T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER VE TÜREVLER

Salih SERGİN

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **18/06/2010**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

SALİH SERGİN tarafından **PROF. DR. NEŞET AYDIN** yönetiminde hazırlanan **"ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER VE TÜREVLER"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Danışman

Prof. Dr. Serhat ÖZDER	Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi: 18/06/2010

Prof. Dr. İsmail TARHAN

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Salih SERGİN

TEŞEKKÜR

Öğrenim hayatım boyunca ve tez çalışmamda her zaman bilgisini ve desteğini esirgemeyen sayın hocam ve danışmanım Prof. Dr. Neşet AYDIN’ a teşekkürlerimi sunarım.

Salih SERGİN

ÖZET

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER VE TÜREVLER

Salih SERGİN
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Neşet AYDIN
18/06/2010, 78

Halka Teoride, bir halkanın değişmeli olup olmadığına onun bir alt kümesi, türev veya polinom özdeşliği yardımı ile karar verebilmek oldukça önemli bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bir halkanın değişmeli olup olmadığını araştırmak için çeşitli özdeşlikler ele alınmıştır. Bunlardan bazıları türevli halkalarda yapılan çalışmalardır.

Halkalardaki Genelleştirilmiş Lie İdealler yardımı ile halkanın değişmeli olup olmadığına karar vermek, bir halkanın ideali, tek-yanlı idealleri veya Lie idealleri ile yapılan çalışmalarda genelleştirmeler yapılmaya devam etmektedir.

Bunun yanı sıra halkaların değişmeli olup olmadığına türev yardımıyla karar verebilmek için çalışmalar da devam etmektedir. Türev yerine, yarı-türev ve (σ,τ)-türev yardımıyla genelleştirmeler yapılmaya devam edilmektedir. Genelleştirilmiş türev ile bir halkanın değişmeliliğine karar vermek, türevler yardımıyla yapılan bütün çalışmaların genelleştirmesi olduğundan halka teori açısından oldukça önemlidir.

Anahtar sözcükler : Asal Halka, Türev, Genelleştirilmiş Türev

ABSTRACT

GENERALIZED LIE IDEALS AND DERIVATIONS IN PRIME RINGS

Salih SERGİN
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Science and Engineering
Chair for Mathematics Thesis of Master of Science
Advisor : Prof. Dr. Neşet AYDIN
18/06/2010, 78

In the ring theory, it is a very big problem to decide wheather the ring is commutative or not, wth the help of its subset, derivation or polynomial identities.

Various identities are studied to decide wheather the ring is commutative or not. Some of these are the studies on derivative rings.

With the help of generalized Lie ideals on rings, it has been continuing to decide wheather the ring is commutative or not, generalizing the studies done with a ring's ideal, its one-sided ideals or Lie ideals.

On the other hand, studies have been continuing to decide with the help of derivation wheather rings are commutative or not. Generalizing have been continuing with the help of semi-derivation and (σ,τ)-derivation instead of derivation. Because of deciding the commutativity of a ring with generalized derivation is generalizing of all studies done with the help of derivations, it is very important in terms of ring theory.

Keywords: Prime Ring, Derivation, Generalized Derivation

İÇERİK

Sayfa

I. BÖLÜM
GİRİŞ

Türevli halkalarda ilk çalışma 1957 yılında Posner, E. C. tarafından başlatılmıştır. Posner bu çalışmasında; d_1 ve d_2, karakteristiği 2 den farklı olan R asal halkasının iki türevi olmak üzere d_1d_2 türev ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olduğunu;

Ayrıca, R bir asal halka d, R nin bir türevi olmak üzere $[a,d(a)] = 0$ ise R halkasının komütatif veya $d = 0$ olduğunu kanıtlamıştır.

Daha sonra Herstein, I. N. bir R asal halkasında, her $x \in R$ ve $a \in R$ için $[a,d(x)] = 0$ olduğunda $\text{char}R \neq 2$ ise $a \in Z$ ve $\text{char}R = 2$ ise $a^2 \in Z$ olduğunu kanıtlamıştır.

1981 yılında Lee P.H. ve Lee T.K. bunları daha da genelleştirerek karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halkada;

(i) $a \in R$ için $[a,d(R)] \subseteq Z$ olduğunda $a \in Z$ olduğunu ve

(ii) $[d(R),d(R)] \subseteq Z$

(iii) $d^2(R) \subseteq Z$

(iv) d_1 ve d_2 türev olmak üzere $d_1d_2(R) \subseteq Z$

(v) $\forall x \in R$ için $[x,d(x)] \in Z$

durumlarında, R halkasının komütatif olduğunu kanıtlamışlardır.

Karakteristiği 2 den farklı olan türevli asal halkalarda bazı değişmelilik koşullarını inceleyen makalelerin bir arada özetlenmesi ve genelleştirilmiş Lie idealler için verilen bazı sonuçların bir araya getirilmesini amaçlayan bu çalışmada aşağıdaki yol izlenmiştir.

Halkalarla ilgili bazı temel bilgiler I. Bölümde verilmiştir.

II. Bölümde, türevli asal halkalarda değişmelilik koşullarını inceleyen bazı makaleler incelenmiştir.

III. Bölümde, bazı değişmelilik koşulları (σ,τ) türevli asal halkalar için incelenmiş ve (σ,τ) türevli asal halkalar üzerine yazılan makaleler incelenmiştir.

IV. Bölümde ise asal halka ile onun bir U, Lie ve genelleştirilmiş Lie idealinin, Z halkanın merkezini ve $C_{\sigma,\tau}$ halkanın (σ,τ)-merkezini ifade etmek üzere, $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ koşulları ve buna bağlı olarak asal halkanın hangi durumlarda değişmeli olduğunu inceleyen makaleler araştırılmıştır.

Genel Bilgiler

Bu bölümde tezde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.1 : R boş olmayan bir küme ve "+", "." R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. Eğer R kümesi için;

(i) (R,+) değişmeli bir grup

(ii) Her a, b, $c \in R$ için, (a.b).c = a.(b.c)

(iii) Her a, b, $c \in R$ için, a.(b+c) = a.b + a.c ve (a + b).c = a.c + b.c

koşulları sağlanıyor ise R kümesine bu ikili işlemlere göre bir ***halka*** denir ve (R, + ,.) ile gösterilir.

Tanım 1.2 : R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olsun. R halkasındaki işlemlere göre S, kümesi bir halka ise S kümesine R halkasının bir ***alt halkası*** denir.

$\{0_R\}$ ve R, R halkasının alt halkalarıdır. Bunlara R halkasının ***aşikâr alt halkaları*** denir. Bunlardan farklı olan alt halkalarına R halkasının ***öz alt halkaları*** denir.

Tanım 1.3 : R bir halka ve $\emptyset \neq I \subset R$ olsun. Eğer

(i) Her a, b $\in$ I için, $a - b \in I$

(ii) Her $a \in I$ ve $r \in R$ için, $ra \in I$ (veya $ar \in I$)

koşulları sağlanıyor ise I kümesine R halkasının bir ***sol (veya sağ) ideali*** denir.

Hem sol, hem de sağ ideal olan bir ideale ***iki yanlı ideal*** veya kısaca ***ideal*** denir.

Tanım 1.4 : R bir halka ve A, B, P onun idealleri olsun. $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P idealine R halkasının bir ***asal ideali*** denir.

Tanım 1.5 : Bir R halkasının (0) ideali asal ideal ise bu halkaya ***asal halka*** denir.

Önerme 1.6 : R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(i) R bir asal halkadır.

(ii) a, $b \in R$ için, aRb = (0) ise a = 0 veya b = 0 dır.

(iii) R halkasının sıfırdan farklı olan her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

(iv) R halkasının sıfırdan farklı olan her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 1.7 : R bir halka ve d : $R \rightarrow R$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan d dönüşümüne R de bir ***türev*** denir. Her x, $y \in R$ için,

(i) d(x + y) = d(x) + d(y)

(ii) d(xy) = d(x)y + xd(y)

Tanım 1.8 : Her $a \in R$ için, $na = 0$ olacak biçimde ki $n \in Z^+$ tamsayılarının en küçüğüne R halkasının ***karakteristiği*** denir ve charR = n ile gösterilir. Eğer böyle bir pozitif tamsayı yoksa halkanın karakteristiği sıfırdır denir.

Tanım 1.9 : $Z = \{c \in R \mid cx = xc, \ \forall x \in R\} = \{c \in R \mid [c,x] = 0, \ \forall x \in R\}$ şeklinde tanımlanan kümeye R halkasının ***merkezi*** denir.

Gösterim 1.10 : Bir R halkasında $x,y \in R$ için, $xy - yx$ elemanını $[x,y]$ ve $xy + yx$ elemanını (x,y) şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.11 : R bir halka ve a, R nin sabit bir elemanı olmak üzere $I_a : R \to R$ dönüşümü her $x \in R$ için $I_a(x) = [a,x]$ olarak tanımlansın. Bu I_a dönüşümüne, R nin a elemanı tarafından belirlenmiş bir ***iç türevi*** denir.

Tanım 1.12 : (G,o) ve (H,*) iki grup ve $f : G \to H$ bir grup homomorfizmi olsun. $\ker f = \{a \in G \mid f(a) = e_H\}$ şeklinde tanımlanan kümeyi f homomorfizminin ***çekirdeği*** denir.

Önerme 1.13 : R, charR $\neq$ 2 olan bir halka olsun. Her $a \in R$ için, $b \in Z$ olduğunda $[a,b] = 0$ dır.

İspat : $[a,b] = ab - ba$ ve $b \in Z$ olduğundan $ab - ab = 0$ olur. Buradan $[a,b] = 0$ bulunur.

Önerme 1.14 : R, charR $\neq$ 2 olan bir halka olsun. $a \in R$ için, $2a \in Z$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : $2a \in Z$ olduğundan $x \in R$ için, $(2a)x = x(2a)$ yani $(a + a)x = x(a + a)$ dır. Buradan $ax + ax = xa + xa$ yani $ax + ax - xa - xa = 0$ olur. Böylece $0 = ax - xa + ax - xa = [a,x] + [a,x] = 2[a,x]$ olur. charR $\neq$ 2 olduğundan $[a,x] = 0$ olur. Dolayısıyla $a \in Z$ bulunur.

Önerme 1.15 : R, charR $\neq$ 2 olan bir asal halka olsun. b, $ab \in Z$ ise $a \in Z$ veya $b = 0$ dır.

İspat : $ab \in Z$ olduğundan $(ab)x = x(ab), \ \forall x \in R$ dir. $b \in Z$ olduğundan $axb = xab$ yani $axb - xab = 0$ olur. Dolayısıyla $0 = (ax - xa)b = [a,x]b$ elde edilir. $r \in R$ için $[a,x]br = 0$ olur. Burada $b \in Z$ olduğundan $[a,x]rb = 0, \ \forall r \in R$, yani $[a,x]Rb = 0$ olur. R halkasının asal olması kullanıldığında $[a,x] = 0$ veya $b = 0$ bulunur. Dolayısıyla $a \in Z$ veya $b = 0$ olur.

Önerme 1.16 : (Brauer Trick) Bir G toplamsal grubu iki öz alt grubun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat : A ve B, G nin iki öz alt grubu olsun. $G = A \cup B$ olsun. $G = A$ veya $G = B$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $G \neq A$ olsun. O zaman $G = B$ olduğunu göstermeliyiz. $G \neq A$ olduğundan $x \in G$ ve $x \notin A$ olacak biçimde x elemanı vardır. $G = A \cup B$ olduğundan $x \in B$ dir. B, G nin alt grubu olduğundan $B \subset G$ vardır. Acaba $G \subset B$ midir? $G \not\subset B$ olsun. $y \in G$ ve $y \notin B$ olacak şekilde y elemanı vardır. $G = A \cup B$ olduğundan $y \in A$ dır. $x + y \in B$ dir. Eğer $x + y \notin B$ olsaydı $G = A \cup B$, $x + y \in A$ ve A toplamsal grup olduğundan $x \in A$ olurdu. Ancak $x \notin A$ olduğu için $x + y \in B$ olur. Dolayısıyla $x \in B$ ve B toplamsal olduğundan $y \in B$ dir. Bu ise $y \notin B$ olmasıyla çelişir. O halde $G \not\subset B$ olamaz. Yani $G \subset B$ dir. Buradan $B \subset G$ ve $G \subset B$ olduğundan G = B bulunur.

Tanım 1.17: R bir halka olsun. $0 \neq a \in R$ için, ab = 0 olacak biçimde $0 \neq b \in R$ varsa a, elemanına ***sol sıfır bölen*** denir. ba = 0 olacak biçimde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına ***sağ sıfır bölen*** denir. Hem sağ sıfır hem sol sıfır bölen olan elemana ***sıfır bölen*** denir.

Tanım 1.18 : Sıfır bölensiz, birimli ve değişmeli bir halkaya ***tamlık bölgesi*** denir.

Tanım 1.19 : R bir halka ve A onun bir ideali olsun. A idealinin keyfi olarak alınan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemanları için $a_1a_2\ldots a_n = 0$ oluyorsa A ya R halkasının ***nilpotent ideali*** denir.

Tanım 1.20 : U, R halkasının bir toplamsal alt grubu olsun. Her $a,b \in U$ için, $[a,b] \in U$ ise U ya ***Lie halkası*** denir.

Tanım 1.21 : R bir halka ve U, R nin bir toplamsal alt grubu olsun. Her $r \in R$, $u \in U$ için, $[u,r] \in U$ ise U ya R nin bir ***Lie ideali*** denir.

Gösterim 1.22 : σ ve τ , R halkası üzerinde tanımlanan iki dönüşüm olsun. $x,y \in R$ için $[x,y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$ ifadesine ***(σ, τ)-Lie komütatör*** ve $(x,y)_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) + \tau(y)x$ ifadesine ise ***(σ, τ)-Jordan komütatör*** şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.23 : U, R halkasının bir toplamsal alt grubu ve σ, τ : $R \to R$ iki dönüşüm olsun.

(i) $[U,R]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U ya ***(σ, τ)-sağ Lie ideal*** denir

(ii) $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U ya ***(σ, τ)-sol Lie ideal*** denir.

(iii) U hem sağ ve hem de sol (σ, τ)- Lie ideal ise U ya ***(σ, τ)- Lie ideal*** denir.

Tanım 1.24 : R bir halka ve U, R nin bir toplamsal alt grubu olsun. Her $r \in R$, $u \in U$ için, $(u,r) \in U$ ise U ya R nin bir ***Jordan ideali*** denir.

Tanım 1.25 : R bir halka ve $m \neq 0$ bir tam sayı olsun. $x \in R$ için, mx = 0 olduğunda x = 0 oluyorsa R halkasına ***m-torsion free halka*** denir.

Tanım 1.26 : $C_{\sigma,\tau} = \{ c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c, \ \forall x \in R \}$ şeklinde tanımlanan kümeye R halkasının bir ***(σ, τ) merkezi*** denir.

Tanım 1.27 : R ve S iki halka olsun. $f : R \to S$ fonksiyonu her $a, b \in R$ için,

(i) f(a + b) = f(a) + f(b)

(ii) f(ab) = f(a)f(b)

koşullarını sağlıyor ise f, fonksiyonuna bir ***halka homorfizmi*** denir.

Eğer f, fonksiyonu 1-1 ve örten ise f , fonksiyonuna bir ***halka izomorfizmi*** denir.

Eğer $f : R \to R$ izomorfizm ise f, fonksiyonuna R halkasının bir ***halka otomorfizmi*** denir.

Tanım 1.28 : R bir halka ve d : R→R toplamsal bir dönüşüm ve σ ve τ , R halkasının iki otomorfizması olsun. Her x, y$\in$R için, d(xy) = d(x)σ(y) + τ(x)d(y) şartı sağlanıyorsa d ye ***(σ, τ) –türev*** denir.

Tanım 1.29 : R bir halka ve d : R→R toplamsal bir dönüşüm ve α , R nin bir endomorfizmi olsun. Her x, y$\in$R için, d(xy) = d(x)α(y) + α(x)d(y) şartı sağlanıyorsa d ye ***(α, α)-türev*** denir.

Tanım 1.30 : R bir halka ve U, R nin bir toplamsal alt grubu olsun. σ, τ : R→R iki dönüşüm olsun.

(i) $(U,R)_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U, ***(σ, τ)-sağ Jordan ideal*** denir.

(ii) $(R,U)_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U, ***(σ, τ)-sol Jordan ideal*** denir.

(iii) U, hem (σ, τ)-sağ Jordan ideal ve hem de (σ, τ)-sol Jordan ideal ise ise U ya ***(σ, τ)-Jordan ideal*** denir.

Sık Kullanılan Özdeşlikler

$\forall$ x, y, z $\in$ R için,

(i) $[x,y] = xy - yx$

(ii) $[x,y + z] = [x,y] + [y,z]$

(iii) $[x + y,z] = [x,z] + [y,z]$

(iv) $[xy,z] = [x,z]y + x[y,z]$

(v) $[x,yz] = [x,y]z + y[x,z]$

(vi) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ eşitliğine ***Jacobi eşitliği*** denir.

(vii) $[x,y] = -[y,x]$

(viii) $[xy,z]_{\sigma,\tau} = x[y,z]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(z)]y = x[y,\sigma(z)] + [x,z]_{\sigma,\tau}y$

(ix) $[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau} = [[x,z]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau} + [x,[y,z]]_{\sigma,\tau}$

(x) $[x,yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)\,[x,z]_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\,\sigma(z)$

(xi) $(x,yz)_{\sigma,\tau} = \tau(y)(x,z)_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\,\sigma(z)$

(xii) $(xy,z)_{\sigma,\tau} = x(y,z)_{\sigma,\tau} - [x,\tau(z)]y$

II. BÖLÜM
ASAL HALKALARDA TÜREVLER

Bu bölümde türevli asal halkalarda halkanın hangi durumlarda komütatif olduğu incelenmiştir.

2.1 Edward C. Posner, Derivations in Prime Rings

Bu makalede, R bir asal halka, d bir türev ve $charR \neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma 2.1.1 : R bir asal halka, d bir türev ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat: Hipotezden her $x \in R$ için, $ad(x) = 0$ olduğundan x yerine $y \in R$ için xy alınırsa

$$0 = ad(xy) = a(d(x)y + xd(y)) = ad(x)y + axd(y)$$

olur. Hipotezden $ad(x) = 0$ olduğundan her $x, y \in R$ için, $axd(y) = 0$ bulunur. Buradan her $y \in R$ için $aRd(y) = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında $a = 0$ veya her $y \in R$ için, $d(y) = 0$ olur. Dolayısıyla $a = 0$ veya $d = 0$ bulunur.

Lemma 2.1.2 : R bir asal halka ve $p, q, r \in R$ olsun. Her $a \in R$ için, $paqar = 0$ ise p, q, r den en az biri sıfırdır.

İspat: Hipotezden $a, b \in R$ için $a + b \in R$ ve buradan $p(a + b)q(a + b)r = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 0 = p(a + b)q(a + b)r &= p(aq + bq)(ar + br) \\ &= p(aqar + aqbr + bqar + bqbr) \\ &= paqar + paqbr + pbqar + pbqbr \end{aligned}$$

olduğundan ilk ve son terim hipotezden sıfır olacağından dolayı her $a,b \in R$ için,

$paqbr + pbqar = 0$ elde edilir.

$pa = 0$ ise, $paqbr = 0$ ve buradan her $b \in R$ için, $pbqar = 0$ yani $pRqar = 0$ olur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $a \in R$ için, $p = 0$ veya $qar = 0$ elde edilir.

$pa = 0$ ise, her $t \in R$ için, $pat = 0$ dır. Buradan her $t \in R$ için, $p = 0$ veya $qatr = 0$ yani $p = 0$ veya $qaRr = 0$ olur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $a \in R$ için, $p = 0$ veya $qa = 0$ veya $r = 0$ elde edilir.

$pa = 0$ da a yerine aqar alınırsa $p(aqar) = 0$ bulunur. Buradan her $a \in R$ için, $p = 0$ veya $r = 0$ veya $qaqar = 0$ olur. $qa = 0$ da a yerine aqaq alınırsa $a \in R$ için, $p = 0$ veya $r = 0$ veya $qaqaq = 0$ elde edilir. Kabul edelim ki $p \neq 0$ ve $r \neq 0$ olsun. $qaqaq = 0$ da a yerine $a + b$ alınırsa;

$$0 = q(a + b)q(a + b)q = q(aq + bq)(aq + bq)$$
$$= q(aqaq + aqbq + bqaq + bqbq)$$
$$= qaqaq + qaqbq + qbqaq + qbqbq$$

bulunur. Burada ilk ve son terim hipotezden sıfır olacağından dolayı her $a, b \in R$ için, $qaqbq + qbqaq = 0$ elde edilir. Burada b yerine aqb alınırsa

$$0 = qaqbq + qbqaq = qaq(aqb)q + a(aqb)qaq$$
$$= (qaqaq)bq + qaqbqaq$$

olur. Burada ilk terim hipotezden sıfır olacağından her $a, b \in R$ için, $qaqbqaq = 0$ elde edilir. Buradan her $a \in R$ için $(qaq)R(qaq) = 0$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $a \in R$ için, $qaq = 0$ yani $qRq = 0$ bulunur. Dolayısıyla $q = 0$ elde edilir .

Teorem 2.1.3 : R, char$R \neq 2$ olan bir asal halka ve d_1, d_2 R nin türevi olsun. d_1d_2 türev ise d_1 ve d_2 den en az birisi sıfırdır.

İspat : d_1d_2 türev olduğundan her $a, b \in R$ için, $d_1d_2(ab) = d_1d_2(a)b + a\, d_1d_2(b)$ dir. Bununla birlikte d_1 ve d_2 türev olduğundan her $a,b \in R$ için

$$d_1d_2(ab) = d_1(d_2(ab))$$
$$= d_1(d_2(a)b + ad_2(b))$$
$$= d_1(d_2(a)b) + d_1(ad_2(b))$$
$$= d_1d_2(a)b + d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) + ad_1d_2(b)$$

elde edilir. Birlikte düşünülürse

$$d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) = 0, \ \forall\, a, b \in R \qquad (2.1)$$

bulunur. (2.1) eşitliğinde a yerine $c \in R$ için, $ad_1(c)$ alınırsa

$$0 = d_2(ad_1(c))d_1(b) + d_1(ad_1(c))d_2(b)$$
$$= (d_2(a)d_1(c) + ad_2d_1(c))d_1(b) + (d_1(a)d_1(c) + ad_1^2(c))d_2(b)$$
$$= d_2(a)d_1(c)d_1(b) + ad_2d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + ad_1^2(c)d_2(b)$$
$$= d_2(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + a(d_2d_1(c)d_1(b) + d_1^2(c)d_2(b))$$

elde edilir. Burada üçüncü terim (2.1) eşitliğinde a yerine $d_1(c)$ alındığında sıfıra eşit olacağından

$$d_2(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) = 0, \ \forall\, a, b, c \in R \qquad (2.2)$$

olur. Tekrar (2.1) eşitliğinde a yerine c alınırsa, $d_2(c)d_1(b) + d_1(c)d_2(b) = 0$ yani her $b, c \in R$ için, $d_1(c)d_2(b) = -d_2(c)d_1(b)$ bulunur.

Bu eşitliği (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa her a, b, $c \in R$ için, $d_2(a)d_1(c)d_1(b) - d_1(a)d_2(c)d_1(b) = 0$ olur. Bulunan eşitlik sağdan $b \in R$ için $d_1(b)$ parantezine alınırsa her a, b, $c \in R$ için, $(d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c))d_1(b) = 0$ elde edilir. Burada Lemma 2.1.1 kullanılırsa $d_1 = 0$ veya $d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0$, $\forall$ a, $c \in R$ bulunur. Kabul edelim ki her a, $c \in R$ için, $d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0$ olsun. (2.1) eşitliğinde b yerine c alınırsa her a, $c \in R$ için, $d_2(a)d_1(c) + d_1(a)d_2(c) = 0$ olur. Bu iki eşitlik toplanırsa $2d_2(a)d_1(c) = 0$ ve charR $\neq 2$ olduğu kullanılırsa $d_2(a)d_1(c) = 0$, $\forall$ a, $c \in R$ elde edilir. Tekrar Lemma 2.1.1 kullanılarak a yerine $d_2(a)$ alınırsa $d_1 = 0$ veya her $a \in R$ için, $d_2(a) = 0$ bulunur. Buradan $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir.

Lemma 2.1.4 : R bir asal halka ve d bir türev olsun. Her $a \in R$ için, $ad(a) - d(a)a = 0$ ise R halkası komütatif veya d = 0 dır.

İspat : $b \in R$ için, hipotezde a yerine a + b alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (a + b)d(a + b) - d(a + b)(a + b) \\
&= (a + b)(d(a) + d(b)) - (d(a) + d(b))(a + b) \\
&= ad(a) + ad(b) + bd(a) + bd(b) - d(a)a - d(a)b - d(b)a - d(b)b \\
&= ad(a) - d(a)a + bd(b) - d(b)b + ad(b) + bd(a) - d(a)b - d(b)a
\end{aligned}$$

olur. Hipotezden $ad(a) - d(a)a = 0$ ve $bd(b) - d(b)b = 0$ olacağından her a, $b \in R$ için, $ad(b) - d(a)b = d(b)a - bd(a)$ bulunur. d bir türev olduğundan her a, $b \in R$ için, $d(ab) = ad(b) + d(a)b$ olduğundan bir önceki eşitlikte kullanılırsa

$$2ad(b) = d(b)a - bd(a) + d(ab), \ \forall a, b \in R \tag{2.3}$$

elde edilir. (2.3) eşitliğinde b yerine $x \in R$ için, ax alınırsa $2ad(ax) = d(ax)a - (ax)d(a) + d(a^2x)$ veya $2a(d(a)x + ad(x)) = (d(a)x + ad(x))a - axd(a) + d(a^2)x + a^2d(x)$ ve buradan

$$a^2d(x) = d(a)xa + ad(x)a - axd(a), \ \forall a, x \in R \tag{2.4}$$

bulunur. (2.3) eşitliğinde b yerine $x \in R$ için, xa alınırsa $2ad(xa) = d(xa)a - (xa)d(a) + d(axa)$ ve buradan

$$d(x)a^2 = ad(x)a + axd(a) - d(a)xa, \ \forall a, x \in R \tag{2.5}$$

olur. (2.4) ve (2.5) eşitlikleri toplanırsa

$$a^2d(x) + d(x)a^2 = 2ad(x)a, \ \forall a, x \in R \tag{2.6}$$

bulunur. (2.6) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$a(d(x)a - ad(x)) = (d(x)a - ad(x))a, \ \forall a, x \in R \tag{2.7}$$

olur. (2.7) eşitliğinde a yerine $a + d(x)$ alınırsa, her $a, x \in R$ için, $d(x)(d(x)a - ad(x)) = (d(x)a - ad(x))d(x)$ elde edilir. $d(x)$ ile belirlenen iç türevi $I_{d(x)} = [d(x),a]$ şeklinde tanımlanırsa her $a, x \in R$ için, $I^2_{d(x)}(a) = 0$ bulunur.

Kabul edelim ki $charR \neq 2$ olsun. Teorem 2.1.3 kullanılarak her $a, x \in R$ için, $I_{d(x)}(a) = 0$ olacağından $0 = [d(x),a] = d(x)a - ad(x), \ \forall a, x \in R$ bulunur. Buradan her $x \in R$ için, $d(x) \in Z$ elde edilir.

A, a ile belirlenen iç türevi $A = [a,x]$ ifade etsin. Her $x \in R$ için, $ad(x) - d(x)a = 0$ olduğundan $Ad(x) = 0$ dır. Teorem 2.1.3 kullanılarak $d = 0$ veya $A = 0$ bulunur. Yani $d = 0$ veya her $x \in R$ için, $ax - xa = 0$ ve buradan $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

Eğer $charR = 2$ ise (2.6) kullanılarak $a^2d(x) + d(x)a^2 = 2ad(x)a$ ve buradan her $a,x \in R$ için, $a^2d(x) = d(x)a^2$ bulunur. Yani $d(x)$, R nin her elemanının karesi ile komütatiftir.

R, $charR = 2$ olan bir asal halka ve $e \in R$, R nin her elemanının karesi ile komütatif olsun.

$$a^2e = ea^2, \ \forall a \in R \tag{2.8}$$

olur. (2.8) eşitliğinde a yerine $a + b$ alınırsa $(a + b)^2e = e(a + b)^2$ ve buradan

$$(ab + ba)e = e(ab + ba), \ \forall a, b \in R \tag{2.9}$$

elde edilir. (2.9) eşitliğinde b yerine $e \in R$ için, ae alınır ve (2.8) eşitliği kullanılırsa

$$aeae = eaea, \ \forall a \in R \tag{2.10}$$

olur. (2.9) eşitliğinde b yerine e alınırsa

$$ae^2 = e^2a, \ \forall a \in R \tag{2.11}$$

bulunur. Böylece her $a \in R$ için,

$$\begin{aligned}(ae + ea)^2 &= (ae + ea)(ae + ea)\\ &= aeae + ae^2a + ea^2a + eaea\\ &= aeae + eaea + ae^2a + ea^2a\end{aligned}$$

olur. charR = 2 olduğu ve (2.10) eşitliği kullanılarak

$$(ae + ea)^2 = ae^2a + ea^2a$$

bulunur. (2.11) ve (2.8) eşitlikleri kullanılarak

$$(ae + ea)^2 = 0, \ \forall\, a \in R \tag{2.12}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $x,y \in R$ için, $xy = 0$ olsun. (2.9) eşitliğinden $(xy + yx)e = e(xy + yx)$ ve kabulümüzden

$$yxe = eyx \tag{2.13}$$

bulunur. $xy = 0$ ise $0 = xxy = x^2y$ olduğundan (2.13) eşitliğinden $yx^2e = yex^2$ olur. (2.8) eşitliğinden $yx^2e = yex^2$ elde edilir. $xy = 0$ ise

$$\begin{aligned}(ye + ey)x^2 &= yex^2 + eyx^2\\ &= yx^2e + eyx^2\\ &= eyx^2 + eyx^2\\ &= 2eyx^2\end{aligned}$$

ve charR = 2 olduğu kullanılarak

$$(ye + ey)x^2 = 0 \tag{2.14}$$

elde edilir. Aynı şekilde $xy = 0$ ise her $a \in R$ için, $(ax)y = 0$ dir. (2.14) de x yerine ax alınırsa $(ye + ey)(ax)^2 = 0$ ve Lemma 2.1.2 kullanılarak $ye + ey = 0$ veya $x = 0$ bulunur. $ye + ey = 0$ ise charR = 2 olduğundan $ye = ey$ olur. $(ye + ey)(ax)^2 = 0$ eşitliğinde y yerine yv alınırsa

$$\begin{aligned}0 &= (yve + eyv)(ax)^2\\ &= (yve + eyv)(ax)(ax)\end{aligned}$$

Lemma 2.1.2 kullanılarak $yve + eyv = 0$ veya $x = 0$ elde edilir.

$yve + eyv = 0$ ise $ye = ey$ olduğu kullanılır ve yeniden düzenlenirse

$y(ve + ev) = 0$ bulunur. Lemma 2.1.1 kullanılarak $y = 0$ veya $ve + ev = 0$ dır. $ve + ev = 0$ ise $charR = 2$ olduğundan her $v \in R$ için, $ve = ev$ elde edilir. Yani $x = 0$, $y = 0$ veya $e \in Z$ olur. (2.12) eşitliğinde $0 = (ae + ea)^2 = (ae + ea)(ae + ea)$ dir. x yerine, her $a \in R$ için, $ae + ea$, y yerine $ae + ea$ alınırsa $ae + ea = 0$ veya $e \in Z$ olur. Eğer e, R deki her elemanın karesi ile komütatif ise her $a \in R$ için, $ae + ea = 0$ veya $e \in Z$ dir. (2.8) eşitliği kullanılarak her $a, x \in R$ için, $a^2d(x) = d(x)a^2$ ve buradan her $x \in R$ için $d(x) \in Z$ elde edilir.

Kabul edelim ki $b \in R$ için, $d(b) = 0$ olsun. Kabulümüzden $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ ve $d(ab) \in Z$ olduğundan $d(a)b \in Z$ bulunur.

$d \neq 0$ olsun. Kabulümüzden $d(a) \neq 0$ olacak biçimde $\exists\ a \in R$ vardır. $d(a)b \in Z$ olduğundan her $x \in R$ için, $d(a)bx = xd(a)b$ dir. Buradan her $x \in R$ için,

$$\begin{aligned} d(a)(bx + xb) &= d(a)bx + d(a)xb \\ &= xd(a)b + d(a)xb \\ &= xd(a)b + xd(a)b \\ &= 2xd(a)b \end{aligned}$$

ve $charR = 2$ olduğundan her $x \in R$ için, $d(a)(bx + xb) = 0$ dır. Eğer $d(b) = 0$ ise her $x \in R$ için, $d(a)(bx + xb) = 0$ bulunur. $d(a) \neq 0$ olduğunda $d(a) \in Z$ ve $d(b) = 0$ olduğunda $b \in Z$ elde edilir.

Her $c \in R$ için, $d(c^2) = d(c)c + cd(c)$ dir. $d(c) \in Z$ olduğundan her $c \in R$ için, $d(c^2) = 2d(c)c$ ve $charR = 2$ olduğundan $d(c^2) = 0$ dır. Bir önceki paragraf kullanılarak her $c \in R$ için, $c^2 \in Z$ elde edilir. $c^2 \in Z$ ise her $c, x \in R$ için, $c^2x = xc^2$ dir. Buradan her $x \in R$ için, $x \in Z$ olur. Dolayısıyla R halkası komütatiftir.

Lemma 2.1.5 : A bir Lie halkası ve I, A nın bir ideali olsun. $d \in A$ ve her $x \in I$ için $dx.x = 0$ olsun. O zaman her $a \in R$ ve $x \in I$ için, $(da.x)x = 0$ dır.

İspat : R_a, a tarfından sağ çarpmayı göstersin. Her $a \in A$ ve $x \in I$ için $d(R_aR^2_x) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Lie halkası için Jacobi özdeşliğini $R_{ax} = R_aR_x - R_xR_a$ olarak yazılabilir. I' nın ideal olması kullanılarak her $a \in A$ için, $ax \in I$ ve $x + ax \in I$ bulunur. $dx.x = 0$ ise $(dax)ax = 0$ ve $(d(x + ax))(x + ax) = 0$ dır. Buradan

$0 = d(x + ax)(x + ax) = (dx + dax)(x + ax) = (dx)x + (dx)(ax) + (dax)x + d(ax)ax$

yani $(dx)(ax) + (dax)x = 0$ ve buradan her $a \in A$ ve $x \in I$ için, $d(R_xR_{ax} + R_{ax}R_x) = 0$ bulunur. Bu ifade yeniden düzenlenecek olursa

$0 = d(R_xR_{ax} + R_{ax}R_x) = d(R_x(R_aR_x - R_xR_a) + (R_aR_x - R_xR_a)R_x) = d(R_xR_aR_x - R^2_xR_a + R_aR^2_x - R_xR_aR_x)$ yani her $a \in A$ ve $x \in I$ için, $d(R_aR^2_x - R^2_xR_a) = 0$ ve $d(R^2_x) = 0$ olduğu kullanılacak olursa her $a \in A$ ve $x \in I$ için, $d(R_aR^2_x) = 0$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.6 : R bir asal halka ve d bir türev olsun. Her $a \in R$ için, $ad(a) - d(a)a \in Z$ olsun. d bir sıfır türev değil ise R halkası komütatiftir.

İspat : A , R nin türevlerinin bir Lie halkası olsun ve I, A nın bir ideali olsun ve $a \in R$ için, $I_a = [a,x]$ şeklinde tanımlanan iç türevi içersin. $d_1, d_2 \in A$ için $[d_1,d_2]$, A da bir türev çarpımını ifade etsin. Kabul edelim ki $[(d,I_a),I_a] = (0)$ olsun. Lemma 2.1.5 kullanılarak her $x \in R$, $I_x \in I$, $a \in R$ için, $[[[d,I_x]I_a]I_a] = (0)$ ve buradan he $x,a \in R$ için, $a(ad(x) - d(x)a) - (ad(x) - d(x)a)a = a^2d(x) - ad(x)a - ad(x)a + d(x)a^2 \in Z$ yani

$$a^2d(x) + d(x)a^2 - 2ad(x)a \in Z, \ \forall a, x \in R \tag{2.15}$$

elde edilir. $a \in R$ için (2.15) eşitliği kullanılırsa
$a(a^2d(x) + d(x)a^2 - 2ad(x)a) = (a^2d(x) + d(x)a^2 - 2ad(x)a)a$ elde edilir. Bu ifade açılacak olursa $a^3d(x) + ad(x)a^2 - 2a^2d(x)a = a^2d(x)a + d(x)a^3 - 2ad(x)a^2$ ve buradan

$$3ad(x)a^2 + a^3d(x) = 3a^2d(x)a + d(x)a^3 , \ \forall a, x \in R \tag{2.16}$$

elde edilir. Kabul edelim ki charR = 3 olsun. Her $a \in R$ için, (2.16) eşitliği $a^3d(x) = d(x)a^3$ yani $a^3d(x) - d(x)a^3 = 0$ ve buradan $I_a{}^3d = (0)$ olur. Teorem 2.1.3 kullanılarak d = 0 veya her $a \in R$ için, $a^3 \in Z$ elde edilir. Eğer her $a \in R$ için, $a^3 \in Z$ ise her $a, b \in R$ için, $(a + b)^3 - a^3 - b^3 \in Z$ olur. Bu ifade açılırsa $(a + b)^3 - a^3 - b^3 = (a + b)(a + b)(a + b) - a^3 - b^3 = (a^2 + ab + ba + b^2)(a + b) - a^3 - b^3 = a^3 + a^2b + aba + ab^2 + ba^2 + bab + b^2a + b^3 - a^3 - b^3$
ve buradan

$$a^2b + aba + ab^2 + ba^2 + bab + b^2a \in Z, \ \forall a \in R \tag{2.17}$$

elde edilir. (2.17) de $a \in R$ için, a yerine –a alınırsa
$(-a)^2b + (-a)b(-a) + (-a)b^2 + b(-a)^2 + b(-a)b + b^2 (-a)$ yani

$$a^2b + aba + ba^2 - (b^2a + bab + ab^2), \ \forall a, b \in R \tag{2.18}$$

elde edilir. (2.17) ve (2.18) eşitlikleri toplanırsa her $a, b \in R$ için, $a^2b + aba + ba^2 \in Z$ elde edilir. Bu ifadede b yerine ab alınırsa $a^3b + a^2ba + aba^2 = a(a^2b + aba + ba^2) \in Z$ bulunur. Kabul edelim ki her $a, b \in R$ için, $a^2b + aba + ba^2 = 0$ olsun. charR = 3 olduğu kullanılırsa $a(ab - ba) - (ab - ba)a = a^2b - aba - aba + ba^2 = a^2b + ba^2 - 2ab = -ab - 2ab = -3ab = 0$

bulunur. Yani her $b \in R$ için, $I_a^2 = (0)$ dır. Teorem 2.1.3 kullanılarak R halkası komütatif bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. Şimdi de char$R \neq 3$ olsun. (2.16) eşitliğinde x yerine $a \in R$ alınır ve $a \in R$ için $a^3 \in Z$ olduğu kullanılırsa

$3ad(a)a^2 + a^3d(a) = 3a^2d(a)a + d(a)a^3$ ve buradan

$$\begin{aligned} a^3d(a) - d(a)a^3 &= 3a^2d(a)a - 3ad(a)a^2 \\ &= 3a(d(a)a - ad(a))a \\ &= 3ad(a)a^2 - 3a^2d(a)a \\ &= 3ad(a)a^2 - 3d(a)a^3 \\ &= 3(ad(a) - d(a)a)a^2 \end{aligned}$$

yani

$$a^3d(a) - d(a)a^3 = 3(ad(a) - d(a)a)a^2\ ,\ \forall a \in R \qquad (2.19)$$

elde edilir. Ayrıca

$$(ad(a) - d(a)a)a = ad(a)a - d(a)a^2 \qquad (2.20)$$

ve $ad(a) - d(a)a \in Z$ olduğundan $(ad(a) - d(a)a)a = a(ad(a) - d(a)a)$

$$(ad(a) - d(a)a)a = a^2d(a) - ad(a)a \qquad (2.21)$$

olur. (2.20) ve (2.21) eşitlikleri toplanırsa

$$2(ad(a) - d(a)a)a = a^2d(a) - ad(a)a \qquad (2.22)$$

elde edilir. (2.16) eşitliğinde x yerine $ad(x)$ alınırsa

$0 = 3ad(ad(x))a^2 + a^3d(ad(x)) - 3a^2d(ad(x))a - d(ad(x))a^3$

$=3a(d(a)d(x) + ad(d(x)))a^2 + a^3(d(a)d(x) + ad(d(x))) - 3a^2(d(a)d(x) + ad(d(x)))a - (d(a)d(x) + ad(d(x)))a^3$

$= 3ad(a)d(x)a^2 + 3a^2d^2(x)a^2 + a^3d(a)d(x) + a^4d^2(x) - 3a^2d(a)d(x)a - 3a^3d^2(x)a - d(a)d(x)a^3 - ad^2(x)a^3$

$= 3a^2d^2(x)a^2 + a^4d^2(x) - 3a^3d^2(x)a - ad^2(x)a^3 + 3ad(a)d(x)a^2 + a^3d(a)d(x) - 3a^2d(a)d(x)a - d(a)d(x)a^3$

olur. (2.16) eşitliğinden $3a^2d^2(x)a^2 + a^4d^2(x) - 3a^3d^2(x)a - ad^2(x)a^3 = 0$ olacağından

$$3ad(a)d(x)a^2 + a^3d(a)d(x) - 3a^2d(a)d(x)a - d(a)d(x)a^3 = 0, \ \forall \, a, x \in R \qquad (2.23)$$

elde edilir. (2.16) eşitliği soldan $a \in R$ için d(a) ile çarpılırsa

$$3d(a)ad(x)a^2 + d(a)a^3d(x) - 3d(a)a^2d(x)a - d(a)d(x)a^3 = 0 \, , \ \forall \, a, x \in R \qquad (2.24)$$

elde edilir. (2.23) eşitliğinde (2.24) eşitliği çıkartılırsa ve (2.19) ve (2.22) eşitlikleri kullanılırsa her $a,x \in R$ için, $(ad(a) - d(a)a)(d(x)a^2 + a^2d(x) - 2ad(a)a) = 0$ bulunur. Eğer $a \in R$ için, $ad(a) - d(a)a \neq 0$ ise asal halkanın merkezi tamlık bölgesi olduğundan

$$d(x)a^2 + a^2d(x) - 2ad(a)a = 0, \ \forall \, a, x \in R \qquad (2.25)$$

elde edilir. (2.25) eşitliğinde $a \in R$ için, x yerine ax alınır ve (2.25) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d(ax)a^2 + a^2d(ax) - 2ad(a)a \\ &= (d(a)x + ad(x))a^2 + a^2(d(a)x + ad(x)) - 2a(d(a)x + ad(x))a \\ &= d(a)xa^2 + ad(x)a^2 + a^2d(a)x + a^3d(x) - 2ad(a)xa - 2a^2d(x)a \\ &= ad(x)a^2 + a^3d(x) - 2a^2d(x)a \\ &= a(d(x)a^2 + a^2d(x) - 2ad(a)a) \end{aligned}$$

yani

$$d(a)xa^2 + a^2d(a)x - 2ad(a)xa = 0, \ \forall \, x \in R \qquad (2.26)$$

bulunur. Şimdi de (2.25) eşitliğinde $a \in R$ için, x yerine a alınırsa $d(a)a^2 + a^2d(a) - 2ad(a)a = 0$ elde edilir. Bu ifade sağdan x ile çarpılırsa

$$d(a)a^2x + a^2d(a)x - 2ad(a)ax = 0, \ \forall \, x \in R \qquad (2.27)$$

bulunur. (2.26) eşitliğinden (2.27) eşitliği çıkartılırsa

$$d(a)(xa^2 - a^2x) - 2ad(a)(xa - ax) = 0, \ \forall \, x \in R \qquad (2.28)$$

elde edilir. (2.28) eşitliğinde $a \in R$ için, x yerine ax alınırsa

$$d(a)a(xa^2 - a^2x) - 2ad(a)a(xa - ax) = 0, \ \forall x \in R \tag{2.29}$$

bulunur. (2.28) eşitliğini $a \in R$ için, soldan a ile çarparsak

$$ad(a)(xa^2 - a^2x) - 2a^2d(a)(xa - ax) = 0, \ \forall x \in R \tag{2.30}$$

elde edilir. (2.30) eşitliğinden (2.29) eşitliği çıkartılır ve $ad(a) - d(a)a \in Z$ olduğu kullanılırsa
$ad(a) - d(a)a(xa^2 - a^2 x - 2a(xa - ax)) = 0$ bulunur. $ad(a) - d(a)a \neq 0$ ise

$$xa^2 - a^2 x - 2a(xa - ax) = 0, \ \forall x \in R \tag{2.31}$$

elde edilir. Böylece $0 = xa^2 - a^2 x - 2a(xa - ax) = xa^2 - a^2 x - 2axa + 2a^2x = xa^2 + a^2x - axa - axa$ bulunur. Yani $a(ax - xa) = (ax - xa)a$ ve buradan $I_a^2 = (0)$ bulunur. Teorem 2.1.3 kullanılarak $a \in Z$ veya $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan $ad(a) = d(a)a$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğunda da her $a \in R$ için, $ad(a) = d(a)a$ ve Lemma 2.1.4 kullanılarak ispat tamamlanır.

Şimdi de $\mathrm{char}R = 2$ olsun. (2.31) eşitliğinden her $a \in R$ için, $ad(a) = d(a)a$ veya $a^2 \in Z$ dir. Eğer $a \in R$ için, $ad(a) \neq d(a)a$ ise $a^2 \in Z$ veya $a^2 \neq 0$ dır. Eğer $a^2 = 0$ ise $0 = d(a^2) = d(aa) = d(a)a + ad(a)$ bu ise $ad(a) \neq d(a)a$ olması çelişir. Kabul edelim ki $x \in R$ olsun. $ad(a)$ nın x^2 ile komütatif olduğunu gösterelim. $a^2 \in Z$ olduğundan (2.21) den $(axa)^2 \in Z$ veya $(axa)d(axa) = d(axa)axa$ dır. Eğer $(axa)^2 \in Z$ ise $(axa)(axa) = axa^2xa = a^2(ax^2a) \in Z$ ve buradan $ax^2a \in Z$ dir. $a^2 \neq 0$ ise $a^2ax^2a = a^2x^2a^2 \in Z$ olur. Eğer $x^2 \notin Z$ ise $xd(x) = d(x)x$ ve $(axa)d(axa) = d(axa)(axa)$ dır. Sonra $(axa)d(axa) = (axa)(d(a)xa + ad(xa)) = (axa)(d(a)xa + ad(x)a + axd(a))$ olur. O halde $(axa)(d(a)xa + ad(x)a + axd(a)) = (d(a)xa + ad(x)a + axd(a))axa$ ve buradan $axad(a)xa + axa^2d(x)a + axa^2xd(a) = d(a)xa^2xa + ad(x)a^2xa + axd(a)axa$ bulur. $a^2 \in Z$ ve $xd(x) + d(x)x = 0$ ve $ad(a) + d(a)a \in Z$ olduğu kullanılırsa
$0 = ax(ad(a) + d(a)a)xa + (a(xd(x) + d(x)x)a + ax^2d(a) + d(a)x^2a)a^2 = (ad(a) + d(a)a)ax^2a + (ax^2d(a) + d(a)x^2a)a^2$ olur. Eğer a, sağ sıfır bölen değil ise ve $ad(a) + d(a)a \in Z$ olduğu kullanılırsa
$0 = ((ad(a) + d(a)a)ax^2 + (ax^2d(a) + d(a)x^2a)a)a = ax^2(ad(a) + d(a)a) + (ax^2d(a) + d(a)x^2a)a = ax^2ad(a) + ax^2d(a)a + ax^2d(a)a + d(a)x^2a^2 = ax^2ad(a) + d(a)x^2a^2 + 2ax^2d(a)a$ elde edilir. $\mathrm{char}R = 2$ olduğu kullanılırsa $ax^2ad(a) + d(a)x^2a^2 = 0$ olur. $a^2 \in Z$ ve a, sol sıfır bölen değil ise

$0 = ax^2ad(a) + d(a)x^2a^2 = ax^2ad(a) + a^2d(a)x^2 = a(x^2ad(a) + ad(a)x^2)$ ve buradan $x \in R$ için, $x^2ad(a) + ad(a)x^2 = 0$ bulunur. Böylece her $x \in R$ için, $ad(a) = d(a)a$ olur. Lemma 2.1.4 kullanılarak $a^3 \in Z$ ve $ad(a) \in Z$ veya $ad(a) = d(a)a$ bulunur. a, sıfır bölen olmadığından her $a \in R$ için Lemma 2.1.4 kullanılarak R halkası komütatif bulunur.

2.2 I. N. Herstein, A Note on Derivations

Teorem 2.2.1 : R bir halka, $d^3 \neq 0$ olacak şekilde d, R nin bir türevi olsun. Bu durumda A, her $r \in R$ için, d(r) tarafından üretilen R nin alt halkası, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat : $d(R) = \{d(r) \mid r \in R\}$ dir. $d^3 \neq 0$ ve $d(R) \subset A$ olduğundan $d^2(A) \neq 0$ dır. Çünkü her $a \in R$ için, $d^2(a) = 0$ alınırsa $d^3(a) = d(d^2(a)) = d(0) = 0$ olmasıyla çelişir.

Kabul edelim ki $y \in A$ için, $d^2(y) \neq 0$ olsun. $d(xy) \in A$ ise $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ve y, $d(x) \in A$ oldukları kullanılırsa, A alt halka olduğundan her $x \in R$ için, $xd(y) \in A$ olur. Yani $Rd(y) \subset A$ bulunur. Benzer şekilde $d(yx) \in A$ olduğundan her $x \in R$ için $d(y)x \in A$ dır. Yani $d(y)R \subset A$ elde edilir.

$r,s \in R$ için $d(rd(y)s) \in A$ dır.

$$\begin{aligned} d(rd(y)s) &= d(r)d(y)s + rd(d(y)s) \\ &= d(r)d(y)s + r(d(d(y))s + d(y)d(s)) \\ &= d(r)d(y)s + rd^2(y)s + rd(y)d(s) \end{aligned}$$

$rd(y)$, $d(y)s \in A$ olduğundan her $r,s \in R$ için $rd^2(y)s \in A$ elde edilir. Yani $Rd^2(y)R \subset A$ bulunur.$r \in R$ için, $rd(y) \in R$ dir. Buradan $d(rd(y)) \in A$ olur.

$d(rd(y)) = d(r)d(y) + rd^2(y)$ ve buradan $d(r)d(y) \in A$ ve A nın alt halka olmasından her $r \in R$ için $rd^2(y) \in A$ bulunur. Yani $Rd^2(y) \subset A$ elde edilir. Benzer şekilde $d^2(y)R \subset A$ olur.

$Rd^2(y)R \subset A$, $d^2(y)R \subset A$ ve $Rd^2(y) \subset A$ olduğundan R nin ideali A da $d^2(y)$ tarafından üretilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.2.2 : R bir asal halka , $0 \neq d$ türev ve $\text{char}R \neq 2$ olsun. Her x, $y \in R$ için, $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ ise R halkası komütatifitr.

İspat : Her $x \in R$ için, A, d(x) ile üretilen R, nin alt halkası olsun. Her x, $y \in R$ için $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ olduğundan A halkası komütatiftir. $a \in A$ ve $x \in R$ için, $ax \in R$ olduğundan $d(ax) \in A$ olur. Dolayısıyla $d(ax) = d(a)x + ad(x)$ olduğundan $d(a)x + ad(x) \in A$ bulunur. $b \in A$ için, $0 = bd(ax) - d(ax)b = d(a)(bx - x\,b) = d(a)[b,x]$ olur. Eğer $A \not\subset Z$ ise $d(A) = (0)$ ve her $x \in R$ için, $d(x) \in A$ ise $d(R) \subset A$ bulunur. O halde $d^2(R) \subset d(A) = (0)$ olduğundan her $x \in R$ için $d^2(x) = 0$ elde edilir.

Bu ifadede $y \in R$ için x yerine xy alınır ve her $x \in R$ için, $d^2(x) = 0$ olduğu kullanılırsa $0 = d^2(xy) = d(d(xy)) = d(d(x)y + xd(y)) = d(d(x)y) + d(xd(y)) = d^2(x) + 2d(x)d(y) + d^2(y) = 2d(x)d(y)$ bulunur. char$R \neq 2$ olduğundan her $x,y \in R$ için $d(x)d(y) = 0$ elde edilir. Her $x \in R$ için, $d(x)d(R) = (0)$ olduğundan Lemma 2.1.1 den her $x \in R$ için, $d(x) = 0$ veya $d = 0$ olur. Dolayısıyla $d = 0$ elde edilir. Fakat bu $d \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A \subset Z$ dir. $A \subset Z$ ve $d(R) \subset A$ olduğundan $d(R) \subset Z$ olduğundan R halkası komütatiftir.

2.3 I. N. Herstein, A Note on Derivations II

Teorem 2.3.1 : R bir asal halka ve $0 \neq d$, R nin türevi ve her $x \in R$, $a \in R$ için, $ad(x) = d(x)a$ olsun. Eğer char$R \neq 2$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $a \notin Z$ olsun. Hipotezden her $x,y \in R$ için, $ad(xy) = d(xy)a$ olur. Buradan $ad(xy) – d(xy)a = 0$ yani her $x,y \in R$ için, $[a,d(xy)] = 0$ elde edilir. $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ olduğu kullanılırsa $[a,d(xy)] = [a, d(x)y + xd(y)] = 0$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= a(d(x)y + xd(y)) – (d(x)y + xd(y))a \\ &= ad(x)y + axd(y) – d(x)ya – xd(y)a \\ &= d(x)ay – d(x)ya + axd(y) – xad(y) \\ &= d(x)(ay - ya) + (ax - xa)d(y) \end{aligned}$$

yani

$$d(x)[a,y] + [a,x]d(y) = 0, \ \forall x,y \in R \tag{2.32}$$

elde edilir. $y \in R$ için, $ay = ya$ ve buradan $ay – ya = 0$ yani $[a,y] = 0$ olur. $[a,y] = 0$ olduğundan (2.32) eşitliğinden her $x \in R$ için, $[a,x]d(y) = 0$ olur. Dolayısıyla $r \in R$ için $[a,xr]d(y) = 0$ bulunur.

$$0 = [a,xr]d(y) = x[a,r]d(y) + [a,x]rd(y)$$

ve buradan $[a,r] = 0$ olduğundan her x, $r \in R$ için, $[a,x]rd(y) = 0$ yani her $x \in R$ için, $[a,x]Rd(y) = 0$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$ için, $[a,x] = 0$ veya $y \in R$ için, $d(y) = 0$ ve buradan $a \in Z$ veya $y \in R$ için $d(y) = 0$ elde edilir. $a \notin Z$ olduğundan $d(y) = 0$ bulunur. Yani $y \in R$ için $ay = ya$ ise $d(y) = 0$ bulunur. $C_R(a) = \{y \in R \mid ya = ay \}$ olsun. Her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ olduğundan $d(x) \in C_R(a)$ dır. Buradan her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ olduğundan $d(d(x)) = 0$ dır. Yani her $x \in R$ için $d^2(x) = 0$ ve buradan $d^2 = 0$ elde edilir. Teorem 2.1.3 kullanılarak $d = 0$ bulunur. Bu ise $d \neq 0$ olmasıyla çelişir. Buradan $a \in Z$ elde edilir.

2.4 P. H. Lee ve T. K. Lee, On Derivations of Prime Rings

Bu makalede R, $\text{char}R \neq 2$ olan bir halka olmak üzere d bir türev ve halkanın merkezi Z olarak ifade edilmiştir.

Teorem 2.4.1 : d $\neq (0)$, R asal halkasının bir türevi ve $\text{char}R \neq 2$ olsun. Buna göre $a \in R$ için, $[a,d(R)] \subseteq Z$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : $a \in R$ için, $a^2 \in R$ dir. Dolayısıyla hipotezden $[a,d(a^2)] \in Z$ olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}[a,d(a^2)] &= [a,d(a)a + ad(a)] \\ &= [a,d(a)a] + [a,ad(a)] \\ &= d(a)[a,a] + [a,d(a)]a + a[a,d(a)] + [a,a]d(a) \\ &= [a,d(a)]a + a[a,d(a)]\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden $[a,d(a)] \in Z$ olduğu için $[a,d(a)]a + a[a,d(a)] = a[a,d(a)] + a[a,d(a)] = 2a[a,d(a)] \in Z$ olur. Önerme 1.14 kullanılarak $a[a,d(a)] \in Z$ bulunur. Öte yandan Önerme 1.15 kullanılırsa $[a,d(a)] = 0$ veya $a \in Z$ elde edilir.

Eğer $a \in Z$ ise $[a,d(a)] = ad(a) - d(a)a = ad(a) - ad(a) = 0$ olur. Yani her iki durumda da $[a,d(a)] = 0$ bulunur.

$[a,x] \in R$ olduğu için hipotez kullanılacak olursa $[a,d([a,x])] \in Z$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}[a,d([a,x])] = [a,d(ax) - d(xa)] &= [a,d(a)x + ad(x) - d(x)a - xd(a)] \\ &= [a,d(a)x - xd(a) + ad(x) - d(x)a] \\ &= [a,[d(a),x] + [a,d(x)]] \\ &= [a,[d(a),x]] + [a,[a,d(x)]]\end{aligned}$$

olur. Hipotezden her $x \in R$ için $[a,d(x)] \in Z$ dir. Dolayısıyla Önerme 1.13 kullanılarak $[a,[a,d(x)]] = 0$ bulunur. Yani her $x \in R$ için $[a,[d(a),x]] \in Z$ dolayısıyla $[a,[d(a),R]] \subseteq Z$ olur. $a \in R$ için, x yerine ax alınır ve $[a,d(a)] = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}[a,[d(a),ax]] &= [a, ([d(a),a]x + a[d(a),x])] \\ &= [a, [d(a),a]x] + [a, a[d(a),x]] \\ &= [a,a[d(a),x]] \\ &= [a,a][d(a),x] + a[a,[d(a),x]] \\ &= a[a,[d(a),x]]\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $a[a,[d(a),x]] \in Z$ bulunur. Öneme 1.15 kullanılarak $[a,[d(a),x]] = 0$ veya $a \in Z$ elde edilir.

Eğer $a \in Z$ ise Önerme 1.13 den $[a,[d(a),x]] = 0$ olur. Dolayısıyla her iki koşulda da $[a,[d(a),x]] = 0$ bulunur. Yani her $x \in R$ için $[a,[d(a),x]] = 0$ olur. Buradan $[a,[d(a),R]] = 0$ olur.

a tarafından belirlenen iç türev $I_a(x) = [a,x]$ ve d(a) tarafından belirlenen iç türev $I_{d(a)}(x) = [d(a),x]$ şeklinde tanımlanırsa $[a,[d(a),x]] = I_a(I_{d(a)}(x)) = (0)$ olur. Buradan

$I_a I_{d(a)} = 0$ bulunur. Teorem 2.1.3 den $I_a = 0$ veya $I_{d(a)} = 0$ olur.

Eğer $I_a = 0$ ise her $x \in R$ için, $0 = [a,x] = ax - xa$ ve buradan $ax = xa$ olur. Buradan her $x \in R$ için $a \in Z$ bulunur. Böylece ispat biter.

Eğer $I_{d(a)} = 0$ ise her $x \in R$ için $0 = [d(a),x] = d(a)x - xd(a)$ ve buradan her $x \in R$ için $d(a)x = xd(a)$ yani $d(a) \in Z$ bulunur. $x \in R$ için, $ax \in R$ ve hipotezden $[a,d(ax)] \in Z$ dir. Bu ifade açılır ve $d(a) \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} [a,d(a)x + ad(x)] &= [a,d(a)x] + [a,ad(x)] \\ &= d(a)[a,x] + [a,d(a)]x + a[a,d(x)] + [a,a]d(x) \end{aligned}$$

olur. Önerme 1.13 den

$$d(a)[a,x] + a[a,d(x)] \in Z \tag{2.33}$$

bulunur. Yani,

$$\begin{aligned} a(d(a)[a,x] + a[a,d(x)]) &= (d(a)[a,x] + a[a,d(x)])a \\ &= ad(a)[a,x] + a^2[a,d(x)] \\ &= d(a)[a,x]a + a[a,d(x)]a \end{aligned}$$

olur. $[a,d(x)] \in Z$ olduğundan $ad(a)[a,x] + a^2[a,d(x)] = d(a)[a,x]a + a^2[a,d(x)]$ buradan $ad(a)[a,x] = d(a)[a,x]a$ olur. $[a,d(a)] = 0$ olduğundan dolayı $0 = ad(a) - d(a)a$ ve buradan $ad(a) = d(a)a$ bulunur. Yani $d(a)a[a,x] = d(a)[a,x]a = d(a)a[a,x] - d(a)[a,x]a = 0$ olur. Buradan $d(a)(a[a,x] - [a,x]a) = d(a)[a,[a,x]] = 0$ elde edilir.

Eğer $d(a) \neq 0$ ise, her $x \in R$ için, $[a,[a,x]] = 0$ bulunur. Yani $I_a(I_a(x)) = 0$ olduğundan $I_a I_a = 0$ olur. Teorem 2.1.3 den $I_a = 0$ veya $I_a = 0$ dir. O halde $I_a = 0$ bulunur. Buradan her $x \in R$ için $[a,x] = 0$ olur. Dolayısıyla $a \in Z$ elde edilir. Böylece ispat biter.

Eğer $d(a) = 0$ ise $d(a)[a,x] + a[a,d(x)] \in Z$ eşitliğinde ilk terim sıfıra eşit olur. Buradan $a[a,d(x)] \in Z$ bulunur. Önerme 1.15 den $a \in Z$ veya her $x \in R$ için, $[a,d(x)] = 0$ olur.

Eğer $a \in Z$ ise ispat biter.

Eğer her $x \in R$ için, $[a,d(x)] = 0$ ise Teorem 2.3.1 den $a \in Z$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.4.2 : $d \neq (0)$, R asal halkasının bir türevi ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olsun. Buna göre $[d(R),d(R)] \subseteq Z$ ise R halkası komutatiftir.

İspat : $[d(R),d(R)] \subseteq Z$ olsun. Teorem 2.4.1 den $d(R) \subseteq Z$ bulunur. O halde $x,y \in R$ için, $d(xy) = d(x)y + xd(y) \in Z$ olur. Yani $x(d(x)y + xd(y)) = (d(x)y + xd(y))x$ olur. Dolayısıyla $xd(x)y + x^2d(y) = d(x)yx + xd(y)x$ bulunur.

$d(x), d(y) \in Z$ olduğundan $d(x)xy + x^2d(y) = d(x)yx + x^2d(y)$ buradan $d(x)xy = d(x)yx$ olur. Yani $0 = d(x)xy - d(x)yx = d(x)(xy - yx) = d(x)[x,y]$ bulunur. Her $x,y \in R$ ve $r \in R$ için, $rd(x)[x,y] = 0$ olur.

$d(x) \in Z$ olduğundan her $r \in R$ için, $0 = d(x)r[x,y] = d(x)R[x,y]$, R halkasının asal olması kullanıldığında $d(x) = 0$ veya her $y \in R$ için $[x,y] = 0$ bulunur.

Eğer $x \in R$ için, $d(x) = 0$ ise $x \in \ker d$ bulunur.

Eğer $[x,y] = 0$ ise $x \in Z$ olur.

Yani $x \in \ker d$ veya $x \in Z$ elde edilir. Dolayısıyla $x \in \ker d \cup Z$ bulunur. Yani $R \subseteq \ker d \cup Z$ olur.

Öte yandan kerd ve Z, R nin alt grubu olduğundan dolayı $\ker d \cup Z \subseteq R$ bulunur. Buradan $R = \ker d \cup Z$ olur. Brauer’s Trick den R = kerd veya R = Z olur.

Eğer R = kerd ise $d(R) = (0)$ ve buradan $d = 0$ bulunur. Bu ise $d \neq 0$ olması ile çelişir. O zaman $R \neq \ker d$ olmalıdır. Yani R = Z olur. Buradan R halkası komütatif bulunur.

Teorem 2.4.3 : $d \neq 0$, R asal halkasının bir türevi ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olsun. Buna göre, $d^2(R) \subseteq Z$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $x,y \in R$ için, $[x,y] \in R$ ve hipotezden $d^2([x,y]) \subseteq Z$ dir. O halde

$$
\begin{aligned}
d^2([x,y]) &= d^2(xy) - d^2(yx) \\
&= d(d(xy)) - d(d(yx)) \\
&= d(d(x)y + xd(y)) - d(d(y)x + yd(x)) \\
&= d(d(x)y) + d(xd(y)) - d(d(y)x) - d(yd(x)) \\
&= d^2(x)y + d(x)d(y) + d(x)d(y) + xd^2(y) - d^2(y)x - d(y)d(x) - d(y)d(x) - yd^2(x)
\end{aligned}
$$

olur. $x, y \in R$ için, $d^2(x), d^2(y) \in Z$ olduğu için $2(d(x)d(y) - d(y)d(x)) = 2[d(x),d(y)] \in Z$ bulunur.

Önerme 1.14 den $[d(x),d(y)] \in Z$ olur. Yani her $x, y \in R$ için $[d(R),d(R)] \subseteq Z$ bulunur. $\mathrm{char}R \neq 2$ ve Teorem 2.4.2 kullanıldığında R halkası komütatif bulunur.

Teorem 2.4.4 : $0 \neq d_1$, $0 \neq d_2$, R asal halkasının birer türevleri ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olsun. Buna göre $d_1d_2(R) \subseteq Z$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : x, $y \in R$ için, $[x,y] \in R$ dir. Hipotezden $d_1d_2([x,y]) \in R$ olur. O halde

$$\begin{aligned}
d_1d_2([x,y]) &= d_1d_2(xy - yx) \\
&= d_1d_2(xy) - d_1d_2(yx) \\
&= d_1(d_2(x)y + xd_2(y)) - d_1(d_2(y)x + yd_2(x)) \\
&= d_1(d_2(x)y) + d_1(xd_2(y)) - d_1(d_2(y)x) - d_1(yd_2(x)) \\
&= d_1d_2(x)y + d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) + xd_1d_2(y) - d_1d_2(y)x - d_2(y)d_1(x) - \\
&\qquad d_1(y)d_2(x) - yd_1d_2(x) \\
&= d_1d_2(x)y - yd_1d_2(x) + d_2(x)d_1(y) - d_1(y)d_2(x) + d_1(x)d_2(y) - d_2(y)d_1(x) + \\
&\qquad xd_1d_2(y) - d_1d_2(y)x \\
&= [d_1d_2(x), y] + [d_2(x), d_1(y)] + [d_1(x), d_2(y)] + [x, d_1d_2(y)]
\end{aligned}$$

olur. Hipotez ve Önerme 1.13 kullanılarak her x, $y \in R$ için $[d_2(x), d_1(y)] + [d_1(x),d_2(y)] \in Z$ bulunur. y yerine $d_2(y)$ alınırsa $[d_2(x), d_1(d_2(y))] + [d_1(x), d_2^2(y)] \in Z$ elde edilir. Hipotezde $d_1d_2(R) \subseteq Z$ olduğundan dolayı birinci terim Önerme 1.13 den sıfıra eşit olur ve her x, $y \in R$ için $[d_1(x) , d_2^2(y)] \in Z$ bulunur. Yani $[d_1(R) , d_2^2(R)] \subseteq Z$ elde edilir. Dolayısıyla $-[d_2^2(R) , d_1(R)] \subseteq Z$ olur. Yani $[d_2^2(R) , d_1(R)] \subseteq Z$ bulunur. Teorem 2.4.1 kullanılarak $d_2^2(R) \subseteq Z$ ve Teorem 2.4.3 kullanılarak R halkası komütatif bulunur.

Teorem 2.4.5 : $d \neq 0$, R asal halkasının bir türevi ve char$R \neq 2$ olsun. Buna göre her $x \in R$ için, $[x,d(x)] \in Z$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : Hipotezden $[x,d(x)] \in Z$ olduğundan her x, $y \in R$ için, $[x+y,d(x+y)] \in Z$ bulunur. Yani

$$\begin{aligned}
[x + y, d(x) + d(y)] &= (x + y)(d(x) + d(y)) - (d(x) + d(y))(x + y) \\
&= xd(x) + xd(y) + yd(x) + yd(y) - d(x)x - d(x)y - d(y)x - d(y)y \\
&= xd(x) - d(x)x + yd(y) - d(y)y + xd(y) - d(y)x + yd(x) - d(x)y \\
&= [x,d(x)] + [y,d(y)] + [x,d(y)] + [y,d(x)]
\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden $[x,d(x)] \in Z$ ve $[y,d(y)] \in Z$ olduğundan $[x,d(x)] + [y,d(y)] \in Z$ olur. Buradan her x, $y \in R$ için, $[x,d(y)] + [y,d(x)] \in Z$ bulunur.

y yerine $[x,y]$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
[x,d([x,y])] + [[x,y],d(x)] &= [x,d(xy-yx)] + [[x,y],d(x)] \\
&= [x,d(xy) - d(yx)] + [[x,y],d(x)] \\
&= [x,d(x)y + xd(y) - d(y)x - yd(x)] + [[x,y],d(x)] \\
&= [x,d(x)y - yd(x)] + [x,xd(y) - d(y)x] - [d(x),[x,y]] \\
&= [x,d(x)y - yd(x)] + [x,xd(y) - d(y)x] + [d(x),[y,x]] \in Z
\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$[x,d(x)y - yd(x)] + [x,xd(y) - d(y)x] + [d(x),[y,x]] \in Z \tag{2.34}$$

olarak bulunur

Öte yandan Jacobi eşitliğinden $[x,[d(x),y]] + [d(x),[y,x]] + [y,[x,d(x)]] = 0$ dır. O halde

$$[x,[d(x),y]] + [d(x),[y,x]] = -[y,[x,d(x)]] \tag{2.35}$$

(2.34) eşitliğini $[x,[d(x),y]] + [x,[x,d(y)]] + [d(x),[y,x]] \in Z$ şeklinde yazıp (2.18) eşitliği kullanılarak $[x,[x,d(y)]] - [y,[x,d(x)]] \in Z$ elde edilir. Öte yandan $[x,d(x)] \in Z$ olduğu için Önerme 1.13 kullanılarak $[y,[x,d(x)]] = 0$ bulunur. Yani $[x,[x,d(y)]] \in Z$ elde edilir.
x yerine $x + d(y)$ alınırsa $[x + d(y),[x + d(y),d(y)]] \in Z$ olur. Dolayısıyla,

$$[x + d(y),[x + d(y),d(y)]] = [x + d(y), [x,d(y)] + [d(y),d(y)]]$$
$$= [x, [x,d(y)]] + [d(y),[x,d(y)]] \in Z \text{ bulunur.}$$

$[x,[x,d(y)]] \in Z$ olduğundan $[d(y),[x,d(y)]] \in Z$ olur. Dolayısıyla $-[d(y),[d(y),x]] \in Z$ ve buradan $[d(y),[d(y),x]] \in Z$ bulunur. d(y) tarafından belirlenen iç türevi $I_{d(y)}(x) = [d(y),x]$ şeklinde tanımlanırsa $[d(y),[d(y),x]] = I_{d(y)}(I_{d(y)}(x)) \in Z$ dir. Yani her $x \in R$ için $I_{d(y)}{}^2(x) \in Z$ bulunur. O halde her $y \in R$ için $I_{d(y)}{}^2(R) \subseteq Z$ elde edilir. Teorem 2.4.3 kullanılarak R halkası komütatif bulunur.

III. BÖLÜM
ASAL HALKALARDA (σ,τ) TÜREVLER

Bu bölümde (σ,τ) türevli asal halkalarda halkanının hangi şartlar altında komütatif olduğu incelenmiştir.

3.1 N. Aydın ve K. Kaya, Some Generalizations in Prime Rings With (σ,τ)-Derivation

Bu makalede , R bir asal halka, $(0) \neq U$ bir ideal, char$R \neq 2$ ve $0 \neq d : R \rightarrow R$ **(σ,τ)**-türev olarak alınmıştır.

Lemma 3.1.1 : U, R nin sağ ideali ve d(U) = (0) ise d = 0 dır.

İspat : Hipotezden her $u \in U$, $x \in R$ için, d(ux) = 0 dır.

$0 = d(ux) = d(u)\sigma(x) + \tau(u)d(x)$ dir. Hipotezden $u \in U$ için d(u) = 0 olduğundan her $u \in U$, $x \in R$ için $\tau(u)d(x) = 0$ elde edilir. Lemma 2.1.1 den $\tau(U) = (0)$ veya d = 0 bulunur. $\tau(U) \neq (0)$ ideal olduğundan d = 0 olur.

Lemma 3.1.2 : $0 \neq d$, (σ,τ)-türev ve U sağ ideal olmak üzere $d(U) \subset Z$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : Her u, $v \in U$ ve $x \in R$ için $d(uv) \in Z$ ve hipotezden $d(U) \subset Z$ olduğundan $[x,d(uv)] = 0$ olur. Bu ifadeyi açar ve $d(U) \subset Z$ olduğu kullanılarak
$0 = [x,d(uv)] = [x,d(u)\sigma(u) + \tau(u)d(v)] = [x,d(u)\sigma(u)] + [x,\tau(u)d(v)] = [x,d(u)]\sigma(v) + d(u)[x,\sigma(v)] + [x,\tau(u)]d(v) + \tau(u)[x,d(v)]$
ve buradan

$$d(u)[x,\sigma(v)] + d(v)[x,\tau(u)] = 0,\ \forall x \in R,\ \forall u,v \in U \tag{3.1}$$

elde edilir. (3.1) eşitliğinde $v \in U$ için x yerine $x\sigma(v)$ alınırsa
$0 = d(u)[x\sigma(v),\sigma(v)] + d(v)[x\sigma(v),\tau(u)] = d(u)[x,\sigma(v),\ \sigma(v)] + d(v)(x[\sigma(v),\tau(u)] + [x,\tau(u)]\sigma(v))$
elde edilir. (3.1) eşitliği kullanılırsa her $x \in R$ ve her u, $v \in U$ için $d(v)x[\sigma(v),\tau(u)] = 0$ yani her u, $v \in U$ için $d(v)R[\sigma(v),\tau(u)] = (0)$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $u \in U$ için d(v) = 0 veya her u, $v \in U$ için $[\sigma(v),\tau(u)] = 0$ elde edilir. $K = \{ v \in U| d(v) = 0\}$ ve $L = \{ v \in U|[\sigma(v),\tau(u)] = 0,\ \forall u \in U\}$ kümelerini tanımlayalım.

$U = K \cup L$ dir. Brauer Trick ten $U = K$ veya $U = L$ elde dilir. Eğer $U = K$ ise buradan $d = 0$ bulunur. Ancak $d \neq 0$ olduğundan $U \neq K$ ve buradan $U = L$ bulunur. Yani

$$[\sigma(v), \tau(u)] = 0, \ \forall u,v \in u \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinde $w \in U$ için v yerine $v\sigma^{-1}(\tau(w))$ alınır ve (3.2) eşitliği kullanılırsa her $u,v,w \in U$ için

$0 = [\sigma(v\sigma^{-1}(\tau(w))), \tau(u)] = [\sigma(v)\tau(w), \tau(u)] = [\sigma(v)\tau(w), \tau(u)] + \sigma(v)[\tau(w), \tau(u)]$
$= \sigma(v)[\tau(w), \tau(u)] = \sigma(v)\tau([w,u])$

bulunur. $(0) \neq \sigma(U)$, R nin ideali olduğundan her $u, v, w \in U$ için $\tau([w,u]) = 0$ ve buradan U ideali komütatif bulunur. Herstein (1976)' den R halkası komütatiftir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.3 : (0) $\neq$ U, R nin bir ideali ve $a \in R$ olsun. $ad(U) = 0$ veya $(d(U)a = 0)$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat : Hipotezden $u \in U$, $x \in R$ için $ad(ux) = 0$ dır

$0 = ad(ux) = ad(u)\sigma(x) + a\tau(u)d(x)$

Hipotezden $ad(u) = 0$ olacağından her $u \in U$, $x \in R$ için $a\tau(u)d(x) = 0$ olur. Yani her $x \in R$ için $a\tau(U)d(x) = 0$ bulunur. $(0) \neq \tau(U)$, R nin bir ideali ve R halkasının asal olması kullanıldığında $a = 0$ veya $d = 0$ elde edilir.

Lemma 3.1.4 : $d_1 : R \to R$ (σ, τ)-türev ve $d_2 : R \to R$ bir türev olsun. $d_1d_2(R) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : Kabul edelim ki $d_1 \neq 0$ olsun. Hipotezden her $x, y \in R$ için $d_1d_2(xy) = 0$ dir.

$0 = d_1d_2(xy) = d_1(d_2(y) + xd_2(y))$

$= d_1d_2(x)\sigma(y) + \tau(d_2(x))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(y)) + \tau(x)d_1d_2(y)$

burada birinci ve dördüncü terimler hipotezden sıfıra eşit olacağından

$\tau(d_2(x))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(y)) = 0$ yani

$$\tau(d_2(x))d_1(y) = -\ d_1(x)\sigma(d_2(y)), \ \forall x, y \in R \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) eşitliğinde x yerine $x \in R$ için, $d_2(x)$ alınırsa

$\tau(d_2(d_2(x)))d_1(y) = -\ d_1(d_1(x))\sigma(d_2(y))$ olur. Burada eşitliğin sağ tarafı hipotezden sıfıra eşit olacağından her $x, y \in R$ için $\tau(d_2^2(x))d_1(y) = 0$ bulunur.

Lemma 3.1.3 den her $x \in R$ için $\tau(d_2^2(x)) = 0$ veya $d_1 = 0$ dır. Kabulümüzden $d_1 \neq 0$ olduğundan her $x \in R$ için, $\tau(d_2^2(x)) = 0$ olur. Buradan

$$d_2^2(x) = 0, \ \forall x \in R \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.3) eşitliğinde x yerine $z \in R$ için, $xd_2(z)$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(d_2(x))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(y)) \\ &= \tau(d_2(xd_2(z)))d_1(y) + d_1(xd_2(z))\sigma(d_2(y)) \\ &= \tau(d_2(x)d_2(z) + xd_2(d_2(z)))d_1(y) + (d_1(x)\sigma(d_2(z)) + \tau(x)d_1(d_2(z)))\sigma(d_2(y)) \end{aligned}$$

burada (3.4) eşitliği ve hipotezden $\tau(d_2(x))\tau(d_2(z))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 0$ olur. (3.3) eşitliğinden $-\tau(d_2(x))d_1(z)\sigma(d_2(y)) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 0$ ve yine (3.3) eşitliğinden her $x, y \in R$ için $0 = d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 2\, d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y))$ elde edilir. charR $\neq 2$ olduğundan her $x, y \in R$ için $d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 0$ olur. Lemma 3.1.3 den $d_1 = 0$ veya her $y, z \in R$ için $d_2(z)\, d_2(y) = 0$ elde edilir. $d_1 \neq 0$ olmasından her $y, z \in R$ için $d_2(z)\, d_2(y) = 0$ olur. Tekrar Lemma 3.1.3 kullanılarak $d_2 = 0$ bulunur.

Teorem 3.1.5 : $0 \neq d$, (σ, τ)-türev, U bir ideal ve $a \in R$ olsun. $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : $u, v \in U$ için hipotezden $[d(uv),a]_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

$$\begin{aligned} 0 = [d(uv),a]_{\sigma,\tau} &= [d(u)\sigma(v) + \tau(u)d(v),a]_{\sigma,\tau} \\ &= (d(u)\sigma(v) + \tau(u)d(v))\sigma(a) - \tau(a)(d(u)\sigma(v) + \tau(u)d(v)) \\ &= d(u)\sigma(v)\sigma(a) + \tau(u)d(v)\sigma(a) - \tau(a)d(u)\sigma(v) - \tau(a)\tau(u)d(v) \end{aligned}$$

hipotezden $d(u)\sigma(a) = \tau(a)d(u)$ olduğundan

$$0 = d(u)(\sigma(v)\sigma(a) - \sigma(a)\sigma(v)) + (\tau(u)\tau(a) - \tau(a)\tau(u))d(v)$$

ve buradan

$$d(u)(\sigma([v,a])) + (\tau([u,a])d(v) = 0, \ \forall u, v \in U \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinde v yerine va alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d(u)(\sigma([va,a])) + (\tau([u,a])d(va) \\ &= d(u)\sigma([v,a]a + v[a,a]) + \tau([u,a])(d(v)\sigma(a) + \tau(v)d(a)) \\ &= (d(u)\sigma([v,a]) + \tau([u,a])d(v))\sigma(a) + \tau([u,a])\tau(v)d(a) \end{aligned}$$

(3.6) eşitliğinden

$$0 = \tau([u,a])\tau(v)d(a), \ \forall u, v \in U$$
$$= \tau([u,a])\tau(U)d(a), \ \forall u \in U$$

elde edilir. $(0) \neq \tau(U)$, R nin bir ideali ve R halkasının asal olması kullanıldığında her $u \in U$, $a \in R$ için, $\tau([u,a]) = 0$ veya $a \in R$ için $d(a) = 0$ dır. τ, 1-1 olduğundan her $u \in U$, $a \in R$ için $[u,a] = 0$ veya $a \in R$ için $d(a) = 0$ dır. Eğer her $u \in U$ için, $[u,a] = 0$ ise Herstein (1976)' den $a \in Z$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. Eğer $d(a) = 0$ ise her $u \in U$ için

$$d([u,a]) = d(ua - au) = d(ua) - d(au) = d(u)\sigma(a) + \tau(u)d(a) - d(a)\sigma(u) - \tau(a)d(u)$$
$$= d(u)\sigma(a) - \tau(a)d(u) - (d(a)\sigma(u) - \tau(u)d(a))$$
$$= [d(u),a]_{\sigma,\tau} - [d(a),u]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Burada ilk terim hipotezden ve ikinci terim kabulümüzden sıfıra eşit olacağından her $u \in U$ için, $[d(u),a]_{\sigma,\tau} = 0$ yani

$$[d(U),a]_{\sigma,\tau} = (0) \qquad (3.6)$$

bulunur. (3.5) eşitliğinde $w \in U$ için, v yerine vw alınırsa

$$0 = d(u)(\sigma([vw,a])) + (\tau([u,a])d(vw)$$
$$= d(u)\sigma([v,a]w + v[w,a]) + \tau([u,a])(d(v)\sigma(w) + \tau(v)d(w))$$
$$= d(u)\sigma([v,a])\sigma(w) + d(u)\sigma([v,a])\sigma([w,a]) + \tau([u,a])d(v)\sigma(w) + \tau([u,a])\tau(v)d(w)$$
$$= d(u)\sigma(v)\sigma([w,a]) + \tau([u,a])\tau(v)d(w) + \{d(u)\sigma([v,a]) + \tau([u,a])d(v)\}\sigma(w)$$

elde edilir. Burada son terim (3.5) eşitliğinden sıfıra eşit olacağından

$$d(u)\sigma(v)\sigma([w,a]) + \tau([u,a])\tau(v)d(w) = 0, \ \forall u, v, w \in U \qquad (3.7)$$

olur. (3.7) eşitliğinde $w \in R$ için, w yerine $[w,a]$ alınır ve (3.6) eşitliği kullanılırsa her $u,v \in U$ için,

$$0 = d(u)\sigma(v)\sigma([[w,a],a]) + \tau([u,a])\tau(v)d([w,a])$$
$$= d(u)\sigma(v)\sigma([[w,a],a])$$
$$= d(u)\sigma(U)\sigma([[w,a],a])$$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında her $u \in U$ için, $d(u)=0$ veya her $w \in U$ için, $[a,[a,w]] = 0$ olur. $d(u) \neq 0$ olduğundan $[a,[a,U]] = (0)$ bulunur. $a \in R$ için, $I_a(x) = [a,x]$, a tarafından belirlenen bir iç türev olsun. $[a,[a,U]] = (0)$ ise buradan $I_a^2(U) = (0)$ bulunur. Teorem 2.1.3 den $I_a = (0)$ yani $[a,U] = (0)$ ve buradan $a \in Z$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.6 : $0 \neq d$, (σ,τ)-türev ve $(0) \neq U$, R nin bir ideali olsun. $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : Teorem 3.1.5 kullanılarak $d(U)\subset Z$ ve Lemma 3.1.2 kullanılarak R halkası komütatif bulunur.

Lemma 3.1.7 : $0 \neq d$, (σ,τ)-türev ve $(0) \neq U$, R nin bir ideali olsun. $a\in R$ için $ad(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a = 0$ veya R halkası komütatiftir.

İspat : Kabul edelim ki $a\neq 0$ olsun. $a\in Z$ olduğunu gösterelim. Yine kabul edelim ki $a\notin Z$ ve $b = \tau^{-1}(a)$ olsun. Her $u\in U$, $a, b\in R$ için $ad(ub)\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$0 = [ad(ub),b]_{\sigma,\tau} = [ad(u)\sigma(b) + a\tau(u)d(b),b]_{\sigma,\tau}$

$= (ad(u)\sigma(b) + a\tau(u)d(b))\sigma(b) - \tau(b)(ad(u)\sigma(b) + a\tau(u)d(b))$

$= ad(u)\sigma(b)\sigma(b) + a\tau(u)d(b)\sigma(b) - \tau(b)ad(u)\sigma(b) - \tau(b)a\tau(u)d(b)$

$= a\tau(u)d(b)\sigma(b) - \tau(b)ad(u)\sigma(b)$

ve buradan

$$[a\tau(u)d(b),b]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall u\in U \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinde $v\in U$ için, u yerine $\tau^{-1}(d(v))u$ alınırsa $[a\tau(\tau^{-1}(d(v))u)d(b),b]_{\sigma,\tau} = 0$ ve buradan

$$[ad(v)\tau(u)d(b),b]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall u,v\in U \tag{3.9}$$

olur. (3.8) eşitliğinde $w\in U$ için, u yerine $u\tau^{-1}(ad(v))w$ alınır ve (3.9) eşitliği kullanılacak olursa

$0 = [a\tau(u\tau^{-1}(ad(v))w)d(b),b]_{\sigma,\tau}$

$= [a\tau(u)ad(v)\tau(w)d(b),b]_{\sigma,\tau}$

$= a\tau(u)ad(v)\tau(w)d(b)\sigma(b) - \tau(b)a\tau(u)ad(v)\tau(w)d(b)$

elde edilir. Bu eşitliğe $a\tau(u)\tau(b)ad(v)\tau(w)d(b)$ eklenip çıkartılır ve (3.9) eşitliği kullanılarak

$0 = a\tau(u)(ad(v)\tau(w)d(b)\sigma(b) - \tau(b)ad(v)\tau(w)d(b)) + [a\tau(u),\tau(b)]ad(v)\tau(w)d(b)$

$= a\tau(u)[ad(v)\tau(w)d(b),b]_{\sigma,\tau} + [a\tau(u),\tau(b)]ad(v)\tau(w)d(b)$

ve böylece $[a\tau(u),\tau(b)]ad(v)\tau(w)d(b) = 0$ elde edilir. $b = \tau^{-1}(a)$ olmasından her $u, v\in U$ için, $[a\tau(u),a]ad(v)\tau(U)d(b) = (0)$ bulunur. $(0) \neq \tau(U)$, R nin bir ideali olduğundan ve

R halkasının asal olması kullanıldığında her u, $v \in U$ için, $[a\tau(u),a]ad(v) = 0$ veya $d(b) = 0$ ve buradan $ad(v) \in C_{\sigma,\tau}$ veya $d(b) = 0$ elde edilir. Buradan her $u \in U$ için $[a\tau(u),a] = 0$ veya her $v \in U$ için $ad(v) = 0$ veya $d(b) = 0$ olur. Eğer her $v \in U$ için $[a\tau(u),a] = 0$ ise $v \in U$ için u yerine uv alınır ve $[a\tau(u),a] = 0$ olduğu kullanılırsa

$0 = [a\tau(u)\tau(v),a] = [a\tau(u),a]\tau(v) + a\tau(u)[\tau(v),a] = a\tau(u)[\tau(v),a]$

buradan her $v \in U$ için, $a\tau(U)[\tau(v),a] = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında $a = 0$ veya her $v \in U$ için, $[\tau(v),a] = 0$ bulunur. $a \neq 0$ olduğu kullanılırsa her $v \in U$ için, $[\tau(v),a] = 0$ yani $[\tau(U),a] = (0)$ ve Herstein (1976)' den $a \in Z$ elde edilir. Ancak bu $a \notin Z$ olması ile çelişir. Eğer her $v \in U$ için, $ad(v) \in U$ ise Lemma 3.1.3 den a=0 veya d=0 olur. $a \neq 0$ olduğundan $d = 0$ bulunur. Fakat $d \neq 0$ olmasından $d(b) = 0$ elde edilir. $b = \tau^{-1}(a)$ olduğundan eşitliğin her iki tarafına τ uygulanır ve τ nun 1-1 olduğu kullanılırsa $\tau(b) = a$ bulunur. Buradan her $u \in U$ için,

$$d(bu) = d(b)\sigma(u) + \tau(b)d(u) = ad(u)$$

elde edilir. $ad(u) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $u \in U$ için, $d(bu) \in C_{\sigma,\tau}$ elde edilir.

Bir diğer taraftan hipotezden her $u \in U$ için, $ad(bu) \in C_{\sigma,\tau}$ olacağından Lee ve Lee (1981)' den $d(bu) = 0$ ve buradan her $u \in U$ için, $0 = d(bu) = ad(u)$ elde edilir. Lemma 3.1.3 den $a = 0$ veya $d = 0$ olur. Bu ise $a \neq 0$ ve $d \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $a \in Z$ dir. Buradan $a \in Z$ ve $ad(u) \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Her $x \in R$ ve $u \in U$ için, $ad(u)\sigma(x) = \tau(x)ad(u)$ ve buradan $0 \neq a \in Z$ olduğundan her $u \in U$, $x \in R$ için, $[d(u),x]_{\sigma,\tau} = 0$ ve Teorem 3.1.5 den R halkası komütatif bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.8 : $0 \neq d$, R'nin (σ,τ)-türevi olsun. $a \in R$ için, $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $a \notin Z$ olsun. Hipotezden $a \in R$ için, $[d(a^2),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
[d(a^2),a]_{\sigma,\tau} &= [d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a),a]_{\sigma,\tau} \\
&= d(a)\sigma(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a)\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma(a) + \tau(a)\tau(a)d(a) \\
&= \tau(a)(d(a)\sigma(a) - \tau(a)d(a)) + (d(a)\sigma(a) - \tau(a)d(a))\sigma(a) \\
&= \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} + [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a)
\end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden $a \in R$ için, $[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$[d(a^2),a]_{\sigma,\tau} = \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} + \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 2\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. CharR $\neq 2$ olduğundan $\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan $a \in R$ için, $\tau(a) \in Z$ veya $a \in R$ için, $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. $a \notin Z$ olduğundan

$$[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{3.10}$$

bulunur. Bir diğer taraftan hipotezden $a \in R$ için, $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $x \in R$ için, $[d([a,x]),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan

$[d([a,x]),a]_{\sigma,\tau} = [d(ax) - d(xa),a]_{\sigma,\tau}$

$= [d(ax),a]_{\sigma,\tau} - [d(xa),a]_{\sigma,\tau}$

$= [d(a)\sigma(x) + \tau(a)d(x),a]_{\sigma,\tau} - [d(x)\sigma(a) + \tau(x)d(a),a]_{\sigma,\tau}$

$= [(d(a)\sigma(x) + \tau(a)d(x))\sigma(a) - \tau(a)(d(a)\sigma(x) + \tau(a)d(x))] - [(d(x)\sigma(a) + \tau(x)d(a))\sigma(a) - \tau(a)(d(x)\sigma(a)+\tau(x)d(a))]$

$= (d(a)\sigma(x)-\tau(x)d(a))\sigma(a) - \tau(a)(d(a)\sigma(x) - \tau(x)d(a)) - (d(x)\sigma(a)\sigma(a) - \tau(a)d(x)\sigma(a) - \tau(a)d(x)\sigma(a) + \tau(a)\tau(a)d(x))$

$= [[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} - [[d(x),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}$

elde edilir. $[d(x),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $[[d(x),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ olacağından

$$[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \forall x \in R \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11) eşitliğinde x yerine ax alınır ve (3.8) eşitliği kullanılacak olursa

$[[d(a),ax]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = [\tau(a)[d(a),x]_{\sigma,\tau} + [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(x),a]_{\sigma,\tau}$

$= [\tau(a)[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [[d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(x),a]_{\sigma,\tau}$

elde edilir. Burada ikinci ifade (3.10) eşitliğinden sıfıra eşit olacağından her $x \in R$ için, $[\tau(a)[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Bu ifade düzenlenecek olursa

$[\tau(a)[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = \tau(a)[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)][d(a),x]_{\sigma,\tau}$

yani

$$\tau(a)[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \forall x \in R \tag{3.12}$$

bulunur. Lee ve Lee (1981)' den $\tau(a) \in Z$ veya $[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. $a \notin Z$ olduğundan

$$[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0, \forall x \in R \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) eşitliğinde

$[x,[y,z]]_{\sigma,\tau} + [[x,z]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau} - [[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau} = 0$ ve (11) eşitliği uygulanacak olursa $[d(a),[x,a]]_{\sigma,\tau} + [[d(a),a]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} - [[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. Burada ikinci ifade (3.10) eşitliğinden ve üçüncü terim (3.13) eşitliğinden sıfıra eşit olacağından

$$[d(a),[a,x]]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall x \in R \tag{3.14}$$

elde edilir. a tarafından belirlenen iç türevi $I_a(x) = [a,x]$ ve d(a) tarafından (σ,τ)-türevi $I_{d(a)}(x) = [d(a),x]_{\sigma,\tau}$ şeklinde tanımlansın. (3.14) eşitliğinden her $x \in R$ için, $I_{d(a)}I_a(x) = (0)$ elde edilir. Lemma 3.1.4 den $I_{d(a)} = (0)$ veya her $x \in R$ için, $I_a(x) = (0)$ bulunur. Buradan $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ veya $a \in Z$ elde edilir. $a \notin Z$ olduğundan $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Bir diğer taraftan hipotezden $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $x \in R$ için, $[d(ax),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ifade düzenlenecek olursa ve $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}[d(ax),a]_{\sigma,\tau} &= [d(a)\sigma(x) + \tau(a)d(x),a]_{\sigma,\tau} \\ &= d(a)\sigma(x)\sigma(x) + \tau(a)d(x)\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma(x) - \tau(a)\tau(a)d(x) \\ &= d(a)(\sigma(xa) - \sigma(ax)) + \tau(a)(d(x)\sigma(a) - \tau(a)d(x))\end{aligned}$$

ve buradan

$$[d(ax),a]_{\sigma,\tau} = d(a)\sigma([x,a]) + \tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \ \forall x \in R \tag{3.15}$$

elde edilir. $a \in R$ için, (3.15) eşitliği ve $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $[d(x),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}0 &= [d(a)\sigma([x,a]) + \tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \\ &= (d(a)\sigma([x,a]) + \tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau})\sigma(a) - \tau(a)(d(a)\sigma([x,a]) + \tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau}) \\ &= d(a)\sigma([x,a]\sigma(a) + \tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau})\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma([x,a]) - \tau(a)\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau} \\ &= d(a)\sigma([x,a]a) + \tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) - d(a)\sigma(a[x,a]) - \tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau} \\ &= d(a)(\sigma([x,a]a - a[x,a])) \\ &= d(a)(\sigma([x,a]a)\end{aligned}$$

bulunur. Lee ve Lee (1981)' den d(a) = 0 veya her $x \in R$ için, $[a,[a,x]] = 0$ elde edilir. Eğer her $x \in R$ için, $[a,[a,x]] = 0$ ise Herstein (1976)' den $a \in Z$ olur. Bu ise $a \notin Z$ olması ile çelişir. O halde d(a) = 0 dır. d(a) = 0 olduğundan (3.15) eşitliğinden her $x \in R$ için $\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur.

$[d(x),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lee ve Lee (1981)' den $\tau(a) \in Z$ veya $[d(x),a]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Yine $a \notin Z$ olduğundan $[d(x),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ve Teorem 3.1.5 den $a \in Z$ bu da yine $a \notin Z$ olması ile çelişir. O halde $a \in Z$ bulunur.

Teorem 3.1.9 : $0 \neq d$, R'nin (σ,τ)-türevi olsun. Eğer $[d(R),d(R)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : Lemma 3.1.8 kullanılarak $d(R) \subset Z$ ve Lemma 3.1.2 kullanılarak R halkası komütatif bulunur.

3.2 M. Ashraf, N. Rehman, On (σ,τ)-Derivations in Prime Rings

Bu makalede R, 2-torsion free asal halka ve $\sigma, \tau : R \to R$ otomorfizm olarak alınmıştır.

Lemma 3.2.1 : R, 2-torsion free asal halka ve $(0) \neq I$, R nin bir ideali olsun. $d^2(I) = (0)$ ve d, σ ve τ ile komütatif ise $d = 0$ dır.

İspat : Her $x \in I$ için, kabülümüzden $d^2(x) = 0$ dır. x yerine $y \in R$ için xy alınır, $d^2(I) = (0)$ ve d nin σ ve τ ile komütatif olduğu kullanılırsa

$0 = d^2(xy) = d(d(xy)) = d(d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)) = d(d(x)\sigma(y)) + d(\tau(x)d(y)) =$
$d^2(x)\sigma^2(y) + \tau(d(x))d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\sigma(d(y)) + \tau^2(x)d^2(y) = 2\tau(d(x))\sigma(d(y))$

elde edilir. R, 2-torsion free asal halka olduğundan her $x, y \in I$ için, $\tau(d(x))\sigma(d(y)) = 0$ bulunur. Eşitliğin her iki tarafına σ^{-1} uygulanır ve σ nun 1-1 olduğu kullanılırsa her x, $y \in I$ için $\sigma^{-1}(\tau(d(x)))d(y) = 0$ ve Lemma 3.1.3 kullanılarak $d = 0$ veya $\sigma^{-1}(\tau(d(x))) = 0$ bulunur. Eğer $d = 0$ ise ispat biter. Eğer her $x \in I$ için, $\sigma^{-1}(\tau(d(x))) = 0$ ise her $x \in I$ için, $d(x) = 0$ olur. $r \in R$ için x yerine xr alınır ve $d(x) = 0$ olduğu kullanılırsa $0 = d(xr) = d(x)\sigma(r) + \tau(x)d(r)$ ve buradan $\tau(x)d(r) = 0$ olur. Eşitliğin her iki tarafına τ^{-1} uygulanır ve τ nun 1-1 olduğu kullanılırsa her $x \in I$, $r \in R$ için, $I\tau^{-1}(d(r)) = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında her $r \in R$ için $\tau^{-1}(d(r)) = 0$ ve buradan $d = 0$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.2 : R, 2-torsion free asal halka olsun. Her $x \in R$ için d: $R \to R$, (σ,τ) türev ve $[d(x),x]_{\sigma,\tau} = 0$ olsun. $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

İspat : $B(.\,,.) : \quad R x R \to R$

$(x,y) \to [d(x),y]_{\sigma,\tau} + [d(y),x]_{\sigma,\tau}$, $\forall x,y \in R$ olsun. B simetriktir. Yani;

$$B(x,y) = [d(x),y]_{\sigma,\tau} + [d(y),x]_{\sigma,\tau}$$
$$= [d(y),x]_{\sigma,\tau} + [d(x),y]_{\sigma,\tau}$$
$$= B(y,x)$$

olur. $x,y,z \in R$ için

$$B(xy,z) = [d(xy),y]_{\sigma,\tau} + [d(z),xy]_{\sigma,\tau}$$
$$= [d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y),z]_{\sigma,\tau} + \tau(x)[d(z),y]_{\sigma,\tau} - [d(z),x]_{\sigma,\tau}\sigma(y)$$
$$= (d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y))\sigma(z) - \tau(z)(d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)) + \tau(x)(d(z)\sigma(y) - \tau(y)d(z)) + (d(z)\sigma(x) - \tau(x)d(z))\sigma(y)$$
$$= d(x)\sigma(y)\sigma(z) + \tau(x)d(y)\sigma(z) - \tau(z)d(x)\sigma(y) - \tau(z)\tau(x)d(y) + \tau(x)d(z)\sigma(y) - \tau(x)\tau(y)d(z) + d(z)\sigma(x)\sigma(y) - \tau(x)d(y)\sigma(y)$$

olur. Bu denkleme $d(x)\sigma(z)\sigma(y)$ ve $\tau(x)\tau(z)d(y)$ eklenip çıkartılırsa

$$B(xy,z) = d(x)\sigma(y)\sigma(z) + \tau(x)d(y)\sigma(z) - \tau(z)d(x)\sigma(y) - \tau(z)\tau(x)d(y) + \tau(x)d(z)\sigma(y) - \tau(x)\tau(y)d(z) + d(z)\sigma(x)\sigma(y) - \tau(x)d(y)\sigma(y) + d(x)\sigma(z)\sigma(y) - d(x)\sigma(z)\sigma(y) + \tau(x)\tau(z)d(y) - \tau(x)\tau(z)d(y)$$
$$= (d(x)\sigma(z) - \tau(z)d(x) + d(z)\sigma(x) - \tau(x)d(z))\sigma(y) + \tau(x)(d(y)\sigma(z) - \tau(z)d(y) + d(z)\sigma(y) - \tau(y)d(z)) + d(x)\sigma(y)\sigma(z) - d(x)\sigma(z)\sigma(y) + \tau(x)\tau(z)d(y) - \tau(z)\tau(x)d(y)$$

$$B(xy,z) = B(x,z)\sigma(y) + \tau(x)B(y,z) + d(x)\sigma([y,z]) + \tau([x,z])d(y),\ \forall x,y,z \in R \tag{3.16}$$

elde edilir. Her $x \in R$ için $f(x) = B(x,x)$ olsun.

$$f(x) = B(x,x) = [d(x),x]_{\sigma,\tau} + [d(x),x]_{\sigma,\tau}$$
$$= 2[d(x),x]_{\sigma,\tau},\ \forall x \in R$$ bulunur. Bu eşitlikte $y \in R$ için x yerine x + y alınırsa

$$B(x + y) = 2[d(x + y),x + y]_{\sigma,\tau}$$
$$= 2[d(x) + d(y), x + y]_{\sigma,\tau}$$
$$= 2[d(x),x]_{\sigma,\tau} + 2[d(y),x]_{\sigma,\tau} + 2[d(x),y]_{\sigma,\tau} + 2[d(y),y]_{\sigma,\tau}$$

olur. $B(x,y) = [d(x),y]_{\sigma,\tau} + [d(y),x]_{\sigma,\tau}$ ve $f(x) = 2[d(x),x]_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2B(x,y),\ \forall x,y \in R \tag{3.17}$$

bulunur. Hipotezden $[d(x),x]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan

$$f(x) = 0, \ \forall x \in R \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.17) eşitliğinde (3.18) eşitliği düşünülürse 2B(x,y) = 0 bulunur. R, 2-torsion free asal halka olduğundan her x, y $\in$R için B(x,y) = 0 olur. y yerine x$\in$R için, xy alınırsa

$0 = B(x,xy) = [d(x),xy]_{\sigma,\tau} + [d(xy),x]_{\sigma,\tau}$

$= \tau(x)[d(x),y]_{\sigma,\tau} - [d(x),x]_{\sigma,\tau}\sigma(y) + [d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y),x]_{\sigma,\tau}$

$= \tau(x)[d(x),y]_{\sigma,\tau} - [d(x),x]_{\sigma,\tau}\sigma(y) + [d(x)\sigma(y),x]_{\sigma,\tau} + [\tau(x)d(y),x]_{\sigma,\tau}$

$= \tau(x)[d(x),y]_{\sigma,\tau} - [d(x),x]_{\sigma,\tau}\sigma(y) + \tau(x)[d(y),y]_{\sigma,\tau} + d(x)[\sigma(y),$ $\sigma(x)] + [d(x),x]_{\sigma,\tau}\sigma(y) + \tau(x)[d(y),x]_{\sigma,\tau} + [\tau(x), \tau(x)]d(y)$

elde edilir. Hipotezden her x$\in$R için, $[d(x),x]_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanlırsa

$0 = \tau(x)[d(x),y]_{\sigma,\tau} + d(x)[\sigma(y), \sigma(x)] + \tau(x)[d(y),x]_{\sigma,\tau}$

$= \tau(x)([d(x),y]_{\sigma,\tau} + [d(y),x]_{\sigma,\tau}) + d(x)[\sigma(y), \sigma(x)]$

bulunur. $([d(x),y]_{\sigma,\tau} + [d(y),x]_{\sigma,\tau}) = 0$ olduğu kullanılırsa son denklemde ilk ifade sıfıra eşit olacağından

$0 = d(x)[\sigma(y), \sigma(x)]$

$= d(x)[\sigma[x,y])], \ \forall x,y \in R$

elde edilir. Son eşitlikte σ^{-1} uygulanır ve σ nun otomorfizma olduğu kullanlırsa

$0 = \sigma^{-1}(d(x)[\sigma[x,y])])$

$= \sigma^{-1}(d(x))[x,y], \ \forall x, y\in R$ bulunur. Bu denklemde y yerine yz alınırsa

$0 = \sigma^{-1}(d(x))[x,yz]$

$= \sigma^{-1}(d(x))([x,y]z + y[x,z])$

$= \sigma^{-1}(d(x))[x,y]z + \sigma^{-1}(d(x))y[x,z]$

$= \sigma^{-1}(d(x))y[x,z], \ \forall x,y,z \in R$

$= \sigma^{-1}(d(x))R[x,z], \ \forall x,y \in R$

olur. R halkasının asal olması kullanıldığında x$\in$R için, $\sigma^{-1}(d(x)) = 0$ veya her z$\in$R için, [x,z] = 0 bulunur. R toplamsal grubu iki toplamsal alt grup ile oluşur.

$A = \{x\in R | \ \sigma^{-1}(d(x)) = 0\}$ ve $B = \{x\in R | \ [x,z] = 0, \ \forall z\in R\}$ olur. Brauer Trick'den R = A veya R = B bulunur.

Eğer R = A ise her x$\in$R için $\sigma^{-1}(d(x)) = 0$ dır. Her iki tarafa σ uygulanır ve σ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa d(x) = 0, $\forall x\in R$ ve buradan d = 0 elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer R = B ise $[x,z] = 0,\ \forall z \in R$ ve buradan R halkasının komütatif olduğu bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3 : R, 2-torsion free asal halka ve $(0) \neq I$, R nin bir ideali olsun. d, her x, $y \in I$ için $[d(x),d(y)] = 0$ şartını sağlayan ve σ, τ ile komütatif olan (σ,τ)-türev olsun. O zaman d = 0 veya R halkası komütatiftir.

İspat : Hipotezden

$$[d(x),d(y)] = 0,\ \forall x,y \in I \tag{3.19}$$

(3.19) eşitliğinde y yerine xy alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [d(x),d(xy)] \\ &= [d(x),d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)] \\ &= d(x)(d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)) - (d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y))d(x) \\ &= d(x)(d(x)\sigma(y) - \sigma(y)d(x)) + (d(x)\tau(x) - \tau(x)d(y))d(y) \\ &= d(x)[d(x),\sigma(y)] + [d(x),\tau(x)]d(y),\ \forall x,y \in I \end{aligned}$$

elde edilir. $r \in R$ için y yerine yr alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d(x)[d(x),\sigma(y)\sigma(r)] + [d(x),\tau(x)]d(yr) \\ &= d(x)[d(x),\sigma(y)]\sigma(r) + \sigma(y)[d(x),\sigma(r)] + [d(x),\tau(x)](d(y)\sigma(r) + \tau(y)d(r)) \\ &= d(x)[d(x),\sigma(y)]\sigma(r) + d(x)\sigma(y)[d(x),\sigma(r)] + [d(x),\tau(x)]d(y)\sigma(r) + [d(x),\tau(x)]\tau(y)d(r) \\ &= (d(x)[d(x),\sigma(y)] + [d(x),\tau(x)]d(y))\sigma(r) + d(x)\sigma(y)[d(x),\sigma(r)] + [d(x),\tau(x)]\tau(y)d(r) \end{aligned}$$

ve buradan

$$d(x)\sigma(y)[d(x),\sigma(r)] + [d(x),\tau(x)]\tau(y)d(r) = 0,\ \forall x,y \in I,\ r \in R \tag{3.20}$$

bulunur. (3.20) eşitliğinde r yerine $\sigma^{-1}(d(z)),\ z \in I$ alınır ve d ve σ nun komütatif olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d(x)\sigma(y)[d(x),\sigma(\sigma^{-1}(d(z)))] + [d(x),\tau(x)]\tau(y)d(\sigma^{-1}(d(z))) \\ &= d(x)\sigma(y)[d(x),d(z)] + [d(x),\tau(x)]\tau(y)d(\sigma^{-1}(d(z))) \\ &= [d(x),\tau(x)]\tau(y)\sigma^{-1}(d^2(z)),\ \forall x,y,z \in I \end{aligned}$$

elde edilir. $s \in R$ için y yerine $y\tau^{-1}(s)$ alınırsa

$$0 = [d(x), \tau(x)]\tau(y\tau^{-1}(s))\ \sigma^{-1}(d^2(z))$$
$$= [d(x), \tau(x)]\tau(y)s\sigma^{-1}(d^2(z)),\ \forall\, x,y,z \in I,\ \forall\, s \in R$$
$$= [d(x), \tau(x)]\tau(y)R\sigma^{-1}(d^2(z))$$

bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında x, $y \in I$ için, $[d(x), \tau(x)]\tau(y) = 0$ veya $z \in I$ için $\sigma^{-1}(d^2(z)) = 0$ olur.

Eğer her $z \in R$ için, $\sigma^{-1}(d^2(z)) = 0$ ise her iki tarafa σ uygulanır ve σ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa her $z \in I$ için, $d^2(z)$ bulunur. Lemma 3.2.1 kullanılarak d = 0 bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer $[d(x), \tau(x)]\tau(y) = 0,\ \forall\, x,\ y \in I$ ise eşitliğin her iki tarafına τ^{-1} uygulanır ve τ ' nun otomorfizma olduğu kullanılırsa

$$0 = \tau^{-1}([d(x), \tau(x)]\tau(y)$$
$$= \tau^{-1}([d(x), \tau(x)]y,\ \forall\, x,y \in I$$
$$= \tau^{-1}([d(x), \tau(x)]I$$

bulunur. I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in I$ için $\tau^{-1}([d(x), \tau(x)] = 0$ veya I = 0 elde edilir. I sıfırdan farklı olduğundan dolayı her $x \in I$ için $\tau^{-1}([d(x), \tau(x)] = 0$ bulunur. Bu eşitlikte her iki tarafa τ uygulanır ve τ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa

$$[d(x), \tau(x)] = 0,\ \forall\, x \in I \qquad (3.21)$$

elde edilir.

(3.21) eşitliğinde x yerine x + y alınırsa

$$0 = [d(x + y), \tau(x + y)]$$
$$= [d(x) + d(y), \tau(x) + \tau(y)]$$
$$= [d(x), \tau(x) + \tau(y)] + [d(y), \tau(x) + \tau(y)]$$
$$= [d(x), \tau(x)] + [d(x), \tau(y)] + [d(y), \tau(x)] + [d(y), \tau(y)]$$

elde edilir. (3.21) eşitliği kullanılarak

$$[d(x), \tau(y)] + [d(y), \tau(x)] = 0,\ \forall\, x,y \in I \qquad (3.22)$$

bulunur. (3.22) eşitliğinde y yerine xy alınır ve (3.22) eşitliği kullanılırsa

$$0 = [d(x),\tau(xy)] + [d(xy),\tau(x)]$$
$$= [d(x),\tau(x)\tau(y)] + [d(x)\sigma(y),\tau(x)d(y),\tau(x)]$$
$$= [d(x),\tau(x)\tau(y)] + [d(x)\sigma(y),\tau(x)] + [\tau(x)d(y),\tau(x)]$$
$$= [d(x),\tau(x)]\tau(y) + \tau(x)[d(x),\ \tau(y)] + [d(x),\ \tau(x)]\ \sigma(y) + d(x)[\sigma(y),\tau(x)] + [\tau(x),\tau(x)]d(y) + \tau(x)[d(y),\ \tau(x)]$$
$$= \tau(x)([d(x),\ \tau(y)] + [d(y),\ \tau(x)]) + d(x)[\sigma(y),\tau(x)]$$
$$= d(x)[\sigma(y),\tau(x)],\ \forall\, x,y\in I$$

elde edilir. Bazı $r_1\in R$ için y yerine $y\sigma^{-1}(r_1)$ alınır ve $d(x)[\sigma(y),\tau(x)] = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0 = d(x)[\sigma(\ y\sigma^{-1}(r_1)),\tau(x)]$$
$$= d(x)[\sigma(y)r_1,\ \tau(x)]$$
$$= d(x)[\sigma(y),\tau(x)]r_1 + \sigma(y)[r_1,\tau(x)]$$
$$= d(x)[\sigma(y),\tau(x)]r_1 + d(x)\sigma(y)[r_1,\tau(x)]$$
$$= d(x)\sigma(y)[r_1,\tau(x)],\ \forall\, x,y\in I,\ r_1\in R$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafına σ^{-1} uygulanır ve σ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa

$$0 = \sigma^{-1}(d(x)\sigma(y)[r_1,\tau(x)])$$
$$= \sigma^{-1}(d(x))y\sigma^{-1}([r_1,\tau(x)])),\ \forall\, x,y\in I,\ r_1\in R$$
$$= \sigma^{-1}(d(x))I\sigma^{-1}([r_1,\tau(x)])),\ \ \forall\, x\in I,\ r_1\in R$$

elde edilir. $(0) \neq I$, R nin ideali olduğundan her bir $x\in I$ için, $d(x) = 0$ veya her $r_1\in R$ için, $[r_1,\tau(x)] = 0$, bulunur.

R toplamsal grubu iki toplamsal alt grup ile oluşur. $A = \{x\in I|\ d(x) = 0\}$ ve $B = \{\ x\in I|\ [r_1,\tau(x)] = 0,\ \forall\, r_1\in R\}$ olur. . Brauer Trick'den R = A veya R = B bulunur. Eğer I = A ise her $x\in I$ için $d(x) = 0$ bulunur. $s_1\in R$ için x yerine xs_1 alınırsa $0 = d(xs_1) = d(x)\sigma(s_1) + \tau(x)d(s_1)$ bulunur. $d(x) = 0$ olduğu kullanılırsa her $x\in I$ için, $\tau(x)d(s_1) = 0$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına τ^{-1} uygulanır ve τ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa $0 = x\tau^{-1}(d(s_1)) = I\tau^{-1}(d(s_1)),\ \forall\, x\in R$ bulunur. $(0) \neq I$, R nin ideali olduğundan her $s_1\in R$ için, $\tau^{-1}(d(s_1)) = 0$ ve buradan d = 0 elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar

Eğer I = B ise her $x\in I$ için $\tau(x)\in Z(R)$ ve buradan her $x\in I$ için $x\in Z(R)$ yani $I\subset Z(R)$ elde edilir. $(0) \neq I$, R nin ideali ve $I\subset Z(R)$ olduğundan Lemma 3.1.2 den R halkası komütatiftir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.4 : R, 2-torsion free asal halka ve (0) $\neq$ I, R nin bir ideali olsun, Her x,y $\in$ I için, R, $0 \neq d$, (σ,τ) türevini içersin. d, τ ile komütatif ve d(xy) = d(yx) şartı sağlansın. O zaman R halkası komütatiftir.

İspat : $c \in I$ için, d(c) = 0 ve $z \in I$ olsun. Kabulümüzden d(cz) = d(zc) bulunur. Bu ifade yeniden düzenlenirse $d(c)\sigma(z) + \tau(c)d(z) = d(z)\sigma(c) + \tau(z)d(c)$ bulunur. d(c) = 0 olduğu kullanılırsa her $c \in I$ için, $\tau(c)d(z) = d(z)\sigma(c)$ elde edilir. Her bir $x,y \in I$ için, $[x,y] \in I$ olduğundan son ifadede c yerine [x,y] alınırsa

$$\tau([x,y])d(z) = d(z)\sigma([x,y]),\ \forall x,y,z \in I \qquad (3.23)$$

bulunur. Her bir $x,y \in I$ için, d(xy) = d(yx) olduğu kullanılır ve bu ifade yeniden düzenlenirse

$$d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) = d(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x)$$

$$d(x)\sigma(y) - \tau(y)d(x) = d(y)\sigma(x) - \tau(x)d(y)$$

ve buradan

$$[d(x),y]_{\sigma,\tau} = [d(y),x]_{\sigma,\tau},\ \forall x,y \in I \qquad (3.24)$$

elde edilir. (3.24) eşitliğinde $x \in I$ için, x yerine x^2 alınır ve (9) eşitliği kullanılırsa

$$[d(x^2),y]_{\sigma,\tau} = [d(y),x^2]_{\sigma,\tau}$$

$$[d(x)\sigma(x) + \tau(x)d(x),y]_{\sigma,\tau} = [d(y),x^2]_{\sigma,\tau}$$

$$d(x)\sigma(x)\sigma(y) + \tau(x)d(x)\sigma(y) - \tau(y)d(x)\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(x)[d(y),x]_{\sigma,\tau} + [d(y),x]_{\sigma,\tau}\sigma(x)$$

$$d(x)\sigma(x)\sigma(y) + \tau(x)d(x)\sigma(y) - \tau(y)d(x)\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(x)(d(y)\sigma(x) - \tau(x)d(y)) + (d(y)\sigma(x) - \tau(x)d(y))\sigma(x)$$

$$d(x)\sigma(x)\sigma(y) + \tau(x)d(x)\sigma(y) - \tau(y)d(x)\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(x)d(y)\sigma(x) - \tau(x)\tau(x)d(y) + d(y)\sigma(x)\sigma(x) - \tau(x)d(y)\sigma(x)$$

yani

$$d(x)\sigma([x,y]) + \tau([x,y])d(x) = 0,\ \forall x,y \in I \qquad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) eşitliğinde (3.23) eşitliği kullanılırsa her $x,y \in I$ için, $2\tau([x,y])d(x) = 0$ elde edilir. R halkasının 2-torsion free asal halka olması kullanıldığında

$$\tau([x,y])d(x) = 0, \ \forall x,y \in I \tag{3.26}$$

bulunur. (3.26) eşitliğinde y yerine yz alınır, (3.26) eşitliği ve hipotezden d ile τ nun komütatif olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau([x,yz])d(x) \\ &= \tau([x,y])\tau(z)d(x) + \tau(y)\,\tau([x,z])d(x) \\ &= \tau([x,y])d(x)\tau(z) + \tau(y)\tau([x,z])d(x) \end{aligned}$$

$\tau(y)\tau([x,z])d(x) = 0$ ve $\tau([x,y])d(x)\tau(z) = 0$ elde edilir. Son eşitlikte d ve τ nun komütatif olduğu kullanılırsa $\tau([x,y])d(x)\tau(z) = 0$ bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafına τ^{-1} uygulanır ve τ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [x,y]z\tau^{-1}(d(x)), \ \forall x,y,z \in R \\ &= [x,y]I\tau^{-1}(d(x)), \ \forall x,y \in R \end{aligned}$$

bulunur. $(0) \neq I$, R nin bir ideali olduğundan ve R halkasının asal halka olması kullanıldığında $[x,y]I = 0$ veya $\tau^{-1}(d(x)) = 0$ elde edilir. I toplamsal grubu iki toplamsal alt grup ile oluşur. $A = \{ x \in I \mid [x,y]I = 0 , \ \forall y \in I \}$ ve $B = \{x \in I \mid \tau^{-1}(d(x)) = 0, \ \forall x \in I \}$ olur. Brauer Trick'den I = A veya I = B bulunur.

Eğer I = B ise her $x \in I$ için, $\tau^{-1}(d(x)) = 0$ olur. Eşitliğin her iki tarafına τ uygulanır ve τ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa her $x \in I$ için $d(x) = 0$ bulunur. Son eşitlikte x yerine xr alınır ve $d(x) = 0$ olduğu kullanılırsa her $x \in I$ için, $0 = d(xr) = d(x)\sigma(r) + \tau(x)d(r) = \tau(x)d(r)$ bulunur. Bulunan bu son eşitliğin her iki tarafına τ^{-1} uygulanır ve τ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa her $x \in I$ için, $0 = x\tau^{-1}(d(r)) = I\tau^{-1}(d(r))$ elde edilir. $(0) \neq I$, R nin bir ideali ve R halkasının asal olmasından $\tau^{-1}(d(r)) = 0$ bulunur. Her $r \in R$ için yapılabileceğinden $d = 0$ bulunur. Kabulümüzden $d \neq 0$ olmasından I = A bulunur. Yani her $x,y \in I$ için, $[x,y]I = 0$ olur. I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve R halkasının asal olmasından her $x,y \in I$ için, $[x,y] = 0$ bulunur. Herstein (1976)' den R halkası komütatif olur.

Teorem 3.2.5 : R, 2-torsion free asal halka ve σ ve τ, R nin otomorfizmi olsun. d_1 ve d_2, R nin iki (σ,τ) türevi ve $d_1\sigma = \sigma d_1$, $d_1\tau = \tau d_1$, $d_2\sigma = \sigma d_2$, $d_2\tau = \tau d_2$ olmak üzere $d_1d_2(R) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olur.

İspat : Kabul edelim ki $d_1 \neq 0$ olsun. Kabulümüzden

$$d_1d_2(x) = 0, \ \forall x \in R \tag{3.27}$$

olur. (3.27) eşitliğinde x yerine xy alınır, (3.27) eşitliği ve d_1 ile σ ve τ nun komütatif olduğu kullanılırsa her $x,y \in R$ için,

$$\begin{aligned} 0 = d_1d_2(xy) &= d_1(d_2(x)\sigma(y) + \tau(x)d_2(y)) \\ &= d_1(d_2(x)\sigma(y)) + d_1(\tau(x)d_2(y)) \\ &= d_1d_2(x)\sigma^2(y) + \tau(d_2(x))d_1(\sigma(y)) + d_1(\tau(x))\sigma(d_2(y)) + \tau^2(x)d_1d_2(y) \\ &= \tau(d_2(x))\sigma(d_1(y)) + \tau(d_1(x))\sigma(d_2(y)) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte x yerine $\tau^{-1}(d_2(x))$ alınır ve (3.27) eşitliği kullanılırsa her $x,y \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(d_2(\tau^{-1}(d_2(x))))\sigma(d_1(y)) + \tau(d_1(\tau^{-1}(d_2(x))))\sigma(d_2(y)) \\ &= d_2^2(x)\ \sigma(d_1(y)) + d_1d_2(x)\sigma(d_2(y)) \\ &= d_2^2(x)\ \sigma(d_1(y)) \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafına σ^{-1} uygulanır ve σ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa her $x,y \in R$ için, $\sigma^{-1}(d_2^2(x))d_1(y) = 0$ elde edilir. Lemma 3.1.3 den her $x \in R$ için, $\sigma^{-1}(d_2^2(x)) = 0$ veya $d_1 = 0$ elde edilir. Her $x \in R$ için, $\sigma^{-1}(d_2^2(x)) = 0$ ise eşitliğin her iki tarafına σ uygulanır ve σ nun otomorfizma olduğu kullanılırsa her $x \in R$ için, $d_2^2(x) = 0$ elde edilir. Son eşitlikte x yerine xy alınır, $d_2^2(R) = 0$ ve d_2 ile σ ve τ nun komütatif olduğu kullanılırsa her $x,y \in R$ için,

$$\begin{aligned} 0 = d_2^2(xy) &= d_2(d_2(xy)) \\ &= d_2(d_2(x)\sigma(y) + \tau(x)d_2(y)) \\ &= d_2(d_2(x)\sigma(y)) + d_2(\tau(x)d_2(y)) \\ &= d_2^2(x)\ \sigma^2(y) + \tau(d_2(x))d_2(\sigma(y)) + d_2(\tau(x))\sigma(d_2(y)) + \tau^2(x)d_2^2(y) \\ &= \tau(d_2(x))d_2(\sigma(y)) + \tau(d_2(x))\sigma(d_2(y)) \\ &= 2\tau(d_2(x))\sigma(d_2(y)) \end{aligned}$$

bulunur. R asal halkasının 2-torsion free olması kullanıldığında her $x,y \in R$ için, $\tau(d_2(x))\sigma(d_2(y)) = 0$ elde edilir. Son eşitlikte y yerine $\sigma^{-1}(y)$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(d_2(x))\sigma(d_2(\sigma^{-1}(y))) \\ &= \tau(d_2(x))d_2(y),\ \forall\, x,y \in R \end{aligned}$$

bulunur. Lemma 3.1.3 kullanılarak her $x \in R$ için, $\tau(d_2(x)) = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir.

Eğer $d_2 = 0$ ise ispat tamamlanır.

Eğer her $x \in R$ için, $\tau(d_2(x)) = 0$ ise τ nun otomorfizma olması kullanılarak $d_2 = 0$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

3.3 N. Aydın, A Note on (σ,τ)- Derivations in Prime Rings

Bu makalede R, 2-torsion free asal halka ve σ, τ : R→R otomorfizm olarak alınmıştır.

Lemma 3.3.1 : R, 2-torsion free asal halka ve d : R→R sıfırdan farklı R nin bir (σ,τ) türevi ve h : R→R sıfırdan farklı bir türev olsun. $dh(R)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $x,y\in R$ için, $dh([x,y])\in C_{\sigma,\tau}$ olur.

$dh([x,y]) = d(h(xy-yx)) = d(h(xy) – h(yx))$

$= d(h(x)y + xh(y) – h(y)x – yh(x))$

$= d([h(x),y] + [x,h(y)])$

$= d([h(x),y]) + d([x,h(y)])$

$= d(h(x)y – yh(x)) + d(xh(y) – h(y)x)$

$= d(h(x)y) – d(yh(x)) + d(xh(y)) – d(h(y)x)$

$= d(h(x))\sigma(y) + \tau(h(x))d(y) – d(y)\sigma(h(x)) – \tau(y)d(h(x)) + d(x)\sigma(h(y)) + \tau(x)d(h(y)) – d(h(y))\sigma(x) – \tau(h(y))d(x)$

ve buradan

$$[dh(x),y]_{\sigma,\tau} - [d(y),h(x)]_{\sigma,\tau} +[d(x),h(y)]_{\sigma,\tau} –[dh(y),x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \forall x,y\in R \quad (3.28)$$

(3.28) eşitliğinde y yerine h(y) alınır ve $dh(R)\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa her $x,y\in R$ için,

$= [dh(x),h(y)]_{\sigma,\tau} – [d(h(y)),h(x)]_{\sigma,\tau} + [d(x),h^2(y)]_{\sigma,\tau} – [dh^2(y),x]_{\sigma,\tau}$

$= [d(x),h^2(y)]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Lemma 3.1.8 kullanılarak $h^2(R)\subset Z$ ve Teorem 2.4.3 kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2 : R, 2-torsion free asal halka, $0 \neq d$: R→R, R nin bir (σ,τ) türevi ve her $x\in R$ için, $[d(x),x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman d = 0 veya R halkası komütatiftir.

İspat : Hipotezden her $x\in R$ için, $[d(x),x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dir. Bunu lineerleştirirsek $[d(x + y),x + y]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

$[d(x + y),x + y]_{\sigma,\tau} = [d(x) + d(y),x + y]_{\sigma,\tau}$

$= (d(x) + d(y))(\sigma(x) + \sigma(y)) – (\tau(x) + \tau(y))(d(x) + d(y))$

$= d(x)\sigma(x) + d(x)\sigma(y) + d(y)\sigma(x) + d(y)\sigma(y)– \tau(x)d(x) – \tau(x)d(y) – \tau(y)d(x) – \tau(y)d(y)$

$= [d(x),x]_{\sigma,\tau} + [d(x),y]_{\sigma,\tau} + [d(y),x]_{\sigma,\tau} + [d(y),y]$

ede edilir. $[d(x),x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ve $[d(y),y]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$[d(x),y]_{\sigma,\tau} + [d(y),x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall x,y \in R \tag{3.29}$$

bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned}[d(x),[y,x]]_{\sigma,\tau} &= [d(x),yx - xy]_{\sigma,\tau} \\ &= [d(x),yx]_{\sigma,\tau}\, [d(x),xy]_{\sigma,\tau} \\ &= \tau(y)[d(x),x]_{\sigma,\tau} + [d(x),y]_{\sigma,\tau}\sigma(x) - \tau(x)[d(x),y]_{\sigma,\tau} - [d(x),x]_{\sigma,\tau}\sigma(y) \\ &= [d(x),y]_{\sigma,\tau}\sigma(x) - \tau(x)[d(x),y]_{\sigma,\tau} \\ &= [[d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

sonuç olarak

$$[d(x),[y,x]]_{\sigma,\tau} = [[d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau},\ \forall x,y \in R \tag{3.30}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}d([y,x]) = d(yx - xy) &= d(yx) - d(xy) \\ &= d(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x) - d(x)\sigma(y) - \tau(x)d(y) \\ &= d(y)\sigma(x) - \tau(x)d(y) - (d(x)\sigma(y) - \tau(y)d(x)) \\ &= [d(y),x]_{\sigma,\tau} - [d(x),y]_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

bulunur.

(3.29) eşitliğinde y yerine [y,x] alınır, (3.30) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}[d(x),[y,x]]_{\sigma,\tau} + [d([y,x]),x]_{\sigma,\tau} &= [[d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} + [[d(y),x]_{\sigma,\tau} - [d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} \\ &= [[d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} + [[d(y),x]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} - [[d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

buradan her $x,y \in R$ için, $[[d(y),x]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. (3.29) eşitliği kullanılarak $[[d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} + [[d(y),x]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Buradan her $x,y \in R$ için, $[[d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ifade yeniden düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned}[[d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} &= [d(x)\sigma(y) - \tau(y)d(x),x]_{\sigma,\tau} \\ &= (d(x)\sigma(y) - \tau(y)d(x))\sigma(x) - \tau(x)(d(x)\sigma(y) - \tau(y)d(x)) \\ &= d(x)\sigma(y)\sigma(x) - \tau(y)d(x)\sigma(x) - \tau(x)d(x)\sigma(y) + \tau(x)\tau(y)d(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafına $d(x)\sigma(x)\sigma(y) + \tau(y)\tau(x)d(x)$ eklenip çıkartılırsa

$[[d(x),y]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} = [d(x),[y,x]]_{\sigma,\tau} + [[d(x),x]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau}$

ve hipotez kullanıldığında

$$[d(x),[y,x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall x,y \in R \tag{3.31}$$

elde edilir. $x \in R$ için, d(x) ile belirlenen (σ,τ)-iç türevi $I_{d(x)}(y)=[d(x),y]_{\sigma,\tau}$ ve x tarafından iç türevi $I_x(y)=[y,x]$ şeklinde tanımlanırsa (3.31) eşitliğini her $y \in R$ için, $I_{d(x)}I_x(y) \in C_{\sigma,\tau}$ şeklinde ifade edilebilir. Buradan $I_{d(x)}I_x(R) \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Lemma 3.3.1 kullanılarak $I_{d(x)}=(0)$ veya $I_x=(0)$ yani $x \in R$ için, $d(x) \in C_{\sigma,\tau}$ veya $x \in Z(R)$ olur. $A = \{x \in R \mid d(x) \in C_{\sigma,\tau}\}$ ve $B = \{x \in R \mid x \in Z(R)\}$ kümeleri tanımlansın. A ve B, R nin toplamsal alt grubudur. Yani $R = A \cup B$ dir. Brauer Trick'ten R = A veya R = B bulunur. Eğer R = B ise R halkası komütatiftir. Eğer R = A ise $d(R) \subset Z(R)$ ve Lemma 3.1.8 ve Lemma 3.1.2 kullanılarak R halkasının komütatif olduğu bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3 : R, 2-torsion free asal halka ve $(0) \neq U$, R nin bir ideali olsun. R, her $x,y \in U$ için, d(xy) = d(yx) şartını sağlayan (σ,τ)-türevini içeriyor ise R halkası komütatiftir.

İspat : Her $x,y \in U$ için, hipotezden d(xy) = d(yx) olduğundan bu ifade yeniden düzenlenirse

$0 = d(xy) - d(yx) = d(xy - yx) = d([x,y])$

elde edilir. Bu eşitlikte $z \in U$ için y yerine [y,z] alınırsa

$0 = d([x,[y,z]) = d([x,yz - zx]) = d(x(yz - zx) - (yz - zx)x) = [d(x),[y,z]]_{\sigma,\tau} - [d([y,z]),x]_{\sigma,\tau}$

elde edilir. Kabulümüzden d([y,z])=0 olduğundan

$$[d(x),[y,z]]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall x,y,z \in U \tag{3.32}$$

bulunur. (3.32) eşitliğinde $r \in R$ için, x yerine xr alınır ve (3.32) eşitliği kullanılırsa

$0 = [d(xr),[y,z]]_{\sigma,\tau}$

$= [d(x)\sigma(r) + \tau(x)d(r),[y,z]]_{\sigma,\tau}$

$= [d(x)\sigma(r),[y,z]]_{\sigma,\tau} + [\tau(x)d(r),[y,z]]_{\sigma,\tau}$

$= d(x)\sigma([r,[y,z]]) + [d(x),[y,z]]_{\sigma,\tau}\sigma(r) + \tau(x)[d(r),[y,z]]_{\sigma,\tau} + \tau([x,[y,z]])d(r)$

$= d(x)\sigma([r,[y,z]]) + \tau(x)[d(r),[y,z]]_{\sigma,\tau} + \tau([x,[y,z]])d(r)$

elde edilir. Her u,v,y,z $\in$ U için, r yerine [u,v] alınır ve d([u,v]) = 0 olduğu kullaılırsa

$0 = d(x)\sigma([[u,v],[y,z]]) + \tau(x)[d([u,v]),[y,z]]_{\sigma,\tau} + \tau([x,[y,z]])d([u,v])$

$\quad = d(x)\sigma([[u,v],[y,z]])$

bulunur. Lemma 3.1.3 kullanılarak her $x \in R$ için, d(x) = 0 veya her $u,v,y,z \in U$ için, $\sigma([[u,v],[y,z]]) = 0$ yani [[u,v],[y,z]] = 0 elde edilir. d $\neq$ 0 olduğundan her $u,v,y,z \in U$ için, [[u,v],[y,z]] = 0 elde edilir. Bu eşitlikte $u,v \in U$ için, y yerine [u,v] alınırsa [[u,v],[[u,v],z]] = 0 yani her $z \in U$ için $I^2_{[u,v]}(z) = (0)$ bulunur. Buradan $I^2_{[u,v]}(U) = (0)$ ve Ashraf ve Rehman (2002)' dan her $u,v \in U$ için, $[u,v] \in Z(R)$ elde edilir. v yerine $r \in R$ için [u,[u,r]] = 0 yani $I_u^2(R) = (0)$ bulunur. Teorem 2.4.3 kullanılarak R halkası komütatif bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

IV. BÖLÜM
GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE İDEALLER

Bu bölümde asal halkalarda onun bir U, Lie ve(σ,τ)-Lie idealinin hangi durumlarda $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olma koşulları ve buna bağlı olarak R asal halkasının hangi durumlarda komütatif olduğu incelenmiştir.

4.1 K. Kaya, (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings

Bu makalede R, char$R \neq 2$ olan bir asal halka ve $\sigma, \tau : R \to R$ otomorfizm olarak alınmıştır.

Lemma 4.1.1 : $d_1 : R \to R$, (σ,τ) türev, $d_2 : R \to R$, (α,α) türev ve $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_1\alpha = \alpha d_1$ ve α, R nin bir homomorfizmi olsun. Eğer $(0) \neq U$, R nin bir ideali olmak üzere $d_2(U) \subset U$ ve $d_1d_2(U) = (0)$ olduğunda $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat : $u,v \in U$ olduğunda $uv \in U$ olur ve kabulümüzden $d_1d_2(uv) = 0$ bulunur. Bu ifade yeniden düzenlenir ve $d_1d_2(U) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= d_1d_2(uv)\\
&= d_1(d_2(u)\alpha(v) + \alpha(u)d_2(v))\\
&= d_1(d_2(u)\alpha(v)) + d_1(\alpha(u)d_2(v))\\
&= d_1d_2(u)\sigma(\alpha(v)) + \tau(d_2(u))d_1(\alpha(v)) + d_1(\alpha(u))\sigma(d_2(v)) + \tau(\alpha(u))d_1d_2(v)
\end{aligned}
$$

ve buradan

$$\tau(d_2(u))d_1(\alpha(v)) + d_1(\alpha(u))\sigma(d_2(v)) = 0, \ \forall u,v \in U \tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) eşitliğinde u yerine $d_2(u)$ alınır ve α ile d_1 ve d_2 nin komütatif olduğu ve $d_1d_2(U) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\tau(d_2^2(u))d_1(\alpha(v)) = 0, \ \forall u,v \in U \tag{4.2}$$

bulunur. Lemma 3.1.3 kullanılarak her $u \in U$ için, $\tau(d_2^2(u)) = 0$ veya $d_1 = 0$ ve buradan $d_2^2(U) = 0$ veya $d_1 = 0$ elde edilir.

Kabul edelim ki $d_1 \neq 0$ olsun. O zaman $d_2 = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $d_2 = 0$ ise $d_2^2(U) = (0)$ olur. $u,v \in U$ için

$$
\begin{aligned}
0 = d_2^2(uv) &= d_2(d_2(uv)) \\
&= d_2(d_2(u)\alpha(v) + \alpha(u)d_2(v)) \\
&= d_2(d_2(u)\alpha(v)) + d_2(\alpha(u)d_2(v)) \\
&= d_2^2(u)\alpha^2(v) + \alpha(d_2(u))d_2(\alpha(v)) + d_2(\alpha(u))\,\alpha(d_2(v)) + \alpha^2(u)d_2^2(v) \\
&= \alpha(d_2(u))d_2(\alpha(v)) + d_2(\alpha(u))\,\alpha(d_2(v)) \\
&= 2\,d_2(\alpha(u))\,\alpha(d_2(v))
\end{aligned}
$$

charR $\neq 2$ olduğundan her $u,v \in U$ için, $d_2(\alpha(u))\alpha(d_2(v)) = 0$ elde edilir. Lemma 3.1.3 kullanılarak $d_2 = 0$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.2 : $(0) \neq U$, R nin bir ideali ve $a,b \in U$ olsun. Her $x \in U$ için $[a,[b,x]]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in C_{\sigma,\tau}$ veya $b \in Z$ dir.

İspat : $d_1 : R \to R$ (σ,τ) türev ve $d_2 : R \to R$ türev olsun. $d_2(U) \subset U$ dur. Çünkü $d_2(U) = [a,U] = aU - Ua \in U$ elde edilir ve buradan $d_1d_2(U) = (0)$ bulunur. Çünkü $[a,[b,x]]_{(\sigma,\tau)} = 0$ ve Lemma 4.1.1 kullanılarak $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ yani $a \in C_{\sigma,\tau}$ veya $b \in Z$ bulunur.

Lemma 4.1.3 : $0 \neq d$, R nin bir (σ,τ) türevi ve $(0) \neq U$, R nin bir ideali olsun. $a \in U$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : $a \in U$ olduğunda $a^2 \in U$ olur.

$$
\begin{aligned}
[d(a^2),a]_{\sigma,\tau} &= [d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a),a]_{\sigma,\tau} \\
&= (d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a))\sigma(a) - \tau(a)(d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a)) \\
&= d(a)\sigma(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a)\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma(a) - \tau(a)\tau(a)d(a) \\
&= [d(a),a^2]_{\sigma,\tau} \\
&= [d(a),aa]_{\sigma,\tau} \\
&= \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} + [d(a),a]_{\sigma,\tau}\,\sigma(a) \\
&= \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} + \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \\
&= 2\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

bulunur. charR $\neq 2$ olduğu kullanılarak

$$\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau} \tag{4.3}$$

elde edilir. Kaya (1988)' dan $\tau(a) \in Z$ veya $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur.

Eğer $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise

$$
\begin{aligned}
[d([a,u]),a]_{\sigma,\tau} &= [d(au - ua),a]_{\sigma,\tau} \\
&= [d(au),a]_{\sigma,\tau} - [d(ua),a]_{\sigma,\tau} \\
&= [d(a)\sigma(u) + \tau(a)d(u),a]_{\sigma,\tau} - [d(u)\sigma(a) + \tau(u)d(a),a]_{\sigma,\tau} \\
&= (d(a)\sigma(u) + \tau(a)d(u))\sigma(a) - \tau(a)(d(a)\sigma(u) + \tau(a)d(u)) - \\
&\quad (d(u)\sigma(a) + \tau(u)d(a))\sigma(a) + \tau(a)(d(u)\sigma(a) + \tau(u)d(a)) \\
&= d(a)\sigma(u)\sigma(a) + \tau(a)d(u)\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma(u) - \tau(a)\tau(a)d(u) - \\
&\quad d(u)\sigma(a)\sigma(a) - \tau(u)d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(u)\sigma(a) + \tau(a)\tau(u)d(a) \\
&= [[d(a),u]_{\sigma,\tau} - [d(u),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \\
&= [[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} - [[d(u),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

$[d(u),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $[[d(u),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ ve buradan

$$[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall u \in U \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) eşitliğinde u yerine au alınır ve $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= [[d(a),au]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \\
&= [\tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [[d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(u),a]_{\sigma,\tau} \\
&= [\tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \\
&= \tau(a)[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a), \tau(a)][d(a),u]_{\sigma,\tau} \\
&= \tau(a)[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{(\sigma,\tau)}, \forall u \in U
\end{aligned}
$$

bulunur. Kaya (1988)' dan

$$a \in Z \text{ veya } [[d(a),u]_{(\sigma,\tau)},a]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall u \in U \tag{4.5}$$

elde edilir.

Eğer $a \in Z$ ise ispat biter. $[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= [[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \\
&= [d(a),[u,a]]_{\sigma,\tau} + [[d(a),a]_{\sigma,\tau},u]_{\sigma,\tau} \\
&= [d(a),[u,a]]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

Öte yandan $d_{d(a)}(x) = [d(a),x]_{\sigma,\tau}$, (σ,τ)-türev ve $d_a(x) = [a,x]$, R nin türevi olmak üzere $d_a(U) = [a,U] \subset U$ ve $d_a d_{d(a)}(U) = d_a([d(a),a]_{\sigma,\tau}) = [a, [d(a),u]_{\sigma,\tau}]$

bulunur. $[d(a),x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $[a,[d(a),u]_{\sigma,\tau}] = 0$ ve dolayısıyla $d_a d_{d(a)}(U) = (0)$ elde edilir. Lemma 4.1.1 kullanılarak $d_{d(a)} = 0$ veya $d_a = 0$ olur. Yani $d_a \in C_{\sigma,\tau}$ veya a, R nin sıfırdan farklı idealini merkez yapar. Herstein (1976)' den $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ veya $a \in Z$ bulunur.

Eğer $a \in Z$ ise ispat biter. $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ ise kabulümüzden $[d(au),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ifade yeniden düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned}[d(au),a]_{\sigma,\tau} &= [d(a)\sigma(u), \tau(a)d(u),a]_{\sigma,\tau} \\ &= d(a)\sigma(u)\sigma(a) + \tau(a)d(u)\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma(u) - \tau(a)\tau(a)d(u) \\ &= d(a)(\sigma(ua) - \sigma(au)) + \tau(a)(d(u)\sigma(a) - \tau(a)d(u))\end{aligned}$$

ve buradan

$$d(a)(\sigma([u,a]) + \tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \forall u \in U \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) eşitliğini a ile komütatif yapar ve $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ ve $[d(u),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa

$0 = d(a)(\sigma([u,a]\sigma(a) + \tau(a)[d(u),a]_{(\sigma,\tau)}\sigma(a)) - \tau(a)d(a)\sigma([u,a]) - \tau(a)\tau(a)[d(u),a]_{(\sigma,\tau)} = d(a)\sigma([[u,a],a])$

bulunur. $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ ve R halkasının asal olması kullanıldığında $d(a) = 0$ veya $[a,[a,U]] = (0)$ bulunur.

Eğer $[a,[a,U]] = (0)$ ise $I_a^2(U) = (0)$ ve Lemma 4.1.1 kullanılarak $a \in Z$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer $d(a) = 0$ ise (4.6) eşitliğinden ilk terim sıfır olacağından her $u \in U$ için, $\tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ve Kaya (1988)' dan $\tau(a) \in Z$ ve buradan $a \in Z$ veya $[d(u),a]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir.

Eğer $a \in Z$ ispat tamamlanır

Eğer $[d(u),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise Aydın ve Kaya (1992)' dan $a \in Z$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 4.1.4 : d: R→R (σ,τ)-türev ve (0) $\neq$ M, R nin bir ideali ve $d(U) \subset U$ olsun. $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : Lemma 4.1.3 kullanılarak $d(U) \subset Z$ ve Lemma 3.1.2 kullanılarak R halkası komütatif bulunur.

Teorem 4.1.5 : d_1 : R→R (σ,τ)-türev, d_2: R→R türev ve (0) $\neq$ U, R nin bir ideali ve $d_2(U) \subset U$ olsun. Eğer $d_1d_2(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $u,v \in U$ için $[u,d_2(v)] \in U$ ve hipotezden $d_1d_2([u,d_2(v)]) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan her $u,v \in U$ için

$d_1d_2([u,d_2(v)]) = d_1(d_2(ud_2(v)) - d_2(d_2(v)u)) = d_1(d_2(u)d_2(v) + ud_2^2(v) - d_2^2(v)u - d_2(v)d_2(u))$
$= d_1([d_2(u),d_2(v)] - [d_2^2(v),u]) = d_1([d_2(u),d_2(v)]) - d_1([d_2^2(v),u])$
$= d_1(d_2(u))\sigma(d_2(v)) + \tau(d_2(u))d_1(d_2(v)) - d_1(d_2(v))\sigma(d_2(u)) - \tau(d_2(v))d_1(d_2(u)) - d_1(d_2^2(v))\sigma(u) - \tau(d_2^2(v))d_1(u) + d_1(u)\sigma(d_2^2(v)) + \tau(u)d_1(d_2^2(v))$
$= [d_1(u),d_2^2(v)]_{\sigma,\tau}$

ve böylece

$$[d_1(U),d_2^2(U)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau} \tag{4.7}$$

elde edilir. Lemma 4.1.3 ve (4.7) eşitliği kullanılarak $d_2^2(U) \subset Z$ bulunur. $u,v \in U$ için, $[u,v] \in U$ olduğundan $d_2^2([u,v]) \in Z$ olur. Buradan her $u,v \in U$ için,

$d_2^2([u,v]) = d_2([d_2(u),v] - [d_2(v),u]) = d_2(d_2(u)v - vd_2(u) - d_2(v)u + ud_2(v)) = -[d_2(v),d_2(u)] + [d_2(u),d_2(v)] = 2[d_2(u),d_2(v)]$

yani her $u,v \in U$ için, $2[d_2(u),d_2(v)] \subset Z$ ve buradan $[d_2(U),d_2(U)] \subset Z$ ve Lemma 4.1.4 kullanılarak R halkası komütatif bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.6 : U, R nin bir (σ,τ)-sağ Lie ideali olsun. $[U,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

İspat : Kabul edelim ki $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Bu durumda $a \notin C_{\sigma,\tau}$ ve $b \notin Z$ olacak biçimde $a,b \in U$ vardır. $d_a : R \to R$, $d_a(x) = [a,x]_{\sigma,\tau}$ (σ,τ) türev ve $d_b : R \to R$, $d_b(x) = [b,x]$ türev olsun. $x \in R$ için U, (σ,τ)-sağ Lie ideali olduğundan $[a,x]_{\sigma,\tau} \in U$ ve dolayısıyla kabulümüzden

$$[[a,x]_{\sigma,\tau},b]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \forall x \in R \tag{4.8}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.7 : $(0) \neq M$, R nin bir ideali ve $[M,R]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $[M,R]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise M, R nin bir (σ,τ)-sağ Lie idealidir. $a \in M$, $x,y \in R$ için

$0 = [ya,x]_{\sigma,\tau} = y[a,x]_{\sigma,\tau} + [\tau(y), \tau(x)]a = \tau[y,x]a, \ \forall x,y \in R, \ \forall a \in M$

Yani $\tau[R,R]M = (0)$ elde edilir. Buradan $[R,R] = (0)$ ve böylece R halkası komütatiftir.

Sonuç 4.1.8 : Her $x,y,z \in R$ için, $[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau} = 0$ ise R halkası komütatiftir.

Teorem 4.1.9 : $(0) \neq U$, R nin bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ise aşağıdakilerden bir tanesi sağlanır.

(i) $U \subset Z$

(ii) $U \subset C_{(\sigma,\tau)}$

(iii) U, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat : $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Teorem 4.1.6 kullanılarak $[U,U]_{\sigma,\tau} \neq (0)$ bulunur. Kabul edelim ki $u,v \in U$ ve $y \in R$ olsun. U, (σ,τ)-sağ ideal olduğundan $[u,\tau^{-1}(v)y]_{\sigma,\tau} \in U$ olur ve buradan $[u,\tau^{-1}(v)y]_{\sigma,\tau} = v[u,y]_{\sigma,\tau} + [u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)$ elde edilir. $v[u,y]_{(\sigma,\tau)} \in U$ olduğundan $[u,\tau^{-1}(v)] \in U$ bulunur. $UR \subset U$ olduğundan, her $u,v \in U$ ve $y \in R$ için, $[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau} R \subset U$ olur. Her $x,y \in R$ ve $u,v \in U$ için, $[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau} x\sigma(y) - \tau(y)[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y) \in U$ ve buradan $R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau} R \subset U$ elde edilir. Eğer $R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau} R = (0)$ ise $[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau} = (0)$ ve böylece her $u,v \in U$ ve $x \in R$ için, $0 = [[u,x]_{(\sigma,\tau)},\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau} = [[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} + [u,[x,\tau^{-1}(v)]]_{\sigma,\tau}$ ve buradan her $u,v \in U$ ve $x \in R$ için, $[[u,\tau^{-1}(v)],x]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur.
$d_u : R \to R$, $d_u(x) = [u,x]_{\sigma,\tau}$, (σ,τ) türev ve $d_{\tau^{-1}(v)} : R \to R$, $d_{\tau^{-1}(v)}(x) = [\tau^{-1}(v),x]$, R nin türevi olsun. O halde $d_u d_{\tau^{-1}(v)}(R) = (0)$ ve Lemma 4.1.1 kullanılarak $d_u = 0$ veya $d_{\tau^{-1}(v)} = 0$ yani $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya $U \subset Z$ bulunur. Bu ise baştaki kabulümüz ile çelişir. O halde $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya $U \subset Z$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

4.2 K. Kaya, H. Kandamar, N. Aydın, Generalized Jordan Structure of Prime Rings

Bu makalede R, char$R \neq 2$ olan bir halka, U, R nin bir (σ,τ)-sağ Jordan ideali, $\sigma, \tau : R \to R$ otomorfizm ve M, R nin bir ideali olarak alınmıştır.

Lemma 4.2.1 : R bir halka olmak üzere $a,b \in R$ ve $b, ab \in C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ veya $b = 0$ dır.

İspat : Kabul edelim ki $b, ab \in C_{\sigma,\tau}$ olsun. Her $x \in R$ için $0 = ab\sigma(x) - \tau(x)ab = a\tau(x)b - \tau(x)ab = [a,\tau(x)]b$ ve buradan her $y \in R$ için, $0 = [a,\tau(x)]b\sigma(y) = [a,\tau(x)]\tau(y)b$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında $[a,\tau(x)] = 0$ veya $b = 0$ yani $a \in Z$ veya $b = 0$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.2 : R bir halka ve $(0) \neq U$, R nin bir (σ,τ)-sağ Jordan ideali ise $2\tau[R,R]U \subset U$ ve $2U\sigma[R,R] \subset U$ dur.

İspat : $x,y\in R$ ve $u\in U$ olsun.

$(u,[x,y])_{\sigma,\tau} - ((u,x)_{(\sigma,\tau)},y)_{(\sigma,\tau)} + ((u,y)_{(\sigma,\tau)},x)_{(\sigma,\tau)} = u\sigma(x)\sigma(y) - u\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)\tau(y)u - \tau(y)\tau(x)u - u\sigma(x)\sigma(y) - \tau(x)u\sigma(y) - \tau(y)u\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)u + u\sigma(y)\sigma(x) + \tau(y)u\sigma(x) + \tau(x)u\sigma(y) + \tau(x)\tau(y)u = 2(\tau(x)\tau(y)u - \tau(y)\tau(x)u) = 2\tau[x,y]u$

elde edilir. Kabulümüzden her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için, $2\tau[x,y]u\in U$ yani $2\tau[R,R]U\subset U$ bulunur. Benzer şekilde $2U\sigma[R,R]\subset U$ elde edilir.

Lemma 4.2.3 : **(i)** $U\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatiftir.

(ii) $U\subset Z$ ise R halkası komütatiftir.

(iii) $a\in R$ ve $aU=0$ ($Ua=0$) ise $a=0$ dır.

İspat : (i)

Lemma 4.2.2 den $2\tau[R,R]U\subset U$ bulunmuştu. $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$2\tau[R,R]U\subset C_{\sigma,\tau} \tag{4.9}$$

elde edilir. Lemma 4.2.1 ve (4.9) eşitlikleri kullanılarak $U = (0)$ veya $[R,R]\subset Z$ bulunur. $U\neq(0)$ olduğundan $[R,R]\subset Z$ elde edilir. Herstein (1969)' den R halkası komütatif bulunur.

(ii) (i) kullanılarak $2\tau[R,R]U\subset U\subset Z$ olduğundan R halkası komütatiftir.

(iii) Her $x\in R$ ve $u\in U$ için, U, (σ,τ) sağ-Jordan ideal olduğundan $(u,x)_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Kabulümüzden

$$0 = a(u,x)_{\sigma,\tau} = a(u\sigma(x) + \tau(x)u) = au\sigma(x) + a\tau(x)u = a\tau(x)u$$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında $a = 0$ veya $U = (0)$ bulunur. $U \neq (0)$ olduğundan $a = 0$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.4 : Eğer U ideali komütatif ise R halkası komütatiftir.

İspat : $x,y\in R$ ve $u\in U$ için, $2\tau[x,y]u\in U$ ve U ideali komütatif olduğundan $[2\tau[x,y]u,v] = 0$ olur. Buradan

$$0 = [2\tau[x,y]u,v] = 2[\tau[x,y]u,v] = 2\tau[x,y][u,v] + 2[\tau[x,y],v]u$$

elde edilir. Tekrar $u\in U$ için, U idealinin komütatif olması kullanıldığında $[u,v] = 0$ olduğundan $2[\tau[x,y],v]u = 0$ ve $charR\neq 2$ olduğundan

$$[\tau[x,y],v]u=0,\ \forall x,y\in R,\ \forall u\in U \tag{4.10}$$

bulunur. τ ' nun otomorfizma olduğu kullanıldığında

$$[v, [x,y]]u = 0, \ \forall \ x,y \in R, \ \forall \ u \in U \tag{4.11}$$

elde edilir. Bu ise $U \subset Z$ demektir. Lemma 4.2.3 kullanılarak R halkası komütatif bulunur.

Lemma 4.2.5 : $a,b \in R$ olsun. $aUb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : Lemma 4.2.2 den $2\tau[R,R]U \subset U$ idi. $x,y \in R$, $u \in U$ için, $a2\tau[x,y]ub = 0$ olur. $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan

$$a\tau[x,y]ub = 0, \ \forall x,y \in R, \ \forall u \in U \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) eşitliğinde y yerine $y\tau^{-1}(a)$ alınırsa

$0 = a\tau[x,y\tau^{-1}(a)]ub = a\tau(y)\tau[x,\tau^{-1}(a)]ub + a\tau[x,y]aub$

$aub = 0$ olduğundan her $x,y \in R$, $u \in U$ için, $a\tau(y)\tau[x,\tau^{-1}(a)]ub = 0$ bulunur. Yani

$$aR\tau[x,\tau^{-1}(a)]Ub = (0), \ \forall x \in R \tag{4.13}$$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında $a = 0$ veya $\tau[x,\tau^{-1}(a)]Ub = (0)$ bulunur. Eğer $a = 0$ ise ispat biter. Eğer $\tau[x,\tau^{-1}(a)]Ub = (0)$ ise $u \in U$ için,

$$0 = \tau[x,\tau^{-1}(a)]ub = \tau(x)aub - a\tau(x)ub$$

bulunur. $aub = 0$ olduğundan her $x \in R$, $u \in U$ için, $-a\tau(x)ub = 0$ yani $aRUb = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında $a = 0$ veya $Ub = (0)$ bulunur. Eğer $a = 0$ ise ispat biter. Eğer $Ub = (0)$ ise Lemma 4.2.3 kullanılarak $b = 0$ olduğundan ispat tamamlanır.

Lemma 4.2.6 : $a \in R$ olsun.

(i) $(U,a)_{\sigma,\tau} = (0)$ ise $a \in Z$ dir.

(ii) $(a,R)_{\sigma,\tau} = (0)$ ise $a \in C_{\sigma,\tau}$ dir.

(iii) $(a,U)_{\sigma,\tau} = (0)$ ise $a \in Z$ veya $a \in C_{\sigma,\tau}$ dur.

İspat : (i) $x \in R$ ve $u \in U$ olsun. $[u,[a,x]]_{\sigma,\tau} = ((u,a)_{\sigma,\tau},x)_{\sigma,\tau} - ((u,x)_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau}$ dır. $(U,a)_{\sigma,\tau} = (0)$ olduğundan

$$[u,[a,x]]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall x \in R, \ \forall u \in U \tag{4.14}$$

elde edilir. $d_u(x) = [u,x]_{\sigma,\tau}$ R nin bir (σ,τ) türevi ve $d_a(x) = [a,x]$, R nin bir türevi olsun.

O halde (4.14) eşitliği $d_u d_a(R) = (0)$ şeklinde yazılır ve Lemma 4.1.1 kullanılarak $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya $a \in Z$ elde edilir. Eğer $a \in Z$ ise ispat biter. Eğer $U \subset C_{\sigma,\tau}$ ise Lemma 4.2.3 kullanılarak $a \in Z$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

(ii) Kabul edelim ki $x,y \in R$ olsun.

$$0 = (a,xy)_{\sigma,\tau} = \tau(x)(a,y)_{\sigma,\tau} + [a,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y)$$

bulunur. $y \in R$ için kabulümüzden $(a,y)_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan her $x,y \in R$ için, $[a,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y) = 0$ yani $[a,R]_{\sigma,\tau}R = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında $[a,R]_{\sigma,\tau} = (0)$ ve buradan $a \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

(iii) Kabul edelim ki $a \notin C_{\sigma,\tau}$ olsun. $y \in R$ için, $[a,y]u \in U$ olduğundan kabulümüzden

$$0 = (a,2[a,y]u)_{\sigma,\tau} = 2\tau[a,y](a,u)_{\sigma,\tau} + 2[a,[a,y]]_{\sigma,\tau}\sigma(u)$$

elde edilir. $(a,u)_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan $2[a,[a,y]]_{\sigma,\tau}\sigma(u) = 0$ ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan her $u \in U$ için, $[a,[a,y]]_{\sigma,\tau}\sigma(U) = (0)$ bulunur. Lemma 4.2.3 kullanılarak $a \in C_{\sigma,\tau}$ veya $a \in Z$ elde edilir. $a \notin C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $a \in Z$ bulunur.

Sonuç 4.2.7 : $(U,U)_{\sigma,\tau} = (0)$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : Lemma 4.2.6 dan $(U,U)_{\sigma,\tau} = (0)$ olduğundan $U \subset Z$ ve Lemma 4.2.3 kullanılarak $U \subset Z$ olduğundan R halkası komütatiftir.

Teorem 4.2.8 : $(U,U)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : $u,v,w,t \in U$ ve $x \in R$ olsun. $(u,v)_{\sigma,\tau} \in U$ ve $w[t,x] \in U$ olduğundan kabulümüzden $((u,v)_{\sigma,\tau},2w[t,x])_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

$$((u,v)_{\sigma,\tau},2\,w[t,x])_{\sigma,\tau} = \tau(w)((u,v)_{\sigma,\tau},2[t,x])_{\sigma,\tau} + 2[(u,v)_{\sigma,\tau},w]_{\sigma,\tau}\sigma[t,x]$$

$(u,v)_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $[(u,v)_{\sigma,\tau},w]_{\sigma,\tau} = 0$ olacağından $\tau(w)((u,v)_{\sigma,\tau},2[t,x])_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Lemma 4.2.2 den $2w[t,x] \in U$ ve buradan her $x \in R$ ve $t \in R$ için, $\tau(U)((U,U)_{\sigma,\tau},2[t,x])_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Her $y \in R$ için x yerine $[x,y]$ alınırsa

$$\tau(U)((U,U)_{\sigma,\tau},2[t,x])_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau} \qquad (4.15)$$

bulunur. $2[t,[x,y]] = 2t[x,y] - 2[x,y]t \in U$ olduğundan $((U,U)_{\sigma,\tau},2[t,[x,y]])_{\sigma,\tau} \subset (U,U)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Lemma 4.2.1 ve (4.15) eşitliği kullanılarak

$\tau(U) \subset Z$ veya $((U,U)_{\sigma,\tau}, 2[t,[x,y]])_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Eğer $\tau(U) \subset Z$ ise Lemma 4.2.3 den R halkası komütatif olur. Böylece ispat tamamlanır. Eğer her $t \in U$, $x, y \in R$ için, $((U,U)_{\sigma,\tau}, 2[t,[x,y]])_{\sigma,\tau} = 0$ ise $2((U,U)_{\sigma,\tau}, [t,[x,y]])_{\sigma,\tau} = 0$ olur. char$R \neq 2$ ve $(U,U)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $u,v \in U$ için

$$0 = ((u,v)_{\sigma,\tau}, [t,[x,y]])_{\sigma,\tau} = (u,v)_{\sigma,\tau}\,\sigma[t,[x,y]] + \tau[t,[x,y]](u,v)_{\sigma,\tau}$$
$$= (u,v)_{\sigma,\tau}\,\sigma[t,[x,y]]$$

elde edilir. $(u,v)_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $u,v,t \in U$ ve $x,y \in R$ için, $(u,v)_{\sigma,\tau} R \sigma[t,[x,y]] = (0)$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında $(U,U)_{\sigma,\tau} = (0)$ veya her $t \in U$ ve $x,y \in R$ için, $\sigma[t,[x,y]] = (0)$ olur. σ nun 1-1 olduğu kullanılırsa $(U,U)_{\sigma,\tau} = (0)$ veya $[t,[x,y]] = 0$ elde edilir. Eğer $(U,U)_{\sigma,\tau} = (0)$ ise Sonuç 4.2.7 den R halkası komütatiftir. Eğer her $t \in U$ ve $x,y \in R$ için, $[t,[x,y]] = 0$ ise Herstein (1976)' den $U \subset Z$ ve Lemma 4.2.3 den R halkası komütatiftir.

Lemma 4.2.9 : $(0) \neq M$, R nin bir sol ideali olsun. $(M,R)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatiftir.

İspat : Kabul edelim ki $(M,R)_{\sigma,\tau} = (0)$ olsun. $a,b \in M$ ve $r \in R$ için,

$$0 = (\tau(a)b,r)_{\sigma,\tau} = \tau(a)(b,r)_{\sigma,\tau} - [\tau(a),\tau(r)]b$$

elde edilir. Kabulümüzden $(b,r)_{\sigma,\tau} = 0$ olacağından her $a,b \in M$ ve $r \in R$ için, $[\tau(a),\tau(r)]b = 0$ yani $\tau[M,R]M = (0)$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında $[M,R] = (0)$ ve buradan $M \subset Z$ bulunur. Herstein (1976)' den R halkası komütatiftir. Böylece ispat tamamlanır. Şimdi de $(M,R)_{\sigma,\tau} \neq (0)$ olsun. $r,z \in R$ için, $(\tau(r)m,r)_{\sigma,\tau} \in M$ olduğundan

$$0 = [(\tau(r)m,r)_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau}$$
$$= [(\tau(r)(m,r)_{\sigma,\tau} - [\tau(r),\tau(z)]m, z]_{\sigma,\tau}$$
$$= [(\tau(r)(m,r)_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau}$$
$$= \tau(r)[(m,r)_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} + [\tau(r),\tau(z)](m,r)_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. $(m,r)_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $[(m,r)_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} = 0$ olacağından her $r,z \in R$ için, $[\tau(r),\tau(z)](m,r)_{\sigma,\tau} = 0$ yani

$$\tau[r, z](m,r)_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall\ r,z \in R \qquad (4.16)$$

elde edilir. Bir diğer taraftan $(M,R)_{\sigma,\tau} \neq (0)$ olduğundan $(m,r)_{\sigma,\tau} \neq 0$ olacak şekilde $m \in M$ ve $r \in R$ vardır.

O halde (4.16) eşitliğinden her $r,z \in R$ için $[r,z] = 0$ yani R halkası komütatif bulunur.

Teorem 4.2.10 : U, R nin iki yanlı (σ,τ)-Jordan ideali ve $U \not\subset Z$ olsun. U, R nin $(M,R)_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $(M,R)_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ şartını sağlayan bir M idealini kapsar.

İspat : $x \in R$ ve $u,v \in U$ olsun. M ideal olduğundan $2\tau(x)v \in M$ ve buradan U, (σ,τ)-Jordan ideal olduğundan $(2\tau(x)v,u)_{\sigma,\tau} \in U$ bulunur. O halde

$(2\tau(x)v,u)_{\sigma,\tau} = 2\tau(x)(v,u)_{\sigma,\tau} - 2[\tau(x),\tau(u)]v = 2\tau(x)(v,u)_{\sigma,\tau} - 2\tau[x,u]v$

elde edilir. $(M,R)_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğundan $(v,u)_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan ve U nun ideal olması kullanıldığında her $x \in R$ ve $u,v \in U$ için, $2\tau(x)(v,u)_{\sigma,\tau} \in U$ yani $2R(U,U)_{\sigma,\tau} \subset U$ bulunur. $x,y \in R$ ve $u,v \in U$ için, $2R(U,U)_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğundan $2x(v,u)_{\sigma,\tau}\sigma(y) + \tau(y)2x(v,u)_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Buradan $2R(U,U)_{\sigma,\tau}R \subset U$ elde edilir. Kabul edelim ki $2R(U,U)_{\sigma,\tau}R = (0)$ olsun. R halkasının asal olması kullanıldığında $(U,U)_{\sigma,\tau} = (0)$ bulunur. Sonuç 4.2.7 kullanılarak R halkası komütatif yani $U \subset Z$ bulunur. Bu ise $U \not\subset Z$ ile çelişir. O halde $2R(U,U)_{\sigma,\tau}R \neq (0)$ dır. $(M,R)_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğundan U, R nin sıfırdan farklı bir $M = R(U,U)_{\sigma,\tau}R$ idealini kapsar. Eğer $(M,R)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise Lemma 4.2.9 kullanılarak R halkası komütatif yani $U \subset Z$ bulunur. Bu ise $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde $(M,R)_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.11 : $a \in R$ olsun. $[U,a]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : $u \in U$ ve $x \in R$ olsun. U-sağ Jordan ideal olduğundan $(u,x)_{\sigma,\tau} \in U$ bulunur. $[(u,x)_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} - ([u,a]_{\sigma,\tau},x)_{\sigma,\tau} + (u,[x,a])_{\sigma,\tau} = 0$ ve $(u,x)_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan

$$(u,[x,a])_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall u \in U, \ \forall x \in R \tag{4.17}$$

elde edilir. Her $x \in R$, $u \in U$ için,

$0 = [(u,[x,y])_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = -[[u,[x,y]]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [2u\sigma([x,y]),a]_{\sigma,\tau}$

$= -[[u,[x,y]]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = [[u,a]_{\sigma,\tau},[x,y]]_{\sigma,\tau} - [u,[[x,y],a]_{\sigma,\tau}$

$= [u,[[x,y],a]_{\sigma,\tau}$

yani

$$[u,[[x,y],a]]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall u \in U, \ \forall x,y \in R \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.17) ve (4.18) eşitlikleri kullanılarak $u\sigma[[x,y],a] + \tau[[x,y],a]u = 0$ ve $u\sigma[[x,y],a] - \tau[[x,y],a]u = 0$ elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanır ve $charR \neq 2$ olduğu kullanılırsa her $x,y \in R$ için, $U\sigma([[x,y],a]) = (0)$ elde edilir. Lemma 4.2.3 kullanılarak $x,y \in R$ için, $[[x,y],a] = 0$ ve Herstein (1976)' den $a \in Z$ bulunur.

Teorem 4.2.12 : U, (σ,τ)-sağ Jordan ideal ve R nin alt grubu olsun. $U \not\subset Z$ ise U, R' nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat : $y \in R$ ve $u,v \in U$ için, U, (σ,τ)-sağ Jordan ideal olduğundan $(u,\tau^{-1}(v)y)_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Bu ifade yeniden düzenlenirse $(u,\tau^{-1}(v)y)_{\sigma,\tau} = v(u,y)_{\sigma,\tau} + [u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)$ yani her $u,v \in U$ ve $y \in R$ için, $\tau(r)[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y) \in U$ bulunur. Buradan her $y,r \in R$ ve $u,v \in U$ için, $[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)\sigma(r) + \tau(r)[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y) \in U$ olur. Son denklem kullanılarak $R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}R \subset U$ bulunur. Eğer $[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise Lemma 4.2.11 kullanılarak $U \subset Z$ bulunur. Bu ise $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde $R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}R$, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

4.3 N. Aydın, H. Kandamar, (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings

Bu makalede R, $charR \neq 2$ olan asal bir halka, U, R nin bir (σ,τ)-Lie ideali, $\sigma, \tau : R \to R$ otomorfizm ve M, R nin bir ideali olarak alınmıştır.

Lemma 4.3.1 : U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olsun. $a \in R$ için, $[U,a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat : $a \notin Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Bu durumda $u \notin C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde $u \in U$ vardır. Her $x \in R$ için $[U,a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $[u,a]_{\sigma,\tau} \in [U,a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ve buradan $[[u,a]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} = 0 \in C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Buradan

$$0 = [[u,a]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} = [u,[a,x]]_{\sigma,\tau} + [[u,x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \text{ bulunur.}$$

$[[u,x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $x \in R$, $u \in U$ için, $[u,[a,x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Bir diğer taraftan her $x \in R$ için, $d_u(x) = [u,x]_{\sigma,\tau}$, R nin bir (σ,τ)-türevi ve $d_a(x) = [a,x]$, R nin bir iç türevi olsun. Her $x \in R$ ve $u \in U$ için, $[u,[a,x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d_u d_a(R) \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d_u \neq 0$ ve $a \notin Z$ olduğundan $d_a \neq 0$ olur. Teorem 4.1.5 kulllanılarak R halkası komütatif yani $a \in Z$ elde edilir. Bu ise $a \notin Z$ olması ile çelişir. O halde $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Lemma 4.3.2 : $a \in R$ ve $aU = (0)$ (veya $Ua = (0)$) olsun.

(i) U, (σ,τ)-sol Lie ideal ise $a = 0$ veya $U \subset Z$

(ii) U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ise $a = 0$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat : (i) U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur. Kabulümüzden aU = (0) olduğundan her $x,y \in R$, $u \in U$ için, $a[xy,u]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Buradan
$0 = a[xy,u]_{\sigma,\tau} = a(x[y,\sigma(u)] + [x,u]_{\sigma,\tau}\, y) = ax[y,\sigma(u)] + a[x,u]_{\sigma,\tau}\, y = ax[y,\sigma(u)]$
elde edilir. Yani $aR[y,\sigma(u)] = (0)$ ve R halkasının asal olması kullanıldığında her $y \in R$ ve $u \in U$ için, a = 0 veya $[y,\sigma(u)] = 0$ ve buradan a = 0 veya $U \subset Z$ bulunur. Benzer biçimde U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için, $[xy,u]_{\sigma,\tau}\, a = 0$ olur. Buradan $0 = [xy,u]_{\sigma,\tau}\, a = x[y,u]_{\sigma,\tau}\, a + [x,\tau(u)]ya$ elde edilir. $[y,u]_{\sigma,\tau}\, a = 0$ olacağından her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için, $[x,\tau(u)]ya = 0$ yani $[x,\tau(u)]Ra = (0)$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$ ve $u \in U$ için, $[x,\tau(u)] = 0$ veya a = 0 elde edilir. Yani $U \subset Z$ veya a = 0 bulunur.

(ii) U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğundan $[U,R]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur. Kabulümüzden aU = (0) olduğundan her $x,y \in R$, $u \in U$ için, $a[u,xy]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Yani her $x, y \in R$, $u \in U$ için, $0 = a[u,xy]_{\sigma,\tau} = a\tau(x)[u,y]_{\sigma,\tau} + a[u,x]_{\sigma,\tau}\,\sigma(y) = a\tau(x)[u,y]_{\sigma,\tau}$ ve buradan $aR[u,y]_{\sigma,\tau} = (0)$ olur. R halkasının asal olması kullanıldığında a = 0 veya $[u,y]_{\sigma,\tau} = 0$ yani a = 0 veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur.

Teorem 4.3.3 : U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ve $a \in R$ olsun. [U,a] = (0) ise $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat : [U,a] = (0) ise her $u \in U$, $a \in R$ için, 0 = [u,a] = ua – au
ve buradan ua = au elde edilir. [U,a] = (0) olduğundan her $x \in R$ ve $u \in U$ için,
$[[u,x]_{\sigma,\tau},a] = 0$ olur. Yani

$$
\begin{aligned}
0 = [[u,x]_{\sigma,\tau},a] &= [u\sigma(x) - \tau(x)u,a] \\
&= u\sigma(x)a - \tau(x)ua - au\sigma(x) + a\tau(x)u \\
&= u\sigma(x)a - ua\sigma(x) - (-a\tau(x)u + \tau(x)au) \\
&= u[\sigma(x),a] - [a,\tau(x)]u
\end{aligned}
$$

Buradan

$$u[\sigma(x),a] = [\tau(x),a]u, \ \forall u \in U, \ \forall x \in R \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.19) eşitliğinde $y \in R$ için, x yerine xy alınır ve (4.19) eşitliği kullanılırsa
$u[\sigma(xy),a] = [\tau(xy),a]u$
yani

$0 = u[\sigma(xy),a] - [\tau(xy),a]u = u[\sigma(x)\sigma(y),a] - [\tau(x)\tau(y),a]u$

$= u([\sigma(x),a]\sigma(y) + \sigma(x)[\sigma(y),a]) - ([\tau(x),a]\tau(y) + \tau(x)[\tau(y),a])u$

$= u[\sigma(x),a]\sigma(y) + u\sigma(x)[\sigma(y),a] - [\tau(x),a]\tau(y)u - \tau(x)[\tau(y),a]u$

$= u\sigma(x)[\sigma(y),a] + u[\sigma(x),a]\sigma(y) - \tau(x)[\tau(y),a]u - [\tau(x),a]\tau(y)u$

$= (u\sigma(x) - \tau(x)u)[\sigma(y),a] + [\tau(x),a](u\sigma(y) - \tau(y)u)$

$= [u,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y),a] + [\tau(x),a][u,y]_{\sigma,\tau}$

yani

$$[u,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y),a]+[\tau(x),a][u,y]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall u\in U,\ \forall x\in R \qquad (4.20)$$

elde edilir. (4.20) eşitliğinde y yerine $\sigma^{-1}(a)$ alınırsa

$0 = [u,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(\sigma^{-1}(a)),a] + [\tau(x),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$

olur. Her $u\in U$, $x\in R$ için, $[\tau(x),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. Bu eşitlikte x yerine xy alınırsa

$$\begin{aligned}0 &= [\tau(xy),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}\\ &= [\tau(x)\tau(y),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}\\ &= ([\tau(x),a]\ \tau(y) + \tau(x)[\tau(y),a])[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}\\ &= \tau(x)[\tau(y),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} + [\tau(x),a]\tau(y)[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

$\tau(x)[\tau(y),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan $[\tau(x),a]\tau(y)[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x\in R$ için, $[\tau(x),a] = 0$ veya her $u\in U$ için, $[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0$ yani $a\in Z$ veya $[U,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = (0)$ bulunur. $(0) = [U,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise Lemma 4.3.1 kullanılarak $\sigma^{-1}(a)\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir.

Sonuç 4.3.4 : U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olsun. U ideali komütatif ise $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat : U ideali komütatif olduğundan [U,U] = (0) olur. Her $u\in U$ için, [U,u] = (0) olduğundan Teorem 4.3.3 kullanılarak her $u\in U$ için, $u\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ yani $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir.

Lemma 4.3.5 : R bir halka, $(0) \neq U$, (σ,τ)-sol Lie ideal, $T(U) = \{a\in R \mid [R,a]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ olsun. $R[T(U),\sigma(T(U))]\subset T(U)$ ve $[T(U),\tau(T(U))]R\subset T(U)$ dur.

İspat : İlk önce $T(U) = \{a\in R \mid [R,a]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ kümesinin alt halka ve (σ,τ)-sol Lie ideal olduğunu gösterelim. $a,b\in T(U)$ ve her $x\in R$ için,

$[x,a-b]_{\sigma,\tau} = [x,a]_{\sigma,\tau} - [x,b]_{\sigma,\tau}$ ve buradan U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[x,a-b]_{\sigma,\tau} \in U$ yani $a - b \in T(U)$ elde edilir. $a,b \in T(U)$, ve her $x \in R$ için, $[x,ab]_{\sigma,\tau} = [x\sigma(a),b]_{\sigma,\tau} + [\tau(b)x,a]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan $ab \in T(U)$ bulunur. O halde T(U) alt halkadır. $T(U) = \{a \in R \mid [R,a]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ olduğundan $[R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $U \subset T(U)$ olduğundan $[R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset T(U)$ yani T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal dir. T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olduğundan her $u,v \in T(U)$, $x \in R$ için, $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}] \subset U \subset T(U)$ yani $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}] \in T(U)$ olur. $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}] = [u,x\sigma(v) - \tau(v)x] = ux\sigma(v) - u\tau(v)x - x\sigma(v)u + \tau(v)xu \in T(U)$ bulunur. Bir diğer taraftan T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x \in R$, $u,v \in T(U)$ için, $[xu,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ elde edilir. $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}] \in T(U)$ ve $[xu,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olduğundan $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}] + [xu,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ bulunur. Buradan $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}] + [xu,v]_{\sigma,\tau} = ux\sigma(v) - u\tau(v)x - x\sigma(v)u + \tau(v)xu + xu\sigma(v) - \tau(v)xu = ux\sigma(v) - u\tau(v)x - x\sigma(v)u + xu\sigma(v) = u[x,v]_{\sigma,\tau} - x[\sigma(v),u] \in T(U)$ elde edilir. $u[x,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olduğundan $-x[\sigma(v),u] \in T(U)$ bulunur. O halde $R[T(U),\sigma(T(U))] \subset T(U)$ elde edilir. T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $u,v \in T(U)$, $x \in R$ için, $[ux,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ ve buradan $[xu,v]_{\sigma,\tau} = u[x,v]_{\sigma,\tau} + [u,\tau(v)]x \in T(U)$ bulunur. $u[x,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olduğundan $[u,\tau(v)]x \in T(U)$ ve böylece $[T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U)$ elde edilir.

Lemma 4.3.6 : $(0) \neq U$, (σ,τ)-sol Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. $a, b \in R$ için, $aT(U)b = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $u \in U$, $v \in T(U)$ ve $y \in R$ için, $[uby,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olur. $aT(U)b = (0)$ olduğundan $a[uby,v]_{\sigma,\tau}b = 0$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= a[uby,v]_{\sigma,\tau}b \\
&= a(ub[y,v]_{\sigma,\tau} + [ub,\tau(v)]y)b = aub[y,v]_{\sigma,\tau}b + a[ub,\tau(v)]yb \\
&= a[ub,\tau(v)]yb \\
&= a(ub\tau(v) - \tau(v)ub)yb \\
&= aub\tau(v)yb - a\tau(v)ubyb \\
&= -a\tau(v)ubyb
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $v \in T(U)$, $u \in U$ için, $a\tau(T(U))UbRb = (0)$ ve R halkasının asal olması kullanıldığında $a\tau(T(U))Ub = (0)$ ve $b = 0$ bulunur. Eğer $b = 0$ ise ispat biter. Eğer

$$a\tau(T(U))Ub = (0), \ \forall x \in R, u \in U, v \in T(U) \tag{4.21}$$

ise

$0 = a\tau(v)[u,x]_{\sigma,\tau}b = a\tau(v)u\sigma(x)b - a\tau(v)\tau(x)ub$

elde edilir. Bu ifadede x yerine $\sigma^{-1}(bx)$ alınır ve (4.21) eşitliği kullanılırsa

$0 = a\tau(v)u\sigma(\sigma^{-1}(bx))b - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(bx))ub$

$= a\tau(v)u\,bxb - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub$

$= - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub$

bulunur. $a\tau(T(U))Ub = (0)$ olduğundan her $v \in T(U)$ ve $u \in U$ için, $a\tau(v)ub = 0$ ve her $x \in R$ için, $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub = 0$ olduğundan $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(R))ub = (0)$ ve burada σ ve τ nun örtenliği kullanılırsa $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))RUb = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0 \text{ veya } Ub = (0) \tag{4.22}$$

bulunur. Eğer $Ub = (0)$ ise $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lemma 4.3.2 kullanılarak $b = 0$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. Eğer

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0, \ \forall \ v \in T(U) \tag{4.23}$$

ise Lemma 4.3.5 den U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[U,\tau(T(U))]R \subset T(U)$ yani $[R,[U,\tau(T(U))]R]_{\sigma,\tau} \subset [R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U \subset T(U)$ ve buradan her $x,y \in R$, $u \in U$ ve $v \in T(U)$ için, $[\tau(x),[u,\tau(v)]y]_{\sigma,\tau} = \tau(x)\sigma([u,\tau(v)]y) - \tau([u,\tau(v)]y)\tau(x) \in U \subset T(U)$ elde edilir. $aT(U)b = (0)$ olduğundan

$0 = a[\tau(x),[u,\tau(v)]y]_{\sigma,\tau}b = a\tau(x)\sigma([u,\tau(v)]y)b - a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x)b$

bulunur. Bu ifadede x yerine $x\sigma^{-1}(b)z$ alınırsa

$0 = a\tau(x\sigma^{-1}(b)z)\sigma([u,\tau(v)]y)b - a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x\sigma^{-1}(b)z)b$

$= a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b)\tau(z)\sigma([u,\tau(v)]y)b - a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b)\tau(z)b$

elde edilir. $[u,\tau(v)]yx \in [U,\tau(T(U))]R \subset T(U)$ ve (4.23) eşitliği kullanılarak $a\tau([u,\tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b) \in a\tau(T(U))\tau(\sigma^{-1}(b)) = (0)$ bulunur. Buradan her $x,y,z \in R$, $u \in U$ ve $v \in T(U)$ için, $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b)\tau(z)\sigma([u,\tau(v)]\sigma(y)b = 0$ elde edilir. σ'nun örten olması kullanıldığında $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b)\tau(z)\sigma([u,\tau(v)]Rb = (0)$ ve R halkasının asal olması kullanıldığında $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b)\tau(z)\sigma([u,\tau(v)] = 0$ veya $b = 0$ bulunur. Buradan $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))R\sigma([u,\tau(v)] = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında $a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0$ veya $\sigma([u,\tau(v)] = 0$ veya $b = 0$ elde edilir. τ, örten olduğundan $aR\tau(\sigma^{-1}(b)) = (0)$ veya $\sigma([u,\tau(v)]) = 0$ veya $b = 0$ bulunur. Buradan $a = 0$ veya

$\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0$ veya $\sigma([u,\tau(v)] = 0$ veya $b = 0$ olur. Eğer $\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0$ ise $b = 0$ elde edilir. Eğer $\sigma([u,\tau(v)]) = 0$ ise her $u \in U$ için, $[u,\tau(v)] = 0$ yani $[U,\tau(v)] = (0)$ olur. Teorem 4.3.3 kullanılarak $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ise $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olması ile çelişir. Yani $[U,\tau(U)] \neq (0)$ olmalıdır. Buradan $a = 0$ veya $b = 0$ elde edilir.

Teorem 4.3.7 : U, (σ,τ)-Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde R nin $(0) \neq M$ ideali vardır.

İspat : U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan Lemma 4.3.5 den $[T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U)$ ve $R[T(U),\sigma(T(U))] \subset T(U)$ olur. Bir diğer taraftan T(U), R nin alt grubu olduğundan her $y \in R$, $w,z \in T(U)$ için, $y[w,\sigma(z)] \in R[T(U),\sigma(T(U))] \subset T(U)$ ve her $x \in R$, $u,v \in T(U)$ için $[u,\tau(v)]x \in [T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U)$ buradan $y[w,\sigma(z)][u,\tau(v)]x \in T(U)$ yani $R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U)$ elde edilir. Eğer $R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]R = (0)$ ise R halkasının asal olması kullanıldığında $[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))] = (0)$ yani,

$$[u,\sigma(v)]T(U)[t,\tau(z)] = (0),\ \forall\, u,v,w,z \in T(U) \tag{4.24}$$

olur. Lemma 4.3.6 dan $[T(U),\sigma(T(U))] = (0)$ veya $\in [T(U),\tau(T(U))] = (0)$ olur. $U \subset T(U)$ olduğundan $[U,\sigma(U)] = (0)$ veya $[U,\tau(U)] = (0)$ olur. $a,b \in U$ için, $[U,\sigma(a)] = (0)$ veya $[U,\tau(b)] = (0)$ olduğundan Lemma 4.3.3 den $\sigma(a) \in Z$ veya $\tau(b) \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan $a \in Z$ veya $b \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. bu ise $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olması ile çelişir. Bu yüzden T(U), $(0) \neq M$ idealini kapsar. Yani $M = R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]R \neq (0)$ olur. Yani $M \subset T(U)$ elde edilir. T(U) nun tanımından $[R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve buradan $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset [R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U$ bulunur. Yani $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset T(U)$ elde edilir. $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. R, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan Lemma 4.3.1 den $M \subset Z$ veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani R komütatif veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. R komütatif ise $U \subset Z$ ve $R \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ise $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olması ile çelişir. O halde $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir.

Sonuç 4.3.8 : $(0) \neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve $a,b \in R$ için $aUb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat : $(0) \neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Teorem 4.3.7 den R' nin $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde $(0) \neq M$ ideali vardır. Bu yüzden $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğundan her $x \in R$, $u \in U$ ve $m \in M$ için, $[x,\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. $aUb = (0)$ olduğundan $a[x,\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau}b = 0$ olur. Yani

$0 = a[x, \tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau}\, b = ax\sigma(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m)b - a\tau(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m)xb$
$= ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b - a\tau(\tau^{-1}(u))\tau(\tau^{-1}(b))\tau(m)xb$
$= ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b - aub\tau(m)xb$
$= ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b$

elde edilir. Buradan

$$aR\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = (0),\ \forall\ x\in R,\ u\in U \text{ ve } m\in M \tag{4.25}$$

bulunur. R halkasının asal olmasından a = 0 veya $\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = 0$ elde edilir. Eğer $\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = 0$ ise

$0 = \sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = \sigma(\tau^{-1}(ub))\sigma(m)b = \sigma(\tau^{-1}(ub))m\sigma^{-1}(b))$ olur. σ, 1-1 olduğundan $\tau^{-1}(ub))m\sigma^{-1}(b) = 0$ yani $\tau^{-1}(ub))M\sigma^{-1}(b) = (0)$ elde edilir. M ideal ve R asal olduğundan $\tau^{-1}(ub) = 0$ veya $\sigma^{-1}(b) = 0$ olur. τ ve σ, 1-1 olduğundan her $u\in U$ için ub = 0 veya b = 0 bulunur. Buradan Ub = (0) veya b = 0 elde edilir. Eğer Ub = (0) ise $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lemma 4.3.2 den b = 0 bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

4.4 N. Aydın, M. Soyturk, (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings With Derivation

Bu makalede R, charR $\neq$ 2 olan asal bir halka, U, R nin bir (σ,τ)-Lie ideali, $\sigma, \tau : R\rightarrow R$ otomorfizm ve d, bir türev olarak alınmıştır.

Lemma 4.4.1 : $(0) \neq U$, R nin $U\subset C_{\sigma,\tau}$ şartını sağlayan (σ,τ)-sol Lie ideali ise $U\subset Z$ dir.

İspat : U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x\in R$ ve $u\in U$ için $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Buradan

$[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau} = \tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} + [\tau(u),\tau(u)]x$

$[\tau(u),\tau(u)] = 0$ olacağından

$$\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall x\in R,\ \forall u\in U \tag{4.26}$$

elde edilir. Lemma 4.2.1 den

$$\tau(u)\in Z \text{ veya } [x,u]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall x\in R \tag{4.27}$$

bulunur.

Eğer her $x \in R$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $y \in R$ için x yerine xy alınırsa

$$0 = [xy,u]_{\sigma,\tau} = x[y,u]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(u)]y$$

elde edilir. Kabulümüzden $[y,u]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan her $x,y \in R$ için, $[x,\tau(u)]y = 0$ ve buradan her $x \in R$ için, $[x,\tau(u)]R = (0)$ olur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$ için, $[x,\tau(u)] = 0$ yani $[R,\tau(u)] = (0)$ yani her $u \in R$ için, $\tau(u) \in Z$ bulunur Herstein (1976)' den $U \subset Z$ elde edilir.

Teorem 4.4.2 : $(0) \neq U$, R nin bir (σ,τ)-sağ Lie ideali olsun. $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası komütatif veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat : U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olduğundan her $x \in R$ ve her $u \in U$ için, $[u,x]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= [d([u,x]_{\sigma,\tau}),y]_{\sigma,\tau} \\ &= [d(u\sigma(x) - \tau(x)u),y]_{\sigma,\tau} \\ &= [d(u\sigma(x)) - d(\tau(x)u),y]_{\sigma,\tau} \\ &= [d(u)\sigma(x) + ud(\sigma(x)) - d(\tau(x)u) - \tau(x)d(u),y]_{\sigma,\tau} \\ &= [d(u)\sigma(x) - \tau(x)d(u),y]_{\sigma,\tau} + [ud(\sigma(x)) - d(\tau(x))u,y]_{\sigma,\tau} \\ &= [[d(u),x]_{\sigma,\tau},y] + [[u,d(x)]_{\sigma,\tau},y] \end{aligned}$$

bulunur. Burada ilk terim $[d(u),x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan sıfıra eşit olacağından her $x,y \in R$, $u \in U$ için, $[[u,d(x)]_{\sigma,\tau},y] = 0$ yani $[[u,d(x)]_{\sigma,\tau},R] = (0)$ ve buradan $[u,d(x)]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. $[U,d(x)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lemma 4.3.1 den $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya her $x \in R$ için, $d(x) \in Z$ olur. Eğer $U \subset C_{\sigma,\tau}$ ise ispat biter. Eğer her $x \in R$ için, $d(x) \in Z$ ise $d(R) \subset Z$ ve Herstein (1979) den R halkası komütatiftir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.4.3 : $(0) \neq U$, (σ,τ)-Lie ideal olmak üzere $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U \subset Z$ olur.

İspat : $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise Teorem 4.4.2 den R halkası komütatif veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. $U \subset C_{\sigma,\tau}$ ise Lemma 4.4.1 den $U \subset Z$ elde edilir.

Lemma 4.4.4 : $(0) \neq U$ (σ,τ)-Lie ideal olmak üzere $a \in R$ için, $d(U)a = (0)$ (veya $ad(U) = (0)$) ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $U \not\subset Z$ olsun. Sonuç 4.4.3 den $d(U) \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d(U) \neq (0)$ olur. U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan her $x \in R$ ve $u \in U$ için, $[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Buradan

$[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau} = \tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} + [\tau(u),\tau(u)]x = \tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} \in U$ elde edilir. Hipotezden

$0 = d(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau})a$

$= d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}a + \tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau})a = d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}a$

bulunur. Her $x \in R$ için, $d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}a = 0$ olacağından x yerine $v \in U$ için, $xd(v)$ alınır ve hipotez kullanılırsa

$0 = d(\tau(u))[xd(v),u]_{\sigma,\tau}a$

$= d(\tau(u))x[d(v),u]_{\sigma,\tau}a + d(\tau(u))[x,\tau(u)]d(v)a$

$= d(\tau(u))x[d(v),u]_{\sigma,\tau}a, \ \forall x \in R$

$= d(\tau(u))R[d(v),u]_{\sigma,\tau}a$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanılarak $d(\tau(u)) = 0$ veya $[d(v),u]_{\sigma,\tau}a = 0$ bulunur. her $u \in U$ için, $d(\tau(u)) = 0$ ise $\tau(d(u)) = 0$ olur ve τ, 1-1 olduğundan $d(u) = 0$ bulunur. Sonuç olarak $d(u) = 0$ veya $[d(v),u]_{(\sigma,\tau)}a = 0$ elde edilir. $L = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$ ve $K = \{u \in U \mid [d(v),u]_{\sigma,\tau}a = 0, \ \forall u \in U\}$ kümelerini tanımlayalım. L ve K, U' nun toplamsal alt grubudur. Yani $U = K \cup L$ dir. Brauer Trick'ten L = U veya K = U bulunur. Eğer L = U ise d(U) = (0) olur. Bu ise $d \neq 0$ olması ile çelişir. O halde K = U dur. Yani her $u,v \in U$ için, $[d(v),u]_{\sigma,\tau}a = 0$ olur. Buradan

$$0 = [d(v),u]_{\sigma,\tau}a = d(v)\sigma(u)a - \tau(u)d(v)a$$

olur. Hipotezden $d(v)a = 0$ olacağından $d(v)\sigma(u)a = 0$ elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına σ^{-1} uygulanır ve σ^{-1} in homomorfizma olduğu kullanılırsa her $u,v \in U$ için, $\sigma^{-1}(d(v))u\sigma^{-1}(a) = 0$ ve buradan her $v \in U$ için, $\sigma^{-1}(d(v))U\sigma^{-1}(a) = (0)$ elde edilir. Lemma 4.3.6 dan $\sigma^{-1}(d(v)) = 0$ veya $\sigma^{-1}(a) = 0$, σ^{-1} homomorfizma olduğu için $d(v) = 0$ veya $a = 0$ bulunur. $d \neq 0$ olduğundan $d(v) \neq 0$ olacağından $a = 0$ elde edilir.

Lemma 4.4.5 : $(0) \neq U$, R nin (σ,τ)-Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) = (0)$ ise $d(U) \subset Z$ dir.

İspat : U, (σ,τ)- Lie ideal olduğundan, her $x \in R$ ve her $u \in U$ için, $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} \in U$ ve $d^2(U) = (0)$ olduğu kullanılırsa

$0 = d^2(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}) = d(d(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}))$

$= d(d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau} + \tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau}))$

$= d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau} + d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + \tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau})$

$= d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau} + 2d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + \tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau})$

olur. $d^2(U) = (0)$ olduğundan $d^2(\tau(u)) = \tau(d^2(u)) = 0$ ve $\tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau}) = 0$ olduğundan $2d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) = 0$ olur. $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan

$$d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) = 0,\ \forall x \in R,\ \forall u \in U \tag{4.28}$$

elde edilir. (4.28) eşitliğinde her $u \in U$ için, u yerine $u + d(v)$ alınır, d ile τ nun komütatif ve $d^2(U) = (0)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d(\tau(u + d(v)))d([x, u + d(v)]_{\sigma,\tau}) \\ &= d(\tau(u)) + d(\tau(d(v)))(d[x,u]_{\sigma,\tau} + d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) \\ &= d(\tau(u))(d([x,u]_{\sigma,\tau}) + d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})) \\ &= d(\tau(u))(d([x,u]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(u))(d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) \end{aligned}$$

bulunur. Burada ilk terim (4.28) eşitliğinden dolayı sıfır olacağından $\tau(d(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) = 0$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına τ^{-1} uygulanır ve τ ' nun 1-1 olduğu kullanılırsa

$$d(u)\tau^{-1}(d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) = 0,\ \forall x \in R,\ \forall u,v \in U \tag{4.29}$$

bulunur. Lemma 4.4.4 den her $u \in U$ için, $u \in Z$ veya $\tau^{-1}(d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) = 0$ bulunur. Buradan

$$U \subset Z \text{ veya } d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) = 0,\ \forall x \in R,\ \forall u \in U \tag{4.30}$$

elde edilir.

Eğer $U \subset Z$ ise $d(U) \subset Z$ olacağından ispat biter.

Eğer her $x \in R$ ve $u \in U$ için, $d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) = 0$ ise

$0 = d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) = d(x\sigma(d(v)) - \tau(d(v))x) = d(x\sigma(d(v))) - d(\tau(d(v))x) = d(x)\sigma(d(v)) + xd((\sigma(d(v))) - d(\tau(d(v)))x - \tau(d(v))d(x)$

bulunur. Burada d ile σ ve τ ' nun komütatif olduğu ve $d^2(U) = (0)$ olduğu kullanılırsa

$$[d(x),d(v)]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall x \in R,\ \forall u \in U \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.31) eşitliğinde $u \in U$ için, x yerine $xd(u)$ alınır, $d^2(U) = (0)$ ve (4.31) eşitlikleri kullanılırsa

$0 = [d(xd(u)),d(v)]_{\sigma,\tau} = [d(x)d(u) + xd^2(u),d(v)]_{\sigma,\tau} = [d(x)d(u),d(v)]_{\sigma,\tau}$

$= d(x)[d(u),d(v)]_{\sigma,\tau} + [d(x),\tau(d(v))]d(u) = [d(x),\tau(d(v))]d(u)$

ve buradan her $x \in R$ için, $[d(x),\tau(d(v))]d(U) = (0)$ bulunur. Lemma 4.4.4 den her $x \in R$ her $v \in U$ için, $[d(x),\tau(d(v))] = 0$ veya $U \subset Z$ olur.

Eğer $U \subset Z$ ise $d(U) \subset Z$ olacağından ispat biter.

Eğer her $v \in U$ için, $[d(R),\tau(d(v))] = (0)$ ise Herstein (1976) den her $v \in U$ için, $\tau(d(v)) \in Z$ olur. Buradan her $v \in U$ için $d(v) \in Z$ yani $d(U) \subset Z$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.6 : $(0) \neq U$, R nin (σ,τ)-Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) = (0)$ ise $U \subset Z$ olur.

İspat : Kabul edelim ki $U \not\subset Z$ olsun. (4.28) eşitliğinde u yerine $v \in U$ için, u + v alınır ve (4.28) eşitliği kullanılırsa

$0 = d(\tau(u + v))d([x,u + v]_{\sigma,\tau})$

$= d(\tau(u) + \tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau} + [x,v]_{\sigma,\tau})$

$= d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau} + d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau} + d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau} + d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}$

$= d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau} + d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau}$

bulunur. Bulunan bu ifade $u \in U$ için, soldan $d(\tau(u))$ ile çarpılırsa

$(d(\tau(u)))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau} + d(\tau(v))d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. $d^2(U) = (0)$ olduğundan $d^2(\tau(U)) = \tau(d^2(U)) = \tau(0) = (0)$ olur ve Lemma 4.4.5 den $d(\tau(U)) \subset Z$ bulunur. $d(\tau(U)) \subset Z$ ve (4.28) eşitliği kullanılacak olursa

$$(d(\tau(u)))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall x \in R, \ \forall u, v \in U \tag{4.32}$$

elde edilir. Her $x \in R$, $v \in U$ için, $[x\sigma(v),v]_{\sigma,\tau} \in [R,U]_{\sigma,\tau}$ olduğundan $[x\sigma(v),v]_{\sigma,\tau} = x[\sigma(v),\sigma(v)]_{\sigma,\tau} + [x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v) = [x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v) \in [R,U]_{\sigma,\tau}$ bulunur. (4.32) eşitliği kullanılarak $(d(\tau(u)))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v) = 0$ olur. $(d(\tau(u)))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau})\sigma(v) + (d(\tau(u)))^2 [x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v)) = 0$ bulunur. Tekrar (4.32) eşitliği kullanılarak

$$d(\tau(u)))^2 [x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))=0, \ \forall u, v \in U, \ \forall x \in R \tag{4.33}$$

bulunur. $w \in U$ için, v yerine v + w alınırsa

$0 = d(\tau(u)))^2 [x,u + v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u + v)) = d(\tau(u)))^2 ([x,v]_{\sigma,\tau} + [x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v) + \sigma(w))=d(\tau(u)))^2([x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(w))+d(\tau(u)))^2[x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(w))+d(\tau(u)))^2([x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))+ d(\tau(u)))^2 ([x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(w))$

elde edilir. (4.32) eşitiği kullanılarak $d(\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v)) = (0)$ ve $d(\tau(u))^2 [x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v)) = (0)$ olduğundan

$d(\tau(u))^2([x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(w)) + d(\tau(u))^2([x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v)) = 0, \forall u,v,w \in U, \forall x \in R$(4.34)

bulunur. (4.34) eşitliği sağdan $d(\sigma(v))$ ile çarpılarak

$0 = d(\tau(u))^2([x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(w))d(\sigma(v)) + d(\tau(u))^2([x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))d(\sigma(v))$ elde edilir. $d^2(\sigma(U)) = (0)$ olduğundan Lemma 4.4.5 kullanılarak $d(\sigma(U)) \subset Z$ bulunur. Her $w \in U$ için, $d(\sigma(w)) \in Z$ olduğundan (4.33) eşitliğinden

$0 = d(\tau(u))^2([x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(w))d(\sigma(v)) + d(\tau(u))^2([x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))d(\sigma(v))$

$= d(\tau(u))^2([x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))d(\sigma(w)) + d(\tau(u))^2([x,w]_{\sigma,\tau} (d(\sigma(v)))^2$

ve buradan

$$d(\tau(u))^2([x,w]_{\sigma,\tau} (d(\sigma(v)))^2=0, \ \forall u, v, w \in U, \ \forall x \in R \qquad (4.35)$$

elde edilir. (4.35) eşitliğinde $a \in U$, $y \in R$ için, x yerine $d([x,a]\sigma,\tau)y$ alınırsa

$0 = d(\tau(u))^2([d([x,a]\sigma,\tau)y,w]_{(\sigma,\tau)}(d(\sigma(v)))^2$

$= (d(\tau(u))^2([d([x,a]\sigma,\tau)y\sigma(w) - \tau(w)d(\tau(u))^2([d([x,a]\sigma,\tau)y)(d(\sigma(v)))^2$

$= d(\tau(u))^2([d([x,a]\sigma,\tau)y\sigma(w)d(\sigma(v))^2 - d(\tau(u))^2\tau(w)([d([x,a]\sigma,\tau)y)(d(\sigma(v)))^2$

bulunur. (4.32) eşitliğinde $d(\tau(u))^2([d([x,v]\sigma,\tau) = 0$ olduğu kullanılırsa

$(d(\tau(u))^2\tau(w)([d([x,a]\sigma,\tau)y(d(\sigma(v)))^2 = 0, \forall u,v,w \in U, \forall x,y \in R$ ve buradan $(\tau(u))^2\tau(w)([d([x,a]\sigma,\tau)R(d(\sigma(v)))^2 = (0), \ \forall u,v,w \in U, \forall x \in R$ olur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $u,v,w \in U$, her $x \in R$ için, $(d(\tau(u))^2\tau(w)([d([x,a]\sigma,\tau) = 0$ veya $(d(\sigma(v)))^2 = 0$ elde edilir. Yani $(d(\tau(U))^2\tau(U)([d([R,U]\sigma,\tau) = 0$ veya $(d(\sigma(U)))^2 = 0$ ve buradan $(\tau(d(U))^2\tau(U)([d([R,U]\sigma,\tau) = 0$ veya $(\sigma(d(U)))^2 = 0$ bulunur. Burada birinci eşitliğe τ^{-1} ve ikinci eşitliğe σ^{-1} uygulanır ve τ ve σ nun 1-1 olduğu kullanılırsa $d^2(U)U\tau^{-1}([d([R,U]\sigma,\tau) = 0$ veya $d^2(U) = 0$ ve Lemma 4.3.6 kullanılarak $d^2(U) = (0)$ veya $d([R,U]\sigma,\tau) = 0$ elde edilir.

Eğer $(d(U))^2 = (0)$ ise her $u,v \in U$ için

$$0 = (d(u + v))^2 = (d(u) + d(v))^2 = (d(u))^2 + 2d(u)d(v) + (d(v))^2$$

$(d(U))^2 = (0)$ ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğu kullanılırsa $d(U)d(U) = (0)$ olur. Lemma 4.4.4 den $d(U) = (0)$ veya $U \subset Z$ olur. Kabulümüzden $U \not\subset Z$ olduğundan $d(U) = (0)$ bulunur. Sonuç 4.4.3 kullanılarak $d = 0$ veya $U \subset Z$ elde edilir. Bu ise $d \neq 0$ ve $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde

$(d(U))^2 \neq (0)$ dır. $d([R,U]_{\sigma,\tau}) = (0)$ ise $[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u) \in [R,U]_{\sigma,\tau}$ için $d([x,u]_{\sigma,\tau})\sigma(u) + [x,u]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u)) = 0$ ve $d([R,U]_{\sigma,\tau}) = (0)$ olduğu kullanılırsa

$$[x,u]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u))=0, \ \forall u \in U, \ \forall x \in R \tag{4.36}$$

elde edilir. (4.36) eşitliğinde $y \in R$ için, x yerine xy alınır ve (4.36) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [xy,u]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u)) \\ &= x[y,u]_{\sigma,\tau} d(\sigma(u)) + [x,\tau(u)]yd(\sigma(u)) \\ &= [x,\tau(u)]yd(\sigma(u)), \ \forall y \in R \\ &= [x,\tau(u)]Rd(\sigma(u)) \end{aligned}$$

bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında $[x,\tau(u)] = 0$ veya $d(\sigma(u)) = 0$ elde edilir. Her $u \in U$ için, $d(\sigma(u)) = 0$ ise $0 = d(\sigma(u)) = \sigma(d(u))$ olur. σ, 1-1 olduğundan $d(u) = 0$ elde edilir. O halde her $u \in U$ için, $u \in Z$ veya $d(u) = 0$ bulunur. $K = \{u \in U \mid u \in Z\}$ ve $L = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$ kümeleri tanımlansın. Brauer Trick'ten K = U veya L = U elde edilir. $U \not\subset Z$ olduğundan $U \neq K$ ve buradan U = L bulunur. Yani $u \in U$ için $d(u) = 0$ buradan $d(U) = (0)$ elde edilir. Bu ifade her $x \in R$ için, soldan d(x) ile çarpılırsa $d(x)d(U) = (0)$ bulunur. Lemma 4.4.4 kullanılarak her $x \in R$ için, $d(x) = 0$ veya $U \subset Z$ elde edilir. Bu ise $d \neq 0$ ve $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde $U \subset Z$ bulunur.

4.5 M. Soyturk, (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings With Derivation

Bu makalede R, charR $\neq$ 2,3 olan asal bir halka, U, R nin bir (σ,τ)-Lie ideali, $\sigma, \tau : R \to R$ otomorfizma ve d, bir türev olarak alınmıştır.

Lemma 4.5.1: R bir asal halka ve $(0) \neq U$, R nin bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. Eğer $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat : U, (σ,τ)- sol Lie ideal olduğundan her $x \in R$ ve $u \in U$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau} \in Z$ olur. x yerine $x\sigma(u)$ alınırsa $[x\sigma(u),u]_{\sigma,\tau} = x[\sigma(u),\sigma(u)] + [x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u) = [x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u) \in Z$ olur. $[x,u]_{\sigma,\tau} \in Z$ olduğundan her $x \in R$ ve $u \in U$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $\sigma(u) \in Z$ olur.

Eğer $\sigma(u) \in Z$ ise her $u \in U$ için, $u \in Z$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Eğer her $x \in R$ ve $u \in U$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise x yerine $y \in R$ için xy alınırsa

$0 = [xy,u]_{\sigma,\tau} = x[y,\sigma(u)] + [x,u]_{\sigma,\tau}y = x[y,\sigma(u)]$ elde edilir. Yani $R[y,\sigma(u)]= (0)$ ve R halkasının asal olması kullanıldığında her $y\in R$, $u\in U$ için, $[y,\sigma(u)]$ olacağından $U\subset Z$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.5.2 : R, $\mathrm{char}R \neq 2$ olan bir asal halka ve $(0) \neq U$, (σ,τ)-Lie ideal ve $0 \neq d$, R nin bir türevi olsun. $d(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat : Her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $d(U)\subset Z$ olduğundan $d([x,u]_{\sigma,\tau})\in Z$ olur. Yani

$$d([x,u]_{\sigma,\tau}) = [d(x),u]_{\sigma,\tau} + [x,d(u)]_{\sigma,\tau} \in Z,\ \forall x\in R,\ \forall u\in U \quad (4.37)$$

elde edilir. (4.37) eşitliğinde $v\in U$ için, x yerine $xd(v)$ alınırsa $[d(xd(v)),u]_{\sigma,\tau} + [xd(v),d(u)]_{\sigma,\tau} \in Z$ olur. Buradan $[d(x)d(v) + xd^2(v),u]_{\sigma,\tau} + [xd(v),d(u)]_{\sigma,\tau} = [d(x)d(v),u]_{\sigma,\tau} + [xd^2(v),u]_{\sigma,\tau} + [xd(v),u]_{\sigma,\tau} = d(x)[d(v),\sigma(u)] + [d(x),u]_{\sigma,\tau}d(v) + x[d^2(v),\sigma(u)] + [x,u]_{\sigma,\tau}d^2(v) + x[d(v),\sigma(d(u))] + [x,d(u)]_{\sigma,\tau}d(v)\in Z$ elde edilir. $d(U)\subset Z$ ise her $x\in R$, $u,v\in U$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau}d^2(v)\in Z$ bulunur. Her $x\in R$, $u,v\in U$ için, $d^2(v) = 0$ veya $[x,u]_{\sigma,\tau} \in Z$ olur. Yani $d^2(U) = (0)$ veya $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset Z$ bulunur. Eğer $d^2(U) = (0)$ ise Aydın ve Soytürk (1995)' den $U\subset Z$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. Eğer $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset Z$ ise Lemma 4.5.1 kullanılarak $U\subset Z$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.5.3 : R bir asal halka, $\mathrm{char}R\neq 2,3$, $(0) \neq U$, R nin (σ,τ)- Lie ideali, $0 \neq d$, $d(U)\subset U$, $d^2(U)\subset Z$ şartını sağlayan bir türev olsun. $d^3(U) = (0)$ ise $U\subset Z$ dir.

İspat : Kabul edelim ki $U\not\subset Z$ olsun. U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan her $u\in U$, $x\in R$ için, $[x,u]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. x yerine $\tau(u)x$ alınırsa

$[\tau(u)x,u]_{\sigma,\tau} = \tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} + [\tau(u),\tau(u)]x$ bulunur. $[\tau(u),\tau(u)] = 0$ olduğundan $\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau} \in U$ elde edilir. $d^3(U) = (0)$ olduğundan $d^3(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}) = 0$ olur. Her $x\in R$, $u\in U$ için,

$$\begin{aligned}
0 &= d^3(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau})\\
&= d^2(d(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}))\\
&= d^2(d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau} + \tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau}))\\
&= d(d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau} + d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + \tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau})\\
&= d(d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau} + 2d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + \tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau})\\
&= d^3(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau} + d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + 2d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) +\\
&\quad 2d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau}) + \tau(u)d^3([x,u]_{\sigma,\tau})
\end{aligned}$$

bulunur. Her $x \in R$, $u \in U$ için, $d^3(\tau(u)) = \tau(d^3(u)) = \tau(0) = 0$ yani $d^3([x,u]_{\sigma,\tau}) = 0$ olur. O halde

$$0 = 3d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + 3d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau}$$
$$= 3(d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau})$$

elde edilir. $\mathrm{char}R \neq 3$ olduğundan $d^2(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + d(\tau(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. $\tau d = d\tau$ olduğundan

$$\tau(d^2(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) + \tau(d(u))d^2([x,u]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall x \in R, \ \forall u \in U \qquad (4.38)$$

bulunur. (4.38) eşitliğinde u yerine d(u) alınırsa

$$0 = \tau(d^2(d(u)))d([x,d(u)]_{\sigma,\tau}) + \tau(d(d(u)))d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau}$$
$$= \tau(d^3(u))d([x,d(u)]_{\sigma,\tau}) + \tau(d^2(u))d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. $d^3(U) = (0)$ olduğundan $\tau(d^3(u)) = \tau(0) = 0$ olur. Buradan her $u \in U$, $x \in R$ için $\tau(d^2(u))d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. $d^2(U) \subset Z$ olduğundan her $u \in U$ için, $d^2(u) \in Z$ olur. Her $a \in R$ için, $a\tau(d^2(u))d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. $\tau(d^2(u)) \in Z$ olduğundan $\tau(d^2(u))ad^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Yani $\tau(d^2(u))Rd^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = (0)$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$ ve $u \in U$ için, $\tau(d^2(u)) = 0$ veya $d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. τ, 1-1 olduğundan

$$d^2(u) = 0 \text{ veya } d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall x \in R, \ \forall u \in U \qquad (4.39)$$

elde edilir. Her $x \in R$, $u \in U$ için, $d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ ise x yerine $x\sigma(d(u))$ alınırsa

$$0 = d^2([x\sigma(d(u)),d(u)]_{\sigma,\tau}$$
$$= d^2([x[\sigma(d(u)),\sigma(d(u))]_{\sigma,\tau} + [x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d(u))$$
$$= d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d(u)))$$
$$= d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d(u)) + 2d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})d(\sigma(d(u)) + [x,d(u)]_{\sigma,\tau}d^2(\sigma(d(u)))$$

bulunur. Her $x \in R$, $u \in U$ için, $d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan $2d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})d(\sigma(d(u)) + [x,d(u)]_{\sigma,\tau}d^2(\sigma(d(u))) = 2d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d^2(u)) + [x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d^3(u))) = 0$ elde edilir. $d^3(U) = (0)$ olduğundan her $u \in U$ için, $d^3(u) = 0$ olduğundan $\sigma(d^3(u)) = \sigma(0) = 0$ bulunur. O halde her $x \in R$, $u \in U$ için, $2d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d^2(u)) = 0$ elde edilir. $\mathrm{Char}R \neq 2$ olduğu kullanılırsa $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d^2(u)) = 0$ olur. $d^2(U) \subset Z$ olduğundan, her $u \in U$ için,

$\sigma(d^2(u)) \in Z$ bulunur. Her $a \in R$ için, $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})\sigma(d^2(u))a = 0$, $\sigma(d^2(u)) \in Z$ olduğundan $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})a\sigma(d^2(u))$ ve buradan $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau})R\sigma(d^2(u)) = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$, $u \in U$ için, $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau}) = 0$ veya $\sigma(d^2(u)) = 0$ bulunur. σ, 1-1 olduğundan $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau}) = 0$ veya $d^2(u) = 0$ bulunur. Eğer her $x \in R$, $u \in U$ için, $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau}) = 0$ ise x yerine $x\sigma(d(u))$ alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= d([x\sigma(d(u)),d(u)]_{\sigma,\tau}) \\
&= d(x[\sigma(d(u)),\sigma(d(u))]) + [x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d(u))) \\
&= d([x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d(u))) \\
&= d([x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d(u)) + [x,d(u)]_{\sigma,\tau}d(\sigma(d(u)))
\end{aligned}$$

elde edilir. $d([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan, her $x \in R$, $u \in U$ için, $[x,d(u)]_{\sigma,\tau}d(\sigma(d(u))) = 0$ olur. $\sigma d = d\sigma$ olduğundan

$0 = [x,d(u)]_{\sigma,\tau}d(\sigma(d(u))) = [x,d(u)]_{\sigma,\tau}\sigma(d^2(u))$ ve $\sigma(d^2(u)) \in Z$ olduğundan $[x,d(u)]_{\sigma,\tau}R\sigma(d^2(u)) = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında her $x \in R$, $u \in U$ için, $[x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $\sigma(d^2(u)) = 0$ olur. σ, 1-1 olduğundan $[x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $d^2(u) = 0$ bulunur. Her $x \in R$, $u \in U$ için, $[x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $y \in R$ için, x yerine xy alınırsa

$0 = [xy,d(u)]_{\sigma,\tau} = x[y,\sigma(d(u))] + [x,d(u)]_{\sigma,\tau}y = x[y,\sigma(d(u))]$ olur. Yani $R[y,\sigma(d(u))] = (0)$ ve R halkasının asal olması kullanıldığında her $y \in R$, $u \in U$ için, $[y,\sigma(d(u))] = 0$ bulunur. Buradan $\sigma(d(u)) \in Z$ yani her $u \in U$ için, $d(u) \in Z$ elde edilir. (4.39) eşitliğinde $d^2(u) = 0$ veya $d^2([x,d(u)]_{\sigma,\tau} = 0$ idi. Buradan her $u \in U$ için $d^2(u) = 0$ veya $d(u) \in Z$ bulunur. $K = \{u \in U \mid d^2(u) = 0\}$ ve $L = \{u \in U \mid d(u) \in Z\}$ kümeleri tanımlansın. K ve L, U nun toplamsal alt grubudur. $U = K \cup L$ dir. Brauer Trick'ten U = K veya U = L olur. Eğer U = K ise her $u \in U$ için $d^2(u) = 0$ yani $d^2(U) = (0)$ dır. Aydın ve Soytürk (1995)' den $U \subset Z$ bulunur. Bu ise $U \not\subset Z$ olmasıyla çelişir. Yani $U \neq L$ dir. O halde U = K bulunur. Her $u \in U$ için $d(u) \in Z$ olur. Bu ise $d(U) \subset Z$ demektir. Lemma 4.5.2 kullanılarak $U \subset Z$ bulunur. Bu da $U \not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $U \subset Z$ bulunur.

4.6 K. Kaya, N. Aydın, Some Results on Generalized Lie İdeals

Bu makalede R bir asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olarak alınmıştır.

Lemma 4.6.1 : a,b$\in$R olsun.

(i) d_1, R üzerinde $d_1(x) = [x,b]_{\sigma,\tau}$ şeklinde bir dönüşüm ve $ad_1(R) = (0)$ (veya $d_1(R)a = (0)$) ise a = 0 veya b$\in$Z dir.

(ii) $a[R,b]_{\sigma,\tau} = (0)$ ($[R,b]_{\sigma,\tau}b = (0)$) ise a = 0 veya b$\in$Z dir.

(iii) Ua = (0) (veya aU = (0)) ise a = 0 veya u$\subset$Z dir.

İspat :

(i) Her x,y$\in$R için, $d_1(xy) = [xy,b]_{\sigma,\tau} = x[y,\sigma(b)] + [x,b]_{\sigma,\tau}y$

Buradan

$$d_1(xy) = d_1(x)y + x[y,\sigma(b)],\ \forall x,y\in R) \tag{4.40}$$

(4.40) eşitliğini soldan a ile çarpar ve $ad_1(R)=(0)$ olduğu kullanılırsa

$ad_1(xy) = ad_1(x)y + ax[y,\sigma(b)]$ olur. Her x,y$\in$R için, $ax[y,\sigma(b)] = 0$ ve buradan $aR[y,\sigma(b)] = (0)$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında a = 0 veya her y$\in$R için, $[y,\sigma(b)] = 0$ yani a = 0 veya $[R,\sigma(b)] = 0$ ve buradan a = 0 veya b$\in$Z elde edilir. Benzer biçimde her x,y$\in$R için, $d_1(xy) = [xy,b]_{\sigma,\tau} = x[y,b]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(b)]y = xd_1(y) + [x,\tau(b)]y$ olur. Her x,y$\in$R için, $d_1(xy) = xd_1(y) + [x,\tau(b)]y$ ifadesini sağdan a ile çarpar ve $d_1(R)a = (0)$ olduğu kullanılırsa $d_1(xy)a = xd_1(y)a + [x,\tau(b)]ya$ ve buradan her x,y$\in$R için $[x,\tau(b)]ya = 0$ elde edilir. R halkasının asal olması kullanıldığında, her x$\in$R için $[x,\tau(b)] = 0$ veya a = 0 bulunur. O halde b$\in$Z veya a = 0 elde edilir.

(ii) $a[R,b]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise $ad_1(R) = (0)$ olduğundan (i) kullanılarak a = 0 veya b$\in$Z olur.

(iii) (0) $\neq$ U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur.

$a[R,U]_{\sigma,\tau} \subset aU=(0)$

olduğundan $a[R,U]_{\sigma,\tau} = (0)$ olur. (ii) kullanılarak a = 0 veya U$\subset$Z elde edilir.

Lemma 4.6.2 : 0 $\neq$ d, R nin bir türevi olsun. d(U) = (0) ise $[U,\sigma(U)] = (0)$ ve $[\sigma(U),\tau(U)] = (0)$ olur.

İspat : d(U) = (0) olduğundan her u,v,w$\in$U için, $d([wv,u]_{\sigma,\tau}) = 0$ olur. Bunu açarsak d(U) = (0) olduğu kullanılırsa

$0 = d(w[v,\sigma(u)] + [w,u]_{\sigma,\tau}v) = d(w[v,\sigma(u)]) + d([w,u]_{\sigma,\tau}v)$

$= d(w)[v,\sigma(u)] + wd([v,\sigma(u)]) + d([w,u]_{\sigma,\tau})v + [w,u]_{\sigma,\tau}d(v)$

elde edilir. Her u,v,w$\in$U için, $d(w) = d([w,u]_{\sigma,\tau}) = d(v) = 0$ olacağından $wd([v,\sigma(u)]) = 0$ olur. Her u$\in$U için, d(u) = 0 olduğu kullanılırsa

$0 = wd([v,\sigma(u)]) = w([d(v),\sigma(u)] + [v,d(\sigma(u))]) = w[v,d(\sigma(u))]$

elde edilir.Her $u,v \in U$ için, $U[U,d(\sigma(U))] = (0)$ olduğundan Lemma 4.6.1 (iii) kullanılarak $[U,d(\sigma(U))] = 0$ veya $U \subset Z$ bulunur. Yani

$$[U,d(\sigma(U))] = 0 \tag{4.41}$$

elde edilir. $d(U) = (0)$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $r \in R$, $u,v \in U$ için, $d([rv,u]_{\sigma,\tau}) = 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= d(r[v,\sigma(u)] + [r,u]_{\sigma,\tau} v) \\ &= d(r[v,\sigma(u)]) + d([r,u]_{\sigma,\tau} v) \\ &= d(r)[v,\sigma(u)] + rd([v,\sigma(u)]) + d([r,u]_{\sigma,\tau})v + [r,u]_{\sigma,\tau} d(v) \end{aligned}$$

bulunur. (4.41) eşitliği kullanılarak $[u,d(\sigma(u))] = 0$ olduğundan her $u,v \in U$ için, $d([v,\sigma(u)]) = [d(v),\sigma(u)] + [v,d(\sigma(u))] = 0$ olur. Her $u, v \in U$ için, $d([v,\sigma(u)]) = 0$ olduğundan $d(r)[v,\sigma(u)] = 0$ yani $d(R)[U,\sigma(U)] = (0)$ bulunur. Teorem 2.1.3 den $[U,\sigma(U)] = (0)$ veya $d = 0$ bulunur. $d \neq 0$ olduğundan $[U,\sigma(U)] = (0)$ elde edilir. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğu kullanılırsa her $s \in R$, $u,v \in U$ için,

$0 = [[\tau(u)s,u]_{\sigma,\tau},\sigma(v)] = \tau(u)[[s,u]_{\sigma,\tau},\sigma(v)] + [\tau(u),\sigma(v)][s,u]_{\sigma,\tau}$

ve $[U,\sigma(U)] = (0)$ olduğu kullanılarak

$$[\tau(u),\sigma(v)][s,u]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall u,v \in U, s \in R \tag{4.42}$$

bulunur. (4.42) eşitliğinde s yerine $r \in R$ için, sr alınırsa,

$0 = [\tau(u),\sigma(v)][sr,u]_{\sigma,\tau} = [\tau(u),\sigma(v)]s[r,\sigma(u)] + [\tau(u),\sigma(v)][s,u]_{\sigma,\tau}$ bulunur. (4.42) eşitliği kullanıldığında her $s \in R$ için, $[\tau(u),\sigma(v)]s[r,\sigma(u)] = 0$ yani $[\tau(u),\sigma(v)]R[r,\sigma(u)] = (0)$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında her $u, v \in U$ için, $[\tau(u),\sigma(v)] = 0$ veya her $u \in U$, $r \in R$ için, $[r,\sigma(u)] = 0$ ve buradan her $u, v \in U$ için, $[\tau(u),\sigma(v)] = 0$ veya $\sigma(u) \in Z$ yani $u \in Z$ bulunur. Dolayısıyla $[\tau(U),\sigma(U)] = (0)$ bulunur.

Lemma 4.6.3 : $0 \neq d$, R nin bir türevi olsun. $d(U) = (0)$ ise her $u \in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ olur.

İspat : d(U) = (0) olduğundan Lemma 4.6.2 kullanılarak $[U,\sigma(U)] = [\tau(U),\sigma(U)] = (0)$ olur. Eğer $[U,\sigma(U)] = 0$ ise, her $u,v,w \in U$ ve $r \in R$ için, $[[rw,v]_{\sigma,\tau},\sigma(u)] = 0$ olur. Yani

$0 = [r[w,v]_{\sigma,\tau},\sigma(u)] + [[r,\tau(w)]w,\sigma(u)]$

$= r[[w,v]_{\sigma,\tau},\sigma(u)] + [r,\sigma(u)][w,v]_{\sigma,\tau} + [r,\tau(v)][w,\sigma(u)] + [[r,\tau(v)],\sigma(u)]w$

bulunur. $[U,\sigma(U)] = (0)$ olduğundan $[w,\sigma(u)] = [[w,v]_{\sigma,\tau},\sigma(u)] = 0$ ve buradan

$$[r,\sigma(u)][w,v]_{\sigma,\tau} + [[r,\tau(v)],\sigma(u)]w = 0, \ \forall u,v,w \in U, \ \forall r \in R \qquad (4.43)$$

elde edilir. (4.43) eşitliği kullanılarak

$0 = (r\sigma(u) - \sigma(u)r)(w\sigma(v) - \tau(v)w)+[r\tau(v) - \tau(v)r,\sigma(u)]w$

$= r\sigma(u)w\sigma(v) - r\sigma(u)\tau(v)w - \sigma(u)rw\sigma(v)+\sigma(u)r\tau(v)w+r\tau(v)\sigma(u)w - \tau(v)r\sigma(u)w - \sigma(u)r\tau(v)w + \sigma(u)\tau(v)rw$

olur. Her $u,v,w \in U$ ve $r \in R$ için, $[\tau(U),\sigma(U)] = (0)$ ise $\tau(v)\sigma(u) = \sigma(u)\tau(v)$ ve $[U,\sigma(U)] = (0)$ ise $w\sigma(u) = \sigma(u)w$ olduğu kullanılırsa

$0 = r\sigma(u)w\sigma(v) - \sigma(u)rw\sigma(v) - \tau(v)r\sigma(u)w+\sigma(u)\tau(v)rw = r\sigma(u)w\sigma(v) - \sigma(u)rw\sigma(v) - \tau(v)rw\sigma(u) + \sigma(u)\tau(v)rw = (r\sigma(u) - \sigma(u)r)w\sigma(v) - [\tau(v)rw,\sigma(u)]$
$= [r,\sigma(u)]w\sigma(v) - [\tau(v)rw,\sigma(u)] = [r,\sigma(u)]w\sigma(v) - \tau(v)[rw,\sigma(u)] - [\tau(v),\sigma(u)]rw$
$= [r,\sigma(u)]w\sigma(v) - \tau(v)[rw,\sigma(u)] = [r,\sigma(u)]w\sigma(v) - \tau(v)r[w,\sigma(u)] - \tau(v)[r,\sigma(u)]w$
$= [r,\sigma(u)]w\sigma(v) - \tau(v)[r,\sigma(u)]w = [[r,\sigma(u)]w,v]_{\sigma,\tau}$

elde edilir. Buradan her $u,v,w \in U$ ve her $r \in R$ için,

$0 = [r,\sigma(u)][w,\sigma(u)] + [[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}w$ ve buradan

$$[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}w = 0, \ \forall u,v,w \in U, \ \forall r \in R \qquad (4.44)$$

bulunur. Her $u,v \in U$ ve her $r \in R$ için, $[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}U = (0)$ olacağından Lemma 4.6.1 (iii) ve (4.44) eşitliği kullanılarak $[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $U \subset Z$ elde edilir. O halde

$$[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall u,v \in U, \ r \in R \qquad (4.45)$$

bulunur. (4.45) eşitliğinde r yerine $s \in R$ için, rs alınırsa

$0 = [[rs,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau} = [r[s,\sigma(u)] + [r,\sigma(u)]s,v]_{\sigma,\tau} = [r[s,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau} + [[r,\sigma(u)]s,v]_{\sigma,\tau} = r\ [[s,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau} + [r,\tau(v)][s,\sigma(u)] + [r,\sigma(u)][s,\sigma(v)] + [[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}\, s$

elde edilir. (4.45) eşitliği kullanılarak her $u,v\in U$, $r,\ s\in R$ için, $[r,\tau(v)][s,\sigma(u)] + [r,\sigma(u)][s,\sigma(v)] = 0$ yani $[r,\sigma(u) + \tau(u)][s,\sigma(v)] = 0$ ve R halkasının asal olması kullanıldığında her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 4.6.4 : $a\in R$ için $[a,U] = (0)$ ise $a\in Z$ veya her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ olur.

İspat : Her $x\in R$ için, $d(x) = [a,x]$ iç türevi ifade etsin. $[a,U] = (0)$ olduğu kullanılarak $d(U) = (0)$ bulunur. Lemma 4.6.3 kullanılarak her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ veya $d = 0$ olur. Yani her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ veya $a\in Z$ bulunur.

Sonuç 4.6.5 : Eğer $[U,U] = (0)$ ise her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ olur.

İspat : $U\subset Z$ olduğundan her $u\in U$ için, Lemma 4.6.4 kullanılarak $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ bulunur. Eğer $u\in Z$ ise $\sigma(u)$, $\tau(u)\in Z$ yani her $u\in U$ için. $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ elde edilir.

Lemma 4.6.6 : $U\not\subset Z$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olsun. O zaman U, R' nin sıfırdan farklı bir sağ idealini kapsar veya her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ olur

İspat : U , (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olduğundan her $u,v\in U$ ve $y\in R$ için, $v[y,u]_{\sigma,\tau}\in U$ ve $[vy,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Böylece $[v,\tau(u)]y = [vy,u]_{\sigma,\tau} - v[y,u]_{\sigma,\tau}\in U$ elde edilir. Yani $[U,\tau(U)]R\subset U$ olur. Kabul edelim ki $[U,\tau(U)]R = (0)$ olsun. R halkasının asal olması kullanıldığında $[U,\tau(U)] = (0)$ elde edilir. Lemma 4.6.4 kullanılarak her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ olur. Eğer $M = [U,\tau(U)]R \neq (0)$ ise U, R nin sıfırdan farklı bir M idealini kapsar. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 4.6.7 : $U\not\subset Z$, (σ,τ)-sol Lie ideal ve R nin bir alt halkası olsun. a, $b\in R$ için, $aUb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ veya her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ olur.

İspat : $U\not\subset Z$, U , (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olduğundan Lemma 4.6.6 dan U, R nin $(0) \neq M$ sağ idealini kapsar ve $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ veya her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ bulunur. U , (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ ve $M\subset U$ olduğundan $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ olur. Hipotezden $aUb = (0)$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau}\subset U$ olduğundan $a[r,m\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b = 0$ olur. Her $r\in R$, $m\in M$ için,

$0 = a[r,m\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b = a\tau(m)[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b + a[r,m]_{\sigma,\tau}b$ elde edilir. $a[r,m]_{\sigma,\tau}b=0$ olduğundan

$$a\tau(m)[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b = 0,\ \forall r\in R,\ \forall m\in M \tag{4.46}$$

bulunur. (4.46) eşitliğinde $s\in R$ için, m yerine ms alınırsa

$0 = a\tau(ms)[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b = a\tau(m)\tau(s)[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b$

elde edilir. Yani $a\tau(m)R[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b$ bulunur. R halkasının asal olması kullanıldığında $a\tau(m) = 0$ veya $[r,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b = 0$ ve buradan $a\tau(m) = 0$ veya $[R,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b = (0)$ elde edilir. Eğer $[R,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b = (0)$ Lemma 4.6.1 (ii) kullanılarak b = 0 veya $\sigma^{-1}(b)\in Z$ bulunur. Yani b = 0 veya $b\in Z$ bulunur. $b\in Z$ ise aUb = (0) olduğundan aURb = (0) olur. R halkasının asal olması kullanıldığında aU = (0) veya b = 0 bulunur. aU = (0) ise Lemma 4.6.1 (iii) den a = 0 veya $U\subset Z$ elde dilir. Hipotezden $U\not\subset Z$ olduğundan a = 0 bulunur. Yani a = 0 veya b = 0 olur. Her $m\in M$ için $a\tau(m) = 0$ ise $\tau(\tau^{-1}(a)m) = 0$ ve τ, 1-1 olduğundan $\tau^{-1}(a)m = 0$ ve buradan $\tau^{-1}(a)M = (0)$ elde edilir. $\emptyset\neq K = \{r\in R|rM = (0)\}$kümesi sol idealdir. Kabul edelim ki $K\neq(0)$ olsun. M sağ ideal ve K sol ideal olduğundan $MK\subset M$ ve $MK\subset K$ olur. O halde $MK\subset M\cap K$ olur. $M\cap K = (0)$ ise MK = (0) olur. M sağ ideal olduğundan K = (0) olur. Bu ise $K \neq (0)$ olması ile çelişir. Buradan $M\cap K \neq (0)$ dır. O halde $0 \neq m^1 \in M\cap K$ olur. Yani $m^1\in M$, $m^1\in K$ olur. $m^1\in K$ ise K' nın tanımından dolayı $m^1M = (0)$ olur. $0\neq L=\{m^1\in M \mid m^1M = (0)\}$ kümesi tanımlansın. $a\in R$, $b\in L$ ve $m\in M$ için abm = 0 olduğu için $ab\in L$ yani L sol idealdir. Eğer L = M ise $M^2 = (0)$ olur. R asal halkanın merkezinde nilpotent ideal olmadığından M = (0) elde edilir. Bu ise $M \neq (0)$ olması ile çelişir. O halde $L\subset M$ ve buradan $L\cap M = L$ bulunur. Bir diğer taraftan $L\cap M\subset L$ ve $L\cap M\subset M$ ve olduğundan $(L\cap M)(L\cap M)\subset LM$ olur. $L\subset M$ olduğundan L kümesinin özelliğinden LM = (0) ve $L\cap M = L$ olduğundan $L^2 = (0)$ ve buradan $(L\cap M)(L\cap M)\subset LM = (0)$ elde edilir. Asal halkanın merkezinde nilpotent ideal olmadığından L = (0) bulunur. Bu ise $L \neq (0)$ olması ile çelişir. O halde K = (0) olmalıdır. $\tau^{-1}(a)\in K$ olduğundan K = (0) ve buradan a = 0 elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.6.8 : $U\not\subset Z$, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olsun. O zaman U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar veya her $u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u)\in Z$ olur.

İspat : Lemma 4.6.6 nın ispatında $[U,\tau(U)]R\subset U$ bulmuştuk. Bir diğer taraftan her $u,v\in U$ ve $y\in R$ için, U alt halka ve (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[y,u]_{\sigma,\tau}v$, $[yv,u]_{\sigma,\tau}\in U$ elde edilir. Böylece her $u,v\in U$ ve $y\in R$ için, $y[u,\sigma(u)] = [yv,u]_{\sigma,\tau} - [y,u]_{\sigma,\tau}v$ olduğundan her $u,v\in U$ ve $y\in R$ için, $y[u,\sigma(u)]\in U$ yani $R[U,\sigma(U)]\subset U$ bulunur. $[U,\tau(U)]R\subset U$ ve U alt halka olduğundan $M = R[U,\sigma(U)][U,\tau(U)]R\subset U$ elde edilir. Eğer M $\neq$ (0) ise U, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar. Eğer M = (0) ise R$[U,\sigma(U)][U,\tau(U)]$R = (0) ve R halkasının asal olması kullanılırsa $[U,\sigma(U)][U,\tau(U)]$ = (0) elde edilir. w, $w^1 \in U$ için, U, alt halka olduğundan $ww^1 \in U$ elde edilir. O halde her w^1, u, v, w, $t \in U$ için $0 = [u,\sigma(v)][ww^1,\tau(t)] = [u,\sigma(u)]w[w^1,\tau(t)] + [u,\sigma(v)][w,\tau(t)]w^1$ yani $[U,\sigma(U)]U[U,\tau(U)] = (0)$ elde edilir. Lemma 4.6.7 kullanılarak $[U,\sigma(U)] = (0)$ veya $[U,\sigma(U)] = (0)$ veya her $u \in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ ve Lemma 4.6.4 kullanılarak her $u \in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.6.9 : $U \not\subset Z$, (σ,τ)-sol Lie ideal olsun. O zaman R nin $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ şartını sağlayan M idealini kapsar veya her $u \in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ olur.

İspat : Kabul edelim ki $K = \{x \in R \mid [R,x]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ olsun. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ yani $U \subset K$ olduğundan K $\neq$ Ø dir. Bir diğer taraftan $U \subset K$ olduğundan $[R,K]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve buradan K, (σ,τ)-sol Lie ideal olur. $U \subset K$ ve $U \not\subset Z$ olduğundan $K \not\subset Z$ olur. $[R,K]_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğundan her x,y$\in$ K ve $r \in R$ için, $[r,xy]_{\sigma,\tau} = [r\sigma(x),y]_{\sigma,\tau} + [\tau(y)r,x]_{\sigma,\tau}$ ve buradan $[r,xy]_{\sigma,\tau} \in U$ bulunur. O halde K, R nin alt halkasıdır. Teorem 4.6.8 den K, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar veya her $k \in K$ için, $\sigma(k) + \tau(k) \in Z$ olur. Eğer her $k \in K$ için, $\sigma(k) + \tau(k) \in Z$ ise $U \subset K$ olduğundan her $u \in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ olur. Bu ise ispatı tamamlar. Eğer K, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsarsa $U \subset K$ olduğundan $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset [R,K]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve buradan $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ bulunur. $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ dır. Eğer $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsaydı a, $b \in M$, $r \in R$ için,

$0 = [[r,a]_{\sigma,\tau}, b]_{\sigma,\tau} = [[r,b]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [r,[a,b]_{\sigma,\tau}]_{\sigma,\tau}$ olur. $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $r \in R$, $b \in M$ için, $[r,b]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ve buradan $[[r,b]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ dolayısıyla her a, $b \in M$, $r \in R$ için, $[r,[a,b]_{\sigma,\tau}]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. Her $r \in R$ ve a, $b \in M$ için, $d_r(x) = [r,x]_{\sigma,\tau}$ (σ,τ) iç türevi ve $d_a(x) = [a,x]$ iç türevi tanımlayalım. $d_r d_a(M) = (0)$ ve $d_a(M) \subset M$ dır. Posner (1957)' dan $d_r = 0$ veya $d_a = 0$ yani $M \subset Z$ veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Eğer $R \subset C_{\sigma,\tau}$ ise her r, s, $x \in R$ için, $0 = [rs,x]_{\sigma,\tau} = r[s,\sigma(x)] + [r,x]_{\sigma,\tau}s$ olur. $R \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her r, $x \in R$ için, $[r,x]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan her r, s, $x \in R$ için, $r[s,\sigma(x)] = 0$ dolayısıyla R[R,R] = (0) ve böylece R halkası komütatif bulunur. Eğer $M \subset Z$ ise R asal bir halka ve (0) $\neq$ M, R nin ideali olduğundan R halkası komütatiftir.

$M \subset Z$ veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ her iki durumda da $U \subset Z$ bulduk. Bu ise $U \not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

Ashraf M. ve Rehman N., 2002. On (σ, τ)-Derivations in Prime Rings. *Archivum Mathematicum.*, 38 : 259-264.

Aydın N. ve Kaya K., 1991. Some Results on Generalized Lie İdeals. *Mathematics Subject Classification.*

Aydın N. ve Kaya K., 1992. Some Generalization in Prime Rings with (σ, τ)-Derivation. *Doga Turk. J. Math.*, 16 : 169-176.

Aydın N., Kaya K. ve Kandamar H., 1993. Generalized Jordan Structure of Prime Rings. *Doğa-Tr. J. of Mathematics*., 17 : 251-258.

Aydın N. ve Kandamar H., 1994. (σ, τ)-Lie İdeals in Prime Rings. *Tr. J. of Mathematics*., 18 : 143-148.

Aydın N. ve Soyturk M., 1995. (σ, τ)-Lie İdeals in Prime Rings with Derivation. *Tr. J. of Mathematics.*,19 : 239-244.

Aydın N., 1997. On One Sided (σ, τ)-Lie İdeals in Prime Ring. *Tr. J. of Mathematics*., 21 : 1-7.

Aydın N., 2008. A Note on (σ, τ)- Derivations in Prime Rings. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 4 (39).

Herstein I. N., 1969. Topics in Ring Theory. *Chicago Univ., Chicago Pres*.

Herstein I. N., 1976. Rings with İnvolution. *Chicago Univ., Chicago Pres*

Herstein I. N., 1978. A note on Derivation. *Canad. Math. Bull.*, 21 (3) : 369-370.

Herstein I. N., 1979. A note on Derivation II. *Canad. Math. Bull.*, 22 (4) : 509-511.

Kaya K., 1988. (σ, τ)-Türevli Asal Halkalar Üzerine. *Tu Mat. D. C.*, 16 : 42-45.

Kaya K., 1992. (σ, τ)-Lie İdeals in Prime Rings. *An Univ. Timisora. Stiinte Mat.*, 30 (2-3) : 251-255.

Kaya K., 1991. (σ, τ)-Right Lie İdeals in Prime Rings. *Proc 4. National Mathematics Symposium, Antakya.*

Lee P. H. ve Lee T. K., 1981. On Derivations of Prime Rings. *Chinese J. Math.*, 9 (2).

Lee P. H. ve Lee T. K., 1983. Lie İdeals of Prime Rings with Derivations. *Bull. Inst. Math. Acod. Sinica.* : 75-80.

McCoy N. H.. The Theory of Rings. *The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Limited, Londan.*

Posner E. C., 1957. Derivations in Prime Rings. *Proc Amer. Math. Soc.*, 8 : 1093-1100.

Soyturk M., 1996. (σ, τ)-Lie İdeals in Prime Rings with Derivation. *Tr. J. of Mathematics.*, 20 : 233-236.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Salih SERGİN

Doğum Yeri : Turgutlu/MANİSA

Doğum Yılı : 1986

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2003-2007).

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : 1. Turgutlu Fen Bilimleri Dershanesi (2008-2009)

2. Turgutlu Birey Dershanesi (2009-…)

İLETİŞİM

E-posta Adresi : ssergin45@gmail.com