$ veya R değişmeli bir halkadır.

İspat : Kabul eldim ki R değişmeli olmasın. U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ve $U\subset Z$ olduğundan her $u\in$ U, her $x\in$ R için $[u,x]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Bu yüzden

$$[u,x]_{\sigma,\tau}=u\sigma(x)-\tau(x)u=u(\sigma(x)-\tau(x))\in Z$$

olur. Burada $U\subset Z$ olduğundan Önerme 2.8 gereği her $u\in$ U için u = 0 veya her $x\in$ R için $\sigma(x)-\tau(x)\in Z$ bulunur. $U\neq(0)$ olduğundan her $x\in$ R için $\sigma(x)-\tau(x)\in Z$ elde edilir. O halde her x, $y\in$ R için

$$0=[\sigma(x)-\tau(x),y]=[\sigma(x),y]-[\tau(x),y] \tag{5.32}$$

olur. (5.32) eşitliğinde x yerine x^2 yazar (5.32) u kullanırsak

$$\begin{aligned}0&=[\sigma(x^2),y]-[\tau(x^2),y]=[\sigma(x)\sigma(x),y]-[\tau(x)\tau(x),y]\\&=\sigma(x)[\sigma(x),y]+[\sigma(x),y]\sigma(x)-\tau(x)[\tau(x),y]-[\tau(x),y]\tau(x)\\&=\sigma(x)[\sigma(x),y]+[\sigma(x),y]\sigma(x)-\tau(x)[\sigma(x),y]-[\sigma(x),y]\tau(x)\\&=2(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x),y]\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mathrm{Char}R\neq 2$ olduğundan Önerme 2.7 gereği her x, $y\in$ R için $(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x),y]$ = 0 bulunur. Bu durumda $\sigma(x)-\tau(x)\in Z$ olduğundan $(\sigma(x)-\tau(x))R[\sigma(x),y]$ = 0 yazılabilir. R asal olduğundan her x, $y\in$ R için $\sigma(x)-\tau(x)=0$ veya $[\sigma(x),y]$ = 0 olur. Yani her x $\in$ R için $\sigma(x)=\tau(x)$ veya $x\in$ Z bulunur. Burada A = $\{x\in R:\sigma(x)=\tau(x)\}$ ve B = $\{x\in R: x\in Z\}$ kümeleri tanımlansın. R = $A\cup B$ öz alt gruplarının birleşimi olarak yazıldı. O halde Brauer's Trick ten R = A veya R = B olmalıdır. R = A ise her x $\in$ R için $\sigma(x)=\tau(x)$ olacağından ispat biter. O halde R = B olur. Bu durumda da her $x\in$ R için $x\in$ Z bulunur. Bu ise R halkasının değişmeli olmaması ile çelişir. O halde R değişmelidir.

Teorem 5.3.5. R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı bir (σ,τ) Lie ideali olmak üzere $U\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $\sigma=\tau$ veya R değişmeli bir halkadır.

İspat : U, (σ,τ) Lie ideal olduğundan hem (σ,τ)-sağ Lie ideal hem de (σ,τ)-sol Lie idealdir. U, (σ,τ)- sol Lie ideal olarak düşünülürse Lemma 5.3.1 gereği $U\subset Z$ bulunur. Burada U, aynı zamanda (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğundan Lemma 5.3.8 gereği $\sigma=\tau$ veya R değişmeli bir halkadır.

KAYNAKLAR

Aydın, N. ve Kandamar, H., 1994. "(σ, τ)-Lie Ideals in Prime Rings", *Tr. J. of Mathematics*, 18(2): 143-148

Aydın, N. ve Soytürk, M., 1995. "(σ, τ)-Lie Ideals in Prime Rings with Derivation", *Tr. J. of Mathematics*, 19(2): 239-244

Aydın , N., 1997. "On One Sided (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings", *Tr. J. Mathematics* 21, 295-301

Awtar, R., 1973. "On a Theorem of Posner", *Proc. Cumb.Phil. Soc.*, 73(4): 25-27

Bergen, J., Herstein, İ. N. ve Kerr, J. W., 1981. "Lie Ideals and Derivations of Prime Rings",*J. Of Algebra*, 71 : 259-267

Bell, H. B. ve Martındale, W. S. III, 1987. "Centralizing Mappings of Semiprime Rings",*Canad. Math. Bull. Vol.* 30(1): 92-100

Bell, H. B. ve Martındale, W. S. III, 1988. "Semiderivations and Commutativity in Prime Rings", *Canad. Math. Bull. Vol.* 30(4): 500-508

Breaser, M., 1993. "Centralizing Mappings and Derivations in prime Ring", *J. of Algebra* 156, 385-394

Chang, J. C., 1984. "On Semi derivations of Prime Rings", *Chinese Journal of Mathematics* 12, 255-262

Herstein, İ. N., 1969. "Topics in Ring Theory", *University of Chicago Pres, Chicago*

Herstein, İ. N., 1976. "Rings with İnvolution", *University of Chicago Pres, Chicago*

Herstein, İ. N., 1978. "A Note on Derivations",*Canad. Math. Bull.*, 21(3): 369-370

Herstein, İ. N., 1979. “A Note on Derivations II”,*Canad. Math. Bull*., 22(4): 509-511

Hırano, Y. ve Tomınaga, H., 1984. “Some Commutativity Theorems for Prime Rings with Derivations and Differentially Semi-prime Rings”, *Math. J. Okayama Univ.* 26, 101-108

Kandamar, H. ve Kaya, K., 1992. “Hacettepe Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi”, *Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering*, 21, 29-33

Kaya, K., 1988. “ (σ,τ)-Türevli Asal Halkalar Üzerine”, *TU. Mat. D. C.* 12(2): 41-45

Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1981. “On Derivations in Prime Rings”, *Chinese Journal of Mathematics* 9(2): 107-110

Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1983. “Lie ideals of Prime Rings with Derivations”, *Bull. İnst. Math. Acod. Sinica* 11, 75-80

Posner, E. C., 1957. “Derivations in Prime Rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 8, 1093-1100

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı soyadı: Yasemin BALLIKAYA
Doğum Yeri: ANKARA
Doğum Tarihi: 23.09.1987

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi 2004-2008 Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi 2008-2010 Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Tezli Yüksek Lisans
Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

BİLİMSEL FALİYETLER

a) 09/2004 Bilgisayar İşletmenliği Kursu; Bitirme notu:89
b) 18.10.2008 "Farkındalık ve Başarı" ve "Etkili İletişim ve Konuşma" Semineri İndus Danışmanlık

İŞ DENEYİMİ

1- 5 Temmuz - 7 Eylül 2006 Metiş-Epik Adi Ortaklığı

- Muhasebe Yardımcısı(stajyer)

2- 5 Temmuz - 17 Eylül 2007 Metiş-Epik Adi Ortaklığı

- Personel Yardımcısı(stajyer)

3- 17 Ağustos - 5 Ekim Birey Dershanesi

- Matematik Öğretmeni(SBS Grubu)

İLETİŞİM

E-posta Adresi : zeytingozlum2005@hotmail.com