T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ (α, β)-TÜREVLER

Selin VURKAÇ

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **21/06/2010**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

SELİN VURKAÇ tarafından **PROF. DR. NEŞET AYDIN** yönetiminde hazırlanan **"HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ (α,β)-TÜREVLER"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neşet AYDIN

____

Danışman

Doç. Dr. Vildan BİLGİN	Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN
______________________________	______________________________
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi: 21/06/2010

Prof. Dr. İsmail TARHAN

____

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Selin VURKAÇ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez çalışmalarımın her aşamasında büyük yardımlarını ve desteğini gördüğüm tez danışmanım, Sn. Prof. Dr. Neşet AYDIN' a, sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarken, bilgilerini bizden esirgemeyen tüm bölüm hocalarıma, her zaman yanımda olan aileme ve Başak Yıldırım' a teşekkürleri bir borç bilirim.

Selin VURKAÇ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\emptyset$	: Boş küme
$\forall$	: Her
$\in$	: Eleman
$\notin$	: Eleman değil
$\neq$	: Eşit değil
$\cup$	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
$\subset$	: Kapsanır
$\subseteq$	: Kapsanır veya eşit
$\Rightarrow$	: ise

ÖZET

HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ (α, β)-TÜREVLER

Selin VURKAÇ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Neşet AYDIN

21/06/2010, 146

Bu tez, türevli halkalar hakkında bir genelleştirme yapabilmek amacıyla hazırlanmıştır. Bu amaçla, Bölüm 3 de türevli halkalar, Bölüm 4 de ise (α, β)-türevli halkalar ile ilgili genel ispatlara yer verilmiştir. Bu tez içersinde, Bölüm 3 ve 4 de elde edilen sonuçlar kullanılarak Bölüm 5 ve 6 oluşturulmuştur. Çünkü, her genelleştirilmiş türev bir türev yardımıyla ifade edilirken, her genelleştirilmiş (α, β)-türev de bir (α, β)-türev yardımıyla ifade edilmektedir. Öte yandan, genelleştirilmiş (α, β)-türevler; türev, (α, β)-türev ve genelleştirilmiş türevlerin bir genelleştirilmesidir. Böylece, son bölümde elde edilen tüm sonuçlar daha önceki bölümlerde de geçerli olur.

Anahtar sözcükler : Halka, Asal Halka, İdeal, Lie ideal, Türev, (α, β)-Türev,

Genelleştirilmiş Türev, Genelleştirilmiş (α, β)-Türev

ABSTRACT

GENERALIZED (α, β)-DERIVATIONS IN RINGS

Selin VURKAÇ

Graduate School of Science and Engineering

Chair for Mathematics Thesis of Master of Science

Advisor: Professor Dr. Neşet AYDIN

21/06/2010, 146

This thesis is prepared to make a generalization about derivations. For this purpose, the main proofs are done where they are about derivations in Chapter 3 and about

(α, β)-derivations in Chapter 4. Within this thesis, for creating Chapter 5 and Chapter 6 is benefited from Chapter 3 and Chapter 4. Because, a generalized derivation is expressed with the help of a derivation, a generalized (α, β)-derivation is expressed with the help of a (α, β)-derivation. On the other hand, the generalized (α, β)-derivations are extendend of derivations, (α, β)-derivations and generalized derivations. Thus, all the results of the final chapter are true for previous each parts.

Keywords : Ring, Prime ring, Ideal, Lie ideal, Derivation, (α, β)-Derivation,

Generalized Derivation, Generalized (α, β)-Derivation

İÇERİK

Sayfa

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Halkada, türev ile ilgili bilinen ilk çalışma E. C. Posner (1957) tarafından yapılmıştır. Daha sonraki zamanlarda halka yerine, ideal, Lie ideal, ve türev yerine, σ-türev,

(σ, τ)-türev, genelleştirilmiş türev, genelleştirilmiş (σ, τ)-türev alınarak, öncelerde türev için elde edilen sonuçlardan bazılarının bu yapılar için de doğruluğu araştırılmıştır. İdeal ve Lie ideal gibi yapılar halkanın daha genel halleridir. Dolayısıyla, her halka bir ideal, bir Lie ideal olduğundan bu yapılar için elde edilen sonuçlar halka için de sağlanmaktadır. Benzer şekilde türev, (σ, τ)-türev, genelleştirilmiş türev, genelleştirilmiş (σ, τ)-türevler, türevin daha genel halleridir. Bu amaçla, bu çalışmada öncelikle türev hakkında genel bilgilere yer verilmiş ve türevle bağlantılı olarak komütatiflik incelenmiştir. Diğer bölümlerde de hemen hemen benzer durumlar incelenmiş, birçok ispat ve sonuca yer verilmiştir. Tüm bunlar göz önüne alındığında aslında birbirini takip eden her bölümün kendinden öncekinin genelleştirilmiş hali olduğu görülür. Dolayısıyla, son bölümü ulaşıldığında elde edilen tüm sonuçlar aslında baştan beri incelenen tüm yapılar için doğrudur. Bu genelleştirmeler sayesinde artık genelleştirilmiş (σ, τ)-türevler için elde edilen her sonucun türev, (σ, τ)-türev, genelleştirilmiş türevler için de doğru olduğu söylenebilir.

Öte yandan, İdeal ve Lie ideal gibi yapılar halkanın daha genel halleri olduğundan, yukarıda bahsedilen genelleştirmelerin benzeri bu yapılar için de doğrudur. Yani, ideal ve Lie ideal için elde edilen her sonuç halka için sağlanacağından bir genelleştirme yapılmış olur.

Bu tezde amaç, bahsedilen genelleştirmelerin bir kısmının ispatlarla göz önüne serilmesidir.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1. Boş kümeden farklı bir R kümesi üzerinde " + " : $R \times R \to R$,

$(a, b) \to a + b$ işlemi tanımlansın. Buna göre,

R1) Her a, b, c ∈ R için $a + (b + c) = (a + b) + c$
R2) Her a ∈ R için $a + 0 = 0 + a = a$ olacak biçimde $0 \in R$ var
R3) Her a ∈ R için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olacak biçimde $-a \in R$ var

koşulları sağlanıyorsa R kümesine bir **grup** denir. Üstelik,

her a, b ∈ R için $a + b = b + a$ oluyor ise R kümesine bir **değişmeli grup** denir.

Tanım 2.2. R bir grup ve $\emptyset \neq A \subset R$ olsun. Eğer A kümesi, R kümesi üzerinde tanımlı işleme göre bir grup oluyorsa A kümesine R grubunun bir **alt grubu** denir.

Tanım 2.3. Bir grubun, etkisiz elemanı ve kendisi dışındaki bir alt grubuna **öz alt grup** denir.

Gösterim 2.4. (R, +) gösterimi ile R kümesinin, üzerinde tanımlanan " + " işlemi ile bir grup olduğu ifade edilir.

Tanım 2.5. R bir halka, U ve V, R halkasının alt kümeleri olsun. Buna göre, u ∈ U ve v ∈ V olmak üzere uv – vu elemanları tarafından üretilen küme [U, V] dir.

Teorem 2.6. (Brauer's Trick) Herhangi bir grup, iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat: (G, *) bir grup olmak üzere, K ve H öz alt grupları için $G = H \cup K$ olarak yazılsın. Kabul edelim ki, $H \subsetneq K$ ve $K \subsetneq H$ olsun. Bu durumda, $a \in H \setminus K$ ve $b \in K \setminus H$ olacak biçimde a, b ∈ G vardır. G grup olduğu için a*b ∈ G dir. Bu, a*b ∈ H veya a*b ∈ K olması demektir. a*b ∈ H olması durumunda, H öz alt grup olduğu için, $a^{-1} \in H$ dır. Bu durumda, $b = a^{-1}*a*b \in H$ olur. Oysaki, $b \notin H$ olsun demiştik. Bu nedenle, a*b ∈ K dır. Benzer şekilde, K öz alt grup olduğu için $b^{-1} \in K$ olmasını kullandığımızda

$a = a*b*b^{-1} \in K$ olur. Bu ise, $a \notin K$ olması ile çelişir. Çelişkilerin nedeni kabuldür. O halde, $K \subset H$ veya $H \subset K$ dır. İlk olarak, kabul edelim ki, $K \subset H$ olsun. Bu durumda,

$H \cup K \subset H$ olur. Bu, $G \subset H$ demektir. Bu ifade, H kümesinin öz alt grup olması ile çelişir. O halde, $H \subset K$ dır. Bu durumda da, $H \cup K \subset K$ olur. Bu, $G \subset K$ demektir. Bu ifade de, K kümesinin öz alt grup olması ile çelişir. Bu durumda, tüm bu çelişkilerin nedeni başlangıçtaki kabul olur. Böylece, $G = H \cup K$ olması durumunda $G = H$ veya $G = K$ dır.

Tanım 2.7. Boş kümeden farklı bir R kümesi üzerinde,

" + " : $R \times R \to R$, $(a, b) \to a + b$ ve " · " : $R \times R \to R$, $(a, b) \to a \cdot b$ işlemleri tanımlansın. Buna göre,

R1) $(R, +)$ bir değişmeli grup

R2) Her $a, b, c \in R$ için $a\cdot (b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

R3) Her $a, b, c \in R$ için $a\cdot (b + c) = a\cdot b + a\cdot c$, $(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

koşulları sağlanıyorsa R kümesine bir **halka** denir. Üstelik,

her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ oluyor ise R halkası bir **değişmeli halka** dır.

Tanım 2.8. R bir halka ve $\emptyset \neq A \subset R$ olsun. Eğer A kümesi, R kümesi üzerinde tanımlı işlemlere göre bir halka oluyorsa A kümesine R halkasının bir **alt halkası** denir.

Gösterim 2.9. $(R, +, \cdot)$ gösterimi ile R kümesinin, üzerinde tanımlanan " + " ve " · " işlemleri ile bir halka olduğu ifade edilir.

Tanım 2.10. R bir halka ve A, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Buna göre,

$$C_R(A) = \{a \in R \mid xa = ax, \forall x \in A\}$$

kümesine A kümesinin R halkasındaki **merkezileştiricisi** denir.

$C_R(R)$ kümesi Z ile gösterilir ve bu kümeye halkanın **merkezi** denir.

Uyarı 2.11. Bir halkanın merkezi, o halkanın alt halkasıdır.

Tanım 2.12. $(A, +, \cdot)$ ve $(B, *, \circ)$ iki halka olmak üzere bir $f : A \to B$ fonksiyonu

her $x, y \in R$ için $f(x + y) = f(x)*f(y)$ ve $f(x \cdot y) = f(x)\circ f(y)$ ifadelerini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir **halka homorfizması** denir.

Tanım 2.13. $(A, +, \cdot)$ ve $(B, *, \circ)$ iki halka olmak üzere bir $f : A \to B$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için $f(x + y) = f(x)*f(y)$ ve $f(x \cdot y) = f(y)\circ f(x)$ ifadelerini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir **anti-halka homorfizması** denir.

Tanım 2.14. $(R, +, \cdot)$ bir halka olmak üzere

$$\text{End}(R) = \{ f \mid f : R \to R, \text{ halka homomorfizması} \}$$

kümesine R kümesinin **endomorfizimlerinin** kümesi denir.

Tanım 2.15. $(R, +, \cdot)$ bir halka olmak üzere

$$\text{Aut}(R) = \{ f \mid f : R \to R, \text{ 1-1 ve örten halka homomorfizması} \}$$

kümesine R kümesinin **otomorfizimlerinin** kümesi denir.

Tanım 2.16. R bir halka ve A, R halkasının boş kümeden farklı bir toplamsal alt grubu olmak üzere $AR = \{ar \mid a \in A, r \in R\} \subset A$ oluyor ise A kümesine R halkasının bir **sağ ideali**, $RA = \{ra \mid a \in A, r \in R\} \subset A$ oluyorsa A kümesine R halkasının bir **sol ideali** denir. A kümesi R halkasının hem sol hem de sağ ideali oluyorsa A kümesine R halkasının bir **ideali** denir.

Tanım 2.17. $L \subset R$ toplamsal alt grubu için, $[L, R] \subset L$ ise L kümesine R halkasının bir **Lie ideali** denir.

Önerme 2.18. Her ideal bir Lie idealdir.

Tanım 2.19. R bir halka ve $P \neq R$ olan R halkasının bir ideali olsun. A ve B, R halkasının herhangi iki ideali olmak üzere $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P idealine **asal ideal** denir.

Tanım 2.20. R bir halka olsun.

(i) $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı varsa a elemanına **nilpotent eleman** denir. $a^n = 0$ fakat $a^{n-1} \neq 0$ ise n tamsayısına **nilpotentlik indeksi** denir.

(ii) B, R halkasının bir ideali olsun. B idealinin her elemanı nilpotent ise B idealine **nil ideal** denir.

(iii) A, R halkasının bir ideali olsun. $A^n = (0)$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa A idealine **nilpotent ideal** denir.

Uyarı 2.21. Her nilpotent ideal nildir. Fakat, tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.22. (0) ideali asal ideal olan halkaya **asal halka** denir.

Uyarı 2.23. Bir R halkasının asal halka olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.24. Sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan halkaya **yarı-asal halka** denir.

Uyarı 2.25. Bir R halkasının yarı asal halka olması için gerek ve yeter koşul $a \in R$ olmak üzere $aRa = 0$ olduğunda $a = 0$ olmasıdır.

Uyarı 2.26. Her asal halka bir yarı-asal halkadır. Fakat, tersi her zaman doğru değildir.

Lemma 2.27. Herhangi bir asal halkada sınırlı index' i olan sıfırdan farklı sol (sağ) nil ideali yoktur.

Lemma 2.28. Asal halkanın merkezinde sıfırdan farklı sıfır bölen eleman yoktur.

İspat: R bir asal halka olmak üzere $0 \neq b \in R$ ve $a \in Z$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda, $a \in Z$ olduğundan her $x \in R$ için $axb = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, $a = 0$ veya $b = 0$ olur. $b \neq 0$ olarak seçildiği için $a = 0$ dır.

Lemma 2.29. Yarı asal halkanın merkezinde sıfırdan farklı nilpotent eleman yoktur.

İspat: R, bir yarı asal halka olmak üzere a, R halkasının merkezinde bir nilpotent eleman olsun. Bu durumda, $a^n = 0$ olacak biçimde bir $n \in Z^+$ vardır. $a \in Z$ olduğundan,

her $x \in R$ için $axa^{n-1} = 0$ olur. Bu, $aRa^{n-1} = 0$ olması demektir. Bu ifadeyi soldan a^{n-2} ile çarpar ve bulunan eşitlikte Uyarı 2.25 i kullanırsak $a^{n-1} = 0$ bulunur. Tekrar $a \in Z$ olmasını kullanırsak her $x \in R$ için $axa^{n-2} = 0$ olur. Bu, $aRa^{n-2} = 0$ olması demektir. Bu ifade soldan a^{n-3} ile çarpılır ve bulunan eşitlikte Uyarı 2.25 kullanılırsa $a^{n-2} = 0$ bulunur. Art arda benzer işlemler tekrarlandığında $a = 0$ olduğu görülür.

Lemma 2.30. R bir asal halka ve d, R halkasının bir türevi olmak üzere d, R halkasının sıfırdan farklı bir sol (sağ) ideali üzerinde sıfırsa, R üzerinde de sıfırdır.

İspat: Kabul edelim ki, U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olmak üzere

$d(U) = 0$ olsun. U, sol ideal olduğundan her $x \in R$, $u \in U$ için $xu \in U$ dır. Bu durumda, $d(xu) = 0$ olur. Türev tanımı yardımıyla bu ifadeyi düzenlersek
$d(x)u + xd(u) = 0$ bulunur. $d(u) = 0$ olduğundan her $x \in R$, $u \in U$ için $d(x)u = 0$ olur. Bu ise, her $x \in R$ için $d(x)U = 0$ demektir. U, sol ideal olduğu için $RU \subset U$ dır. Bu durumda, $d(x)RU \subset d(x)U = 0$ olur. Yani, $d(x)RU = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $x \in R$ için $d(x) = 0$ veya $U = 0$ elde edilir. U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olduğundan
her $x \in R$ için $d(x) = 0$ olur. Bu, $d = 0$ demektir. Benzer şekilde, sıfırdan farklı bir sağ ideal içinde ispatın doğru olduğu görülür.

Lemma 2.31. R bir asal halka olmak üzere sıfırdan farklı değişmeli bir sol (sağ) ideali var ise R değişmeli halkadır.

İspat: Kabul edelim ki, U, R halkasının sıfırdan farklı değişmeli bir sağ ideali olsun. Bu durumda, her $r, x \in R$, $u \in U$ için $[ur, x] = 0$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$[ur, x] = u[r, x] + [u, x]r = 0$ bulunur. U, değişmeli olduğu için $[u, x] = 0$ dır. Böylece,

her $r, x \in R$, $u \in U$ için $u[r, x] = 0$ elde edilir. Bu, $U[r, x] = 0$ demektir. U, sağ ideal olduğundan $UR[r, x] \subset U[r, x] = 0$ dır. Yani, $UR[r, x] = 0$ olur. Uyarı 2.23 den,

her $r, x \in R$ için $U = 0$ veya $[r, x] = 0$ dır. U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olduğundan her $r, x \in R$ için $[r, x] = 0$ olur. Bu ise, R halkası değişmeli demektir. Benzer şekilde, sıfırdan farklı bir sol ideal içinde ispatın doğru olduğu görülür.

Lemma 2.32. R bir asal halka olmak üzere, $a \in Z$ ve $ab \in Z$ ise $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

Tanım 2.33. $d : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

$d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise d dönüşümüne bir **türev** denir.

Tanım 2.34. $d : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x \in R$ için

$d(x) = [a, x]$ olacak biçimde bir $a \in R$ var ise d dönüşümüne a ile belirlenen bir **iç türev** denir.

Tanım 2.35. R bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $na = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı varsa böyle n-lerin en küçüğüne halkanın **karakteristiği** denir ve

charR = n ile gösterilir.

Lemma 2.36. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka olmak üzere $a \in R$ için $2a = 0$ ise $a = 0$ dır.

Lemma 2.37. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka olmak üzere $a \in R$ için $2a \in Z$ oluyor ise $a \in Z$ dir.

Tanım 2.38. R bir halka ve S, R halkasının bir alt kümesi olmak üzere $F : R \to R$ bir dönüşüm olsun. Her $s \in S$ için $[s, F(s)] = 0$ oluyor ise F dönüşümüne, S kümesi üzerinde **commuting dönüşüm** denir.

Tanım 2.39. R bir halka ve S, R halkasının bir alt kümesi olmak üzere $F : R \to R$ bir dönüşüm olsun. Her $s \in S$ için $[s, F(s)] \in Z$ oluyor ise F dönüşümüne, S kümesi üzerinde **centralizing dönüşüm** denir.

Tanım 2.40. R bir halka ve S, R halkasının bir alt kümesi olmak üzere $F : R \to R$ bir dönüşüm olsun. Her $s \in S$ için $F(s)s + sF(s) \in Z$ oluyor ise F dönüşümüne, S kümesi üzerinde **skew-centralizing dönüşüm** denir.

Gösterim 2.41. R bir halka olmak üzere $x, y \in R$ için $[x, y] = xy - yx$ ifadesine Lie komütatör, σ ve τ, R halkasının iki dönüşümü olmak üzere $x, y \in R$ için

$[x, y]_{\sigma, \tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$ ifadesine (σ,τ)-Lie komütatörü denir.

Uyarı 2.42. (σ,τ)-Lie komütatörü için σ ve τ dönüşümleri yerine $1 : R \to R$ dönüşümü alınırsa

$$[x, y]_{1,1} = xy - yx = [x, y]$$

olur.

Tanım 2.43. $d : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm ve σ, τ, R halkası üzerinde iki dönüşümü olmak üzere her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ oluyorsa

d dönüşümüne bir **sağ (σ,τ)-türev**, her $x, y \in R$ için $d(xy) = \sigma(x)d(y) + d(x)\tau(y)$ oluyorsa d dönüşümüne bir **sol (σ,τ)-türev** denir. d, hem sağ hem de sol (σ, τ)-türev ise d dönüşümüne **(σ,τ)-türev** denir.

Tanım 2.44. R bir halka ve σ, τ, R halkasının iki dönüşümü olmak üzere

$$C_{\sigma,\tau} = \{c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c, \quad \forall x \in R\} = \{c \in R \mid [c, x]_{\sigma,\tau} = 0, \quad \forall x \in R\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye R halkasının **(σ,τ)-merkezi** denir.

Uyarı 2.45. Yukarıdaki tanımda, σ ve τ dönüşümleri yerine $1 : R \to R$ birim dönüşüm alınırsa

$$C_{1,1} = \{c \in R \mid cx = xc, \quad \forall x \in R\} = Z$$

olur.

Lemma 2.46. R bir asal halka olmak üzere $b \in C_{\sigma,\tau}$ ve $ab \in C_{\sigma,\tau}$ ise b = 0 veya

$a \in Z$ dir.

Tanım 2.47. R bir halka, σ, τ, R halkasının iki dönüşümü ve $a \in R$ olmak üzere

$d_a : R \to R$, $d_a(x) = [a, x]_{\sigma,\tau}$ şeklinde tanımlı dönüşüme a ile belirlenen bir **(σ,τ)-iç türev** denir.

Tanım 2.48. R bir halka ve $f : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere

her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ olacak biçimde bir $d : R \to R$ türevi var ise f dönüşümüne d türevi ile belirlenen **genelleştirilmiş sağ türev**, $f(xy) = d(x)y + xf(y)$ olacak biçimde bir $d : R \to R$ türevi var ise f dönüşümüne d türevi ile belirlenen **genelleştirilmiş sol türev** denir. f, hem sağ hem da sol genelleştirilmiş türev ise f dönüşümüne d türevi ile belirlenen **genelleştirilmiş türev** denir.

Tanım 2.49. R bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $f_{a,b} : R \to R$ toplamsal dönüşümü her $x \in R$ için $f_{a,b}(x) = ax + xb$ sağlıyorsa $f_{a,b}$ dönüşümüne a ve b ile belirlenen **genelleştirilmiş iç türev** denir.

$f_{a,b}$, bir genelleştirilmiş iç türev ve d_b, iç türev olmak üzere her $x, y \in R$ için

$f_{a,b}(xy) = f_{a,b}(x)y + xd_b(y)$ sağlanır.

Tanım 2.50. R bir halka, $f : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm ve σ, τ, R halkasının iki dönüşümü olmak üzere her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ olacak biçimde bir

$d : R \to R$ (σ,τ)-türev var ise f dönüşümüne d, (σ,τ)-türevi ile belirlenen **genelleştirilmiş (σ,τ)-türev** denir.

Gösterim 2.51. (f, d) gösterimi ile d türevi ile belirlenen bir f genelleştirilmiş türevi ifade edilir.

Tanım 2.52. R bir halka ve a, b ∈ R olmak üzere $g_{a,b} : R \to R$,

$g_{a,b}(x) = a\sigma(x) + \tau(x)b$ olarak tanımlanan $g_{a,b}$ dönüşümüne a ve b ile belirlenen bir **genelleştirilmiş (σ, τ)-iç türev** denir.

$g_{a,b}$, bir genelleştirilmiş (σ, τ)-iç türev ve d_b, (σ,τ)-iç türev olmak üzere her x, y ∈ R için $g_{a,b}(xy) = g_{a,b}(x)\sigma(y) + \tau(x)d_b(y)$ sağlanır.

Tanım 2.53. R bir halka ve M bir toplamsal değişmeli grup olmak üzere

$\alpha : M \times R \to M, (m, r) \to mr$ ve $\beta : R \times M \to M, (r, m) \to rm$ dönüşümleri tanımlansın. Bu işlemler altında her m, m_1, m_2 ∈ M, a, b ∈ R için

(i) $\alpha(m, a + b) = \alpha(m, a) + \alpha(m, b)$

(ii) $\alpha(m_1 + m_2, a) = \alpha(m_1, a) + \alpha(m_2, a)$

(iii) $\alpha(m, \alpha(a, b)) = \alpha(\alpha(m, a), b)$

oluyorsa M kümesine bir **sağ R-modül**,

(iv) $\beta(a + b, m) = \beta(a, m) + \beta(b, m)$

(v) $\beta(a, m_1 + m_2) = \beta(a, m_1) + \beta(a, m_2)$

(vi) $\beta(\beta(a, b), m) = \beta(a, \beta(b, m))$

oluyorsa M kümesine bir **sol R-modül** denir. M, hem sağ hem de sol R-modül ise M kümesine bir **R-bimodül** denir.

Tanım 2.54. A ve B iki sağ R-modül ve f : A → B bir dönüşüm olmak üzere

her a_1, a_2 ∈ A için $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$ olsun. Her r ∈ R için f(ar) = f(a)r oluyor ise f dönüşümüne **sağ R-modül homomorfizmi** denir.

Tanım 2.55. R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu durumda,

$$M = \{(U, f) \mid f : U \to R \text{ sağ R-modül homomorfizm}\}$$

kümesi üzerinde aşağıdaki biçimde tanımlanan " ≈ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

$(U, f) \approx (V, g)$ olması için gerek ve yeter koşul R halkasının sıfırdan farklı $W \subset U \cap V$ ideali üzerinde f = g olmasıdır.

cl(U, f) = $\hat{f}$ ve denklik sınıflarının kümesi Q olsun. Buna göre,

$$\hat{f} + \hat{g} = cl(U \cap V,\ f + g)$$

$$\hat{f}\,\hat{g} = cl(VU, f\,g)$$

işlemlerine göre Q, R halkasını kapsayan birimli bir asal halkadır. Bu halkaya **Martindale Kesirler halkası** denir. R halkası üzerinde tanımlı sağ Martindale Kesirler Halkası $Q_r(R)$ ile gösterilir ve bu halka aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $R \subseteq Q_r(R)$

(ii) $q \in Q_r(R)$ olmak üzere R halkasının sıfırdan farklı bir I ideali için $qI \subseteq R$ dir.

(iii) $q \in Q_r(R)$ olmak üzere R halkasının sıfırdan farklı bir I ideali için $qI = 0$ oluyorsa q = 0 dır.

(iv) I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $\varphi : I \to R$ bir sağ R-modül dönüşümü ise her $x \in R$ için $\varphi(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R)$ vardır.

Tanım 2.56. Q halkasının merkezi

$$C = \{ \hat{x} \in Q \mid \hat{x}\hat{q} = \hat{q}\hat{x},\ \ \forall\, \hat{q} \in Q \}$$

dir ve bu kümeye **R halkasının genişletilmiş merkezi (extended centroid**) denir. Üstelik, C kümesi bir cisimdir.

Tanım 2.57. R bir halka ve C, R halkasının Q içindeki genişletilmiş merkezi olmak üzere RC kümesine **merkezi kapanış** denir ve R_C ile gösterilir.

Lemma 2.58. R bir asal halka ve a, $b \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için axb = bxa ve $a \neq 0$ ise $b = \lambda a$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

Özdeşlikler:

- $[x, y] = -[y, x]$
- $[x, -y] = -[x, y]$
- $[[x, y], z] = [-[y, x], z] = -[z, -[y,x]] = [z, [y, x]]$
- $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$
- $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$
- $[x, yz]_{\sigma, \tau} = \tau(y)[x, z]_{\sigma, \tau} + [x, y]_{\sigma, \tau}\, \sigma(z) = [\tau(z)x, y]_{\sigma, \tau} + [x\sigma(y), z]_{\sigma, \tau}$
- $[xy, z]_{\sigma, \tau} = x[y, z]_{\sigma, \tau} + [x, \tau(z)]y = x[y, \sigma(z)] + [x, z]_{\sigma, \tau}\, y$
- $[[x, y]_{\sigma, \tau}, z]_{\sigma, \tau} - [x, [y, z]]_{\sigma, \tau} - [[x, z]_{\sigma, \tau}, y]_{\sigma, \tau} = 0$

Jacobi Özdeşliği: R bir halka olmak üzere her x, y, z ∈ R için

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

sağlanır.

BÖLÜM 3

HALKALARDA TÜREV

Bu bölümde, asal halkada türev ile ilgili çalışmalara ve d, g, h birer türev olmak üzere, $d(x) = ag(x) + h(x)b$ sağlanması durumunda bulunan sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca, asal halkada ve halkanın sıfırdan farklı bir Lie ideali üzerinde komütatiflik incelenmiştir.

3.1. Asal Halkalarda Türev

Posner E.C., 1957.

Lemma 3.1.1. R bir asal halka, $a \in R$ ve $d : R \to R$ bir türev olmak üzere her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki, $d \neq 0$ olsun. Hipotezimizde, $y \in R$ olmak üzere, x yerine xy yazarsak $ad(xy) = 0$ olur. Bu ifadeyi türev tanımını kullanarak düzenlediğimizde

$ad(x)y + axd(y) = 0$ bulunur. Hipotezden $ad(x) = 0$ olduğundan her $x, y \in R$ için $axd(y) = 0$ olur. Bu ise, $aRd(y) = 0$ demektir. Uyarı 2.23 den, her $y \in R$ için $a = 0$ veya $d(y) = 0$ olur. Yani, $a = 0$ veya $d(R) = 0$ dır. $d \neq 0$ olduğunu kabul ettiğimiz için $a = 0$ olur.

Lemma 3.1.2. R bir asal halka ve $p, q, r \in R$ olsun. Bu durumda, her $a \in R$ için

$paqar = 0$ ise $p = 0$ veya $q = 0$ veya $r = 0$ dır.

İspat: Hipotezden, her $a \in R$ için $paqar = 0$ dır. Bu ifadede, $b \in R$ olmak üzere, a yerine $a + b$ yazarsak $p(a + b)q(a + b)r = 0$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi halka tanımı yardımıyla düzenlersek, her $a, b \in R$ için $paqar + paqbr + pbqar + pbqbr = 0$ olur. Hipotezden ilk ve son terim sıfırdır. O halde,

$$paqbr + pbqar = 0, \ \forall\, a, b \in R$$

elde edilir. Kabul edelim ki, $pa = 0$ olsun. Bu kabul altında yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde her $b \in R$ için $pbqar = 0$ olur. Bu ise, $pRqar = 0$ demektir. Uyarı 2.23

kullanılarak

$$pa = 0 \Rightarrow p = 0 \text{ veya } qar = 0$$

olduğu bulunur. $pa = 0$ olması durumunda her $t \in R$ için $pat = 0$ olduğundan, yukarıdaki ifade yardımıyla, her $t \in R$ için $p = 0$ veya $qatr = 0$ elde edilir. Bu ise, $p = 0$ veya $qaRr = 0$ demektir. Uyarı 2.23 den, $p = 0$ veya $qa = 0$ veya $r = 0$ olur. Sonuç olarak, $pa = 0$ kabulü altında $p = 0$ veya $qa = 0$ veya $r = 0$ olduğu bulunur. O halde,

$$paqar = 0 \Rightarrow p = 0 \text{ veya } r = 0 \text{ veya } qaqar = 0$$

dır. Hipotezde, her $a \in R$ için $paqar = 0$ olduğundan her $a \in R$ için $p = 0$ veya $r = 0$ veya $qaqar = 0$ olur. Şimdi, kabul edelim ki her $a \in R$ için $qaqar = 0$ olsun. Bu ifadede, a yerine $a + b$ yazar ve bulunan ifadeyi halka tanımı yardımıyla düzenlersek

$q(a + b)q(a + b)r = qaqar + qaqbr + qbqar + qbqbr = 0$ bulunur. Kabulden ilk ve son terim sıfırdır. O halde, her $a, b \in R$ için $qaqbr + qbqar = 0$ dır. Kabul edelim ki, $ar = 0$ olsun. Bu durumda, her $b \in R$ için $qaqbr = 0$ dır. Bu ise, $qaqRr = 0$ demektir. Uyarı 2.23 den, $qaq = 0$ veya $r = 0$ olur. Yani,

$$ar = 0 \Rightarrow qaq = 0 \text{ veya } r = 0$$

dır. Öte yandan, $ar = 0$ olması durumunda her $t \in R$ için $tar = 0$ dır. Bu durumda, yukarıdaki ifade yardımıyla, her $t \in R$ için $r = 0$ veya $qtaq = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, $r = 0$ veya $qRaq = 0$ demektir. Uyarı 2.23 den, $r = 0$ veya $q = 0$ veya $aq = 0$ olur. O halde,

$$qaqar = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ veya } q = 0 \text{ veya } qaqaq = 0$$

dır. Kabulde, her $a \in R$ için $qaqar = 0$ olduğundan her $a \in R$ için $r = 0$ veya $q = 0$ veya $qaqaq = 0$ olur. Şimdi de, kabul edelim ki her $a \in R$ için $qaqaq = 0$ olsun. Bu ifadede, a yerine $a + b$ yazar ve düzenlersek $q(a + b)q(a + b)q = qaqaq + qaqbq + qbqaq + qbqbq = 0$ bulunur. Kabulden, ilk ve son terim sıfırdır. O halde,

$$qaqbq + qbqaq = 0, \forall\, a, b \in R$$

olur. Yukarıdaki ifadede, b yerine aqb yazar ve düzenlersek $qaq(aqb)q + q(aqb)qaq = 0$ bulunur. Kabulden, ilk terim sıfırdır. Böylece, her $a, b \in R$ için $q(aqb)qaq = 0$ elde edilir.

Bu ise, her $a \in R$ için $qaqRqaq = 0$ demektir. Uyarı 2.23 den, her $a \in R$ için $qaq = 0$ olur. Yani, $qRq = 0$ dır. Tekrar Uyarı 2.23 den, $q = 0$ olduğu bulunur. Sonuç olarak, her $a \in R$ için $paqar = 0$ olması durumunda $p = 0$ veya $q = 0$ veya $r = 0$ dır.

Teorem 3.1.3. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve $d_1, d_2 : R \to R$ iki türev olsun. Bu durumda, d_1d_2 bir türev ise d_1 ve d_2 den en az biri sıfırdır.

İspat: d_1d_2 bir türev olduğundan her $x, y \in R$ için

$$d_1d_2(xy) = d_1d_2(x)y + xd_1d_2(y)$$

olur. Öte yandan, d_1 ve d_2 nin birer türev olmasını kullanırsak, her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} d_1d_2(xy) &= d_1(d_2(xy)) = d_1(d_2(x)y + xd_2(y)) = d_1(d_2(x)y) + d_1(xd_2(y)) \\ &= d_1d_2(x)y + d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) + xd_1d_2(y) \end{aligned}$$

dir. Bu iki özdeşlikten her $x, y \in R$ için

$$d_1d_2(x)y + xd_1d_2(y) = d_1d_2(x)y + d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) + xd_1d_2(y)$$

elde edilir. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) = 0, \ \forall\, x, y \in R \tag{3.1}$$

bulunur. Yukarıdaki özdeşlikte, $c \in R$ olmak üzere, x yerine $xd_1(c)$ yazar ve bulunan ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlersek, her $x, y, c \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d_2(xd_1(c))d_1(y) + d_1(xd_1(c))d_2(y) \\ &= d_2(x)d_1(c)d_1(y) + xd_2d_1(c)d_1(y) + d_1(x)d_1(c)d_2(y) + xd_1^2(c)d_2(y) \\ &= d_2(x)d_1(c)d_1(y) + d_1(x)d_1(c)d_2(y) + x(d_2d_1(c)d_1(y) + d_1^2(c)d_2(y)) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin son terimi, (3.1) nolu ifadede x yerine $d_1(c)$ yazılmış hali verdiği için sıfırdır. Bu nedenle,

$$d_2(x)d_1(c)d_1(y) + d_1(x)d_1(c)d_2(y) = 0, \ \forall\, x, y, c \in R \tag{3.2}$$

olur. (3.1) nolu özdeşlikte x yerine c yazarsak $d_2(c)d_1(y) + d_1(c)d_2(y) = 0$ bulunur. Yani,

her $y, c \in R$ için

$$d_1(c)d_2(y) = -\ d_2(c)d_1(y)$$

dir. Yukarıdaki ifadeyi (3.2) nolu özdeşlikte yerine yazarsak, her x, y, c ∈ R için,

$$0 = d_2(x)d_1(c)d_1(y) + d_1(x)d_1(c)d_2(y) = d_2(x)d_1(c)d_1(y) + d_1(x)(-\ d_2(c)d_1(y))$$

$$= d_2(x)d_1(c)d_1(y) - d_1(x)d_2(c)d_1(y) = (d_2(x)d_1(c) - d_1(x)d_2(c))d_1(y)$$

elde edilir. Böylece,

$$(d_2(x)d_1(c) - d_1(x)d_2(c))d_1(y) = 0,\ \forall\ x, y, c \in R$$

olur. Bu ise, her x, c ∈ R için $(d_2(x)d_1(c) - d_1(x)d_2(c))d_1(R) = 0$ olması demektir.

Lemma 3.1.1 den, her x, c ∈ R için $d_2(x)d_1(c) - d_1(x)d_2(c) = 0$ veya $d_1 = 0$ olur. Kabul edelim ki, her x, c ∈ R için $d_2(x)d_1(c) - d_1(x)d_2(c) = 0$ olsun. Öte yandan, (3.1) nolu özdeşlikte y yerine c yazarsak, her x, c ∈ R için $d_2(x)d_1(c) + d_1(x)d_2(c) = 0$ elde edilir. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak her x, c ∈ R için $2d_2(x)d_1(c) = 0$ olur. charR ≠ 2 olduğundan, Lemma 2.36 dan, her x, c ∈ R için $d_2(x)d_1(c) = 0$ dır. Bu durumda, her x ∈ R için $d_2(x)d_1(R) = 0$ olur.

Lemma 3.1.1 den, her x ∈ R için $d_2(x) = 0$ veya $d_1 = 0$ dır. Bu ise, $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olması demektir.

3.2. Asal Halkalarda d(x) = ag(x) + h(x)b olması durumu

Bresar M., 1993.

Lemma 3.2.1. R bir asal halka, d ve g, R halkasının türevleri ve her x, y ∈ R için

$$d(x)g(y) = g(x)d(y) \tag{3.3}$$

olsun. d, sıfırdan farklı bir türev ise her x ∈ R için $g(x) = \lambda d(x)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat: (3.3) nolu özdeşlikte, z ∈ R olmak üzere, y yerine yz yazılırsa

$d(x)g(yz) = g(x)d(yz)$ bulunur. Bulunan ifade türev tanımı kullanılarak düzenlendiğinde

$d(x)g(y)z + d(x)yg(z) = g(x)d(y)z + d(x)yd(z)$ olur. (3.3) nolu özdeşlik kullanıldığında

$$d(x)yg(z) = g(x)yd(z), \ \forall \ x, y, z \in R \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) nolu özdeşlikte, z yerine x yazarsak $d(x)yg(x) = g(x)yd(x)$ bulunur.

Öte yandan, $d \neq 0$ olduğu için $d(x_0) \neq 0$ olacak biçimde bir $x_0 \in R$ vardır. Lemma 2.58 den, $d(x_0) \neq 0$ olarak seçilen her $x_0 \in R$ için

$$g(x_0) = \lambda(x_0)d(x_0)$$

olacak biçimde bir $\lambda(x_0) \in C$ vardır. $d(x_0) \neq 0$ ve $d(z_0) \neq 0$ olacak şekilde x_0 ve $z_0 \in R$ seçilir ve (3.4) nolu özdeşlik bu elemanlar için düzenlenirse

$d(x_0)y\lambda(z_0)d(z_0) = (x_0)d(x_0)yd(z_0)$ bulunur. Bu, her $y \in R$ için $\lambda(x_0) - \lambda(z_0))d(x_0)yd(z_0) = 0$ olması demektir. Yani,

$$(\lambda(x_0) - \lambda(z_0))d(x_0)Rd(z_0) = 0$$

dır. Uyarı 2.23 den, $(\lambda(x_0) - \lambda(z_0))d(x_0) = 0$ veya $d(z_0) = 0$ olur. $d(z_0) \neq 0$ seçildiği için $(\lambda(x_0) - \lambda(z_0))d(x_0) = 0$ elde edilir. $d(x_0) \neq 0$ olduğu da kullanılırsa $\lambda(x_0) = \lambda(z_0)$ bulunur. Bu ise, λ temsilcilerden bağımsız olarak seçilir demektir. O halde, $d(x) \neq 0$ olacak biçimde seçilen her $x \in R$ için $g(x) = \lambda(x)d(x)$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ vardır. Şimdi $d(x_0) = 0$ olacak biçimde bir $x_0 \in R$ seçelim ve (3.4) ifadesi bu eleman için düzenleyelim. Bu durumda,

$$g(x_0)yd(z) = 0, \ \ \forall \ y, z \in R$$

bulunur. Uyarı 2.23 den, her $z \in R$ için $g(x_0) = 0$ veya $d(z) = 0$ dır. Hipotezde,

$d \neq 0$ olduğu için $g(x_0) = 0$ elde edilir. O halde, $g(x_0) = 0 = \lambda.0 = \lambda d(x_0)$ biçiminde yazılabildiğinden $d(x) = 0$ olan her $x \in R$ için $g(x) = \lambda d(x)$ olduğu görülür.

Böylece, her $x \in R$ için $g(x) = \lambda d(x)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

Lemma 3.2.2. R bir asal halka, f, d, g, h, R halkasının türevleri ve her $x, y \in R$ için

$$d(x)g(y) = h(x)f(y) \tag{3.5}$$

olsun. d ve f, sıfırdan farklı türevler ise her $x \in R$ için $g(x) = \lambda f(x)$ ve $h(x) = \lambda d(x)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat: (3.5) nolu özdeşlikte, $z \in R$ olmak üzere, y yerine zy yazılırsa

$d(x)g(zy) = h(x)f(zy)$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlersek $d(x)g(z)y + d(x)zg(y) = h(x)f(z)y + h(x)zf(y)$ olur. Hipotezden,

$d(x)g(z) = h(x)f(z)$ dir. O halde,

$$d(x)zg(y) = h(x)zf(y)\ ,\ \forall\, x, y, z \in R \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) nolu özdeşlikte, $w \in R$ olmak üzere, z yerine $zf(w)$ yazılırsa

$d(x)zf(w)g(y) = h(x)zf(w)f(y)$ bulunur. Bulunan bu ifadede (3.6) nolu özdeşlik kullanılırsa $d(x)zf(w)g(y) = d(x)zg(w)f(y)$ olur. Yani, $d(x)z(f(w)g(y) - g(w)f(y)) = 0$ dır. Bu ise,

$$d(x)R(f(w)g(y) - g(w)f(y)) = 0,\ \forall\ x, y, w \in R$$

demektir. Yukarıdaki ifadeye Uyarı 2.23 uygulandığında, her $x, y, w \in R$ için $d(x) = 0$ veya $f(w)g(y) - g(w)f(y) = 0$ olur. Hipotezde $d \neq 0$ olduğu için,

$$f(w)g(y) = g(w)f(y),\ \ \forall\, y, w \in R$$

elde edilir. Lemma 3.2.1 den, her $y \in R$ için $g(y) = \lambda f(y)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ olduğu görülür. (3.6) nolu özdeşlik bu eşitlik kullanarak düzenlenirse $d(x)z\lambda f(y) = h(x)zf(y)$ olur. Yani, her $x, y, z \in R$ için $(\lambda d(x) - h(x))zf(y) = 0$ dır. Bu ise,

$$(\lambda d(x) - h(x))Rf(y) = 0,\ \forall\, x, y \in R$$

demektir. Uyarı 2.23 den, her $x, y \in R$ için $\lambda d(x) - h(x) = 0$ veya $f(y) = 0$ olur. Hipotezde,

$f \neq 0$ olduğu için

$$h(x) = \lambda d(x),\ \ \ \forall\, x \in R,\ \lambda \in C$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. R bir asal halka, d, g, h, R halkasının türevleri ve $a, b \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için

$$d(x) = ag(x) + h(x)b \tag{3.7}$$

olsun. O zaman, $a \notin Z$ ve $b \notin Z$ olması durumunda her $x \in R$ için $d(x) = [\lambda ab,x]$,

$g(x) = [\lambda b,x]$, $h(x) = [\lambda a,x]$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat: (3.7) nolu ifadede, $y \in R$ olmak üzere, x yerine xy yazılırsa

$d(xy) = ag(xy) + h(xy)b$ bulunur. Bu ifade türev tanımı kullanılarak düzenlenirse

$d(x)y + xd(y) = ag(x)y + axg(y) + h(x)yb + xh(y)b$ olur. Öte yandan, (3.7) nolu ifade kullanılarak $d(xy) = d(x)y + xd(y) = ag(x)y + h(x)by + xag(y) + xh(y)b$ olduğu bulunur. Bu iki ifade taraf tarafa çıkarılarak $axg(y) + h(x)yb = h(x)by + xag(y)$ elde edilir. $I_a : R \to R$,

$x \to ax - xa$ ve $I_b : R \to R$, $x \to bx - xb$ olarak tanımlanan iç türevler olmak üzere son ifadeyi düzenlersek

$$I_a(x)g(y) = h(x)I_b(y), \quad \forall\, x, y \in R$$

elde edilir. $a \notin Z$ ve $b \notin Z$ olduğu için, $I_a(x_0) \neq 0$, $I_b(y_0) \neq 0$ olacak biçimde $x_0, y_0 \in R$ vardır. O halde, Lemma 3.2.2 den, her $x, y \in R$ için $g(y) = \lambda[b, y] = [\lambda b, y]$ ve

$h(x) = \lambda[a, x] = [\lambda a, x]$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ olduğu görülür. Üstelik,

$$[\lambda ab, x] = \lambda[ab, x] = \lambda a[b, x] + \lambda[a, x]b = a[\lambda b, x] + [\lambda a, x]b = ag(x) + h(x)b$$

olur. Hipotezden, $d(x) = ag(x) + h(x)b$ dir. Böylece

$$d(x) = [\lambda ab, x], \ \forall\, x \in R$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.4. R bir asal halka, g ve h, R halkasının türevleri ve $a, b \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $ag(x) + h(x)b = 0$ olsun. $a \notin Z$ ve $b \notin Z$ olması durumunda, her $x \in R$ için

$g(x) = [\lambda b, x]$, $h(x) = [\lambda a, x]$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır. Üstelik, $g \neq 0$ ise $ab \in Z$ dir.

İspat: Teorem 3.2.3 uygulandığında her $x \in R$ için $g(x) = [\lambda b, x]$, $h(x) = [\lambda a, x]$,

$[\lambda ab, x] = 0$ olacak biçimde $\lambda \in C$ vardır. Kabul edelim ki, $g \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\lambda \neq 0$ dır. $[\lambda ab, x] = 0$ ifadesi düzenlenirse $[\lambda ab, x] = \lambda[ab, x] = 0$ olur. Bu durumda, her $k \in R$ için $k\lambda[ab, x] = 0$ dır. $\lambda \in C$ olmasını kullanarak bu eşitliği düzenlediğimizde her $k \in R$ için $\lambda k[ab, x] = 0$ olduğu bulunur. Yani, $\lambda R[ab, x] = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $x \in R$ için $\lambda = 0$ veya $[ab, x] = 0$ olur. $\lambda \neq 0$ olduğu için,

$$[ab, x] = 0, \ \forall\, x \in R$$

dır. Bu ise, $ab \in Z$ demektir.

3.3. Asal Halkalarda Komütatiflik

Herstein I. N., 1979.

Teorem 3.3.1. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $[a, d(x)] = 0$ ise $a \in Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki, $a \notin Z$ olsun. Hipotezden, her $x, y \in R$ için $[a, d(xy)] = 0$ olur. Bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde

$$0 = [a, d(xy)] = [a, d(x)y + xd(y)] = [a, d(x)y] + [a, xd(y)]$$

$$= d(x)[a, y] + [a, d(x)]y + x[a, d(y)] + [a, x]d(y)$$

bulunur. Hipotezden, $[a, d(x)] = [a, d(y)] = 0$ olmasını yukarıdaki ifadede kullanırsak

$$d(x)[a, y] + [a, x]d(y) = 0, \ \forall\, x, y \in R \tag{3.8}$$

elde edilir. Farz edelim ki, $[a, y] = 0$ olsun. Bu durumda (3.8) nolu ifadeyi düzenlersek

$$[a, x]d(y) = 0, \ \forall\, x \in R$$

olduğu bulunur. Yukarıdaki ifadede, $z \in R$ olmak üzere, x yerine xz yazarsak

$[a, xz]d(y) = 0$ bulunur. Bu eşitliği düzenlersek $x[a, z]d(y) + [a, x]zd(y) = 0$ elde edilir. Yukarıdaki ifadeden $[a, z]d(y) = 0$ olduğu için $[a, x]zd(y) = 0$ olur. Bu ise, $[a, x]Rd(y) = 0$ olması demektir. Uyarı 2.23 den, her $x \in R$ için $[a, x] = 0$ veya $d(y) = 0$ dır. $d(y) \neq 0$ olması durumunda

$a \in Z$ dir. Bu ise, $a \notin Z$ olması ile çelişir. O halde, $d(y) = 0$ dır. Böylece,

$$[a, y] = 0 \Rightarrow d(y) = 0$$

olduğu bulunur. Hipotezden, her $x \in R$ için $[a, d(x)] = 0$ olduğundan yukarıdaki ifade yardımıyla $d(d(x)) = 0$ olduğu bulunur. Yani, her $x \in R$ için $d^2(x) = 0$ dır. Bu ise, $d^2 = 0$ olması demektir. [Herstein I. N., 1976., Lemma 1.1.9] dan, $d \neq 0$ olması durumunda $d^2 \neq 0$ olması gerekir. Bu nedenle, $d^2 = 0$ olduğunu bulduğumuz için çelişki elde edilir. Çelişkinin nedeni kabuldür. O halde, $a \in Z$ dir.

Lee P. H. ve Lee T. K., 1981.

Teorem 3.3.2. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ olmak üzere $[a, d(R)] \subseteq Z$ ise $a \in Z$ dir.

İspat: Hipotezden, $[a, d(a^2)] \in Z$ dir. Türev tanımı yardımıyla bu ifadeyi düzenlersek

$$[a, d(a^2)] = [a, d(a)a + ad(a)] = d(a)[a, a] + [a, d(a)]a + a[a, d(a)] + [a, a]d(a)$$

$$= [a, d(a)]a + a[a, d(a)] \in Z$$

bulunur. Hipotezden, $[a, d(a)] \in Z$ olduğu için yukarıdaki ifadeden $2a[a, d(a)] \in Z$ olduğu bulunur. $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan, Lemma 2.37 den

$$a[a, d(a)] \in Z$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade ve $[a, d(a)] \in Z$ olmasını beraber düşündüğümüzde,

Lemma 2.32 den, $[a, d(a)] = 0$ veya $a \in Z$ olur. $a \in Z$ olması durumunda $[a, d(a)] = 0$ dır.

$a \notin Z$ olması durumunda da $[a, d(a)] = 0$ dır. O halde,

$$[a, d(a)] = 0 \tag{3.9}$$

dır. Öte yandan, hipotezden, her $x \in R$ için $[a, d([a, x])] \in Z$ dir. Türev tanımı yardımıyla bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$[a, d([a, x])] = [a, [d(a), x] + [a, d(x)]\ ] = [a, [d(a), x]\ ] + [a, [a, d(x)]\ ] \in Z$$

bulunur. Hipotezden $[a, d(x)] \in Z$ olduğu için $[a, [a, d(x)]] = 0$ dır. Bunu yukarıdaki ifadede kullanırsak, her $x \in R$ için

$$[a, [d(a), x]] \in Z \tag{3.10}$$

olur. Bu ifadede, $a \in R$ olmak üzere, x yerine ax yazar düzenlersek

$$[a, [d(a), ax]] = [a, a[d(a), x] + [d(a), a]x] \in Z$$

elde edilir. (3.9) nolu ifadeyi kullanırsak

$$[a, [d(a), ax]] = [a, a[d(a), x] = a[a, [d(a), x]] + [a, a][d(a), x] = a[a, [d(a), x]] \in Z$$

olduğu bulunur. (3.10) nolu ifadeyi yukarıdaki ifade ile beraber düşündüğümüzde, Lemma 2.32 den, $a \in Z$ veya $[a, [d(a), x]] = 0$ olduğu bulunur. $a \in Z$ olması durumunda

$[a, [d(a), x]] = 0$ dır. $a \notin Z$ olması durumunda da $[a, [d(a), x]] = 0$ dır. O halde,

her $x \in R$ için $[a, [d(a), x]] = 0$ dır. $I_a : R \to R$, $x \to [a, x]$ ve $I_{d(a)} : R \to R$, $x \to [d(a), x]$ olarak tanımlanan iç türevler olmak üzere, son bulmuş olduğumuz eşitliği düzenlersek her $x \in R$ için $I_a(I_{d(a)}(x)) = 0$ olur. Bu ise, $I_a I_{d(a)} = 0$ olması demektir. Teorem 3.1.3 den, $I_a = 0$ veya $I_{d(a)} = 0$ olur. Bu ise, $a \in Z$ veya $d(a) \in Z$ demektir. Kabul edelim ki, $a \in Z$ olsun. Bu durumda, her $x \in R$ için $ax = xa$ dır ve $d(ax) = d(xa)$ olur. Bu eşitliği türev tanımı yardımıyla düzenlersek $d(a)x + ad(x) = d(x)a + xd(a)$ bulunur. $a \in Z$ olmasını kullanarak bu ifadeyi düzenlediğimizde $d(a)x = xd(a)$ elde edilir. Yani, her $x \in R$ için $[d(a), x] = 0$ dır. Bu ise, $d(a) \in Z$ demektir. Böylece, $a \in Z$ olması durumda $d(a) \in Z$ olur. $a \notin Z$ olması durumunda da $d(a) \in Z$ dir. O halde,

$$d(a) \in Z$$

olur. Öte yandan, hipotezden, her $x \in R$ için $[a, d(ax)] \in Z$ dir. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$\begin{aligned}[a, d(ax)] &= [a, d(a)x + ad(x)] = [a, d(a)x] + [a, ad(x)] \\ &= d(a)[a, x] + [a, d(a)]x + [a, a]d(x) + a[a, d(x)] \\ &= d(a)[a, x] + [a, d(a)]x + a[a, d(x)] \in Z\end{aligned}$$

olduğu bulunur. $d(a) \in Z$ olduğundan, her $x \in R$ için

$$d(a)[a, x] + a[a, d(x)] \in Z \tag{3.11}$$

elde edilir. Bu durumda, her $t \in R$ için $[t, d(a)[a, x] + a[a, d(x)]] = 0$ dır. Bu ifadeyi düzenlersek

$$\begin{aligned}0 &= [t, d(a)[a, x]] + [t, a[a, d(x)]] \\ &= d(a)[t, [a, x]] + [t, d(a)][a, x] + a[t, [a, d(x)]] + [t, a][a, d(x)]\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden dolayı $[t, [a, d(x)]] = 0$ dır. $d(a) \in Z$ olduğu için $[t, d(a)] = 0$ olur. Bu bilgiler yardımıyla üstteki eşitliği düzenlediğimizde, her $x, t \in R$ için

$$d(a)[t, [a, x]] + [t, a][a, d(x)] = 0$$

elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadede t yerine a yazarsak

$d(a)[a, [a, x]] + [a, a][a, d(x)] = d(a)[a, [a, x]] = 0$ bulunur. Her $k \in R$ için

$kd(a)[a, [a, x]] = 0$ dır. $d(a) \in Z$ olduğundan, her $k \in R$ için $d(a)k[a, [a, x]] = 0$ olur.

Bu ise, $d(a)R[a, [a, x]] = 0$ olması demektir. Uyarı 2.23 den, her $x \in R$ için $d(a) = 0$ veya

$[a, [a, x]] = 0$ dır. Kabul edelim ki, $d(a) \neq 0$ olsun. Bu durumda, her $x \in R$ için

$[a, [a, x]] = 0$ dır. Bu ise, $I_a I_a(R) = 0$ demektir. Teorem 3.1.3 den, $I_a = 0$ olur. Yani, $d(a) \neq 0$ iken $a \in Z$ dir. Şimdi de, kabul edelim ki, $d(a) = 0$ olsun. (3.11) nolu ifadeyi bu kabul altında düzenlersek her $x \in R$ için $a[a, d(x)] \in Z$ olur. Hipotezden $[a, d(x)] \in Z$ dir. O halde,

Lemma 2.32 den, her $x \in R$ için $a \in Z$ veya $[a, d(x)] = 0$ olur. $a \in Z$ ise $[a, d(x)] = 0$ dır. $a \notin Z$ olması durumunda da $[a, d(x)] = 0$ dır. Böylece, $[a, d(R)] = 0$ olur. Teorem 3.3.1 den, $a \in Z$ dir. İspat biter.

Teorem 3.3.3. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $[d(R), d(R)] \subseteq Z$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Hipotez ve Teorem 3.3.2 den $d(R) \subseteq Z$ olur. Bu durumda, her $x, y \in R$ için

$[x, d(xy)] = 0$ dır. Bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde

$$\begin{aligned} 0 = [x, d(xy)] &= [x, d(x)y + xd(y)] = [x, d(x)y] + [x, xd(y)] \\ &= d(x)[x, y] + [x, d(x)]y + [x, x]d(y) + x[x, d(y)] \\ &= d(x)[x, y] + [x, d(x)]y + x[x, d(y)] \end{aligned}$$

bulunur. $d(x), d(y) \in Z$ olduğu için $[x, d(x)]y = x[x, d(y)] = 0$ dır. Böylece, her $x, y \in R$ için $d(x)[x, y] = 0$ olur. $t \in R$ olmak üzere bu ifadeyi soldan t ile çarpar ve oluşan ifadeyi

$d(x) \in Z$ olmasını kullanarak düzenlersek $td(x)[x, y] = d(x)t[x, y] = 0$ bulunur. Bu işlem

her $t \in R$ için yapılabileceğinden $d(x)R[x, y] = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $x, y \in R$ için

$d(x) = 0$ veya $[x, y] = 0$ olur. $A = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ ve

$B = \{x \in R \mid [x, y] = 0, \forall y \in R\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. Böylece, Teorem 2.6 dan, $R = A$ veya $R = B$ dir. $R = A$ olması durumunda, her $x \in R$ için $d(x) = 0$ dır. Bu, $d = 0$ olması demektir. Oysaki, hipotezde, $d \neq 0$ olması ile çelişir. O halde, $R = B$ dir. Bu durumda, her $x, y \in R$ için

$[x, y] = 0$ dır. Yani, her $x \in R$ için $[x, R] = 0$ dır. Böylece, R halkası değişmeli olur.

Teorem 3.3.4. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d^2(R) \subseteq Z$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Hipotezden, her $x, y \in R$ için $d^2([x, y]) \in Z$ dir. Türev tanımı yardımıyla bu ifadeyi düzenlersek

$$d^2([x, y]) = d(d([x, y])) = d([d(x), y] + [x, d(y)]) = d([d(x), y]) + d([x, d(y)])$$

$$= [d^2(x), y] + [d(x), d(y)] + [d(x), d(y)] + [x, d^2(y)]$$

$$= [d^2(x), y] + 2[d(x), d(y)] + [x, d^2(y)] \in Z$$

bulunur. Hipotez yardımıyla yukarıdaki ifadeyi düzenlersek, her $x, y \in R$ için

$2[d(x), d(y)] \in Z$ olur. Lemma 2.37 den,

$$[d(x), d(y)] \in Z, \forall\, x, y \in R$$

dir. Bu ise, $[d(R), d(R)] \subseteq Z$ demektir. Teorem 3.3.3 den, R değişmeli bir halkadır.

Teorem 3.3.5. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Hipotezden, her $x, y \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ dir. Bu ifadede, $y \in R$ olmak üzere, x yerine $x + y$ yazar ve oluşan ifadeyi türev tanımını kullanarak düzenlersek

$$[x + y, d(x + y)] = [x + y, d(x) + d(y)] = [x, d(x)] + [x, d(y)] + [y, d(x)] + [y, d(y)] \in Z$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede hipotezi kullanırsak, her $x, y \in R$ için

$[x, d(y)] + [y, d(x)] \in Z$ olduğu bulunur. Bu ifadede y yerine $[x ,y]$ yazarsak

$[x, d([x, y])] + [[x, y], d(x)] \in Z$ olur. Türev tanımı yardımıyla bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$[x, d([x, y])] + [[x, y], d(x)] = [x, [d(x), y]] + [x, [x, d(y)]] + [[x, y], d(x)] \in Z$$

bulunur. Elde etmiş olduğumuz bu ifadeyi düzenlersek

$[x, [d(x), y]] + [x, [x, d(y)]] + [d(x), [y, x]] \in Z$ olduğu bulunur. Jacobi özdeşliğinden,

$[x, [d(x), y]] + [d(x), [y, x]] = -[y, [x, d(x)]]$ dir. Bu eşitliği yukarıdaki özdeşlikte uygularsak, $[x, [x, d(y)]] - [y, [x, d(x)]] \in Z$ elde edilir. Hipotezimizi kullandığımızda

$[y, [x, d(x)]] = 0$ olur. Böylece, her $x, y \in R$ için

$$[x, [x, d(y)]] \in Z \tag{3.12}$$

olduğu bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede, x yerine $x + d(y)$ yazar ve oluşan ifadeyi türev tanımını kullanarak düzenlersek

$$[x + d(y), [x + d(y), d(y)]] = [x + d(y), [x, d(y)] + [d(y), d(y)]]$$

$$= [x, [x, d(y)]] + [d(y), [x, d(y)]] \in Z$$

bulunur. (3.12) nolu ifade kullanıldığında, $[d(y), [x, d(y)]] \in Z$ dir. Bu ise, her $x, y \in R$ için $[d(y), [d(y), x]] \in Z$ olması demektir. $I_{d(y)} : R \to R$, $x \to [d(y), x]$ olarak tanımlanan bir iç türev olmak üzere son bulunan ifadeyi düzenlersek, her $x \in R$ için

$I_{d(y)}([d(y), x]) = I_{d(y)}(I_{d(y)}(x)) = I^2_{d(y)}(x) \in Z$ olur. Yani, $I^2_{d(y)}(R) \subseteq Z$ dir. Teorem 3.3.4 den, her $y \in R$ için $R \subseteq Z$ ya da $I_{d(y)} = 0$ olur. R halkasının değişmeli olması durumunda ispat biter. O halde, her $y \in R$ için $I_{d(y)} = 0$ olması durumunu inceleyelim. Bu,

her $x \in R$ için $I_{d(y)}(x) = 0$ olması demektir. Yani, $[d(y), x] = 0$ dır. Bu ise, $[d(y), R] = 0$ demektir. Yani, $d(y) \in Z$ dir. Bu işlemler her $y \in R$ için yapılabileceğinden $d(R) \subseteq Z$ dir. Bu durumda, her $x, y \in R$ için $d(x), d(y) \in Z$ ve $[x, d(xy)] = 0$ olur. Bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde

$$0 = [x, d(xy)] = [x, d(x)y + xd(y)] = [x, d(x)y] + [x, xd(y)]$$

$$= d(x)[x, y] + [x, d(x)]y + [x, x]d(y) + x[x, d(y)]$$

$$= d(x)[x, y] + [x, d(x)]y + x[x, d(y)]$$

bulunur. $d(x), d(y) \in Z$ olduğu için $[x, d(x)]y = x[x, d(y)] = 0$ dır. Böylece, her $x, y \in R$ için $d(x)[x, y] = 0$ olur. $t \in R$ olmak üzere bu ifadeyi soldan t ile çarpar ve bulunan ifadeyi

$d(x) \in Z$ olmasını kullanarak düzenlersek $td(x)[x, y] = d(x)t[x, y] = 0$ bulunur. Bu işlem

her $t \in R$ için yapılabileceğinden, $d(x)R[x, y] = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $x, y \in R$ için

$d(x) = 0$ veya $[x, y] = 0$ olur. Bu durumda, $A = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ ve

$B = \{x \in R \mid [x, y] = 0, \forall y \in R\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. Böylece, Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir. R = A olması durumunda, her $x \in R$ için $d(x) = 0$ dır. Yani, $d = 0$ dır. Bu, $d \neq 0$ olması ile çelişir. O halde, R = B dir. Bu durumda, her $x, y \in R$ için $[x, y] = 0$ dır. Yani, her $x \in R$ için $[x, R] = 0$ dır. Bu ise, her $x \in R$ için $x \in Z$ olması demektir. Böylece, R halkası değişmeli olur.

Bresar M., 1993.

Lemma 3.3.6. R değişmeli olmayan bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. d, R halkasının bir türevi olmak üzere $d : U \to Z(R)$ tanımlı bir dönüşüm ise $d = 0$ dır.

İspat: Hipotezden her $u, v \in U$ için $d(u), d(v) \in Z$ dir. U, R halkasının sol ideali olduğu için $vu \in U$ dır. Böylece, hipotezden, $d(vu) \in Z$ dir. Bu durumda, $[d(vu), u] = 0$ olur. Bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlersek

$$0 = [d(vu), u] = [d(v)u + vd(u), u] = [d(v)u, u] + [vd(u), u]$$

$$= d(v)[u, u] + [d(v), u]u + v[d(u), u] + [v, u]d(u) = [v, u]d(u)$$

bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi sağdan $k \in R$ ile çarpar ve $d(u) \in Z$ olmasını kullanarak düzenlersek

$$[v,u]kd(u) = 0, \ \forall k \in R, \ \forall u, v \in U$$

elde edilir. Bu ise, $[v, u]Rd(u) = 0$ demektir. Uyarı 2.23 den, her $u, v \in U$ için, $[v, u] = 0$ veya $d(u) = 0$ olur. $A = \{u \in U \mid [v, u] = 0, \ \forall v \in U\}$ ve $B = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$, U sol idealinin alt gruplarıdır ve $U = A \cup B$ olarak yazılır. Böylece, Teorem 2.6 dan, U = A veya U = B dir. Kabul edelim ki, U = A olsun. Bu, her $u, v \in U$ için $[v, u] = 0$ olması demektir. Yani, her $v \in U$ için $[v, U] = 0$ dır. $I_{v0} : R \to R$, $x \to [v_0, x]$ olarak tanımlanan iç türev olmak üzere son ifadeyi düzenlediğimizde $I_{v0}(U) = 0$ olur. Lemma 2.30 dan, $I_{v0} = 0$ dır. Bu ise, her $x \in R$ için $I_{v0}(x) = 0$ demektir. Böylece, her $x \in R$ için $[v_0, x] = 0$ olduğundan $v_0 \in Z$ dir. Bu da, U sol ideali değişmeli demektir. Bu durumda, Lemma 2.31 den, R halkası da değişmelidir. Oysaki, kabulümüzde R değişmeli olmayan bir halka idi. O halde, U = A olamaz. Yani, U = B dir. Bu, her $u \in U$ için $d(u) = 0$ olması demektir. Bu durumda, Lemma 2.30 dan, $d = 0$ olduğu bulunur.

Bell H. E. ve Martindale W. S., 1987.

Lemma 3.3.7. R yarı asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. d, R nin türevi olmak üzere U üzerinde centralizing ise U üzerinde commuting dir.

İspat: Hipotezden, her $x \in U$ için $[x^2, d(x^2)] \in Z$ dir. Türev tanımı yardımıyla bu ifadeyi düzenlediğimizde $[x^2, d(x^2)] = [x^2, d(x)x + xd(x)] \in Z$ bulunur.

$2xd(x) - [x, d(x)] = xd(x) + d(x)x$ olmasını yukarıdaki ifadede kullanırsak

$[x^2, d(x)x + xd(x)] = [x^2, 2xd(x) - [x, d(x)]] \in Z$ elde edilir. Hipotezde, $[x, d(x)] \in Z$ olduğu için $[x^2, 2xd(x)] \in Z$ olduğu bulunur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$[x^2, 2xd(x)] = 2[x^2, xd(x)] = 2x[x^2, d(x)] + 2[x^2, x]d(x) \in Z$ olur.

$[x^2, x] = [xx, x] = x[x, x] + [x, x]x = 0$ olmasını yukarıdaki ifadede kullanırsak

$2x[x^2, d(x)] \in Z$ elde edilir. Bu ifadeyi düzenlersek

$$2x[x^2, d(x)] = 2xx[x, d(x)] + 2x[x, d(x)]x = 2x^2[x, d(x)] + 2x[x, d(x)]x \in Z$$

bulunur. Hipotezden, $[x, d(x)] \in Z$ olmasını yukarıdaki ifadede kullanırsak $4x^2[x, d(x)] \in Z$ olur. Bu durumda, $4[x^2[x, d(x)], d(x)] = 0$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$4[x^2[x, d(x)], d(x)] = 4x^2[[x, d(x)], d(x)] + 4[x^2, d(x)][x, d(x)] = 0$ bulunur. Hipotezde

$[x, d(x)] \in Z$ olduğu için $[[x, d(x)], d(x)] = 0$ dır. Böylece, $4[x^2, d(x)][x, d(x)] = 0$ olduğu elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadeyi düzenlersek

$$\begin{aligned} 0 &= 4[x^2, d(x)][x, d(x)] = 4[xx, d(x)][x, d(x)] = (4x[x, d(x)] + 4[x, d(x)]x)[x, d(x)] \\ &= 4x[x, d(x)][x,d(x)] + 4[x, d(x)]x[x, d(x)] \end{aligned}$$

olur. Hipotezde $[x, d(x)] \in Z$ olduğu için yukarıdaki ifadeden $8x[x, d(x)]^2 = 0$ olduğu bulunur. $8[x, d(x)]^3$ ifadesini düzenlersek

$$\begin{aligned} 8[x, d(x)]^3 &= 8[x, d(x)]([x, d(x)])^2 = 8(xd(x) - d(x)x)([x, d(x)])^2 \\ &= 8xd(x)([x, d(x)])^2 - 8d(x)x([x, d(x)])^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $[x, d(x)] \in Z$ olduğu için $([x, d(x)])^2 \in Z$ olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde

$$8xd(x)([x, d(x)])^2 - 8d(x)x([x, d(x)])^2 = 8xd(x)([x, d(x)])^2 - d(x)8x([x, d(x)])^2 = 0$$

olduğu bulunur. Bu durumda, $8[x, d(x)]^3 = 0$ olur. Bu ise, her $x \in U$ için $(2[x, d(x)])^3 = 0$ demektir. $2[x, d(x)] \in Z$ olduğundan, Lemma 2.29 dan

$$2[x, d(x)] = 0, \forall x \in U \tag{3.13}$$

olur. $[x^2, d(x)]$ ifadesini düzenlersek $[x^2, d(x)] = x[x, d(x)] + [x, d(x)]x$ olur. $[x, d(x)] \in Z$ olduğu için $[x^2, d(x)] = 2x[x, d(x)] = x2[x, d(x)] = 0$ olduğu bulunur. Yani,

$$[x^2, d(x)] = 0, \forall x \in U \tag{3.14}$$

dır. (3.13) nolu özdeşlikte, $y \in U$ olmak üzere, x yerine $x + y$ yazarsak

$2[x + y, d(x + y)] = 0$ bulunur. Bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlersek

$$0 = 2[x + y ,d(x + y)] = 2[x + y, d(x) + d(y)]$$

$$= 2[x, d(x)] + 2[x, d(y)] + 2[y, d(x)] + 2[y, d(y)]$$

elde edilir. (3.13) nolu özdeşlik yardımıyla bu ifadeyi düzenlediğimizde

$2([x, d(y)] + [y, d(x)]) = 0$ olduğu bulunur. Benzer şekilde, hipotezde, x yerine $x + y$ yazarsak $[x + y, d(x) + d(y)] \in Z$ olur. Bu ifadeyi de türev yardımıyla düzenlersek

$[x + y, d(x + y)] = [x + y, d(x) + d(y)] = [x, d(x)] + [x, d(y)] + [y, d(x)] + [y,d(y)] \in Z$ olur. Hipotez yardımıyla bu ifadeyi düzenlediğimizde $[x, d(y)] + [y, d(x)] \in Z$ bulunur. Elde etmiş olduğumuz bu bilgiler, hipotez ve (3.13) nolu özdeşlik yardımıyla

$[xy + yx, d(x)] + [x^2, d(y)]$ ifadesini düzenlediğimizde

$$[xy + yx, d(x)] + [x^2, d(y)] = [xy, d(x)] + [yx, d(x)] + [x^2, d(y)]$$

$$= x[y, d(x)] + [x, d(x)]y + y[x, d(x)] + [y, d(x)]x + x[x, d(y)] + [x, d(y)]x$$

$$= x([y, d(x)] + [x, d(y)]) + [x, d(x)]y + y[x, d(x)] + ([y, d(x)] + [x, d(y)])x$$

$$= 2x([y, d(x)] + [x, d(y)]) + 2y[x, d(x)]$$

$$= x2([y, d(x)] + [x, d(y)]) + y2[x, d(x)] = 0$$

bulunur. Yani,

$$[xy + yx, d(x)] + [x^2, d(y)] = 0, \forall x, y \in U \tag{3.15}$$

dir. (3.15) nolu özdeşlikte y yerine yx yazar ve düzenlersek

$$0 = [xyx + yxx, d(x)] + [x^2, d(yx)] = [xyx, d(x)] + [yxx, d(x)] + [x^2, d(y)x + yd(x)]$$

$$= xy[x, d(x)] + [xy, d(x)]x + yx[x, d(x)] + [yx, d(x)]x + [x^2, d(y)x] + [x^2, yd(x)]$$

$$= (xy + yx)[x, d(x)] + [xy + yx, d(x)]x + d(y)[x^2, x] + [x^2, d(y)]x + y[x^2, d(x)]$$

$$+ [x^2, y]d(x)$$

$$= (xy + yx)[x, d(x)] + ([xy + yx, d(x)] + [x^2, d(y)])x + y[x^2, d(x)] + [x^2, y]d(x)$$

bulunur. (3.14) ve (3.15) nolu özdeşlikleri kullandığımızda, her $x, y \in U$ için

$(xy + yx)[x, d(x)] + [x^2, y]d(x) = 0$ olur. $xy + yx = [x, y] + 2xy$ olmasını yukarıdaki ifadede kullanırsak $([x, y] + 2xy)[x, d(x)] + [x^2, y]d(x) = 0$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek,

$[x, y][x, d(x)] + 2xy[x, d(x)] + [x^2, y]d(x) = 0$ bulunur. $2xy[x, d(x)] = xy2[x, d(x)]$ ifadesi (3.13) nolu özdeşlikten dolayı sıfırdır. O halde, $[x, y][x, d(x)] + [x^2, y]d(x) = 0$ dır. Bu ifadede, y yerine $d(x)x$ yazarsak $[x, d(x)x][x, d(x)] + [x^2, d(x)x]d(x) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$0 = [x, d(x)x][x, d(x)] + [x^2, d(x)x]d(x)$$

$$= d(x)[x, x][x, d(x)] + [x, d(x)]x[x, d(x)] + d(x)[x^2, x]d(x) + [x^2, d(x)]xd(x)$$

$$= [x, d(x)]x[x, d(x)] + [x^2, d(x)]xd(x)$$

elde edilir. (3.14) nolu özdeşliği kullandığımızda, $[x, d(x)]x[x, d(x)] = 0$ olur. $[x, d(x)] \in Z$ olduğu için $x([x, d(x)])^2 = 0$ dır. $([x, d(x)])^3$ ifadesini inceleyecek olursak

$$([x, d(x)])^3 = [x, d(x)]([x, d(x)])^2 = (xd(x) - d(x)x)([x, d(x)])^2$$

$$= xd(x)([x, d(x)])^2 - d(x)x([x, d(x)])^2$$

olur. $x([x, d(x)])^2 = 0$ olmasını kullandığımızda, $([x, d(x)])^3 = xd(x)([x, d(x)])^2$ olur.

$[x, d(x)] \in Z$ olduğu için $[x, d(x)]^2 \in Z$ dir. Bu nedenle,

$xd(x)([x, d(x)])^2 = x([x, d(x)])^2d(x) = 0$ olur. Böylece, $([x, d(x)])^3 = 0$ olur. $[x, d(x)] \in Z$ olduğundan, Lemma 2.29 dan, her $x \in U$ için $[x, d(x)] = 0$ olur. Bu ise, d nin U üzerinde commuting dönüşüm olması anlamına gelir.

Bresar M., 1993.

Teorem 3.3.8. R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali, d ve g, R halkasının türevleri ve her $u \in U$ için $d(u)u - ug(u) \in Z$ olsun. $d \neq 0$ olması durumunda, R halkası değişmelidir.

İspat: Farz edelim ki, R değişmeli olmayan bir asal halka olsun. Bu durumda $d = 0$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Hipotezden, her $u \in U$ için $d(u)u - ug(u) \in Z$ dir. $v \in U$ olmak üzere, u yerine $u + v$ yazarsak $d(u + v)(u + v) - (u + v)g(u + v) \in Z$ bulunur. Türev tanımı ve kabulümüzü kullanarak bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$d(u)v + d(v)u - ug(v) - vg(u) \in Z, \ \forall u, v \in U \tag{3.16}$$

elde edilir. Kabul edelim ki, $0 \neq c \in Z \cap U$ olacak biçimde bir eleman var olsun. (3.16) nolu ifadede v yerine c yazarsak $d(u)c + d(c)u - ug(c) - cg(u) \in Z$ bulunur. $c \in Z$ olduğundan dolayı her $u \in U$ için $uc = cu$ dır. g, R halkasının bir türevi olduğu için iyi tanımlıdır ve $g(uc) = g(cu)$ dır. Bu eşitliği türev tanımını ve $c \in Z$ olmasını kullanarak düzenlersek

her $u \in U$ için $g(c)u = ug(c)$ bulunur. Bu ise, $g(c) \in Z$ demektir ($c \in Z$ olması durumunda benzer şekilde $d(c) \in Z$ olur). Yukarıdaki ifadeyi $g(c)$, $d(c) \in Z$ olmasını kullanarak düzenlersek

$$c(d(u) - g(u)) + (d(c) - g(c))u \in Z, \ \forall u \in U \tag{3.17}$$

elde edilir. $c^2 = c.c \in RU \subset U$ olduğu için $c^2 \in U$ dır. $d(c^2)$ ve $g(c^2)$ ifadelerini düzenlersek $d(c^2) = d(cc) = d(c)c + cd(c) = 2d(c)c$ bulunur. $c \in Z$ ve $d(c) \in Z$ olduğu için $d(c^2) \in Z$ dir. Benzer şekilde, $g(c^2) \in Z$ olduğu bulunur. (3.16) nolu ifadede v yerine c^2 yazar ve düzenlersek

$$\begin{aligned} d(u)c^2 + d(c^2)u - ug(c^2) - c^2g(u) &= c^2(d(u) - g(u)) + (d(c^2) - g(c^2))u \\ &= c^2(d(u) - g(u)) + 2c(d(c) - g(c))u \in Z \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $c^2(d(u) - g(u)) + 2c(d(c) - g(c))u \in Z$ dır. (3.17) ifadesini soldan $c \in Z$ ile çarparsak $c^2(d(u) - g(u)) + c(d(c) - (c))u \in Z$ bulunur. Yukarıdaki iki ifadeden

$c(d(c) - g(c))u \in Z$ elde edilir. Bu ise, $c(d(c) - g(c))U \subset Z$ demektir. Lemma 2.32 den,

$c = 0$ veya $(d(c) - g(c))U \subset Z$ olur. $c \neq 0$ olarak seçildiği için $(d(c) - g(c))U \subset Z$ bulunur. Tekrar, Lemma 2.32 den, $d(c) - g(c) = 0$ veya $U \subseteq Z$ olur. $U \subseteq Z$ olması durumunda Lemma 2.31 den, R değişmeli halkadır. Bu ise, R halkasının değişmeli olmayan bir halka olması kabulü ile çelişir. O halde, $d(c) = g(c)$ dir. (3.17) nolu ifadede yukarıdaki eşitliği yazar ve düzenlersek $c(d(u) - g(u)) \in Z$ elde edilir. Lemma 2.32 den, $c = 0$ veya

$d(u) - g(u) \in Z$ olur. $c \neq 0$ olarak seçildiği için

$$d(u) - g(u) \in Z, \quad \forall\, u \in U$$

elde edilir. $F : U \to Z$, $u \to d(u) - g(u)$ olarak tanımlanan, R halkasının bir türevidir. Lemma 3.3.6 dan, $F = 0$ olur. Yani, $d = g$ dir. Bu eşitliği hipotezde kullanırsak her $u \in U$ için $[d(u), u] \in Z$ olur. Bu durumda, her $u \in U$ için $[d(u), u] = 0$ dır. O halde, $0 \neq c \in Z \cap U$ için

$$[d(u), u] = 0, \quad \forall\, u \in U$$

elde edilir. Şimdi de, $Z \cap U = \{0\}$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden her $u \in U$ için

$d(u)u - ug(u) \in Z$ dir. Her $r \in U$ için

$$[d(u)u - ug(u), r] = d(u)ur - ug(u)r - rd(u)u + rug(u) = 0$$

olur. Böylece, $rug(u) = ug(u)r + rd(u)u - d(u)ur$ bulunur. U, R halkasının bir sol ideali olduğu için $ug(u)r, rd(u)u, d(u)ur \in U$ dır. Yani,

$$rug(u) \in U, \quad \forall\, u, r \in U$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede, $w \in U$ olmak üzere, u yerine $u + w$ yazarsak

$r(u + w)g(u + w) = rug(u) + rug(w) + rwg(u) + rwg(w) \in U$ bulunur. Bu ise,

$$rug(w) + rwg(u) \in U, \quad \forall\, u, r, w \in U$$

demektir. Yukarıdaki ifadede w yerine ru yazarsak $rug(ru) + rrug(u) \in U$ olur. U, R halkasının sol ideali olduğu için $rrug(u) \in U$ dır. Böylece,

$$rug(ru) \in U, \ \forall\, u, r, w \in U$$

olduğu elde edilir. Farz edelim ki, $UU = 0$ olsun. U, R halkasının sol ideali olduğundan

$URU \subseteq UU = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, $U = 0$ olduğu bulunur. Bu, $U \neq 0$ olması ile çelişir. O halde, $UU \neq 0$ dır. Bu durumda, $Uu_0 \neq 0$ olacak biçimde bir $0 \neq u_0 \in U$ vardır. $Uu_0 = W$ olsun. W, R nin sol idealidir ve $w = ru_0 \in W$ dir. O halde,

$$wg(w) \in U, \ \forall\, w \in W$$

olur. $W \subset U$ olduğundan her $w \in W$ için $d(w)w - wg(w) \in Z$ dir. U, R nin sol ideali olduğu için $d(w)w \in U$ dur. O halde, $d(w)w - wg(w) \in U$ bulunur. Öte yandan, kabulden

$d(w)w - wg(w) \in Z$ dir. Böylece, $d(w)w - wg(w) \in Z \cap U = \{0\}$ dır. Yani,

$$d(w)w = wg(w), \ \forall\, w \in W \tag{3.18}$$

dir. Bu ifadede, $a \in W$ olmak üzere, w yerine $a + w$ yazarsak

$d(a + w)(a + w) = (a + w)g(a + w)$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi türev tanımını ve (3.18) numaralı özdeşliği kullanarak düzenlersek

$$d(a)w + d(w)a = ag(w) + wg(a), \forall\, w, a \in W \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.19) nolu ifadede w yerine wa yazarsak $d(a)wa + d(wa)a = ag(wa) + wag(a)$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi türev tanımı ve (3.19) nolu özdeşlik yardımıyla düzenlersek $d(a)wa + d(w)aa + wd(a)a = ag(w)a + awg(a) + wag(a)$ bulunur. Yukarıdaki özdeşlikte (3.18) nolu ifadeyi kullanırsak $(d(a)w + d(w)a - ag(w))a = awg(a)$ olur. (3.19) nolu özdeşliği kullandığımızda

$$wg(a)a = awg(a), \forall\, w,a \in W \tag{3.20}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz bu ifadede, $v \in W$ olmak üzere, w yerine vw yazarsak

$(vwg(a)a) = a(vw)g(a) = v(awg(a))$ bulunur. Bu durumda,

$$(av - va)wg(a) = 0, \ \forall\, w, a, v \in W$$

elde edilir. W, R halkasının sol ideali olduğu için $[a, v]RWg(a) \subseteq [a, v]Wg(a) = 0$ olur. Buradan

$$[a, v]RWg(a) = 0, \ \forall\, a, v \in W$$

olduğu bulunur. Yukarıdaki ifadede, Uyarı 2.23 den, her $a \in W$ için $[a, W] = 0$ veya $Wg(a) = 0$ olur. $A = \{a \in W \mid [a, v] = 0, \ \forall v \in W\}$ ve $B = \{a \in W \mid Wg(a) = 0\}$, W sol idealinin alt gruplarıdır ve $W = A \cup B$ olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, $W = A$ veya $W = B$ dir. Kabul edelim ki, $W = A$ olsun. Bu durumda, her $a, v \in W$ için $[a, v] = 0$ dır. Yani, $[a, W] = 0$ olur. $I_a : R \to R$, $x \to [a, x]$ olarak tanımlanan iç türev olmak üzere $I_a(W) = 0$ olur. Lemma 2.30 dan, $I_a = 0$ dır. Bu ise, her $x \in R$ için $I_a(x) = 0$ demektir. Her $x \in R$ için $[a, x] = 0$ olduğundan $a \in Z$ dir. O halde, her $a \in W$ için $a \in Z$ dir. Bu da, W sol idealinin değişmeli olması demektir. Bu durumda, Lemma 2.31 den, R halkası da değişmeli olur. Oysaki, R değişmeli olmayan bir halka olsun demiştik. O halde, $W = A$ olamaz. Yani, $W = B$ dir. Bu durumda,

$$Wg(a) = 0, \ \forall a \in W$$

olur. (3.18) nolu ifadede yukarıdaki özdeşlik kullanılırsa

$$d(a)a = 0 , \ \forall a \in W \tag{3.21}$$

elde edilir. Bu ifadede, $b \in W$ olmak üzere, a yerine $a + b$ yazar, oluşan ifadede türev tanımı ve (3.21) nolu özdeşliği kullanırsak

$$d(a)b + d(b)a = 0, \ \forall a, b \in W \tag{3.22}$$

bulunur. Bulmuş olduğumuz bu özdeşlikte b yerine $d(a)b$ yazarsak, $d(a)^2b + d^2(a)ba + d(a)d(b)a = 0$ olur. Bu ifadeyi (3.22) nolu özdeşlik yardımıyla düzenlendiğimizde

$$d^2(a)ba = 0, \ \forall a, b \in W$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede W, R halkasının sol ideali olması ve Uyarı 2.23 kullanılırsa her $a \in W$ için $d^2(a) = 0$ veya $Wa = 0$ olur. $A = \{a \in W \mid d^2(a) = 0\}$ ve $B = \{a \in W \mid Wa = 0\}$, W sol idealinin alt gruplarıdır ve $W = A \cup B$ olarak yazılır.

Teorem 2.6 dan, $W = A$ veya $W = B$ dir. $W = B$ olsun. Bu durumda, her $a \in W$ için $Wa = 0$ dır. Yani, $WW = 0$ olur.

W, R halkasının sol ideali olduğu için $WRW \subseteq WW = 0$ dır. Bu, $WRW = 0$ demektir. Uyarı 2.23 den, $W = 0$ olur. Bu durum, $W \neq 0$ olması ile çeliştiği için $W = B$ olamaz. O halde, $W = A$ dır. Yani,

$$d^2(a) = 0\ ,\ \forall\, a \in W \tag{3.23}$$

dır. (3.21) nolu özdeşlikte $d(a)a = 0$ olduğu için $d(d(a)a) = 0$ dır. Bu ifadeyi türev tanımını kullanarak düzenlersek $d(d(a)a) = d(d(a))a + d(a)d(a) = d^2(a)a + (d(a))^2 = 0$ olduğu bulunur. (3.23) nolu özdeşliği uyguladığımızda

$$(d(a))^2 = 0,\ \forall\, a \in W \tag{3.24}$$

elde edilir. Bulmuş olduğumuz bu ifadede, $b \in W$ olmak üzere, a yerine $a + b$ yazar ve türev tanımı yardımıyla düzenlersek

$$0 = (d(a + b))^2 = d(a + b)d(a + b) = (d(a) + d(b))(d(a) + d(b))$$

$$= (d(a))^2 + d(a)d(b) + d(b)d(a) + (d(b))^2$$

bulunur. (3.24) nolu özdeşlikten

$$d(a)d(b) + d(b)d(a) = 0,\ \forall\, a, b \in W \tag{3.25}$$

elde edilir. Son bulduğumuz özdeşlikte b yerine $d(a)b$ yazarsak

$d(a)d(d(a)b) + d(d(a)b)d(a) = 0$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde

$$d(a)d(d(a)b) + d(d(a)b)d(a) = d(a)d^2(a)b + d(a)d(a)d(b) + d^2(a)bd(a) + d(a)d(b)d(a) = 0$$

elde edilir. (3.23) nolu özdeşliği kullandığımızda $d(a)d(a)d(b) + d(a)d(b)d(a) = 0$ olur. (3.25) nolu özdeşlik yardımıyla bu ifadeyi düzenlediğimizde $2d(a)d(b)d(a) = 0$ bulunur.

Lemma 2.36 dan,

$$d(a)d(b)d(a) = 0,\ \forall\, a, b \in W \tag{3.26}$$

dir. (3.25) nolu özdeşlikte, $w \in W$ olmak üzere, a yerine $d(w)a$ yazarsak

$d(d(w)a)d(b) + d(b)d(d(w)a) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlersek

$$d(d(w)a)d(b) + d(b)d(d(w)a) = d^2(w)ad(b) + d(w)d(a)d(b) + d(b)d^2(w)a + d(b)d(w)d(a) = 0$$

elde edilir. (3.23) nolu özdeşlik kullanılırsa $d(w)d(a)d(b) + d(b)d(w)d(a) = 0$ olur.

Bulmuş olduğumuz bu özdeşliği sağdan b ile çarparsak $d(w)d(a)d(b)b + d(b)d(w)d(a)b = 0$ olur. (3.21) nolu özdeşliği kullanarak düzenlersek

$$d(b)d(w)d(a)b = 0, \quad \forall\, a, b, w \in W \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.26) nolu özdeşlikte b yerine wb yazarsak $d(a)d(wb)d(a) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi türev tanımını kullanarak düzenlersek $d(a)d(w)bd(a) + d(a)wd(b)d(a) = 0$ olur. Oluşan bu ifadeyi sağdan $d(w)b$ ile çarparsak

$$d(a)d(w)bd(a)d(w)b + d(a)wd(b)d(a)d(w)b = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeyi (3.27) nolu özdeşlik yardımıyla düzenlediğimizde,

her $a, w, b \in W$ için $(d(a)d(w)b)^2 = 0$ olduğu bulunur. Bu ise,

$$(d(a)d(w)W)^2 = 0, \quad \forall\, a, w \in W \tag{3.28}$$

demektir. Öte yandan, W, R halkasının bir sol ideali olduğu için boş kümeden farklıdır. Bu nedenle en az bir $x \in W$ vardır. Bu durumda $xd(a)d(w) \in Wd(a)d(w)$ olur. Bu ise, $Wd(a)d(w)$ boş kümeden farklı demektir. $x, y \in W$ olmak üzere $xd(a)d(w)$ ve

$yd(a)d(w) \in Wd(a)d(w)$ için $xd(a)d(w) - yd(a)d(w) = (x - y)d(a)d(w) \in Wd(a)d(w)$ dir. W, R halkasının sol ideali olduğu için $RW \subseteq W$ dır. Bu durumda, $RWd(a)d(w) \subseteq Wd(a)d(w)$

olur. Böylece, $Wd(a)d(w)$, R halkasının bir sol ideali olmuş olur. Üstelik, (3.28) nolu özdeşlik yardımıyla

$$(Wd(a)d(w))^3 = (Wd(a)d(w)Wd(a)d(w)Wd(a)d(w) = W(d(a)d(w)W)^2d(a)d(w) = 0$$

olduğu bulunur. O halde, $Wd(a)d(w)$ bir nilpotent sol idealdir. Uyarı 2.21 den, her nilpotent ideal bir nil ideal olduğu için, $Wd(a)d(w)$ bir sol nil idealdir. Lemma 2.27 den,

$$Wd(a)d(w) = 0, \quad \forall\, a, w \in W \tag{3.29}$$

olur. Yukarıdaki özdeşlikte, $b \in W$ olmak üzere, a yerine ab yazarsak $Wd(ab)d(w) = 0$ olur. Bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde $Wd(a)bd(w) + Wad(b)d(w) = 0$ bulunur. (3.29) nolu özdeşliği kullanırsak

$$Wd(a)bd(w) = 0, \quad \forall\, a, b, w \in W$$

elde edilir. Bu, $Wd(a)Wd(w) = 0$ demektir. W, R halkasının sol ideali olduğu için $Wd(a)RWd(w) \subseteq Wd(a)Wd(w) = 0$ olur. Bu ise, $Wd(a)RWd(w) = 0$ demektir. Uyarı 2.23 den, $Wd(a) = 0$ veya $Wd(w) = 0$ bulunur. Yani,

$$Wd(W) = 0 \tag{3.30}$$

dır. (3.22) nolu özdeşlikte b yerine ab yazarsak $d(a)ab + d(ab)a = 0$ bulunur. Bu ifadeyi türev tanımı yardımıyla düzenlersek $d(a)ab + d(a)ba + ad(b)a = 0$ olur. (3.21) nolu ifadeyi kullandığımızda $d(a)ba + ad(b)a = 0$ elde edilir. Elde edilen bu ifadeyi (3.30) nolu ifade yardımıyla düzenlediğimizde her $a, b \in W$ için $d(a)ba = 0$ olur. Bu ise, $d(a)Wa = 0$ demektir. W, R halkasının sol ideali olduğu için $d(a)RWa \subseteq d(a)Wa = 0$ dır. Bu, her $a \in W$ için $d(a)RWa = 0$ olması demektir. Uyarı 2.23 den, her $a \in W$ için $d(a) = 0$ veya $Wa = 0$ olur. $A = \{a \in W \mid d(a) = 0\}$ ve $B = \{a \in W \mid Wa = 0\}$, W sol idealinin alt gruplarıdır ve

$W = A \cup B$ olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, $W = A$ veya $W = B$ dir. Kabul edelim ki, $W = B$ olsun. Bu durumda, her $a \in W$ için $Wa = 0$ olur. Bu ise, $WW = 0$ demektir. W, R sol ideali olduğu için $WRW \subseteq WW = 0$ dır. Uyarı 2.23 den,

$W = 0$ bulunur. Bu, $W \neq 0$ olması ile çelişir. O halde, $W = B$ dir. Bu durumda her $a \in W$ için $d(a) = 0$ dır. Yani, $d(W) = 0$ olur. Lemma 2.30 dan, $d = 0$ olur. Bu, $d \neq 0$ olması ile

çelişir. O halde, çelişkilerin nedeni en baştaki kabuldür. Sonuç olarak, R halkası değişmelidir.

Sonuç 3.3.9. R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. R halkasının sıfırdan farklı bir türevinin U üzerinde centralizing veya skew-centralizing olması durumunda R değişmeli bir halkadır.

İspat: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve R halkasının U sol ideali üzerinde centralizing ise Teorem 3.3.8 de, $g = d$ olması durumunda R değişmeli bir halkadır. d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olduğu için $-d \neq 0$ dır ve R halkasının bir türevidir. Teorem 3.3.8 de, $g = -d$ olması durumunda d, U üzerinde skew-centralizing dir ve R değişmeli bir halka olur.

3.4. Asal Halkalarda Lie İdealler Üzerinde Türev ve Komütatiflik

Herstein I. N., 1969.

Teorem 3.4.1. R, sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve $2x = 0$ iken $x = 0$ olan bir halka olsun. U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali ve alt halkası olması durumunda $U \subset Z$ dir veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat : Kabul edelim ki, U değişmeli olmayan bir alt halka olsun. O zaman, $xy - yx \neq 0$ olacak biçimde $x, y \in U$ vardır. Bu durumda, $r \in R$ için $x(yr) - (yr)x \in U$ olur. Öte yandan, $x(yr) - (yr)x = (xy - yx)r + y(xr - rx) \in U$ dır. U, hem Lie idel hem de alt halka olduğu için $y(xr - rx) \in U$ dır. Böylece, her $r \in R$ için $(xy - yx)r \in U$ elde edilir. Bu ise,

$$(xy - yx)R \subset U \tag{3.31}$$

olması demektir. U, Lie ideal olduğundan her $r, s \in R$ için $((xy - yx)r)s - s((xy - yx)r) \in U$ olur. $R^2 \subset R$ olduğunda (3.31) nolu ifade yardımıyla $(xy - yx)R^2 \subset U$ olduğu bulunur. Böylece, $R(xy - yx)R \subset U$ elde edilir. Bu, R halkasının bir idealidir. Kabul edelim ki, $R(xy - yx)R = 0$ olsun. Bu durumda, $(R(xy - yx))^2 = (0)$ olur. Hipotezden, R halkasının sıfırdan faklı nilpotent ideali olmadığı için $R(xy - yx) = 0$ dır. Bu ise, $xy - yx = 0$ olması demektir. Bu, $xy - yx \neq 0$ olması ile çelişir. O halde, $R(xy - yx)R \neq (0)$ olur. Böylece, U değişmeli olmayan bir alt halka olması durumunda R halkasının sıfırdan farklı bir idelini kapsar. Şimdi de, kabul edelim ki, U değişmeli bir alt halka olsun. Bu durumda, her $a \in U$, $x, y \in R$ için $ax - xa \in U$ dır ve U değişmeli alt halka olduğundan $a(a(xy) - (xy)a) = (a(xy) - (xy)a)a$ olur. U değişmeli alt halka olduğundan $axay - axya = axya - xaya$ dir. Buradan, $ax(ay - ya) - xa(ay - ya) = (ax - xa)(ay - ya) = 0$ elde edilir. Elde ettiğimiz bu ifadede, y yerine x yazarsak $(ax - xa)R(ax - xa) = 0$ olur. Buradan, $R(ax - xa)^2 = 0$ elde edilir. R, halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali olmadığından her $x \in R$ için $ax - xa = 0$ elde edilir. Yani, her $a \in U$ için $a \in Z$ olur. O halde, $U \subset Z$ dir.

Herstein I. N., 1969.

Lemma 3.4.2. R, karakteristiği ikiden farklı bir yarı asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $[U, U] \subseteq Z$ ise $U \subseteq Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki, $[U, U] = 0$ olsun. U, Lie ideal olduğundan, $u \in U$ olmak üzere, her $x \in R$ için $ux - xu \in U$ dır. Bu durumda, $[u, ux - xu]$ ifadesini düzenlediğimizde

$$[u, ux - xu] = [u, ux] - [u, xu] = [u, u]x + u[u, x] - x[u, u] - [u, x]u$$

$$= u[u, x] - [u, x]u = [u, [u, x]]$$

bulunur. $[u, x] \in [U, U]$ olduğu için $[u, [u, x]] = 0$ dır. $I_u : R \to R$, $x \to [u, x]$ şeklinde tanımlı bir iç türev olmak üzere, son ifadeyi düzenlersek $I_u^2(R) = 0$ olur. Teorem 3.1.3 den, $I_u = 0$ dır. Yani, her $u \in U$ için $u \in Z$ dir. Böylece, $[U, U] = 0$ olması durumu için ispat biter. Şimi de, kabul edelim ki, $0 \neq [U, U] \subseteq Z$ olsun. Bu durumda, $s, t \in U$ olmak üzere,

$\alpha = st - ts \neq 0$ olan $\alpha \in Z$ vardır. $x \in R$ olmak koşulu ile $d(x) = xt - tx$ tanımlandığında $d(s) = \alpha$ olur. Bu bilgiler ve $d(t) = 0$ olması yardımıyla $d^2(x)$ ifadesini düzenlersek

$d^2(x) = d([x, t]) = [d(x), t] + [x, d(t)] = [[x, t], t]$ bulunur. U, Lie ideal olduğundan $[x, t] \in U$ dır. Böylece, $[[x, t], t] \in [U, U]$ olur. Kabulde, $[U, U] \subseteq Z$ olduğundan,

$$d^2(x) \in Z, \forall x \in R$$

olur. Yukarıdaki ifadede x yerine sx yazarsak $d^2(sx) \in Z$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$d^2(sx) = d(d(sx)) = d([sx, t]) = d(s[x, t] + [s, t]x)$$

$$= d(s)[x, t] + sd([x, t]) + d([s, t])x + [s, t]d(x)$$

$$= d(s)d(x) + sd^2(x) + d^2(s)x + d(s)d(x)$$

$$= sd^2(x) + d^2(s)x + 2d(s)d(x) \in Z$$

elde edilir. $d(s) = \alpha$ olduğundan $d^2(s) = d(\alpha) = [\alpha, t]$ olur. $\alpha \in Z$ olduğu için $d^2(s) = 0$ dır. O halde, yukarıdaki ifadeden $sd^2(x) + 2d(s)d(x) \in Z$ olduğu bulunur. $\beta = d^2(x) \in Z$ olsun dersek $s\beta + 2\alpha d(x) \in Z$ olur. Bu durumda, $[s\beta + 2\alpha d(x), s] = 0$ dır. $\alpha \in Z$ olması yardımıyla bu ifadeyi düzenlersek

$$[s\beta + 2\alpha d(x), s] = s[\beta, s] + [s, s]\beta + 2\alpha[d(x), s] = s[\beta, s] + 2\alpha[d(x), s] = 0$$

bulunur. $\beta \in Z$ olduğu için $s[\beta, s] = 0$ dır. Böylece, $2\alpha[d(x), s] = 0$ olduğu elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadede x yerine st yazarsak $2\alpha[d(st), s] = 0$ bulunur. Öte yandan,

$d(st) = d(s)t + sd(t)$ dir. $d(t) = 0$ olmasını kullandığımızda $d(st) = d(s)t = \alpha t$ olur. Bu durumda, $2\alpha[s, d(st)] = 2\alpha[s, \alpha t] = 2\alpha^2[s, t] + 2\alpha[s, \alpha]t = 0$ dır. $\alpha \in Z$ olduğu için

$2\alpha^2[s, t] = 0$ olur. Son olarak $[s, t] = d(s) = \alpha$ olmasını kullandığımızda $2\alpha^3 = 0$ elde edilir. Lemma 2.36 dan, $\alpha^3 = 0$ dır. $\alpha \in Z$ dir ve nilpotent elemandır. Lemma 2.29 dan, $\alpha = 0$ olur. Bu ise, $\alpha \neq 0$ olması ile çelişir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Bergen J., Herstein I. N. ve Kerr J. W., 1981.

Lemma 3.4.3. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve $U \not\subset Z$ olan U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $[M, R] \subset U$ olacak biçimde bir M ideali var ise $[M, R] \not\subset Z$ dir.

İspat: $T(U) = \{x \in R \mid [x, R] \subset U\}$ kümesi, R halkasının bir Lie ideali ve alt halkasıdır. Öncelikle bu durumları inceleyelim. Her $u \in U$ için $[u, R] \subset U$ olduğundan $(0) \neq U \subset T(U)$ olur. Her a, $b \in T(U)$, $r \in R$ için $[a+b, r] = [a, r] + [b, r] \in U$ dır. Bu ise,

$a + b \in T(U)$ demektir. Öte yandan, T(U) kümesinin tanımından $[T(U), R] \subset U$ dır. U, Lie ideal olduğu için $[T(U), R] \subset U \subset T(U)$ olur. Böylece, $[T(U), R] \subset T(U)$ elde edilir.

O halde, T(U), R halkasının bir Lie idealidir. Ayrıca, her a, $b \in T(U)$, $r \in R$ için

$$[a, br] + [b, ra] = [a, b]r + b[a, r] + r[b, a] + [b, r]a$$

$$= abr - bar + bar - bra + rba - rab + bra - rba$$

$$= abr - rab = [ab, r]$$

dır. Böylece, $[ab, r] \in U$ olduğundan $ab \in T(U)$ olur. O halde, T(U), R halkasının bir alt halkasıdır. Teorem 3.4.1 den, $T(U) \subset Z$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir M idealini kapsar. İlk olarak, kabul edelim ki, $T(U) \subset Z$ olsun. Bu durumda, $U \subset T(U) \subset Z$ olduğundan $U \subset Z$ dir. Bu ise, $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde, T(U), R halkasının sıfırdan farklı bir M idealini kapsar. Yani, $M \subset T(U)$ olur. Böylece, T(U) kümesinin tanımından $[M, R] \subset U$ elde edilir. Kabul edelim ki, $[M, R] \subset Z$ olsun. Bu durumda, her x, $y \in R$, $m \in M$ için $[m,xy]=[m,x]y+x[m,y]\in Z$ olur. O halde, $a \in R$ olmak üzere, [[m, x]y + x[m, y], a] = 0 dır. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$0 = \left[[m,x]y+x[m,y],a\right]=\left[[m,x]y,a\right]+\left[x[m,y],a\right]$$

$$= [m,x][y,a]+\left[[m,x],a\right]y+x\left[[m,y],a\right]+[x,a][m,y]$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede $[M,R]\subset Z$ olmasını kullandığımızda

$$[m,x][y,a]+[x,a][m,y]=0,\ \forall x,y\in R,\forall m\in M \tag{3.32}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede, y yerine x yazar ve kabulü kullanırsak $2[m,x][x,a]=0$ bulunur. Lemma 2.36 dan, $[m,x][x,a]=0$ olur. Kabul yardımıyla bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$[m,x]R[x,a]=0,\ \forall m\in M,\ \forall\ a,x\in R$$

elde edilir. Uyarı 2.23 den, her m ∈ M, a, x ∈ R için $[m,x]=0$ veya $[x,a]=0$ bulunur. Bu ise, [m, x] = 0 veya x ∈ Z demektir. $x\in Z$ olması durumunda $[m,x]=0$ olduğundan

her $m\in M$, $x\in R$ için $[m,x]=0$ elde edilir. Bu ise, $M\subset Z$ demektir. Bu da, Lemma 2.31 den, R halkasının değişmeli olması anlamına gelir. Bu durum, hipotezde, $U\not\subset Z$ olması ile çelişir. Çelişkinin nedeni kabuldür. O halde, $[M,R]\not\subset Z$ dir.

Lemma 3.4.4. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $U \not\subseteq Z$ ise $C_R(U) = Z$ dir.

İspat: Öncelikle, $C_R(U) = \{u\in U \mid [u, x] = 0, \forall\ x \in R\}$ kümesinin R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olmasını inceleyelim. U, sıfırdan farklı bir Lie ideal olduğu için $C_R(U)$ sıfırdan farklı olur. O halde, her a, $b\in C_R(U)$, $u\in U$ için

$[a+b,u]=[a,u]+[b,u]=0$ olduğundan $a + b\in C_R(U)$ olur. Öte yandan,

$[ab,u]=[a,u]b+a[b,u]=0$ olduğu için $ab\in C_R(U)$ dır. Böylece, $C_R(U)$, R halkasının bir alt halkası olur. Her $a\in C_R(U)$, $r\in R$, $u\in U$ için jacobi özdeşliğinden,

$\left[\left[a,r\right],u\right]+\left[\left[u,a\right],r\right]+\left[\left[r,u\right],a\right]=0$ olur. Her $a\in C_R(U)$ için $\left[\left[u,a\right],r\right]=0$ ve $\left[\left[r,u\right],a\right]=0$ olmasını kullandığımızda

$$\left[\left[a,r\right],u\right]=0,\forall r\in R,\forall u\in U,\forall a\in C_R(U)$$

olduğu elde edilir. Böylece, her $a\in C_R(U)$, $r\in R$ için $\left[a,r\right]\in C_R(U)$ olur. O halde, $C_R(U)$ aynı zamanda bir Lie ideal olur. Öte yandan, her $a\in Z$ için $\left[a,U\right]\subset\left[a,R\right]=(0)$ olur ve böylelikle $a\in C_R(U)$ olur. Bu ise, $Z\subset C_R(U)$ olması demektir. Eğer, $C_R(U)\not\subset Z$ ise

Lemma 3.4.3 den, $\left[M,R\right]\subset C_R(U)$ ve $\left[M,R\right]\not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının bir M ideali vardır. $C_R(U)$, R halkasının Lie ideali ve alt halkası olduğundan, Teorem 3.4.1 den,

$M\subset C_R(U)$ veya $C_R(U)\subset Z$ olur. Eğer, $M\subset C_R(U)$ ise $\left[M,U\right]=(0)$ olur. M, R halkasının

bir ideali olduğundan $[MR, U]\subset\left[M,U\right]=(0)$ dır. Bu ifadeyi düzenlediğimizde,

$M[R, U] + [M, U]R = (0)$ olduğu bulunur. $\left[M,U\right]=(0)$ olduğundan, $M[R, U] = 0$ olur. Bu durumda, $MR[R, U] = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $m \in M$, $r \in R$, $u \in U$ için $m = 0$ veya

$[r, u] = 0$ olur. M, sıfırdan farklı bir ideal olduğundan, her $r \in R$, $u \in U$ için $[r, u] = 0$ dır. Yani, $U\subset Z$ elde edilir. Bu ise, $U\not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde, $M\not\subset C_R(U)$ olur. Bu, $C_R(U)\subset Z$ demektir. Böylelikle, $C_R(U) = Z$ olduğu elde edilir.

Lemma 3.4.5. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $C_R([U, U]) = C_R(U)$ dır.

İspat: İlk olarak, $C_R(\left[U,U\right])\subset C_R(U)$ olması durumunu inceleyelim. Kabul edelim ki, $\left[U,U\right]\not\subset Z$ olsun. $\left[U,U\right]$, bir Lie ideal olduğu için Lemma 3.4.4 den, $C_R(\left[U,U\right]) = Z$ dir. Bu durumda, her $a\in C_R(\left[U,U\right])$ için $\left[a,U\right]\subset\left[a,R\right]=(0)$ olup $a\in C_R(U)$ olduğu elde edilir. Böylece, $C_R(\left[U,U\right])\subset C_R(U)$ olur. Aksine, $\left[U,U\right]\subset Z$ olursa, her $u\in U$, $x\in R$ için

$a=\left[u,\left[u,x\right]\right]\in\left[U,U\right]\subset Z$ olur ve $\left[u,\left[u,ux\right]\right]\in Z$ olduğu için

$$\left[u,\left[u,ux\right]\right]=\left[u,\left[u,u\right]x+u\left[u,x\right]\right]=u\left[u,\left[u,x\right]\right]=ua\in Z$$

bulunur. $a \in Z$ ve $ua \in Z$ olduğundan, Lemma 2.32 den, a = 0 veya her $u \in U$ için $u \in Z$ dir. Kabul edelim ki, a = 0 olsun. Bu durumda, $I_u : R \to R$ iç türev olmak üzere $I_u^2 = 0$ olur. Teorem 3.1.3 den, $I_u = 0$ bulunur. Böylece, her $u \in U$ için $u \in Z$ dir. Bu nedenle, [a, U] = 0 olur. Yani, $a \in C_R(U)$ dır. O halde, $C_R([U,U]) \subset C_R(U)$ elde edilir. Şimdi de,

$C_R(U) \subset C_R([U,U])$ olduğunu gösterelim. Her $a \in C_R(U)$ için $[a,u] = 0$ dır. $[U,U] \subset U$ olduğundan her $u \in [U,U]$ için de $[a,u] = 0$ olur. Böylece, $[a,[U,U]] = 0$ elde edilir. Bu ise, $a \in C_R([U,U])$ olması demektir. Buradan $C_R(U) \subset C_R([U,U])$ olduğu elde edilir. Böylece, $C_R(U) = C_R([U,U])$ olur.

Shuliang H., 2007.

Lemma 3.4.6. R bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere bir

$V = \{u \in U \mid d(u) \in U\}$ kümesi tanımlayalım. Bu durumda, $U \nsubseteq Z$ ise $V \nsubseteq Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki, $U \nsubseteq Z$ iken $V \subseteq Z$ olsun. Bu durumda, $[U, U] \subseteq U$ olduğu için $d([U, U]) \subseteq U$ dır. Öte yandan, tanımladığımız V kümesi için $[U, U] \subseteq V$ dir. Hipotezimizden, $V \subseteq Z$ olmasını kullanırsak $[U, U] \subseteq V \subseteq Z$ olur. Yani, $[U, U] \subseteq Z$ dir. Bu durumda, her $x \in R$ için $[x, [U, U]] = 0$ olur. Bu ise, $C_R([U, U]) = R$ olması demektir. Lemma 3.4.5 den, $C_R([U, U]) = C_R(U)$ dır. Lemma 3.4.4 den, $C_R([U, U]) = Z$ olur. O halde, R = Z dir. Bu ise, R değişmeli bir halka demektir. Bu durum, $U \nsubseteq Z$ olması ile çelişir. Çelişkinin nedeni kabuldür. Böylece, $V \nsubseteq Z$ olduğu bulunur.

Bergen J., Herstein I. N. ve Kerr J. W., 1981.

Lemma 3.4.7. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere $U \nsubseteq Z$ ise aUb = 0 olması durumunda a = 0 veya

b = 0 dır.

İspat: Lemma 3.4.3 den, $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ olan bir M ideali vardır. Bu durumda, $u \in U$, $m \in M$ ve $y \in R$ için $[mau, y] \in [M, R] \subset U$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek a[mau, y]b = a[ma, y]ub + ama[u, y]b = a(may – yma)ub + ama[u, y]b = 0 bulunur. aub = 0 ve a[u, y]b = 0 olmasını kullanarak bulmuş olduğumuz ifadeyi düzenlediğimizde,

her u ∈ U, m ∈ M ve y ∈ R için amayub = 0 olur. Bu ise, aMaRUb = 0 demektir.

Uyarı 2.23 den, aMa = 0 veya Ub = 0 olur. Kabul edelim ki, aMa = 0 olsun. Bu durumda, M, R halkasının bir ideali olduğu için aRMa ⊂ aMa = 0 olur. Yani, aRMa = 0 dır.

Uyarı 2.23 den, a = 0 veya Ma = 0 olur. Benzer işlemler tekrar yapıldığında M, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğu için a = 0 olduğu elde edilir. Böylece, ispat sonlanır. Şimdi de, kabul edelim ki, Ub = 0 olsun. Bu durumda, her x ∈ R, u ∈ U için

(ux – xu)b = 0 olur. ub = 0 olduğundan her x ∈ R, u ∈ U için uxb = 0 dır. Bu ise,

uRb = 0 demektir. Uyarı 2.23 den, her u ∈ U için u = 0 veya b = 0 olur. Yani, U = 0 veya

b = 0 dır. U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olduğundan b = 0 olur. Böylece, ispat biter.

Lemma 3.4.8. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere d(U) = 0 ise

U ⊆ Z dir.

İspat: a ∈ U, x ∈ R olmak üzere, hipotezden, d(a) = 0 ve d([a, x]) = 0 dır. Bu durumda, d([a, x]) = [d(a), x] + [a, d(x)] = 0 olur. d(a) = 0 olmasını kullandığımızda,

her x ∈ R için [a, d(x)] = 0 olur. Yani, her a ∈ U için [a, d(R)] = 0 dır. Teorem 3.3.1 den, her a ∈ U için a ∈ Z olur. Böylece, U ⊆ Z olduğu elde edilir.

Lemma 3.4.9. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere d(U) ⊆ Z ise

U ⊆ Z dir.

İspat: U ⊈ Z olması durumunda, Lemma 3.4.2 den, V = [U, U] ⊈ Z dir. a, b ∈ U olmak üzere d([a, b]) ifadesini düzenlersek d([a, b]) = [d(a), b] + [a, d(b)] bulunur. Bu durumda, hipotezimizi kullandığımızda her a, b ∈ U için d([a, b]) = 0 olur. Bu ise, d(V) = 0 demektir. Lemma 3.4.8 den, [U, U] ⊆ Z olur. Lemma 3.4.2 den de U ⊆ Z dir. Bu durum, kabul ile çelişir. Böylece, U ⊆ Z olur.

Lemma 3.4.10. R, karakteristiği sıfırdan farklı olan bir asal halka, $U \not\subset Z$ olan U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere td(U) = (0) ise t = 0 dır (veya d(U)t = 0 ise t = 0).

İspat: Her $x \in R$, $u \in U$ için $[u, xu] = (uxu - xuu) = (ux - xu)u = [u, x]u \in U$ dır. Hipotezden, her $x \in R$, $u \in U$ için

$$td([u,x]u) = td([u,x])u + t[u,x]d(u) = t[u,x]d(u) = 0$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede, $v \in U$, $y \in R$ olmak üzere, x yerine d(v)y yazar ve düzenlersek

$$t[u,d(v)y]d(u) = t[u,d(v)]yd(u) + td(v)[u,y]d(u) = t[u,d(v)]yd(u) = 0$$

bulunur. Bu durumda her u, $v \in U$ için $t[u,d(v)]Rd(u) = (0)$ olur. Uyarı 2.23 den,

her u, $v \in U$ için d(u) = 0 veya $t[u,d(v)] = 0$ bulunur. d(U) = 0 ise Lemma 3.4.8 den,

$U \subset Z$ olur. Bu, hipotezde $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde, her u, $v \in U$ için $t[u,d(v)] = 0$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$t[u,d(v)] = t(ud(v) - d(v)u) = tud(v)$$

bulunur. O halde, her $v \in U$ için tUd(v) = (0) olur. $U \not\subset Z$ olduğundan Lemma 3.4.7 den, her $v \in U$ için t = 0 veya d(v) = 0 olur. Kabul edelim ki, d(U) = 0 olsun. Bu durumda, Lemma 3.4.8 den, $U \subset Z$ bulunur. Bu, $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde, t = 0 dır.

Benzer şekilde, d(U)t = 0 ise her $u \in U$ ve her $x \in R$ için $u[u,x] \in U$ olduğundan

$d(u[u,x])t = 0$ olur. Bu durumda, $d(u[u,x])t = d(u)[u,x]t + ud([u,x])t = d(u)[u,x]t = 0$

dır. $y \in R$, $v \in U$ olmak üzere, x yerine yd(v) yazıp düzenleme yaparsak $d(u)y[u,d(v)]t = 0$ elde edilir. Bu ise, her u, $v \in U$ için d(u)R[u, d(v)]t = 0 olması demektir. Uyarı 2.23 den, d(U) = 0 veya $[u,d(v)]t = 0$ olur. d(U) = 0 ise Lemma 3.4.8 den, $U \subset Z$ bulunur. Bu,

$U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde, her u, $v \in U$ için $[u,d(v)]t = 0$ dır. Bu durumda, $[u,d(v)]t = ud(v)t - d(v)ut = -d(v)ut = 0$ elde edilir. Yani, her $v \in U$ için d(v)Ut = 0 olur.

Lemma 3.4.7 den, d(U) = 0 veya t = 0 bulunur. d(U) = 0 olması durumunda Lemma 3.4.8 den, $U \subset Z$ bulunur. Bu, $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. Böylece, t = 0 olur.

Teorem 3.4.11. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d^2(U) = (0)$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki, $U \not\subset Z$ olsun. Lemma 3.4.3 den, $[M,R] \subset U$ ve $[M,R] \not\subset Z$ olacak biçimde R halkasının bir M ideali vardır. $m \in [M,R] \subset M \cap U$ ve $u \in [U, U]$ olmak üzere $w = d(u) \in d([U,U]) \subset U$ dır ve $d(w) = d(d(u)) = d^2(u)$ dır. Hipotezden, d(w) = 0 olur. Bu durumda, $mw \in M$ için $[mw, y] \in [M,R] \subset U$ dır ve hipotezden $d^2([mw,y]) = 0$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$d^2([mw,y]) = \left[d^2(mw), y\right] + 2\left[d(mw), d(y)\right] + \left[mw, d^2(y)\right]$$

$$= \left[d^2(m)w + 2d(m)d(w) + md^2(w), y\right] + \left[d(m)w + md(w), y\right] + \left[mw, d^2(y)\right]$$

bulunur. $d^2(m) = d^2([w,y]) = d^2([m,y]) = d(w) = d^2(w) = 0$ olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde

$$2d(m)d([w,y]) = 0, \forall m \in M, \forall w \in U, \forall y \in R$$

elde edilir. Lemma 2.36 dan, $d(m)d([w,y]) = 0$ olur. Böylece, her $u \in [U,U]$, $x \in R$ için $d([M,R])d([d(u),x]) = 0$ olur. $[M,R] \not\subset Z$ olduğu için, Lemma 3.4.10 dan,

her $u \in [U,U]$ ve her $x \in R$ için $d([d(u),x]) = 0$ olur. Bu ise,

$d([d(u),x]) = \left[d^2(u), x\right] + \left[d(u), d(x)\right] = \left[d(u), d(x)\right] = 0$ olması demektir. Hipotezimizi kullanırsak, her $u \in [U,U]$ için $[d(u), d(R)] = (0)$ olur. Teorem 3.3.2 den, her $u \in [U,U]$ için $d(u) \in Z$ olur. Bu ise, $d([U,U]) \subset Z$ olması demektir. Bu durumda, Lemma 3.4.9 dan, $[U,U] \subset Z$ olur. Bu kez, Lemma 3.4.2 den, $U \subset Z$ elde edilir. Bu ise, kabulümüz ile çelişir. O halde, $U \subset Z$ dir.

Sonuç 3.4.12. R karakteristiği ikiden farklı yarı asal bir halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $a \in R$ için $\left[a, [a,U]\right] = 0$ ise $[a,U] = 0$ olur.

Teorem 3.4.13. R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının $U \not\subset Z$ olan bir Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ise $C_R(d(U)) = Z$ dir.

İspat: Öncelikle $C_R(d(U)) \subset Z$ olduğu gösterelim. Kabul edelim ki, $C_R(d(U)) \not\subset Z$ olsun. Bu durumda, $a \notin Z$ olacak biçimde bir $a \in C_R(d(U))$ vardır. $U \not\subset Z$ olduğu için

Lemma 3.4.2 den, $[U,U] \not\subset Z$ dir. $a \in C_R(d(U))$ olduğundan, her $x \in U$ için $[a, d(x)] = 0$

olur. Öte yandan, $d([U,U]) \subset U$ olduğundan her $u \in [U,U]$ için $[a, d^2(u)] = 0$ ve

$[U,U] \subset U$ olduğundan, her $u \in [U,U]$ için $[a, d(u)] = 0$ olur. Bu durumda, $d([a, d(u)]) = 0$ dır. Bu eşitliği düzenlersek $d([a,d(u)]) = [d(a),d(u)] + [a,d^2(u)] = [d(a),d(u)] = 0$ bulunur. Yani, $[d(a), d([U,U])] = (0)$ olur. O halde, a ve $d(a) \in C_R(d([U,U]))$ dır. Her $u \in [U,U]$ için $[a,u] \in [U,U]$ olduğundan $d([a,u]) \in d([U,U])$ dır. Böylece,

$d([a,u]) = [d(a),u] + [a,d(u)] = [d(a),u] \in d([U,U])$ dır. Bu, her $u \in [U,U]$ için

$[d(a),[d(a),u]] = 0$ demektir. Sonuç 3.4.12 den, $[d(a),[U,U]] = (0)$ olur. Bu,

$d(a) \in C_R([U,U])$ olması anlamına gelir. $[U,U] \not\subset Z$ olduğundan, Lemma 3.4.4 den,

$C_R([U,U]) = Z$ dir. O halde, $d(a) \in Z$ olur. Böylece, $a \in C_R(d(U))$ olması durumunda

$d(a) \in Z$ olduğu bulunur. $[a^2, d(u)]$ ifadesini düzenlediğimizde $[a^2, d(u)] = [a,d(u)]a + a[a,d(u)] = 0$ olduğu için $a^2 \in C_R(d(U))$ dır. O halde, $d(a^2) \in Z$ dir. Bu ifadeyi düzenlersek, $d(a^2) = ad(a) + d(a)a = 2ad(a) \in Z$ bulunur. Lemma 2.37 den,

$ad(a) \in Z$ olduğu elde edilir. $d(a) \in Z$ olduğunu kullanırsak, Lemma 2.32 den, $d(a) = 0$ veya $a \in Z$ olur. $a \notin Z$ olarak seçtiğimiz den, her $a \in C_R(d(U))$ için $d(a) = 0$ bulunur.

$W = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ olmak üzere, her $a \in C_R(d(U))$ için $d(a) = 0$ olduğundan $a \in W$ olur. Yani, $C_R(d(U)) \subset W$ dir. Öte yandan, her $a \in C_R(d(U))$, $u \in U$ için $d([a,u]) = [d(a),u] + [a,d(u)] = 0$ olduğundan $[a,u] \in W$ dir. Yani, $[a,U] \subset W$ olur. Lemma 3.4.3 den, $[M,R] \subset U$ ve $[M,R] \not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının bir M ideali vardır. $m \in [M,R]$ ve $u \in U$ olmak üzere $[ma,u] \in U$ olduğundan

$$\left[a, d([ma, u])\right] = \left[a, d(m[a, u] + [m, u]a)\right]$$

$$= \left[a, d(m)[a, u] + md([a, u])\right] + \left[a, d([m, u])a + [m, u]d(a)\right] = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede, $d([a,u])$ = d(a) = $[a, d(m)] = [a, d([m,u])] = 0$ olması kullanılırsa

$$d(m)\left[a,[a,u]\right] = 0, \ \forall m \in [M,R], \forall u \in U$$

bulunur. Yani, her $u \in U$ için $d([M,R])\left[a,[a,u]\right]$ = (0) olur. $[M,R] \not\subset Z$ ve $[M,R]$ bir Lie ideal olduğundan, Lemma 3.4.10 dan, her $u \in U$ için $\left[a,[a,u]\right] = 0$ elde edilir. O halde, Sonuç 3.4.12 den, her $u \in U$ için $[a,u]$ = 0 olur. Yani, $a \in C_R(U)$ olur. Lemma 3.4.4 den, $C_R(U)$ = Z dir ve böylece, $a \in Z$ olur. Bu ise, $a \notin Z$ olmasıyla çelişir. Çelişkinin nedeni başlangıçtaki kabuldür. O halde, $C_R(d(U)) \subset Z$ olur. $a \in Z$ olması durumunda ise her $u \in U$ için $[a, d(u)] = 0$ dır. Yani, $a \in C_R(d(U))$ olur. O halde, $Z \subset C_R(d(U))$ dir. Böylelikle, $C_R(d(U))$ = Z elde edilir.

Lee P. H. ve Lee T. K., 1983.

Lemma 3.4.14. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka,U, R halkasının bir Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $d(Z) \neq 0$ olmak üzere, $a \in R$ ve $[a, d(U)] \subseteq Z$ ise $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

İspat: $d(Z) \neq 0$ olduğu için $d(\alpha) \neq 0$ olacak biçimde bir $\alpha \in Z$ vardır. Bu durumda, her $x \in R$ için $[\alpha, x] = 0$ olur. Türev tanımın kullandığımızda

$$d([\alpha, x]) = [d(\alpha), x] + [\alpha, d(x)] = [d(\alpha), x]$$

olur. Bu ifade, her $x \in R$ için sağlandığından $d(\alpha) \in Z$ olduğu bulunur. U, bir Lie ideal olduğundan her $u \in U$, $x \in R$ için $\alpha[u, x] = [u, \alpha x] \in U$ olur. O halde, hipotezi kullanırsak

$[a, d(\alpha[u, x])] \in Z$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$[a, d(\alpha[u, x])] = [a, d(\alpha)[u, x] + \alpha d([u, x])]$$

$$= d(\alpha)\big[a,[u,x]\big] + [a,d(\alpha)][u,x] + \alpha([a,d([u,x])])$$

bulunur. Hipotezden, yukarıdaki ifadenin son terimi sıfırdır. Öte yandan, $d(\alpha)\in Z$ olduğu için de ikinci terim sıfır olur. Böylece,

$$d(\alpha)\big[a,[u,x]\big] = 0,\ \forall x\in R,\ u\in U$$

elde edilir. $d(\alpha)\in Z$ olduğu için, Lemma 2.32 den, $d(\alpha) = 0$ veya $\big[a,[u,x]\big]\in Z$ olur.

$d(\alpha)\neq 0$ olduğundan her $x\in R$, $u\in U$ için $\big[a,[u,x]\big]\in Z$ dir. Bu, $\big[a,[U,R]\big]\subset Z$ olması demektir. Bu durumda, $\big[a,\big[a,[U,R]\big]\big]= 0$ olur. $I_a : R\rightarrow R$, $x\rightarrow ax - xa$ olarak tanımlanan bir iç türev olmak üzere son eşitliği düzenlersek $I_a^2(\big[U,R\big]) = 0$ elde edilir. Teorem 3.4.8 den, $I_a = 0$ veya $\big[U,R\big]\subset Z$ olur. Bu ise, $a\in Z$ veya $\big[U,R\big]\subset Z$ olması demektir.

$\big[U,R\big]\subset Z$ olması durumunda $[U, [U, R]] = 0$ olur. Bu ise, $x \in U$ için $I_x^2(R) = 0$ demektir. Teorem 3.1.3 den, $I_x = 0$ olur. Yani, $x \in Z$ dir. Bu, her $x \in U$ için yapılabileceğinden $U\subset Z$ olduğu bulunur. O halde, $a\in Z$ veya $U\subset Z$ dir.

Teorem 3.4.15. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R halkasının bir Lie ideli ve d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $d^2(U)\subseteq Z$ ise $U\subseteq Z$ dir.

İspat: U, Lie ideal olduğu için $\big[U,U\big]\subset U$ kümesi de R halkasının bir Lie idealidir. Her $u, v\in U$ için $d([u, v]) = [d(u), v] + [u, d(v)]\in U$ olmasını kullanırsak $d^2([U, U]) \subset d(U)$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifade ve $d^2(U)\subset Z$ olması kullandığımızda, her $u, v\in U$ için

$$d^2(\big[u,v\big]) = \big[d^2(u),v\big] + 2\big[d(u),d(v)\big] + \big[u,d^2(v)\big] = 2[d(u), d(v)] \in Z$$

olur. Lemma 2.37 ve $d^2(U)\subseteq Z$ olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlersek her $u, v\in U$ için $\big[d(u),d(v)\big]\in Z$ olduğu bulunur. Yani,

$$[d(U), d(U)]\subset Z$$

dir. Kabul edelim ki, $d(Z) \neq 0$ olsun. Bu durumda, Lemma 3.4.14 den, her $d(u) \in d(U)$ için $d(u) \in Z$ veya $U \subset Z$ dir. Bu, $d(U) \subset Z$ veya $U \subset Z$ demektir. $d(U) \subset Z$ olması durumunda, Lemma 3.4.9 dan, $U \subset Z$ olduğu bulunur. Her iki durumda da $U \subset Z$ olur. Böylece,

$d(Z) \neq 0$ olması durumu için ispat biter. Şimdi de, kabul edelim ki, $d(Z) = 0$ olsun. Bu

durumda, $d^3(U) = d(d^2(U)) \subset d(Z) = 0$ olduğu görülür. Bu, $d^3(R) = 0$ demektir. $d^2(u) = 0$ olan bir $u \in U$ seçelim. O zaman, $u \in U$, her $v \in U$ için

$$u[u, d(v)] = u(ud(v)) - ud(v)u = [u, ud(v)] \in U$$

olur. O halde, hipotezden, $d([u, ud(v)]) \in Z$ dir. Bu ifadeyi kabul ve hipotez yardımıyla düzenlersek

$$d^2(u[u, d(v)]) = d^2(u)[u, d(v)] + 2d(u)d([u, d(v)] + ud^2([u, d(v)])$$

$$= 2d(u)([d(u), d(v)] + [u, d^2(v)]) +$$

$$u([d^2(u), d(v)] + 2[d(u), d^2(v)] + [u, d^3(v)])$$

$$= 2d(u)[d(u), d(v)] \in Z$$

bulunur. Böylece, Lemma 2.37 den, $d(u)[d(u), d(v)] \in Z$ olur. Burada, her $v \in U$ için $[d(u), d(v)] \in Z$ olması kullanılırsa, Lemma 2.32 den, her $v \in U$ için $d(u) \in Z$ veya $[d(u), d(v)] = 0$ bulunur. $d(u) \in Z$ olması durumunda $[d(u), d(v)] = 0$ sağlandığından

her $v \in U$ için $[d(u), d(v)] = 0$ olur. Bu durumda, $d(u) \in C_R(d(U))$ olur. Teorem 3.4.13 den, $C_R(d(U)) = Z$ dir. Böylece,

$$d^2(u) = 0 \Rightarrow d(u) \in Z \tag{3.33}$$

olur. Öte yandan, her $x \in R$ için

$d^2([u, d^2(x)]) = [d^2(u), d^2(x)] + 2[d(u), d^3(x)] + [u, d^4(x)]$ dır. $d^3 = 0$ olmasını kullanırsak yukarıdaki ifadenin ikinci ve son terimi sıfır olur. Hipotezden, $d^2(u) = 0$ olduğu için de ilk terim sıfırdır. Böylece, $d^2([u, d^2(R)]) = 0$ olduğu bulunur. U, Lie ideal olduğu için $[u, d^2(R)] \subset U$ dır. O halde, (3.33) nolu ifadeyi kullandığımızda,

$d([u, d^2(R)]) \subset Z$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$d([u, d^2(R)]) \subset [d(u), d^2(R)] + [u, d^3(R)] \subset Z$$

bulunur. Bu durumda, $d([u, d^2(R)]) \subset Z$ olur. Bu ifadeyi, $ud(x)$ için düzenlersek, her $x \in R$ için

$$\left[d(u), d^2(ud(x))\right] = \left[d(u), d^2(u)d(x) + 2d(u)d^2(x) + ud^3(x)\right]$$

$$= d^2(u)\left[d(u), d(x)\right] + 2d(u)\left[d(u), d^2(x)\right] \in Z$$

bulunur. Bu durumda,

$$d^2(u)\left[d(u), d(x)\right] + 2d(u)\left[d(u), d^2(x)\right] \in Z, \ \forall\, u \in U, \ \forall\, x \in R$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi $d(u)$ ile değişmeli yapar ve $d(u)$, $[d(u), d^2(x)] \in Z$ olmasını kullanarak düzenlersek

$$\left[d(u), d^2(u)\left[d(u), d(x)\right]\right] + \left[d(u), 2d(u)\left[d(u), d^2(x)\right]\right] = d^2(u)\left[d(u), \left[d(u), d(x)\right]\right]$$

bulunur. $d^2(u) = 0$ olduğundan, yukarıdaki ifade sıfıra eşittir. Lemma 2.23 den, her $x \in R$ için $d^2(u) = 0$ veya $\left[d(u), \left[d(u), d(x)\right]\right] = 0$ dır. (3.33) nolu ifadeden $d^2(u) = 0$ olması durumunda, $d(u) \in Z$ olduğundan her $u \in U$ için $\left[d(u), \left[d(u), d(x)\right]\right] = 0$ olur. O halde,

her $u \in U$, $x \in R$ için $\left[d(u), \left[d(u), d(x)\right]\right] = 0$ dır. Bu ifadede, x yerine $d(u)x$ yazar ve düzenlersek

$$\left[d(u), \left[d(u), d(d(u)x)\right]\right] = \left[d(u), \left[d(u), d^2(u)x\right]\right] + \left[d(u), \left[d(u), d(u)d(x)\right]\right]$$

$$= d^2(u)\left[d(u), \left[d(u), x\right]\right] = 0$$

bulunur. $d^2(u) = 0 \in Z$ olduğundan, Lemma 2.23 den, $d^2(u) = 0$ veya $[d(u), [d(u), x]] = 0$ olur. $d^2(u) = 0$ olması durumunda (3.33) nolu ifadeden $d(u) \in Z$ dir. Bu durumda,

$[d(u), [d(u), x]] = 0$ olur. O halde, her $u \in U$, $x \in R$ için $[d(u), [d(u), x]] = 0$ dır. $I_{d(u)} : R \to R$, $I_{d(u)}(x) = d(u)x - xd(u)$ şeklinde tanımlanan bir iç türev olmak üzere son ifadeyi düzenlediğimizde, $I^2_{d(u)}(x) = 0$ olur. Bu ise, Teorem 3.1.3 den, $I_{d(u)} = 0$ olması demektir. Bu durumda, her $u \in U$ için $d(u) \in Z$ olur. Yani, $d(U) \subset Z$ dir. O halde, Lemma 3.4.9 dan, $U \subset Z$ olur ve ispat biter.

Teorem 3.4.16. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, R halkasında sıfırdan farklı bir türev ve $a \in R$ olmak üzere $[a, d(U)] \subseteq Z$ ise $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

İspat: İlk olarak, kabul edelim ki, $d(Z) \neq 0$ olsun. Bu durumda, Lemma 3.4.14 den, $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ olur. Böylece, $d(Z) \neq 0$ durumu için ispat biter. Şimdi de, kabul edelim ki, $d(Z) = 0$ ve $U \not\subset Z$ olsun. Hipotezden, her $u \in U$ için

$$[a, d([a,u])] = [a,[d(a),u]] + [a,[a,d(u)]] = [a,[d(a),u]]$$

olur. $[a,[d(a),u]] \in Z$ ve $d(Z) = 0$ olması kullanıldığında

$$[d(a),[d(a),u]] \in Z, \forall u \in U$$

elde edilir. $I_{d(a)} : R \to R$, $I_{d(a)}(x) = d(a)x - xd(a)$ olacak biçimde tanımlanan bir iç türev olmak üzere yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde, $I^2_{d(a)}(U) \subset Z$ olur. Bu durumda,

Teorem 3.4.15 den, $I_{d(a)} = 0$ veya $U \subset Z$ olur. $U \not\subset Z$ olduğu için $d(a) \in Z$ dir. Öte yandan, hipotezden, her $u \in U$ için $[a, d([a^2,u])] \in Z$ dir. $d(a^2) = d(a)a + ad(a) = 2ad(a)$ olmasını kullanarak son ifadeyi düzenlersek

$$[a, d([a^2,u])] = [a,[d(a^2),u]] + [a,[a^2,d(u)]] = [a,[2ad(a),u]] = 2[a,[a,u]d(a)]$$

$$= 2[a,[a,u]]d(a) \in Z$$

bulunur. Lemma 2.37 den, her $u \in U$ için $[a,[a,u]]d(a) \in Z$ olur. $d(a) \in Z$ olmasını kullanırsak, Lemma 2.32 den, $d(a) = 0$ veya $[a, [a, u]] \in Z$ elde edilir. $I_a : R \to R$,

$I_a(x) = ax - xa$ şeklinde tanımlanan bir iç türev olmak üzere, son eşitliği düzenlersek $d(a) = 0$ veya $I^2_a(U) \subset Z$ olur. Kabul edelim ki, $I^2_a(U) \subset Z$ olsun. Bu durumda,

Teorem 3.4.15 den, $I_a = 0$ veya $U \subset Z$ olur. Bu ise, $a \in Z$ veya $U \subset Z$ demektir. $U \not\subset Z$ olduğu için $a \in Z$ olur. Bu durumda, ispat biter. Şimdi de, d(a) = 0 olması durumunu inceleyelim. d(a) = 0 olmasını kullanarak d([a, d(u)]) ifadesini düzenlersek $d([a, d(u)]) = [a, d^2(u)]$ olduğu görülür. V = $[U, U]$, R halkasının bir Lie idealidir ve her $v \in V$ için $d(v) \in U$ dır. Öte yandan, $[d(v), u], [d(v), au] \in U$ ve $[a, d([d(v), u])]$, $[a, d([d(v), au])] \in Z$ olmasını kullanarak $a[a, [d^2(v), u]]$ ifadesini düzenlersek $[d(v), au] \in U$ olduğundan, hipotezden, $[a, d([d(v), au])] \in Z$ dir. Bu ifadeyi düzenlersek

$$[a, d([d(v), au])] = [a, [d^2(v), au] + [d(v), d(au)]] = [a, a[d^2(v), u]] + [a, [d^2(v), a]u]$$

$$= a[a, [d^2(v), u]] + [a, [d^2(v), a]]u + [d^2(v), a][a, u]$$

bulunur. Bu durumda,

$$a[a, [d^2(v), u]] \in Z, \ \forall\, u \in U, \ \forall\, v \in V$$

elde edilir. Her $u \in U$, $v \in V$ için $[d(v), u] \in U$ olduğundan, hipotezden,

$[a, d([d(v), u])] = [a, [d^2(v), u]] \in Z$ olur. Yukarıdaki ifadede, bu eşitliği kullandığımızda $a \in Z$ veya $[a, [d^2(v), u]] = 0$ elde edilir. $a \in Z$ iken $[a, [d^2(v), u]] = 0$ dır. O halde,

her $u \in U$, $v \in V$ için $[a, [d^2(v), u]] = 0$ dır. $I_{d^2(v)} : R \to R$, $I_{d^2(v)}(x) = d^2(v)x - xd^2(v)$ olarak tanımlanan bir iç türev olmak üzere yukarıdaki eşitliği düzenlersek $[a, I_{d^2(v)}(U)] = 0$ elde edilir. Bu durumda, $a \in C_R(I_{d^2(v)}(U))$ olur. $U \not\subset Z$ olduğundan, Teorem 3.4.13 den, $C_R(I_{d^2(v)}(U)) = Z$ veya $I_{d^2(v)}(U) = 0$ dır. Böylece, $a \in Z$ veya $I_{d^2(v)}(U) = 0$ olur. $a \in Z$ olması durumunda ispat biter. O halde, kabul edelim ki, $I_{d^2(v)}(U) = 0$ olsun. Teorem 3.4.8 den,

$I_{d^2(v)} = 0$ veya $U \subset Z$ dir. $U \not\subset Z$ olduğunu kabul ettiğimiz için $I_{d^2(v)} = 0$ dır. Bu ise,

her $v \in V$ için $d^2(v) \in Z$ demektir. Yani, $d^2([U, U]) \subset Z$ dir. O halde, Teorem 3.4.15 den, $[U, U] \subset Z$ olur. Lemma 3.4.2 den de $U \subset Z$ dir. Oysaki, $U \not\subset Z$ olduğu kabul edilmişti. Çelişkinin nedeni kabuldür. O halde, $U \subset Z$ dir.

Teorem 3.4.17. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere $[d(U), d(U)] \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat: Hipotezden, her $x \in R$ için $\left[d(x), d(U)\right] \subset Z$ dir. Teorem 3.4.16 dan, her $x \in R$ için $d(x) \in Z$ veya $U \subset Z$ olur. $U \subset Z$ olması durumunda ispat biter. O halde, $d(U) \subset Z$ olmasını inceleyelim. Bu durumda, Lemma 3.4.9 dan, $U \subset Z$ olur ve ispat biter.

Teorem 3.4.18. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, δ R asal halkasının sıfırdan farklı iki türevi olmak üzere $d\delta(U) \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki, $U \not\subset Z$ olsun. Bu durumda, her $u \in U$, $v \in \left[U, U\right]$ için $d\delta(\left[u, \delta(v)\right]) \in Z$ dir.Hipotezi kullanarak bu ifadeyi düzenlersek, her $u \in U$, $v \in \left[U, U\right]$ için

$$d\delta(\left[u, \delta(v)\right]) = d(\left[\delta(u), \delta(v)\right] + \left[u, \delta^2(v)\right]) = \left[d(u), \delta^2(v)\right] \in Z$$

bulunur. Bu, $[d(U),\ \delta^2([U, U])] \in Z$ olması demektir. Teorem 3.4.16 dan, $\delta^2(\left[U, U\right]) \subset Z$ veya $U \subset Z$ olur. $U \not\subset Z$ olduğu için $\delta^2(\left[U, U\right]) \subset Z$ olur. Teorem 3.4.15 den, $\delta = 0$ veya $\left[U, U\right] \subset Z$ olur. $\delta \neq 0$ olduğu için, $\left[U, U\right] \subset Z$ dir. Bu durumda, Lemma 3.4.2 den, $U \subset Z$ olur. Bu, $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. Çelişkilerin nedeni kabuldür. Böylece, $U \subset Z$ olur.

Teorem 3.4.19. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere her $u \in U$ için $\left[u, d(u)\right] \in Z$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat: Hipotezde, $v \in U$ olmak üzere, u yerine u + v yazarsak $\left[u, d(v)\right] + \left[v, d(u)\right] \in Z$ bulunur. Bulmuş olduğumuz ifadede v yerine [u, v] yazarsak

$$\left[u, d(\left[u, v\right])\right] + \left[\left[u, v\right], d(u)\right] = \left[u, \left[d(u), v\right] + \left[u, d(v)\right]\right] + \left[\left[u, v\right], d(u)\right]$$

elde edilir. Jacobi özdeşliğinden,

$$\left[u, \left[u, d(v)\right]\right] \in Z,\ \forall\, u, v \in U \tag{3.34}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede, $v \in \left[U, U\right]$ olmak üzere, u yerine u + d(v) yazarsak

$$\left[u+d(v),\left[u+d(v),d(v)\right]\right] = \left[u,\left[u,d(v)\right]\right]+\left[d(v),\left[u,d(v)\right]\right] \in Z$$

olur. Yukarıdaki ifadede (3.34) nolu özdeşliği kullandığımızda

$$\left[d(v),\left[d(v),u\right]\right] \in Z\ , \ \forall\, u \in U,\ v \in \left[U,U\right]$$

olduğu görülür. $I_{d(v)} : R \to R$, $I_{d(v)}(x) = d(v)x - xd(v)$ olarak tanımlanan bir iç türev olmak üzere yukarıdaki ifadeyi düzenlersek, $I^2_{d(v)}(U) \subset Z$ olur. Bu durumda, Lemma 3.4.15 den, $I_{d(v)} = 0$ veya $U \subset Z$ olur. Bu ise, her $v \in \left[U,U\right]$ için $d(v) \in Z$ veya $U \subset Z$ demektir. $U \subset Z$ olması durumunda ispat biter. $d(\left[U,U\right]) \subset Z$ ise Lemma 3.4.9 dan, $\left[U,U\right] \subset Z$ olur. Bu durumda, Lemma 3.4.2 den, $U \subset Z$ dir.

BÖLÜM 4

HALKALARDA (σ, τ)-TÜREVLER

Bu bölümde, daha önce türevli halkalar için bulunmuş olan bazı sonuçların

(σ, τ)-türevli halkalar için ispatları incelenmiştir. Bunlara ek olarak, halka ve idealleri üzerinde komütatiflik ile ilgili sonuçlara yer verilişţir.

4.1. Asal Halkalar ve İdealleri Üzerinde (σ, τ)-Türevler

Aydın N. ve Kaya K., 1992.

Lemma 4.1.1. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi, U, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali ve d, R halkasının bir

(σ,τ)-türevi olmak üzere d(U) = 0 ise d = 0 dır.

İspat: U, R halkasının sağ ideali olduğu için her $a \in U$, $x \in R$ için $ax \in U$ dır. Hipotezimizden, $d(ax) = 0$ olur. (σ,τ)-türev tanımını kullanarak bu ifadeyi düzenlediğimizde $d(ax) = d(a)\sigma(x) + \tau(a)d(x) = 0$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede $d(a) = 0$ olmasını kullandığımızda her $a \in U$, $x \in R$ için $\tau(a)d(x) = 0$ olur. Bu ise,

$$\tau(U)d(R) = 0 \tag{4.1}$$

olması demektir. U, R halkasının bir sağ ideali olduğu için $U \neq \emptyset$ dir. Bu ise, bir $a_0 \in U$ var demektir. Bu durumda $\tau(a_0) \in \tau(U)$ olur. Yani, $\tau(U) \neq \emptyset$ dır. Öte yandan, a, b ∈ U için

$\tau(a), \tau(b) \in \tau(U)$ dır. Böylece, her $\tau(a), \tau(b) \in \tau(U)$ için $\tau(a) - \tau(b) = \tau(a - b) \in \tau(U)$ olur. Bu durumda, τ(U) kümesi '+' işlemine göre kapalı olduğu için (τ(U), +) değişmeli gruptur. Diğer taraftan da, U, R halkasının bir sağ ideali olduğu için $UR \subseteq U$ dur. $\tau : R \rightarrow R$ bir otomorfizm olduğu için $\tau(UR) \subseteq \tau(U)$ olur. τ, bir halka homomorfizması olduğu için işlemi korur ve $\tau(U)\tau(R) \subseteq \tau(U)$ olur. Son olarak, τ örten olduğu için $\tau(R) = R$ olması kullanılırsa

$\tau(U)R \subseteq \tau(U)$ olduğu bulunur. O halde, $\tau(U)$, R halkasının bir sağ idealidir. Kabul edelim ki, $\tau(U) = 0$ olsun. Bu durumda, her $x \in U$ için $\tau(x) = 0$ olur. τ, 1-1 olduğundan her $x \in U$

için $x = 0$ dır. Bu ise, $U = 0$ olması anlamına gelir. Bu durum, hipotezimizde, $U \neq 0$ olması ile çelişir. O halde, $\tau(U) \neq 0$ dır. Böylece, $\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olmuş olur. Bu durumda, $\tau(U)Rd(R) \subseteq \tau(U)d(R)$ dir. Bu ifadede (4.1) nolu özdeşliği kullanırsak $\tau(U)Rd(R) = 0$ olduğu bulunur. Uyarı 2.23 den, her $x \in U$, $r \in R$ için $\tau(x) = 0$ veya $d(r) = 0$ olur. Yani, $\tau(U) = 0$ veya $d(R) = 0$ dır. $\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olduğu için $d(R) = 0$ olur ki, bu $d = 0$ demektir.

Lemma 4.1.2. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi, d, R halkasının bir (σ,τ)-türevi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere $a \in R$ için $ad(U) = 0$ ($d(U)a = 0$) ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat: U, R halkasının bir ideali olduğundan, her $b \in U$, $x \in R$ için $bx \in U$ dır. O halde, $ad(bx) = 0$ dır. Bu ifadeyi (σ,τ)-türev tanımını kullanarak düzenlersek

$ad(bx) = a(d(b)\sigma(x) + \tau(b)d(x)) = ad(b)\sigma(x) + a\tau(b)d(x) = 0$ bulunur. Bu ifadede, hipotezden, $ad(b) = 0$ olmasını kullandığımızda her $b \in U$, $x \in R$ için $a\tau(b)d(x) = 0$ elde edilir. Yani, her $x \in R$ için $a\tau(U)d(x) = 0$ dır. Lemma 4.1.1 de, U sağ ideal iken $\tau(U)$ nun bir sağ ideal olduğu görüldü. Benzer şekilde, U sol ideal iken de $\tau(U)$ sol idealdir. O halde, U ideal iken $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için $a\tau(U)Rd(x) \subseteq a\tau(U)d(x) = 0$ olur. Bu ise, $a\tau(U)Rd(x) = 0$ olması demektir. Bu ifadede, Uyarı 2.23 kullanırsa, her $b \in U$, $x \in R$ için $a\tau(b) = 0$ veya $d(x) = 0$ olur. Bu ise, $a\tau(U) = 0$ veya $d = 0$ olması anlamına gelir. $d = 0$ olması durumunda ispat biter. Kabul edelim ki, $a\tau(U) = 0$ olsun. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için $aR\tau(U) \subseteq a\tau(U) = 0$ dır. Yani, $aR\tau(U) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $b \in U$ için $a = 0$ veya $\tau(b) = 0$ bulunur. Böylece, $a = 0$ veya $\tau(U) = 0$ olur. $\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğu için $a = 0$ dır.

Lemma 4.1.3. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi, d_1: R→R tanımlı bir (σ,τ)-türev ve d_2 : R→R tanımlı bir türev olmak üzere $d_1d_2(R) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki, $d_1 \neq 0$ olsun. Hipotezden, her $x, y \in R$ için $d_1d_2(xy) = 0$ olur. Bu ifadeyi (σ,τ)-türev ve türev tanımlarını kullanarak düzenlersek,

$$0 = d_1d_2(xy) = d_1(d_2(x)y + xd_2(y)) = d_1(d_2(x)y) + d_1(xd_2(y))$$

$$=d_1(d_2(x))\sigma(y) + \tau(d_2(x))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(y)) + \tau(x)d_1(d_2(y))$$

bulunur. Kabulümüzden dolayı, $d_1(d_2(x)) = d_1(d_2(y)) = 0$ olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde

$$\tau(d_2(x))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(y)) = 0,\ \forall\ x \in R \tag{4.2}$$

elde edilir. Bu ise,

$$\tau(d_2(x))d_1(y) = -d_1(x)\sigma(d_2(y)),\ \forall\ x, y \in R \tag{4.3}$$

olması demektir. (4.2) nolu ifadede x yerine $d_2(x)$ yazar ve kabulümüzü kullanarak düzenlersek, $\tau(d_2(d_2(x)))d_1(y) + d_1(d_2(x))\sigma(d_2(y)) = \tau(d_2(d_2(x)))d_1(y) = \tau(d_2^2(x))d_1(y) = 0$

bulunur. Yani, her x, y $\in R$ için $\tau(d_2^2(x))d_1(y) = 0$ olur. Bu ise, her x $\in R$ için $\tau(d_2^2(x))d_1(R) = 0$ olması demektir. Lemma 4.1.2 den, $d_1 \neq 0$ olduğundan dolayı her $x \in R$ için $\tau(d_2^2(x)) = 0$ elde edilir. Bu durumda, τ, 1-1 olduğundan her $x \in R$ için $d_2^2(x) = 0$ olur. Yani,

$$d_2^2(R) = 0 \tag{4.4}$$

dir. (4.2) nolu ifadede, $z \in R$ olmak üzere, x yerine $xd_2(z)$ yazar ve türev ve (σ,τ)-türev tanımlarını kullanırsak

$$0 = \tau(d_2(xd_2(z)))d_1(y) + d_1(xd_2(z))\sigma(d_2(y))$$

$$= \tau(d_2(x)d_2(z) + xd_2(d_2(z)))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) + \tau(x)d_1(d_2(z))\sigma(d_2(y))$$

$$= \tau(d_2(x))\tau(d_2(z))d_1(y) + \tau(x)\tau(d_2^2(z))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) +$$

$$\tau(x)d_1(d_2(z))\sigma(d_2(y))$$

bulunur. (4.3) ve (4.4) nolu ifadeler ve $d_1(d_2(z)) = 0$ olmasını kullanarak son ifadeyi düzenlediğimizde, her x, y, $z \in R$ için $-\tau(d_2(x))d_1(z)\sigma(d_2(y)) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 0$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi (4.3) nolu özdeşlik yardımıyla düzenlersek,

$$0 = d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y))$$

$$= 2\ d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y))$$

bulunur. Lemma 2.36 dan, her x, y, $z \in R$ için $d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 0$ olur. Yani, her $y, z \in R$ için $d_1(R)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 0$ dır. Lemma 4.1.2 den, $d_1 \neq 0$ olduğundan dolayı her $y, z \in R$ için $\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 0$ elde edilir. σ, otomorfizm olması kullanıldığında ise her $y, z \in R$ için $d_2(z)d_2(y) = 0$ olur. Yani, her $y, z \in R$ için $d_2(z)d_2(y) = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, $d_2(R)d_2(y) = 0$ olması demektir. Lemma 4.1.2 den, her $y \in R$ için $d_2 = 0$ veya

$d_2(y) = 0$ olur. Yani, $d_2 = 0$ dır. Böylece, $d_1 \neq 0$ olması durumunda $d_2 = 0$ olduğu bulunmuş olur.

Teorem 4.1.4. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi, d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve U, R halkasının bir ideali olmak üzere $a \in R$ için $[d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$ dir.

İspat: Hipotezden, her $x, y \in R$ için $[d(xy), a]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Bu ifadeyi (σ,τ)-türev tanımını kullanarak düzenlediğimizde

$$0 = (d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y))\sigma(a) - \tau(a)(d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y))$$

$$= d(x)\sigma(y)\sigma(a) + \tau(x)d(y)\sigma(a) - \tau(a)d(x)\sigma(y) + \tau(a)\tau(x)d(y)$$

$$= d(x)\sigma(ya) + \tau(x)d(y)\sigma(a) - \tau(a)d(x)\sigma(y) + \tau(ax)d(y)$$ bulunur. Böylece,

her $x, y \in R$ için

$$d(x)\sigma(ya) + \tau(x)d(y)\sigma(a) - \tau(a)d(x)\sigma(y) + \tau(ax)d(y) = 0 \qquad (4.5)$$

olduğu bulunur. Öte yandan, hipotezden, her $x \in U$ için

$[d(x), a]_{\sigma,\tau} = d(x)\sigma(a) - \tau(a)d(x) = 0$ olur. Bu ise, her $x \in R$ için $d(x)\sigma(a) = \tau(a)d(x)$ olması demektir. (4.5) nolu ifadeyi bulduğumuz ifade ve σ, τ nun halka homomorfizması olmalarını kullanarak düzenlersek,

$$0 = d(x)\sigma(ya) + \tau(x)\tau(a)d(y) - d(x)\sigma(ay) + \tau(ax)d(y)$$

$$= d(x)(\sigma(ya) - \sigma(ay)) + \tau(xa)d(y) - \tau(ax)d(y)$$

$$= d(x)(\sigma([y, a]) + \tau([x, a])d(y)$$

bulunur. Yani,

$$d(x)\sigma([y, a]) + \tau([x, a])d(y) = 0, \ \forall x, y \in R \qquad (4.6)$$

olur. Yukarıdaki ifadede y yerine ya yazar ve düzenlersek,

$$
\begin{aligned}
0 &= d(x)\sigma([ya, a]) + \tau([x, a])d(ya) \\
&= d(x)\sigma(y[a, a] + [y, a]a) + \tau([x, a])(d(y)\sigma(a) + \tau(y)d(a)) \\
&= d(x)\,\sigma([y, a]a) + \tau([x, a])d(y)\sigma(a) + \tau([x, a])\tau(y)d(a) \\
&= d(x)\sigma([y, a])\sigma(a) + \tau([x, a])d(y)\sigma(a) + \tau([x, a])\tau(y)d(a) \\
&= (d(x)\sigma([y, a]) + \tau([x, a])d(y))\sigma(a) + \tau([x, a])\tau(y)d(a)
\end{aligned}
$$

olur. Yukarıdaki ifadenin ilk terimi (4.6) nolu özdeşlikten sıfırdır. Böylece, her $x, y \in U$ için $\tau([x, a])\tau(y)d(a) = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, her $x, y \in U$ için $\tau([x, a])\tau(U)d(a) = 0$ olması demektir. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için

$\tau([x, a])\tau(U)Rd(a) \subseteq \tau([x, a])\tau(U)d(a) = 0$ dır. Bu durumda, her $x \in U$ için

$\tau([x, a])\tau(U)Rd(a) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $x, y \in U$ için $\tau([x, a])\tau(y) = 0$ veya $d(a) = 0$ olduğu elde edilir. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için $\tau([x,a])R\tau(y) \subseteq \tau([x,a])\tau(y) = 0$ dır. Bu durumda, her $x \in U$ için $\tau([x,a])R\tau(y) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $x, y \in U$ için $\tau([x, a]) = 0$ veya $\tau(y) = 0$ elde edilir. τ, 1-1 olduğundan, her $x \in U$ için $[x, a] = 0$ veya

$\tau(U) = 0$ veya $d(a) = 0$ olur. $\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğu için

her $x \in U$ için $[x, a] = 0$ veya $d(a) = 0$ dır. Bu ise, $[U, a] = 0$ veya $d(a) = 0$ olması demektir. İlk olarak, kabul edelim ki, $[U, a] = 0$ olsun. U, R halkasının bir ideali olduğu için $[UR, a] \subseteq [U, a] = 0$ dır. Bu, $[UR, a] = 0$ demektir. Bu eşitliği düzenlediğimizde,

her $x \in R$, $y \in U$ için $[yx, a] = y[x, a] + [y, a]x = 0$ olur. Kabulümüzü kullandığımızda,

her $x \in R$, $y \in U$ için $y[x, a] = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, her $x \in R$ için $U[x, a] = 0$ olması demektir. U, R halkasının bir ideali olduğu için $UR \subseteq U$ dır. Bu durumda,

$UR[x, a] \subseteq U[x, a] = 0$ olur. Yani, her $x \in R$ için $UR[x, a] = 0$ dır. O halde, her $t \in U$ için $tR[x, a] = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $x \in R$, $y \in U$ için $t = 0$ veya $[x, a] = 0$ olduğu bulunur. Bu durumda, $U = 0$ veya $[R, a] = 0$ dır. U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğu için $[R, a] = 0$ dır. Bu ise, $a \in Z$ olması demektir. Böylece, $[U, a] = 0$ olması durumunda $a \in Z$ olduğu bulunur. İlk durum için ispat bitmiş olur. Şimdi de, kabul edelim ki, $d(a) = 0$ olsun. Bu durumda, her $u \in U$ için

$$d([u, a]) = d(ua - au) = d(ua) - d(au) = d(u)\sigma(a) + \tau(u)d(a) - (d(a)\sigma(u) + \tau(a)d(u))$$

dır. Kabulümüzü kullanırsak $d([u, a]) = d(u)\sigma(a) - \tau(a)d(u) = [d(u), a]_{\sigma, \tau}$ olduğu bulunur. Bu ifadeyi hipotezimiz yardımıyla düzenlediğimizde, her $u \in U$ için $d([u, a]) = 0$ olur. Yani,

$$d([U, a]) = 0 \tag{4.7}$$

dır. (4.6) nolu ifadede, $w \in U$ olmak üzere, y yerine yw yazar ve düzenlersek

$$\begin{aligned} 0 &= d(x)\sigma([yw, a]) + \tau([x, a])d(yw) \\ &= d(x)\sigma(y[w, a] + [y, a]w) + \tau([x, a])(d(y)\sigma(w) + \tau(y)d(w)) \\ &= d(x)\sigma(y)\sigma([w, a]) + d(x)\sigma([y, a])\sigma(w) + \tau([x, a])d(y)\sigma(w) + \tau([x, a])\tau(y)d(w) \\ &= d(x)\sigma(y)\sigma([w, a]) + \tau([x, a])\tau(y)d(w) + \{d(x)\sigma([y, a]) + \tau([x, a])d(y)\}\sigma(w) \end{aligned}$$

olur. (4.6) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin son terimi sıfırdır. Bu durumda,

her $x, y, w \in U$ için $d(x)\sigma(y)\sigma([w, a]) + \tau([x, a])\tau(y)d(w) = 0$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede w yerine $[w, a]$ yazarsak $d(x)\sigma(y)\sigma([[w, a], a]) + \tau([x, a])\tau(y)d([w, a]) = 0$ olur. Bu ifadede (4.7) nolu özdeşlik kullanıldığında, her $x, y, w \in U$ için

$d(x)\sigma(y)\sigma([[w, a], a]) = 0$ elde edilir. Bu ise, her $y, w \in U$ için $d(U)\sigma(y)\sigma([[w, a], a]) = 0$ olması demektir. Bu ifadede Lemma 4.1.2 uygulanırsa, her $y, w \in U$ için

$\sigma(y)\sigma([[w, a], a]) = 0$ veya $d = 0$ olur. Hipotezde, $d \neq 0$ olduğundan her $y, w \in U$ için $\sigma(y)\sigma([[w,a],a]) = 0$ dır. Bu ise, her $w \in U$ için $\sigma(U)\sigma([[w, a], a]) = 0$ olması demektir. Lemma 4.1.1 de U, sağ ideal olduğu için $\sigma(U)$ nun sağ ideal olduğunu gördük. Benzer şekilde U, sol ideal iken $\sigma(U)$ sol idealdir. O halde, $\sigma(U)$, R halkasının bir idealidir. Bu nedenle, $\sigma(U)R\sigma([[w,a],a]) \subseteq \sigma(U)\sigma([[w,a],a]) = 0$ dır. Bu durumda,

$\sigma(U)R\sigma([[w, a], a]) = 0$ olur. O halde, her $k \in U$ için $\sigma(k)R\sigma([[w, a], a]) = 0$ dır.

Uyarı 2.23 den, her $k, w \in U$ için $\sigma(k) = 0$ veya $\sigma([[w, a], a]) = 0$ dır. Bu ise, her $w \in U$ için $\sigma(U) = 0$ veya $\sigma([[w, a], a]) = 0$ olması demektir. $\sigma(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan, her $w \in U$ için $\sigma([[w, a], a]) = 0$ dır. σ, 1-1 olduğundan her $w \in U$ için $[[w, a], a] = 0$ olduğu bulunur. $[[w, a], a] = [a, [a, w]]$ olması kullanıldığında, her $w \in U$

için [a, [a, w]] = 0 olur. I_a : R→R, x→ax – xa = [a, x] olarak tanımlanan bir iç türev olmak üzere son bulduğumuz ifadeyi düzenlediğimizde, her x ∈ U için $I_a(I_a(x)) = 0$ olur. Yani,

her x ∈ U için $I_a^2(x) = 0$ dır. Bu ise, $I_a^2(U) = 0$ olması demektir. Lemma 4.1.3 den, $I_a = 0$ elde edilir. Bu durumda, her x ∈ R için [a, x] = 0 olur. Yani, [a, R] = 0 dır. Bu ise, a ∈ Z demektir. Böylece, d(a) = 0 olması durumunda da, a ∈ Z olduğu bulunur.

Lemma 4.1.5. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ, τ)-türevi olmak üzere a ∈ R için $[d(R), a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise a ∈ Z dir.

İspat: Kabul edelim ki, a ∉ Z olsun. Hipotezden, $[d(a^2), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dır. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$[d(a^2), a]_{\sigma,\tau} = [d(aa), a]_{\sigma,\tau} = [d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a), a]_{\sigma,\tau}$$

$$= (d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a))\sigma(a) - \tau(a)(d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a))$$

$$= d(a)\sigma(a)\sigma(a) - \tau(a)\tau(a)d(a)$$

$$= d(a)\sigma(a^2) - \tau(a^2)d(a)$$

$$= [d(a), a^2]_{\sigma,\tau}$$

$$= [d(a), aa]_{\sigma,\tau} = [d(a), a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) + \tau(a)[d(a), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Hipotezden, $[d(a), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını kullanırsak $[[d(a), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Böylece, $[d(a), a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) = \tau(a)[d(a), a]_{\sigma,\tau}$ olduğu bulunur. Elde ettiğimiz bu eşitliği yukarıdaki ifadeyi düzenlemek için kullandığımızda $[d(a^2), a]_{\sigma,\tau} = 2\tau(a)[d(a), a]_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Yani, $2\tau(a)[d(a), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dir. charR ≠ 2 olduğundan $\tau(a)[d(a), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Hipotezden, $[d(a), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını kullandığımızda, Lemma 2.46 dan, τ(a) ∈ Z veya $[d(a), a]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Kabul edelim ki, τ(a) ∈ Z olsun. Bu durumda, τ, 1-1 olduğu için a ∈ Z dir. Başta, a ∉ Z olduğunu kabul ettiğimiz için çelişki elde edilir. O halde,

$$[d(a), a]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{4.8}$$

dır. Bu durumda, hipotezden, her x ∈ R için $[d([a, x]), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$[d([a, x]), a]_{\sigma,\tau} = [d(ax) - d(xa), a]_{\sigma,\tau}$$

$$= [d(a)\sigma(x) + \tau(a)d(x) - d(x)\sigma(a) - \tau(x)d(a), a]_{\sigma,\tau}$$

$$= [d(a)\sigma(x) - \tau(x)d(a) - (d(x)\sigma(a) - \tau(a)d(x)), a]_{\sigma,\tau}$$

$$= [[d(a), x]_{\sigma,\tau} - [d(x), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}$$

$$= [d(a), x]_{\sigma,\tau}\sigma(a) - [d(x), a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) - \tau(a)[d(a), x]_{\sigma,\tau} + \tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau}$$

$$= [[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} - [[d(x), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Hipotezden, her $x \in R$ için $[d(x), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını yukarıdaki ifadede kullandığımızda

$$[[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \quad \forall x \in R \tag{4.9}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede x yerine ax yazar ve düzenlersek,

$$[[d(a), ax]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} = [\tau(a)[d(a), x]_{\sigma,\tau} + [d(a), a]_{\sigma,\tau}\sigma(a), a]_{\sigma,\tau}$$

$$= [\tau(a)[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} + [[d(a), a]_{\sigma,\tau}\sigma(a), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. (4.8) nolu ifadeden faydalanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde,

$$[\tau(a)[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \forall x \in R \tag{4.10}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$\tau(a)[[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a), \tau(a)][d(a), x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ise,

$\tau(a)[[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ demektir. (4.9) nolu ifadeyi kullandığımızda, Lemma 2.46 dan, her $x \in R$ için $\tau(a) \in Z$ veya $[[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Kabul edelim ki,

$\tau(a) \in Z$ olsun. Bu durumda, $a \in Z$ olur. Bu, en başta $a \notin Z$ olarak seçilmesi ile çelişir. O halde, her $x \in R$ için

$$[[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{4.11}$$

dır. Yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde,

$[[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} = [d(a), [x, a]]_{\sigma,\tau} + [[d(a), a]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. (4.8) nolu ifadeyi kullandığımızda, her $x \in R$ için $[d(a), [x, a]]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. $I_a : R \to R$, $x \to ax - xa = [a, x]$ ve $I_{d(a)} : R \to R$, $x \to d(a)\sigma(x) - \tau(x)d(a) = [d(a), x]_{\sigma,\tau}$ olarak tanımlanan iç türev ve (σ,τ)-iç türev olmak üzere son bulduğumuz özdeşliği düzenlediğimizde, her $x \in R$ için

$[d(a), [x, a]]_{\sigma,\tau} = I_{d(a)}([x, a]) = I_{d(a)}(I_a(x)) = 0$ elde edilir. Yani, $I_{d(a)}(I_a(R)) = 0$ olur.

Lemma 4.1.3 den, $I_{d(a)} = 0$ veya $I_a = 0$ olduğu bulunur. Kabul edelim ki, $I_a = 0$ olsun. Bu durumda, her $b \in R$ için $[a, b] = 0$ olur. Yani, $a \in Z$ dir. Başlangıçta $a \notin Z$ olarak seçtiğimiz için çelişki elde edilir. O halde, her $x \in R$ için $[d(a), x]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Bu durumda, $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Hipotezden, her $x \in R$ için $[d(ax), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dır. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$[d(ax), a]_{\sigma,\tau} = [d(a)\sigma(x) + \tau(a)d(x), a]_{\sigma,\tau}$$

$$= d(a)\sigma(x)\sigma(a) + \tau(a)d(x)\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma(x) - \tau(a)\tau(a)d(x)$$

bulunur. $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu için $[d(a), a]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Yani, $d(a)\sigma(a) = \tau(a)d(a)$ dır. Bu eşitliği kullanırsak

$$[d(ax), a]_{\sigma,\tau} = d(a)\sigma(x)\sigma(a) + \tau(a)d(x)\sigma(a) - d(a)\sigma(a)\sigma(x) - \tau(a)\tau(a)d(x)$$

$$= d(a)\sigma(xa) - d(a)\sigma(ax) + \tau(a)(d(x)\sigma(a) - \tau(a)d(x))$$

$$= d(a)\sigma([x, a]) + \tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Yani,

$$d(a)\sigma([x, a]) + \tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \quad \forall\, x \in R \tag{4.12}$$

olur. Bu durumda

$$0 = [d(a)\sigma([x, a]) + \tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}$$

$$= d(a)\sigma([x, a])\sigma(a) + \tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau}\,\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma([x, a]) - \tau(a)\tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau}$$

olur. $\tau(a)d(a) = d(a)\sigma(a)$ ve hipotezden $[d(x), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını kullanırsak

$$0 = d(a)\sigma([x, a])\sigma(a) + \tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau}\,\sigma(a) - d(a)\sigma(a)\sigma([x, a]) - \tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau}\,\sigma(a)$$

$$= d(a)\sigma([x, a]a) - d(a)\sigma(a[x, a]) + \tau(a)[[d(x), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}$$

$$= d(a)\sigma([[x, a], a])$$

bulunur. Yani, her $x \in R$ için $d(a)\sigma([[x, a], a]) = 0$ elde edilir. Bu durumda, her $t \in R$ için $\sigma(t)d(a)\sigma([[x, a], a]) = 0$ olur. Bu ifadeyi, $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını kullanarak düzenlediğimizde her $x, t \in R$ için $d(a)\tau(t)\sigma([[x, a], a]) = 0$ olur. Bu ise, her $x \in R$ için

$d(a)\tau(R)\sigma([[x, a], a]) = 0$ olması demektir. $\tau(R)$, R halkasının bir ideali olduğu için

$d(a)R\tau(R)\sigma([[x, a], a]) \subseteq d(a)\tau(R)\sigma([[x, a], a]) = 0$ olur. Bu durumda,

$d(a)R\tau(R)\sigma([[x, a], a]) = 0$ olur. Uyarı, 2.23 den, her $x \in R$ için $d(a) = 0$ veya

$\tau(R)\sigma([[x, a], a]) = 0$ olur. Tekrar, $\tau(R)$ nin R halkasının bir ideali olmasını kullandığımızda

her $x \in R$ için $d(a) = 0$ veya $\sigma([[x, a], a]) = 0$ veya $\tau(R) = 0$ olduğu bulunur. $\tau(R)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan her $x \in R$ için $d(a) = 0$ veya

$\sigma([[x, a], a]) = 0$ dır. Kabul edelim ki, her $x \in R$ için $\sigma([[x, a], a]) = 0$ olsun. Bu durumda, σ, 1-1 olduğundan her $x \in R$ için $[a, [a, x]] = 0$ olur. Bu ise, her $x \in R$ için

$[a, [a, x]] = I_a([a, x]) = I_a(I_a(x)) = I_a^2(x) = 0$ olması demektir. Bu durumda, $I_a^2(R) = 0$ olur. Yani, $I_a^2 = 0$ dır. Lemma 4.1.3 den, $I_a = 0$ olduğu bulunur. Bu durumda, her $x \in R$ için

$[a, x] = 0$ olur. Bu ise, $[a, R] = 0$ demektir. Yani, $a \in Z$ dir. Başlangıçta, $a \notin Z$ olduğunu kabul ettiğimiz için çelişki elde edilmiş olur. O halde, $d(a) = 0$ dır. (4.12) nolu ifadeyi

$d(a) = 0$ olmasını kullanarak düzenlersek $\tau(a)[d(x), a]_{\sigma, \tau} \in C_{\sigma, \tau}$ olur. $[d(x), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma, \tau}$ olmasını son ifadede kullandığımızda, her $x \in R$ için $\tau(a) \in Z$ veya $[d(x), a]_{\sigma, \tau} = 0$ olur. $\tau(a) \in Z$ olması durumunda $a \in Z$ olur. Çünkü τ, 1-1 dir. Böylece çelişki elde edilir. Bu

nedenle her $x \in R$ için $[d(x), a]_{\sigma, \tau} = 0$ olur. Teorem 4.1.4 den, $a \in Z$ olduğu bulunur. Tekrar çelişki elde edilir. O halde, çelişki başlangıçtaki kabulden kaynaklanır. Yani, $a \in Z$ dir.

4.2. Asal Halkalar ve İdealleri Üzerinde Komütatiflik

Aydın N. ve Kaya K., 1992.

Lemma 4.2.1. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi, d R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve U, R halkasının bir sağ ideali olmak üzere $d(U) \subset Z$ ise R değişmelidir.

İspat: Hipotezden, $a, b \in R$ için $d(a), d(b) \in Z$ dir. Bu durumda, her $x \in R$ için

$[x, d(ab)] = 0$ olur. Bu ifadeyi (σ,τ)-türev tanımını kullanarak düzenlersek

$$0 = [x, d(ab)] = [x, d(a)\sigma(b) + \tau(a)d(b)] = [x, d(a)\sigma(b)] + [x, \tau(a)d(b)]$$

$= d(a)[x, \sigma(b)] + [x, d(a)]\sigma(b) + \tau(a)[x, d(b)] + [x, \tau(a)]d(b)$

bulunur. Yukarıdaki ifadede $d(a), d(b) \in Z$ olması kullanılırsa,

$$d(a)[x, \sigma(b)] + d(b)[x, \tau(a)] = 0, \forall a, b \in U, \forall x \in R \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) nolu özdeşlikte, x yerine $x\sigma(b)$ yazar ve (σ,τ)-türev tanımını kullanarak düzenlersek

$0 = d(a)[x\sigma(b), \sigma(b)] + d(b)[x\sigma(b), \tau(a)]$

$= d(a)x[\sigma(b), \sigma(b)] + d(a)[x, \sigma(b)]\sigma(b) + d(b)x[\sigma(b), \tau(a)] + d(b)[x, \tau(a)]\sigma(b)$

$= (d(a)[x, \sigma(b)] + d(b)[x, \tau(a)])\sigma(b) + d(b)x[\sigma(b), \tau(a)]$

bulunur. (4.13) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. Böylece, her $x \in R$ için $d(b)x[\sigma(b), \tau(a)] = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, her $a, b \in U$ için

$d(b)R[\sigma(b), \tau(a)] = 0$ olması demektir. Uyarı 2.23 den, her $a, b \in U$ için $d(b) = 0$ veya $[\sigma(b), \tau(a)] = 0$ olur. $A=\{b \in U \mid d(b) = 0\}$ ve $B = \{b \in U \mid [\sigma(b), \tau(a)] = 0, \forall a \in U\}$, U sağ idealinin alt gruplarıdır ve $U = A \cup B$ olarak yazılır. Böylece, Teorem 2.6 dan, U = A veya U = B dir. Kabul edelim ki, U = A olsun. Bu durumda, her $b \in U$ için $d(b) = 0$ olur. Yani, her $a \in U$, $r \in R$ için $d(ar) = 0$ dır. (σ,τ)-türev tanımını kullanarak bu ifadeyi düzenlersek $d(a)\sigma(r) + \tau(a)d(r) = 0$ olur. $d(U) = 0$ olmasını kullandığımızda, her $a \in U$, $r \in R$ için $\tau(a)d(r) = 0$ olur. Bu ise, $\tau(U)d(R) = 0$ demektir. Lemma 4.1.1 den, $\tau(U) = 0$ veya $d = 0$ dır. $d \neq 0$ ve τ(U), R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olduğundan U = A olamaz. O halde, U = B dir. Bu durumda,

$$[\sigma(b), \tau(a)] = 0, \forall a, b \in U \tag{4.14}$$

olur. (4.14) nolu ifadede, $w \in U$ olmak üzere, b yerine $b\sigma^{-1}(\tau(w))$ yazar ve düzenlersek,

$0 = [\sigma(b\sigma^{-1}(\tau(w)), \tau(a)] = [\sigma(b)\sigma(\sigma^{-1}(\tau(w))), \tau(a)] = [\sigma(b)\tau(w), \tau(a)]$

$= \sigma(b)[\tau(w), \tau(a)] + [\sigma(b), \tau(a)]\tau(w)$

bulunur. (4.14) nolu ifadeden yukarıdaki ifadenin son terimi sıfırdır. Böylece,

her $a, b, w \in U$ için $\sigma(b)[\tau(w), \tau(a)] = 0$ olduğu bulunur. τ, otomorfizm olduğundan

$[\tau(w), \tau(a)] = \tau(w)\tau(a) - \tau(a)\tau(w) = \tau(wa) - \tau(aw) = \tau(wa - aw) = \tau([w, a])$ olur. Bu ifadeyi son özdeşlikte yerine yazdığımızda, her a, b, $w \in U$ için $\sigma(b)\tau([w,a]) = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, her a, b, $w \in U$ için $\sigma(U)\tau([w,a]) = 0$ olması demektir. Yukarıdaki ifadede, $\sigma(U)$ nun R halkasının bir sağ ideali olmasını kullandığımızda

$\sigma(U)R\tau([w,a]) \subseteq \sigma(U)\tau([w,a]) = 0$ olur. Bu durumda, her a, $w \in U$ için $\sigma(U)R\tau([w, a]) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her a, x, $w \in U$ için $\sigma(x) = 0$ veya $\tau([w, a]) = 0$ bulunur. Yani,

her a, $w \in U$ için $\sigma(U) = 0$ veya $\tau([w, a]) = 0$ olur. $\sigma(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olduğundan, her a, $w \in U$ için $\tau([w, a]) = 0$ dır. τ, 1-1 olduğundan her a, $w \in U$ için $[w,a] = 0$ olur. $I_a : U\rightarrow U$, $x\rightarrow ax - xa = [a, x] = I_a(x)$ olarak tanımlanan iç türev olmak üzere son eşitliği düzenlediğimizde, her $w \in U$ için $[a, w] = I_a(w) = 0$ olur. Yani, $I_a(U) = 0$ dır. Lemma 4.1.1 den $I_a = 0$ olur. Bu ise, her $x \in R$ için $[a, x] = 0$ olması demektir. Yani,

$a \in Z$ dir. Bu işlemler her $a \in U$ için yapılabildiğinden $U \subset Z$ olur. Lemma 2.31 den, R halkası değişmeli olur.

Teorem 4.2.2. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi, d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve U, R halkasının bir ideali olmak üzere $[d(U), d(U)]_{\sigma, \tau} = 0$ ise R değişmelidir.

İspat: Teorem 4.1.4 den $d(U) \subset Z$ olur. Lemma 4.2.1den de R halkasının değişmeli olduğu görülür.

Lemma 4.2.3. R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi, d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve U, R halkasının bir ideali olmak üzere $a \in R$ ve $ad(U) \subset C_{\sigma, \tau}$ ise $a = 0$ veya R değişmelidir.

İspat: Kabul edelim ki, $0 \neq a \notin Z$ olsun ve $b = \tau^{-1}(a)$ seçelim. U, R halkasının bir ideali olduğundan, her $x \in U$ için $xb \in U$ olur. Hipotezden,

$[ad(xb), b]_{\sigma, \tau} = a[d(xb), b]_{\sigma, \tau} + [a, \tau(b)]d(xb) = 0$ dır. Bu ifadede $\tau(b) = \tau(\tau^{-1}(a)) = a$ olmasını kullandığımızda

$$0 = a[d(xb), b]_{\sigma, \tau} = a[d(x)\sigma(b) + \tau(x)d(b), b]_{\sigma, \tau}$$

$$= a\{(d(x)\sigma(b) + \tau(x)d(b))\sigma(b) - \tau(b)(d(x)\sigma(b) + \tau(x)d(b))\}$$

$$= ad(x)\sigma(b)\sigma(b) + a\tau(x)d(b)\sigma(b) - a\tau(b)d(x)\sigma(b) - a\tau(b)\tau(x)d(b)$$

bulunur. Hipotezden, $[ad(x), b]_{\sigma,\tau} = 0$ olmasını kullanırsak $ad(x)\sigma(b) = \tau(b)ad(x)$ bulunur. Bu eşitliği yukarıdaki ifadede kullandığımızda

$$0 = \tau(b)ad(x)\sigma(b) + a\tau(x)d(b)\sigma(b) - a\tau(b)d(x)\sigma(b) - a\tau(b)\tau(x)d(b)$$

$$= \{\tau(b)a - a\tau(b)\}d(x)\sigma(b) + a\tau(x)d(b)\sigma(b) - a\tau(b)\tau(x)d(b)$$

bulunur. $\tau(b) = a$ olmasını kullanarak düzenlediğimizde ise,

$a\tau(x)d(b)\sigma(b) - a\tau(b)\tau(x)d(b) = a\tau(x)d(b)\sigma(b) - \tau(b)a\tau(x)d(b) = [a\tau(x)d(b), b]_{\sigma,\tau}$ olduğu bulunur. Bu ifadeyi yukarıdaki eşitlikte kullandığımızda

$[\tau(b), a]d(x)\sigma(b) + [a\tau(x)d(b), b]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. $\tau(b) = a$ olduğu için $[\tau(b), a] = 0$ dır. O halde,

$$[a\tau(x)d(b), b]_{\sigma,\tau} = 0, \quad \forall\, x \in U \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) nolu ifadede, $y \in U$ olmak üzere, x yerine $\tau^{-1}(d(y))x$ yazar ve τ nun halka homomorfizması olmasını kullanırsak

$$[a\tau(\tau^{-1}(d(y))x)d(b), b]_{\sigma,\tau} = [a\tau(\tau^{-1}(d(y))\tau(x)d(b), b]_{\sigma,\tau} = [ad(y)\tau(x)d(b), b]_{\sigma,\tau} = 0$$

bulunur. Yani,

$$[ad(y)\tau(x)d(b), b]_{\sigma,\tau} = 0, \forall\, x, y \in U \tag{4.16}$$

dir. (4.15) nolu eşitlikte, $w \in U$ olmak üzere, x yerine $x\tau^{-1}(ad(y))w$ yazar ve τ nun halka homomorfizması olmasını kullanırsak

$$0 = [a\tau(x\tau^{-1}(ad(y))w)d(b), b]_{\sigma,\tau} = [a\tau(x)ad(y)\tau(w)d(b),b]_{\sigma,\tau}$$

$$= a\tau(x)[ad(y)\tau(w)d(b),b]_{\sigma,\tau} + [a\tau(x),\tau(b)]ad(y)\tau(w)d(b)$$

bulunur. (4.16) nolu ifadeden yukarıdaki eşitliğin ilk terimi sıfırdır. Böylece, $[a\tau(x),\tau(b)]ad(y)\tau(w)d(b) = 0$ olur. $\tau(b) = a$ olmasını kullanırsak

$[a\tau(x), \tau(b)]ad(y)\tau(w)d(b) = [a\tau(x), a]ad(y)\tau(w)d(b) = 0$ bulunur. Yani, her $x, y \in U$ için

$[a\tau(x), a]ad(y)\tau(U)d(b) = 0$ dır. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğundan

$[a\tau(x), a]ad(y)\tau(U)Rd(b) \subseteq [a\tau(x), a]ad(y)\tau(U)d(b) = 0$ dir. Bu durumda, her $x, y \in U$ için

$[a\tau(x),a]ad(y)\tau(U)Rd(b) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $x, y, t \in U$ için $[a\tau(x), a]ad(y)\tau(t) = 0$ veya $d(b) = 0$ olur. Bu ise, her $x, y \in U$ için $[a\tau(x), a]ad(y)\tau(U) = 0$ veya $d(b) = 0$ olması demektir. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için

$[a\tau(x), a]ad(y)R\tau(U) \subseteq [a\tau(x), a]ad(y)\tau(U) = 0$ dır. Bu durumda, $[a\tau(x), a]ad(y)R\tau(U) = 0$ olur. Yani, her $x, y, t \in U$ için $[a\tau(x), a]ad(y)R\tau(t) = 0$ veya $d(b) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $x, y, t \in U$ için $[a\tau(x), a]ad(y) = 0$ veya $\tau(t) = 0$ veya $d(b) = 0$ bulunur. Bu ise,

her $x, y \in U$ için $[a\tau(x), a]ad(y) = 0$ veya $\tau(U) = 0$ veya $d(b) = 0$ olması demektir. $\tau(U)$, R

halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan, her $x, y \in U$ için $[a\tau(x), a]ad(y) = 0$ veya $d(b) = 0$ dır. Hipotezden, $ad(y) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, her $x, y, t \in U$ için

$[a\tau(x), a]ad(y)\tau(t) = [a\tau(x), a]\tau(t)ad(y) = 0$ bulunur. Bu ise, her $x, y \in U$ için

$[a\tau(x), a]\tau(U)ad(y) = 0$ veya $d(b) = 0$ olması demektir. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için $[a\tau(x), a]\tau(U)Rad(y) \subseteq [a\tau(x), a]\tau(U)ad(y) = 0$ dır. Bu durumda,

$[a\tau(x), a]\tau(U)Rad(y) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $x, y, k \in U$ için $[a\tau(x), a]\tau(k) = 0$ veya $ad(y) = 0$ veya $d(b) = 0$ elde edilir. Bu ise, her $x, y \in U$ için $[a\tau(x), a]\tau(U) = 0$ veya

$ad(y) = 0$ veya $d(b) = 0$ olması demektir. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için

$[a\tau(x), a]R\tau(U) \subseteq [a\tau(x), a]\tau(U) = 0$ dır. Bu durumda, $[a\tau(x), a]R\tau(U) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $x, y, k \in U$ için $[a\tau(x), a] = 0$ veya $\tau(k) = 0$ veya $ad(y) = 0$ veya $d(b) = 0$ elde edilir. Bu ise, her $x, y \in U$ için $[a\tau(x), a] = 0$ veya $\tau(U) = 0$ veya $ad(y) = 0$ veya $d(b) = 0$ demektir. $\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan, her $x, y \in U$ için

$[a\tau(x), a] = 0$ veya $ad(y) = 0$ veya $d(b) = 0$ olur. İlk olarak, kabul edelim ki, her $x \in U$ için $[a\tau(x), a] = 0$ olsun. Bu durumda, $s \in U$ olmak üzere, x yerine xs yazar ve düzenlersek

$[a\tau(xs), a] = [a\tau(x)\tau(s), a] = a\tau(x)[\tau(s), a] + [a\tau(x), a]\tau(s) = a\tau(x)[\tau(s), a] = 0$ bulunur. Yani, her $s \in U$ için $a\tau(U)[\tau(s), a] = 0$ dır. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için

$aR\tau(U)[\tau(s), a] \subseteq a\tau(U)[\tau(s), a] = 0$ dır. Bu durumda, her $s \in U$ için $aR\tau(U)[\tau(s), a] = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $s \in U$ için $a = 0$ veya $\tau(U)[\tau(s), a] = 0$ bulunur. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için $\tau(U)R[\tau(s), a] \subseteq \tau(U)[\tau(s), a] = 0$ dır. Bu durumda, her $s \in U$ için $\tau(U)R[\tau(s), a] = 0$ olur. Bu ifadeye Uyarı 2.23 uygulanırsa, her $s \in U$ için $a = 0$ veya

$\tau(U) = 0$ veya $[\tau(s), a] = 0$ elde edilir. En başta $a \neq 0$ olarak seçtiğimiz ve $\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan her $s \in U$ için $[\tau(s), a] = 0$ dır. Bu ise,

$[\tau(U), a] = 0$ olması demektir. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için

$[\tau(U)R, a] \subseteq [\tau(U), a] = 0$ dır. Bu durumda, $[\tau(U)R, a] = 0$ olduğu bulunur. O halde,

her $x \in \tau(U)$, $t \in R$ için $[xt, a] = x[t, a] + [x, a]t = x[t, a] = 0$ olur. Yani, her $t \in R$ için $\tau(U)[t, a] = 0$ dır. $\tau(U)$, R halkasının bir ideali olduğu için $\tau(U)R[t, a] \subseteq \tau(U)[t, a] = 0$ dır. Bu durumda, $\tau(U)R[t, a] = 0$ olur. Uyarı 2.23 uygulanırsa, her $t \in R$ için $\tau(U) = 0$ veya

$[t, a] = 0$ elde edilir. $\tau(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan, her $t \in R$ için $[t, a] = 0$ dır. Bu ise, $[R, a] = 0$ demektir. Yani, $a \in Z$ dir. $0 \neq a \notin Z$ olduğunu kabul ettiğimiz için çelişki elde edilir. O halde, kabul edelim ki, her $y \in U$ için $ad(y) = 0$ olsun. Bu, $ad(U) = 0$ olması demektir. Lemma 4.1.2 den, $a = 0$ veya $d = 0$ elde edilir. Bu durum,

$a \neq 0$ ve $d \neq 0$ olması ile çelişir. O halde, son olarak $d(b) = 0$ olduğunu kabul edelim.

$b = \tau^{-1}(a)$ olmak üzere $d(b) = 0$ olsun. $\tau(b) = a$ olmasını göz önüne alarak, $x \in U$ için $d(bx)$ ifadesini düzenlediğimizde $d(bx) = d(b)\sigma(x) + \tau(b)d(x) = ad(x) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani, her $x \in U$ için $d(bx) \in C_{\sigma,\tau}$ dir. Öte yandan, hipotezden, her $x \in U$ için $ad(bx) \in C_{\sigma,\tau}$ dir. Böylece, her $x \in U$ için $a \in Z$ veya $d(bx) = 0$ olduğu bulunur. En başta $0 \neq a \notin Z$ kabul ettiğimizden, her $x \in U$ için $d(bx) = 0$ dır. $d(bx) = ad(x)$ olduğunu kullandığımızda

her $x \in U$ için $ad(x) = 0$ olur. Bu ise, $ad(U) = 0$ olması demektir. Son ifadede, Lemma 4.1.2 uygulandığında $a = 0$ veya $d = 0$ veya $U = 0$ bulunur. Hipotezden, $d \neq 0$, $U \neq 0$ ve kabulden de $a \neq 0$ olduğu için çelişki elde edilir. Yani, $d(b) = 0$ olması durumunda da çelişki elde edilmiş olur. O halde, tüm bu çelişkilerin nedeni en başta $0 \neq a \notin Z$ kabulüdür. Böylece, $a \in Z$ olduğu bulunur. Hipotezden, her $u \in U$ için $ad(u) \in C_{\sigma,\tau}$ dır. Bu durumda, her $x \in R$ için, $[ad(u), x]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Bu ifadeyi düzenlediğimizde $ad(u)\sigma(x) = \tau(x)ad(u)$ olur. $a \in Z$ olduğu için $\tau(x)a = a\tau(x)$ dır. Böylece, her $x \in R$ için $a(d(u)\sigma(x) - \tau(x)d(u)) = 0$ olur. Yani, her $x \in R$, $u \in U$ için $a[d(u), x]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. $a \in Z$ olduğundan her $k, x \in R$, $u \in U$ için $ak[d(u), x]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Bu ise, her $x \in R$, $u \in U$ için $aR[d(u), x]_{\sigma,\tau} = 0$ olması demektir. Son eşitlikte Uyarı 2.23 uygulandığında, her $x \in R$, $u \in U$ için $a = 0$ veya $[d(u), x]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. $a \neq 0$ olarak seçtiğimizden, her $x \in R$, $u \in U$ için $[d(u), x]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Bu durumda, her $x \in R$ için $[d(U), x]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Teorem 4.1.4 den, her $x \in R$ için $x \in Z$

olduğu bulunur. Bu ise, R halkasının değişmeli olması demektir. Böylece, $0 \neq a \in Z$ olması durumunda R halkasının değişmeli olduğu bulunur.

Ashraf M. ve Rehman N., 2002.

Lemma 4.2.4. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. $d : R \to R$ tanımlı bir (σ, τ)-türev olmak üzere $d^2(I) = 0$ ve d, σ ve τ otomorfizimlerinin ikisi ile de değişmeli ise $d = 0$ dır.

İspat: Hipotezden, her $x \in R$ için $d^2(x) = 0$ olur. Bu durumda, $y \in I$ olmak üzere, x yerine xy yazarsak

$$d^2(xy) = d(d(xy)) = d(d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)) = d(d(x)\sigma(y)) + d(\tau(x)d(y))$$

$$= d^2(x)\sigma^2(y) + \tau(d(x))d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\sigma(d(y)) + \tau^2(x)d^2(y)$$

bulunur. Hipotezden, $d^2(I) = 0$ olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde her $x, y \in I$ için $\tau(d(x))d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\sigma(d(y)) = 0$ elde edilir. Elde etmiş olduğumuz özdeşlikte, d nin σ, τ otomorfizimlerinin ikisi ile de değişmeli olmasını kullanarak son ifadeyi düzenlediğimizde her $x, y \in I$ için $\tau(d(x))\sigma(d(y)) + \tau(d(x))\sigma(d(y)) = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, her $x, y \in I$ için $2\tau(d(x))\sigma(d(y)) = 0$ olması demektir. Lemma 2.36 dan, her $x, y \in I$ için $\tau(d(x))\sigma(d(y)) = 0$ elde edilir. σ, otomorfizm olduğu için tersi vardır. O halde, son elde ettiğimiz özdeşlikte soldan σ^{-1} uyguladığımızda, her $x, y \in I$ için

$\sigma^{-1}(\tau(d(x))\sigma(d(y))) = \sigma^{-1}(\tau(d(x))d(y) = 0$ bulunur. Bu durumda, her $x \in I$ için

$\sigma^{-1}(\tau(d(x)))d(I) = 0$ elde edilir. Lemma 4.1.2 den, her $x \in I$ için $\sigma^{-1}(\tau(d(x))) = 0$ veya $d = 0$ olduğu bulunur. σ, 1-1 olduğundan, her $x \in I$ için $\tau(d(x)) = 0$ veya $d = 0$ olur. Tekrar, σ nun 1-1 olmasının kullanırsa her $x \in I$ için $d(x) = 0$ veya $d = 0$ olur. Yani, $d(I) = 0$ veya $d = 0$ dır. Her iki durumda da $d(I) = 0$ olur. Bu durumda, I, R halkasının bir ideali olduğu için,

$r \in R$ ve $x \in I$ olmak üzere $xr \in I$ olur ve $d(xr) = 0$ dır. (σ,τ)-türev tanımını kullanırsak

$d(xr) = d(x)\sigma(r) + \tau(x)d(r) = 0$ olur. Hipotezden, $x \in I$ için $d(x) = 0$ olmasını kullanarak bu ifadeyi düzenlediğimizde, her $x \in I$, $r \in R$ için $\tau(x)d(r) = 0$ olduğu bulunur. τ nun tersi var olduğundan son elde ettiğimiz özdeşlikte soldan τ^{-1} uyguladığımızda, her $x \in I$, $r \in R$ için $\tau^{-1}(\tau(x)d(r)) = x\tau^{-1}(d(r)) = 0$ olur. Bu ise, her $r \in R$ için $I\tau^{-1}(d(r)) = 0$ olması demektir. I, R halkasının bir ideali olduğu için her $r \in R$ için $IR\tau^{-1}(d(r)) \subseteq I\tau^{-1}(d(r)) = 0$ dır. Buradan,

$IR\tau^{-1}(d(r)) = 0$ olur. Bu ise, her $r \in R$ için $IR\tau^{-1}(d(r)) = 0$ olması demektir. Uyarı 2.23 kullanılırsa, her $r \in R$ için $I = 0$ veya $\tau^{-1}(d(r)) = 0$ olduğu bulunur. I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan, her $r \in R$ için $\tau^{-1}(d(r)) = 0$ dır. τ, 1-1 olduğundan, her $r \in R$ için $d(r) = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, $d = 0$ olması demektir.

Teorem 4.2.5. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere $d : R \rightarrow R$,

her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = 0$ olan bir (σ, τ)-türev ve d, σ ve τ ile değişmeli ise $d = 0$ veya R değişmelidir.

İspat: Hipotezden,

$$[d(x), d(y)] = 0, \ \forall\, x, y \in I \tag{4.17}$$

dır. Yukarıdaki özdeşlikte, y yerine xy yazar ve (σ, τ)-türev tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned}[d(x), d(xy)] &= [d(x), d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)] = [d(x), d(x)\sigma(y)] + [d(x), \tau(x)d(y)] \\ &= d(x)[d(x), \sigma(y)] + [d(x), d(x)]\sigma(y) + \tau(x)[d(x), d(y)] + [d(x), \tau(x)]d(y)\end{aligned}$$

bulunur. (4.17) nolu özdeşlik yardımıyla yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde

$$d(x)[d(x), \sigma(y)] + [d(x), \tau(x)]d(y) = 0, \ \forall\, x, y \in I \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.18) nolu ifadede, $r \in R$ olmak üzere, y yerine yr yazarsak

$d(x)[d(x), \sigma(yr)] + [d(x), \tau(x)]d(yr) = 0$ bulunur. σ nun homomorfizma olması ve

(σ, τ)-türev tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned}0 &= d(x)[d(x), \sigma(y)\sigma(r)] + [d(x), \tau(x)](d(y)\sigma(r) + \tau(y)d(r)) \\ &= d(x)\sigma(y)[d(x), \sigma(r)] + d(x)[d(x), \sigma(y)]\sigma(r) + [d(x), \tau(x)]d(y)\sigma(r) + [d(x), \\ &\quad \tau(x)]\tau(y)d(r) \\ &= ([d(x), \tau(x)]d(y) + d(x)[d(x), \sigma(y)])\sigma(r) + [d(x), \tau(x)]\tau(y)d(r) + d(x)\sigma(y)[d(x), \sigma(r)]\end{aligned}$$

elde edilir. (4.18) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. Böylece,

her $x, y \in I$, $r \in R$ için $[d(x), \tau(x)]\tau(y)d(r) + d(x)\sigma(y)[d(x), \sigma(r)] = 0$ olduğu bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede, $z \in I$ olmak üzere r yerine $\sigma^{-1}(d(z))$ yazılırsa

$[d(x), \tau(x)]\tau(y)d(\sigma^{-1}(d(z))) + d(x)\sigma(y)[d(x), \sigma(\sigma^{-1}(d(z)))] = 0$ bulunur. d, σ ile değişmeli olduğundan her $x, y, z \in I$ için $[d(x), \tau(x)]\tau(y)\sigma^{-1}(d^2(z))) + d(x)\sigma(y)[d(x), d(z)] = 0$ olur. (4.17) nolu özdeşlik kullanıldığında, her $x, y, z \in I$ için $[d(x), \tau(x)]\tau(y)\sigma^{-1}(d^2(z))) = 0$ elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadede, $s \in R$ olmak üzere, y yerine $y\tau^{-1}(s)$ yazarsak,

her $x, y, z \in I$, $s \in R$ için $[d(x), \tau(x)]\tau(y\tau^{-1}(s))\sigma^{-1}(d^2(z))) = [d(x), \tau(x)]\tau(y)s\sigma^{-1}(d^2(z)) = 0$

bulunur. Bu durumda, her $x, y, z \in I$ için $[d(x), \tau(x)]\tau(y)R\sigma^{-1}(d^2(z)) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $x, y, z \in I$ için $[d(x), \tau(x)]\tau(y) = 0$ veya $\sigma^{-1}(d^2(z)) = 0$ bulunur. σ, 1-1 olduğundan, her $x, y, z \in I$ için $[d(x), \tau(x)]\tau(y) = 0$ veya $d^2(z) = 0$ dır. Bu ise, her $x, y \in I$ için

$[d(x), \tau(x)]\tau(y) = 0$ veya $d^2(I) = 0$ olması demektir. Kabul edelim ki, $d^2(I) = 0$ olsun. Lemma 4.2.4 den $d = 0$ olur. Böylece, bu durum için ispat biter. Şimdi de kabul eldim ki, her $x, y \in I$ için $[d(x), \tau(x)]\tau(y) = 0$ olsun. Bu durumda, τ otomorfizm olduğu için tersi vardır. O halde, kabulümüze soldan τ^{-1} uyguladığımızda, her $x, y \in I$ için

$\tau^{-1}([d(x), \tau(x)]\tau(y)) = \tau^{-1}([d(x), \tau(x)])y = 0$ olur. Yani, her $x \in I$ için $\tau^{-1}([d(x), \tau(x)]) I = 0$ dır. I, R halkasının bir ideali olduğu için $\tau^{-1}([d(x), \tau(x)])RI \subseteq \tau^{-1}([d(x), \tau(x)])I = 0$ dır. Bu ise, $\tau^{-1}([d(x), \tau(x)])RI = 0$ olması demektir. Uyarı 2.23 den, her $x \in I$ için

$\tau^{-1}([d(x), \tau(x)]) = 0$ veya $I = 0$ olur. I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan

her $x \in I$ için $\tau^{-1}([d(x), \tau(x)]) = 0$ dır. τ, 1-1 olduğundan,

$$[d(x), \tau(x)] = 0, \forall x \in I \tag{4.19}$$

dır. Bu ifadede x yerine x + y yazarsak

$$0 = [d(x + y), \tau(x + y)] = [d(x) + d(y), \tau(x) + \tau(y)]$$

$$= [d(x), \tau(x)] + [d(x), \tau(y)] + [d(y), \tau(x)] + [d(y), \tau(y)]$$

bulunur. (4.19) nolu ifade kullanıldığında

$$[d(x), \tau(y)] + [d(y), \tau(x)] = 0, \quad \forall x, y \in I \tag{4.20}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz bu ifadede y yerine xy yazarsak

$$0 = [d(x), \tau(xy)] + [d(xy), \tau(x)] = [d(x), \tau(x)\tau(y)] + [d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y), \tau(x)]$$

$$= \tau(x)[d(x), \tau(y)] + [d(x), \tau(x)]\tau(y) + [d(x)\sigma(y), \tau(x)] + [\tau(x)d(y), \tau(x)]$$

$$= [d(x), \tau(x)]\tau(y) + d(x)[\sigma(y), \tau(x)] + [d(x), \tau(x)]\sigma(y) + [\tau(x), \tau(x)]d(y) +$$

$$\tau(x)([d(x), \tau(y)] + [d(y), \tau(x)])$$

olur. (4.19) ve (4.20) nolu özdeşlikler yardımıyla yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde

$$d(x)[\sigma(y), \tau(x)] = 0, \ \forall\, x, y \in I \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) nolu özdeşlikte, $r \in R$ olmak üzere, y yerine $y\sigma^{-1}(r)$ yazar ve (σ, τ)-türev tanımı yardımıyla düzenlersek

$$d(x)[\sigma(y\sigma^{-1}(r)), \tau(x)] = d(x)[\sigma(y)r, \tau(x)] = d(x)\sigma(y)[r, \tau(x)] + d(x)[\sigma(y), \tau(x)]r = 0$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeyi (4.21) nolu özdeşlik yardımıyla düzenlediğimizde, her $x, y \in I$, $r \in R$ için $d(x)\sigma(y)[r, \tau(x)] = 0$ elde edilir. σ, otomorfizm olduğundan tersi vardır. Yukarıdaki özdeşlikte, soldan σ^{-1} uygulandığında, her $x, y \in I$, $r \in R$ için

$\sigma^{-1}(d(x)\sigma(y)[r, \tau(x)]) = \sigma^{-1}(d(x))y\sigma^{-1}([r, \tau(x)]) = 0$ elde edilir. Bu ise, her $x \in I$, $r \in R$ için

$\sigma^{-1}(d(x))I\sigma^{-1}([r, \tau(x)]) = 0$ olması demektir. I, R halkasının bir ideali olduğu için

$\sigma^{-1}(d(x))RI\sigma^{-1}([r, \tau(x)]) \subseteq \sigma^{-1}(d(x))I\sigma^{-1}([r, \tau(x)]) = 0$ dır. Böylece, her $x \in I$, $r \in R$ için

$\sigma^{-1}(d(x))RI\sigma^{-1}([r, \tau(x)]) = 0$ elde edilir. Uyarı 2.23 den, her $x \in I$, $r \in R$ için $\sigma^{-1}(d(x)) = 0$ veya $I\sigma^{-1}([r, \tau(x)]) = 0$ olduğu bulunur. $IR\sigma^{-1}([r, \tau(x)]) \subseteq I\sigma^{-1}([r, \tau(x)]) = 0$ olmasını kullandığımızda her $x \in I$, $r \in R$ için $IR\sigma^{-1}([r, \tau(x)]) = 0$ olur. R halkası asal ve σ, 1-1 olduğundan her $x \in I$, $r \in R$ için $d(x) = 0$ veya $I = 0$ veya $[r, \tau(x)] = 0$ dır. I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğu için her $x \in I$, $r \in R$ için $d(x) = 0$ veya $[r, \tau(x)] = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, her $x \in I$ için $d(x) = 0$ veya $[R, \tau(x)] = 0$ olması demektir.

$A = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in I \mid [R, \tau(x)] = 0\}$, I idealinin alt gruplarıdır ve $I = A \cup B$ olarak yazılır. Bu durumda, Teorem 2.6 dan, $I = A$ veya $I = B$ dir. Kabul edelim ki, $I = A$ olsun. Bu durumda, her $x \in I$ için $d(x) = 0$ olur. Kabulümüzde, $s \in R$ olmak üzere, x yerine xs yazar ve (σ, τ)-türev tanımı ve kabulü kullanarak düzenleme yaparsak

$d(xs) = d(x)\sigma(s) + \tau(x)d(s) = \tau(x)d(s) = 0$ olur. Yani, her $x \in I$, $s \in R$ için $\tau(x)d(s) = 0$ dır. τ, 1-1 ve örten olduğu için tersi vardır. Son ifadeye soldan τ^{-1} uyguladığımızda

her $x \in I$, $s \in R$ için $\tau^{-1}(\tau(x)d(s)) = x\tau^{-1}(d(s)) = 0$ elde edilir. Bu ise, her $s \in R$ için

$I\tau^{-1}(d(s)) = 0$ olması demektir. I, R halkasının bir ideli olduğu için

$IR\tau^{-1}(d(s)) \subseteq I\tau^{-1}(d(s)) = 0$ olur. Yani, her $s \in R$ için $IR\tau^{-1}(d(s)) = 0$ dır. R halkasının asal olması kullanılırsa her $s \in R$ için $I = 0$ veya $\tau^{-1}(d(s)) = 0$ bulunur. I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğundan her $s \in R$ için $\tau^{-1}(d(s)) = 0$ elde edilir. Bu ise, τ, 1-1 olduğundan, her $s \in R$ için $d(s) = 0$ olması demektir. Yani, $d = 0$ dır. Böylece, $I = A$ olması durumunda ispat biter. Şimdi de, kabul edelim ki, $I = B$ olsun. Bu durumda, her $x \in I$ için $[R, \tau(x)] = 0$ olur. Bu ise, her $x \in I$ için $\tau(x) \in Z(R)$ olması demektir. Buradan, her $x \in I$ için $x \in Z(R)$ olur. Yani, $I \subseteq Z(R)$ dir. Lemma 2.31 den, R halkası değişmelidir.

Aydın N., 2008.

Lemma 4.2.6. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi, $d : R \to R$ sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev ve $h : R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olmak üzere $dh(R) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Hipotezden, her $x, y \in R$ için $dh([x, y]) \in C_{\sigma,\tau}$ dır. Bu ifadeyi, türev ve

(σ,τ)-türev tanımları yardımıyla düzenlersek

$$dh([x, y]) = d([h(x), y] + [x, h(y)]) = d([h(x), y]) + d([x, h(y)])$$

$$= [d(h(x)), y]_{\sigma,\tau} - [d(y), h(x)]_{\sigma,\tau} + [d(x), h(y)]_{\sigma,\tau} - [d(h(y)), x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Hipotezden, $dh(x), dh(y) \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını kullandığımızda

$$[d(x), h(y)]_{\sigma,\tau} - [d(y), h(x)]_{\sigma,\tau} + \in C_{\sigma,\tau}, \ \forall\, x, y \in R$$

elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadede y yerine h(y) yazarsak

$[d(x), h(h(y))]_{\sigma,\tau} - [d(h(y)), h(x)]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Hipotezden, $d(h(y)) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $x, y \in R$ için $[d(x), h^2(y)]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ise, her $y \in R$ için

$$[d(R), h^2(y)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau} \tag{4.22}$$

olması demektir. Lemma 4.1.5 den, her $y \in R$ için $h^2(y) \in Z$ olur. Yani, $h^2(R) \subset Z$ dir. Teorem 3.3.4 den, R halkası değişmelidir.

Teorem 4.2.7. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her $x \in R$ için $[d(x),\ x]_{\sigma,\ \tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde $d : R \to R$ bir (σ,τ)-türev var ise $d = 0$ veya R değişmelidir.

İspat: Kabul edelim ki, $d \neq 0$ olan bir $(\sigma,\ \tau)$-türev olsun. Hipotezden, her $x \in R$ için $[d(x),\ x]_{\sigma,\ \tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dır. Bu ifadede, $y \in R$ olmak üzere, x yerine x + y yazarsak

$[d(x+y),\ x+y]_{\sigma,\ \tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ifadeyi $(\sigma,\ \tau)$-türev tanımını kullanarak düzenlersek

$$[d(x+y),\ x+y]_{\sigma,\ \tau} = [d(x)+d(y),\ x+y]_{\sigma,\ \tau} = [d(x),\ x]_{\sigma,\ \tau} + [d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau} + [d(y),\ x]_{\sigma,\ \tau} + [d(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

olduğu bulunur. Hipotezden, $[d(x),\ x]_{\sigma,\ \tau}$, $[d(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$$[d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau} + [d(y),\ x]_{\sigma,\ \tau} \in C_{\sigma,\tau}\ ,\ \forall\, x, y \in R \tag{4.23}$$

elde edilir. Öte yandan, $[d(x),\ [y,\ x]]_{\sigma,\ \tau} = [[d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau},\ x]_{\sigma,\ \tau} - [[d(x),\ x]_{\sigma,\ \tau}, y]_{\sigma,\ \tau}$ dir. $[d(x),\ x]_{\sigma,\ \tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını yukarıdaki özdeşlikte kullandığımızda

$$[d(x),\ [y,\ x]]_{\sigma,\ \tau} = [[d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau},\ x]_{\sigma,\ \tau},\quad \forall\, x, y \in R \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.23) nolu özdeşlikte y yerine [y, x] yazarsak

$[d(x),\ [y,\ x]]_{\sigma,\ \tau} + [d([y,\ x]),\ x]_{\sigma,\ \tau} \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. (4.24) nolu özdeşliği kullandığımızda

$[[d(x),\ [y,\ x]]_{\sigma,\ \tau} + [d([y,\ x]),\ x]_{\sigma,\ \tau} = [[d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau},\ x]_{\sigma,\ \tau} + [d([y,\ x]),\ x]_{\sigma,\ \tau}$ olur. Yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$$[[d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau},\ x]_{\sigma,\ \tau} + [d([y,\ x]),\ x]_{\sigma,\ \tau} = [[d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau},\ x]_{\sigma,\ \tau} + \left[[d(y),\ x]_{\sigma,\ \tau} - [d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau},\ x\right]_{\sigma,\ \tau}$$

$$= [[d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau} + [d(y),\ x]_{\sigma,\ \tau} - [d(x),\ y]_{\sigma,\ \tau}\ ,\ x]_{\sigma,\ \tau}$$

$$= [[d(y),\ x]_{\sigma,\ \tau}\ ,\ x]_{\sigma,\ \tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. (4.23) nolu özdeşlikten $[[d(x), y]_{\sigma,\tau} + [d(y), x]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$0 = [[d(x), y]_{\sigma,\tau} + [d(y), x]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = [[d(x), y]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} + [[d(y), x]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. $[[d(y), x]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını kullanırsak $[[d(x), y]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğu bulunmuş olur. Bu durumda, her x, y ∈ R için $[[d(x), y]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Öte yandan, $[[d(x), y]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = [[d(x), x]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau} + [d(x), [y, x]]_{\sigma,\tau}$ dır.

$[[d(x), x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $[[d(x), y]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = [d(x), [y, x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani, her x, y ∈ R için $[d(x), [y, x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dir. $I_{d(x)} : R \to R$,

$x \to [d(x), y]_{\sigma,\tau} = d(x)\sigma(y) - \tau(y)d(x)$ olarak tanımlanan bir (σ, τ)-iç türev olmak üzere son ifadeyi düzenlediğimizde her x, y ∈ R için $I_{d(x)}([y, x]) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu bulunur.

$I_x : R \to R$, $y \to [x, y] = xy - yx$ olarak tanımlanan bir iç türev olmak üzere her y ∈ R için $I_{d(x)}(I_x(y)) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu, $I_{d(x)}(I_x(R)) \subset C_{\sigma,\tau}$ olması demektir. Lemma 4.2.6 den, her x ∈ R için $I_{d(x)} = 0$ veya $I_x = 0$ olur. Bu durumda, $A = \{x \in R \mid I_{d(x)} = 0\}$ ve $B = \{x \in R \mid I_x = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir. Farz edelim ki, R = A olsun. Bu durumda, her x ∈ R için $I_{d(x)} = 0$ dır. Bu, her x ∈ R için $d(x) \in C_{\sigma,\tau}$ olması demektir. Yani, $d(R) \subset C_{\sigma,\tau}$ dir. Bu durumda, $[d(R), d(R)]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Teorem 4.2.2 den, $d \neq 0$ olduğunu kabul ettiğimiz için $R \subseteq Z$ dir. Böylece bu durum için ispat biter. Şimdi de, farz edelim ki, R = B olsun. Bu, her x ∈ R için x ∈ Z demektir. Böylece, $R \subseteq Z$ olur.

Teorem 4.2.8. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere her x, y ∈ U için d(xy) = d(yx) olacak biçimde d, sıfırdan farklı bir (σ, τ)-türev ise R değişmelidir.

İspat: Hipotezden, her x, y ∈ U için d(xy) = d(yx) dir. Bu durumda,

d(xy) – d(yx) = 0 olur. Bu, her x, y ∈ U için,

$$d([x, y]) = 0 \tag{4.25}$$

olması demektir. Bulmuş olduğumuz bu ifadede, $z \in U$ olmak üzere, y yerine $[y, z]$ yazarsak $d([x, [y, z]]) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$d([x,[y,z]]) = [d(x), [y, z]]_{\sigma, \tau} - [d([y, z]), x]_{\sigma, \tau} = 0$ bulunur. (4.25) nolu özdeşliği kullanarak düzenlediğimizde, her $x, y \in U$ için

$$[d(x), [y, z]]_{\sigma, \tau} = 0$$

elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadede, $r \in R$ olmak üzere, x yerine xr yazarsak

$[d(xr), [y, z]]_{\sigma, \tau} = 0$ bulunur. Bu ifadeyi, (σ, τ)-türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde

$$0 = [d(xr), [y, z]]_{\sigma, \tau} = [d(x)\sigma(r) + \tau(x)d(r), [y, z]]_{\sigma, \tau}$$

$$= [d(x)\sigma(r), [y, z]]_{\sigma, \tau} + [\tau(x)d(r), [y, z]]_{\sigma, \tau}$$

$$= d(x)[\sigma(r), \sigma([y, z])] + [d(x), [y, z]]_{\sigma, \tau}\sigma(r) + \tau(x)[d(r), [y, z]]_{\sigma, \tau} +$$

$$[\tau(x), \tau([y, z])]d(r)$$

bulunur. $[d(x), [y, z]]_{\sigma, \tau} = 0$ ve σ, τ nun otomorfizm olmaları kullanıldığında

$d(x)\sigma([r, [y, z]]) + \tau(x)[d(r), [y, z]]_{\sigma, \tau} + \tau([x, [y, z]])d(r) = 0$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede, $u, v \in U$ olmak üzere, r yerine $[u, v]$ yazarsak

$d(x)\sigma([[u,v], [y, z]]) + \tau(x)[d([u,v]), [y, z]]_{\sigma, \tau} + \tau([x, [y, z]])d([u,v]) = 0$ olur. (4.25) nolu özdeşlikten $d([u,v]) = 0$ dır. Bu ifadeyi yukarıdaki özdeşlikte kullandığımızda

her $x, y, z, u, v \in U$ için $d(x)\sigma([[u,v], [y, z]]) = 0$ elde edilir. Bu durumda,

$d(U)\sigma([[u,v], [y, z]]) = 0$ olur. Lemma 4.1.2 den, her $y, z, u, v \in U$ için $d = 0$ veya $\sigma([[u,v], [y, z]]) = 0$ dır. d, sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türev olduğundan her $y, z, u, v \in U$ için $\sigma([[u,v], [y, z]]) = 0$ olur. σ, 1-1 olduğundan her $y, z, u, v \in U$ için

$[[u,v], [y, z]] = 0$ dır. Bu ifadede y yerine $[u, v]$ yazarsak $[[u,v], [[u,v], z]] = 0$ olur.

$I_{[u, v]} : R \to R$, $y \to [[u, v], y]$ olarak tanımlanan bir iç türev olmak üzere son bulmuş olduğumuz özdeşliği düzenlersek, her $z \in U$ için $I^2_{[u, v]}(z) = 0$ olur. Bu, $I^2_{[u, v]}(U) = 0$

olması demektir. Lemma 4.2.4 den, $I_{[u,\, v]} = 0$ dır. Bu ise, $[u, v] \in Z$ demektir. Bu işlemler her $v \in U$ için yapılabileceğinden, her $u \in U$ için $[u, U] \subset Z$ olur. $I_u : R \to R,\ x \to [u, x]$ olarak tanımlanan bir iç türev olmak üzere, $I_u(U) \subset Z$ olur. Lemma 4.2.1 den, $I_u = 0$ veya R değişmelidir. $I_u = 0$ olması durumunda $u \in Z$ dir. Böylece, her $u \in U$ için $u \in Z$ olduğundan $U \subset Z$ olur. Lemma 2.31 den, R değişmelidir. Böylece, iki durum için de ispat biter.

BÖLÜM 5

HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümde, Bojan Hvala tarafından Genelleştirilmiş Türevli halkalar için yapılan çalışma incelenmiştir. Daha sonra ise, Genelleştirilmiş Türevli halkaların Lie idealleri üzerinde komütatiflikle ilgili yapılan çalışma araştırılmıştır.

5.1. Halkalarda Genelleştirilmiş Türevler

Hvala B., 1998.

Lemma 5.1.1. [Bresar M., 1995, Lemma 1] a_i, $b_i \in A$ olmak üzere her $x \in R$ için $\sum_i a_i x b_i = 0$ olması durumunda her $a_i = 0$ veya $b_i = 0$ değil ise ai' ler kendi arasında, b_i' ler kendi arasında C- bağımlıdır.

Propositıon 5.1.2. Farzedelimki a_j, $c_i \in R$ ve $f_j : R \rightarrow R$, $h_i : R \rightarrow R$ herhangi iki dönüşüm olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z)xa_j + \sum_{i=1}^{k} c_i z h_i(x) = 0 \,, \ \forall\ x,\ y \in R$$

sağlansın. $\{a_1, \dots , a_n\}$ ve $\{c_1, \dots , c_k\}$ kümeleri C-bağımsız kümeler ise $i = 1, \dots , k$, $j = 1, \dots , n$ olmak üzere $q_{ij} \in Q_r (R_C)$ için, $\forall\ x,\ z \in R,\ i = 1,\ ...,\ k,\ j = 1,\ ...,\ n$

$$f_j(z) \ = \ -\sum_{i=1}^{k} c_i z q_{ij} \,, \quad h_i(x) \ = \ \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x a_j$$

olur.

Not 5.1.3. Yukarıdaki ifadede, R halkasının birim elemanı olmasa bile a_i veya c_i lerden birinin 1' e eşit olması durumunda Proposition 5.1.2 nin sonucu doğrudur.

Lemma 5.1.4. R bir halka ve $f : R \to R_C$ tanımlı her x, y $\in R$ için $f(xy) = f(x)y$ sağlayan bir toplamsal dönüşüm ise her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

İspat: $f : R \to R_C$ tanımlı dönüşüm yardımıyla $x_i \in R$, $0 \neq \lambda_i \in C$ olmak üzere

$\bar{f}(\sum x_i\lambda_i) = \sum f(x_i)\lambda_i$ sağlayan $\bar{f} : R_C \to R_C$ tanımlayalım. Öncelikle verilen bu ifadenin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $\sum x_i\lambda_i = 0$ olsun. $0 \neq \lambda_i \in C$ olduğundan I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere $0 \neq \lambda_i I \subset R$ dir. $a \in I$ alalım.

$0 = (\sum x_i\lambda_i)a = \sum(x_i\lambda_i)a = \sum x_i(\lambda_i a) \in R$ olur. f, iyi tanımlı olduğu için

$f(\sum x_i(\lambda_i a)) = 0$ dır. Bu ifadeyi, f nin toplamayı koruması ve kabulümüzü kullanarak düzenlersek $\sum f(x_i)(\lambda_i a) = 0$ olur. Buradan, her $a \in I$ için $(\sum f(x_i)\lambda_i)a = \bar{f}(\sum x_i\lambda_i)a = 0$ olduğu bulunur. Böylece, $\bar{f}(\sum x_i\lambda_i)I = 0$ olur. I, R halkasının bir ideali olduğundan

$\bar{f}(\sum x_i\lambda_i)RI \subset \bar{f}(\sum x_i\lambda_i)I = 0$ bulunur. Yani , $\bar{f}(\sum x_i\lambda_i)RI = 0$ dır. $R^2 \subset R$ ve

Uyarı 2.23 kullanılarak son ifade düzenlendiğinde $\bar{f}(\sum x_i\lambda_i)R = 0$ veya $I = 0$ olur. I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olduğu için $\bar{f}(\sum x_i\lambda_i)R = 0$ dır. Bu ise,

$\bar{f}(\sum x_i\lambda_i) = 0$ demektir. Böylece $\bar{f}$, iyi tanımlı olur. Şimdi de, $x_i, y_j \in R$, $\lambda_i, \beta_j \in C$

olmak üzere $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i$ ve $y = \sum_{j=1}^{m} y_j\beta_j \in R_C$ alalım. $t = 1,\ldots, n$ için $z_t = x_i$ ve $\phi_t = \lambda_i$ ve

$t = n+1,\ldots, n+m$ için $z_t = y_j$ ve $\phi_t = \beta_j$ olmak üzere

$$\bar{f}(x+y) = \bar{f}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} y_j\beta_j\Big) = \bar{f}\Big(\sum_{t=1}^{n+m} z_t\phi_t\Big) = \sum_{t=1}^{n+m} f(z_t)\phi_t$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} f(y_j)\beta_j$$

$$= \bar{f}\,(\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i) + \bar{f}\,(\sum_{j=1}^{m} y_j\beta_j) = \bar{f}\,(x) + \bar{f}\,(y)$$

olur. Son ifade her $x, y \in R_C$ için sağlanacağından $\bar{f}$, bir toplamsal dönüşümdür. Öte yandan, $\bar{f}\,(xy) = \bar{f}\,(x)y$ olduğunu göstererek $\bar{f}$ 'nın sağ R_C-modül homomorfizması olduğunu ispatlamış olacağız. x_i, $y_j \in R$, λ_i, $\beta_j \in C$ olmak üzere $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i$ ve $y = \sum_{j=1}^{m} y_j\beta_j \in R_C$ alalım. Bu ifadeyi $\bar{f}$ 'nin toplamsal olması, genelleştirilmiş türev tanımı ve kabulümüz yardımıyla düzenlersek

$$\bar{f}\,(xy) = \bar{f}\,[(\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i)(\sum_{j=1}^{m} y_j\beta_j)] = \bar{f}\,(\sum_i(\sum_j x_i\lambda_i(y_j\beta_j))) = \sum_i(\bar{f}(\sum_j x_i y_j(\lambda_i\beta_j)))$$

$$= \sum_i\ (\sum_j f(x_i y_j)\lambda_i\beta_j) = \sum_i\ (\sum_j f(x_i)y_j(\lambda_i\beta_j)) = (\sum_i f(x_i)\lambda_i)(\sum_j y_j\beta_j) = \bar{f}\,(x)y$$

bulunur. Yani, $\bar{f}$ sağ R_C-modül homomorfizmasıdır. R_C, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $\bar{f} : R_C \to R_C$, sağ R_C-modül homomorfizması olduğundan her $x \in R_C$ için $\bar{f}\,(x) = qx$ olacak biçimde en az bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır. Her $x \in R$ için

$\bar{f}\,(x) = \bar{f}\,(\sum_{i=1}^{1} x_i) = \sum_{i=1}^{1} f(x_i) = f(x_i) = f(x)$ dir. Böylece, $\bar{f}$, f toplamsal dönüşümünün genişletilmesi olur.

Lemma 5.1.5. R değişmeli olmayan bir halka ve $F : R \to C$ bir genelleştirilmiş türev olması durumunda $F = 0$ dır.

İspat: D bir türev olmak üzere F, D ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olsun. Kabulümüzden her $x, y \in R$ için $F(x) \in C$ dir. Genelleştirilmiş türev tanımından

$$F(xy) = F(x)y + xD(y),\ \forall\ x, y \in R \tag{5.1}$$

olur. (5.1) nolu ifadeyi sırasıyla sağdan ve soldan y ile çarparsak $F(xy)y = F(x)yy + xD(y)y$ ve $yF(xy) = yF(x)y + yxD(y)$ bulunur. Kabulümüzü kullanır ve bu iki ifadeyi taraf tarafa çıkarırsak

$$yxD(y) - xD(y)y = 0, \ \forall \ x, y \in R$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede, $z \in R$ olmak üzere, x yerine xz yazarsak

$$(yx)zD(y) - xz(D(y)y) = 0, \ \forall \ x, y, z \in R$$

bulunur. Bu ifadeye Lemma 5.1.1' i uygularsak her $x, y \in R$ için $\lambda_1, \lambda_2 \in C$ olmak üzere $yx = \lambda_1(-x)$ ve $D(y)y = D(y)\lambda_2$ olur. Bu ifadeleri düzenlediğimizde $(y + \lambda_1)R = 0$ ve $D(y)(y - \lambda_2) = 0$ bulunur. İlk ifadeden $y \in C$ olduğu bulunur. İkinci ifade, $y \in C$ olması kullanılarak düzenlenirse $D(y) = 0$ veya $y \in C$ olur. $A = \{y \in R \mid y \in C\}$ ve $B = \{y \in R \mid D(y) = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. Bu durumda, Teorem 2.6 dan, $R = A$ veya $R = B$ dir. $R = A$ olması durumunda her $y \in R$ için $y \in C$ olur. Yani, R değişmelidir. Bu, R nin değişmeli olmayan bir halka olmasıyla çelişir. O halde, $R = B$ dir. Yani, her $y \in R$ için $D(y) = 0$ dır. Bu ise, $D = 0$ demektir. (5.1) nolu ifadeyi $D = 0$ olmasını kullanarak düzenlersek her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)y$ olur. Kabulümüzü kullanırsak, Lemma 2.32 den, $F(x) = 0$ veya $y \in C$ olur. Her $y \in R$ için $y \in C$ olması durumu R nin değişmeli olmayan bir halka olmasıyla çelişir. O halde, her $x \in R$ için $F(x) = 0$ dır. Böylece, $F = 0$ olur.

5.1.1. İki Genelleştirilmiş Türevin Çarpımı

Hvala B., 1998.

Bu bölümde, A : R, R_C, $R_C + C$, $Q_r(R)$, $Q_s(R)$, $Q_r(R_C)$, $Q_s(R_C)$ halkalarından biridir.

Lemma 5.1.1.1. R bir halka, $a, b \in A$ olmak üzere $f : R \to A$, $f(x) = axb$ şeklinde tanımlanan bir genelleştirilmiş türev ise $a \in C$ veya $b \in C$ dir.

İspat: f, d ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olmak üzere her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ dir. Genelleştirilmiş türev tanımından yaralanarak bu ifadeyi düzenlediğimizde $a(xy)b = (axb)y + xd(y)$ bulunur. Yani,

$$ax[y, b] - xd(y) = 0, \ \forall \ x, y \in R \tag{5.2}$$

dır. Yukarıdaki ifadede, $z \in R$ olmak üzere, x yerine xz yazarsak

$$axz[y, b] - xzd(y) = 0, \ \forall \ x, y, z \in R$$

bulunur. Bu ifadede Lemma 5.1.1' i uygularsak $\lambda_1, \lambda_2 \in C$ olmak üzere $ax = (-x)\lambda_1$ ve

$d(y) = \lambda_2[y, b]$ olur. Bu ifadeleri düzenlediğimizde $(a + \lambda_1)R = 0$ ve $d(y) = \lambda_2[y, b]$ elde edilir. İlk ifadeden $a \in C$ olduğu bulunur. (5.2) nolu ifadeyi $a \in C$ olmasını kullanarak düzenlersek her $x, y \in R$ için $x(a[y, b] - d(y)) = 0$ bulunur. Yani, $R(a[y, b] - d(y)) = 0$ dır.

Uyarı 2.23 den, $a[y, b] - d(y) = 0$ elde edilir. Bu ifadeyi $d(y) = \lambda_2[y, b]$ olmasını kullanarak düzenlersek $(a - \lambda_2)[y, b] = 0$ olur. $a \in C$ olması ve Uyarı 2.23 kullanırsa $a \in C$ veya

her $y \in R$ için $[y, b] = 0$ olduğu bulunur. Böylece, $a \in C$ veya $b \in C$ olur.

Teorem 5.1.1.2. R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan bir asal halka ve $f_1, f_2 : R \to R$ genelleştirilmiş türevler olmak üzere, $f_3 = f_1 f_2$ çarpımı ancak ve ancak aşağıdaki özelliklerden biri sağlanması durumunda bir genelleştirilmiş türevdir.

(i) $f_1(x) = \gamma x$ veya $f_2(x) = \gamma x$ olacak biçimde en az bir $\gamma \in C$ vardır.

(ii) $f_1(x) = xa$ ve $f_2(x) = xb$ olacak biçimde $a, b \in Q_r(R_C)$ vardır.

(iii) $f_1(x) = ax$ ve $f_2(x) = bx$ olacak biçimde $a, b \in Q_r(R_C)$ vardır.

(iv) $f_1(x) = ax + xb$ ve $f_2(x) = \lambda x + \mu(ax - xb)$ olacak biçimde $\lambda, \mu \in C$ ve $a, b \in Q_r(R_C)$ vardır.

İspat ($\Rightarrow$): Kabul edelim ki $f_3 = f_1 f_2$ genelleştirilmiş türev olsun. Bu durumda, d_1, d_2, d_3, R halkasının türevleri olmak üzere, $(f_1, d_1), (f_2, d_2), (f_3, d_3)$ genelleştirilmiş türevleri için

$$f_i(xy) = f_i(x)y + xd_i(y), \ \ \forall \ x, y \in R, \ i=1, 2, 3$$

sağlanır. Yukarıdaki ifadeyi kullanırsak, $f_3(xy) = f_3(x)y + x d_3(y)$ olur. Öte yandan,

$$f_3(xy) = f_1 f_2(xy) = f_1(f_2(xy)) = f_1(f_2(x)y + x d_2(y))$$

$$= f_3(x)y + f_2(x) d_1(y) + f_1(x) d_2(y) + x d_1 d_2(y)$$

dir. Bu iki ifadeyi birlikte kullandığımızda

$$f_2(x)d_1(y)+f_1(x)d_2(y)+x(d_1 d_2 - d_3)(y)=0, \quad \forall\ x, y \in R$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede, $z \in R$ olmak üzere, x yerine zx yazar ve genelleştirilmiş türev tanımını kullanarak düzenlersek her $x, y, z \in R$ için

$$f_1(z)x d_2(y) + f_2(z)x d_1(y) + z[d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) + x(d_1 d_2 - d_3)(y)] = 0 \quad (5.3)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede y elemanını sabit tutar ve

$F_1 : R \rightarrow R, \quad F_1(z) = f_1(z),$

$F_2 : R \rightarrow R, \quad F_2(z) = f_2(z),$

$H_1 : R \rightarrow R, H_1(x) = d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) + x(d_1 d_2 - d_3)(y),$

$a_1 = d_2(y)$, $a_2 = d_1(y)$, $c_1 = 1$ olarak tanımlar, sonrasında da (5.3) nolu ifadeyi düzenlersek

$$\sum_{i=1}^{2} F_i(z)xa_i + c_1 zH_1(x) = 0, \ \forall\ x, z \in R$$

elde edilir. Bu durumda, $\{d_1(y), d_2(y)\}$ kümesinin C-bağımlı olup olmamasına göre iki durum söz konusudur. Eğer, C- bağımsız bir küme ise Proposition 5.1.2 uygulanır. O halde,

(1) Her $y \in R$ için, $\{d_1(y), d_2(y)\}$ C-bağımlıdır.

(2) Her $z \in R$ için, $F_1(z) = -zq_1$, $F_2(z) = -zq_2$ olacak biçimde $q_1, q_2 \in Q_r(R_C)$ vardır.

(2) durumunda $a = -q_1$ ve $b = -q_2$ olsun dersek $f_1(z) = za$ ve $f_2(z) = zb$ olacak biçimde $a, b \in Q_r(R_C)$ var olduğu görülür. Böylece, (ii) durumu için ispat bitmiş olur. Şimdi de (1) durumunu inceleyelim. Bu durumda, her $y \in R$ ve $\lambda \in C$ için $d_1(y) = \lambda d_2(y)$ olur. Yani,

her $y \in R$ için $[d_1(y), d_2(y)] = [\lambda d_2(y), d_2(y)] = \lambda[d_2(y), d_2(y)] = 0$ dır. Bu ise, d_1 ve d_2 C-bağımlı demektir. Yani, en az biri sıfırdan farklı olan $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ için,

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 = 0 \quad (5.4)$$

dır. Yukarıdaki ifadede öncelikle $d_1 = 0$ olması durumunu inceleyelim. f_1 genelleştirilmiş türev olduğundan her x, $y \in R$ için $f_1(xy) = f_1(x)y$ olur. Lemma 5.1.4 den, $f_1(x) = qx$ olacak biçimde en az bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır. Benzer şekilde, $d_2 = 0$ ise $f_2(x) = q'x$ olacak biçimde en az bir $q' \in Q_r(R_C)$ vardır. O halde, $d_1 = 0$ ve $d_2 = 0$ olması durumunda,

$f_1(x) = qx$ ve $f_2(x) = q'x$ olacak biçimde q, $q' \in Q_r(R_C)$ vardır. Bu ise, (iii) ifadesinin ispatıdır. Şimdi de, $d_1 = 0$ olması durumunda her $x \in R$ için $f_1(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ var olmasını kullanarak (5.3) nolu ifadeyi düzenlersek

$$qz(x\,d_2(y)) - z(x\,d_3(y)) = 0, \ \forall\ x, y, z \in R$$

elde edilir. Farz edelim ki, yukarıdaki ifadede $d_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda, $x\,d_2(y) \neq 0$ olacak biçimde x, $y \in R$ seçebiliriz. Böyle bir seçimden sonra Lemma 5.1.1' i uygularsak λ, $\beta \in C$ olmak üzere $q = (-1)\lambda$ ve $xd_2(y) = xd_3(y)\beta$ olduğu bulunur. Buradan, $q \in C$ olduğu elde edilir. O halde, $f_1(x) = qx$ olacak biçimde en az bir $q \in C$ vardır. Benzer şekilde, $d_2 = 0$ olması durumunda $f_2(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır. Bu eşitliği kullanarak (5.3) nolu ifadeyi düzenlersek

$$qz(x\,d_1(y)) - zx\,d_3(y) = 0, \ \forall\ x, y, z \in R$$

elde edilir. Kabul edelim ki $d_1 \neq 0$ olsun. $x\,d_1(y) \neq 0$ olacak biçimde x, $y \in R$ seçebiliriz. Bu durumda, Lemma 5.1.1' i uygularsak $q \in C$ olduğu bulunur. O halde, bu iki durum bize (i) ifadesinin ispatını verir. Son olarak $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olması durumunu inceleyelim. Kabul edelim ki (5.4) nolu ifadede $\alpha_2 \neq 0$ olsun. C, cisim olduğu için $0 \neq \alpha_2^{-1} \in C$ dir. (5.4) nolu ifadeyi soldan α_2^{-1} ile çarparsak $d_2 = -\alpha_2^{-1}\alpha_1 d_1$ bulunur. $0 \neq \tau = -\alpha_2^{-1}\alpha_1$ dersek,

$d_2 = \tau\, d_1$ elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu bilgiden yararlanarak $F : R \to R_C$,

$F(x) = f_2(x) - \tau f_1(x)$ olan ve her x, $y \in R$ için $F(xy) = F(x)y$ sağlayan bir tanım verelim. Bu durumda, F, iyi tanımlıdır ve toplamayı korur. O halde, Lemma 5.1.4 den, her $x \in R$ için $F(x) = qx$ olacak biçimde en az bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır. F nin tanımını yeniden düzenler

$$f_2(x) = qx + \tau f_1(x), \ \forall\ x \in R \tag{5.5}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi ve her $y \in R$ için $d_2(y) = \tau\, d_1(y)$ olmasını kullanarak (5.3) nolu ifadeyi düzenlersek

$$(2\tau f_1(z) + qz)x\,d_1(y) + z[\,d_1(x)(2\tau\, d_1(y)) + x(d_1\, d_2 - d_3)(y)\,] = 0$$

bulunur. $F(z) = 2\tau f_1(z) + qz$ ve $H(x) = d_1(x)(2\tau\, d_1(y)) + x(d_1\, d_2 - d_3)(y)$ olsun dersek yukarıdaki ifadeden

$$F(z)x\,d_1(y) + zH(x) = 0,\ \forall\ x, y, z \in R$$

elde edilir. $d_1(y) \neq 0$ olacak biçimde bir $y \in R$ seçersek $\{d_1(y)\}$ ve $\{1\}$ C-bağımsız kümeler olduğu için, Proposition 5.1.2 den, her $x, z \in R$ için $F(z) = -zq^{|}$ ve $H(x) = q^{|}x\,d_1(y)$ olur. Bu durumda, $q, q^{|} \in Q_r(R_C)$ olmak üzere, $2\tau f_1(z) + qz = -zq^{|}$ dir.

$a = -(2\tau)^{-1}q$, $b = -(2\tau)^{-1}q^{|} \in Q_r(R_C)$ olsun dersek $f_1(x) = ax + xb$ olur. Bulduğumuz eşitliği (5.5) nolu ifadede yerine yazarsak $f_2(x) = (\tau a + q)x + a\tau b$ bulunur. $f_3 = f_1 f_2$ ifadesini düzenlersek

$$f_3(x) = (\tau a^2 + aq)x + (2\tau a + q)xb + x\tau b^2,\ \forall\ x \in R$$

elde edilir. $x \to (\tau a^2 + aq)x + x\tau b^2$ bir genelleştirilmiş türevdir. f_3, genelleştirilmiş türev olduğundan $x \to (2\tau a + q)xb$ de genelleştirilmiş türevdir. O halde, Lemma 5.1.1.1 den, $2\tau a + q \in C$ veya $b \in C$ dir. $2\tau a + q \in C$ olması durumunda $\mu = -\tau \in C$ dersek,

$q = \lambda + 2\mu a$ olur. Bu durumda, $f_2(x) = \lambda x + \mu(ax - xb)$ olur. Bu ise, (iv) ifadesinin ispatıdır.

($\Leftarrow$) **(i)** ifadesi sağlansın. Bu durumda,

$f_1 f_2(xy) = f_1(f_2(xy)) = \gamma(f_2(xy)) = \gamma(f_2(x)y + xd_2(y)) = f_3(x) + x\gamma d_2(y)$ olur. O halde, $\gamma d_2 : R \to R$ türev olduğu için $f_3 = f_1 f_2$ genelleştirilmiş türevdir. Benzer şekilde, her $x \in R$ için $f_2(x) = \gamma x$ olacak biçimde en az bir $\gamma \in C$ var olsun. Bu durumda,

$f_3(xy) = f_1 f_2(xy) = f_1(f_2(xy)) = f_1(\gamma(xy)) = f_1(\gamma x)y + \gamma x d_1(y) = f_3(x)y + x\gamma d_1(y)$ olur.

O halde, $\gamma d_1(y) : R \to R$ türev olduğu için $f_3 = f_1 f_2$ genelleştirilmiş türevdir. **(ii)** ifadesi sağlansın. Bu durumda,

$$f_3(xy) = f_1(f_2(xy)) = f_1(xyb) = (xyb)a = xyba + xbay - xbay = f_3(x)y + x[y, ba]$$

olur. [y, ba], ba ile belirlenen iç türev olduğundan f_3, genelleştirilmiş türevdir. **(iii)** ifadesi sağlansın. Bu durumda, $f_3(xy) = f_1(f_2(xy)) = f_1(bxy) = (abx)y = f_3(x)y$ olur. '0' bir türev olduğu için f_3, genelleştirilmiş türevdir. **(iv)** ifadesi sağlansın. Bu durumda, $f_3(xy) = f_1(\lambda xy + \mu(axy - xyb)) = f_3(x)y + x(\lambda[y, b] + \mu[b^2, y])$ olur. İki türevin toplamı yine bir türev olduğundan $\lambda[y, b] + \mu[b^2, y]$ bir türevdir. O halde, f_3, genelleştirilmiş türevdir.

Sonuç 5.1.1.3. R bir halka, $f_1, f_2 : R \to R$ genelleştirilmiş türevler olmak üzere ancak ve ancak aşağıdaki özelliklerden biri sağlanması durumunda $f_1f_2 = 0$ dır.

(i) $f_1 = 0$ veya $f_2 = 0$ dır.

(ii) $f_1(x) = xa, f_2(x) = xb$ ve ba = 0 olacak biçimde a, b $\in Q_r(R_C)$ vardır.

(iii) $f_1(x) = ax, f_2(x) = bx$ ve ab = 0 olacak biçimde a, b $\in Q_r(R_C)$ vardır.

(iv) $f_1(x) = ax + xb,\ f_2(x) = \lambda x + \mu(ax - xb)$ ve $\lambda a + \mu a^2 = \mu b^2 - \lambda b \in C$ olacak biçimde $\lambda, \mu \in C$ ve $a, b \in Q_r(R_C)$ vardır.

İspat ($\Rightarrow$): Kabul edelim ki, **(i)** ifadesi sağlansın. Öncelikle, $f_1 = 0$ olsun. Bu durumda her x, y $\in$ R için $f_1f_2(xy) = 0$ olur. Bu ise, $f_1f_2 = 0$ demektir. Şimdi de, $f_2 = 0$ olsun. Bu durumda da $f_1f_2(xy) = f_1(0) = 0$ olur. Böylece her iki durumda da $f_1f_2 = 0$ olduğu bulunur. **(ii)** ifadesi sağlansın. Bu durumda, her x, y $\in$ R için $f_1f_2(xy) = f_1(f_2(xy)) = f_1(f_2(xyb)) = xyba = 0$ olur. Yani, $f_1f_2 = 0$ dır. **(iii)** ifadesi sağlansın. Bu durumda, her x, y $\in$ R için $f_1f_2(xy) = f_1(f_2(xy)) = f_1(bxy) = abxy = 0$ olur. Yani, $f_1f_2 = 0$ dır. **(iv)** ifadesi sağlansın. Bu durumda, her x, y $\in$ R için

$$f_1(f_2(xy)) = f_1(\lambda xy + \mu(axy - xyb)) = a\lambda xy + a\mu axy - a\mu xyb + \lambda xyb + \mu axyb - \mu xyb^2$$

$$= (\lambda a + \mu a^2)xy + xy(\lambda b - \mu b^2) = (\lambda a + \mu a^2 + \lambda b - \mu b^2)xy$$

$$= 0$$

olur. Yani, $f_1f_2 = 0$ dır.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki, $f_1f_2 = 0$ olsun. “0” bir genelleştirilmiş türev olduğu için Teorem 5.1.1.2 in tüm ifadeleri sağlanır. (i) ifadesini uygulandığında $f_1(x) = \gamma x$ veya $f_2(x) = \gamma x$ olacak biçimde bir $\gamma \in C$ olduğu görülür. İlk olarak $f_1(x) = \gamma x$ olsun. Bu durumda $f_1f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \gamma f_2(x) = 0$ olur. Uyarı 2.23 ve $\gamma \in C$ olması kullanıldığında $\gamma = 0$ veya $f_2(x) = 0$ bulunur. $\gamma = 0$ olması durumunda $f_1 = 0$ olur. O halde, $f_1 = 0$ veya $f_2 = 0$ dır. Şimdi de, $f_2(x) = \gamma x$ olsun. Bu durumda $f_1f_2(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(\gamma x) = 0$ olur. Bu ifadeyi, $y \in R$ olmak üzere, x yerine xy yazarak genelleştirilmiş türev tanımını kullanıp düzenlediğimizde $0 = f_1((\gamma x)y) = f_1(\gamma x)y + \gamma x d_1(y) = \gamma x d_1(y)$ bulunur. Uyarı 2.23 den, $\gamma = 0$ veya $d_1 = 0$ olur. $\gamma = 0$ olması durumunda $f_2 = 0$ olur. $\gamma \neq 0$ olması durumunda ise $f_1(xy) = f_1(x)y + x d_1(y) = f_1(x)y$ olur. Lemma 5.1.4 den, $f_1(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır. Bu durumda, $f_1(\gamma x) = q\gamma x = qx\gamma$ olur. Bu ise, $q = 0$ veya $\gamma = 0$ demektir. $\gamma \neq 0$ olduğu için $q = 0$ olur. Yani, $f_1 = 0$ dır. Böylece, (i) ifadesi ispatlanmış olur. Teorem 5.1.1.2’ in (ii) ifadesini uygulandığında $f_1(x) = xa$ veya $f_2(x) = xb$ olacak biçimde $a, b \in Q_r(R_C)$ var olduğunu bulunur. Bu durumda, her $x \in R$ için $f_1f_2(x) = f_1(xb) = xba = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, $ba = 0$ olduğu bulunur. Böylece (ii) ifadesi ispatlanmış olur. Benzer şekilde, Teorem 5.1.1.2 nin (iii) ifadesi yardımıyla her $x \in R$ için $f_1f_2(x) = f_1(bx) = abx = 0$ olduğu bulunur. Uyarı 2.23 den, $ab = 0$ olduğu elde edilir. Bu ise, (iii) ifadesinin ispatıdır. Son olarak Teorem 5.1.1.2 nin (iv) ifadesi, f_1, f_2 nin genelleştirilmiş türevler olmasını ve $\lambda, \mu \in C$ olmasını kullanarak her $x \in R$ için $f_1f_2(x) = 0$ ifadesini düzenlersek

$$
\begin{aligned}
0 &= f_1(f_2(x)) = f_1(\lambda x + \mu(ax - xb)) = a\lambda x + \lambda xb + a\mu(ax - xb) + \mu(ax - xb)b \\
&= \lambda ax + \mu a^2x - \mu axb + x\lambda b + \mu axb - x\mu b^2 = \lambda ax + \mu a^2x + x\lambda b - x\mu b^2 \\
&= (\lambda a + \mu a^2)x + x(\lambda b - \mu b^2)
\end{aligned}
$$

bulunur. Lemma 5.1.1 den, $\lambda a + \mu a^2 \in C$ ve $\lambda b - \mu b^2 \in C$ olur. Yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde her $x \in R$ için $x(\lambda a + \mu a^2 + \lambda b - \mu b^2) = 0$ olur. Bu ise,

$\lambda a+\mu a^2+\lambda b-\mu b^2=0$ demektir. Yani, $\lambda a+\mu a^2=\mu b^2-\lambda b\in C$ dir. Böylece (iv) ifadesi de ispatlanmış olur.

Sonuç 5.1.1.4. R bir halka, $f: R\rightarrow R$ bir genelleştirilmiş türev ve $c, d\in R$ olmak üzere her $x\in R$ için $cf(x) + f(x)d = 0$ ise aşağıdaki özelliklerden biri sağlanır.

(i) $c, d\in C$ olmak üzere $c + d = 0$ dır.

(ii) $c\in C$ olmak üzere $f(x) = xb$ ve $b(c + d) = 0$ olacak biçimde bir $b\in Q_r(R_C)$ vardır.

(iii) $d\in C$ olmak üzere $f(x) = bx$ ve $(c + d)b = 0$ olacak biçimde bir $b\in Q_r(R_C)$ vardır.

(iv) $f(x) = \lambda x+\mu(cx-xd)$ ve $\lambda c+\mu c^2=\mu d^2-\lambda d\in C$ olacak biçimde bir $\lambda,\mu\in C$ vardır.

İspat: $g: R\rightarrow R$, $g(x) = cx + xd$ olan bir dönüşüm tanımlayalım. Tanımladığımız bu dönüşüm bir genelleştirilmiş iç türevdir ve her $x\in R$ için $gf(x) = cf(x) + f(x)d = 0$ olur. O halde, f, g genelleştirilmiş türevleri için Sonuç 5.1.1.3 ün tüm ifadeleri sağlanır.

Sonuç 5.1.1.3 ün (i) ifadesinden $g = 0$ veya $f = 0$ dır. $g = 0$ olması durumunda her $x\in R$ için $cx + xd = 0$ olur. Bu ifadede, $z\in R$ olmak üzere, x yerine zx yazarsak

$$czx + zxd = 0,\ \forall x, z\in R$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeye Proposition 5.1.2' i uygularsak $c, d\in C$ olduğu bulunur. Bu durumda, $g(x) = x(c + d) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, $c + d = 0$ elde edilir. Böylece, (i) ifadesi ispatlanmış olur. Sonuç 5.1.1.3 ün (ii) ifadesinden $g(x) = xa$, $f(x) = xb$ ve $ba = 0$ olacak biçimde $a, b\in Q_r(R_C)$ vardır. Bu durumda, $g(x) = xa = cx + xd$ olur. Yani,

$$cx + x(d-a) = 0,\ \forall x\in R$$

dır. Yukarıdaki ifadeye Lemma 5.1.1 uygulanırsa $c = a-d\in C$ elde edilir. $ba = 0$ olmasından yararlanırsak $b(c + d) = 0$ olur. Böylece, (ii) ifadesi ispatlanmış olur.

Sonuç 5.1.1.3 ün (iii) ifadesinden $g(x) = ax$, $f(x) = bx$ ve $ab = 0$ olacak biçimde

$a, b\in Q_r(R_C)$ vardır. Bu durumda, $g(x) = ax = cx + xd$ olur. Yani,

$$(c-a)x + xd = 0,\ \forall x\in R$$

dır. Yukarıdaki ifadeye Lemma 5.1.1 uygulanırsa $d = a - c \in C$ elde edilir. $ab = 0$ olmasından yararlanırsak $(d + c)b = 0$ olur. Böylece, (iii) ifadesi ispatlanmış olur. Son olarak, Sonuç 5.1.1.3 ün (iv) ifadesinden $f(x) = \lambda x + \mu(cx - xd)$ ve $\lambda c + \mu c^2 = \mu d^2 - \lambda d \in C$ olacak biçimde $\lambda, \mu \in C$ ve $a, b \in Q_r(R_C)$ vardır. Böylece (iv) ifadesi de ispatlanmış olur.

Sonuç 5.1.1.5. R bir halka, $f : R \to R$ bir genelleştirilmiş türev ve $c \in R - C$ olmak üzere her $x \in R$ için $f(x)c = cf(x)$ oluyor ise $f(x) = \lambda x + \mu(cx + xc)$ ve $\lambda c + \mu c^2 \in C$ olacak biçimde bir $\lambda, \mu \in C$ vardır.

İspat: Sonuç 5.1.1.4 de, $cf(x) + f(x)d = 0$ ifadesinde $d = - c$ olduğunu düşünürsek her $x \in R$ için $cf(x) = f(x)c$ olur. $c \in C$ olması durumunda eşitlik sağlanır. O halde, $c \notin C$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda, Sonuç 5.1.1.4 ün (iv) ifadesinden $f(x) = \lambda x + \mu(cx - x(-c))$ ve $\lambda c + \mu c^2 = \mu c^2 - \lambda c \in C$ olacak biçimde bir $\lambda, \mu \in C$ vardır.

Sonuç 5.1.1.6. R bir halka, $f : R \to R$ bir genelleştirilmiş türev ve $c \in R - \{0\}$ olmak üzere her $x \in R$ için $f(x)c + cf(x) = 0$ olması durumunda $f(x) = \mu(cx - xc)$ ve $\mu c^2 \in C$ olacak biçimde bir $\mu \in C$ vardır.

İspat: Sonuç 5.1.1.4 de $cf(x) + f(x)d = 0$ ifadesinde $d = c$ olduğunu düşünürsek her $x \in R$ için $cf(x) + f(x)c = 0$ olur. $c = 0$ olması durumunda eşitlik sağlanır. O halde, $c \neq 0$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda, Sonuç 5.1.1.4 ün (iv) ifadesinden, $f(x) = \lambda x + \mu(cx - xc)$ ve $\lambda c + \mu c^2 = \mu c^2 - \lambda c \in C$ olacak biçimde bir $\lambda, \mu \in C$ vardır.

$\lambda c + \mu c^2 = \mu c^2 - \lambda c$ ifadesini düzenlersek $2\lambda c = 0$ olur. Lemma 2.36 dan, $\lambda c = 0$ olduğu bulunur. $\lambda \in C$ olması kullandığımızda $\lambda = 0$ veya $c = 0$ olur. $c \neq 0$ olduğunu kabul ettiğimiz için $\lambda = 0$ elde edilir. Bu durumda, $f(x) = \mu(cx - xc)$ ve $\mu c^2 \in C$ olur.

Proposition 5.1.1.7. R bir halka, $f : R \to R$ bir genelleştirilmiş türev ve $f(R)$ ile değişmeli olan $a, b \in R$ için $\{a, b, 1\}$ C-bağımsız bir küme ise $f = 0$ dır.

İspat: a ve b, $f(R)$ ile değişmeli olduğundan $af(R) = f(R)a$, $bf(R) = f(R)b$ olduğu görülür. $a \notin C$ ve $b \notin C$ olması durumunda, Sonuç 5.1.1.5 den,

$$f(x) = \lambda_a x + \mu_a(ax + xa) \text{ ve } \lambda_a a + \mu_a a^2 \in C$$

$$f(x) = \lambda_b x + \mu_b(bx + xb) \text{ ve } \lambda_b b + \mu_b b^2 \in C$$

olacak biçimde bir $\lambda_a, \mu_a, \lambda_b, \mu_b \in C$ vardır. Yukarıdaki iki ifadeyi taraf tarafa çıkarırsak

$$((\lambda_a - \lambda_b) + (\mu_a a - \mu_b b))x + x(\mu_a a - \mu_b b) = 0, \forall x \in R$$

bulunur. Bu ifadede Lemma 5.1.1' i uygularsak, $(\lambda_a - \lambda_b) + (\mu_a a - \mu_b b) \in C$ ve

$\mu_a a - \mu_b b \in C$ elde edilir. $\{a, b, 1\}$ kümesinin C-bağımsız olması kullanıldığında

$\mu_a = \mu_b = 0$ olduğu bulunur. Bu durumda, $\lambda_a a \in C$ ve $\lambda_b b \in C$ olur. Kabulümüzde, $a \notin C$ ve $b \notin C$ olduğu için $\lambda_a \in C$ ve $\lambda_b \in C$ olur. Bu ise, her $x \in R$ için $f(x) = 0$ olması demektir. Böylece $f = 0$ olur.

Sonuç 5.1.1.8. R bir halka, $f : R \to R$ bir genelleştirilmiş türev olmak üzere f^2 bir genelleştirilmiş türev ise her $x \in R$ için $f(x) = ax$ veya $f(x) = xa$ olacak biçimde bir $a \in Q_r(R_C)$ vardır. Üstelik, $f^2 = 0$ olması durumunda f, yukarıdakilerden birini sağlar ve $a^2 = 0$ dır.

İspat: f^2 genelleştirilmiş türev olduğu için Teorem 5.1.1.2 nin (iv) ifadesinde $f_1 = f_2 = f$ dir ve $f(x) = ax + xb = \lambda x + \mu(ax - xb)$ olacak biçimde bir $\lambda, \mu \in C$ vardır. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$((\mu - 1)a + \lambda)x - x(\mu + 1)b = 0, \ \forall x \in R$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeye Lemma 5.1.1' i uygularsak, $(\mu - 1)a + \lambda = (\mu + 1)b \in C$ olur. Buradan, $\mu - 1 = \mu + 1 = 0$ veya $a, b \in C$ elde edilir. $\mu - 1 = \mu + 1 = 0$ ifadesi taraf tarafa toplanırsa $2\mu = 0$ olur. Lemma 2.36 dan, $\mu = 0$ dır. Bu bir çelişkidir. O halde, $a, b \in C$ dir. Bu durumda, her $x \in R$ için $f(x) = ax + xb = (a + b)x = x(a + b)$ olur.

Şimdi de $f^2 = 0$ olmasını inceleyelim. Sonuç 5.1.1.3 ün (iii) ifadesinde $f = f_1 = f_2$ olması kullanılarak $f(x) = ax$ ve $a^2 = 0$ olduğu bulunur.

Proposition 5.1.1.9. R değişmeli olmayan bir halka ve $f : R \to R$ sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türev olmak üzere her $x, y \in R$ için $[f(x), f(y)] = 0$ olması durumunda

$c \in R_C - C$ ve $\gamma, \theta : R \to C$ toplamsal dönüşümler olmak üzere her $x \in R$ için $f(x) = xc + cx$ ve $f(x) = \gamma(x)c + \theta(x)$ dir. Üstelik, $c^2 \in C$ dir.

İspat: R değişmeli olmayan bir halka ve $f \neq 0$ bir genelleştirilmiş türev olduğu için Lemma 5.1.5 den, $f : R \nrightarrow Z$ dir. Bu durumda, $f(y_0) = c_0 \notin Z$ olacak biçimde bir $y_0 \in R$ vardır. Kabulümüzden her $x \in R$ için $f(x)c_0 = c_0f(x)$ olur. $c_0 \in Z$ olması durumunda bu eşitlik sağlanır. $c_0 \in R - C$ olması durumunda ise Sonuç 5.1.1.5 den,

$f(x) = \lambda x + \mu(c_0x + xc_0)$ ve $\lambda c_0 + \mu c_0^2 \in C$ olacak biçimde bir $\lambda, \mu \in C$ vardır. $c_0 \notin C$ olduğu için

$$c = \mu c_0 + \frac{1}{2}\lambda$$

olacak biçimde bir eleman seçilebilir. $c \notin C$ olduğu için bu, $\mu \neq 0$ olmasını zorunlu kılar.

Yukarıdaki ifadeyi ayrı ayrı sağdan ve soldan $x \in R$ ile çarpar ve taraf tarafa toplarsak

$cx + xc = \mu(xc_0 + c_0x) + x\lambda = f(x)$ olduğu bulunur. Öte yandan, c^2 ifadesini düzenlersek

$c^2 = (\mu c_0 + \frac{1}{2}\lambda)(\mu c_0 + \frac{1}{2}\lambda) = \mu(\mu c_0^2 + \lambda c_0) + \frac{\lambda^2}{4} \in C$ bulunur. Yani, $c = \mu c_0 + \frac{1}{2}\lambda \notin C$ olarak seçilmesi durumunda, $f(x) = cx + xc$ ve $c - \mu c_0, c_0^2 \in C$ dir. Öte yandan,

$[c_0, f(R)] = 0$ olması durumunda $[c, f(R)] = 0$ eşitliğini düzenlersek

$$[c, f(R)] = [\mu c_0 + \frac{1}{2}\lambda, f(R)] = [f(R), \mu c_0] + [f(R), \frac{1}{2}\lambda] = \mu[f(R), c_0] = 0$$

olduğu bulunur. O halde, $\{1, c\}$ kümesi $f(R)$ ile değişmeli ve kabulümüzden dolayı $f \neq 0$ olduğu için, Proposition 5.1.1.7 den, $f(R)$ ile değişmeli her eleman $\{1, c\}$ kümesinin bir

C-kombinasyonu olarak yazılır. Bu durumda, her $x \in R$ için $f(x) = \gamma(x)c + \theta(x)$ olacak biçimde $\gamma, \theta : R \to C$ toplamsal dönüşümleri vardır.

5.1.2. $[f_1(x), f_2(x)] = 0$ olması durumu

Bresar M., 1993.

Teorem 5.1.2.1. R bir asal halka ve F: R→R bir toplamsal dönüşüm ve her $x \in R$ için $[F(x), x] = 0$ oluyorsa ξ: R→C toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x \in R$ için

$F(x) = \lambda x + \xi(x)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat: Kabulümüzden her $x \in R$ için $[F(x), x] = 0$ dır. $y \in U$ olmak üzere, x yerine

x + y yazar ve kabul yardımıyla düzenlersek

$$[F(x), y] = [x, F(y)]$$

bulunur. Bu ifadede, $z \in R$ olmak üzere, y yerine yz yazar, yukarıdaki ifadeden yararlanarak düzenlersek

$$[x, F(yz)] = [F(x), yz] = y[F(x), z] + [F(x), y]z = y[x, F(z)] + [x, F(y)]z$$

bulunur. Yani,

$$[x, F(yz)] = y[x, F(z)] + [x, F(y)]z\ , \ \forall\, x, y, z \in R$$

elde edilir. Şimdi $y_0 \notin Z$ olacak biçimde bir $y_0 \in R$ seçelim. Yukarıdaki özdeşlikte z yerine y_0 yazarsak $[x, F(y_0^2)] = y_0[x, F(y_0)] + [x, F(y_0)]y_0$ olur. Yani,

$$I_{F(y_0^2)}(x) = y_0 I_{F(y_0)}(x) + I_{F(y_0)}(x)\, y_0\ , \ \forall\, x \in R$$

bulunur. $y_0 \notin Z$ olduğu için Teorem 3.2.3 den, her $x \in R$ için

$I_{F(y_0)}(x) = [\lambda(y_0)y_0, x]$ ve $I_{F(y_0^2)}(x) = [\lambda(y_0)y_0^2, x]$ olur. Böylece $y_0 \notin Z$ iken her $x \in R$ için

$[x, F(y_0)] = [\lambda(y_0)y_0, x]$ bulunur. Şimdi de $y_1 \in Z$ olacak biçimde bir $y_1 \in R$ seçelim. Bu durumda her $x \in R$ için $[x, F(y_1)] = [F(x), y_1] = 0$ olur. Yani, $F(y_1) \in Z$ bulunur. Bu ise,

$y \in Z$ olması durumunda her $x \in R$ için $[x, F(y)] = 0 = [\lambda(y)y, x]$ olması demektir. O halde,

$$[x, F(y)] = [\lambda(y)y, x],\ \forall\, x, y \in R$$

dir.

Şimdi yapmamız gereken λ'nın temsilciden bağımsız olduğunu göstermektir.

$[x, F(yz)] = y[x, F(z)] + [x, F(y)]z$ özdeşliğini yukarıdaki ifadeyi kullanarak düzenlersek $[\lambda(yz)yz, x] = y[\lambda(z)z, x] + [\lambda(y)y, x]z$ olur. Bu ifadeyi de düzenlediğimizde

$y[\lambda(yz)z, x] + [\lambda(yz)y, x]z = y[\lambda(z)z, x] + [\lambda(y)y, x]z$ bulunur. Yani,

$$y[(\lambda(yz) - \lambda(z))z, x] + [(\lambda(yz) - \lambda(y))y, x]z = 0, \ \forall x, y, z \in R$$

elde edilir. $y_0 \notin Z$ ve $z_0 \notin Z$ olacak biçimdeki $y_0, z_0 \in R$ seçelim. Seçtiğimiz bu elemanlar için $t = \lambda(y_0z_0) - \lambda(z_0)$ ve $k = \lambda(y_0z_0) - \lambda(y_0)$ olsun. Yukarıdaki eşitliği y_0, z_0 elemanları için düzenlersek $0 = y_0[tz_0,x] + [ky_0,x]z_0$ olur. Yani,

$$0 = y_0 I_{tz0}(x) + I_{ky0}(x)z_0 , \ \forall x \in R$$

elde edilir. Teorem 3.2.3 den, her $x \in R$ için $[tz_0, x] = [\mu z_0, x]$ ve $[ky_0, x] = [\mu y_0, x]$ olacak biçimde en az bir μ elemanı vardır. $t[z_0, x] = \mu[z_0, x]$ olur. $(t - \mu)[z_0,x] = 0$ dır. $z_0 \notin Z$ olarak seçildiği için $t = \mu$ bulunur. Benzer şekilde, $k[y_0, x] = \mu[y_0, x]$ dir ve $y_0 \notin Z$ olarak seçildiği için $k = \mu$ bulunur. $\mu = \lambda(y_0z_0) - \lambda(z_0)$ ve $\mu = \lambda(y_0z_0) - \lambda(y_0)$ dür. Bu ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa, $\lambda(y_0) = \lambda(z_0)$ bulunur. Bu ise λ'nın temsilcilerden bağımsız olması demektir. Yani, $y_0 \notin Z$ ve $z_0 \notin Z$ iken $\lambda(y_0) = \lambda(z_0) = \lambda$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır. O halde $y \notin Z$,

$z \notin Z$ iken her $x \in R$ için

$$[x, F(y)] = [\lambda y, x]$$

olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

Yukarıdaki ifadeden $[x,F(y) + \lambda y] = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, her $y \notin Z$ için

$F(y) + \lambda y \in Z$ demektir. Öte yandan, $y \in Z$ iken $F(y) \in Z$ olduğu için $F(y) + \lambda y \in Z$ olur. Yani, her $y \in R$ için $F(y) + \lambda y \in Z$ elde edilir. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi kullanarak

$\xi : R \to C, \ \xi(y) = F(y) + \lambda y$ tanımlayalım. $x = y$ olması durumunda

$\xi(x) = F(x) + \lambda x = F(y) + \lambda y = \xi(y)$ dir. Buna ek olarak,

$F(x + y) = F(x + y) + \lambda(x + y) = F(x) + F(y) + \lambda x + \lambda y = \xi(x) + \xi(y)$ olur. O halde, bu şekilde tanımlanan ξ, toplamsal dönüşümdür.

Hvala B., 1998.

Teorem 5.1.2.2. R, karakteristiği ikiden farklı olacak biçimde değişmeli olmayan bir halka olmak üzere $f_1, f_2 : R \to R$ sıfırdan farklı genelleştirilmiş türevleri her $x \in R$ için

$$[f_1(x), f_2(x)] = 0 \tag{5.6}$$

sağlıyor ise her $x \in R$ için $f_1(x) = \lambda f_2(x)$ olacak biçimde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat: $Y = \{y \in R \mid f_1(y), f_2(y)$ ve 1, C-bağımsızdır $\}$ve $X = R - Y$ olsun. Bu durumda, her $x \in R$ için

$$\alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x) + \alpha_0 = 0 \tag{5.7}$$

olacak biçimde en az biri sıfırdan farklı olan $\alpha_1(x),\ \alpha_2(x),\ \alpha_3(x) \in C$ vardır.

Bu bilgiler doğrultusunda ispatımızı dört adımda gerçekleştireceğiz.

Adım 1. Kabul edelim ki, $f_1(x_0) - \lambda f_2(x_0) \in C$ olacak biçimde bir $x_0 \in X,\ \lambda \in C$ var olsun. O zaman, her $x \in R$ için $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ veya $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ dır.

İspat: $[f_2(x), f_2(x_0)] \neq 0$ olacak biçimde bir $x \in X$ seçelim. Bu durumda, $f_2(x) \notin C$ dir. Seçmiş olduğumuz bu eleman için (5.7) nolu ifadeyi düzenlediğimizde $\alpha_1(x) \neq 0$ olur. C bir cisim olduğu için $\alpha_1^{-1}(x) \neq 0$ dır. (5.7) nolu ifadeyi soldan $\alpha_1^{-1}(x)$ ile çarparsak

$$f_1(x) + \alpha_1^{-1}(x)\alpha_2(x)f_2(x) \in C$$

olduğu bulunur. $\beta_x = -\alpha_1^{-1}(x)\alpha_2(x) \in C$ olsun dersek $f_1(x) - \beta_x f_2(x) \in C$ olur. Hipotezden, her $x \in R$ için $[f_1(x), f_2(x)] = 0$ dır. Bu ifadede, $y \in R$ olmak üzere, x yerine

$x + y$ yazar ve genelleştirilmiş türev tanımını kullanarak ifadeyi düzenlersek

$$[f_1(x), f_2(y)] = [f_2(x), f_1(y)],\ \forall\, x, y \in R \tag{5.8}$$

bulunur. Kabulümüzde, $f_1(x_0) - \lambda f_2(x_0) \in C$ olduğundan her $t \in R$ için

$[f_1(x_0) - \lambda f_2(x_0), t] = 0$ dır. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$[f_1(x), t] - \beta_x [f_2(x), t] = 0,\ \forall\, t \in R \tag{5.9}$$

bulunur. Benzer şekilde, $f_1(x) - \beta_x f_2(x) \in C$ olduğundan her $k \in R$ için

$[f_1(x_0) - \lambda f_2(x_0), k] = 0$ dır.

$$[f_1(x_0), k] - \lambda\, [f_2(x_0), k] = 0,\ \forall\, k \in R \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.9) nolu ifadede t yerine $f_2(x_0)$ yazar ve düzenlersek

$$[f_1(x), f_2(x_0)] = \beta_x\, [f_2(x), f_2(x_0)]$$

bulunur. (5.10) nolu ifadede k yerine $f_2(x)$ yazar ve düzenlersek

$$[f_1(x_0), f_2(x)] = \lambda\, [f_2(x_0), f_2(x)]$$

bulunur. (5.8) nolu ifadede y yerine x_0 yazar ve düzenlersek

$$[f_1(x), f_2(x_0)] = [f_2(x), f_1(x_0)]$$

olur. Yukarıdaki üç ifadeyi bir arada kullanırsak

$$[f_1(x), f_2(x_0)] = [f_2(x), f_1(x_0)] = \beta_x\, [f_2(x), f_2(x_0)] = \lambda\, [f_2(x), f_2(x_0)]$$

elde edilir. Yani,

$$\beta_x\, [f_2(x), f_2(x_0)] = \lambda\, [f_2(x), f_2(x_0)]$$

dır. Buradan, $\beta_x = \lambda \in C$ veya $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ oluğu bulunur. Başlangıçta,

$[f_2(x), f_2(x_0)] \neq 0$ kabul ettiğimiz için $\beta_x = \lambda \in C$ dir. Bu durumda, $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ olur. Böylece ispat biter.

Adım 2. Teorem 5.1.2.2, her x, y ∈ R için $[f_1(x), f_1(y)] = 0$ ve $[f_2(x), f_2(y)] = 0$ kabulü altında aynı sonucu sağlar.

İspat: $[f_1(x), f_1(y)] = 0$ ve $[f_2(x), f_2(y)] = 0$ olduğu için Proposition 5.1.1.9 dan,

i = 1, 2 için, $c_i \in R_C - C$ ve $\gamma_i,\ \theta_i : R \to C$ olmak üzere

$$f_i(x) = xc_i + c_i x = \gamma_i(x)c_i + \theta_i(x),\ \ \forall\, x \in R \tag{5.11}$$

olur. Her x ∈ R için $[f_1(x), f_2(x)] = 0$ olmasını ve (5.11) nolu ifadeyi kullanırsak

$$0 = [f_1(x), f_2(x)] = [\gamma_1(x)c_1 + \theta_1(x),\ \gamma_2(x)c_2 + \theta_2(x)] = \gamma_1(x)[c_1, \gamma_2(x)c_2]$$

$$= \gamma_1(x)\gamma_2(x)[c_1, c_2]$$

bulunur. $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x) \in C$ olmasını kullanırsak her $x \in R$ için

$$\gamma_1(x) = 0 \text{ veya } \gamma_2(x) = 0 \text{ veya } [c_1, c_2] = 0$$

elde edilir. $A = \{x \in R \mid \gamma_1(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in R \mid \gamma_2(x) = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. O halde, Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir.

R = A olması durumunu incelersek, her $x \in R$ için $\gamma_1(x) = 0$ olur. Yani, $\gamma_1 = 0$ dır. Bu durumda, her $x \in R$ için

$f_1(x) = \gamma_1(x)c_1 + \theta_1(x) = \theta_1(x) \in C$ dir. Bu, $f_1 : R \nrightarrow C$ olması ile çelişir. O halde, R = A olamaz. R = B dir. Yani, her $x \in R$ için $\gamma_2(x) = 0$ olur. Bu durumda, her $x \in R$ için $f_2(x) = \gamma_2(x)c_2 + \theta_2(x) = \theta_2(x) \in C$ dir. Bu, $f_2 : R \nrightarrow C$ olması ile çelişir. O halde, R = B olamaz. Bu durumda,

$$[c_1, c_2] = 0 \tag{5.12}$$

dır. Bu eşitliği kullanarak $[f_1(x), f_2(x)] = 0$ ifadesini düzenlersek her $x \in R$ için

$$[f_1(x), f_2(x)] = [xc_1 + c_1x,\ \gamma_2(x)c_2 + \theta_2(x)] = \gamma_2(x)[xc_1 + c_1x, c_2] = 0$$

olur. $\gamma_2(x) \in C$ olmasını kullanırsak her $x \in R$ için, $\gamma_2(x) = 0$ veya $[xc_1 + c_1x, c_2] = 0$

olur. $A = \{x \in R \mid \gamma_2(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in R \mid [xc_1 + c_1x, c_2] = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir. R = A olması durumunu incelersek, her $x \in R$ için $\gamma_2(x) = 0$ olur. Yani, $\gamma_2 = 0$ dır. Bu durumda, her $x \in R$ için $f_2(x) = \gamma_2(x)c_2 + \theta_2(x) = \theta_2(x) \in C$ dir. Bu, $f_2 : R \nrightarrow C$ olması ile çelişir. O halde, her $x \in R$ için $[xc_1 + c_1x, c_2] = 0$ dır. Buradan, her $x \in R$ için

$$xc_1c_2 + c_1xc_2 - c_2xc_1 - c_2c_1x = 0 \tag{5.13}$$

olur. Lemma 5.1.1 uygulanır ve $\{1, c_1, c_2, c_1c_2\}$, C-lineer bağımlıdır.

$$c_1c_2 = \alpha c_1 + \beta c_2 + \varphi$$

olacak biçimde $\alpha, \beta, \varphi \in C$ vardır. (5.12) nolu ifade düzenlenerek $c_1c_2 = c_2c_1$ elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi sırasıyla soldan ve sağdan x ile çarparsak

$$xc_1c_2 = \alpha xc_2 + \beta xc_1 + \varphi x \ , \qquad c_1c_2x = \alpha c_1x + \beta c_2x + \varphi x$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeleri kullanarak (5.13) nolu ifadeyi düzenlersek

$$(\alpha + c_1)xc_2 + (\beta - c_2)xc_1 - (\alpha c_2 + \beta c_1)x = 0, \quad \forall\, x \in R$$

bulunur. $c_2 \notin C$ olduğu için, $\beta - c_2 \neq 0$ dır. Bu durumda, Lemma 5.1.1 den, $\{1, c_1, c_2\}$ kümesi C-bağımlıdır. Yani, $c_2 = \pi c_1 + \rho$ olacak biçimde $\pi, \rho \in C$ vardır. $f_2(x) = xc_2 + c_2x$ ifadesini düzenlersek

$$f_2(x) = x(\pi c_1 + \rho) + (\pi c_1 + \rho)x = \pi(xc_1 + c_1x) + 2\rho x = \pi\, f_1(x) + 2\rho x$$

olduğu bulunur. Teorem 5.1.2.2 nin doğruluğunu kanıtlamak için $2\rho = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $[f_1(x), f_2(x)] = 0$ ifadesini yukarıdaki eşitlikten faydalanarak düzenlersek

$$[f_1(x), f_2(x)] = [f_1(x), \pi\, f_1(x) + 2\,\rho x] = 2\,\rho[f_1(x),\ x] = 0$$

bulunur. Bu ifadede, $f_1(x) = \gamma_1(x)c_1 + \theta_1(x)$ olmasını kullanırsak

$$2\rho[\ \gamma_1(x)c_1 + \theta_1(x), x] = 2\rho\, \gamma_1(x)[c_1, x] = 0$$

elde edilir. $\rho\, \gamma_1(x) \in C$ olmasını kullanırsak, Lemma 2.32 den, her $x \in R$ için $2\rho = 0$ veya $\gamma_1(x) = 0$ veya $[c_1, x] = 0$ olduğu bulunur. $A = \{x \in R \mid \gamma_1(x) = 0\}$ ve

$B = \{x \in R \mid [c_1, x] = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. Bu durumda, Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir. R = A olması durumunu incelersek,

her $x \in R$ için $\gamma_1(x) = 0$ olur. Yani, $\gamma_1 = 0$ dır. Bu durumda, her $x \in R$ için

$f_1(x) = \gamma_1(x)c_1 + \theta_1(x) = \theta_1(x) \in C$ dir. Bu, $f_1 : R \nrightarrow C$ olması ile çelişir. O halde, R = B dir. Yani, her $x \in R$ için $[c_1, x] = 0$ dır. $c_1 \in C$ dir. Böylece, çelişki elde edilir. O halde, $2\rho = 0$ dır. (5.13) ifadesini yeniden düzenlersek $f_2(x) = \pi\, f_2(x)$ olacak biçimde bir $\pi \in C$ vardır. Böylece ispat biter.

Adım 3. Teorem 5.1.2.2, X = R şartı altında aynı sonucu sağlar ($Y = \emptyset$ olması durumu).

İspat: Kabulümüzde $f \neq 0$ olacak biçimde bir genelleştirilmiş türev ve R değişmeli olmayan halka olduğundan $f : R \nrightarrow C$ dir. Bu durumda en az bir $x_0 \in R$ için $f(x_0) \notin C$ dir.

R = X olduğu için (5.7) nolu ifade x_0 elemanı için sağlanır. O halde,

$$\alpha_1(x_0)f_1(x_0) + \alpha_2(x_0)f_2(x_0) \in C$$

dır. $f(x_0) \notin C$ olduğu için $\alpha_1(x_0) \neq 0$ dır. $\lambda = -\alpha_1(x_0)^{-1}\alpha_2(x_0)$ olarak seçersek

$$f_1(x_0) - \lambda f_2(x_0) \in C$$

olur. Bu durumda, Adım 1 den, her $x \in R$ için $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ veya $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ dır.

$A = \{x \in R \mid f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C\}$ ve $B = \{x \in R \mid [f_2(x), f_2(x_0)] = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. O halde, Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir.

R = A olması durumunu incelersek, her $x \in R$ için $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ dir.

$F(x) = f_1(x) - \lambda f_2(x)$ olsun dersek, her $x \in R$ için $F(x) = f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ bir genelleştirilmiş türev olduğundan, Lemma 5.1.5 den, F = 0 olur. Yani, $f_1 = \lambda f_2$ elde edilir. Böylece, R = A olması durumunda ispat bitmiş olur. Şimdi de R = B olması durumunu inceleyelim. Bu durumda, her $x \in R$ için $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ dır. Seçmiş olduğumuz x_0 elemanı için $\alpha_1(x_0) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Eğer, $\alpha_1(x_0) = 0$ olmuş olsaydı $f(x_0) \in C$ olurdu. Bu durumda da $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ olduğu bulunurdu. Bu ise,

$[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ olmasının $\alpha_1(x_0)$ ın seçiminden bağımsız olduğunu gösterir. O halde,

$$[f_2(x), f_2(x_0)] = 0, \qquad \forall\, x,\ x_0 \in R$$

bulunur. Bu durumda da, Adım 2 den ispat biter. Böylece, her durumda sonuca ulaşıldığı için ispat sonlanır.

Adım 4. X = R olması durumu

İspat: Kabul edelim ki, $Y \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda en az bir $y_0 \in Y$ vardır. $a = f_1(y_0)$, $b = f_2(y_0)$ olmak üzere $\{a, b, 1\}$, C-bağımsızdır ve (5.6) nolu ifade sağlanır. Yani, ab = ba dır. f_1, f_2 genelleştirilmiş türevler olduğundan, i = 1, 2 ve her $x, z \in R$ için

$$f_i(xz) = f_i(x)z + xd_i(z) \tag{5.14}$$

dir. (5.8) nolu ifadede y yerine y_0 ve sonrasında x yerine xz yazar ve düzenlersek

$$(af_2(x) - bf_1(x))z - f_2(x)za + f_1(x)zb +$$

$$x(d_1(z)b - d_2(z)a) + axd_2(z) - bxd_1(z) = 0 \tag{5.15}$$

bulunur. $F_1(x) = f_2(x) - bf_1(x)$, $F_2(x) = -f_2(x)$, $F_3(x) = f_1(x)$, $H_1(z) = d_1(z)b - d_2(z)a$, $H_2(z) = d_2(z)$, $H_3(x) = -d_1(z)$, $c_1 = 1$, $c_2 = a$, $c_3 = b$ olsun dersek (5.15) nolu ifade

$$\sum_{i=1}^{3} F_i(x)zc_i + \sum_{i=1}^{3} c_i x H_i(z) = 0, \qquad \forall\, x, z \in R$$

şeklini alır. {a, b, 1}, C-bağımsız bir küme olduğu için, Proposition 5.1.2 den, i, j = 1, 2, 3 için

$$F_j(x) = -\sum_{i=1}^{3} c_i x q_{ij} \text{ ve } H_i(z) = \sum_{j=1}^{3} q_{ij} x a_j \text{ olacak biçimde bir } q_{ij} \in Q_r(R_C) \text{vardır.}$$

Bu durumda,

$$f_1(x) = -xq_{13} - axq_{23} - bxq_{33} \tag{5.16}$$

$$f_2(x) = xq_{12} + axq_{22} + bxq_{32} \tag{5.17}$$

$$af_2(x) - bf_1(x) = -xq_{11} - axq_{21} - bxq_{31} \tag{5.18}$$

$$d_1(z) = q_{31}z - q_{32}za - q_{33}zb \tag{5.19}$$

$$d_2(z) = q_{21}z + q_{22}za + q_{23}zb \tag{5.20}$$

$$d_1(z)b - d_2(z)a = q_{11}z + q_{12}za + q_{13}zb \tag{5.21}$$

olur. i = 1 için (5.14) nolu ifadeyi düzenlersek $f_1(xz) = f_1(x)z + xd_1(z)$ bulunur. (5.16) ve (5.19) nolu ifadeler kullanılarak bu ifade düzenlenirse her $x, z \in R$ için

$$-x[(q_{13} + q_{31})z + q_{32}za + q_{33}zb - zq_{13}] - ax(q_{23}z - zq_{23}) - bx(q_{33}z - zq_{33}) = 0$$

elde edilir. {a, b, 1}, C-bağımsız bir küme olduğundan, Lemma 5.1.1 den,

$$(q_{13} + q_{31})z + q_{22}za + q_{33}zb - zq_{13} = 0, \quad \forall\, z \in R \tag{5.22}$$

$$q_{23}, q_{33} \in C$$

olduğu bulunur. Benzer şekilde, i = 2 için (5.17) ve (5.20) nolu ifadeler yardımıyla (5.14) nolu ifadeyi düzenlersek, her $x, z \in R$ için

$$-x[(q_{12} + q_{21})z + q_{22}za + q_{23}zb - zq_{12}] - ax(q_{22}z - zq_{22}) - bx(q_{32}z - zq_{32}) = 0$$

elde edilir. {a, b, 1}, C-bağımsız bir küme olduğundan, Lemma 5.1.1 den,

$$(q_{12} + q_{21})z + q_{22}za + q_{23}zb - zq_{12} = 0, \quad \forall\, z \in R \tag{5.23}$$

$$q_{22}, q_{32} \in C$$

olduğu bulunur. d_1, türev olduğundan, her x, z ∈ R için $d_1(xz) = d_1(x)z + xd_1(z)$ dir. (5.19) nolu ifade yardımıyla bu ifade düzenlenirse

$$-q_{31}xz - q_{32}xza - q_{33}xzb = -q_{31}xz - q_{32}xaz - q_{33}xbz - xq_{31} - xq_{32}za - xq_{33}zb$$

bulunur. q_{32}, q_{33} ∈ C olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

her x, z ∈ R için $(q_{32}xa + q_{33}xb + xq_{31})z = 0$ elde edilir. Bu ise,

$$q_{32}xa + q_{33}xb + xq_{31} = 0, \quad \forall\, x \in R$$

demektir. Tekrar q_{32}, q_{33} ∈ C olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

her x, z ∈ R için $x(q_{32}a + q_{33}b + q_{31}) = 0$ olur. Buradan,

$$a + q_{33}b + q_{31} = 0 \tag{5.24}$$

elde edilir. Şimdi de, (5.20) nolu ifade ve d_2 nin genelleştirilmiş türev olmasını kullanacak olursak

$$q_{21}xz + q_{22}xza + q_{23}xzb = q_{21}xz + q_{22}xaz + q_{23}xbz + xq_{21}z + xq_{22}za + xq_{23}zb$$

elde edilir. Bu ifadeyi düzenlediğimizde, her x, z ∈ R için $q_{22}xaz + q_{23}xbz + xq_{21}z = 0$

bulunur. Bu ise, her x ∈ R için $(q_{22}xa + q_{23}xb + xq_{21})R = 0$ olması demektir. Uyarı 2.23 den, her x ∈ R için $q_{22}xa + q_{23}xb + xq_{21} = 0$ olur. q_{22}, q_{23} ∈ C olduğunu kullanırsak, $R(q_{22}a + q_{23}b + q_{21}) = 0$ olur. Yani,

$$q_{22}a + q_{23}b + q_{21} = 0 \tag{5.25}$$

dır. $q_{32}a + q_{33}b + q_{31} = 0$ ifadesini soldan z ∈ R ile çarparsak, $zq_{32}a + zq_{33}b = -zq_{31}$ bulunur. q_{32} ve q_{33} ∈ C olmasını kullanırsak $q_{32}za + q_{33}zb = -zq_{31}$ olur. Bu ifadeyi (5.22) nolu eşitlikte kullanırsak

$$(q_{13} + q_{31})z - z(q_{31} + q_{13}) = 0, \quad \forall\, z \in R$$

bulunur. Bu ise, $q_{13} + q_{31} \in C$ olması demektir. Şimdi de, $q_{22}a + q_{23}b + q_{21} = 0$ ifadesini soldan $z \in R$ ile çarparsak, $zq_{22}a + zq_{23}b + zq_{21} = 0$ bulunur. Bu ifadede, q_{22}ve $q_{23} \in C$ olmasını kullanırsak, $q_{22}za + q_{23}zb = -zq_{21}$ olur. Yukarıdaki ifadeyi (5.23) nolu eşitlikte yazar ve düzenlersek

$$(q_{12} + q_{21})z - z(q_{21} + zq_{12}) = 0, \quad \forall z \in R$$

elde edilir. Bu ise, $q_{12} + q_{21} \in C$ olması demektir. (5.18) nolu ifadeyi, (5.16) ve (5.17) nolu ifadelerden yararlanarak düzenlersek

$$xq_{11} + [(q_{12} + q_{21})a + (q_{31} + q_{13})b + q_{22}a^2 + (q_{32} + q_{23})ab + b^2q_{33}]x = 0, \ \forall x \in R$$

bulunur. Lemma 5.1.1 den, $q_{11} \in C$ ve

$$(q_{12} + q_{21})a + (q_{31} + q_{13})b + q_{22}a^2 + (q_{32} + q_{23})ab + b^2q_{33} = -q_{11}$$

olduğu bulunur. $ab = ba$ ve $q_{33} \in C$ olmasını kullanarak

$$(q_{12} + q_{22}a + q_{23}b)a + (q_{31} + q_{32}a + q_{33}b)b + q_{12}a + q_{13}b = -q_{11}$$

elde edilir. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi, (18) ve (19) nolu ifadeleri kullanarak düzenlersek

$$q_{11} + q_{12}a + q_{13}b = 0 \tag{5.26}$$

elde edilir. Şu ana kadar,

$$q_{11}, q_{22}, q_{23}, q_{32}, q_{33}, q_{13} + q_{31}, q_{12} + q_{21} \in C$$

$$q_{i1} + q_{i2}a + q_{i3}b = 0, \ \ i = 1, 2, 3 \tag{5.27}$$

olduğunu elde ettik. (5.27) nolu ifadeyi, $i = 3$ için yazar ve soldan x elemanı ile çarparsak $xq_{31} + xq_{32}a + xq_{33}b = 0$ bulunur. (5.16) nolu ifadeyi $q_{23}, q_{33} \in C$ olması ve yukarıdaki ifadeyi kullanarak düzenlersek $f_1(x) = -xq_{13} - axq_{23} - bxq_{33} - (xq_{31} + xq_{32}a + xq_{33}b)$

bulunur. Yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde ise, her $x \in R$ için,

$$f_1(x) = -x(q_{13} + q_{31}) - x(q_{32}a + q_{33}b) - (q_{23}a + q_{33}b)x \tag{5.28}$$

elde edilir. Şimdi de, (5.25) nolu ifadeyi, soldan x elemanı ile çarparsak

$$xq_{22}a + xq_{23}b + xq_{21} = 0$$

bulunur. (5.17) nolu ifadeyi $q_{22}, q_{23} \in C$ olması ve yukarıdaki ifadeyi kullanarak düzenlersek $f_2(x) = xq_{12} + q_{22}ax + q_{32}bx - (xq_{22}a + xq_{23}b + xq_{21})$ bulunur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde ise her $x \in R$ için

$$f_2(x) = x\left(q_{12} + q_{21}) + x(q_{22}a + q_{23}b\right) + (q_{22}a + q_{23}b)x \tag{5.29}$$

elde edilir. $\varsigma = -\frac{1}{2}(q_{13} + q_{31}), \xi = \frac{1}{2}(q_{12} + q_{21}), \alpha = -q_{23}, \beta = q_{33}, \gamma = q_{22}, \varphi = -q_{32}$ olarak seçersek her birisi C nin elemanı olur. Seçmiş olduğumuz bu elemanlar yardımıyla yeni elemanlar tanımlayalım: $u = \varsigma + \alpha a - \beta b$, $t = \varsigma + \varphi a - \beta b$, $v = \xi + \gamma a - \varphi b$, $s = \xi + \gamma a - \alpha b$. Tanımlamış olduğumuz bu elemanlar R_C nin elemanları olup bu elemanlar yardımıyla ve $q_{13} + q_{31} \in C$ olmasını kullanarak

$$f_1(x) = ux + xt \ , \qquad f_2(x) = vx + xs \tag{5.30}$$

olduğunu buluruz. Yukarıda seçmiş olduğumuz elemanlar $y_0 \in Y$ için seçilmişti. O halde, seçeceğimiz her yeni eleman için o elemana bağlı yukarıdaki sabitleri bulabiliriz. Böylece, herhangi bir $y \in Y$ ve her $x \in R$ için

$$f_1(x) = ux + xt = u(y)x + xt(y)$$

$$f_2(x) = vx + xs = v(y)x + xs(y)$$

olur. Lemma 5.1.1 den, $u(y) - u, t(y) - t, v(y) - v, s(y) - s \in C$ olduğu bulunur. Böylece, $u(y) - u - t(y) + t \in C$, $v(y) - v - s(y) + s \in C$ olur. $u(y) - u - t(y) + t$ ifadesini $u(y) = \varsigma(y) + \alpha(y)a(y) - \beta(y)b(y)$ ve $t(y) = \varsigma(y) + \varphi(y)a(y) - \beta(y)b(y)$ olmasını kullanarak düzenlersek

$$(\alpha(y) - \varphi(y))a(y) - (\alpha - \varphi)a \in C \tag{5.31}$$

bulunur. $v(y) - v - s(y) + s$ ifadesini $v(y) = \xi(y) + \gamma(y)a(y) - \varphi(y)b(y)$ ve $s(y) = \xi(y) + \gamma(y)a(y) - \alpha(y)b(y)$ olmasını kullanarak düzenlersek

$$(\alpha(y) - \varphi(y))b(y) - (\alpha - \varphi)b \in C \tag{5.32}$$

bulunur. Kabul edelim ki, $\alpha = \varphi$ olsun. $a(y) \notin C$ olduğu için her $y \in Y$ için $\alpha(y) = \varphi(y)$ dir. Her $y \in Y$ için $\alpha(y) \neq \varphi(y)$ olması durumunda, $0 \neq \alpha(y) - \varphi(y) \in C$ olduğu için

$0 \neq (\alpha(y) - \varphi(y))^{-1} \in C$ vardır. Bu elemanla (5.31) ve (5.32) nolu ifadeleri soldan çarparsak, her $y \in Y$ için

$$f_1(y) \in Ca + C, \quad f_2(y) \in Cb + C \tag{5.33}$$

bulunur. $\alpha = \varphi$ şartı altında devam edersek, $u = t$ ve $v = s$ olur. Bu durumda,

$$f_1(x) = ux + xu = u(y)x + xu(y)$$

$$f_2(x) = vx + xv = v(y)x + xv(y)$$

olduğu bulunur. Lemma 5.1.1 den, $u(y) - u \in C$ ve $v(y) - v \in C$ olur. Bu ifadeleri düzenlersek, sırasıyla

$$\alpha(y)a(y) - \beta(y)\, b(y) \in C + Ca + Cb \tag{5.34}$$

$$\gamma(y)a(y) - \alpha(y)b(y) \in C + Ca + Cb$$

olur. Yukarıdaki ifadelerden birincisi ifadeyi soldan $\alpha(y)$, ikinci ifadeyi ise soldan $-\beta(y)$ ile çarpar ve taraf tarafa toplarsak $\alpha(y)^2a(y) - \beta(y)\gamma(y)a(y) \in C + Ca + Cb$ bulunur. Şimdi de, (5.34) nolu ifadelerden birinci ifadeyi soldan $\gamma(y)$, ikinci ifadeyi soldan $-\alpha(y)$ ile çarpar ve taraf tarafa toplarsak $\alpha(y)^2b(y) - \gamma(y)\beta(y)b(y) \in C + Ca + Cb$ bulunur. Elde edilen yukarıdaki iki ifadeden, her $y \in Y$ için

$$(\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y))f_i(y) \in C + Ca + Cb, \quad i = 1, 2$$

elde edilir. Kabul edelim ki, bir $y \in Y$ için, $\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y)$ ifadesini düzenleyelim.

$$\begin{aligned}\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y) &= \gamma(y)\big(\varsigma(y) + \alpha(y)a(y) - \beta(y)b(y)\big)\\ &\quad -\alpha(y)(\xi(y) + \gamma(y)a(y) - \varphi(y)b(y))\\ &= \gamma(y)\varsigma(y) - \alpha(y)^2b(y) - \alpha(y)\xi(y) + \alpha(y)^2b(y)\\ &= \gamma(y)\varsigma(y) - \alpha(y)\xi(y)\end{aligned}$$

bulunur. Yani, $\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y) = \gamma(y)\varsigma(y) - \alpha(y)\xi(y) = p \in C$ dir.

$f_1(x) = u(y)x + xu(y)$ ve $f_2(x) = v(y)x + xv(y)$ olmasını kullanarak $\gamma(y)f_1(x) - \alpha(y)f_2(x)$ ifadesini düzenlersek,

$$\gamma(y)f_1(x) - \alpha(y)f_2(x) = \big(\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y)\big)x + x\big(\gamma(y)u(y) - \alpha(y)v(y)\big)$$

$$= px + xp = 2px$$

olur. Yani, her $x \in R$ için

$$\gamma(y)f_1(x) - \alpha(y)f_2(x) = 2px \tag{5.35}$$

elde edilir. $p = 0$ olması durumunda,

$$\gamma(y)f_1(x) - \alpha(y)f_2(x) = 0 \text{ ve } \gamma(y)\varsigma(y) - \alpha(y)\xi(y) = 0$$

olur. $\gamma(y)f_1(x) - \alpha(y)f_2(x) = 0$ olması durumunda $Y \neq \emptyset$ olduğu için $\gamma(y) = \alpha(y) = 0$ dır. Bu durumda, $f_2(x) = v(y)x + xv(y)$ ifadesini düzenlediğimizde, $f_2(x) = 2\xi(y)x$ elde edilir. $f_2(x) \neq 0$ olduğu için $\xi(y) \neq 0$ dır. $[f_2(x), x] = [2\xi(y)x, x] = 0$ olur. Benzer şekilde, $[f_1(x), x] = 0$ olduğundan, f_1 ve f_2 dönüşümleri commuting map dir. Bu durumda,

Teorem 5.1.2.1 den, $i = 1, 2$ ve μ_i: $R \to C$ toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x \in R$ için

$f_i(x) = \lambda_i x + \mu_i(x)$ olacak biçimde bir $\lambda_i \in C$ vardır. Bu durumda, $\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 : R \to C$ bir dönüşüm olur. Bu durumda, $Y \neq \emptyset$ olduğu için $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$ olur. Böylece, $f_2(x) = \mu_2(x) \in C$ dir. Bu, $f_2(x) = 2\xi(y)x \in C$ olması anlamına gelir. $\xi(y) \in C$ olduğundan, her $x \in R$ için

$\xi(y) = 0$ veya $x \in C$ olur. $\xi(y) \neq 0$ olduğundan her $x \in R$ için $x \in C$ dir. Böylece, R değişmeli halka olur. Oysaki, R değişmeli olmayan bir halka idi. O halde, çelişkinin nedeni kabuldür ve $p = 0$ olamaz. Yani, $p \neq 0$ dır. Bu durumda da, f_1 ve f_2 commuting mapdir ve gene aynı nedenlerle çelişki elde edilir. Çelişkinin nedeni $\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y) = 0$ olması kabulüdür. O halde, $\alpha(y)^2 - \beta(y)\gamma(y) \neq 0$ olur. Böylece, $\alpha = \varphi$ olması durumunda

$$f_1(y), f_2(y) \in C + Ca + Cb \tag{5.36}$$

dır.

Şimdi, amacımız $F(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)$ dönüşümünün tüm C-kombinasyonlarının R halkasından $C + Ca + Cb$ içine olduğunu göstermektir. Bu amaçla,

$f_1(x) = ux + xt$ ve $f_2(x) = vx + xs$ olmasını kullanırsak $F(x) = (p_1u + p_2v)x + x(p_1t + p_2s)$ olduğu bulunur. Böylece, $F : R_C \to R_C$ bir genelleştirilmiş iç türev olmuş olur. R ve R_C halkalarının extended centroidleri aynı kümedir. F: $R_C \to C + Ca + Cb$ bir dönüşüm olduğundan her $x \in R_C$ için a ve b ile değişmelidir. Öte yandan, $\{a, b, 1\}$ C-bağımsız bir küme olduğu için Proposition 5.1.1.7 den, F = 0 olur. $Y \neq \emptyset$ olduğu için $p_1 = p_2 = 0$ dır. Böylece, f_1 ve f_2 dönüşümlerinin C + Ca + Cb kümesine düşen sıfırdan farklı

C-kombinasyonları yoktur.

Artık, tüm bu bulunanları X kümesine taşıyalım. $f_2 : X \to C$ bir dönüşüm olmadığından $f_2(x_0) \notin C$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır. Bu durumda, (5.7) nolu ifadeden

$\alpha_1(x_0) \neq 0$ dır ve $f_1(x_0) - \lambda f_2(x_0) \in C$ dir. Adım 1 den, her $x \in X$ için ya $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C$ ya da $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ dır. (5.36) nolu ifadeden her $y \in Y$ için $f_1(y) - \lambda f_2(y) \in C + Ca + Cb$ dir. Bu nedenle, her $x \in R$ için $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C + Ca + Cb$ veya $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ dır.
$A=\{x \in R \mid f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C + Ca + Cb\}$ ve

$B =\{x \in R \mid [f_2(x), f_2(x_0)] = 0, \alpha_1(x_0) \neq 0, x_0 \in X\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve

$R = A \cup B$ olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir. Kabul edelim ki, R = A olsun. Bu durumda, her $x \in R$ için $f_1(x) - \lambda f_2(x) \in C + Ca + Cb$ olur. Oysaki, yukarıda f_1 ve f_2 fonksiyonlarının sadece sıfır kombinasyonlarının bu şekilde olabileceğini söylemiştik. O halde, çelişki elde edilir. Yani, R = A olamaz. R = B dir. Bu durumda, $\alpha_1(x_0) \neq 0$ olan her $x_0 \in X$ ve her $x \in R$ için $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ olur. $\alpha_1(x_0) = 0$ olması $f_2(x_0) \in C$ olması demektir. Bu durumda, $[f_2(x), f_2(x_0)] = 0$ olur. O halde,

$$[f_2(x), f_2(x_0)] = 0, \forall\, x \in R, x_0 \in X$$

dır. Bunun anlamı, elemanlardan birinin X kümesinden olması durumunda yukarıdaki eşitlik sağlanır. Eğer, her iki eleman birden Y kümesinden seçilirse de (5.36) nolu ifadeden yukarıdaki eşitlik sağlanır. O halde,

$$[f_2(x), f_2(x_0)] = 0, \ \forall\, x,\ y \in R$$

olur. Böylece, Adım 2 den ispat sonlanır.

5.2. Asal Halkalarda Lie İdealler Üzerinde Genelleştirilmiş Türevler ve Komütatiflik

Shuliang H., 2007.

Bu bölümde, $x \circ y = xy + yx$ olarak alınmıştır.

Lemma 5.2.1. R bir asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ise her $u, v \in U$ için $2uv \in U$ dır.

İspat: Hipotezden, her $u, v \in U$ için $(u + v)^2 \in U$ dır. Bu ifadeyi düzenlediğimizde $(u + v)^2 = (u + v)(u + v) = u^2 + uv + vu + v^2 \in U$ bulunur. Hipotezden, u^2, $v^2 \in U$ olduğu için $uv + vu \in U$ olur. Yani,

$$uv + vu \in U, \forall\, u, v \in U \tag{5.37}$$

dır. Öte yandan, U bir Lie idel olduğu için

$$uv - vu \in U, \forall\, u, v \in U \tag{5.38}$$

dır. (5.37) ve (5.38) nolu ifadeleri taraf tarafa topladığımızda, her $u, v \in U$ için $2uv \in U$ olur.

Teorem 5.2.2. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali, F, sıfırdan farklı d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev ve her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olmak üzere her $x, y \in U$ için $d(x) \circ F(y) = 0$ ise $U \subseteq Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki, $U \nsubseteq Z$ olsun. Bu durumda, Lemma 3.4.6 dan,

$V = \{u \in U \mid d(u) \in U\} \nsubseteq Z$ olur. Hipotezden, her $x, y \in U$ için $d(x) \circ F(y) = 0$ dır.

Her $y, z \in U$ için y^2, $z^2 \in U$ olduğu için, Lemma 5.2.1 den, $2yz \in U$ olur. $d(x) \circ F(y) = 0$ ifadesinde y yerine 2yz yazarsak $d(x) \circ F(2yz) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi genelleştirilmiş türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde

$$0 = d(x) \circ F(2yz) = d(x) \circ F(yz + yz) = d(x) F(yz + yz) + F(yz + yz)d(x)$$

$$= d(x)F(yz) + d(x)F(yz) + F(yz)d(x) + F(yz)d(x)$$

$$= 2(d(x)F(yz) + F(yz)d(x))$$

$$= 2(d(x) \circ F(yz))$$

bulunur. Lemma 2.36 dan, her x, y, z ∈ U için $(d(x) \circ F(yz)) = 0$ elde edilir. Bu ifadeyi genelleştirilmiş türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde

$$0 = d(x)F(yz) + F(yz)d(x) = d(x)(F(y)z + yd(z)) + (F(y)z + yd(z))d(x)$$

$$= d(x)F(y)z + d(x)yd(z) + F(y)zd(x) + yd(z)d(x)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeye $F(y)d(x)z$ ekler ve çıkarırsak

$$0 = d(x)F(y)z + d(x)yd(z) + F(y)zd(x) + yd(z)d(x)$$

$$= d(x)F(y)z + d(x)yd(z) + F(y)zd(x) + yd(z)d(x) + F(y)d(x)z - F(y)d(x)z$$

$$= (d(x)F(y) + F(y)d(x))z + F(y)(zd(x) - d(x)z) + d(x)yd(z) + yd(z)d(x)$$

$$= (d(x) \circ F(y))z + F(y)[z, d(x)] + d(x)yd(z) + yd(z)d(x)$$

elde edilir. Şimdi de, yukarıdaki ifadeye $yd(x)d(z)$ ekler ve çıkarırsak

$$0 = (d(x) \circ F(y))z + F(y)[z, d(x)] + d(x)yd(z) + yd(z)d(x) + yd(x)d(z) - yd(x)d(z)$$

$$= (d(x) \circ F(y))z + F(y)[z, d(x)] + (d(x)y + yd(x))d(z) + y(d(z)d(x) - d(x)d(z))$$

$$= (d(x) \circ F(y))z + F(y)[z, d(x)] + (d(x) \circ y)d(z) + y([d(z), d(x)])$$

olduğu bulunur. Hipotezden, $d(x) \circ F(y) = 0$ olduğu için

$$F(y)[z, d(x)] + (d(x) \circ y)d(z) + y([d(z), d(x)]) = 0, \ \forall\ x, y, z \in U$$

olur. Yukarıdaki ifadede, x ∈ V olmak üzere, z yerine d(x) yazar ve düzenlersek

$$0 = F(y)[d(x), d(x)] + (d(x) \circ y)d(d(x)) + y([d(d(x)), d(x)])$$

$$= (d(x) \circ y)d^2(x) + y([d^2(x), d(x)])$$

bulunur. Yani,

$$(d(x) \circ y)d^2(x) + y([d^2(x), d(x)]) = 0, \ \forall\ x, y \in U \tag{5.39}$$

dır. Her y, z ∈ U için $y^2, z^2 \in U$ olduğu için, Lemma 5.2.1 den, $2yz \in U$ olur

Yukarıdaki ifadede, $z \in U$ olmak üzere $2yz$ yazar ve düzenlersek

$$0 = (d(x) \circ 2zy)d^2(x) + 2zy([d^2(x), d(x)])$$

$$= d(x)2zyd^2(x) + 2zyd(x)d^2(x) + 2zy([d^2(x), d(x)])$$

$$= 2(d(x)zy + zyd(x))d^2(x) + 2zy([d^2(x), d(x)])$$

$$= 2(d(x) \circ zy)d^2(x) + zy([d^2(x), d(x)]))$$

bulunur. Yani, $2(d(x) \circ zy)d^2(x) + zy([d^2(x), d(x)])) = 0$ olur. Lemma 2.36 dan,

$$(d(x) \circ zy)d^2(x) + zy([d^2(x), d(x)]) = 0, \quad \forall x, y \in U$$

dır. Bu ifadeyi düzenlersek

$$0 = (d(x) \circ zy)d^2(x) + zy([d^2(x), d(x)])$$

$$= d(x)zyd^2(x) + zyd(x)d^2(x) + zy(d^2(x)d(x) - d(x)d^2(x))$$

$$= d(x)zyd^2(x) + zyd(x)d^2(x) + zyd^2(x)d(x) - zyd(x)d^2(x)$$

$$= d(x)zyd^2(x) + zyd^2(x)d(x)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeye $zd(x)yd^2(x)$ ekler ve çıkarırsak

$d(x)zyd^2(x) - zd(x)yd^2(x) + zyd^2(x)d(x) + zd(x)yd^2(x) = 0$ elde edilir. Bu seferde $zyd(x)d^2(x)$ ekler ve çıkarırsak

$$0 = d(x)zyd^2(x) - zd(x)yd^2(x) + zyd^2(x)d(x) + zd(x)yd^2(x) + zyd(x)d^2(x) -$$
$$zyd(x)d^2(x)$$

$$= [d(x), z]yd^2(x) + z((d(x) \circ y)d^2(x) + y[d^2(x), d(x)])$$

bulunmuş olur. Yukarıdaki ifadenin son terimi (5.39) nolu özdeşlikten sıfırdır. Böylece, her $x, y, z \in U$ için $[d(x), z]yd^2(x) = 0$ olur. Yani, her $x, z \in U$ için $[d(x), z]Ud^2(x) = 0$ dır. $U \nsubseteq Z$ olduğundan, Lemma 3.4.7 den, her $x \in V$, $z \in U$ için $[d(x), z] = 0$ veya $d^2(x) = 0$ olur. $V \subseteq U$ olduğundan, her $x \in V$ için $[d(x), x] = 0$ veya $d^2(x) = 0$ olduğu görülür.

$A = \{x \in V \mid [d(x), x] = 0\}$ ve $B = \{x \in V \mid d^2(x) = 0\}$, V h kümesinin alt gruplarıdır ve

$V = A \cup B$ olarak yazılır. Bu durumda, Teorem 2.6 dan, $V = A$ veya $V = B$ dir. Kabul edelim ki, $V = A$ olsun. Bu durumda, her $x \in V$ için $[d(x), x] = 0$ dır. Teorem 3.4.19 dan,

$d \neq 0$ olduğundan $V \subseteq Z$ dir. Bu ise, $V \nsubseteq Z$ olması ile çelişir. Bunun anlamı $V = A$ olamayacağıdır. Yani, $V = B$ dir. Bu durumda, her $x \in V$ için $d^2(x) = 0$ dır. Teorem 3.4.18 den, $d \neq 0$ olduğundan $V \subseteq Z$ dir. Yukarıdakine benzer gerekçelerle çelişki elde edilir. O halde, tüm bu çelişkilerin nedeni kabuldür. Böylece, $U \subseteq Z$ olur.

Teorem 5.2.3. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali, F, sıfırdan farklı d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev ve her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olmak üzere her $x, y \in U$ için $[d(x), F(y)] = 0$ ise $U \subseteq Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki, $U \nsubseteq Z$ olsun. Bu durumda, Lemma 3.4.6 dan,

$V = \{u \in U \mid d(u) \in U\} \nsubseteq Z$ olur. Hipotezden, her $x, y \in U$ için $[d(x), F(y)] = 0$ dır.

Her $y, z \in U$ için $y^2, z^2 \in U$ olduğundan, Lemma 5.2.1 den, $2yz \in U$ olur. $[d(x), F(y)] = 0$ ifadesinde y yerine 2yz yazarsak $[d(x), F(2yz)] = 0$ bulunur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$[d(x), F(2yz)] = [d(x), F(yz) + F(yz)] = 2[d(x), F(yz)] = 0$ bulunur. Yani, $2[d(x), F(yz)] = 0$ dır. Lemma 2.36 dan, her $x, y, z \in U$ için $[d(x), F(yz)] = 0$ olur. Bu ifadeyi genelleştirilmiş türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde

$$0 = [d(x), F(yz)] = [d(x), F(y)z + yd(z)] = [d(x), F(y)z] + [d(x), yd(z)]$$

$$= F(y)[d(x), z] + [d(x), F(y)]z + y[d(x), d(z)] + [d(x), y]d(z)$$

bulunur. Hipotezden, $[d(x), F(y)] = 0$ olmasını kullanırsak

$$F(y)[d(x), z] + y[d(x), d(z)] + [d(x), y]d(z) = 0, \ \forall\, x, y, z \in U \tag{5.40}$$

elde edilir. (5.40) nolu özdeşlikte, Lemma 5.2.1 den, $x \in V$ olmak üzere, z yerine $2zd(x)$ yazar ve düzenlersek

$$0 = F(y)[d(x), 2zd(x)] + y[d(x), d(2zd(x))] + [d(x), y]d(2zd(x))$$

$$= F(y)[d(x), zd(x) + zd(x)] + y[d(x), d(zd(x)) + d(zd(x))] + [d(x), y]d(zd(x) + zd(x))$$

$$= 2F(y)[d(x), zd(x)] + 2y[d(x), d(zd(x))] + 2[d(x), y]d(zd(x))$$

$$= 2(F(y)[d(x), zd(x)] + y[d(x), d(zd(x))] + [d(x), y]d(zd(x)))$$

bulunur. Lemma 2.36 dan, her $x, y, z \in U$ için

$F(y)[d(x), zd(x)] + y[d(x), d(zd(x))] + [d(x), y]d(zd(x)) = 0$ dır. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$\begin{aligned}
0 &= F(y)z[d(x), d(x)] + F(y)[d(x), z]d(x) + y[d(x), d(z)d(x) + zd^2(x)] + \\
&\quad [d(x), y](d(z)d(x) + zd^2(x)) \\
&= F(y)[d(x), z]d(x) + yd(z)[d(x), d(x)] + y[d(x), d(z)]d(x) + yz[d(x), d^2(x)] + \\
&\quad y[d(x), z]d^2(x) + [d(x), y]d(z)d(x) + [d(x), y]zd^2(x) \\
&= F(y)[d(x), z]d(x) + y[d(x), d(z)]d(x) + yz[d(x), d^2(x)] + y[d(x), z]d^2(x) + \\
&\quad [d(x), y]d(z)d(x) + [d(x), y]zd^2(x) \\
&= (F(y)[d(x), z] + y[d(x), d(z)] + [d(x), y]d(z))d(x) + yz[d(x), d^2(x)] + \\
&\quad y[d(x), z]d^2(x) + [d(x), y]zd^2(x)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.40) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. Böylece,

$$yz[d(x), d^2(x)] + y[d(x), z]d^2(x) + [d(x), y]zd^2(x) = 0, \forall x \in V, \forall y, z \in U \quad (5.41)$$

elde edilir. (5.41) nolu özdeşlikte, $t \in U$ olmak üzere, y yerine 2ty yazar ve düzenlersek

$$\begin{aligned}
0 &= 2tyz[d(x), d^2(x)] + 2ty[d(x), z]d^2(x) + [d(x), 2ty]zd^2(x) \\
&= 2(tyz[d(x), d^2(x)] + ty[d(x), z]d^2(x) + [d(x), ty]zd^2(x))
\end{aligned}$$

olur. Lemma 2.36 dan, her $x \in V$, $y, t, z \in U$ için

$yz[d(x), d^2(x)] + ty[d(x), z]d^2(x) + [d(x), ty]zd^2(x) = 0$ dır. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$\begin{aligned}
0 &= tyz[d(x), d^2(x)] + ty[d(x), z]d^2(x) + [d(x), ty]zd^2(x) \\
&= tyz[d(x), d^2(x)] + ty[d(x), z]d^2(x) + t[d(x), y]zd^2(x) + [d(x), t]yzd^2(x) \\
&= t(yz[d(x), d^2(x)] + y[d(x), z]d^2(x) + [d(x), y]zd^2(x)) + [d(x), t]yzd^2(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede (5.41) nolu özdeşliği kullandığımızda, her $x \in V$, $y, t, z \in U$ için $[d(x), t]yzd^2(x) = 0$ elde edilir. Elde ettiğimiz bu ifadede t yerine x yazarsak, her $x \in V$, $y, z \in U$ için $[d(x), x]yzd^2(x) = 0$ bulunur. Yani, her $x \in V$, $z \in U$ için

$[d(x), x]Uzd^2(x) = 0$ olur. Bu durumda, $U \nsubseteq Z$ olduğu için, Lemma 3.4.7 den,

her $x \in V$, $z \in U$ için $[d(x), x] = 0$ veya $zd^2(x) = 0$ olduğu görülür. Bu ise, her $x \in V$ için $[d(x), x] = 0$ veya $Ud^2(x) = 0$ olması demektir. $A = \{x \in V \mid [d(x), x] = 0\}$ ve

$B = \{x \in V \mid Ud^2(x) = 0\}$, V kümesinin alt gruplarıdır ve $V = A \cup B$ olarak yazılır. Bu durumda, Teorem 2.6 dan, $V = A$ veya $V = B$ dir. Kabul edelim ki, $V = A$ olsun. Bu durumda, her $x \in V$ için $[d(x), x] = 0$ dır. Teorem 3.4.19 dan, $d \neq 0$ olduğu için $V \subseteq Z$ dir. Bu ise, $V \nsubseteq Z$ olması ile çelişir. Bunun anlamı $V = A$ olamayacağıdır. O halde, $V = B$ olsun. Bu durumda, her $x \in V$ için $Ud^2(x) = 0$ olur. Bu ifadeyi soldan $d^2(x)$ ile çarparsak $d^2(x)Ud^2(x) = 0$ bulunur. $U \nsubseteq Z$ olduğu için Lemma 3.4.7 den, her $x \in V$ için $d^2(x) = 0$ olur. Teorem 3.4.15 den, $d \neq 0$ olduğu için $V \subseteq Z$ dir. Bu ise, $V \nsubseteq Z$ olması ile çelişir. Çelişkilerin nedeni kabuldür. O halde, $U \subseteq Z$ dir.

BÖLÜM 6

HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ (σ, τ)-TÜREVLER

Bu bölümde, Genelleştirilmiş (σ, τ)-türevler için verilen bazı sonuçlar ve halka ve Lie ideal üzerinde komütatiflikle ilgili verilen bazı ispatlar incelenmiştir.

6.1. Asal Halkalarda Genelleştirilmiş (σ, τ)-Türevler

Gölbaşı Ö. ve Koç E., 2009.

Lemma 6.1.1. R bir asal halka, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve d, R halkasının bir endomorfizmi olmak üzere R halkasının bir (σ, τ)-türevi ise d = 0 dır.

İspat: d, R halkası üzerinde bir homorfizma olduğundan, her x, y $\in$ R için

$$d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) = d(x)d(y) \tag{6.1}$$

olur. Bu ifadede, r $\in$ R olmak üzere x yerine xr yazarsak

$d(xr)\sigma(y) + \tau(xr)d(y) = d(xr)d(y)$ bulunur. d nin, R üzerinde bir homorfizm ve τ nun, R üzerinde bir otomorfizm olmasını kullanarak bulmuş olduğumuz ifadeyi düzenlersek $d(x)d(r)\sigma(y) + \tau(x)\tau(r)d(y) = d(x)d(r)d(y)$ elde edilir. (6.1) nolu ifadede x yerine r yazar ve son elde ettiğimiz eşitlikte kullanırsak

$d(x)d(r)\sigma(y) + \tau(x)\tau(r)d(y) = d(x)d(r)\sigma(y) + d(x)\tau(r)d(y)$ bulunur. Bu ise,

her x, r, y $\in$ R için $\tau(x)\tau(r)d(y) = d(x)\tau(r)d(y)$ olması demektir. Bu ifadeyi düzenlediğimizde her x, r, y $\in$ R için $(\tau(x) - d(x))\tau(r)d(y) = 0$ elde edilir. τ, otomorfizm olduğundan her x, y $\in$ R için $(\tau(x) - d(x))Rd(y) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den,

her x, y $\in$ R için $\tau(x) - d(x) = 0$ veya $d(y) = 0$ olur. Yani, her x $\in$ R için

$\tau(x) - d(x) = 0$ veya $d = 0$ dır. $d = 0$ olması durumunda ispat biter. O halde, kabul edelim ki, her $x \in R$ için $\tau(x) - d(x) = 0$ olsun. Kabulde, x yerine xy yazarsak

$d(xy) = \tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$ bulunur. Öte yandan, d bir (σ,τ)-türev olduğundan

$d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) = \tau(x)\tau(y)$ olur. Kabulden, $\tau(y) = d(y)$ olmasını

kullandığımızda $d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) = \tau(x)d(y)$ olduğu elde edilir. Bu ise, her $x, y \in R$ için $d(x)\sigma(y) = 0$ demektir. σ, otomorfizm olduğundan $d(x)R = 0$ olur. Bu eşitliği sağdan $d(x)$ ile çarpılır ve Uyarı 2.23 kullanılırsa, her $x \in R$ için $d(x) = 0$ olur. Yani, $d = 0$ dır.

Teorem 6.1.2. (f, d), R asal halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere (f, d), R halkası üzerinde bir homomorfizma ise

$d = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki, $f : R \to R$ bir homomorfizma olsun. Homomorfizma ve

genelleştirilmiş (σ,τ)-türev tanımlarını beraber kullandığımızda, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) = f(x)f(y)$ bulunur. Bu özdeşlikte, $r \in R$ olmak üzere, y yerine yr yazarsak $f(x)f(yr) = f(x)\sigma(yr) + \tau(x)d(yr)$ bulunur. Bulduğumuz ifadeyi genelleştirilmiş (σ,τ)-türev tanımı ve f nin homomorfizma olmasını kullanarak düzenlersek

$$
\begin{aligned}
f(x)f(y)\sigma(r) + f(x)\tau(y)d(r) &= f(x)\sigma(y)\sigma(r) + \tau(x)d(y)\sigma(r) + \tau(x)\tau(y)d(r) \qquad (6.2)\\
&= \big(f(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)\big)\sigma(r) + \tau(x)\tau(y)d(r)\\
&= f(xy)\sigma(r) + \tau(x)\tau(y)d(r)\\
&= f(x)f(y)\sigma(r) + \tau(x)\tau(y)d(r)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise, her $x, y, r \in R$ için $\big(\tau(x) - f(x)\big)\tau(y)d(r) = 0$ olması demektir. τ, örten olduğundan, Uyarı 2.23 den, her $x, r \in R$ için $\tau(x) = f(x)$ veya $d(r) = 0$ bulunur. Yani, $\tau = f$ veya $d = 0$ dır. $d = 0$ olması durumunda ispat biter. O halde, $\tau = f$ olması durumunu inceleyelim. (6.2) nolu ifadeyi $\tau = f$ olmasını kullanarak düzenlersek,

her $x, y, r \in R$ için

$$\tau(x)\tau(y)\sigma(r) + \tau(x)\tau(y)d(r) = \tau(x)\sigma(y)\sigma(r) + \tau(x)d(y)\sigma(r) + \tau(x)\tau(y)d(r)$$

bulunur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde, her $x, y, r \in R$ için

$\tau(x)(\tau(y) - \sigma(y) - d(y))\sigma(r) = 0$ elde edilir. $\tau(R) = R$ ve $\sigma(R) = R$ olması yardımıyla son özdeşlikte Uyarı 2.23 ü kullanırsak, her $y \in R$ için $\tau(y) - \sigma(y) - d(y) = 0$ elde edilir. Bu durumda, $d = \tau - \sigma$ olur. Bu ise, d, R halkasının bir otomorfizması demektir. Böylece, Lemma 6.1.1 den, $d = 0$ olduğu bulunur.

Teorem 6.1.3. (f, d), R asal halkasının bir genelleştirilmiş (σ, τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere (f, d), R halkası üzerinde bir anti-homomorfizm ise $d = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki, $f : R \rightarrow R$ bir anti-homomorfizma olsun. $f(R) \subset Z$ olması durumunda, her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(y)f(x) = f(x)f(y)$ dır. Böylece, Lemma 6.1.1 den,

$d = 0$ olduğu bulunur. Böylece, $f(R) \subset Z$ durumu için ispat biter. Şimdi de $f(R) \not\subseteq Z$ olması durumunu inceleyelim. Anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş (σ, τ)-türev tanımları beraber kullanıldığında, her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) = f(y)f(x)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede x yerine xy yazarsak $f(xy)\sigma(y) + \tau(xy)d(y) = f(y)f(xy)$ olur. Bu ifadeyi yukarıdaki özdeşliği kullanarak düzenlersek

$f(y)f(x)\sigma(y) + \tau(xy)d(y) = f(y)f(x)\sigma(y) + f(y)\tau(x)$ bulunur. Bu ise,

$$\tau(xy)d(y) = f(y)\tau(x)d(y), \quad \forall x, y \in R \tag{6.3}$$

olması demektir. Yukarıdaki özdeşlikte, $r \in R$ olmak üzere, x yerine rx yazar ve bulunan ifadeyi (6.3) nolu özdeşliği kullanarak düzenlersek, her $x, y, r \in R$ için $[\tau(r), f(y)]\tau(x)d(y) = 0$ olduğu bulunur. Bulmuş olduğumuz ifadede $\tau(R) = R$ olmasını kullandığımızda, Uyarı 2.23 den, her $y, r \in R$ için $[\tau(r), f(y)] = 0$ veya $d(y) = 0$ elde edilir. İlk ifadede $\tau(R) = R$ olması kullanıldığında, her $y \in R$ için $f(y) \in Z$ veya $d(y) = 0$ olduğu bulunur. $A = \{y \in R \mid f(y) \in Z\}$ ve $B = \{y \in R \mid d(y) = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. Böylece, Teorem 2.6 dan, $R = A$ veya $R = B$ olur. Kabul edelim ki, $R = A$ olsun. Bu durumda, her $y \in R$ için $f(y) \in Z$ dir. Yani, $f(R) \subset Z$ olur. Bu durum kabulümüzle çelişir. O halde, $R = B$ dir. Yani, her $y \in R$ için $d(y) = 0$ dır. Bu ise, $d = 0$ demektir.

Gölbaşı Ö. ve Koç E., Baskıda.

Lemma 6.1.4. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ, τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her $x \in R$ için af(x) = 0 ise a = 0 veya d = 0 dır.

İspat: Hipotezden, her $x \in R$ için af(x) = 0 dır. Bu ifadede, $y \in R$ olmak üzere, x yerine xy yazarsak af(xy) = 0 bulunur. (σ, τ)-türev tanımını kullanırsak

$\mathrm{af(x)}\sigma(\mathrm{y}) + \mathrm{a}\tau(\mathrm{x})\mathrm{d}(\mathrm{y}) = 0$ elde edilir. Hipotezden, af(x) = 0 olmasını kullanırsak $\mathrm{a}\tau(\mathrm{x})\mathrm{d}(\mathrm{y}) = 0$ olur. Yani, her x, $y \in R$ için $\mathrm{a}\tau(\mathrm{x})\mathrm{d}(\mathrm{y}) = 0$ dır. Bu, her $y \in R$ için $\mathrm{a}\tau(\mathrm{R})\mathrm{d}(\mathrm{y}) = 0$ olması demektir. τ, örten olduğundan, her $y \in R$ için $\mathrm{aRd}(\mathrm{y}) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $y \in R$ için a = 0 veya d(y) = 0 dır. Yani, a = 0 veya d = 0 dır.

Teorem 6.1.5. R, karakteristiği ikiden farklı olan değişmeli olmayan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ, τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her x, $y \in R$ için [d(x), f(y)] = 0 ise d = 0 dır.

İspat: f = 0 olması durumunda hiçbir şey ispatlanamaz. O halde, kabul edelim ki,

$f \neq 0$ olsun. Hipotezden, her x, $y \in R$ için [d(x), f(y)] = 0 dır. Bu ifadede, $z \in R$ olmak üzere, y yerine yz yazarsak [d(x), f(yz)] = 0 bulunur. (σ, τ)- türev tanımı yardımıyla bu ifadeyi düzenlersek

$$0 = [d(x), f(y)\sigma(z) + \tau(y)d(z)] = f(y)[d(x), \sigma(z)] + [d(x), f(y)]\sigma(z) +$$

$$\tau(y)[d(x),\ d(z)] + [d(x),\ \tau(y)]d(z)$$

elde edilir. Hipotezi kullanarak bu ifadeyi düzenlersek, her x, y, $z \in R$ için

$$f(y)[d(x), \sigma(z)] + \tau(y)[d(x),\ d(z)] + [d(x),\ \tau(y)]d(z) = 0 \tag{6.4}$$

bulunur. Yukarıdaki özdeşlikte, z yerine $z\sigma^{-1}(d(x))$ yazarsak

$$f(y)[d(x), \sigma(z\sigma^{-1}(d(x)))] + \tau(y)[d(x),\ d(z\sigma^{-1}(d(x)))] + [d(x), \tau(y)]d(z\sigma^{-1}(d(x))) = 0$$

olur. Yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde

$$0 = f(y)[d(x), \sigma(z)d(x)] + \tau(y)\left[d(x),\ d(z)\sigma(\sigma^{-1}(d(x))) + \tau(z)d\left(\sigma^{-1}(d(x))\right)\right] +$$

$$[d(x),\ \tau(y)](d(z)\sigma(\sigma^{-1}(d(x))) + \tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right))$$

$$= f(y)\sigma(z)[d(x), d(x)] + f(y)[d(x), \sigma(z)]d(x) + \tau(y)[d(x),\ d(z)\sigma(\sigma^{-1}(d(x)))] +$$

$$\tau(y)\left[d(x),\ \tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)\right] + [d(x),\ \tau(y)]d(z)\sigma(\sigma^{-1}(d(x))) +$$

$$[d(x),\ \tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)$$

$$= f(y)[d(x), \sigma(z)]d(x) + \tau(y)d(z)[d(x),\ d(x)] + \tau(y)[d(x),\ d(z)]d(x) +$$

$$\tau(y)\tau(z)[d(x),\ d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)] + \tau(y)[d(x),\ \tau(z)]d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) +$$

$$[d(x),\ \tau(y)]d(x) + [d(x),\ \tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)$$

$$= (f(y)[d(x), \sigma(z)] + \tau(y)[d(x),\ d(z)] + [d(x),\ \tau(y)])d(x) +$$

$$\tau(y)\tau(z)[d(x),\ d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)] + \tau(y)[d(x),\ \tau(z)]d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) +$$

$$[d(x),\ \tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)$$

elde edilir. İlk terim (6.4) nolu özdeşlikten sıfırdır. O halde,

$$\tau(y)\tau(z)[d(x),\ d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)] + \tau(y)[d(x),\ \tau(z)]d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) +$$

$$[d(x),\ \tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = 0,\ \forall\ x, y, z \in R \tag{6.5}$$

olur. Yukarıdaki özdeşlikte, $r \in R$ olmak üzere, y yerine ry yazarsak

$\tau(ry)\tau(z)[d(x),\ d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)] + \tau(ry)[d(x),\ \tau(z)]d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) + [d(x),\ \tau(ry)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = 0$ olduğu bulunur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$0 = \tau(r)\tau(y)\tau(z)[d(x),\ d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)] + \tau(r)\tau(y)[d(x),\ \tau(z)]d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) +$$

$$[d(x),\ \tau(r)\tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)$$

$$= \tau(r)\tau(y)\tau(z)[d(x),\ d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)] + \tau(r)\tau(y)[d(x),\ \tau(z)]d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) +$$

$$\tau(r)[d(x),\ \tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) + [d(x),\ \tau(r)]\tau(y)\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)$$

$$= \tau(r)(\tau(y)\tau(z)[d(x),\ d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)] + \tau(y)[d(x),\ \tau(z)]d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) +$$

$$[d(x),\ \tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)) + [d(x),\ \tau(r)]\tau(y)\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)$$

olur. İlk terim (6.5) nolu özdeşlikten sıfır olur. O halde, her x, y, z $\in$ R için $[d(x),\ \tau(r)]\tau(yz)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = 0$ elde edilir. Bu özdeşlikte, τ nun örtenliğini kullandığımızda $[d(x),\ \tau(r)]Rd\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her x $\in$ R için $[d(x),\ \tau(R)] = 0$ veya $d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = 0$ dır. τ, örten olduğundan, her x $\in$ R için $d(x) \in Z$ veya $d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = 0$ olur. A = {x ∈ R | $d(x) \in Z$} ve

B = {x ∈ R | $d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = 0$}, R halkasının alt gruplarıdır ve R = A∪B olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir. Kabul edelim ki, R = A olsun. Bu durumda,

her x ∈ R için $d(x) \in Z$ olur. Yani, d(R) ⊂ Z dir. Lemma 4.2.1den, R halkası değişmelidir. Bu, kabulümüz ile çelişir. O halde, R = A olamaz. O halde, R = B dir. Bu durumda,

her x ∈ R için $d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = 0$ olur. (6.4) nolu özdeşlikte z yerine $\sigma^{-1}(d(z))$ yazarsak

$f(y)[d(x),\ \sigma(\sigma^{-1}(d(z)))] + \tau(y)[d(x),\ d(\sigma^{-1}(d(z)))] + [d(x),\ \tau(y)]d(\sigma^{-1}(d(z))) = 0$ bulunur. Yukarıdaki ifadede $d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = 0$ olmasını kullanırsak $f(y)[d(x),\ d(z)] = 0$ elde edilir. Bu, her x, y, z $\in$ R için $f(y)d(x)d(z) - f(y)d(z)d(x) = 0$ olması demektir. Hipotezden, her x, y ∈ R için $d(x)f(y) = f(y)d(x)$ olur. Son bulduğumuz ifadeyi hipotez yardımıyla düzenlediğimizde, her x, y, z ∈ R için

$$\begin{aligned} f(y)d(x)d(z) - f(y)d(z)d(x) &= d(x)f(y)d(z) - d(z)f(y)d(x) \\ &= d(x)d(z)f(y) - d(z)d(x)f(y) \\ &= (d(x)d(z) - d(z)d(x))f(y) \\ &= [d(x), d(z)]f(y) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Lemma 6.1.4 den, her x, z ∈ R için $[d(x), d(z)] = 0$ veya d = 0 olur. O halde, kabul edelim ki, her x, z ∈ R için $[d(x), d(z)] = 0$ olsun. Bu durum, her x, z ∈ R için

$[d(x), d(z)] = 0$ olması $[d(R), d(R)] = 0$ demektir. Lemma 4.1.5 den $d(R) \subset Z$ dir.

Lemma 4.2.1 den, R değişmelidir. Çelişki elde edilir. O halde, $d = 0$ dır.

Sonuç 6.1.6. R, karakteristiği ikiden farklı olan değişmeli olmayan bir asal halka ve d, R halkasının bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her $x, y \in R$ için $[d(x), d(y)] = 0$ ise $d = 0$ dır.

Teorem 6.1.7. R, karakteristiği ikiden farklı olan değişmeli olmayan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her $x, y \in R$ için $[d(x), f(y)] = \pm[x, y]_{\sigma,\tau}$ ise $d = 0$ dır.

İspat: $f = 0$ olması durumunda, hipotezden, her $x, y \in R$ için $[x, y]_{\sigma,\tau} = 0$ dır. Bu ifadede, $z \in R$ olmak üzere, x yerine xz yazar ve düzenlersek

$[xz, y]_{\sigma,\tau} = x[z, \sigma(y)] + [x, y]_{\sigma,\tau} z = 0$ bulunur. $[x, y]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan

her $x, y, z \in R$ için $x[z, \sigma(y)] = 0$ elde edilir. Bu durumda, her $z \in R$ için $R[z, \sigma(R)] = 0$ olur. σ, örten olduğundan, her $z \in R$ için $R[z, R] = 0$ dır. Bu ifadeyi soldan $[z, R]$ ile çarpılır ve Uyarı 2.23 kullanılırsa her $z \in R$ için $[z, R] = 0$ olur. Bu da, R halkasının değişmeli olması demektir. Bu ise, hipotezde R halkasının değişmeli olmayan bir halka olması ile çelişir. O halde, $f \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda, hipotezden, her $x, y \in R$ için $[d(x), f(y)] = \pm[x, y]_{\sigma,\tau}$ dır. Bu ifadede y yerine yz yazarsak $[d(x), f(yz)] = \pm[x, yz]_{\sigma,\tau}$ bulunur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$[d(x), f(y)\sigma(z) + \tau(y)d(z)] = \pm(\tau(y)[x, z]_{\sigma,\tau} + [x, z]_{\sigma,\tau}\, y)$ bulunur. Bu ise,

$f(y)[d(x), \sigma(z)] + [d(x), f(y)]\sigma(z) + \tau(y)[d(x), d(z)] + [d(x), \tau(y)]d(z) = \pm(\tau(y)[x, z]_{\sigma,\tau} + [x, y]_{\sigma,\tau}\, \sigma(z))$ olması demektir. Bu ifadeyi $[d(x), f(y)] = \pm[x, y]_{\sigma,\tau}$ olmasını kullanarak düzenlersek

$f(y)\ [d(x), \sigma(z)] + (\pm[x, y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)) + \tau(y)[d(x), d(z)] + [d(x), \tau(y)]d(z) = \pm(\tau(y)[x, z]_{\sigma,\tau} + [x, y]_{\sigma,\tau}\, \sigma(z))$ bulunur. Yani,

$$f(y)[d(x), \sigma(z)] + \tau(y)[d(x), d(z)] + [d(x), \tau(y)]d(z) = \pm\tau(y)[x, z]_{\sigma,\tau} \quad (6.6)$$

elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadede, z yerine $z\sigma^{-1}\big(d(x)\big)$ yazarsak

$f(y)[d(x), \sigma(z\sigma^{-1}(d(x)))] + \tau(y)[d(x), d(z\sigma^{-1}(d(x)))] + [d(x), \tau(y)]d(z\sigma^{-1}(d(x))) =$

$\pm\tau(y)[x,\ z\sigma^{-1}(d(x))]_{\sigma,\ \tau}$

bulunur. Bu ise,

$f(y)[d(x),\ \sigma(z)d(x)] + \tau(y)[d(x),\ d(z\sigma^{-1}(d(x)))] + [d(x),\ \tau(y)]d(z\sigma^{-1}(d(x))) = \pm\tau(y)[x,\ z\sigma^{-1}(d(x))]_{\sigma,\ \tau}$

demektir. Bu ifadeyi düzenlersek,

$f(y)\sigma(z)[d(x),\ d(x)] + f(y)[d(x), \sigma(z)]d(x) + \tau(y)[d(x), d(z)\sigma\left(\sigma^{-1}(d(x))\right) +$

$\tau(z)d(\sigma^{-1}(d(x)))] + [d(x), \tau(y)](d(z)\sigma\left(\sigma^{-1}(d(x))\right) + \tau(z)d(\sigma^{-1}(d(x)))) =$

$\pm\tau(y)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}(d(x))\right]_{\sigma,\ \tau} + \tau(y)[x,\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma\left(\sigma^{-1}(d(x))\right)$

olur. Yani,

$f(y)[d(x),\ \sigma(z)]d(x) + \tau(y)[d(x), d(z)d(x) + \tau(z)d\left(\sigma^{-1}(d(x))\right)] +$

$[d(x), \tau(y)]\left(d(z)d(x) + \tau(z)d\left(\sigma^{-1}(d(x))\right)\right) =$

$\tau(y)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}(d(x))\right]_{\sigma,\ \tau} + \tau(y)[x,\ z]_{\sigma,\ \tau}d(x)$

dır. Buradan,

$f(y)[d(x),\ \sigma(z)]d(x) + \tau(y)d(z)[d(x), d(x)] + \tau(y)[d(x), d(z)]d(x) +$

$\tau(y)\tau(z)[d(x),\ d(\sigma^{-1}(d(x)))] + \tau(y)[d(x),\ \tau(z)]d(\sigma^{-1}(d(x))) +$

$[d(x),\ \tau(y)]d(z)d(x) + [d(x), \tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}(d(x))\right) = \pm\tau(y)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}(d(x))\right]_{\sigma,\ \tau} + \tau(y)[x,\ z]_{\sigma,\ \tau}d(x)$

elde edilir. Bu ise,

$(f(y)[d(x),\ \sigma(z)] + \tau(y)[d(x), d(z)] + [d(x), \tau(y)]d(z))d(x) +$

$\tau(y)\tau(z)[d(x),\ d(\sigma^{-1}(d(x)))] + \tau(y)[d(x),\ \tau(z)]d(\sigma^{-1}(d(x)))$

$+[d(x),\tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = \pm\tau(y)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right]_{\sigma,\ \tau} + \tau(y)[x,\ z]_{\sigma,\ \tau}d(x))$

olması demektir. (6.6) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi $\tau(y)[x,\ z]_{\sigma,\ \tau}d(x)$ ifadesine eşittir. O halde,

$$\tau(y)\tau(z)[d(x),\ d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right))] + \tau(y)[d(x),\ \tau(z)]d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)) +$$

$$[d(x),\tau(y)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = \pm\tau(y)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right]_{\sigma,\ \tau},\ \forall\ x, y, z \in R \qquad (6.7)$$

elde edilir. Elde etmiş olduğumuz son ifadede, r ∈ R olmak üzere y yerine yr yazarsak

$$\tau(yr)\tau(z)[d(x),\ d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right))] + \tau(yr)[d(x),\ \tau(z)]d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)) +$$

$$[d(x),\tau(yr)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = \pm\tau(yr)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right]_{\sigma,\ \tau}$$

bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$\tau(y)\tau(r)\tau(z)[d(x),\ d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right))] + \tau(y)\tau(r)[d(x),\ \tau(z)]d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)) +$$

$$[d(x),\tau(y)\tau(r)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) = \pm\tau(y)\tau(r)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right]_{\sigma,\ \tau}$$

olur. Biraz daha düzenlenmesi durumunda

$$\tau(y)\tau(r)\tau(z)[d(x),\ d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right))] + \tau(y)\tau(r)[d(x),\ \tau(z)]d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)) +$$

$$\tau(y)[d(x),\tau(r)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) + [d(x),\tau(y)]\tau(r)\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) =$$

$$\pm\tau(y)\tau(r)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right]_{\sigma,\ \tau}$$

elde edilir. Daha da düzenlendiğinde ise,

$$\tau(y)(\tau(r)\tau(z)[d(x),\ d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right))] + \tau(r)[d(x),\ \tau(z)]d(\sigma^{-1}\left(d(x)\right))$$

$$+[d(x),\tau(r)]\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right)) + [d(x),\tau(y)]\tau(r)\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right) =$$

$$\pm\tau(y)\tau(r)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right]_{\sigma,\ \tau}$$

olduğu bulunur. (6.7) nolu ifadeden dolayı yukarıdaki ifadenin ilk terimi $\tau(y)\tau(r)\tau(z)\left[x,\ \sigma^{-1}\left(d(x)\right)\right]_{\sigma,\ \tau}$

ifadesine eşittir. O halde, her x, y, z, r ∈ R için $[d(x),\tau(y)]\tau(r)\tau(z)d\left(\sigma^{-1}\big(d(x)\big)\right)=0$ olur. Yani, her x, y, z, r ∈ R için $[d(x),\tau(y)]\tau(rz)d\left(\sigma^{-1}\big(d(x)\big)\right)=0$ dır. Uyarı 2.23 den, her x, y ∈ R için $[d(x),\tau(y)]=0$ veya $d\left(\sigma^{-1}\big(d(x)\big)\right)=0$ dır. τ, örten olduğundan,

her x ∈ R için $[d(x),R]=0$ veya $d\left(\sigma^{-1}\big(d(x)\big)\right)=0$ olur. Yani, her x ∈ R için d(x) ∈ Z veya $d\left(\sigma^{-1}\big(d(x)\big)\right)=0$ dır. A = {x ∈ R | d(x) ∈ Z} ve

B = $\{x\in R \mid d\left(\sigma^{-1}\big(d(x)\big)\right)=0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve R = A∪B olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir. Kabul edelim ki, R = A olsun. Bu durumda,

her x ∈ R için d(x) ∈ Z dir. Yani, d(R) ⊂ Z olur. R halkası değişmeli olmayan bir halka olduğunda, Lemma 4.2.1den, d = 0 dır. Böylece, R = A olması durumunda ispat biter. Şimdi de, kabul edelim ki, R = B olsun. Bu durumda da, her x ∈ R için $d\left(\sigma^{-1}\big(d(x)\big)\right)=0$ dır. (6.6) nolu özdeşlikte, x yerine $\sigma^{-1}(d(x))$ yazarsak

$f(y)[d(\sigma^{-1}(d(x))),\ \sigma(z)] + \tau(y)[d(\sigma^{-1}(d(x))),\ d(z)] + [d(\sigma^{-1}(d(x))),\ \tau(y)]d(z) = \pm\tau(y)[\sigma^{-1}(d(x))\,,\ z]_{\sigma,\ \tau}$

bulunur. Bu ifadeyi kabulümüzü kullanarak düzenlersek

$$\tau(y)\big[\sigma^{-1}\big(d(x)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}=0, \forall\, x, y, z\in R$$

elde edilir. Bu durumda, her x, z ∈ R için $\tau(R)\big[\sigma^{-1}\big(d(x)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}=0$ olur. τ, örten olduğundan her x, z ∈ R için $R\big[\sigma^{-1}\big(d(x)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}=0$ dır. Bu ifade soldan $\big[\sigma^{-1}\big(d(x)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}$ ile çarpılır ve Uyarı 2.23 uygulanırsa her x, z ∈ R için $\big[\sigma^{-1}\big(d(x)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}=0$ olur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede x yerine xy yazarsak

$\big[\sigma^{-1}\big(d(xy)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}=0$ bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$\begin{aligned}0 &= \big[\sigma^{-1}\big(d(xy)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau} = \big[\sigma^{-1}\big(d(x)\sigma(y)+\tau(x)d(y)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}\\ &= \big[\sigma^{-1}\big(d(x)\sigma(y)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}+\big[\sigma^{-1}\big(\tau(x)d(y)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}\\ &= \big[\sigma^{-1}\big(d(x)\big)y,\ z\big]_{\sigma,\ \tau}+\big[\sigma^{-1}\big(\tau(x)\big)\sigma^{-1}\big(d(y)\big),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}\end{aligned}$$

$= \sigma^{-1}(d(x))[y,\ \sigma(z)] + [\sigma^{-1}(d(x)),\ z]_{\sigma,\ \tau} + \sigma^{-1}(\tau(x))[\sigma^{-1}(d(y)),\ z]_{\sigma,\ \tau} +$

$[\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(z)]\sigma^{-1}(d(y))$

bulunur. $[\sigma^{-1}(d(x)),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlediğimizde

$$\sigma^{-1}(d(x))[y,\ \sigma(z)] + [\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(z)]\sigma^{-1}(d(y)) = 0,\ \forall\ x, y, z \in R$$

olduğu elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadede, z yerine $\sigma^{-1}(y)$ yazarsak $\sigma^{-1}(d(x))[y,\ \sigma(\sigma^{-1}(y))] + [\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(d(y)) = 0$ olur. Bu ise, $\sigma^{-1}(d(x))[y,\ y] + [\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(d(y)) = 0$ olması demektir. Yani,

$$[\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(d(y)) = 0,\ \forall\ x, y \in R$$

dır. Yukarıdaki ifadede x yerine xz yazar ve düzenlersek

$0 = [\sigma^{-1}(\tau(xz)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(d(y))$

$= [\sigma^{-1}(\tau(x))\sigma^{-1}(\tau(z)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(d(y))$

$= \sigma^{-1}(\tau(x))[\sigma^{-1}(\tau(z)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(d(y)) +$

$[\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(\tau(z))\sigma^{-1}(d(y))$

bulunur. $[\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(d(y)) = 0$ olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlersek, her x, y, z ∈ R için $[\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(\tau(z))\sigma^{-1}(d(y)) = 0$ olduğu elde edilir. Bu, her x, y ∈ R için $[\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(\tau(R))\sigma^{-1}(d(y)) = 0$ olması demektir. τ, örten olduğundan her x, y ∈ R için

$\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]\sigma^{-1}(R)\sigma^{-1}(d(y)) = 0$ olur. σ, örten olduğundan , her x, y ∈ R için $[\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))]R\sigma^{-1}(d(y)) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her x, y ∈ R için $[\sigma^{-1}(\tau(x)),\ \tau(\sigma^{-1}(y))] = 0$ veya $\sigma^{-1}(d(y)) = 0$ dır. Yaptığımız işlemlere benzer işlemler yaparak σ, τ nun örtenliğini kullanırsak, her x, y ∈ R için $[x,\ y] = 0$ veya d(y) = 0 olduğu elde edilir. Yani, her y ∈ R için y ∈ Z veya d(y) = 0 dır.

$K = \{y \in R \mid y \in Z\}$ ve $L = \{y \in R \mid d(y) = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = K \cup L$ olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, R = K veya R = L dir. Kabul edelim ki, R = K olsun. Bu durumda, her $y \in R$ için $y \in Z$ dir. Yani, R halkası değişmelidir. Bu, R halkasının değişmeli olmayan bir halka olması durumu ile çelişir. O halde, R = L dir. Bu durumda da, her $y \in R$ için $d(y) = 0$ dır. Yani, $d = 0$ dır.

Sonuç 6.1.8. R, karakteristiği ikiden farklı olan değişmeli olmayan bir asal halka ve d, R halkasının bir (σ, τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her $x, y \in R$ için $[d(x), d(y)] = \pm[x, y]_{\sigma, \tau}$ ise $d = 0$ dır.

6.2. Asal Halkalarda Genelleştirilmiş (σ, τ)-Türevler için Sonuçlar

Lemma 6.2.1. [Chaudhry M. A. ve Thaheem A. B., 2002., Lemma 2.1] R bir

yarı asal halka, $f : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm ve g, R halkasının bir endomorfizmi olmak üzere $x \to [f(x), g(x)]$ dönüşümü merkezileştirici ise her $x \in R$ için $2[f(x), g(x)] = 0$ dır.

Gölbaşı Ö. ve Koç E., 2009.

Teorem 6.2.2. (f, d), R asal halkasının bir genelleştirilmiş (σ, τ)-türevi, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere d sıfırdan farklı ve her $x, y \in R$ için $f(x)y = xf(y)$ ise her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

İspat: Kabul edelim ki, $d \neq 0$ ve

$$f(x)y = xf(y), \ \forall\, x, y \in R \tag{6.8}$$

olsun. (6.8) nolu ifadede, $z \in R$ olmak üzere, x yerine zx yazar ve hipotezden dolayı $f(z)\sigma(x) = zf(\sigma(x))$ olmasını kullanırsak her $x, y, z \in R$ için

$(zf(\sigma(x)) + \tau(z)d(x) - zf(x))y = 0$ olduğu bulunur. Uyarı 2.23 den,

$$z(f(\sigma(x)) - f(x)) = -\tau(z)d(x), \quad \forall\, x, z \in R \tag{6.9}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede z yerine yz yazar ve bulunan ifadeyi yukarıdaki özdeşlik yardımıyla düzenlersek

$$(y-\tau(y))\tau(z)d(x)=0,\ \forall\, x,\ y,\ z \in R \tag{6.10}$$

elde edilir. τ, R halkasının bir otomorfizmi olduğu için örtendir ve $\tau(R) = R$ dir. Bu durumda, (6.10) nolu ifadeyi düzenlersek her $x,\ y \in R$ için $(y-\tau(y))Rd(x)=0$ olur. Uyarı 2.23 den, her $y \in R$ için $y-\tau(y)=0$ veya $d=0$ elde edilir. Kabulümüzde $d \neq 0$ olduğundan, her $y \in R$ için $y=\tau(y)$ olduğu bulunur. (6.8) nolu ifadede y yerine yz yazarsak $f(x)yz = xf(yz)$ bulunur. (6.8) nolu ifade kullanıldığında $f(x)yz = xf(y)z = xf(yz)$ olur. f nin genelleştirilmiş (σ,τ)-türev olmasını kullandığımızda

$f(x)yz = xf(y)z = xf(y)\sigma(z) + x\tau(y)d(z)$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede $y=\tau(y)$ olmasını kullanırsak $xf(y)z = xf(y)\sigma(z) + xyd(z)$ elde edilir. Tekrar (6.8) nolu ifadeyi kullandığımızda $xyf(z) = xf(y)\sigma(z) + xyd(z)$ olur. Yani, her $x,\ y,\ z \in R$ için

$x(yf(z) - f(y)\sigma(z) - yd(z)) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $y,\ z \in R$ için

$yf(z) = f(y)\sigma(z) + yd(z)$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede $y=\tau(y)$ olmasını kullanırsak $yf(z) = f(y)\sigma(z) + yd(z) = f(y)\sigma(z) + \tau(y)(z) = f(yz)$ elde edilir. Bu ise,

$$f(yz) = yf(z), \quad \forall\, y,\ z \in R$$

olması demektir. Bu durumda, Lemma 5.1.4 den, her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 6.2.3. (f, d), R asal halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere d sıfırdan farklı ve her $x \in R$ için $[f(x), x] = 0$ ise her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 6.2.4. (f, d), R asal halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere $f(R) \subset Z$ ve d sıfırdan farklı ise her $x \in R$ için

$f(x) = qx$ olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

İspat: Kabul edelim ki, $f(R) \subset Z$ ve $d \neq 0$ olsun. Bu durumda, her $x \in R$ için

$[f(x), x] = 0$ dır. Böylece, Teorem 6.2.3 den, her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde bir

$q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Sonuç 6.2.5. d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her x, y ∈ R için d(x)y = xd(y) ise her x ∈ R için d(x) = qx olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Sonuç 6.2.6. d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her x ∈ R için [d(x), x] = 0 ise her x ∈ R için

d(x) = qx olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Sonuç 6.2.7. d, karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere d(R) ⊂ Z ise her x ∈ R için d(x) = qx olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Teorem 6.2.8. (f, d), karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere d sıfırdan farklı ve her x ∈ R için [f(x), x] ∈ Z ise her x ∈ R için f(x) = qx olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

İspat: g = 1 olması durumunda Lemma 6.2.1 den, her x ∈ R için 2[f(x), x] = 0 dır.

Lemma 2.36 dan, her x ∈ R için [f(x), x] = 0 olur. Bu durumda, Teorem 6.2.3 den,

her x ∈ R için f(x) = qx olacak biçimde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

6.3. Asal Halkalar Üzerinde Genelleştirilmiş (σ,τ)-Türevler ve Komütatiflik

Gölbaşı Ö. ve Koç E., Baskıda.

Teorem 6.3.1. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $d(x)f(y) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Kabul edelim ki, f = 0 olsun. Hipotezden, her x, y ∈ R için $x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu durumda, $[x\sigma(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} = 0$ dır. Bu ifadeyi düzenlersek, her x, y ∈ R için

$[x\sigma(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} = x[\sigma(y),\ \sigma(y)] + [x,\ y]_{\sigma,\ \tau}\ \sigma(y) = [x,\ y]_{\sigma,\ \tau}\ \sigma(y) = 0$ elde edilir. Elde edilen ifadede, $z \in R$ olmak üzere, x yerine xz yazarsak $[xz,\ y]_{\sigma,\ \tau}\ \sigma(y) = 0$ bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi düzenlersek

$[xz,\ y]_{\sigma,\ \tau}\ \sigma(y) = (x[z,\ y]_{\sigma,\ \tau} + [x,\ \tau(y)]z)\sigma(y) = 0$ olur. Yani,

$x[z,\ y]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y) + [x,\ \tau(y)]z\sigma(y) = 0$ dır. Her $x,\ y \in R$ için $[x,\ y]_{\sigma,\ \tau}\ \sigma(y) = 0$ olduğundan $[x,\ \tau(y)]z\sigma(y) = 0$ olur. Bu durumda, her $x, y \in R$ için $[x,\ \tau(y)]R\sigma(y) = 0$ dır.

Uyarı 2.23 den, her $x,\ y \in R$ için $[x,\ \tau(y)] = 0$ veya $\sigma(y) = 0$ olur. Yani, her $y \in R$ için $[R,\ \tau(y)] = 0$ veya $\sigma(y) = 0$ dır. Buradan, her $y \in R$ için $\tau(y) \in Z$ veya $y = 0$ olduğu sonucuna varılır. $\tau(y) \in Z$ olması durumunda $y \in Z$ dir. O halde, her $y \in R$ için $y \in Z$ veya $y = 0$ dır. $y = 0$ olması durumunda $y \in Z$ olduğu için her $y \in R$ için $y \in Z$ dir. Bu ise, R halkasının değişmeli olması anlamına gelir. Böylece, $f = 0$ olması durumunda ispat biter. Şimdi de, $f \neq 0$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda, hipotezden, her $x, y \in R$ için $d(x)f(y) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ dir. Bu ifadede, $z \in R$ olmak üzere, y yerine yz yazarsak

$d(x)f(yz) - x\sigma(yz) \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Genelleştirilmiş (σ, τ)-türev tanımı yardımıyla bu ifadeyi düzenlediğimizde,

$$\begin{aligned} &d(x)(f(y)\sigma(z) + \tau(y)d(z)) - x\sigma(y)\sigma(z) \\ &\quad = d(x)f(y)\sigma(z) + d(x)\tau(y)d(z) - x\sigma(y)\sigma(z) \\ &\quad = (d(x)f(y) - x\sigma(y))\sigma(z) + d(x)\tau(y)d(z) \in C_{\sigma,\tau} \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu durumda, her $x, y, z \in R$ için

$[\big(d(x)f(y) - x\sigma(y)\big)\sigma(z) + d(x)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ olur. Bu özdeşliği düzenlersek,

$$\begin{aligned} 0 &= [\big(d(x)f(y) - x\sigma(y)\big)\sigma(z) + d(x)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} \\ &= [\big(d(x)f(y) - x\sigma(y)\big)\sigma(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [d(x)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} \\ &= \big(d(x)f(y) - x\sigma(y)\big)[\sigma(z),\ \sigma(z)] + \big[d(x)f(y) - x\sigma(y),\ z\big]_{\sigma,\ \tau}\sigma(z) + \end{aligned}$$

$[d(x)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = [d(x)f(y) - x\sigma(y),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(z) + [d(x)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau}$ elde edilir. Hipotezden, $d(x)f(y) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını kullanarak yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$$[d(x)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0,\ \forall\ x, y, z \in R$$

olduğu bulunur. Yukarıdaki özdeşliği düzenlediğimizde

$$[d(x)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = d(x)[\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [d(x),\tau(z)]\,\tau(y)d(z) = 0 \qquad (6.11)$$

elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadede, $t \in R$ olmak üzere, y yerine $\tau^{-1}(d(t))y$ yazarsak $d(x)\left[\tau\left(\tau^{-1}(d(t))y\right)d(z),\ z\right]_{\sigma,\ \tau} + [d(x),\tau(z)]\,\tau\left(\tau^{-1}(d(t))y\right)d(z) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde

$$d(x)\left[\tau\left(\tau^{-1}(d(t))y\right)d(z),\ z\right]_{\sigma,\ \tau} + [d(x),\tau(z)]\,\tau\left(\tau^{-1}(d(t))y\right)d(z)$$

$$= d(x)[d(t)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [d(x),\tau(z)]d(t)\tau(y)d(z)$$

$$= d(x)d(t)[\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + d(x)[d(t),\tau(z)]\tau(y)d(z) +$$

$$[d(x),\tau(z)]d(t)\tau(y)d(z)$$

$$= d(x)(d(t)[\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [d(t),\tau(z)]\tau(y)d(z)) + [d(x),\tau(z)]d(t)\tau(y)d(z)$$

$$= 0$$

elde edilir. (6.11) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. O halde,

$$[d(x),\tau(z)]d(t)\tau(y)d(z) = 0,\ \forall\ x, t, y, z \in R$$

elde edilir. Yani, $x, t, z \in R$ için $[d(x),\tau(z)]d(t)\tau(R)d(z) = 0$ dır. τ, örten olduğundan

her x, t, $z \in R$ için $[d(x),\tau(z)]d(t)Rd(z) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her x, t, $z \in R$ için $[d(x),\tau(z)]d(t) = 0$ veya $d(z) = 0$ olur. $A = \{z \in R \mid [d(x),\tau(z)]d(t) = 0\}$ ve

$B = \{z \in R \mid d(z) = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, $R = A$ veya $R = B$ dir. Kabul edelim ki, $R = B$ olsun. Bu durumda, her $z \in R$ için

$d(z) = 0$ olur. Bu, $d = 0$ olması demektir. $d \neq 0$ olduğunu kabul ettiğimiz için $R = B$ olamaz. O halde, $R = A$ dır. Bu durumda, her x, y, t, z ∈ R için $[d(x),\tau(z)]d(t) = 0$ olur. r ∈ R olmak üzere, z yerine rz yazar ve düzenlersek

$[d(x),\tau(rz)]d(t) = [d(x),\tau(r)\tau(z)]d(t) = \tau(r)[d(x), \tau(z)]d(t) + [d(x), \tau(r)]\tau(z)d(t) = 0$ olur. $[d(x),\tau(z)]d(t) = 0$ olmasını kullandığımızda her x, r, z, t ∈ R için

$[d(x), \tau(r)]\tau(z)d(t) = 0$ olduğu elde edilir. Bu durumda, her x, t ∈ R için

$[d(x), \tau(R)]\tau(R)d(t) = 0$ olur. τ, örten olduğundan, her x, t ∈ R için $[d(x), R]Rd(t) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her x, t ∈ R için $[d(x), R] = 0$ veya $d(t) = 0$ olur. Bu, $d(R) \subseteq Z$ veya $d = 0$ demektir. Her iki durumda da, $d(R) \subseteq Z$ olur. Lemma 4.2.1 den, R değişmelidir.

Sonuç 6.3.2. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $d(x)d(y) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 6.3.3. R, karakteristiği ikiden farlı olan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $d(x)f(y) + x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

Sonuç 6.3.4 : R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $d(x)d(y) + x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 6.3.5 : R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)- türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her x, y ∈ R için $f(xy) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: f = 0 olması durumundaki ispat Teorem 6.3.1 de yapılmıştır. Kabul edelim ki, $f \neq 0$ olsun. Hipotezden, her x, y ∈ R için $f(xy) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$f(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) \in C_{\sigma,\tau} \tag{6.12}$$

bulunur. Yukarıdaki özdeşlikte, z ∈ R olmak üzere, y yerine yz yazarsak

$$f(x)\sigma(yz) + \tau(x)d(yz) = f(x)\sigma(y)\sigma(z) + \tau(x)\big(d(y)\sigma(z) + \tau(y)d(z)\big)$$

$$= f(x)\sigma(y)\sigma(z) + \tau(x)d(y)\sigma(z) + \tau(x)\tau(y)d(z)$$

$$= (f(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y))\sigma(z) + \tau(x)\tau(y)d(z) \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. (6.12) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfır olur. O halde,

her x, y, z ∈ R için $\tau(x)\tau(y)d(z) \in C_{\sigma,\tau}$ dir. Bu durumda,

$$[\tau(x)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0,\ \forall\ x, y, z \in R \tag{6.13}$$

olur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede, t ∈ R olmak üzere, y yerine ty yazarsak

$$0 = [\tau(x)\tau(ty)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = [\tau(x)\tau(t)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau}$$

$$= \tau(x)[\tau(ty)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [\tau(x),\ \tau(z)]\tau(ty)d(z)$$

bulunur. (6.13) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. O halde,

her x, t, y, z ∈ R için $[\tau(x),\ \tau(z)]\tau(ty)d(z) = 0$ olur. τ, örten olduğu için

$[\tau(x),\ \tau(z)]Rd(z) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her x, z ∈ R için $[\tau(x),\ \tau(z)] = 0$ veya d(z) = 0 olur. Yani, her x, z ∈ R için $\tau([x,\ z]) = 0$ veya d(z) = 0 dır. τ, 1-1 olduğundan her z ∈ R için $[R,\ z] = 0$ veya d = 0 dır. Bu, her z ∈ R için z ∈ Z veya d(z) = 0 olması demektir.

A = {z ∈ R | z ∈ Z} ve B = {z ∈ R | $d(z) = 0$}, R halkasının alt gruplarıdır ve R = A∪B olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir. Kabul edelim ki, R = B olsun. Bu durumda, her z ∈ R için d(z) = 0 olur. Yani, d = 0 dır. Bu, d ≠ 0 olması ile çelişir. O halde, R = A dır. Bu durumda, her z ∈ R için z ∈ Z olur. Yani, R halkası değişmelidir.

Sonuç 6.3.6. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $d(xy) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 6.3.7. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $f(xy) + x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: f, her x, y $\in$ R için $f(xy) + x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ olan bir genelleştirilmiş (σ, τ)-türev olduğu için $(-f)$, her x, y $\in$ R için $(-f)(xy) + x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ sağlayan bir genelleştirilmiş (σ, τ)-türevdir. Böylece, Teorem 6.3.5 den, R halkasının değişmeli olduğu görülür.

Sonuç 6.3.8. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y $\in$ R için $d(xy) + x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 6.3.9. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y $\in$ R için $f(xy) - y\sigma(x) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: $f = 0$ olması durumundaki ispat Teorem 6.3.1 in başlangıç kısmında yapılmıştır. O halde, $f \neq 0$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda, her x, y $\in$ R için

$f(xy) - y\sigma(x) \in C_{\sigma,\tau}$ dır. Bu ifadeyi genelleştirilmiş (σ, τ)-türev tanımı yardımıyla düzenlediğimizde,

$$f(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) - y\sigma(x) \in C_{\sigma,\tau}\ ,\ \forall\ x, y \in R$$

elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu özdeşlikte, x yerine xy yazar ve düzenlersek

$$f(xy)\sigma(y) + \tau(xy)d(y) - y\sigma(xy) = f(xy)\sigma(y) + \tau(x)\tau(y)d(y) - y\sigma(x)\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Bu durumda, $[f(xy)\sigma(y) + \tau(x)\tau(y)d(y) - y\sigma(x)\sigma(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} = 0$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$\begin{aligned} 0 &= [f(xy)\sigma(y) + \tau(x)\tau(y)d(y) - y\sigma(x)\sigma(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} \\ &= [(f(xy) - y\sigma(x))\sigma(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} + [\tau(x)\tau(y)d(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} \\ &= (f(xy) - y\sigma(x))[\sigma(y),\ \sigma(y)] + [(f(xy) - y\sigma(x)),\ y]_{\sigma,\ \tau}\,\sigma(y) + \\ &\quad [\tau(x)\tau(y)d(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} \end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden, $f(xy) - y\sigma(x) \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını kullanırsak yukarıdaki ifadenin ikinci terimi sıfır olur. Bu durumda, her x, y $\in$ R için $[\tau(x)\tau(y)d(y),\ y]_{\sigma,\ \tau} = 0$ olur. Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi düzenlersek

$$\tau(x)[\tau(y)d(y),\ \sigma(y)] + [\tau(x),\ y]_{\sigma,\ \tau}\tau(y)d(y) = 0,\ \forall\ x, y \in R \tag{6.14}$$

elde edilir. Yukarıdaki özdeşlikte, $r \in R$ olmak üzere, x yerine xr yazar ve düzenlersek

$$0 = \tau(xr)[\tau(y)d(y),\ \sigma(y)] + [\tau(xr),\ y]_{\sigma,\ \tau}\tau(y)d(y)$$

$$= \tau(xr)[\tau(y)d(y),\ \sigma(y)] + [\tau(x)\tau(r),\ y]_{\sigma,\ \tau}\tau(y)d(y)$$

$$= \tau(x)\tau(r)[\tau(y)d(y),\ \sigma(y)] + \tau(x)[\tau(r),\ y]_{\sigma,\ \tau}$$

$$\tau(y)d(y) + [\tau(x),\ \tau(y)]\tau(r)\tau(y)d(y)$$

$$= \tau(x)(\tau(r)[\tau(y)d(y),\ \sigma(y)] + [\tau(r),\ y]_{\sigma,\ \tau}\ \tau(y)d(y)) +$$

$$[\tau(x),\ \tau(y)]\tau(r)\tau(y)d(y)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadenin ilk terimi (6.14) nolu özdeşlikten sıfırdır. O halde,

$[\tau(x),\ \tau(y)]\tau(r)\tau(y)d(y) = 0$ dır. Bu ise, her x, r, $y \in R$ için $\tau([x,\ y])\tau(ry)d(y) = 0$ olması demektir. O halde, her x, $y \in R$ için $\tau([x,\ y])\tau(R)\tau(y)d(y) = 0$ olur. τ, örten olduğundan her $x, y \in R$ için $\tau([x,\ y])R\tau(y)d(y) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $x, y \in R$ için $\tau([x,\ y]) = 0$ veya $\tau(y)d(y) = 0$ olur. τ, 1-1 olduğundan her $y \in R$ için $[R,\ y] = 0$ veya $\tau(y)d(y) = 0$ olur. Bu, her $y \in R$ için $y \in Z$ veya $\tau(y)d(y) = 0$ olması demektir. Kabul edelim ki, $y_0 \in Z$ olsun. Hipotezden, her $x, z \in R$ için

$[f(x)\sigma(y_0) + \tau(x)d(y_0) - y_0\sigma(x),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ olur. $\sigma(y_0),\ d(y_0),\ y_0 \in Z$ olmasını

kullanarak son eşitliği düzenlersek

$$0 = [f(x)\sigma(y_0) + \tau(x)d(y_0) - y_0\sigma(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}$$

$$= [f(x)\sigma(y_0),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [\tau(x)d(y_0),\ z]_{\sigma,\ \tau} - [y_0\sigma(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}$$

$$= f(x)[\sigma(y_0),\ \sigma(z)] + [f(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0) + \tau(x)[d(y_0),\ \sigma(z)] +_{\sigma,\ \tau} d(y_0) -$$

$$[\tau(x),\ z]y_0[\sigma(x),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [y_0,\ \tau(z)]\sigma(x)$$

$$= [f(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0) + [\tau(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}d(y_0) - y_0[\sigma(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}$$

bulunur. Bulmuş olduğumuz bu ifadede x yerine xy_0 yazar ve düzenlersek

$[f(xy_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0) + [\tau(xy_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}d(y_0) - y_0[\sigma(xy_0),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ olur. Bu ifadeyi de düzenlediğimizde

$$0 = [f(xy_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0) + [\tau(xy_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}d(y_0) - y_0[\sigma(xy_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}$$

$$= [f(x)\sigma(y_0) + \tau(x)d(y_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0) + [\tau(xy_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}d(y_0) -$$

$$y_0[\sigma(xy_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}$$

$$= [f(x)\sigma(y_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0) + [\tau(x)d(y_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0) + [\tau(x)\tau(y_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}d(y_0) -$$

$$y_0[\sigma(x)\sigma(y_0),\ z]_{\sigma,\ \tau}$$

$$= f(x)[\sigma(y_0),\ \sigma(z)]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0) + [f(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0)\sigma(y_0) +$$

$$\tau(x)[d(y_0), \sigma(z)]\sigma(y_0) + [\tau(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}d(y_0)\sigma(y_0) + \tau(x)[\tau(y_0),\ \sigma(z)]d(y_0) +$$

$$[\tau(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}\tau(y_0)d(y_0) - y_0\sigma(x)[\sigma(y_0),\ \sigma(z)] - y_0[\sigma(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}\sigma(y_0)$$

elde edilir. $\sigma(y_0),\ \tau(y_0),\ d(y_0),\ y_0 \in Z$ olmasını kullanarak son eşitliği düzenlersek

$[\tau(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}\tau(y_0)d(y_0) = 0$ olduğu bulunur. Bu sayede, her x, z ∈ R için

$$\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = 0 \tag{6.15}$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte, t ∈ R olmak üzere, x yerine tx yazar ve düzenlersek

$$0 = [\tau(tx),\ z]_{\sigma,\ \tau}\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = [\tau(t)\tau(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0)$$

$$= \tau(t)[\tau(x),\ z]_{\sigma,\ \tau}\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) + [\tau(t),\ \tau(z)]\tau(x)\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0)$$

bulunur. (6.15) nolu eşitlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. O halde,

$[\tau(t),\ \tau(z)]\tau(x)\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = 0$ olduğu elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu eşitliği biraz daha düzenlediğimizde, her x, t, z ∈ R için $\tau([t,\ z])\tau(x)\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = 0$

olduğu görülür. Bu durumda, her t, z ∈ R için $\tau([t,\ z])\tau(R)\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = 0$ dır. τ, örten olduğundan her t, z ∈ R için $\tau([t,\ z])R\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her t, z ∈ R için $\tau([t,\ z]) = 0$ veya $\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = 0$ olur. τ, 1-1 olduğundan

her t, z ∈ R için $[t,\ z] = 0$ veya $\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = 0$ dır. Buradan, R ⊆ Z veya $\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = 0$ elde edilir. İlk durum için ispat biter. O halde, $\tau(y_0)d(y_0)\sigma(y_0) = 0$

olması durumunda ispata devam edersek, $\sigma(y_0) \in Z$ olduğundan her $k \in R$ için $\tau(y_0)d(y_0)k\sigma(y_0) = 0$ olur. Yani, $\tau(y_0)d(y_0)R\sigma(y_0) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, $\tau(y_0)d(y_0) = 0$ veya $\sigma(y_0) = 0$ olur. Bu ise, σ, 1-1 olduğundan, $\tau(y_0)d(y_0) = 0$ veya

$y_0 = 0$ demektir. $y_0 = 0$ olması durumunda $\tau(y_0)d(y_0) = 0$ olduğundan her $y \in R$ için

$$\tau(y)d(y) = 0 \tag{6.16}$$

olduğu görülür. Elde etmiş olduğumuz bu özdeşlikte, y yerine x + y yazar ve düzenlersek,

$\tau(x+ y)d(x+y) = \tau(x)d(x) + \tau(x)d(y) + \tau(y)d(x) + \tau(y)d(y) = 0$ bulunur. (6.16) nolu ifadeyi kullanırsak her $x, y \in R$ için

$$\tau(x)d(y) + \tau(y)d(x) = 0 \tag{6.17}$$

olur. Bu ifadede, y yerine yt yazar ve düzenlersek

$$0 = \tau(x)d(yt) + \tau(yt)d(x) = \tau(x)(d(y)\sigma(t) + \tau(y)d(t)) + \tau(y)\tau(t)d(x)$$

$$= \tau(x)d(y)\sigma(t) + \tau(x)\tau(y)d(t) + \tau(y)\tau(t)d(x)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadenin son teriminde, (6.17) nolu özdeşlikten, her $x, y \in R$ için $\tau(x)d(y) = -\tau(y)d(x)$ olmasını kullandığımızda

$$0 = \tau(x)d(y)\sigma(t) + \tau(x)\tau(y)d(t) - \tau(y)\tau(x)d(t)$$

$$= \tau(x)d(y)\sigma(t) + (\tau(x)\tau(y) - \tau(y)\tau(x))d(t) = \tau(x)d(y)\sigma(t) + \tau([x, y])d(t)$$

olduğu bulunur. Yani,

$$\tau(x)d(y)\sigma(t) + \tau([x, y])d(t) = 0 \tag{6.18}$$

dır. Bulmuş olduğumuz bu ifadede, t yerine tz yazar ve düzenlersek

$$0 = \tau(x)d(y)\sigma(tz) + \tau([x, y])d(tz)$$

$$= \tau(x)d(y)\sigma(t)\sigma(z) + \tau([x, y])(d(t)\sigma(z) + \tau(t)d(z))$$

$$= \tau(x)d(y)\sigma(t)\sigma(z) + \tau([x, y])d(t)\sigma(z) + \tau([x, y])\tau(t)d(z)$$

$$= (\tau(x)d(y)\sigma(t) + \tau([x, y])d(t))\sigma(z) + \tau([x, y])\tau(t)d(z)$$

bulunur. (6.18) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. Böylece, her x, y, z, t ∈ R için $\tau([x,\ y])\tau(t)d(z) = 0$ olur. Yani, her x, y, z ∈ R için

$\tau([x,\ y])\tau(R)d(z) = 0$ dır. τ, örten olduğundan her x, y, z ∈ R için $\tau([x,\ y])Rd(z) = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her x, y, z ∈ R için $\tau([x,\ y]) = 0$ veya $d(z) = 0$ dır. τ, 1-1 olduğundan, her x, y, z ∈ R için $[x,\ y] = 0$ veya $d(z) = 0$ dır. Bu, R halkası değişmeli veya d = 0 demektir. $d \neq 0$ olduğu için R halkası değişmelidir.

Sonuç 6.3.10. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $d(xy) - y\sigma(x) \in C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 6.3.11. R, karakteristiği ikiden farlı olan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $f(xy) + y\sigma(x) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

Sonuç 6.3.12. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $d(xy) + y\sigma(x) \in C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 6.3.13. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her x, y ∈ R için $f(x)f(y) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: f = 0 olması durumundaki ispat Teorem 6.3.1 in başlangıç kısmında yapılmıştır. O halde, $f \neq 0$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda, her x, y ∈ R için

$f(x)f(y) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ dir. Bu ifadede, z ∈ R olmak üzere, y yerine yz yazarsak

$f(x)f(yz) - x\sigma(yz) \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$\begin{aligned} f(x)f(yz) - x\sigma(yz) &= f(x)(f(y)\sigma(z) + \tau(y)d(z)) - x\sigma(y)\sigma(z) \\ &= f(x)f(y)\sigma(z) + f(x)\tau(y)d(z) - x\sigma(y)\sigma(z) \\ &= (f(x)f(y) - x\sigma(y))\sigma(z) + f(x)\tau(y)d(z) \in C_{\sigma,\tau} \end{aligned}$$

bulunur. Hipotezi kullandığımızda, $f(x)\tau(y)d(z) \in C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Bu durumda,

$$[f(x)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0,\ \ \forall\, x, y, z\ \in R \tag{6.19}$$

olur. Yukarıdaki özdeşlikte, $t \in R$ olmak üzere, y yerine $\tau^{-1}(f(t))y$ yazar ve düzenlersek

$$0 = [f(x)\tau(\tau^{-1}(f(t))y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = [f(x)f(t)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau}$$

$$= f(x)[f(t)\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [f(x), \tau(z)]f(t)\tau(y)d(z)$$

bulunur. (6.19) nolu özdeşlikten, yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. O halde,

her $x, y, z, t \in R$ için $[f(x), \tau(z)]f(t)\tau(y)d(z) = 0$ dır. Bu, her $x, z, t \in R$ için

$[f(x), \tau(z)]f(t)\tau(R)d(z) = 0$ olması demektir. τ, örten olduğundan her $x, t, z \in R$ için

$[f(x), \tau(z)]f(t)Rd(z) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $x, t, z \in R$ için $[f(x), \tau(z)]f(t) = 0$ veya $d(z) = 0$ olur. $A = \{z \in R \mid [f(x), \tau(z)]f(t) = 0,\ \forall\ x, t \in R\}$ ve $B = \{z \in R \mid d(z) = 0\}$, R halkasının alt gruplarıdır ve $R = A \cup B$ olarak yazılır. Teorem 2.6 dan, R = A veya R = B dir. Kabul edelim ki, R = B olsun. Bu durumda, her $z \in R$ için $d(z) = 0$ dır. Yani, $d = 0$ dır. Bu durum, $d \neq 0$ olması ile çelişir. Böylece, R = A olamaz. O halde, R = B dir. Bu durumda, her $x, z, t \in R$ için $[f(x), \tau(z)]f(t) = 0$ olur. Kabulümüzde, z yerine yz yazar ve düzenlersek

$[f(x), \tau(yz)]f(t) = [f(x), \tau(y)\tau(z)]f(t) = \tau(y)[f(x),\ \tau(z)]f(t) + [f(x),\ \tau(y)]\tau(z)f(t) = 0$ bulunur. $[f(x), \tau(z)]f(t) = 0$ olduğu için yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. O halde,

her $x, y, z, t \in R$ için $[f(x),\ \tau(y)]\tau(z)f(t) = 0$ olur. Bu, her $x, y, t \in R$ için

$[f(x),\ \tau(y)]\tau(R)f(t) = 0$ olması demektir. τ, örten olduğundan $[f(x),\ \tau(y)]Rf(t) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $x, y, t \in R$ için $[f(x),\ \tau(y)] = 0$ veya $f(t) = 0$ olur. Bu durumda,

her $x \in R$ için $[f(x),\ \tau(R)] = 0$ veya $f = 0$ olur. Tekrar, τ nun örten olmasını kullandığımızda her $x \in R$ için $[f(x),\ R] = 0$ veya $f = 0$ olur. Başlangıçta, $f \neq 0$ olsun

dediğimizden her $x \in R$ için $[f(x),\ R] = 0$ dır. Yani, $f(R) \subset Z$ dir. Bu şart altında (6.19) nolu özdeşliği düzenlediğimizde

$$[f(x)\tau(y)d(z),\ \ z]_{\sigma,\ \tau} = f(x)[\tau(y)d(z),\ \ z]_{\sigma,\ \tau} + [f(x),\ \ \tau(z)]\tau(y)d(z) = 0$$

bulunur. $f(x) \in Z$ olduğu için yukarıdaki ifadenin son terimi sıfırdır. O halde, her x, y, z ∈ R için $f(x)[\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ olur. f(x) ∈ Z olduğundan her x, y, z, k ∈ R için $f(x)k[\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ dır. Bu durumda, her x, y, z ∈ R için

$f(x)R[\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ olur. Uyarı 2.23 den, her x, y, z ∈ R için $f(x) = 0$ veya $[\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ dır. Yani, her y, z ∈ R için f = 0 veya $[\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ dır. Başlangıçta, $f \neq 0$ olsun dediğimizden her y, z ∈ R için $[\tau(y)d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} = 0$ olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$\tau(y)[d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [\tau(y),\ \tau(z)]d(z) = 0,\ \forall\, y,\ z\ \in R \tag{6 .20}$$

elde edilir. Bulmuş olduğumuz bu ifadede, r ∈ R olmak üzere, y yerine yr yazar ve düzenlersek

$$\begin{aligned}
0 &= \tau(y)\tau(r)[d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [\tau(y)\tau(r),\ \tau(z)]d(z) \\
&= \tau(y)\tau(r)[d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + \tau(y)[\tau(r),\ \tau(z)]d(z) + [\tau(y),\ \tau(z)]\tau(r)d(z) \\
&= \tau(y)(\tau(r)[d(z),\ z]_{\sigma,\ \tau} + [\tau(r),\ \tau(z)]d(z)) + [\tau(y),\ \tau(z)]\tau(r)d(z)
\end{aligned}$$

bulunur. (6.20) nolu özdeşlikten yukarıdaki ifadenin ilk terimi sıfırdır. O halde,

$[\tau(y),\ \tau(z)]\tau(r)d(z) = 0$ dır. Bu ise, her y, z, r ∈ R için $\tau([y,\ z])\tau(r)d(z) = 0$ olması demektir. Yani, her y, z ∈ R için $\tau([y,\ z])\tau(R)d(z) = 0$ olur. τ, örten olduğundan

her y, z ∈ R için $\tau([y,\ z])Rd(z) = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, $\tau([y,\ z]) = 0$ veya $d(z) = 0$ olur. τ, 1-1 olduğundan her y, z ∈ R için $[y,\ z] = 0$ veya d(z) = 0 dır. Yani, R halkası değişmelidir veya d = 0 dır. d ≠ 0 olduğu için R halkası değişmelidir.

Sonuç 6.3.14. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere

her x, y ∈ R için $d(x)d(y) - x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 6.3.15. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve (f, d), R halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her x, y ∈ R için $f(x)f(y) + x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $d \neq 0$ ise R halkası değişmelidir.

Sonuç 6.3.16. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her x, y ∈ R için $d(x)d(y) + x\sigma(y) \in C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.

Teorem 6.3.17. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve (f, d), (g, h) R halkasının genelleştirilmiş (σ,τ)-türevleri ve σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her x, y ∈ R için $f(x)\sigma(y) = \tau(x)g(y)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Kabul edelim ki, f = 0 olsun. Bu durumda, hipotezden, her x, y ∈ R için

$\tau(x)g(y) = 0$ olur. Bu özdeşlikte, z ∈ R olmak üzere, y yerine yz yazarsak $\tau(x)g(yz) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi genelleştirilmiş (σ, τ)-türev tanımı yardımıyla düzenlersek

$\tau(x)g(yz) = \tau(x)(g(y)\sigma(z) + \tau(y)h(z) = \tau(x)g(y)\sigma(z) + \tau(x)\tau(y)h(z) = 0$ elde edilir.

$\tau(x)g(y) = 0$ olmasını kullandığımızda, her x, y, z ∈ R için $\tau(x)\tau(y)h(z) = 0$ olur. Bu,

$\tau(xy)h(z) = 0$ demektir. τ, örten olduğu için her z ∈ R için $Rh(z) = 0$ olur. Bu ifadeyi soldan h(z) ile çarpılır ve Uyarı 2.23 kullanılırsa her z ∈ R için $h(z) = 0$ olur. Yani, h = 0 olur. Lemma 4.2.1 den, R halkası değişmeli olur. Böylece, f = 0 olması durumunda ispat biter. Şimdi de, kabul edelim ki, g = 0 olsun. Bu durumda, hipotezden, her x, y ∈ R için $f(x)\sigma(y) = 0$ olur. Bu özdeşlikte, z ∈ R olmak üzere, x yerine xz yazarsak $f(xz)\sigma(y) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi genelleştirilmiş (σ,τ)-türev tanımı yardımıyla düzenlersek

$f(xz)\sigma(y) = \big(f(x)\sigma(z) + \tau(z)d(x)\big)\sigma(y) = f(x)\sigma(z)\sigma(y) + \tau(z)d(x)\sigma(y) = 0$ elde edilir. $f(x)\sigma(y) = 0$ olmasını kullandığımızda, her x, y, z ∈ R için $\tau(z)d(x)\sigma(y) = 0$ olur. Bu, her x, y ∈ R için $\tau(R)d(x)\sigma(y) = 0$ olması demektir. τ, örten olduğu için

her x, y ∈ R için $Rd(x)\sigma(y) = 0$ olur. Bu ifadeyi soldan $d(x)\sigma(y)$ ile çarpar ve Uyarı 2.23 ü kullanırsak her x, y ∈ R için $d(x)\sigma(y) = 0$ olduğu elde edilir. Yani, her x ∈ R için $d(x)\sigma(R) = 0$ dır. σ, örten olduğundan her x ∈ R için $d(x)R = 0$ olur. Bu ifadeyi sağdan $d(x)$ile çarpar ve Uyarı 2.23 ü kullanırsak her x ∈ R için $d(x) = 0$ olur. Bu ise,

d = 0 demektir. Bu, $d \neq 0$ olması ile çelişir. Böylece, g = 0 olamaz. Son olarak, kabul edelim ki, $f \neq 0$ ve $g \neq 0$ olsun. Hipotezde, x yerine xz yazarsak $f(xz)\sigma(y) = \tau(xz)g(y)$ bulunur. Yani, $f(xz)\sigma(y) - \tau(xz)g(y) = 0$ dır. Bu ifadeyi genelleştirilmiş (σ, τ)-türev tanımı yardımıyla düzenlersek

$$0 = (f(x)\sigma(z) + \tau(x)d(z))\sigma(y) - \tau(x)\tau(z)g(y)$$

$$= f(x)\sigma(z)\sigma(y) + \tau(x)d(z)\sigma(y) - \tau(x)\tau(z)g(y)$$

elde edilir. Hipotezden, $f(x)\sigma(y) = \tau(x)g(y)$ olmasını yukarıdaki ifadenin ilk teriminde kullanırsak $\tau(x)g(z)\sigma(y) + \tau(x)d(z)\sigma(y) - \tau(x)\tau(z)g(y) = 0$ olur. Bu, her $x, y, z \in R$ için $\tau(x)(g(z)\sigma(y) + d(z)\sigma(y) - \tau(z)g(y)) = 0$ demektir. Yani, her $y, z \in R$ için

$\tau(R)(g(z)\sigma(y) + d(z)\sigma(y) - \tau(z)g(y)) = 0$ olur. τ, örten olduğu için

$R\big(g(z)\sigma(y) + d(z)\sigma(y) - \tau(z)g(y)\big) = 0$ dır. Bu ifadeyi soldan

$g(z)\sigma(y) + d(z)\sigma(y) - \tau(z)g(y)$ ile çarpar ve Uyarı 2.23 ü kullanırsak,

her $y, z \in R$ için

$$g(z)\sigma(y) + d(z)\sigma(y) - \tau(z)g(y) = 0 \tag{6.21}$$

olduğu elde edilir. Yukarıdaki özdeşlikte, $r \in R$ olmak üzere, y yerine yr yazarsak

$g(z)\sigma(yr) + d(z)\sigma(yr) - \tau(z)g(yr) = 0$ bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$\begin{aligned} 0 &= g(z)\sigma(yr) + d(z)\sigma(yr) - \tau(z)g(yr) \\ &= g(z)\sigma(y)\sigma(r) + d(z)\sigma(y)\sigma(r) - \tau(z)g(y)\sigma(r) + \tau(z)\tau(y)h(r) \\ &= (g(z)\sigma(y) + d(z)\sigma(y) - \tau(z)g(y))\sigma(r) + \tau(z)\tau(y)h(r) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk terim (6.21) nolu özdeşlikten dolayı sıfırdır. O halde, $\tau(z)\tau(y)h(r) = 0$ olur. Bu, her $r, y, z \in R$ için $\tau(zy)h(r) = 0$ demektir. Yani, $\tau(R)h(r) = 0$ dır. τ, örten olduğundan, her $r \in R$ için $Rh(r) = 0$ olur. Bu ifadeyi soldan $h(r)$ ile çarparsak her $r \in R$ için $h(r) = 0$ olur. Yani, $h = 0$ dır. Lemma 4.2.1den, R halkası değişmelidir.

6.4. Asal Halkalarda Lie İdealler Üzerinde Genelleştirilmiş (σ,τ)-Türevler ve Komütatiflik

Kandamar H. ve Kaya K., 1992.

Lemma 6.4.1. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ,τ)-türevi olmak üzere $d(U) = 0$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat: Hipotezden, her $u \in U$, $x \in R$ için $[u, x] \in U$ için $d([u, x]) = 0$ dır. Bu durumda,

$$d([u,x]) = [d(u),x]_{\sigma,\tau} - [d(x),u]_{\sigma,\tau} = -[d(x),u]_{\sigma,\tau} = 0$$

olur. O halde, $[d(R),U]_{\sigma,\tau} = (0)$ elde edilir. Teorem 4.1.4 den, $U \subset Z$ olur.

Lemma 6.4.2. R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir (σ, τ)-türevi olmak üzere $t \in R$ olacak biçimde td(U) = 0 (veya d(U)t = 0) ise t = 0 veya $U \subset Z$ dir.

İspat: Farz edelim ki, $U \not\subset Z$ olsun. Bu durumda, Lemma 6.4.1 den, $d(U) \neq (0)$ olur. O halde, hipotezden, her $u \in U$, $x \in R$ için $td([u,x]u) = td([u,x])\sigma(u) + t\tau([u,x])d(u) = 0$ olur. Bu,

$$t\tau([u,x])d(u) = 0, \ \forall\, u \in U, \ \forall\, x \in R \tag{6.22}$$

olması demektir. Yukarıdaki ifadede, $v \in U$, $y \in R$ olmak üzere, x yerine $\tau^{-1}(d(v)y)$ yazarsak

$$t\tau([u, \tau^{-1}(d(v)y)])d(u) = t\tau(u)d(v)yd(u) - td(v)y\tau(u)d(u) = t\tau(u)d(v)yd(u) = 0$$

elde edilir. Bu durumda,

$$t\tau(u)d(v)Rd(u) = 0, \ \forall\, u, v \in U$$

olur. Uyarı 2.23 den, her $u \in U$ için $t\tau(u)d(v) = 0$ veya d(u) = 0 olur. K = $\{u \in U \mid d(u) = 0\}$ ve L = $\{u \in U \mid t\tau(u)d(v) = 0, \ \forall\, v \in U\}$, U Lie idealinin alt gruplarıdır ve U = $K \cup L$ olarak yazılır. Böylece, Teorem 2.6 dan, U = K veya U = L olur. Kabul edelim ki, U = K olsun. Bu durumda, Lemma 6.4.1 den, $U \subset Z$ olur. Oysaki, $U \not\subset Z$ demiştik. O halde, U = L dir. Bu ise, her $u, v \in U$ için $t\tau(u)d(v) = 0$ olması demektir. τ, örten olduğundan,

Lemma 3.4.7 den, her $v \in U$ için, t = 0 veya d(v) = 0 olur. $d(U) \neq 0$ olduğu için t = 0 dır. Öte yandan, (6.22) eşitlikte x yerine $\tau^{-1}(yd(v))$ yazar ve benzer işlemleri yaparak düzenlemeler yapılırsa d(U)t = 0 olması durumunda t = 0 olduğu bulunur.

Gölbaşı Ö. ve Koç E., 2009.

Teorem 6.4.3. d, karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının bir (σ,τ)-türevi, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere d, U üzerinde bir homomorfizm ise $d = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat: Hipotezden,

$$d(ab) = d(a)d(b) = d(a)\sigma(b) + \tau(a)d(b)\ ,\ \forall\, a,b \in U$$

olur. Yukarıdaki özdeşlikte, $x \in R$ olmak üzere, a yerine $a[x, a]$ yazarsak

$d(a[x,\ a])d(b) = d(a[x,\ a])\sigma(b) + \tau(a[x,\ a]\ )d(b) = d(a)d([x,\ a])\sigma(b) + \tau(a[x,a])d(b)$ bulunur.Yani,

$$d(a[x, a])d(b) = d(a)d([x, a])\sigma(b) + \tau(a[x,a])d(b) \tag{6.23}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede eşitliğin sol kısmı, d nin homomorfizma ve (σ,τ)-türev olması kullanılarak düzenlenirse

$d(a)d([x,\ a])d(b) = d(a)d([x,\ a]b) = d(a)d([x,\ a])\sigma(b) + d(a)\tau([x,a])d(b)\ )$ bulunur. Bu ifadeyi (6.23) nolu ifadede kullanırsak, her $a,b \in U,\ x\ \in R$ için $(d(a) - \tau(a))\tau([x,a])d(b) = 0$ elde edilir. Yani, her $a \in U,\ x\ \in R$ için $(d(a) - \tau(a))\tau([x,a])d(U) = 0$ olur. Böylece, Lemma 6.4.2 den, her $a \in U,\ x\ \in R$ için $(d(a) - \tau(a))\tau([x,a]) = 0$ veya $U \subset Z$ veya $d = 0$ elde edilir. Kabul edelim ki, her $a \in U$, $x \in R$ için $(d(a) - \tau(a))\tau([x,a]) = 0$ olsun. Kabulde, $y \in R$ olmak üzere, x yerine xy yazar ve bulunan ifadeyi kabulü kullanarak düzenlersek, her $a \in U,\ x,\ y \in R$ için $(d(a) - \tau(a))\tau(x[y,a]) = 0$ olduğu bulunur. τ nun otomorfizm olmasını kullanarak bu ifadeyi düzenlediğimizde, her $a \in U,\ x,\ y \in R$ için $(d(a) - \tau(a))\tau(x)\tau([y,\ a]) = 0$ olur. τ nun otomorfizm ve Uyarı 2.23 art arda kullanıldığında, her $a \in U$ için $d(a) = \tau(a)$ veya $[R,a] = 0$ elde edilir. $A = \{a \in U \mid a \in Z\}$ ve $B = \{a \in U \mid d(a) = \tau(a)\}$, U Lie idealinin alt gruplarıdır ve $U = A \cup B$ olarak yazılır. Böylece, Teorem 2.6 dan, $U = A$ veya $U = B$ dir. Kabul edelim ki, $U = A$ olsun. Bu durumda, her $a \in U$ için $a \in Z$ dir. Yani, $U \subset Z$ olur. Böylece, ispat biter. Şimdi de, $U = B$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda,

her $a \in U$ için $d(a) = \tau(a)$ dır. Bu durumda, her $a, b \in U$ için $d([a, b]) = \tau([a,b])$ olur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde $d(ab) - d(ba) = \tau(ab) - \tau(ba)$ olur. d, homomorfizm olduğundan $d(ab) = d(a)d(b)$ dir. Böylece, $d(ba) = \tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ elde edilir. Yani, her $a, b \in U$ için $d(ba) = \tau(b)\tau(a)$ olur. d, (σ, τ)-türev olduğundan, her $a, b \in U$ için

$d(b)\sigma(a) + \tau(b)d(a) = \tau(b)\tau(a)$ dır. Her $a \in U$ için $d(a) = \tau(a)$ olduğundan,

her $a, b \in U$ için $d(b)\sigma(a) = 0$ olur. Böylece, Lemma 6.4.2 den, her $a \in U$ için $d = 0$ veya $\sigma(a) = 0$ veya $U \subset Z$ olur. Her $a \in U$ için $\sigma(a) = 0$ olması durumunda, σ 1-1 olduğundan $U = 0$ olur. Bu da, $U \neq 0$ olması ile çelişir. Böylece, ispat bitmiş olur.

Lemma 6.4.4. R, bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere $a \in R$ olacak biçimde $Ua = (0)$ (veya $aU = (0)$) ise $a = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki, $Ua = 0$ olsun. Bu durumda, her $u \in U$, $x \in R$ için $[u, x]a = 0$ olur. Bu ifadeyi düzenlediğimizde, her $x \in R$ için $uxa - xua = uxa = 0$ bulunur. Yani,

$uRa = 0$ dır. Uyarı 2.23 den, her $u \in U$ için $u = 0$ veya $a = 0$ olduğu bulunur. $U \neq 0$ olduğu için $a = 0$ dır.

Teorem 6.4.5. (f, d), karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının bir genelleştirilmiş (σ, τ)-türevi, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere (f, d), U üzerinde bir homomorfizm ise $d = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat: Hipotezden,

$$f(ab) = f(a)f(b) = f(a)\sigma(b) + \tau(a)d(b), \quad \forall\, a, b \in U \tag{6.24}$$

olur. Yukarıdaki ifadede, $x \in R$ olmak üzere, a yerine $a[x, a]$ yazarsak

$$f(a[x, a])f(b) = f(a[x, a])\sigma(b) + \tau(a[x, a])d(b) = f(a)f([x, a])\sigma(b) + \tau(a[x, a])d(b) \tag{6.25}$$

bulunur. Yukarıdaki özdeşlikte eşitliğin sol kısmı d nin homomorfizma olması kullanılarak düzenlenirse $f(a)f([x, a])f(b) = f(a)f([x, a]b) = f(a)f([x, a])\sigma(b) + f(a)\tau([x, a])d(b))$ olduğu bulunur. Bu ifadeyi (6.25) nolu özdeşlikte kullanırsak, her $a, b \in U$, $x \in R$ için $(f(a) - \tau(a))\tau([x, a])d(b) = 0$ elde edilir. Bu durumda, Lemma 6.4.2 den,

her $a \in U$, $x \in R$ için $(f(a) - \tau(a))\tau([x, a]) = 0$ veya $U \subset Z$ veya $d = 0$ olur. Kabul edelim ki, her $a \in U$, $x \in R$ için $(f(a) - \tau(a))\tau([x, a]) = 0$ olsun. Kabulde, $y \in R$ olmak üzere, x yerine xy yazar ve bulunan ifadeyi kabulü kullanarak düzenlersek, her $a \in U$, $x, y \in R$ için $(f(a) - \tau(a))\tau(x[y,a]) = 0$ bulunur. τ nun otomorfizm ve R halkasının asal olmasını kullanarak bulduğumuz ifadeyi düzenlediğimizde, her $a \in U$ için

$f(a) = \tau(a)$ veya $[R, a] = 0$ olur. $A = \{a \in U \mid a \in Z\}$ ve $B = \{a \in U \mid f(a) = \tau(a)\}$, U Lie idealinin alt gruplarıdır ve $U = A \cup B$ olarak yazılır. Böylece, Teorem 2.6 dan, U = A veya U = B dir. Kabul edelim ki, U = A olsun. Bu durumda, her $a \in U$ için $a \in Z$ dir. Yani,

$U \subset Z$ olur. Böylece ispat biter. Şimdi de, U = B olması durumun inceleyelim. Bu durumda, her $a \in U$ için $f(a) = \tau(a)$ dır. Bu bilgi ile (6.24) nolu özdeşliği düzenlediğimizde her $a, b \in U$ için $\tau(a)\tau(b) = \tau(a)\sigma(b) + \tau(a)d(b)$ bulunur. Bu ise, her $a, b \in U$ için $\tau(a)(\tau(b) - \sigma(b) - d(b)) = 0$ olması demektir. Son ifadeye soldan τ^{-1} uygularsak

$a\tau^{-1}(\tau(b) - \sigma(b) - d(b)) = 0$ olur. Yani, $U\tau^{-1}(\tau(b) - \sigma(b) - d(b)) = 0$ dır. Böylece, Lemma 6.4.4 den, her $b \in U$ için $d(b) = (\tau - \sigma)(b)$ veya $U \subset Z$ olur. Kabul edelim ki,

her $b \in U$ için $d(b) = (\tau - \sigma)(b)$ olsun. Bu durumda, d, U üzerinde bir otomorfizm olduğu için U üzerinde bir homomorfizmdir. Teorem 6.4.3 den, d = 0 olur.

Teorem 6.4.6. (f, d) ve (g, h), karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının iki genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere her $u, v \in U$ için, $f(u)\sigma(v) = \tau(u)g(v)$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat: Hipotezden,

$$f(a)\,\sigma(b) = \tau(a)g(b), \quad \forall\, a, b \in U \tag{6.26}$$

dır. Yukarıdaki ifadede, $x \in R$ olmak üzere, b yerine $[x, b]b$ yazarsak, her $a, b \in U$ için $f(a)\sigma([x, b]b) = \tau(a)g([x, b]b)$ bulunur. Bu özdeşliği düzenlediğimizde

$f(a)\,\sigma([x, b])\sigma(b) = \tau(a)g([x, b])\sigma(b) + \tau(a)\tau([x, b])h(b)$ elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu ifadeyi, (6.26) nolu özdeşlikte kullandığımızda $\tau(a)\tau([x, b])h(b) = 0$ olur. Bu ise, $\tau(a[x, b])h(b) = 0$ olması demektir. Bu özdeşliğe soldan τ^{-1} uygularsak

her $a, b \in U$, $x \in R$ için $a[x, b]\tau^{-1}(h(b)) = 0$ bulunur. Böylece, Lemma 6.4.4 den,

her $a, b \in U$, her $x \in R$ için $U = 0$ veya $[x, b]\tau^{-1}(h(b)) = 0$ olur. $U \neq 0$ olduğundan, her $b \in U$, $x \in R$ için $[x, b]\tau^{-1}(h(b)) = 0$ bulunur. Bulduğumuz bu özdeşlikte, $y \in R$

olmak üzere, x yerine xy yazar ve bulunan ifadeyi aynı özdeşliği kullanarak düzenlersek, her $b \in U$, $x, y \in R$ için $[x, b]y\tau^{-1}(h(b)) = 0$ elde edilir. Elde ettiğimiz bu ifadede R

halkasının asal olmasını kullanırsak, her $b \in U$ için $[R, b] = 0$ veya $\tau^{-1}(h(b)) = 0$ olur. Bu ise, τ 1-1 olduğundan, her $b \in U$ için $b \in Z$ veya $h(b) = 0$ olması demektir.

$A = \{b \in U \mid b \in Z\}$ ve $B = \{b \in U \mid h(b) = 0\}$, U Lie idealinin alt gruplarıdır ve $U = A \cup B$ olarak yazılır. Böylece, Teorem 2.6 dan, $U = A$ veya $U = B$ dir. Kabul edelim ki, $U = A$ olsun. Bu durumda, her $b \in U$ için $b \in Z$ dir. Yani, $U \subset Z$ olur. Böylece ispat biter. Şimdi de, $U = B$ olması durumun inceleyelim. Bu durumda, her $b \in U$ için $h(b) = 0$ olur. Bu ise, $h(U) = 0$ olması anlamına gelir. Böylece, Lemma 6.4.1 den, $U \subset Z$ olur. Böylece ispat biter.

Sonuç 6.4.7. (f, d) ve (g, h), karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının iki genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere her $u \in U$ için $f(u)\sigma(u) = \tau(u)g(u)$ ise $U \subset Z$ dir.

Sonuç 6.4.8. (f, d), karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her $u \in U$ için $[f(u), u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $U \subset Z$ dir.

Sonuç 6.4.9. (f, d), karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere $f(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U \subset Z$ dir.

Sonuç 6.4.10. d, karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının bir (σ,τ)-türevi, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere her $u \in U$ için $[d(u), u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $U \subset Z$ dir.

Sonuç 6.4.11. d, karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının bir (σ,τ)-türevi, σ ve τ, R halkasının iki otomorfizmi olmak üzere $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U \subset Z$ dir.

KAYNAKLAR

Argaç N., Carini L. ve De Filippis V., 2008. An Engel Condition with Generalized Derivation on Lie Ideals, *Taiwanese J. Math*. 12(2): 419-433.

Ashraf M., Ali A. ve Ali S., 2004. On Lie Ideals and Generalized (θ,φ)-Derivations in Prime Rings, *Communications in Algebra*, Vol.32, No.8: 2977-2985.

Ashraf M. ve Rehman N., 2002. On (σ,τ)-Derivations in Prime Rings, *Archivum Mathematicum*, 38: 259-264.

Aydın N., 1997. Notes on (α,β)-Derivations, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol.20, No.4 813-816.

Aydın N., 2008. A note on (sigma,tau)-Derivations in Prime Rings, *Indian J. Pure and Applied Math*. 39(4): 347-352.

Aydın N. ve Kaya K., 1992. Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ)-Derivation, *Doğa-Tr. J. Math*. 3.

Bresar M., 1993. Centralizing mappings and Derivations in Prime Rings, *Journal of Algebra*, 156: 385-394.

Bresar M., 1995. Functional identities of degree two, *J. Algebra* 172: 690-720. Algebra, 156: 385-394.

Chang J. C., 1991. A Note on (α,β)-Derivations, *Chinese Journal of Mathematics*, Vol.19, No.3: 277-285.

Chaudhry M. A. ve Thaheem A. B., (2002). Centralizing Mappings and Derivations on Semiprime Rings, *Demonstratıo Mathematica,* Vol. XXXVI, no.2: 285-292.

Deng Q., Yenigül M.Ş. ve Argaç N., 1997. On Ideals of Prime Rings with (σ,τ)-Derivations, *Tr. J.of Mathematics* 21: 45-49.

Gölbaşı Ö. ve Kaya K., 2006. On Lie Ideals with Generalized Derivations, *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 47, No.5: 862-866.

Gölbaşı Ö. ve Koç E., 2009. Notes On Generelized (σ, τ)- Derivations, *Rend. Sem. Mat. Unıv. Padova*.

Gölbaşı Ö. ve Koç E., 2010. Some Commutativity Theorems of Prime Rings with Generelized $(\sigma,\ \tau)$- Derivations, *Communications of the Korean Mathematical Society*, Baskıda (In Press).

Herstein I. N., 1969. *Topics in Ring Theory, Univ. of Chicago Press*, *Chicago*.

Herstein I. N., 1970. On the Lie Structure of an Associative Ring, *Journal of Algebra* 14: 561-571.

Herstein I. N.,1976. *Rings with Involution*, *University of Chicago Press*, *Chicago.*

Herstein I. N.,1978. A Note on Derivations, *Canad. Math. Bull*. Vol.21(3): 369-370.

Herstein I. N.,1979. A Note on Derivations II, *Canad. Math. Bull*. Vol.22(4): 509-511.

Hvala B., 1998. Generalized Derivations in Rings, *Comm. Algebra*, Vol.24, No.4: 1147-1166.

Jeffrey B., Herstein I. N. ve Jeanne W. K., 1981. Lie Ideals and Derivations of Prime Rings, *J. Algebra* 71: 259-267.

Kandamar H. ve Kaya K., 1992. *Hacettepe Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*.

Karalarlıoğlu D., 2003. Genelleştirilmiş Lie İdealler (Yüksek Lisans Tezi). Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Türkiye.

Kaya K., 1998. On (σ,τ)- Derivations of Prime Rings, *Doğa-Tr. J. Math.* 12(2).

Kaya K.,1988 (σ,τ)-Türevli Asal Halkalar Üzerine, *TU Mat. D.C.,* 12(2): 42-45.

Lee P. H. ve Lee T.K., 1981. On Derivations of Prime Rings, *Chinese J. Math*. Vol.9, No.2: 107-110.

Lee P. H. ve Lee T.K., 1983. Lie Ideals of Prime Rings with Derivations, *Bull. Inst. Math. Acod. Sinica* II: 75-80.

Lee T. K. ve Shiue W. K., 2001. Identities with Generalized Derivations, *Communications in Algebra*, 29(10): 4437-4450.

Posner E. C., 1957. Derivationsin Prime Rings, *Proc. Amer. Math*. *Soc.*8: 1093-1100.

Sarıefe Ö., 2008. Asal Halkalarda Genelleştirilmiş Türevler (Yüksek Lisans Tezi). Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Türkiye.

Shuliang H., 2007. Generalized Derivations of Prime Rings, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 85612: 6 pages*.

Vukman J., 2007. A Note on Generalized Derivations of Semiprime Rings, *Taiwanese Journal of Mathematics*,Vol.11, No.2: 367-370.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Selin VURKAÇ

Doğum Yeri : İSTANBUL

Doğum Tarihi : 17/12/1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Yabancı Dili : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLER

a)
b)
c)

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Çanakkale Birey Dergisi Dershanesi Matematik Etüt Öğretmenliği, 2008

Çanakkale Birey Dergisi Dershanesi Matematik Öğretmenliği, 2009

İLETİŞİM

E-posta Adresi : selinvurkac@gmail.com