T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Müjde DEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih:**18/06/2010**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

MÜJDE DEMİR tarafından **PROF. DR. NEŞET AYDIN** yönetiminde hazırlanan **“ HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER ”** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neşet AYDIN

Danışman

Prof. Dr. Serhat ÖZDER	Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Sıra No:………

Tez Savunma Tarihi: 18/06/2010

Prof. Dr. İsmail TARHAN

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim

Müjde DEMİR

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince yardım ve katkılarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Neşet AYDIN’a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Müjde DEMİR

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

SİMGELER	ANLAM
$\forall$	her
$\in$	eleman
$\notin$	elemanı değil
$\subset$	alt kümedir
$\not\subset$	alt küme değildir
$\cup$	birleşim
$\cap$	kesişim
$\varnothing$	boş küme
$\Rightarrow$	gerektirir
$\Leftrightarrow$	gerekli ve yeterli koşul
$Z(R)$	Z R halkasının merkezi
charR	R halkasının karakteristiği
$C_R(A)$	A kümesinin R deki merkezleştiricisi
R/K	Bölüm Halkası
Kerf	f homomorfizminin çekirdeği
$C_{\sigma,\tau}$	R halkasının (σ,τ)- merkezi

ÖZET

HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Müjde DEMİR

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Neşet AYDIN

18/06/2010, 82

Bu tezde karakteristiği 2 den farklı olan halkalarda bazı komütatiflik koşullarını inceleyen makaleler bir arada özetlenmiştir.

1. Bölümde tezin özeti verilmiştir.

2. Bölümde halkalarla ilgili genel bilgiler verilmiştir.

3. Bölümde, asal halkalarda komütatiflik koşullarını inceleyen bazı makaleler verilmiştir.

4. Bölümde asal halkada bir U Lie ideali için yapılan çalışmaları halkanın genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie idealine genelleştiren makaleler özetlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Türev, Otomorfizm, Lie ideal, Genelleştirilmiş Lie ideal

ABSTRACT

GENERALZED DERIVATIONS IN RİNGS

Müjde DEMİR

Graduate School of Science and Engineering

Chair for Mathematics Thesis of Master of Science

Advisor: Prof. Dr. Neşet AYDIN

18/06/2010, 82

The plan followed in this work, which aims at the study of some papers which investigated commutativity conditions in rings with characteristic not 2 have been summarized.

Some general information about rings have been given in chapter II.

In chapter III., some papers that search commutativity conditions of rings with have been given.

In chapter IV., articles were sumarized that generalize the studies carried out for U Lie ideal to the (σ,τ)-Lie ideal of the ring in a prime ring

Keywords: Derivation, Otomorfizm, Lie ideal, Generalized Lie ideal

İÇERİK

Sayfa

TEZ SINAVI SONUÇ BELGESİ ii

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI iii

TEŞEKKÜR iv

SİMGELER VE KISALTMALAR v

ÖZET vi

ABSTRACT vii

BÖLÜM 1- GİRİŞ 1

BÖLÜM 2- GENEL BİLGİLER 3

BÖLÜM 3- HALKALARDA KOMÜTATİFLİK 10

BÖLÜM 4- HALKALARDA LİE VE (σ,τ) - LİE İDEALLER 36

KAYNAKLAR 81

Özgeçmiş I

BÖLÜM 1

GİRİŞ

R bir halka ve d, R halkası üzerinde tanımlı toplamsal dönüşüm olsun. Her x, y$\in$ R için, d(xy)=d(x)y+xd(y) koşulu sağlanıyor ise d dönüşümüne R halkasının bir **türevi** denir. x ve y, R halkasının iki elemanı olmak üzere xy-yx elemanı komütatör çarpımı olarak adlandırılır ve [x,y] ile gösterilir. Benzer biçimde X ve Y, R halkasının iki alt kümesi ise her x$\in$ X ve y$\in$ Y için, xy-yx=[x,y] elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup [X, Y] ile gösterilir. R halkasının her y$\in$R elemanı için, [x, y]=0 koşulu sağlayan x elemanlarının oluşturduğu kümeye R halkasının **merkezi** denir ve Z ile gösterilir.

U, R halkasının toplamsal alt grubu için [U, R] $\subset$U oluyorsa U 'ya R halkasının bir Lie ideali denir. σ,τ :R$\rightarrow$R iki dönüşüm olmak üzere x, y$\in$ R için, xσ (y)-τ (y)x elemanı $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilsin. $[U, R]_{\sigma,\tau}\subset U$ koşulu sağlanıyorsa U alt grubuna R halkasının bir (σ,τ)-sağ Lie ideali, $[R, U]_{\sigma,\tau}\subset U$ koşulu sağlanıyorsa U alt grubuna R halkasının bir (σ, τ)-sol Lie ideali, U, R halkasının hem (σ, τ)-sol ve hem de (σ, τ)-sağ Lie ideali ise U'ya R nin bir **genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie ideali** denir.

Yukarıdaki gösterimler altında $C_{\sigma,\tau}=\{c\in R \mid [c, x]_{\sigma,\tau}=0, \ \forall \ x\in R\}$ kümesine R halkasının **(σ,τ)-merkezi** denir.

Çeşitli koşullar altında halkaların komütatifliği konusu bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada, belirli koşulları sağlayanlar bir araya getirilmiştir.

2. Bölümde genel bilgiler verilmiş ve tez için gerekli tanım ve teoremler toparlamıştır.

3. Bölümde ise T otomorfizim veya T türev iken çeşitli koşullar altında halkanın komütatifliğini inceleyen makaleler incelenmiştir. Bu bölümde daha çok d, R halkasının bir türevi olmak üzere, her x$\in$R için, [x, T(x)] $\in$ Z koşulunu sağlayan bir halkanın değişmeli olduğunu inceleyen makaleler ele alınmıştır. Bunlara ek olarak R halkası yerine halkanın bir U Lie ideali ve d türevi yerine halkanın bir otomorfizması olması durumunda R halkasının değişmeli olduğunu gösteren makaleler ele alınmıştır.

Son bölümde ise karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, U bir Lie ideal a $\in$ R ve d, R halkasının bir türevi olmak üzere,

1. [a,U]=0 ise a$\in$ Z veya U$\subset$Z

2. $U \not\subset Z$ için, $[R,M] \subset U$ ve $[R,M] \not\subset Z$ olacak biçimde R halkasının bir M ideali vardır.
3. $U \not\subset Z$ için, $aUb=0$ ise $a=0$ veya $b=0$
4. $d(U) \subset Z$ ise $U \subset Z$
5. $ad(U)=0$ ise $a=0$ veya $U \subset Z$
6. $d^2(U)=0$ ise $d=0$ veya $U \subset Z$

koşulları sağlayan bir halkada, U Lie ideali yerine genelleştirilmiş (σ, τ)-Lie ideali ve tek yanlı genelleştirilmiş (σ,τ)-Lie idealleri için sağlanması durumunda halkanın değişmeliliğini inceleyen makalelere yer verilmiştir.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1: Boş kümeden farklı bir R kümesi üzerinde, “+”: $R \times R \to R$, $(a,b) \to a+b$ ve “ . ” : $R \times R \to R$, $(a, b) \to ab$ işlemleri tanımlansın. Buna göre aşağıdaki koşullar sağlanırsa R kümesine bir **halka** denir.

(i) (R, +) bir değişmeli grup

(ii) Her $a, b, c \in R$ için, $a (bc) = (ab) c$

(iii) Her $a, b, c \in R$ için, $a (b + c) = ab + ac$, $(a + b) c = ac + bc$

Tanım 2.2: R bir halka ve $\varnothing \neq A \subset R$ olsun. Eğer A kümesi, R kümesi üzerinde tanımlı işlemlere göre bir halka özelliklerini sağlıyor ise A kümesine R halkasının bir **alt halkası** denir.

Tanım 2.3: R bir halka olsun. $0 \neq a \in R$ için $ab = 0$ olacak biçimde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına **sol sıfır bölen**, $ba = 0$ olacak biçimde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına **sağ sıfır bölen** denir. Bir eleman hem sağ sıfır hem de sol sıfır bölen eleman ise bu elemana **sıfır bölen eleman** denir.

Tanım 2.4: R bir halka ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir toplamsal alt grubu olsun. Her $r \in R$, $a \in I$ için, $ar, ra \in I$, ise I’ ya R nin bir **ideali** denir.

Tanım 2.5: R bir halka, A, B ve P, R halkasının idealleri olsunlar. $AB \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ koşulu sağlanıyorsa, P idealine **asal ideali** denir.

Teorem 2.6: R bir halka ve P, R nin bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(i) P asal idealdir.

(ii) Her $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iii) Her $a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iv) U ve V, R halkasının iki sol(sağ) ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ ise $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

Tanım 2.7: Bir R halkasının (0) ideali asal ideal ise R halkasına **asal halka** denir.

Uyarı 2.8: Yukarıda verilen tanıma denk olarak; $a, b \in R$ için,

$$aRb = (0) \Rightarrow a = 0 \text{ veya } b = 0$$

koşulu sağlanıyorsa R bir asal halkadır.

Tanım 2.9: Her $a \in R$ elemanı için, $na = 0$ olan n pozitif tamsayıların en küçüğüne R halkasının **karakteristiği** denir ve char $R = n$ ile gösterir.

Tanım 2.10: R bir halka olmak üzere $Z=\{a \in R \mid ax = xa, \ \forall x \in R\}$ kümesine **R**

halkasının merkezi denir.

Teorem 2.11 : (Brauer's Trick) Bir toplamsal grup iki öz alt grubun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat: A ve B, G nin iki öz alt grubu olmak üzere $G=A\cup B$ olduğunu kabul edelim. Aynı zamanda $G\neq A$ olsun. Bu durumda $G\neq A$ olduğundan $x\in G$ ve $x\notin A$ olacak şekilde en az bir x eleman vardır. Öte yandan $G=A\cup B$ olduğundan $x\in B$ dir. Bu durumda G=B olduğunu görmeliyiz. İlk olarak alt gup tanımından $G\supset B$ dir. Şimdi $G\subset B$ göstermemiz yeterlidir.

$G\not\subset B$ olduğunu kabul edelim. Kabulümden $y\in G$ ve $y\notin B$ olacak şekilde en az bir y elemanı vardır. $G=A\cup B$ olduğundan $y\in A$ olur.

$x+y\notin B$ olsun.Bu durumda $G=A\cup B$ olduğundan $x + y \in A$ dır. Burada $y\in A$ ve A toplamsal alt grup olduğundan $x\in A$ dır.Bu ise $x\notin A$ ile çelişir. O halde $x+y\in B$ bulunur. $x\in B$ ve B toplamsal alt grup olduğundan $y\in B$ olur ki bu da $y\notin B$ ile çelişir. Bu durumda $x+y\in B$ dir. Böylece $G\subset B$ olur. O halde $G = B$ dir.

Teorem 2.12: Bir R asal halkasında $x, xy\in Z$ ise $x = 0$ veya $y\in Z$ dir.

İspat: $x, y\in R$ için hipotezimi uygulayacak olursak, her $r\in R$ için, $[xy, r] = 0$ olur. Bu ifade $x\in Z$ göz önüne alınarak açılır ve düzenlenirse,

$$0 = [xy, r] = [x, r]y + x[y, r] = x[y, r]$$

elde edilir. Bu ifadede r yerine $p\in R$ için rp alınırsa,

$$0 = x[y, rp] = x[y, r]p + xr[y, p] = xr\,[y, p]$$

bulunur. Bu eşitlik her $r\in R$ için sağladığından, $xR[y, p] = (0)$ elde edilir. R asal halka olduğundan $x = 0$ veya her $p \in R$ için $[y, p] = 0$ olur. Yani,

$$x = 0 \text{ veya } y\in Z$$

olur.

Teorem 2.13: Bir asal halkanın merkezi sıfır bölensizdir.

Lemma 2.14: Bir R asal halkası merkezi sıfırdan farklı bir komütatif sağ ideal kapsıyorsa R komütatiftir.

Lemma 2.15 : R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $d:R\rightarrow R$, sıfırdan farklı bir türev ise d, I ideali üzerinde sıfırdan farklıdır.

Gösterim 2.16: $x,y \in R$ için $[x,y] = xy - yx$ ile gösterelim.

Tanım 2.17: A, R halkasının bir toplamsal alt grubu olmak üzere her $a, b\in A$ için, $[a, b] \in A$ ise A ya **Lie halkası** denir.

Gösterim 2.18: R bir halka, x, y$\in$ R olsun. αve β, R üzerinde tanımlı iki dönüşüm olmak üzere $[x, y]_{\alpha, \beta} = x\alpha(y)-\beta(y)x$ ve $(x, y)_{\alpha, \beta} = x\alpha(y)-\beta(y)x$ ile gösterelim.

Tanım 2.19: R bir halka, U ve V, R halkasının alt kümeleri olsun. Buna göre, u$\in$ U ve v $\in$ V olmak üzere, uv – vu elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup [U, V] ile gösterilir.

Tanım 2.20: R bir halka ve U, R nin bir toplamsal alt grubu olsun. Her r$\in$ R, u$\in$ U için, [u, r] $\in$ U ise U' ya R nin bir **Lie ideal** denir.

Tanım 2.21: U, R halkasının bir toplamsal alt grubu ve σ,τ:R$\rightarrow$R iki dönüşüm olsun. Buna göre, $[U, R]_{\sigma, \tau}\subset U$ ise U' ya **sağ (σ,τ)-Lie ideal**, $[R,U]_{\sigma,\tau}\subset U$ ise U' ya **sol (σ,τ)-Lie ideal** denir. U hem sağ ve hem de sol (σ,τ) Lie ideal ise U' ya **(σ,τ)-Lie ideal** denir.

R halkasının özdeşlik (birim) dönüşümünü 1 ile gösterilirse her (1,1)-Lie ideal bir Lie ideal olduğu açıktır.

Tanım 2.22 d: R$\rightarrow$R bir toplamsal dönüşüm olsun. Eğer,

$d(xy) = d(x)y + xd(y), \ \forall\, x, y\in R$

ise d ye R halkasının **türevi** denir.

Tanım 2.23: a$\in$ R sabit bir eleman olmak üzere d_a : R$\rightarrow$R dönüşümü,

$d_a(x)= [a ,x] , \ \forall\, x, y\in R$

olarak tanımlansın. d_a dönüşümüne R halkasının a elemanı tarafından belirlenmiş **iç türevi** denir.

Tanım 2.24 R bir halka ve α , β R halkasının otomorfizmleri olsun. δ :R$\rightarrow$R ye toplamsal dönüşümü için $\delta(xy) = \delta(x)\alpha(y) + \beta(x)\delta(y)$ şartı sağlanıyorsa δ ya, **(α,β)-türev** denir.

Tanım 2.25: a$\in$ R sabit bir eleman olmak üzere d_a:R$\rightarrow$R dönüşümü her x$\in$ R için, $d_a(x) = [a, x]_{\sigma, \tau}$ olarak tanımlansın, d_a ya (σ,τ)-**iç türev** denir.

Tanım 2.26: R bir halka olsun. a$\in$ R için $a^n = 0$ olacak biçimde bir n tamsayısı varsa a elemanına **nilpotent eleman** denir. $a^n = 0$ fakat $a^{n-1}\neq 0$ ise n tamsayısına **nilpotentlik indeksi** denir.

Tanım 2.27: R bir halka olsun. B, R halkasının bir ideali olsun. B idealinin her elemanı nilpotent eleman ise B idealine **nil ideal** denir.

Tanım 2.28 : Sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan halkaya **yarı-asal halka**

denir.

Tanım 2.29: (A, +,) ve (B, *,) iki halka olmak üzere bir f : A $\to$ B fonksiyonu her x, y$\in$R için f(x+y)=f(x)*f(y) ifadelerini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir **halka homorfizması** denir

Tanım 2.30: (R, +, ·) bir halka olmak üzere,

Aut (R) = { f | f : R$\to$ R, 1-1 ve örten halka homomorfizması}

kümesine R kümesinin **otomorfizimlerinin** kümesi denir

Tanım 2.31: R bir halka olmak üzere

$C_{\alpha,\beta}$={c$\in$ R | cα(r) = β(r)c, $\forall$ r$\in$ R}

= {c$\in$ R | $[c, r]_{\alpha,\beta}$= 0, $\forall$ r$\in$ R}

kümesine R halkasının (α,β)**-merkezi** denir.

Yukarıdaki tanımda α ve β dönüşümleri yerine halkanın özdeşlik(birim) dönüşümü alınması durumunda $C_{\alpha,\beta}$ = Z olduğu açıktır.

Önerme 2.32: R halkası sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve 2x = 0 iken x = 0 olan bir halka olsun. Kabul edelim ki (0) $\neq$ U, R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olsun. O zaman U$\subseteq$ Z veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Tanım 2.33: x, y$\in$ R için ,

[[x, y], z]] + [[y, z], x]] + [[z, x], y]] = 0

özdeşliğine **Jacobi özdeşliği** denir.

Önerme 2.34: R yarı-asal halka olsun. a elemanı R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini merkezleştirsin. Bu takdirde a$\in$ Z dir.

Önerme 2.35: R, 2 torsion free ve yarı-asal halka olmak üzere, a $\in$ R için,
[a, [a,R]] = (0) ise a$\in$ Z dir.

Önerme 2.36: R bir asal halka ve a,b$\in$ R olsun. Bu durumda b, ab$\in$ $C_{\sigma,\tau}$ ise a$\in$ Z veya b = 0 dir.

Tanım 2.37 : K bir toplamsal abelian grup ve R bir halka olmak üzere,

KxR$\to$K , (k,r)$\to$kr RxK$\to$K , (r,k)$\to$rk

işlemleri tanımlansın. Eğer $\forall k, k_1, k_2 \in$ K ve $\forall r, r_1, r_2 \in$ R için,

(i) k($r_1 + r_2$) = kr_1 + kr_2

(ii) ($k_1 + k_2$)r = k_1r + k_2r

(iii) k($r_1 r_2$) = (kr_1)r_2

özellikleri sağlanırsa K ya bir **sağ R-modül**,

(i) $(r_1+r_2)k = r_1k + r_2k$

(ii) $r(k_1+k_2) = rk_1 + rk_2$

(iii) $(r_1r_2)k = r_1(r_2k)$

özellikleri sağlanırsa K ya bir **sol R-modül** denir. Her ikiside sağlanıyorsa K ya **R-bimodül** denir.

Tanım 2.38 : R ve S iki halka ve f:R$\rightarrow$S toplamsal dönüşüm olsun.

f(xy) = f(x)f(y) , $\forall$ x,y$\in$ R ise f dönüşümüne **halka homomorfizması**,

f(xy) = f(y)f(x) , $\forall$ x,y$\in$ R ise f dönüşümüne **ters- homomorfizma** denir.

Tanım 2.39 : R halka, A ve B iki R-modül olsun. f:A$\rightarrow$B dönüşümü, r$\in$ R, $a, a_1, a_2 \in$ A için

(i) $f(a_1+a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

(ii) $f(ar) = f(a)r$

(iii) $f(ra) = r\,f(a)$

koşullarını sağlıyorsa f dönüşümüne bir **R-modül homomorfizması** denir.

Tanım 2.40 : R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. U dan R içine olan tüm sağ R-modül homomorfizmalarının kümesine *M* diyelim.

$M = \{\ (U, f)\ \mid\ f : U \rightarrow R$ sağ R-modül homomorfizması $\}$

M üzerinde bir “ ~ ” denklik bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

“$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow$ R nin sıfırdan farklı bir W$\subseteq$ U$\cap$V ideali üzerinde $f = g$ dir”

M kümesinin bir (U, f) elemanının denklik sınıfını $\overline{(U, f)}$ ile gösterelim. *M* nin denklik sınıflarının kümesine *Q(R)* diyelim. *Q(R)* kümesi aşağıdaki işlemler altında R yi kapsayan bir asal halkadır.

$$\overline{(U, f)} + \overline{(V, g)} = \overline{(U \cap V, f+g)}$$

$$\overline{(U, f)}\ \overline{(V, g)} = \overline{(VU, fg)}$$

Q(R) halkasına **Martindale kesirler halkası** denir. Burada f:U$\rightarrow$R sağ R-modül homomorfizması (sol R-modül homomorfizması) ise $\overline{(U, f)}$ denklik sınıflarının kümesine **sağ (sol)Martindale kesirler halkası** denir ve $Q_r(R)$ ($Q_l(R)$) ile gösterilir.

Q(R) nin merkezine R asal halkasının **genişletilmiş merkezi (extended centroid)** denir ve **C** ile gösterilir. Üstelik bir R asal halkasının genişletilmiş merkezi bir cisimdir.

R asal halkasının sağ Martindale kesirler halkası $Q_r(R)$ aşağıdaki özellikler yardımıyla karakterize edilebilir:

(i) R $\subseteq Q_r(R)$

(ii) q $\in Q_r(R)$ için qU $\subseteq$ R olacak biçimde R halkasının sıfırdan farklı bir U ideali vardır.

(iii) q $\in Q_r(R)$ ve R halkasının sıfırdan farklı herhangi bir U ideali için qU=0 ise o zaman q=0 dır.

(iv) R halkasının sıfırdan farklı bir ideali U ve φ :U $\rightarrow$ R sağ R-modül dönüşümü ise o zaman $\forall x \in$ U için $\varphi(x) = qx$ olacak şekilde q $\in Q_r(R)$ vardır.

Tanım 2.41 : R_C **=** RC halkasına R nin **merkezi kapanışı** *(central closure)* denir. R_C bir asal halkadır.

Tanım 2.42 : $q_1, q_2, ..., q_n \in Q_r(R)$ ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in$ C olmak üzere

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + ... + \lambda_n q_n = 0$$

olduğunda $\forall i \in \{1,...,n\}$ için $\lambda_i = 0$ oluyorsa q_i elemanlarına **C-bağımsız**, en az bir $i \in \{1,...,n\}$ için $\lambda_i \neq 0$ olmak üzere yukarıdaki eşitlik gerçekleniyorsa q_i elemanlarına ***C*-bağımlıdır** denir.

Önerme 2.43: R asal halka olsun. R halkasının d, f, g ve h türevleri her x,y $\in$ R için d(x)g(x) = h(x)f(x) olsun. Eğer d $\neq 0$, f $\neq 0$ ise o zaman g(x) = λf(x) ve h(x) = λd(x) olacak şekilde bir λ $\in$ C vardır.

Önerme 2.44: R asal halkanın, karakteristiğin ikiden farklı ve d sıfırdan farklı türev olsun. [d(R), d(R)] $\subset$ Z ise R halkası değişmelidir.

Sık Kullanılan Özdeşlikler :

Her x, y, z $\in$ Z için,

(i) $[x, y+z] = [x, y]+[x, z]$

(ii) $[xy, z]=[x, z]y+x[y, z]$

(iii) $[[x, y] z] = [x, [y, z] +[[x, z], y]$

(iv) $(xy,z) = x[y, z]+(x,z)y = x(y,z) - [x,z]y$

(v) $(x, yz) = y(x, z)+[x,y]z$

(vi) $([x, y]z) = [x,(y, z)] - ([x, z], y)$

(vii) $[x, yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)\ [x, z]_{\sigma,\tau} + [x, y]_{\sigma,\tau}\ \sigma(z)$

(viii) $[xy, z]_{\sigma,\tau} = x[y,z]_{\sigma,\tau} + [x, \tau(z)]y$

(ix) $(x, yz)_{\sigma,\tau} = \tau(y)(x,z)_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\ \sigma(z)$

(x) $(xy, z)_{\sigma,\tau} =(x)(y,z)_{\sigma,\tau} -[x, \tau(z)]y=x[y, \sigma(z)]+(x,z)_{\sigma,\tau}\ y$

(xi) $[[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} =[x, [y,z]]_{\sigma,\tau} + [[x, z]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau}$

BÖLÜM 3
ASAL HALKALARDA KOMÜTATİFLİK

Bu bölümde, aksi belirtilmedikçe R bir asal halka ve karakteristiği ikiden farklı olarak alınmıştır. Halkalarının değişmeliliği bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Burada belirtilecek olan koşullar üzerinde hangi genelleştirilmelerin yapıldığı özetlenmiştir. Bu koşullardan bazıları aşağıda verilmiştir.

$d: R \to R$ tanımlı sıfırdan farklı bir türev olmak üzere,

a) $ad(R) = (0)$ ise $a = 0$ dır.

b) d_1d_2 türev ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

c) $a\in R$ için, $[a, d(a)] = 0$ ise R değişmelidir.

d) $a\in R$ için, $[a, d(a)] \in Z$ ise R değişmelidir.

$T: R \to R$ tanımlı özdeşlik dönüşümden farklı bir otomorfizim olmak üzere,

e) $a\in R$ için, $[a, T(a)] = 0$ ise R değişmelidir.

f) $a\in R$ için, $[a, T(a)]\in Z$ ise R değişmelidir.

R halkasının U sıfırdan farklı bir ideali, T özdeşlik dönüşümden farklı bir otomorfizim veya türev olmak üzere,

g) $a \in U$ için, $[a, T(a)] \in Z$ ise R değişmelidir.

R halkasının U sıfırdan farklı biri Lie ideali olsun. T özdeşlik dönüşümden farklı bir otomorfizim olmak üzere,

h) $a\in U$ için, $[a, T(a)] \in Z$ ise R değişmelidir.

koşullarını ele alan makalele bir araya getirilmiştir.

Posner, E.C., 1957

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka d sıfırdan farklı bir türevi ve karakteristiği sıfırdan farklı alınmıştır.

Lemma 3.1: R bir asal halka, $a\in R$ ve $d: R\to R$ bir türev olsun. Her $x\in R$ $ad(x) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat : $d\neq 0$ olsun. Hipotezden her $x\in R$ için $ad(x) = 0$ olur. Bu ifadede x yerine $y\in R$ için xy alınır ve hipoteze göre düzenlenirse,

$$0 = ad(xy) = ad(x)y + axd(y) = axd(y)$$

olur. Bu durum her $x\in R$ için sağlandığından $aRd(y) = (0)$ bulunur. R nin asal halka olduğundan $a = 0$ veya her $y\in R$ için $d(y) = 0$ elde edilir. Yani,

$$a=0 \text{ veya } d=0$$

olur. Kabulümden $d \neq 0$ olduğundan $a = 0$ dır.

Lemma 3.2: R bir asal halka ve $p,q,r \in R$ olsun. Buna göre, her $a \in R$ için $paqar = 0$ ise $p = 0$ veya $q= 0$ veya $r = 0$ dır.

İspat: Her $a \in R$ için hipotezden $paqar = 0$ olur. Bu son ifadede a üzerinde a+b lineerleştirme yapılır ve hipoteze göre düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
0 &= p(a + b)q(a + b)r \\
&= paqar + paqbr + pbqar + pbqbr \\
&= paqbr + pbqar
\end{aligned}
$$

olur. O halde her $a, b \in R$ için, $paqbr + pbqar = 0$ bulunur.

$pa = 0$ ise, son eşitsizlikte yerine yazılırsa her $b \in R$ için, $pbqar = 0$ yani, $pRqar= (0)$ olur. R asal halka olduğundan $p = 0$ veya $qar = 0$ dır.

Aynı zamanda $pa = 0$ olduğundan her $t \in R$ için, $pat = 0$ dir. Öyleyse, $p = 0$ veya her $t \in R$ için $qatr = 0$, yani $p = 0$ veya $qaRr = (0)$ olur. R asal halka olduğundan, $p=0$ veya $qa = 0$ veya $r = 0$ bulunur.

Bu durumda $pa = 0$ ise $p = 0$ veya $qa = 0$ veya $r = 0$ elde edilir. O halde hipotezden $paqar = 0$ ise $p = 0$ veya $r = 0$ veya $qaqar = 0$ olur.

Her $a \in R$ için $qaqar = 0$ olsun. Kabulümde a üzerinden a+b ile linnerleştirme yapılır ve düzenlenirse, $0 = q(a + b)q(a +b)r = qaqbr + qbqar$ yani, her $a, b \in R$ $qaqbr + qbqar = 0$, bulunur.

$ar = 0$ ise her $b \in R$ için, $qaqbr = 0$ bulunur. Yani $qaqRb = (0)$ dır. R asal halaka olduğundan $qaq = 0$ veya $r = 0$ olur.

Yine $ar = 0$ ise her $t \in R$ için $tar = 0$ dir. O halde $r = 0$ veya her $t \in R$ $qtaq = 0$ yani, $r = 0$ veya $qRaq = (0)$ dır. Bu durumda R asal halka olduğundan, $r = 0$ veya $q = 0$ veya $aq = 0$ bulunur.

Sonuçta $ar = 0$ ise $r = 0$ veya $q = 0$ veya $aq = 0$ elde edilir. O halde her $a \in R$ için, $qaqar = 0$ ise $r = 0$ veya $q = 0$ veya $qaqaq = 0$ dır.

Her $a \in R$ için $qaqaq = 0$ ise a üzerinden a+b ile lineerleştirme yapılır ve kabule göre düzenlenirse, her $a, b \in R$ için,

$$
\begin{aligned}
0 &= q(a + b)q(a + b)q \\
&= qaqaq + qaqbq + qbqaq + qbqbq \\
&= qaqbq + qbqaq
\end{aligned}
$$

olur. Bu son ifadede b yerine aqb alınırsa, $qaq(aqb)q + q(aqb)qaq = 0$ olur. Bu durumda her $a,b \in R$ için, $qaqbqaq = 0$ bulunur. Yani her $a,b \in R$ için, $qaqRqaq = (0)$, dir. R asal halka olduğundan her $a \in R$ için, $qaq = 0$ olur. Bu da $qRq = (0)$ demektir. Yine R nin asal halka olmasından $q = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak her $a \in R$ için, $paqar = 0$ ise $p = 0$ veya $q = 0$ veya $r = 0$ bulunur.

Teorem .3.3: R bir asal halka, karakteristiğim ikiden farklı ve $d_1 d_2 : R \to R$ iki türev olsun. Buna göre, $d_1 d_2$ türev ise d_1 ve d_2 den en az birisi sıfırdır.

İspat: $d_1\, d_2$ türev ise her $a,b \in R$ için, $d_1 d_2\,(ab) = d_1 d_2\,(a)b + a d_1 d_2\,(b)$ dir.
Öte yandan, her $a, b \in R$ için, $d_1 d_2\,(ab) = d_1(d_2(a)b) + d_1(a d_2(b)) = d_1 d_2(a)b + d_2(a) d_1(b) + d_1(a) d_2(b) + a d_1 d_2(b)$ dir. İlk bulunan eşitlikle bu son eşitlik karşılaştırılırsa,

$$d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) = 0, \ \forall\, a,b \in R \tag{3.1}$$

olur. (3.1) eşitliğinde a yerine $c \in R$ için $ad_1(c)$ alınır ve düzenlenirse, her $a, b, c \in R$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= d_2(ad_1(c))d_1(b) + d_1(a\, d_1(c))\, d_2(b) \\ &= d_2(a)d_1(c)d_1(b) + ad_2d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + ad_1^2(c)d_2(b) \\ &= d_2(a)d_1(c)\, d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + a(d_2d_1(c)d_1(b) + d_1^2(c)d_2(b)) \end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.1) kullanılırsa,

$$d_2\,(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) = 0, \ \ \forall\ a, b, c \in R \tag{3.2}$$

dır. Benzer olarak (3.1) de a yerine c alınır ve düzenlenirse, her $b, c \in R$ için, $d_2(c)\, d_1(b) + d_1(c)d_2(b) = 0$ olur. Yani

$$d_1(c)d_2(b) = -\, d_2(c)d_1(b), \ \forall\, b,c \in R$$

bulunur. Bu ifade (3.2) de yerine yazılırsa, her $a, b, c \in R$ için,

$$d_2(a)d_1(c)d_1(b) - d_1(a)d_2(c)d_1(b) = 0$$

olur. Bu eşitliği $(d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c))d_1(b) = 0$ şeklinde yazabiliriz. Burada Lemma 3.1 kullanılırsa her $a, c \in R$ için, $d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2\,(c) = 0$ veya $d_1 = 0$ bulunur.

O halde her $a,c \in R$ için, $d_2(a)\, d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0$ olsun. (3.1) de b yerine c alınırsa, $d_2(a)d_1(c) + d_1(a)d_2(c) = 0$ olur. İki eşitlik toplanırsa, $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan her $a, c \in R$ için, $d_2(a)d_1(c) = 0$ bulunur. Lemma 3.1 den $d_1 = 0$ veya her $a \in R$ için $d_2(a) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$d_1 = 0 \text{ veya } d_2 = 0$$

bulunur.

Lemma 3.4: R bir asal halka ve $d: R \to R$ bir türev olsun. Her $a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ ise R komütatif veya $d = 0$ dır.

İspat: Her $a \in R$ için hipotezden $ad(a) - d(a)a = 0$ olur. Bu ifade a üzerinde $b \in R$ ile lineerleştirme yapılırsa,

$$0 = (a+b)d(a+b) - d(a+b)(a+b)$$

$=ad(a)+ad(b)+bd(a)+bd(b)-d(a)a-d(a)b-d(b)a-d(b)b$

olur. Hipotez kullanılırsa her $a,b \in R$ için,

$$ad(b) - d(a)b = d(b)a - bd(a),$$

bulunur.

Öte yandan, d türev olduğu için her $a,b\in R$ için, $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ dir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi bir önceki eşitlikte her iki tarafa eklersek,

$$2ad(b) = d(b)a - bd(a) + d(ab), \quad \forall\ a, b \in R \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) de b yerine $x\in R$ için ax alınırsa,

$$a^2 d(x) = d(a)xa + ad(x)a - axd(a), \quad \forall\ a, x \in R \tag{3.4}$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.3) eşitliğinde b yerine $x\in R$ için xa alınırsa, her $a, x\in R$ için,

$$2ad(x)a+2axd(a)=d(x)a^2+xd(a)a-xad(a)+d(a)xa+ad(x)a+axd(a)$$

olur. Bu ifade de hipotez kullanılırsa, her $a, x \in R$ için, $xad(a)-xd(a)a = 0$ olur. O halde bu eşitsizlik (3.4) ifadesinde yerine yazılacak olursa,

$$d(x)a^2 = ad(x)a + axd(a) - d(a)xa, \quad \forall\ a, x\in R \tag{3.5}$$

bulunur. (3.4) ve (3.5) eşitlikleri toplanırsa,

$$a^2 d(x) + d(x)a^2 = 2ad(x)a, \quad \forall\ a, x \in R \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$a(d(x)a - ad(x)) = (d(x)a - ad(x))a, \quad \forall\ a, x\in R \tag{3.7}$$

olur. (3.7) de a yerine $a +d(x)$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, her $a,x\in R$ için $d(x)(d(x)a - ad(x)) = (d(x)a - ad(x))d(x)$ bulunur. Burada d(x) ile belirlenen $D_{d(x)} :R \to R$ iç türevi düşünülürse yukarıdaki eşitlikten her $a,x\in R$ için $D^2_{d(x)} (a) = 0$ elde edilir.

$charR \neq 2$ olsun. Teorem 3.3 den her $a,x\in R$ için, $D_{d(x)}(a) = 0$ olacağından $d(x)a - ad(x) = 0$ olur. Yani her $a,x\in R$ için, $d(x)a = ad(x)$ dir. O halde her $x\in R$ için $d(x)\in Z$ dir.

T, a ile belirlenen iç türev olmak üzere her $x\in R$ için, $ad(x) - d(x)a = 0$ olduğundan $Td(x) = 0$ dir. Teorem 3.3 den $T =(0)$ veya her $x\in R$ için $d (x) = 0$ bulunur. Yani, $T=(0)$ veya $d=0$ dır. Öyleyse $T=(0)$ ise her $x\in R$ için $ax - xa = 0$ dır. Bu durumda her $x,a \in R$ için $ax = xa$ olur. Yani, $d = 0$ veya R halkası komütatiftir.

$charR = 2$ ise (3.6) nın sağ tarafı sıfır olacağından her $a,x \in R$ için $a^2 d(x) = d(x)a^2$ dir. Yani d(x), R halkasındaki her elemanın karesiyle değişmelidir.

R asal halkasının, $charR = 2$ ve $e\in R$, R halkasındaki her elemanın karesiyle değişmeli olsun.

$$a^2e = e\,a^2, \quad \forall\ a \in R \tag{3.8}$$

(3.8) de a üzerinden $(ab + ba)$ ile lineerleştirme yapılır ve (3.8) kullanılırsa,

$(ab + ba)e = e(ab + ba), \ \forall \ a, b \in R$ (3.9)

bulunur. Bu eşitlikte b yerine ae alınıp yine (3.8) kullanılırsa,

$aeae = eaea, \ \forall \ a \in R$ (3.10)

elde edilir. Benzer şekilde (3.9) da b yerine e alınırsa,

$ae^2 = e^2a, \ \forall \ a \in R$ (3.11)

olur. Her $a \in R$ için $(ae + ea)^2 = aeae + ae^2a + ea^2e + eaea$ dir. Bu ifadede (3.10) eşitliği, (3.11) ve (3.8) eşitlikleri kullanılırsa, her $a \in R$ için $(ae + ea)^2 = 2e^2a^2$ bulunur. charR =2 olduğundan,

$(ae + ea)^2 = 0, \ \forall \ a \in R$ (3.12)

elde edilir.

Şimdi $x,y \in R$ için $xy = 0$ olsun. (3.9) da a, b yerine x, y alnırsa $(xy + yx)e = e(xy + yx)$ dir.Bu ifade kabül göz önünde bulundurularak açılırsa,

$yxe = eyx$ (3.13)

bulunur. $xy = 0$ ise $x^2y = 0$ olduğundan (3.13) den $yx^2e = eyx^2$ olur. (3.8) kullanılırsa, $yex^2 = eyx^2$ elde edilir. charR = 2 ise $yex^2 + eyx^2 = 0$, yani

$(ye + ey)x^2 = 0$ (3.14)

dır. $xy = 0$ ise her $a \in R$ için $(ax)y = 0$ olur. (3.14) de x yerine ax alınır açılırsa $0 = (ye + ey)(ax)^2 = (ye + ey)(axax)$ bulunur. Bu ise Lemma 3.2 kullanılarak,

$ye + ey = 0$ veya $x = 0$

bulunur.

Benzer şekilde, her $v \in R$ için $x(yv) = 0$ olduğundan (3.14) de y yerine yv alınırsa, $yve + eyv = 0$ veya $x = 0$ elde edilir. Yani,

$x = 0$ veya $y(ve - ev) = 0$

olur. Lemma 3.1.1 den $x = 0$ veya $y = 0$ veya her $v \in R$ için $ev = ve$ bulunur. Öyleyse $xy = 0$ ise $x = 0$ veya $y = 0$ veya $e \in Z$ dir. (3.12) düşünülürse, her $a \in R$ için $ae + ea = 0$ veya $e \in Z$ olacağından $e \in Z$ elde edilir. Buna göre her $a, x \in R$ için, $a^2d(x) = d(x)a^2$, ifadesinden, $x \in R$ için,

$d(x) \in Z$

bulunur.

$d(b) = 0$ olsun. Her $a, b \in R$ için $d(ab) \in Z$ dir. Bu ifade açılır ve düzenlenirse, $d(ab) = d(a)b + ad(b) = d(a)b$ bulunur. O halde $d(a)b \in Z$ dir.

$d \neq O$ olsun. $d(a) \neq 0$ olacak biçimde $\exists \ a \in R$ vardır. Her $x \in R$ için, $d(a)bx = xd(a)b = d(a)xb$ dir. Öyleyse bu düzenlenirse, her $x \in R$ için, $d(a)(bx - xb) = 0$, dir. Bu durumda b ile belirlenen iç türev d_b olmak üzere $d(a)d_b(R) = (0)$ olur. Lemma 3.1

den $d(a) = 0$ veya $d_b = 0$ dır. $d(a) \neq 0$ olduğundan $d_b = 0$, yani her $x \in R$ için $bx - xb=0$ bulunur. O halde $b \in Z$ dir. Yani $d(b) = 0$ ise $b \in Z$ dir.

Fakat her $c \in R$ için $d(c^2) = d(c)c + cd(c)$ dir. Her $c \in R$ için $d(c) \in Z$ olduğundan $d(c^2) = 2d(c)c$ olur. Burada charR= 2 ise her $c \in R$ $2d(c)c = 0$ dır. Öyleyse her $c \in R$ için, $d(c^2) = 0$ bulunur. Bu durumda bir önceki elde edilen sonuçtan her $c \in R$ $c^2 \in Z$ dir. Yani, her $x \in R$ için $c^2x = xc^2$ dir. O halde her $x \in R$ için, $x \in Z$ dir. Yani R halkası komütatif olur.

Sonuç olarak her $a \in R$ için, $ad(a)-d(a)a = 0$ ise $d= 0$ veya R halkası komütatif bulunur.

P.H. Lee and T.K. Lee, 1981

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halka d sıfırdan farklı bir türevi ve karakteristiği sıfırdan farklı alınmıştır.

Lemma3.5: R asal halkasının d sıfırdan farklı bir türev, karakteristiği sıfırdan farklı ve $d^2(R) \subset Z$ ise R değişmelidir.

İspat: Herhangi bir $x, y \in R$ için hipotezden $d^2([x, y]) \in Z$ dir. Bu ifade açılır ise, $d^2([x, y])=d(d[x, y])=d([d(x), y]+[x, d(y)])=[d^2(x), y]+[d(x), d(y)]+[d(x), d(y)]+[x, d^2(y)]=[d^2(x), y]+2[d(x), d(y)]+[x, d^2(y)] \in Z$ olur. $d^2(x)$, $d^2(y) \in Z$ olduğundan ilk ve son terim sıfırdır. Sıfır merkezde olduğundan ve merkezin toplamaya kapalılığından $2[d(x), d(y)] \in Z$ bulunur. Her $x, y \in R$ ve charR$\neq$2 olduğundan $[d(R), d(R)] \subset Z$ dir. Önerme 2.44 den R halkası değişmelidir.

Teorem 3.6: R asal halkasının d sıfırdan farklı bir türev, karakteristiği sıfırdan farklı ve her $x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ için R değişmelidir.

İspat: Burada hipotezden her $x \in R$ için x üzerinden x+y ile linerleştirme yapılır ise $[x+y, d(x+y)] \in Z$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenir ise,

$$[x+y, d(x+y)]=[x+y, d(x)+d(y)]=[x, d(x)]+[x, d(y)]+[y, d(x)]+[y, d(y)] \in Z$$

dir. Bu ifadede ilk ve son terim hipotezden dolayı merkezdedir. Ayrıca merkezin toplamaya kapalılığından her $x, y \in R$ için, $[x, d(y)]+[y, d(x)] \in Z$ bulunur. Bu ifadede y yerine $[x, y]$ alınır ise, $[x, d([x, y])]+[[x, y], d(x)] \in Z$ elde edilir. Benzer olarak ifade açılır ise, $[x, d([x, y])]+[[x, y], d(x)]= [x, [d(x), y]+[x, d(y)]]+[[x, y], d(x)]= [x, [d(x), y]+[x, [x, d(y)]]+[[x, y], d(x)]= [x, [d(x), y]]+[x, [x, d(y)]]+[d(x), [y,x]] \in Z$ olur. Bu ifadede Jacobi özdeşliği kullanıldığında her $x, y \in R$ için, $[x, [d(x), y]]+[x, [x, d(y)]]+[y, [x, d(x)]]+[x, [d(x), y]]=[x, [x, d(y)]] \in Z$ bulunur. Yani, her $x, y \in R$ için,

$$[x, [x, d(y)]] \in Z$$

elde edilir. Bu ifadede x yerine x+d(y) alınır ise, $[x+d(y), [x+d(y), d(y)]] \in Z$ dir. Bu açılır ve düzenlenir ise, $[x+d(y), [x+d(y), d(y)]]=[x+d(y), [x, d(y)]+[d(y), d(y)]]=[x, [x, d(y)]]+[d(y), [x, d(y)]] \in Z$ bulunur. Burada $[x, [x, d(y)]] \in Z$ olduğundan ve merkezin toplamaya kapalılığından her $x, y \in R$ için, $[d(y), [x, d(y)]] \in Z$ elde edilir. Burada d(y) ile belirtilen iç türev düşünülür ise her $x \in R$ için, $I_{d(y)}I_{d(y)}(x) \in Z$ yazılabilir. Yani $I^2_{d(y)} \subseteq Z$ olur. Bu ise Lemma 3.5 den her $y \in R$ için, $d(y) \in Z$ elde edilir. Bu durumda $d(R) \subseteq Z$ dir. O halde R halkası değişmelidir.

J. H. Mayne, 1976

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halkasının T özdeşlik dönüşümlerinden farklı bir otomorfizimi ve karakteristiği sıfırdan farklı alınmıştır.

Lemma 3.7: R bir asal halka, T R'nin özdeşlik dönüşümünden farklı bir otomorfizim olsun. Her $x \in R$ için $[x, T(x)] = 0$ ise R değişmelidir.

İspat: Her $x \in R$ için hipotezden $[x, T(x)] \in Z$ dir. Bu ifadede x üzerinden x+y ile linnerleştirme yapılır ise, $[x+y, T(x+y)]=[x+y, T(x)+T(y)]=[x, T(x)] + [x, T(y)]+[y, T(x)] + [y, T(y)] \in Z$ olur. İlk ve son terimler hipotezden dolayı sıfırdır. Bu durumda merkezin toplamaya kapalılığından her $x,y \in R$ için, $[x, T(y)] + [y, T(x)] \in Z$ dir. Yani,

$$[x,T(y)] = [T(x), y], \forall\, x, y \in R \tag{3.15}$$

bulunur. (3.15) ifadesinden y yerine xy alınır ise, her $x, y \in R$ için,

$[x, T(xy)] = [T(x), xy]$ elde edilir. $[x, T(xy)]$ ve $[T(x), xy]$ ifadelerini ayrı ayrı incelenirse,

$$[x, T(xy)] = [x, T(x)T(y)] = [x, T(x)]T(y) + T(x)[x, T(y)] = T(x)[x, T(y)]$$

dir. Benzer şekilde $[T(x), xy] = [T(x), x]y + x[T(x), y] = x[T(x), y]$ bulunur. Bu durumda (3.15) ifadesini de kullanılırsa, her $x, y \in R$ için, $x[x, T(y)] = T(x)[x, T(y)]$ dir. Yani,

$$(x-T(x))[x, T(y)] = 0$$

olur. Elde edilen eşitsizlikte T bir otomorfizm olduğundan örtendir. Bu durumda her $y \in R$ için $T(y) = z \in R$ olacak şekilde $z \in R$ vardır. O halde her $x, z \in R$ için,

$$(x-T(x))[x, z] = 0$$

dır. Burada z yerine yz alınır ise, her $x, z \in R$ için,

$$0 = (x-T(x))[x, yz] = (x-T(x))y[x, z] + (x-T(x))[x, y]z = (x-T(x))y[x, z]$$

bulunur. Bu son ifade her $y \in R$ için sağlandığından $(x-T(x))R[x, z]=(0)$ olur. R asal halka olduğundan her $x \in R$ için, $(x-T(x))=0$ veya her $z \in R$ için $[x, z]=0$ dır.

Burada $A = \{x \in R \mid (x - T(x))=0\}$ ve $B=\{x \in R \mid [x, z]=0, \forall\, z \in R\}$ kümeleri düşünülürse, Brauer's Trick'den A = R veya B = R olmalıdır.

$A=R$ olsun. Her $x\in R$ için, $x-T(x)=0$ ise $x=T(x)$ dir. Bu ise T'nin birim dönüşümünden farklı olması ile çelişir.

O halde $B=R$ dir. Her $z\in R$ için, $[R, z]=(0)$ dır. Yani, $R\subseteq Z$ olur. Bu durumda R değişmelidir.

Lemma 3.8: $x, y\in R$ için $xy = 0$, x sıfırdan farklı ve $x\in Z$ için $y= 0$ dır.

İspat: $x, y\in R$ için hipotezden $xy = 0$ dır. Bu ifadeyi soldan $t\in R$ ile çarpıldığında $txy = 0$ bulunur. Burada $x\in Z$ olduğu kullanılır ise, $xty = 0$ elde edilir. Bu elde edilen eşitsizlik her $t\in R$ için sağlandığından, $xRy = (0)$ bulunur. R bir asal halka olduğundan

$$x=0 \text{ veya } y=0$$

dır. Hipotezde $x\neq 0$ olduğundan $y=0$ dır.

Teorem 3.9: R bir asal halka , T R'nin özdeşlik dönüşümünden farklı bir otomorfizim olsun. Her $x\in R$ için, $[x, T(x)]\in Z$ ise R değişmeli integral bölgesidir.

İspat: $x\in R$ için, $[x, T(x)]=0\in Z$ olsun. Bu durumda Lemma 3.7'den R halkası değişmelidir.

$x\in R$ için, $[x, T(x)]\neq 0\in Z$ olsun. Bu ifade de x üzerinden $y\in R$ için $x+y$ ile linnerleştirilirse,

$$\begin{aligned}[x+y, T(x+y)] &= [x+y, T(x)+T(y)]\\ &=[x, T(x)]+[y, T(x)]+[x, T(y)]+[y, T(y)] \in Z\end{aligned}$$

dir. Hipotezden dolayı ilk ve son terimler merkezdedir. Merkezin toplamaya kapalılığından,

$$[x,T(y)]+[y,T(x)]\in Z,\ \forall\, x, y\in R \qquad (3.16)$$

bulunur. (3.16) ifadesi merkezde olduğundan $x\in R$ için,

$$[x,[x,T(y)]+ [y,T(x)]] = 0,\ \forall\, x, y\in R \qquad (3.17)$$

elde edilir.

R asal halkasının $\text{char}R\neq 2$ olsun. (3.17) ifadesinde y yerine x^2 alınır ise,

$$\begin{aligned}0 &=[x, [x, T(x^2)]+[x^2, T(x)]]\\ &=[x, [x, T(x)T(x)]+[xx, T(x)]]\\ &=[x, [x, T(x)]T(x)+T(x)[x, T(x)]+[x, T(x)]x+x[x, T(x)]]\\ &=2[[x, T(x)][x, T(x)]+T(x)[x, [x, T(x)]]+[x, x][x, T(x)]+x[x, [x, T(x)]]\end{aligned}$$

bulunur. İkinci , üçüncü ve dördüncü terim sıfırdır. Bu durumda $2[x, T(x)][x, T(x)] = 0$ dır. $\text{char}R\neq 2$ olduğundan, her $x\in R$ için,

$$[x, T(x)][x, T(x)] = 0$$

dır. $k\in R$ için ifadeyi sağdan çarpar ve hipotez kullanılırsa, $[x, T(x)]\, k\, [x, T(x)] = 0$ dır. Bu eşitlik her $k\in R$ için sağlandığından $[x, T(x)]R[x, T(x)]=(0)$ dır. R asal halka olduğundan $[x, T(x)]=0$ dır. Bu durumda her $x\in R$ için $[x, T(x)]=0$ ise Lemma 3.7 den R halkası değişmelidir.

Öte yandan R asal halkasının charR=2 olsun. $x\in R$ için $[x^2, T(x)]$ ifadesi hipotez göz önünde bulundurularak açılır ise, her $x\in R$ için, $[x^2, T(x)]=[xx, T(x)] = [x, T(x)]x + x[x, T(x)] = 2x[x, T(x)]$ bulunur. charR = 2 olduğundan her $x\in R$ için,

$$[x^2, T(x)] = 0$$

dır. Benzer biçimde, $x\in R$ için $[T(x)^2, x]$ incelendiğinde $[T(x)^2, x] = [T(x)T(x), x] = [T(x), x]T(x)+T(x)[T(x), x]= 2T(x)[T(x), x]$ bulunur. charR = 2 olduğundan ifade sıfırdır. Yani, her $x\in R$ için,

$$[T(x)^2, x]=0$$

dır. (3.16) ifadesinde y yerine T(x) alınır ise, her $x\in R$ için, $[x, T(T(x))] + [T(x), T(x)] \in Z$ dir. Son terim sıfır ve sıfırın merkezin elemanı olması ayrıca merkezin toplamaya kapalılığından , her $x\in R$ için,

$$[x,T^2(x)]\in Z$$

dir. Ayrıca (3.17) ifadede Jacobi özdeşliği kullanılırsa,

$$[x, [x, T(y)]] + [x, [T(y), x]] + [T(y), [x, x]] + [x, [y, T(x)]] + [y, [T(x), x]] + [T(x), [x, y]]=0$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$[x, [T(y), x]] + [T(x), [x, y]] = 0, \forall x, y\in R \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.19) ifadesinde y yerine $x^3T(x)$ alınır ise, her $x\in R$ için,

$$[x, [T(x^3T(x)), x]]+[T(x), [x, x^3T(x)]] = 0, \forall x, y\in R \tag{3.20}$$

Bu ifadeyi ayrı ayrı inceleyelim. İlk olarak $[x, [T(x^3T(x)), x]]$ ifadesini kabullere göre inceleyecek olursak her $x\in R$ için,

$$\begin{aligned}[x, [T(x^3T(x)), x]] &=[x, T(x^3T(x))x + xT(x^3T(x))]\\ &=xT(x^3T(x))x + x^2T(x^3T(x)) + T(x^3T(x))x^2 + xT(x^3T(x))x\\ &=x^2T(x^3T(x))+2xT(x^3T(x))x+T(x^3T(x))x^2\\ &=x^2T(x^3T(x)) + T(x^3T(x))x^2\\ &=[x^2, T(x^3T(x))]\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde ifade açılır ise her $x\in R$ için,

$$\begin{aligned}[x^2, T(x^3T(x))] &=x[x, T(x^3T(x))]+[x, T(x^3T(x))]x\\ &=x[x, T(x^3)T^2(x)]+[x, T(x^3)T^2(x)]x\\ &=xT(x^3)[x, T^2(x)]+x[x, T(x^3)]T^2(x)+[x, T(x^3)]T^2(x)x + T(x^3)[x, T^2(x)]x\\ &=[x, T(x^3)][x, T^2(x)] + xT(x^2)[x, T(x)]T^2(x) + T(x^2)[x, T(x)]T^2(x)x\end{aligned}$$

Yani, her $x\in R$ için,

$$[x, [T(x^3T(x)), x]]=[x, T(x^3)][x, T^2(x)] + T(x^2)[x, T(x)][x, T^2(x)]$$
$$=2[x, T(x^3)][x,T^2(x)]= 0$$

bulunur. Öte yandan $x\in R$ için charR=2 ise,

$$[x, T(x^2)] =[x, T(x)T(x)]$$
$$=[x, T(x)]T(x) + T(x) [x, T(x)]$$
$$=2T(x)[x, T(x)] = 0$$

dır. Yani her $x\in R$ için,

$$[x,T(x^2)] = 0$$

olur. Yani, bu sonuç bir önceki eşitsizlikte yerine yazılır ise her $x\in R$ için,

$$[x, [T(x^3T(x)), x] = 0$$

dır. Bu elde edilen sonucu (3.20) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$[T(x),[x, x^3T(x)]] = 0, \forall\, x\in R \qquad (3.21)$$

olur. Elde edilen son ifadeyi açar ve düzenlenirse ,

$$0 =[T(x), [x, x^3] T(x) + x^3[x, T(x)]$$
$$=[T(x), x^3][x, T(x)] + x^3[T(x), [x, T(x)]$$
$$=[T(x), x^3][x, T(x)]$$

elde edilir. Ayrıca her $x\in R$ ve charR=2 olduğundan, $[T(x), x^2]=[T(x), x]x + x[T(x), x] = 2x[T(x), x]=0$ olur. Yani, her $x\in R$ için,

$$[T(x),x^2]=0$$

dır. Bu sonucu bir önceki ifadede yerine yazılırsa,

$$0=[T(x), x^3][x, T(x)]$$
$$=x[T(x), x^2][x, T(x)]+[T(x), x]x^2[x, T(x)]$$
$$=[T(x), x] x^2 [x, T(x)] = x^2[x, T(x)]^2$$

elde edilir. Yani,

$$x^2[x, T(x)]^2 = 0 , \forall\, x\in R \qquad (3.22)$$

(3.22) ifadesinde Lemma 3.8 kullanılırsa,

$$[x, T(x)]\neq 0 \text{ ve } x^2[x, T(x)]^2=0 \text{ ise } x^2 = 0$$

dır. Buna göre $T(x)^2 = T(x^2) = 0$ ve $(T^2(x))^2 = T^2(x^2) = T(T(0)) = T(0) = 0$ olur. Ayrıca, $(T(x)x)(xT(x)) = T(x)xxT(x) = 0$ dır. Ayrıca $x\in R$ için, $[x, T(x)] =xT(x) + T(x)x = z$ olacak şekilde $z\in Z$ olsun. $x\in R$ ve $z\in Z$ için, $(xT(x) + z)(xT(x)) = xT(x)\, xT(x) + zxT(x) = (xT(x))^2 + zxT(x)$ elde edilir.Yani,

$$(xT(x))^2 = zxT(x)$$

bulunur.$(xT(x))^2 = 0$ olsun. Bu ise $z\in Z$ ve $x\in R$ için, $zxT(x) = 0$ olur. Bu elde ettiğimiz ifadede $k\in R$ için sağdan çarpar ve $z\in Z$ olduğu kullanılır ise, $0 = kzxT(x) = zkxT(x)$ olur.

Bu ise her $k\in R$ için sağlandığında $zRxT(x) = (0)$ dır. R asal halka olduğundan $z=0$ veya $xT(x) = 0$ dır. Yani, $x\in R$ ve $z\in Z$ için,

$$z = [x, T(x)] = 0 \text{ veya } xT(x) = 0$$

olur. Şimdi $x\in R$ için $xT(x) = 0$ olsun. O halde $[x, T(x)]x = xT(x)x + T(x)xx= 0$ olur. Bu durumda $r\in R$ için $[x,T(x)] \in Z$ olduğu kullanılır ise, $[x, T(x)]rx = 0$ bulunur. Her $r\in R$ için sağlandığından $[x,T(x)]Rx = (0)$ dır. R asal halka olduğundan $x\in R$,

$$[x,T(x)] = 0 \text{ veya } x = 0$$

dır. Burada $x\in R$ için $xT(x)\neq 0$ olsun. (3.22) ifadesinde x yerine $xT(x)$ alınır ise, $(xT(x))^2[xT(x), T(xT(x))]^2 = 0$ olur. Lemma 3.8'den $[xT(x), T(xT(x))] = 0$ dır.Yani $x\in R$ için, $0 = [xT(x), T(xT(x))] = x[T(x), T(x)T^2(x)] + [x, T(x)T^2(x)]T(x) = 0$ olur. Bu son ifadeyi x ile sağdan çarpar ve koşullar kullanılacak olursa ,

$$\begin{aligned}0&=x(x[T(x), T(x)T^2(x)]+[x, T(x)T^2(x)]T(x))\\&=x^2[T(x), T(x)T^2(x)] + x[x, T(x)T^2(x)] T(x)\\&=x[x, T(x)T^2(x)]T(x)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeyi açar ve düzenlenirse, her $x\in R$ için,

$$\begin{aligned}0 &=x[x, T(x)T^2(x)]T(x)\\&=x[x, T(x)]T^2(x)T(x)+xT(x)[x, T^2(x)]T(x)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $x\in R$ ve charR=2 olduğundan $x [x, T(x)] T^2(x)T(x) = xT(x)[x, T^2(x)] T(x)$ olduğundan bu son ifadede kullanılırsa $x[x, T(x)] T^2(x)T(x) = xT(x)T(x)[x, T^2(x)] = x(T(x))^2[x, T^2(x)] = 0$ bulunur. O halde $x\in R$ için,

$$x[x, T(x)] T^2(x) T(x) = xT(x)[x, T^2(x)] T(x) = 0$$

olur. Ayrıca $x\in R$ için, $x [x, T(x)] T^2(x) T(x) = 0$ ifadesi ayrı olarak incelenirse, $[x, T(x)] \in Z$ olduğu kullanılırsa $[x, T(x)] xT^2(x) T(x) = 0$ olur. Burada Lemma 3.8 uygulanırsa, $[x, T(x)]\neq 0\in Z$ ve $[x, T(x)]xT^2(x) T(x)=0$ ise $xT^2(x) T(x) = 0$ olur. Bu durumda $x\in R$ için $[x, T^2(x)] T(x)$ ifadesini inceleyelim. $[x, T^2(x)]T(x)=xT^2(x) T(x)+T^2(x) T(x)=T^2(x)T(x)$ dir. Bu eşitlik $T^2(x)[x, T^2(x)]T(x)$ ifadesinde yerine yazılır ve kabüllerimi göz önüne alacak olursak,

$$\begin{aligned}T^2(x)[x, T^2(x)]T(x) &=T^2(x) T^2(x)xT(x)\\&=T^2(x^2)xT(x) =0\end{aligned}$$

olur. O halde, $x\in R$ için,

$$T^2(x)[x, T^2(x)]T(x) = 0$$

bulunur. Her $x\in R$ ve $[x, T^2(x)]\in Z$ ise $T^2(x)T(x)[x, T^2(x)]=0$ dır. Lemma 3.8'den $[x, T^2(x)]\neq 0$ ise $T^2(x)T(x)=0$ olur. Yani T otomorfizim olduğundan 1-1 dir. Bu durumda $T^2(x) T(x) = T(T(x)x) = 0$ dır. O halde her $x\in R$ için,

$$[x, T^2(x)]\neq 0 \text{ ise } T(x)x = 0$$

bulunur. Her $x \in R$ için ,

$$xT(x) = 0 \text{ ve } x = 0 \text{ iken } [x, T(x)] = 0$$

olur. $[x, T^2(x)] \neq 0$ olsun. (3.17) ifadesinde y yerine xT(x) yazılır ve kabulüm uygulanacak olursa,

$$\begin{aligned} 0 &= [x, [x, T(xT(x))]+[xT(x), T(x)]] \\ &= [x, [x, T(x)T^2(x)]+[xT(x), T(x)]] \\ &= [x, T(x)[x, T(x)]+T(x)[x, T^2(x)]+[x, T(x)]\, T^2(x)] \\ &= [x, T(x)][x, T(x)]+2[x, T(x)][x, T^2(x)] \\ &= [x, T(x)]^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise her $x \in R$ için,

$$[x, T(x)]^2 = 0 \text{ ise } [x, T(x)] = 0$$

olur. O halde Lemma 3.8 den her $x \in R$ için $[x, T(x)] = 0$ iken R halkası değişmelidir.

Bu durumda charR=2 ve $\text{charR} \neq 2$ olduğunda R halkası değişmelidir.

Teoremin geri kalanını ispatlamak için sıfır bölensiz ve birimli olması incelenir. $0 \neq x \in R$, $y \in R$ için $xy = 0$ olsun. $t \in R$ için ifade sağdan (soldan) çarpılır ve R'nin değişmeli olduğu kullanılırsa , $xty = 0$ olur. Her $t \in R$ için sağlandığından $xRy = (0)$ dır. R asal halka olduğundan

$$x = 0 \text{ veya } y = 0$$

dır. Hipotezden $x \neq 0$ olduğundan $y = 0$ dır. O halde , $0 \neq x \in R$ ve $xy = 0$ iken $y = 0$ dır. Bu durumda R halkası sıfır bölensizdir.

Birim eleman var ve e olsun. Her $k \in R$ için $ke = ek = k$ olur. $ke = k$ ise $ke - k = 0$ dır. Sıfır bölensiz olduğundan $k(e-1) = 0$ olur. Her $k \in R$ için $k \in Z$ olduğundan Lemma 3.8 den $k \neq 0$ dır. O halde $e - 1 = 0$ dır. Yani $e = 1$ dir. Benzer biçimde $ek = k$ olduğundan $e = 1$ dir. Bu durumda birimi vardır. O halde R halkası integral bölgesidir.

J. H. Mayne, 1982

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halkanın T özdeşlik dönüşümlerinden farklı bir otomorfizimi, U sıfırdan farklı ideali, karakteristiği sıfırdan farklı alınmıştır.

Lemma 3.10: R bir asal halka $a, b \in R$ ve her $r \in R$ için, $b[a, r] = 0$ ise $b=0$ veya $a \in Z$ dir.

İspat: Hipotezden her $r \in R$ için $b[a, r] = 0$ olur. Bu ifadede r yerine $x,y \in R$ için xy alınır ve hipoteze göre düzenlenirse,

$$0 = b[a, xy] = b[a, x]y + bx[a, y] = bx[a, y]$$

bulunur. Her $x \in R$ için $bx[a, y]=0$ olur. Yani, $bR[a, y] = (0)$ dır. R asal halka olduğundan $b=0$ veya her $y \in R$ için $[a, y] = 0$ bulunur. Bu durumda,

$b=0$ veya $a\in Z$

dir.

Lemma 3.11: R bir asal halka, d R'nin bir türevi ve U ise sıfırdan farklı R' nin bir sağ ideali olsun. Her $u\in U$ için $d(U) = (0)$ ise her $r\in R$ için $d(r) = 0$ dır.

İspat: $u \in U$, $x\in R$ ve $ux\in U$ olduğundan hipotezden, $d(ux)=0$ dır. Bu ifade açılır ve hipoteze göre düzenlenirse,

$$0=d(ux)=d(u)x+ud(x)=ud(x)$$

bulunur. Her $x\in R$ için, $ud(x) =0$ olur. Bu ifadede x yerine $s,r \in R$ için rs alınır ise,

$$ud(rs) =d(r)s+urd(s)=urd(s)$$

elde edilir. Bu durum her $r\in R$ için sağladığından $uRd(s)=(0)$ dır. R asal halka olduğundan,

$$u=0 \text{ veya her } s\in R \text{ için } d(s)=0$$

olur. Her $u\in U$ için $u=0$ olduğundan $U = (0)$ olur. Bu ise hipotezimle çelişir. O halde her $s \in R$ için $d(s)=0$ olur.

Lemma 3.12: R bir asal halka, T R' nin bir homomonfizmi ve U R' nin sıfırdan farklı sağ ideali olsun. Her $u\in U$ için $T(u)=u$ ise her $x\in R$ için $T(r)= r$ dir.

İspat: $u \in U$ $r, s \in R$ ve $us, usr\in U$ olduğundan hipotezden, $T(usr)=usr$ dir. Bu ifade açılır ve düzenlenirse,

$$T(usr) = usr = T(us)T(r) = usT(r)$$

elde edilir. O halde her $s, r\in R$ ve her $u\in U$ için $usr = usT(r)$ dir. O halde,

$$usr- usT(r) = 0$$

olur. Bu durumda her $s\in R$ için $us(r-T(r)) = 0$ dır. O halde $u R(r-T(r)) = (0)$ dır.R asal halka olduğundan her $u\in U$ için, $u=0$ veya her $r\in R$ için $r-T(r)=0$ dır. Yani,

$$U=(0) \text{ veya her } r\in R \text{ için } T(r) = r$$

dir. $U\neq 0$ olduğundan her $r\in R$ için $T(r) = r$ dir.

Lemma 3.13: R asal halkasının sıfırdan farklı değişmeli bir ideali var ise R halkası değişmelidir.

İspat: $u\in U$ için $u^2\neq 0$ olsun. [Herstein I. N., 1969, Lemma 1.1**]** den R asal halkasının sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur. Yani her $u\in U$ için $u^2=0$ olur ise $UU=(0)$ bulunur. Bu ise $URU \subset UU$ olur. Bu durumda kapsamadan dolayı,

$$URU \subset UU = (0)$$

olur. Bu ise $URU=(0)$ olduğunu gösterir. Öte yandan bu ifadede R asal halka olduğundan $U=0$ bulunur. Bu ise hipotezimle çelişir. O halde her $u\in U$ için $u^2\neq 0$ dır.

Her r, s$\in$ R , u $\in$ U için ur, us$\in$ U olur. Burada u^2sr ifadesini U idealinin değişmeli olduğu kullanılarak açılacak olursa,

$$u^2sr = u(us)r=us(ur)=ur(us) =u (ur)s=u^2 rs$$

elde edilir. Yani u$\in$ U ve her s, r $\in$ R için,

$$u^2 sr- u^2 rs =0$$

bulunur. Bu durumda her s, r $\in$ R için ,

$$u^2 (sr-rs)= u^2 [s,r] = 0$$

elde edilir. Buradan Lemma 3.10 için gerekli koşulları sağladığından sonucu uygalayacak olursak, her u$\in$ U, r$\in$ R için,

$$u^2 =0 \quad \text{veya her } s\in R \text{ için } [s,r] = 0$$

olur. Yani ,$u^2 \neq 0$ olduğundan her r $\in$ R için r $\in$ Z dir. O halde R değişmelidir.

Teorem 3.14: R asal halka U R' nin sıfırdan farklı bir ideal olsun. T R' nin özdeşlik dönüşümden farklı bir otomorfizm veya türev olsun . Her u$\in$ U için [u, T(u)]$\in$ Z ve T(u)$\in$ U ise R değişmelidir.

İspat: U R'nin sıfırdan farklı bir ideali ise aynı zamanda bir asal halkadır. T R'nin sıfırdan ve birimden farklı dönüşüm olduğundan Lemma 3.11 ve Lemma 3.12 den U ideali içinde sıfırdan ve birimden farklı dönüşüm olduğu ispatlanır. O halde hipotezden T otomorfizim olduğu için Teorem 3.9 dan her u$\in$ U alındığından [u, T(u)] $\in$ Z ise U değişmelidir. Bu ise Lemma 3.13 den R nin değişmeli olduğunu ispatlanır.

Aynı zamanda T bir türev olduğundan U bir asal halka ise her u $\in$ U için, [u, T(u)] $\in$ Z ise Teorem 3.6 dan U' nun değişmeli olduğu bulunur. Benzer şekilde Lemma 3.13 koşullarını sağladığından R nin değişmeli olduğu ispatlanır.

J. H. Mayne, 1991

Bu makalede aksi belirtilmedikçe, R asal halkanın T özdeşlik dönüşümlerinden farklı bir otomorfizimi, U sıfırdan farklı Lie ideali, karakteristiği sıfırdan farklı alınmıştır.

Lemma 3.15: R asal halkasının U sıfırdan farklı bir Lie ideali ve T özdeşlik dönüşümünden farklı bir otomorfizmi olsun. Her x$\in$ U için, xT(x) −T(x) x$\in$ Z ise T(x)

$\in Z$ dir.

İspat: Her $x\in U$ için hipotezden, $[x, T(x)]\in Z$ ifadesinde x üzerinden $y\in R$ için, x+y ile linnerleştirme yapılır ve düzenlenirse her x, $y\in U$ için,

$$[x+y, T(x+y)] =[x+y, T(x)+T(y)]$$

$$=[x, T(x)]+[x, T(y)]+[y, T(x)]+[y, T(y)] \in Z$$

bulunur. Eşitliğin ilk ve son terimi hipotezden dolayı merkezde olacağından ve merkezin toplamaya kapalı olduğundan her x, $y\in U$ için,

$$[x, T(y)] + [y, T(x)] \in Z$$

olur. Bu son ifadede y yerine $r\in R$ için $[x,r]\in U$ alınır ise, her $x\in U$, $r \in R$ için,

$$[x, T([x, r])] + [[x, r], T(x)]\in Z$$

bulunur. Burada Jacobi özdeşliği uygulanırsa, her $x\in U$, $r\in R$ için,

$$[x, [T(x), T(r)]] - [x, [T(x), r]] \in Z$$

dir. Yani,

$$[x, [T(x), r - T(r)]]\in Z, \forall x\in U, r \in R \tag{3.23}$$

bulunur. (3.23) ifadesinde r yerine xT(x)x alınır, hipotez kullanılır ve düzenlenirse, her $x \in U$ için,

$[x, [T(x), xT(x)x -T(xT(x)x)]]=[x, [T(x), xT(x)x]]-[x, [T(x), T(xT(x)x)]]=[x, x[T(x), T(x)x]+[T(x), x]T(x)x]-[x, T(x)[T(x), T(T(x))T(x)]]=[x, xT(x)[T(x), x]+[T(x), x]T(x)x] - [x, T(x)T(x)[T(x), T(T(x))]]=[x, xT(x)][T(x), x]+[T(x), x][x, T(x)x]-[x, T(x)T(x)][T(x), T(T(x))]=x[x, T(x)][T(x), x]+[T(x), x][x, T(x)]x-T(x)[x, T(x)][T(x), T(T(x))]-[x, T(x)][T(x), [T(x), T(T(x))]=2x[x, T(x)][T(x), x]-2T(x)[x, T(x)][T(x), T(T(x))] \in Z$

olur. Bu ifade her $x\in U$ için,

$0=[T(x), 2x[x, T(x)][T(x), x]-2T(x)[x, T(x)]]=2[T(x), x][x, T(x)][T(x), x]-2[T(x), T(x)[x, T(x)]]=2[T(x), x][x, T(x)][T(x), x]$

bulunur. Bu durumda char$R\neq 2$ olduğunda her $x\in U$ için ,

$$[x, T(x)][x, T(x)][T(x), x]=0$$

bulunur. Bu son eşitsizlik $s\in R$ ile çarpar ve hipoteze göre düzenlenirse, her $x\in U$ için,

$[x,T(x)]s[x,T(x)][T(x),x]=0$ bulunur. Bu koşul her $s\in R$ için sağladığından $[x, T(x)]R[x, T(x)] [T(x), x] = (0)$ olur. R asal halka olduğundan $[x, T(x)] = 0$ veya $[x, T(x)][T(x), x] = 0$ olur. Aynı şekilde $[x, T(x)][T(x), x] = 0$ içinde uygulanırsa, her $x\in U$ için,

$$[x,T(x)]=0$$

bulunur. O halde her $x\in U$ için,

$$T(x) \in Z$$

dir.

Lemma 3.16: Her $x\in U$ ve $r\in R$ için $(x,T(x))\ [T(x), [x, r]] = 0$ dır.

İspat: Lemma 3.15 den her $x\in U$ için $[x, T(x)] = 0$ dır. Bu ifade x üzerinden x+y ile linnerleştirme yapılırsa her $x, y\in U$ için,

$$0=[x+y, T(x+y)]=[x+y, T(x)+T(y)]=[x, T(x)]+[x, T(y)]+[y, T(x)]+[y, T(y)]$$

olur. Hipotezden eşitliğin ilk ve son terimi sıfır olduğundan her $x, y\in U$ için,

$$[x, T(y)]+[y, T(x)]=0$$

dır. Bu ifadede y yerine $r\in R$ için $[x, r]\in U$ yazılır ve (3.23) ifadesi kullanılır ise,

$$[x,[T(x), r-T(r)]]=0,\ \forall\ x\in U,\ r\in R \tag{3.24}$$

bulunur. Son eşitsizlikte r yerine xr alınır ise, her $x\in U$ ve $r\in R$ için,

$$0=[x, [T(x), xr-T(xr)]]=[x, [T(x), xr-T(x)T(r)]]=[x, [T(x), xr]-[T(x), T(x)T(r)]]$$
$$=[x, x[T(x), r]- T(x)[T(x), T(r)]]=x[x, [T(x), r]-T(x)[x, [T(x), T(r)]]$$

bulunur. Öte yandan (3.24) özdeşliğini $T(x)\in R$ ile sağdan çarpılır ise her $x\in U$ ve $r\in R$ için,

$$T(x)[x, [T(x), r-T(r)]]=0$$

elde edilir. Bu ifade açılır ise $T(x)[x, [T(x), r]] - T(x)[x, [T(x), T(r)]] = 0$ olur. Yani, her $x \in U$ ve $r \in R$ için,

$$T(x)[x, [T(x), r]]=x[x, [T(x), r]]$$

dır. Her $x\in U$ ve $r\in R$ için $(x-T(x))[x, [T(x), r]] = 0$ dır. Bu son ifadede Jacobi özdeşliği kullanılırsa,

$$0=(x-T(x))[x, [T(x), r]]+[T(x), [r, x]]+[r, [x, T(x)]]=(x-T(x))[x, [T(x), r]]+(x-T(x))[T(x), [r, x]]+(x-T(x))[r, [x, T(x)]]$$

elde edilir, Hipotezden ilk ve son terim sıfır olduğundan her $x\in U$ ve $r\in R$ için,

$$(x-T(x))[T(x), [x, r]] = 0$$

bulunur.

Lemma 3.17: Her $x\in U$ ve $r\in R$ için $(x-T(x))[x, r](x-T(x)) = 0$ ve $(x-T(x))[T(x), r](x-T(x)) = 0$ dır.

İspat: Lemma 3.16 dan her $x\in U$ ve $r\in R$ için $(x-T(x))[T(x), [x, r]] = 0$ dır. Bu ifadede r yerine $s\in R$ için rs alınır ve düzenlenir ise,

$$0=(x-T(x))[T(x), [x, rs]]=(x-T(x))[T(x), r[x, s]+[x, r]s]=(x-T(x))\{r[T(x), [x, s]]+[T(x), r][x, s]+[T(x), [x, r]]s+[x, r][T(x), s]\}$$

elde edilir. Bu ifadede Lemma 3.16 kullanacak olunursa, her $x\in U$ ve $r, s\in R$ için,

$$0=(x-T(x))\{r[T(x), [x, s]]+[T(x), r][x, s]+[x, r][T(x), s]\}$$

elde edilir. Bu ifadede s yerine $(x-T(x))s$ alınırsa,

$$0=(x-T(x))\{r[T(x), [x, (x-T(x))s]+(x-T(x))[T(x), r][x, (x-T(x))s]+[x, r][T(x), (x-T(x))s]\}, \ \forall\ x\in U \text{ ve } r, s\in R \qquad (3.25)$$

elde edilir. Aynı şekilde s yerine $[x, s]$ alınır ve Lemma 3.16 kullanılırsa her $x\in U$ ve $r, s\in R$ için,

$$(x - T(x))[T(x), r](x-T(x))[x, [x, s]] = 0, \forall\, x\in U \text{ ve } r, s\in R \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.26) ifadesinde r yerine $t \in R$ için rt alınır ve düzenlenirse,

$$0=(x-T(x))r[T(x), t] (x-T(x))[x, [x, s]]+(x-T(x))[T(x), r] t (x-T(x))[x, [x, s]]$$

bulunur. Elde ettiğimiz son ifadede r yerine r(x-T(x)) alalım. Her $x\in U$ ve $r, s\in R$ için ,

$$0= (x-T(x))r(x-T(x))[T(x), t](x-T(x))[x, [x, s]]+(x-T(x))[T(x), r(x-T(x))]t(x-T(x))[x, [x, s]]=(x-T(x))r (x-T(x))[T(x), t](x-T(x))[x, [x, s]]+(x-T(x))[T(x), r](x-T(x)t(x-T(x))[x, [x, s]]+(x-T(x))r[T(x), (x-T(x)]t(x-T(x))[x, [x, s]]$$

olur. Eşitliğin son iki terimi bir önceki ifadeden dolayı sıfır olacağından, her $x\in U$ için,

$$(x-T(x))[T(x), r](x-T(x))t(x-T(x))[x, [x, s]] = 0$$

bulunur. Bu eşitlik her $t\in R$ için sağlandığından,

$$(x-T(x))[T(x), r](x-T(x))R(x-T(x))[x, [x, s]]=(0)$$

olur. R asal halka olduğundan, her $x\in U$ ve $r,s\in R$ için,

$$(x-T(x))[T(x), r](x-T(x)) = 0 \text{ veya } (x-T(x))[x, [x, s]] = 0$$

bulunur. $A=\{ x \in R \mid (x-T(x))[T(x), r](x-T(x)) = 0, \forall r\in R\}$ ve $B = \{ x \in R \mid (x-T(x))[x, [x, s]] = 0, \forall s\in R\}$ kümelerini alalım. A ve B kümeleri R nin alt halkası $R=A\cup B$ ve olduğundan Brauer's Trick den R = A veya R = B dir.

R = A olsun. Yani her $x\in R$ için $(x-T(x))[T(x), r](x-T(x)) = 0$ olur. (3.25) ifadesinde r yerine r(x-T(x)) alınırsa,

$$(x-T(x))\{r(x-T(x))[T(x)[x, s]]+[T(x), r(x-T(x))][x, s]+[x, r(x-T(x))][T(x), s]\}=(x-T(x))r(x-T(x))[T(x), [x,s]]+(x-T(x))[T(x), r](x-T(x))[x, s]+(x-T(x))[x, r](x-T(x))[T(x), s]= (x-T(x))[T(x), r](x-T(x))[x, s]+(x-T(x))[x, r](x-T(x))[T(x), s]=0$$

bulunur. Son ifadede kabulümüz kullanılırsa her $x\in U$ ve $r, s\in R$ için,

$$(x-T(x))[x, r](x-T(x))[T(x), s] = 0$$

elde edilir. Yani $(x-T(x))[T(x), r](x-T(x)) = 0$ iken $(x-T(x))[x, r](x-T(x)) = 0$ dır. Bu durumda İspat biter.

R = B olsun. Bu durumda her $x\in R$ için, $(x-T(x))[x, [x, s]] = 0$ olsun. Bu son ifadede s yerine $r\in R$ için rs alınır ise,

$$(x-T(x))[x, [x, rs]]=(x-T(x))[x, r[x, s]+[x, r]s]=(x-T(x))\{r[x, [x, s]]+2[x, r][x, s]\}=0$$

bulunur.Benzer şekilde r yerine r (x-T(x)) alınır ve düzenlenirse,

$$(x-T(x))[x, r](x-T(x))[x, s] = 0$$

bulurnur. O halde her $x\in U$ ve $r, s\in R$ için,

$$(x-T(x))[x, r](x-T(x)) = 0$$

dır.İspatım biter.

Lemma 3.18: $x\in U$ ve $(x-T(x))^2\neq 0$ ise $x\in Z$ dir.

İspat: Her $x\in U$ için Lemma 3.17 den $(x-T(x))[x, r](x-T(x)) = 0$ dır.Bu ifadede r yerine $s\in R$ için rs alınır ise,

$$0 = (x-T(x))[x, rs](x-T(x))=(x-T(x))[x, r]s(x-T(x)) + (x-T(x))r[x, s](x-T(x))$$

bulunur. Elde ettiğimiz eşitsizlikte r yerine $[T(x), r]$ alınır ve Lemma 3.17 kullanılır ise her $x\in U$ ve $r, s\in R$ için,

$$0=(x-T(x))[x, [T(x), r]]s(x-T(x))+(x-T(x))[T(x), r][x, s](x-T(x))=(x-T(x))[T(x), r][x, u] (x-T(x))$$

bulunur.Yani,

$$(x-T(x))[T(x), r][x, s](x-T(x)) = 0, \forall x\in U \ r, s\in R \qquad (3.27)$$

olur. Oluşturduğumuz (3.27) ifadesinde s yerine $[T(x), s]$ alınır ise, her $x\in U$ ve $r, s\in R$ için,

$$(x-T(x))[x, r][T(x), s](x-T(x)) = 0, \forall x\in U \text{ ve } r, s\in R \qquad (3.27)'$$

olur. Şimdi (3.27)' ifadesinde r yerine $t\in R$ için rt alınır ise, her $x\in U$ ve $r, s\in R$ için, 0= (x-T(x))[x, rt][T(x), s] (x-T(x)) = (x-T(x))[x, r] + [T(x), s](x-T(x)) + (x-T(x)) r[x, t][T(x), s](x-T(x))

elde edilir. Bulunan son eşitsizlikte r yerine [x, r] alınır ve Lemma 3.15 kullanılır ise,

$$(x-T(x))[x, r][T(x), t][x, s](x-T(x))=0, \ \forall x\in U \ t, s, r\in R \tag{3.28}$$

bulunur.

Ayrıca (x-T(x))[x, r][T(x), t][x, s](x-T(x)) ifadesini açıp Lemma 3.15 ve (3.28) kullanılacak olursa,

$$(x-T(x))[x, r][x, t][x, s](x-T(x)) = 0, \ \forall x\in U \ t, s, r \in R \tag{3.29}$$

(3.27) ifadesinde s yerine ts alınırsa,

0=(x-T(x))[T(x), r][x, ts](x-T(x))=(x-T(x))[T(x), r][x, t]s(x-T(x))+(x-T(x)) [T(x), r]t[x, s](x-T(x))

bulunur. Son elde ettiğimiz ifadede s yerine [T(x), s] alınır ise, her x∈ U ve r, s, t∈ R için,

$$(x-T(x))[T(x), r][x, t][T(x), s](x-T(x)) = 0$$

elde edilir. Bu ifadeyi (3.29) ile eşitlenir ve düzenlenir ise, her x∈ U ve r, s, t∈ R için,

$$0=(x-T(x))[x-T(x),r][x,t][x-T(x),s](x-T(x))=\{(x-T(x))^2r-(x-T(x))r(x-T(x))\}[x,t]\{(x-T(x))s(x-T(x))-s(x-T(x))^2\}$$

bulunur. Elde ettiğimiz ifadede r yerine [T(x), r] alınır (3.27) ve Lemma 3.15 kullanılır ise her x∈ U ve t, s, r∈ R için,

$$(x-T(x))^2[T(x), r][x, t]s(x-T(x))^2 =0$$

elde edilir. Her s∈ R için sağlandığından, $(x-T(x))^2[T(x), r][x, t]R(x-T(x))^2=(0)$ olur. Bu ise R asal halka olduğundan her x∈ U ve t, r∈ R için,

$$(x-T(x))^2[T(x), r][x, t]=0 \text{ veya } (x-T(x))^2=0$$

dır. Hipotezden dolayı her $x\in U$ ve $r, t\in R$ için, $(x-T(x))^2[T(x), r][x, t]=0$ olur. Burada t yerine $s\in R$ için, ts alınır ise,

$$0=(x-T(x))^2[T(x), r][x, ts]=(x-T(x))^2[T(x), r][x, t]s+(x-T(x))^2[T(x), r]t[x, s]=(x-T(x))^2[T(x), r]t[x, s]$$

bulunur. Son eşitsizlik her $t\in R$ için sağlandığından, $(x-T(x))^2[T(x), r]R[x, s]=(0)$ olur. R asal halka olduğundan her $x\in U$ ve $r, s\in R$ için, $(x-T(x))^2[T(x), r] = 0$ veya $[x, s]=0$

dır. Yani,

$$(x-T(x))^2[T(x), r] = 0 \text{ veya } x\in Z$$

bulunur. O halde $A=\{ x\in U \mid (x-T(x))^2[T(x), r] = 0, \forall r\in R \}$ ve $B = \{x \in U \mid x \in Z \}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B kümeleri U nunu alt halkası ve $U=A\cup R$ olduğundan Brauer's Trick den A = U veya B = U olmalıdır.

A =U olsun. Bu durumda her $x\in U$ ve $r\in R$ için $(x-T(x))^2[T(x), r]=0$ olur. Bu ifadede r yerine $t\in R$ için rt alınır ve düzenlenirse,

$$0 = (x-T(x))^2[T(x), rt]=(x-T(x))^2[T(x), r]t+(x-T(x))^2r[T(x), t]=(x-T(x))^2r[T(x), r]$$

olur. Bulduğumuz son eşitsizlik her $r\in R$ için sağlandığından, $(x-T(x))^2R[T(x), t]=(0)$ olur. R asal halka olduğundan, $(x-T(x))^2 =0$ veya her $t\in R$ için $[T(x), t]=(0)$

olur. Yani,

$$(x-T(x))^2 =0 \text{ veya } T(x)\in Z$$

dir. Hipotezden dolayı $(x-T(x))^2 \neq 0$ olduğundan, $T(x)\in Z$ olur. Bu durumda bulduğumuz ifadeyi kullanarak T otomorfizimi $x, y\in U$ için,

$$T(xy)=T(x)T(y)=T(y)T(x)=T(yx)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse, $x, y\in U$ için, $T(xy)= T(yx)$ dir. Yani, $T(xy)-T(yx)=T(xy-yx)=0$ olur. Bu durumda T otomorfiziminin 1-1 olduğundan $xy-yx=0$ dır. O halde ,her $x\in U$ için,

$$T(x)\in Z \text{ ise } x\in Z$$

dir.

B = U olduğunda da her $x\in U$ için, $x\in Z$ dir.Bu durumda her $x\in U$ için, $x\in Z$ elde edilir.

Lemma 3.19 : $x\in U$ ve $(x-T(x))\neq 0$ ise $x\in Z$ dir.

İspat: Her $x\in U$ ve iken $(x-T(x))^2 \neq 0$ olsun. Bu durumda Lemma 3.18'den $x\in Z$ dir. İspat biter.

O halde $(x-T(x))^2 =0$ olsun. (3.23) eşitliğinde x üzerinden $y\in R$ için x+y ile linnerleştirme yapılır ve düzenlenir ise,

$$0=[T(x+y), [x+y, r-T(r)]]=[T(x)+T(y), [x, r-T(r)]+[y, r-T(r)]]=[T(x), [x, r-T(r)]+[T(x), [y, r-T(r)]]+[T(y), [x, r-T(r)]]+[T(y), [y, r-T(r)]]$$

bulunur. Bu ifadede (3.23) den ilk ve son terim sıfır olduğundan,

$$[T(x), [y, r-T(r)]][T(y), [x, r-T(r)]] = 0$$

dır. Son ifadede r yerine x alınır ve düzenlenir ise,

$$0=[T(x), [y, x-T(x)]]=[T(x), y(x- T(x))-(x- T(x))y]$$

bulunur. Yani,

$$(x- T(x))[T(x), y]=[T(x), y](x- T(x)),\ \forall\ x, y\in U \qquad (3.30)$$

Lemma 3.17'de her $x\in U$ ve $r\in R$ için,

$$(x- T(x))[T(x), r](x- T(x))=0$$

dır. Bulunan son eşitsizlikte r yerine yz alınır ve düzenlenirse,

$$0=(x- T(x))[T(x), yz](x- T(x))=(x- T(x))[T(x), y]z(x- T(x))+(x- T(x))y[T(x), z](x- T(x))$$

elde edilir. Bu son ifadede (3.30) ifadesini kullanacak olunur ise,

$$[T(x), y](x-T(x))z(x-T(x))+(x-T(x))y(x-T(x))[T(x), z]=0$$

bulunur. Burada $y\in U$ yerine $[y, r] \in U$ alınır açılır ve düzenlenir ise her x, $y, z \in U$, $r\in R$

$$[T(x), [y, r]](x- T(x))z(x- T(x))+(x- T(x))[y, r](x- T(x))[T(x), z]=0 \quad (3.31)$$

Aynı zamanda her x, y $\in$ U için [T(x), [y, r(x-T(x))]]=0 ifadesini açar ve düzenlenir ise her x ,y$\in$ U , r$\in$ R için,

$$[T(x), [y, r(x-T(x)]]=[T(x), r][y, x-T(x)]+[T(x), [y, r]](x-T(x)) \quad (3.32)$$

Öte yandan (3.31) ifadesinde r yerine r(x-T(x)) yazar ve hipotez kullanılırsa her x, y $\in$ U ve r$\in$ R için,

$$0=[T(x), [y, r(x-T(x)]](x-T(x))z(x-T(x))+(x-T(x)[y, r(x-T(x)]](x-T(x)[T(x), z]$$

$$=[T(x), r][y, (x-T(x)](x-T(x))[T(x), z]=0$$

veya

$$[T(x), r](x-T(x))y(x-T(x))z(x–T(x))r(x-T (x))y(x – T(x))[T(x), z] =0$$

dır. Bulunan son eşitsizlikte y yerine [y, r] alınır ve (3.30) ifadesi kullanılırsa,

$$0=(x –T(x))[T(x), [y, r]]y(x–T(x)]z(x–T (x))+(x–T(x))[y, r](x–T(x))y(x–T(x))[T(x), z],$$
$\forall$ x, y, z$\in$ U, $\forall$ r$\in$ R (3.33)

Lemma 3.17 kullanılcak olunursa, her x, y, z $\in$ U ve r$\in$ R için, (x –T(x))[T(x), [y, r]y](x – T(x)) =0 dır.Yani ,

$$0 = (x –T(x))[T(x), [y, r]y](x – T(x))$$

$$= (x –T(x))[T(x), [y, r]] y (x – T(x))+(x –T(x))[y, r][T(x), y](x –T(x))$$

bulunur. Burada (3.33) ifadesi kullanılır ise her x, y, z $\in$ U ve r$\in$ R için,

$$–(x-T(x))[y, r](T(x), y](x –T(x)) z (x–T(x)) + y (x –T(x))[y, r](x –T(x))y(x –T(x))$$
$$[T(x), z] = 0$$

bulunur. Bu ifadede (3.30) özdeşliği kullanılır ve düzenlenir ise,

$$(x–T(x))[y, r](x –T(x))[T(x), y]z–y[T(x), z])(x–T(x))[y, r](x–T(x))y[T(x), z](x–T(x)) = 0$$

bulunur. Bu son ifadede y üzerinden w $\in$ U için y+w ile linerleştirilirse,

$$(x–T(x))[w, r](x–T(x))y[T(x), z](x–T(x))+(x–T(x))[y, r](x–T(x))w[T(x), z](x–T(x))=0$$

olur. Burada w yerine [x, s] alınır ve (3.27)' göre düzenlenir ise, ikinci terim sıfır olur. Yani,

$$(x –T(x))[[x, s], r](x –T(x))y[T(x), z](x –T(x))=0, \ \forall x, y, z\in U \text{ ve } r, s\in U \quad (3.34)$$

bulunur. Bu son eşitizlik her y$\in$ U için sağlandığından (x–T(x))[[x, s], r](x–T(x))U[T(x), z](y –T(x))=(0) olur. Bu ise Lemma 4.4 den dolayı,

$$(x–T(x))[[x, s], r](x–T(x)) = 0, \ \forall x, z\in U \text{ ve } s, r\in R \quad (3.35)$$

veya

$$[T(x), z](x–T(x)) =0, \ \forall x,z\in U \quad (3.36)$$

(3.36) ifadesinde z yerine [y, r(x-T(x))] alınır ve düzenlenir ise, her z $\in$ U için,

$$[T(x), [y, r](x-T(x))(x-T(x)) = 0$$

bulunur. (3.32) ifadesini sağ taraftan (x–T(x)) ile çarpar ve elde edilen son ifade ile eşitlenir ise her $y\in U$ ve $r\in R$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= [T(x), r][y, (x-T(x))](x-T(x)) \\ &= [T(x), r]\, y\, (x-T(x))(x-T(x)) - [T(x), r](x-T(x))\, y\, (x-T(x)) \\ &= -[T(x), r](x-T(x))\, y\, (x-T(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $y \in U$ ve $r \in R$ için,

$$[T(x), r](x-T(x))\, y\, (x-T(x)) = 0$$

dır. Burada r yerine rt alınır ise,

$$\begin{aligned} 0 &= [T(x), rt](x-T(x))\, y\, (x-T(x)) \\ &= r[T(x), t](x-T(x))\, y\, (x-T(x)) + [T(x), r]\, t\, (x-T(x))\, y\, (x-T(x)) \\ &= [T(x), r]\, t\, (x-T(x))\, y\, (x-T(x)) \end{aligned}$$

bulunur. Her $t\in R$ için sağlandığından $[T(x), r]\, R\, (x-T(x))\, y\, (x-T(x)) = (0)$ olur. R asal halka olduğundan her $y \in U$ ve $r \in R$ için sağlandığından,

$$[T(x), r]=0 \text{ veya } (x-T(x))\, y\, (x-T(x)) = 0$$

dır. $A=\{ x\in R \mid [T(x), r]=0, \forall\, r\in R\}$ ve $B = \{ x\in R \mid (x-T(x))\, y\, (x-T(x)) = 0, \forall\, r\in R\}$ kümelerini düşünelim. A ve B kümeleri R nin alt grubu ve $R=A\cup B$ olduğundan Brauer's Trick den R = A veya R = B olmalıdır.

R = A olsun. Bu durumda her $x\in R$ için, $[T(x), r] = 0$ olur. Bu koşul altında her $r \in R$ için sağlandığından $[T(x)]\in Z$ dir. Bu ise $x \in Z$ olur. Bu durumda ispat biter.

O halde R = B olur. Bu ise her $x\in R$ için, $(x-T(x))y(x-T(x))=0$ olur. Bu eşitsizlik her $y\in U$ için sağlandığından, $(x-T(x))U(x-T(x))=(0)$ dir. Bu ise Lemma 4.4 den her $x\in U$ için, $(x-T(x))=0$ veya $(x-T(x))=0$ bulunur. Yani, her $x\in U$ için,

$$(x-T(x)) = 0$$

dır. Bu ise $x \in Z$ olduğunu gösterir ispat biter .

Öte yandan (3.35) özdeşliğinde ise s yerine st alınır ve düzenlenir ise,

$$\begin{aligned} 0 &=(x-T(x))[[x, st], r](x-T(x)) \\ &=(x-T(x))[s[x, t]+[x, s]t, r](x-T(x)) \\ &=(x-T(x))\{[s, r][x, t]+s[[x, t], r]+[x, s][t, r]+[[x, s], r]t\}(x-T(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede s yerine $s(x-T(x))$ alınır, (3.35) ve Lemma 3.17 kullanılır ise, her $x\in U$ ve $s, r\in R$ için,

$$(x-T(x))\{[s(x-T(x)), r][x, t]+[[x, s(x-T(x))], r]t\}(x-T(x))=(x-T(x))\{s[(x-T(x), r][x, s(x-T(x)], r]t\}(x-T(x)) = 0$$

veya

$$(x - T(x))\{s(x - T(x)r[x, t] - [x, s]r(x - T(x))t\}(x - T(x)) = 0 \qquad (3.36)'$$

olur. Lemma 3.17 den her $x\in U$ ve $s, r\in R$ için,

$$(x-T(x))[x, r](x-T(x)) = 0$$

bulunur. Bu son ifadede r yerine sr alınır ise, her $x\in U$ ve $s, r\in R$ için,

$$0=(x - T(x))[x, sr](x-T(x))$$
$$= (x-T(x))s[x, r](x-T(x))+(x-T(x))[x, s]r(x-T(x))$$

bulunur. Bulunan ifade (3.36)' eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$0=(x-T(x))\{s(x-T(x))r[x, t]+s[x, r](x - T(x))t\}(x-T(x))$$
$$=(x-T(x))s\{(x-T(x))r[x, t]+[x, r](x - T(x))t\}(x-T(x))$$

elde edilir. Her $s\in R$ için sağlandığından $(x-T(x))R\{(x-T(x))r[x, t]+[x, r](x - T(x)) t\}(x - T(x)) = 0$ olur. Burada R asal halka olduğundan,

$$(x - T(x))=0 \text{ veya } (x-T(x))r[x, t](x-T(x))+[x, r](x - T(x))t(x - T(x))=0$$

olur. Bu koşul altında hipotezden $(x - T(x)) \neq 0$ olur. Ohalde her $x\in U$, $r\in R$ için,

$$(x - T(x))r[x, t](x - T(x))+[x, r](x-T(x))t(x-T(x)) = 0 \qquad (3.36)''$$

dır. Öte yandan Lemma 3.17 kullanılırsa, her $x\in U$, $r\in R$ için,

$$(x - T(x))[x, rt](x-T(x)) = 0$$

olur. Bu ifade açılır ve düzenlenirse, $0 = (x - T(x))[x, rt](x-T(x))=(x-T(x))[x, r]t(x-T(x)) + (x-T(x)) r [x, t](x - T(x))$ bulunur. Yani,

$$(x-T(x))r[x, t](x-T(x)) = -(x-T(x))[x, r]t(x - T(x))$$

dir. Bulunan bu eşitlik (3.36)'' ifadesinde yerine yazılırsa, $x\in U$, $t, r\in R$ için,

$$0=-(x-T(x))[x, r]t(x-T(x))+[x, r](x-T(x))t(x-T(x))$$
$$=\{-(x-T(x))[x, r]+[x, r](x-T(x))\}t(x - T(x))$$

bulunur. Her $t\in R$ için sağlandığından $\{-(x-T(x))[x, r]+[x, r](x-T(x))\}R(x - T(x))=(0)$ olur. Burada R asal halka olduğundan,

$$\{-(x - T(x))[x, r] + [x, r](x - T(x))\}=0 \text{ veya } (x-T(x)) = 0$$

dır. Hipotezden dolayı $x - T(x) \neq 0$ dır. O halde $x \in U$, $r\in R$ için,

$\{-(x - T(x))[x, r]+[x, r](x - T(x))\}=0$ olur. Bu elde edilen eşitsizlik açılır ve düzenlenirse,

$$(x - T(x))[x, r]=[x, r](x - T(x)), \ \forall\ x\in U,\ r\in R \qquad (3.37)$$

dir. (3.37) ifadesinde r yerine rs alınır ise, $(x - T(x))\{[x, r]s + r[x, s]\}=\{[x, r]s+r[x, s]\}(x - T(x))$ bulunur. Bu son ifadede r yerine $r(x - T(x))$ alınır ve (3.37) göre düzenlenirse, $(x-T(x))\{r [x, s]-[x, r]s\}(x-T(x))=2(x-T(x))r[x, s](x-T(x))=0$ bulunur. Yani $x\in U$ $r, s \in$

R ve char$R\neq 2$ olduğu için,

$$(x–T(x))r[x, s](x–T(x))=0$$

olur. Her $r \in R$ için sağlandığından $(x–T(x))R[x, s](x–T(x)) = (0)$ bulunur. R asal halka olduğundan,

$$(x–T(x))=0 \text{ veya } [x, s](x–T(x))= 0$$

dır. Hipotezde $(x–T(x))\neq 0$ olduğundan $x \in U$ ve $s \in R$ için $[x, s](x–T(x)) = 0$ olur. Bu son eşitsizlikte s yerine sr alınır ve düzenlenir ise,

$0=[x, sr](x–T(x))$

$=[x, s]r(x–T(x))+s[x, r](x–T(x))=[x, s]r(x–T(x))$ elde edilir. Bu ifade her $r\in R$ için sağlandığından $[x, s]R(x–T(x))=(0)$ dır. Burada R asal halka olduğundan, her $x\in U$ ve $s\in R$ için,

$$[x, s]=0 \text{ veya } (x–T(x)) = 0$$

dır. Hipotezden dolayı $(x – T(x))\neq 0$ olduğundan her $x \in U$ ve her $s\in R$ için $[x, s]=0$ dır. Bu durumda $x \in Z$ dir. İspat biter.

Teorem 3.20: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U R'nin bir Lie ideali ve T de R'nin otomorfizmi olsun . Özdeşlik dönüşümden farklı T dönüşümü her $x\in U$ için, $[x,T(x)]\in Z$ ise $U \subset Z$ dir.

İspat: $x\in U$ için T birim dönüşümden farklı olduğundan $T(x)\neq x$ dir. Bu ise, Lemma 3.19 dan $x\in Z$ dir. O halde $y \in U$ iken $y \notin Z$ elemanı alalım. Bu durumda merkezin kapalılığından $x+y \notin Z$ dir. Bu durumda $T(x+y)=T(x)+T(y)=T(x)+y\neq x+y$ olduğundan $x+y\in Z$ dir.

Bu ise $y \notin Z$ için çelişkidir. Yani , her $y\in U$ iken $y \in Z$ dir. O halde $U \subseteq Z$ dir.

Sonuç 3.21: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U R'nin bir Lie ideali ve T de R'nin otomorfizmi olsun . Özdeşlik dönüşümden farklı T dönüşümü her $x\in U$ için, $[x,T(x)]\in Z$ ise R değişmelidir.

İspat: Bu koşullar altında her $x\in U$ için, $[x,T(x)]\in Z$ için Teorem 3.20 den $x\in Z$ dir. Yani her $x\in U$ için sağlandığından $U \subseteq Z$ olur. Aynı zamanda U Lie ideal olduğundan idealdir. Bu durumda ise Lemma 3.13 den U ideali değişmeli ise R halkası değişmelidir.

BÖLÜM 4
ASAL HALKALARDA LİE VE (σ, τ)-LİE İDEALLER

Bu bölümde R , karakteristiği ikiden farklı asal halka, U bir Lie ideal olmak üzere ,

1. $[a, U] = 0$ ise $a \in Z$ veya $U \subset Z$

2. $U \not\subset Z$ için R halkasının $[R, M] \subset U$ ve $[R, M] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

3. $U \not\subset Z$ için $aUb = (0)$ ise $a=0$ veya $b=0$

Sonuçlarını gösteren makaleler ve $d: R \rightarrow R$ bir türev olmak üzere,

4. $d(U) \subset Z$ ise $U \subset Z$

5. $ad(U) = (0)$ ise $a=0$ veya $U \subset Z$

6. $d^2(U) = 0$ ise $d = 0$veya $U \subset Z$

koşullarını ele alan makaleler ve bu koşulları halkanın genelleştirilmiş (σ, τ)-Lie ideali için genelleştirilen makaleler bir araya getirilmiştir.

Bergen, J., Herstein, I.N. ve Kerr, J.W.,1981

Bu makalede, aksi belirtilmedikçe R asal halka, U Lie ideal ve halkanın karakteristiği ikiden farklı olarak alınmıştır.

Lemma 4.1: R asal halka ve karakteristiği ikiden farklı olmak üzere $U \not\subset Z$ ve U, R nin Lie ideali ise $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ olacak şekilde R nin bir M ideali vardır.

İspat: $T(U) = \{x \in R \mid [x, R] \subset U\}$ kümesini alalım. Bu kümenin Lie ideal ve alt halka olduğu gösterilsin. $a, b \in T(U)$ için, $[a, R] \subset U$, $[b, R] \subset U$ olduğundan her $t \in R$ için, $[a, t] \in U$ ve $[b, t] \in U$ dir. U Lie ideal olduğundan $[a, t] + [b, t] = [a+b, t] \in U$ olur. Bu ise her $t \in R$ için sağlandığından $[a+b, R] \subset U$ olur. O halde $a+b \in T(U)$ olur.

U Lie ideal olduğundan $[U, R] \subset U$ olur. Yani T(U) kümesinin tanımandan $U \subset T(U)$ dir. Yine T(U) kümesinin tanımından $[T(U), R] \subset U$ olur. Bu durumda $[T(U), R] \subset U \subset T(U)$ dur. Yani $[T(U), R] \subset T(U)$ elde edilir. O halde T(U) Lie idealdir.

Aynı zamanda $a, b \in T(U)$ ve $r \in R$ için, $[a, br] + [b, ra] \in U \subset T(U)$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenir ise,

$$\begin{aligned}[a, br] + [b, ra] &= [a, b]r+b[a, r]+r[b, a]+[b, r]a \\ &= abr-bar+bar-bra+rba-rab+bra-rba \\ &= (ab)r-r(ab)\end{aligned}$$

$=[ab, r]\in U$

olur. Yani her $r\in R$ için sağlandığından $[ab, R]\subset U$ olur. Bu durumda $ab\in T(U)$ bulunur. O halde T(U) bir alt halkadır. R asal halka karakteristiğim ikiden farklı aynı zamanda T(U) alt halka ve Lie ideal olduğundan Önerme 2.32 koşullarını sağladığı için T(U), R nin sıfırdan farklı bir M idealini kapsar veya $T(U)\subset Z$ olur.

$T(U)\subset Z$ olsun. Bu durumda $U\subset T(U)\subset Z$ olduğundan $U\subset Z$ olur. Bu ise hipotezimdeki $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir.

O halde T(U), R'nin sıfırdan farklı bir M idealini kapsar. Yani $M\subset T(U)$ olur. Bu durumda T(U) nun tanımından $[M, R]\subset U$ olur.

Aynı zamanda $[M, R]\subset Z$ olsaydı, her $x, y\in R$ ve $m\in M$ için, $[m, xy]\in Z$ olduğundan burada $a\in R$ için,

$$\begin{aligned}
0 &= [[m, xy], a] \\
&= [[m, x]y+x[m, y], a] \\
&= [[m, x]y, a]+[x[m, y], a] \\
&= [m, x][y, a]+[[m, x], a]y+x[[m, y], a]+[x, a][m, y] \\
&= [m, x][y, a]+[x, a][m, y]
\end{aligned}$$

bulunur. Burada ise y yerine x alınır ve $[m, x]\in Z$ olduğu kullanılır ise $2[m, x][x, a]=0$ olur. $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğundan,

$$[m, x][x, a]=0$$

olur. Her $m\in M$, her $x\in R$ her $k\in R$ için, $[m, x]\in Z$ olduğundan, $[m, x]k[x, a]=0$ bulunur. Her $k\in R$ için sağladığından $x\in R$, $m\in M$ için $[m, x]R[x, a]=0$ elde edilir. R asal halka olduğundan,

$$[m, x]=0 \text{ veya } x\in Z$$

bulunur. $A=\{x\in R \mid [m, x]=0, \text{ her } m\in M\}$ ve $B=\{x\in R \mid x\in Z\}$ kümelerini alalım. A ve B R nin alt halkası ve $R=A\cup B$ olduğundan Brauer's Trick' den A=R veya B=R olmalıdır.

B=R olsun. Bu durumda her $x\in R$ için $x\in Z$ dir. Yani R halkası değişmelidir.

Benzer şekilde A=R olsun. Bu ise $M\subset Z$ olduğunu gösterir. Bu ise R halkasının değişmeli olması demektir.

Bu durumda her iki koşulda R halkası değişmelidir. Bu ise hipotezimdeki $U\not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde $[M,R]\not\subset Z$ dir.

Lemma 4.2: U, R nin Lie ideali ve $U\not\subset Z$ ise $C_R(U) = Z$ olur.

İspat: $C_R(U)=\{x\in R \mid [x, u]=0, \forall u\in U\}$ kümesini inceleyim. Bu kümenin R nin alt halkası ve Lie ideali olduğunu gösterilsin. $a, b\in C_R(U)$ ve $u\in U$ için, $[a, u]=0$, $[b, u]=0$

olur.

$$[a, u]+[b, u]=[a+b, u]=0$$

dır. Bu durumda $a+b\in C_R(U)$ olur. Benzer biçimde,

$$[ab, u]=a[b, u]+[a, u]\, b=0$$

olur. Bu ise $ab\in C_R(U)$ olur. Yani $C_R(U)$ alt halkadır. Aynı zamanda $a\in C_R(U)$, $r\in R$ ve $u\in U$ için Jacobi eşitsizliği kullanılırsa,

$$[[a, r], u]+[[u, a], r]+[[r, u], a]=0$$

dır. Burada ise $a\in C_R(U)$ için, $[[u, a], r]=[[r, u], a]=0$ olduğundan $a\in C_R(U)$, $r\in R$ ve $u\in U$ için, $[[a, r], u]=0$ elde edilir. O halde $a\in C_R(U)$ ve $r\in R$ için $[a, r]\in C_R(U)$ olur. Dolayısıyla $C_R(U)$ Lie idealdir.

$a\in Z$ ise $[a, R]=(0)$ olur. Buradan $[a, U]\subset[a, R]$ olduğundan $[a, U]=(0)$ olur. Yani $a \in C_R(U)$ olur. Dolayısıyla,

$$Z\subset C_R(U)$$

bulunur.

$C_R(U) \subset Z$ olduğunu gösterilsin. $C_R(U)\not\subset Z$ olsun. R asal halka karakteristiği ikiden farklı olmak üzere $C_R(U)\not\subset Z$ ve $C_R(U)$ Lie ideal ise Lemma 4.1 den $[M, R]\subset C_R(U)$ ve $[M, R]\not\subset Z$ olacak şekilde M ideali vardır. Yine aynı şekide R asal halka karakteristiği ikiden farklı olmak üzere $C_R(U)$ Lie ideal ve alt halka olduğundan Önerme 2. 32 koşulları sağlandığından sonucu uygulayacak olursak,

$$M\subset C_R(U) \text{ veya } C_R(U)\subset Z$$

olur. $M\subset C_R(U)$ olsun. O halde $[M, U]=(0)$ olur. Bu ise R asal halka M sıfırdan farklı bir ideal ise Önerme 2.35 koşullarını sağladığından sonuç uygulandığından $U\subset Z$ olur. Bu durumda hipotezimden $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde,

$$M\not\subset C_R(U)$$

olur. Bu durumda $C_R(U)\subset Z$ olur. O halde,

$$C_R(U)=Z$$

olur.

Lemma 4.3: U, R nin Lie ideali olmak üzere $[a, [U, U]]=(0)$ ise $[a, U]=(0)$ olur. O halde $C_R([U, U])=C_R(U)$ olur.

İspat: $C_R([U, U])\subset C_R(U)$ olduğu gösterilsin. $a\in C_R([U, U])$ olsun. R asal halka $[U, U]$ Lie ideal olduğundan ve $[U, U]\not\subset Z$ ise Lemma 4.2 koşullarını sağladığından $C_R([U, U])=Z$ olur. Yani $a\in C_R([U, U])$ iken $a\in Z$ dir. Buradan ise $[a, U]\subset[a, R]=(0)$ olduğundan $[a, U]=(0)$ elde edilir. Bu ise $a\in C_R(U)$ olur. Dolayısıyla,

$$C_R([U, U]) \subset C_R(U)$$

olur. $[U, U] \subset Z$ olsun. Buradan her $u\in U$ ve her $x\in R$ için $a=[u, [u, x]]\in [U, U]\subset Z$ olur. Yine, $[u, [u, ux]]\in [U, U]\subset Z$ olduğundan ifade a elemanı göz önüne alarak açılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}[u, [u, ux]]&=[u, u[u, x]+[u, u]x]\\ &=[u, u[u, x]]=u[u, [u, x]]+[u, u][u, x]\\ &=u[u, [u, x]]=ua=au\end{aligned}$$

olur. $a\in Z$ ve $au\in Z$ olduğundan $a=0$ veya her $u\in U$ için $u\in Z$ olur.

$a\neq 0$ ise her $u\in U$ için $u\in Z$ olduğundan $[a, u]=0$ olur. Yani $a\in C_R(U)$ olur. O halde,

$$C_R([U,U]) \subset C_R(U)$$

bulunur.

$a=0$ ise her $u\in U$ ve her $x\in R$ için $[u, [u, x]]=0$ olur. R asal halka ve karakteristiğim ikiden farklı ise her $x\in R$ için $[u, [u, x]]=0$ olduğundan Önerme 2.35 koşullarını sağladığından sonucu uygulanır ise her $u\in U$ için $u\in Z$ olur. Yani $U\subset Z$ dir. Bu durumda $[a, U]=(0)$ olur. Dolayısıyla $a\in C_R(U)$ olur. O halde ,

$$C_R([U,U]) \subset C_R(U)$$

elde edilir. Bu durumda her koşulda $C_R([U,U]) \subset C_R(U)$ olur.

$C_R(U) \subset C_R([U, U])$ olduğu gösterilsin. $a\in C_R(U)$ alalım. Bu durumda her $u\in U$ için $[a, u]=0$ olur. $[U, U]\subset U$ olduğundan her $u\in [U, U]$ için $[a, u]=0$ olduğundan $[a, [U, U]]=0$ elde edilir. Buradan $a\in C_R([U,U])$ olduğundan,

$$C_R(U)\subset C_R([U,U])$$

bulunur. Böylece $C_R([U,U])=C_R(U)$ elde edilir.

Lemma 4.4: U, R nin Lie ideali ve $U\not\subset Z$ olsun. $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ olur.

İspat: Hipotezden $U\not\subset Z$ dir. Bu ise R asal halka ve U, R Lie ideali olduğundan, Lemma 4.1 koşullarını sağladığından $[M, R]\not\subset Z$ ve $[M, R]\subset U$ olacak şekilde M ideali vardır. Her $u\in U$, her $m\in M$ve her $y\in R$ ve $a\in R$ için, $[mau, y]\in [M, R]\subset U$ dur. Hipotezimden $a\in R$ ve $b\in R$ için $aUb=(0)$ olduğundan $a[mau, y]b=0$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenirse, buradan,

$$\begin{aligned}0 &= a[ma,y]ub+ama[u,y]b\\ &= a[ma,y]ub\\ &=a(may-yma)ub\\ &=amayub-aymaub\\ &=amayub\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu son ifade her $y\in R$ için sağlandığından $amaRub=(0)$ dır. Burada ise

R asal halka olduğundan ama=0 veya ub=0 olur. Her $m\in M$ her $u\in U$ için sağladığından,

$$aMa=0 \text{ veya } Ub=(0)$$

olur.

$a\neq 0$ ise her $m\in M$ için $ama\neq 0$ olduğundan $aMa\neq(0)$ olur. Bu durumda her $u\in U$ için, ub=0 olur. Yani Ub=(0) olur. O halde her $x\in R$, her $u\in U$ için $[u, x]\in U$ olduğundan $[u, x]b=0$ dır. Bu ifade düzenlenir ise,

$$\begin{aligned} 0 &= [u, x]b \\ &= (ux-xu)b \\ &= uxb-xub \\ &= uxb \end{aligned}$$

elde edilir. Her $x\in R$, her $u\in U$ için sağlandığından uRb=(0) dır. R asal halka olduğundan her $u\in U$ için, u=0 veya b=0 bulunur. Bu durumda,

$$U=(0) \text{ veya } b=0$$

olur. $U\neq(0)$ olduğundan b=0 elde edilir.

Lemma 4.5: U, R nin Lie ideali ve $0\neq d$ türev olmak üzere d(U)=(0) ise $U\subset Z$ olur.

İspat: Her $u\in U$, her $x\in R$ için $[u,x]\in U$ olduğundan hipotezden, d(U)=(0) iken ifade açılır ise,

$$\begin{aligned} 0 &= d([u,x]) \\ &= [d(u),x]+[u,d(x)] \\ &= [u,d(x)] \end{aligned}$$

olur. Buradan her $x\in R$ için, $[u, d(R)]=(0)$ olduğundan Lemma 3.4 den her $u\in U$ için $u\in Z$ olur. Yani $U\subset Z$ dir.

Lemma 4.6: U, R nin Lie ideali ve $0\neq d$ türev olmak üzere $d(U)\subset Z$ ise $U\subset Z$ olur.

İspat: $U\not\subset Z$ olsun. Lemma 4.3 den $V=[U,U]\not\subset Z$ olur. $d(U)\subset Z$ olduğundan her $w,u\in U$ için,

$$d([u, w])=[d(u), w]+[u, d(w)]=0$$

olur. Yani $d([U, U])=d(V)=(0)$ olur. Lemma 4.5 den $V\subset Z$ olur. Bu ise $V\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $U\subset Z$ olur.

Lemma 4.7: U, R nin Lie ideali, $0\neq d$ türev ve $U\not\subset Z$ olmak üzere td(U)=(0) (veya d(U)t=(0)) ise t=0 olur.

İspat: Her $u\in U$, $x\in R$ için, $[u, x]u=(ux-xu)u=u(xu)-(xu)u=[u, xu]\in U$

olur. Her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $[u, x]u\in U$ olduğundan hipotez kullanılır ise $td(U)=(0)$ hipotez kullanılır ise, $td([u, x]u)=0$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenirse,

$$0=td([u, x])u+t[u, x]d(u)$$
$$=t[u, x]d(u)$$

bulunur. Her $v\in U$, $y\in R$ için, x yerine $d(v)y$ alınırsa,

$$0=t[u, d(v)y]d(u)$$
$$=td(v)[u, y]d(u)+t[u, d(v)]yd(u)$$
$$=t[u, d(v)]yd(u)$$

bulunur. Bu sonuç her $y\in R$ için sağlandığından $t[u, d(v)]Rd(u)=(0)$ olur. R asal halka olduğundan, her $u, v\in U$, $t\in R$ için,

$$t[u, d(v)]=0 \text{ veya } d(u)=0$$

olur. $d(u)=0$ olsun. Her $u\in U$ için sağlandığından $d(U)=(0)$ olur. Bu durumda U Lie ideali için, $d(U)=(0)$ iken Lemma 4.6 dan $U\subset Z$ olur. Bu ise hipotezim olan $U\not\subset Z$ olması ile çelişki elde edilir.

O halde her $u, v\in U$ için, $t[u, d(v)]=0$ olur. Bu ifade açılır ise,

$$0 =tud(v)-td(v)u$$
$$=tud(v)$$

bulunur. Her $u\in U$ için sağlandığından $tUd(v)=(0)$ olur. Bu ise Lemma 4.4 ün koşulları sağlandığından sonuç uygulanacak olursa, her $v\in U$ $t\in R$ için,

$$t=0 \text{ veya } d(v)=0$$

bulunur. Her $v\in U$ için $d(v)=0$ olsun. Yani $d(U)=0$ dır. Bu ise Lemma 4.5 den $U\subset Z$
olur. Bu durumda çelişki elde edilir.

O halde $t=0$ olur.

Teorem 4.8: U, R nin Lie ideali ve $0\neq d$ türev olmak üzere $d^2(U)=(0)$ ise
$U\subset Z$ olur.

İspat: $U\not\subset Z$ olsun. U, R halkasının Lie ideali ve $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1 koşullarını sağladığından $[M, R]\subset U$ ve $[M, R]\not\subset Z$ olacak şekilde R halkasının bir M ideali vardır. Her $m\in [M, R]\subset M\cap U$ ve $u\in [U, U]$ için, $w=d(u)\in d([U, U])\subset U$ elemanlarını alınsın. Bu eleman incelenirse, $d(w)=d(d(u))=d^2(u)=0$ olur. Her $y\in R$, her $mw\in M$ için, $[mw, y]\in [M, R]\subset U$ ve $d^2(U)=(0)$ olduğu kullanılırsa $d^2([mw, y])=0$ olur. Bu ifade açılır ve elemanlar göz önünde bulundurularak düzenlenir ise,

$$0=d^2([mw, y])$$
$$=d^2(m[w, y]+[m, y]w)$$

$=d^2(m[w, y])+d^2([m, y]w)$

$=d^2(m)[w, y]+2d(m)d([w, y])+md^2([w, y])+d^2([m, y])w+2d([m, y])d(w)+[m, y]d^2(w)$

$=2d(m)d([w, y])$

bulunur. Bu elde edilen sonuç $charR\neq 2$ olduğundan $d(m)d([w, y])=0$ olur. Böylece her $u\in [U, U]$ ve $x\in R$ için,

$d([M, R])d([d(u), x])=0$

bulunur. Bu durumda, $[M, R]$ Lie ideal ve $[M, R]\not\subset Z$ olduğundan bu durumda Lemma 4.7 koşulları sağlandığından her $u\in [U, U]$ ve $x\in R$ için, $d([d(u), x])=0$ elde edilir. Bu ifade açılır ise,

$0=[d^2(u), x]+[d(u), d(x)]$

$=[d(u), d(x)]$

olur. Her $u\in [U, U]$ için,

$[d(u), d(R)]=(0)$

olur. Bu durum Lemma 3.4 den $d(u) \in Z$ elde edilir. Yani ,

$d([U, U])\subset Z$

olur. $[U, U]$ Lie ideal olduğundan Lemma 4.6 dan $[U, U]\subset Z$ olur. Bu ise Lemma 4.3 koşullarını sağladığından $U\subset Z$ olur. Bu ise $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $U\subset Z$ olur.

Sonuç 4.9: R yarı-asal, $charR\neq 2$ ve U, R nin Lie ideali olmak üzere $[a,[a,U]]=(0)$ ise $[a,U]=(0)$ olur.

Teorem 4.10: U, R' nin Lie ideali, $0\neq d$ türev ve $U\not\subset Z$ ise $C_R(d(U))=Z$ olur.

İspat: $C_R(d(U))\subset Z$ olduğunu göstererisin. $C_R(d(U))\not\subset Z$ olsun. $a\notin Z$ olacak şekilde en az bir $a\in C_R(d(U))$ vardır. $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.3 den $[U,U]\not\subset Z$ olur. $a\in C_R(d(U))$ olduğundan her $u\in U$ için, $[a, d(u)]=0$ dır. $d([U, U])\subset U$ olduğundan böylece her $u \in [U, U]$ için,

$[a, d^2(u)]=0$

olur. Yine her $u\in U$ için $[a, d(u)]=0$ ve $[U, U]\subset U$ olduğundan her $u\in [U, U]$ için de $[a, d(u)]=0$ olur.Yani,

$[a, d([U, U])]=0$

olur. Her $u\in [U, U]$ için,

$0=d([a, d(u)])$

$=[d(a),d(u)]+[a,d^2(u)]$

$=[d(a),d(u)]$

bulunur. Bu durumda,

$[d(a), d([U, U])]=(0)$

olur. O halde $[a, d([U, U])]=0$ ve $[d(a), d([U, U])]=(0)$ olur. Bu ise a ile $d(a)$, $d([U, U])$ nun merkezleştiricisi olduğunu gösterir. Her $u\in [U, U]$ için $[a, u]\in [U, U]$ olduğundan $d([a, u]) \in d([U, U])$ yazılabilir. Burada ifade açılır ve düzenlenirse,

$[d(a), u]+[a, d(u)]=[d(a), u]\in d([U, U])$

olur. Yani $[d(a), d([U, U])]=(0)$ olduğundan her $u\in [U, U]$ için, $[d(a), [d(a), u]]=0$ ve böylece,

$[d(a), [d(a), [U, U]]]=(0)$

bulunur. Bu durumda Sonuç 4.9 uygulanırsa, $[d(a), [U, U]]=(0)$ elde edilir. Yani $d(a)\in C_R([U, U])$ olur. $[U, U]\not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.2 den,

$C_R([U, U])=Z$

olur. Yani,

$d(a)\in Z$ dir.

O halde $a\in C_R(d(U))$ ise $d(a)\in Z$ dir. Yine her $u\in U$ için $[a^2, d(u)]=a[a, d(u)]+[a, d(u)]a=0$ olur. Bu ise $a^2\in C_R(d(U))$ olduğunu gösterir. O halde,

$d(a^2)\in Z$ dir.

Buradan $d(a^2)$ ifadesi incelenirse,

$$\begin{aligned} d(a^2)&=ad(a)+d(a)a \\ &=ad(a)+ad(a) \\ &=2ad(a)\in Z \end{aligned}$$

bulunur. $charR\neq 2$ olduğu için $ad(a)\in Z$ elde edilir. O halde $ad(a)\in Z$ ve $d(a)\in Z$ olduğunda,

$d(a)=0$ veya $a\in Z$ olur.

$a\notin Z$ olsun. Her $a\in C_R(d(U))$ için $d(a)=0$ bulunur. $W=\{x\in R \mid d(x)=0\}$ kümesini tanımlayalım. Her $a\in C_R(d(U))$ için $d(a)=0$ olduğundan $a\in W$ olur. Yani $C_R(d(U))\subset W$ olur. Her $a\in C_R(d(U))$ ve her $u\in U$ için $d([a, u])$ incelenirse $d([a, u])=[d(a), u]+[a, d(u)]=0$ olur. Bu ise her $u\in U$ için $[a, u]\in W$ olduğunu gösterir. Yani $[a, U]\subset W$ olur. $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.1 koşulları sağladığından $[M, R]\subset U$ ve $[M, R]\not\subset Z$ olacak şekilde M ideali vardır. $m\in [M, R]\subset U\cap M$, $ma\in M$ ve $a\in C_R(d(U))$ ve $u\in U$ için $[ma, u]\in U$ olur. Bu eleman açılır ve düzenlenirse , $m[a, u]+[m, u]a\in U$ olur. $[a, d(U)]=(0)$ olduğundan bu eleman yerine yazılırsa, $[a, d(m[a, u]+[m, u]a)]=0$ olur. $[a, u]\in W$ olduğundan $d([a, u])=0$ bulunur. $a\in W$ olduğundan $d(a)=0$ ve böylece $a\in C_R(d(U))$ ve $m\in U$ için,

$$0=[a, d(m)]=[a, d([m, u])]$$

olur.Bu ifadeler kullanılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}0&=[a, d(m)[a, u]+md([a, u])+d([m, u])a+[m, u]d(a)]\\&=[a, d(m)[a, u]+d([m, u])a]\\&= d(m)[a, [a, u]]+[a, d(m)][a, u]+[a, d([m, u])]a+d([m, u])[a, a]\\&=d(m)[a, [a, u]]\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade her $m\in M$ için sağlandığından her $u\in U$ için ,

$$d([M, R])[a, [a, u]]=(0)$$

elde edilir. $[M, R]\not\subset Z$ ve $[M, R]$ Lie ideal olduğundan Lemma 4.7 koşullarını sağladığından her $u\in U$ için,

$$[a, [a, u]]=0$$

bulunur. Sonuç 4.9 dan her $u\in U$ için $[a, u]=0$ olur. Yani $[a, U]= (0)$ olur. $[a, U] = (0)$ olduğundan $a\in C_R(U)$ elde edilir. $U\not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.2 koşullarını sağladığından $C_R(U)=Z$ olur. Yani $a\in Z$ dir. Bu ise $a\notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde,

$$C_R(d(U))\subset Z$$

olur.

$a\in Z$ ise her $u\in U$ için $[a, d(u)] = 0$ olur. Yani $[a, d(U)] = (0)$ olduğundan $a\in C_R(d(U))$

olur. Bu durumda $Z \subset C_R(d(U))$ olur. O halde,

$$C_R(d(U)) = Z$$

elde edilir.

Teorem 4.11: R asal halka, karakteristiğim ikiden farklı, U, R nin Lie ideali ve $U \not\subset Z$ olsun. δ ve d, R nin türevleri olmak üzere $\delta d(U)=(0)$ ise d=0 veya $\delta=0$ olur.

İspat: $d \neq 0$, $\delta \neq 0$ olsun. $v \in V=[U, U]$, $d(v) \in U$ için, hipoteze göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
0 &= \delta\{d[u, d(v)]\} \\
&= \delta\{[d(u), d(v)]+[u, d^2(v)]\} \\
&= \delta\{[d(u), d(v)]\}+\delta\{[u, d^2(v)]\} \\
&= [\delta d(u), d(v)]+[d(u), \delta d(v)]+[\delta(u), d^2(v)]+[u, \delta d^2(v)] \\
&= [\delta(u), d^2(v)]
\end{aligned}$$

bulunur. Her $u \in U$ ve $v \in V$ için, $[\delta(u), d^2(v)]=0$ olduğundan $d^2(v) \in C_R(\delta(U))$ elde edilir. $\delta \neq 0$ ve $U \not\subset Z$ olduğundan Teorem 4.10 koşullarını sağladığından sonuç uygulandığında $C_R(\delta(U))=Z$ olur. Yani her $v \in V$ için, $d^2(v) \in Z$ dir. Bu durumda, her $v \in V$, $r \in R$ için,

$$\begin{aligned}
0 &= \delta\{d([d(v), r])\} \\
&= \delta\{[d^2(v), r]+[d(v), d(r)]\} \\
&= \delta\{[d(v),d(r)]\}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
0 &= [\delta d(v), d(r)]+[d(v), \delta d(r)] \\
&= [d(v), \delta d(r)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $r \in R$ için,

$[d(V), \delta d(r)]=(0)$ olduğundan $\delta d(r) \in C_R(d(V))$ olur. $d \neq 0$ ve $V=[U,U]$ Lie idealdir. $U \not\subset Z$ olduğundan Lemma 4.3 koşulları sağladığından $[U, U]=V \not\subset Z$ olur. Bu ise Teorem 4.10 den $C_R(d(V))=Z$ olduğundan her $r \in R$ için $\delta d(r) \in Z$ olur. O halde,

$$\delta d(R) \subset Z$$

dir. Buradan her $v \in V$ ve $u \in U$ için, $\delta d(d(v)u) \in Z$ ve böylece ifade açılır ve hipoteze göre düzenlenir ise,

$$\begin{aligned}
\delta(d^2(v)u+d(v)d(u)) &= \delta(d^2(v)u)+\delta(d(v)d(u)) \\
&= \delta d^2(v)u+d^2(v)\delta(u)+\delta d(v)d(u)+d(v)\delta d(u) \\
&= d^2(v)\delta(u) \in Z
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $d^2(v) \in Z$ olduğundan,

$$d^2(v)=0 \text{ veya } \delta(u) \in Z$$

olur. Her $u \in U$ için, $\delta(u) \in Z$ ise $\delta(U) \subset Z$ ve $\delta \neq 0$, U Lie ideal olduğundan Lemma 4.6

kullanılarak $U \subset Z$ elde edilir. Bu ise $U \not\subset Z$ olmasıyla çelişir.

O halde her $v \in V$ için, $d^2(v)=0$ ve böylece,

$$d^2(V)=(0)$$

olur. V, Lie ideal ve $d \neq 0$ olduğundan Teorem 4.8 den $V \subset Z$ elde edilir. Bu ise $V \not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde

$$d=0 \text{ veya } \delta=0$$

bulunur.

Aydın, N. ve Kaya, K., 1992

Bu makalede, aksi belirtilmedikçe R asal halka, U sıfırdan farklı ideal, karakteristik ikiden farklı ve d R nin (σ, τ)-türevi olarak alınmıştır.

Lemma 4.12: U sağ ideal ve $d(U)=(0)$ ise $d=0$ olur.

İspat : Her $x \in R$ ve her $u \in U$ için $ux \in U$ olduğundan hipotezden, $0 = d(ux) = d(u)x + ud(x) = ud(x)$ elde edilir. Bu ifadede x yerine xr alınırsa, $0=ud(xr)=ud(x)r+uxd(r)=uxd(r)$ bulunur. Her $x \in R$ için sağlandığından $uRd(r)=(0)$ olur. Bu durumda R asal halka olduğundan her $u \in U$ için $u=0$ veya her $r \in R$ için $d(r)=0$ dır. Yani,

$$U=(0) \text{ veya } d=0$$

olur. Hipotezden $U \neq (0)$ olduğundan $d=0$ dır.

Lemma 4.13: $0 \neq d$ (σ, τ)-türev ve U sağ ideal olmak üzere, $d(U) \subset Z$ ise R değişmeli olur.

İspat: Her $u, v \in U$ ve her $x \in R$ için, $[x, d(uv)]$ ifadesini $d(U) \subset Z$ olduğu kullanılarak incelenir ise,

$$\begin{aligned}0&=[x, d(uv)]\\ &=[x, d(u)\sigma(v)+\tau(u)d(v)]\\ &=[x, d(u)]\sigma(v)+d(u)[x, \sigma(v)]+\tau(u)[x, d(v)]+[x, \tau(u)]d(v)\\ &=d(u)[x, \sigma(v)]+[x, \tau(u)]d(v)\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$d(u)[x, \sigma(v)]+d(v)[x, \tau(u)]=0, \ \forall\, u, v \in U \text{ ve } \forall x \in R \qquad (4.1)$$

Bu elde edilen (4.1) ifadesinde x yerine $v \in U$ için $x\sigma(v)$ alınır ise,

$$\begin{aligned}0&=d(u)[x, \sigma(v)]+d(v)[x, \tau(u)]\\ &=d(u)[x\sigma(v), \sigma(v)]+d(v)[x\sigma(v), \tau(u)]\\ &=d(u)[x, \sigma(v)]\sigma(v)+d(u)x[\sigma(v), \sigma(v)]+d(v)[x, \tau(u)]\sigma(v)+d(v)x[\sigma(v), \tau(u)]\\ &=d(v)x[\sigma(v), \tau(u)]\end{aligned}$$

olur. Her $u, v \in U$ ve her $x \in R$ için, $d(v)x[\sigma(v), \tau(u)]=0$ dır. Yani, $d(v)R[\sigma(v), \tau(u)]=(0)$

olur. R asal halka olduğundan her $v\in U$ için, $d(v)=0$ veya $u, v\in U$ için, $[\sigma(v), \tau(u)]=0$ dır.

$K=\{ v\in U \mid d(v)=0 \}$ ve $L=\{ v\in U \mid [\sigma(v), \tau(u)]=0, \forall u\in U\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L kümelerinin U nun alt halkası ve $U=K\cup L$ olduğundan Brauer Trick'ten U=K veya U=L olur.

U=L olsun. Yani, her $u, v\in U$ için, $[\sigma(v), \tau(u)]=0$ dır. Burada v yerine $w\in U$ için, $v\sigma^{-1}(\tau(w))$ alınır ve düzenlenir ise,

$$\begin{aligned}0&=[\sigma(v\sigma^{-1}(\tau(w))), \tau(u)]\\&=[\sigma(v)\sigma^{-1}(\tau(w))+v(\tau(w)), \tau(u)]\\&=\sigma(v)\tau([w, u])\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda her $u, v, w\in U$ için, $\sigma(v)\tau([w, u])=0$ dır. Burada $\sigma(U)$ R nin sıfırdan farklı sağ ideali ise, her $u, w\in U$ için, $\tau([w, u])=0$ iken $U\subset Z$ dir. O halde R değişmelidir.

U=K olsun. Bu durumda her $v\in U$ için, $d(v)=0$ dır. Yani $d(U)=(0)$ dır. Bu ise Lemma 4.5 den $U\subset Z$ dir. O halde R değişmelidir.

Lemma 4.14: $(0)\neq U$ ideal olmak üzere, $a\in R$ için $ad(U)=(0)$(veya $d(U)a=(0)$) ise a=0 veya d=0 olur.

İspat: Her $u\in U$ ve $x\in R$ için $ux\in U$ olduğundan hipotezden $ad(ux)=0$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenir ise,

$$\begin{aligned}0&=ad(ux)\\&=ad(u)\sigma(x)+a\tau(u)d(x)\\&= a\tau(u)d(x)\end{aligned}$$

olur. Bu durumda her $u\in U$ ve $x\in R$ için, $a\tau(u)d(x)=0$ dır. Yani, her $x\in R$ için $a\tau(U)d(x)=(0)$ elde edilir. Burada $\tau(U)$ R nin sıfırdan farklı ideali olduğundan a=0 veya her $x\in R$ için, $d(x)=0$ dır. Yani, a=0 veya d=0 olur. Benzer biçimde $d(U)a=(0)$ ise d=0 veya a=0 olur.

Lemma 4.15: $d_1:R\to R(\sigma,\tau)$-türev ve $d_2:R\to R$ türev olmak üzere, $d_1d_2(R)=(0)$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ olur.

İspat: $d_1\neq 0$ olsun. Her $x, y\in R$ için hipotezden, $0=d_1d_2(xy)= d_1(d_2(x)y+xd_2(y))= \tau(d_2(x)d_1(y))+ d_1(x)\sigma(d_2(y))$ olur. Yani,

$$\tau(d_2(x)d_1(y)) = -d_1(x)\sigma(d_2(y)),\ \forall\ x,\ y\in R \tag{4.2}$$

(4.2) ifadesinde x yerine $d_2(x)$ alınır ise $\tau(d_2d_2(x)d_1(y)) = -d_1d_2(x)\sigma(d_2(y))=0$ dır. Yani, her x, y $\in R$ $\tau(d_2^2(x))d_1(y)=0$ olur. Bu ise Lemma 4.14 koşulunu sağladığından sonucu uygularsak, her $x\in R$ için, $\tau(d_2^2(x))=0$ veya her $y\in R$ için, $d_1(y)=0$ dır. Yani, her $x\in R$ için,

$$\tau(d_2^2(x))=0 \text{ veya } d_1=0$$

elde edilir. Kabulümden $d_1\neq 0$ dır. O halde her $x\in R$ için, $\tau(d_2^2(x))=0$ olur. Bu ise her $x\in R$ için,

$$d_2^2(x))=0$$

olduğunu verir. (4.2) ifadesinde x yerine $z\in R$ için, $xd_2(z)$ alınır ve kabulümü göz önüne alarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
0&=\tau(d_2(xd_2(z))d_1(y))+d_1(xd_2(z))\sigma(d_2(y))\\
&=\tau(d_2(x)\tau(d_2(z))d_1(y))+d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y))\\
&=-\tau(d_2(x)(d_1(z))\sigma(d_2(y))+d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y))\\
&=d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y))+d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y))
\end{aligned}$$

Yani, her x, y, $z\in R$ için, $2(d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)))=0$ dır. Burada char$R\neq 2$ olduğundan $d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y))=0$ olur. Bu ise Lemma 4.14 den her x, y, $z\in R$ için, $d_1(x)=0$ veya $d_2(z))\sigma(d_2(y))=0$ bulunur. Yani, $d_1=0$ veya her y, $z\in R$ için, $d_2(z))\sigma(d_2(y))=0$ olur. Kabulümden $d_1\neq 0$ olduğundan, $d_2(z))\sigma(d_2(y))=0$ olur. Benzer şekilde bu ifadeye Lemma 4.14 koşullarını sağladığından $d_2=0$ dır.

Teorem 4.16: $0\neq d$ (σ,τ)-türev, U ideal olmak üzere, $a\in R$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise $a\in Z$ olur.

İspat: Her u, $v\in U$ ve $a\in R$ için, hipotezden $[d(uv),\ a]_{\sigma,\tau}=0$ dır. Bu ifade açılır ve düzenlenir ise,

$$\begin{aligned}
0&=[d(uv),a]_{\sigma,\ \tau}\\
&=[d(u)\sigma(v)\tau(u)d(v),a]_{\sigma,\ \tau}\\
&=d(u)\sigma(v)\sigma(a)+\tau(u)d(v)\sigma(a)-\tau(a)d(u)\sigma(v)-\tau(a)\tau(u)d(v)
\end{aligned}$$

Hipotezden her $u\in U$ için, $[d(u),\ a]_{\sigma,\ \tau}=0$ olduğundan $d(u)\sigma(a)=\tau(a)d(u)$ olur. Bundan dolayı,

$$d(u)\sigma([v, a])+\tau([u, a])d(v) =0, \forall u, v\in U \quad (4.3)$$

(4.3) ifadesinde v yerine va alınır ve (4.3) göre düzenlenir ise,

$$\begin{aligned}0&=d(u)\sigma([va, a])+\tau([u, a])d(va)\\ &=d(u)\sigma([v, a])\sigma(a)+\tau([u, a])(d(v)\sigma(a)+\tau(v)d(a))\\ &=\{d(u)\sigma([v, a])\sigma(a)+\tau([u, a])d(v)\}\sigma(a)+\tau([u, a])\tau(v)d(a)\\ &=\tau([u, a])\tau(v)d(a)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda her u, v$\in$U için, $\tau([u, a])\tau(v)d(a)=0$ olur. Yani, her u$\in$U için, $\tau([u, a])\tau(U)d(a)=0$ bulunur. Burada $\tau(U)$ R nin sıfırdan farklı bir ideal olduğundan $\tau([u, a])=0$ veya $d(a)=0$ olur. Yani, her u$\in$U için, $[u, a]=0$ veya $d(a)=0$ elde edilir.

Her u$\in$U için, $[u, a]=0$ olsun. Yani, $[U, a]=(0)$ olur. Bu durumda [*Herstein, I.N.1976 Lemma 1.1.6*] den a$\in$Z dir.

$d(a)=0$ olsun. Burada her u$\in$U için $d([u, a])=0$ olur. Bu ifade açılır ise,

$$0=d([u, a])=[d(u), a]_{\sigma,\ \tau}+ [u, d(a)]_{\sigma,\ \tau} =[d(u), a]_{\sigma,\ \tau}$$

Yani , $d([U, a])=(0)$ olur. Burada (4.3) ifadesinde v yerine w$\in$U için, vw alınır ise,

$$\begin{aligned}0 &=d(u)\sigma([vw, a])+\tau([u, a])d(vw)\\ &=d(u)\sigma(v)\sigma([w, a])+ d(u)\sigma([v, a])\sigma(w)+\tau([u, a])d(v)\sigma (w)+\tau([u, a])\tau(v)d(w)\\ &=d(u)\sigma(v)\sigma([w, a])+ \tau([u, a])\tau(v)d(w)+\{d(u)\sigma([v, a])\sigma(w)+\tau([u, a])d(v)\}\sigma(w)\\ &=d(u)\sigma(v)\sigma([w, a])+\tau([u, a])\tau(v)d(w)\end{aligned}$$

olur. Her u, v, w$\in$U için, $d(u)\sigma(v)\sigma([w, a])+\tau([u, a])\tau(v)d(w)=0$ dır. Burada w yerine [w, a] alınır $d([U, a])=(0)$ ve eşitsizliğe göre düzenlenir ise,

$$\begin{aligned}0&= d(u)\sigma(v)\sigma([[w, a], a])+\tau([u, a])\tau(v)d([w, a])\\ &= d(u)\sigma(v)\sigma([[w, a], a])\end{aligned}$$

elde edilir. Her v$\in$U için sağlandığından $d(u)\sigma(U)\sigma([[w, a], a])=(0)$ olur. Bu ise $\sigma(U)$ R nin sıfırdan farklı ideali ise, her u, w$\in$U için, $d(u)=0$ veya $\sigma([[w, a], a])=0$ dır. Yani,

$$d(U)=(0) \text{ veya } [a, [a, w]]=0$$

olur. $d(U)=(0)$ olsun. Bu durumda Lemma 4.12 den d=0 dır. O halde her w$\in$U için $[a, [a, w]]=0$ olsun. Burada $I_a=[a, w]$ olarak tanımlansın. O halde $I_aI_a(U)=(0)$ olur. Lemma 4.15 den $I_a=0$ bulunur. Yani $[a, U]=(0)$ olur. Bu ise [*Herstein, I.N.1976 Lemma 1.1.6*] dan a$\in$Z dir.

Teorem 4.17: $0\neq$ d (σ,τ)-türev ve U ideal olmak üzere, $[d(U), d(U)]_{\sigma,\ \tau}=(0)$ ise R değişmelidir.

İspat: Bu hipotezde Teorem 4.16 dan $d(U)\subset Z$ dir. Bu ise Lemma 4.13 den R halkası değişmelidir.

Lemma 4.18: $0\neq d$ (σ,τ)-türev ve U ideal olmak üzere, $a\in R$ için $ad(U)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise a=0 veya R değişmeli olur.

İspat: $a\neq 0$ olsun. Aynı zamanda $a\notin Z$ olsun. Hipotezden dolayı $u\in U$ ve $b\in R$ için, $[ad(ub),b]_{\sigma,\ \tau}=0$ olur. Bu ifadede b yerine $\tau^{-1}(a)$ yazılır ve düzenlenir ise,

$$
\begin{aligned}
0&=[ad(ub),b]_{\sigma,\ \tau}\\
&=a[d(ub),b]_{\sigma,\ \tau}+[a,\tau(b)]d(ub)\\
&=a[d(ub),b]_{\sigma,\ \tau}\\
&=ad(u)\sigma(b)\sigma(b)+a\tau(u)d(b)\sigma(b)-a\tau(b)d(u)\sigma(b)-a\tau(b)\tau(u)d(b)
\end{aligned}
$$

olur. Hipotezden dolayı $ad(u)\sigma(b)=\tau(b)ad(u)$ olduğundan,

$$[a\tau(u)d(b),\ b]_{\sigma,\ \tau}=0,\ \forall u\in U \tag{4.4}$$

bulunur. Bulduğumuz (4.4) ifadesinde u yerine $v\in U$ için, $\tau^{-1}(d(v))u$ alınır ve düzenlenir ise,

$$[ad(v)\tau(u)d(b),\ b]_{\sigma,\ \tau}=0,\ \forall u, v\in U \tag{4.5}$$

olur. Ayrıca (4.4) ifadesinde u yerine $w\in U$ için, $u\tau^{-1}(ad(v))w$ alınır ve (4.5) göre düzenlenir ise,

$$
\begin{aligned}
0&=[a\tau(u\tau^{-1}(ad(v))w)d(b),\ b]_{\sigma,\ \tau}\\
&=[a\tau(u)ad(v)\tau(w)d(b),\ b]_{\sigma,\ \tau}\\
&=a\tau(u)[ad(v)\tau(w)d(b),\ b]_{\sigma,\ \tau}+[a\tau(u),\tau(b)]ad(v)\tau(w)d(b)\\
&=[a\tau(u),\tau(b)]ad(v)\tau(w)d(b)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda her $w\in U$ için, $[a\tau(u),\tau(b)]ad(v)\tau(w)d(b)=0$ dır. Yani, $[a\tau(u),\tau(b)]ad(v)\tau(U)d(b)=(0)$ olur. $\tau(U)$ R nin sıfırdan farklı ideali olduğundan, her $u, v\in U$ için, $[a\tau(u),a]ad(v)=0$ veya $d(b)=0$ olur. Bu ise *[P. H. Lee and T. K. Lee, 1981. Lemma3]* den, her $u, v\in U$ için,

$$[a\tau(u),a]=0 \text{ veya } ad(v)=0 \text{ veya } d(b)=0$$

olur. Her $u\in U$ için, $[a\tau(u),a]=0$ olsun. Bu ifadede $v\in U$ için, u yerine uv alınır ise,

$$
\begin{aligned}
0&=[a\tau(uv),a]\\
&=[a\tau(u)\tau(v),a]\\
&=a\tau(u)[\tau(v),a]+[a\tau(u),a]\tau(v)\\
&=a\tau(u)[\tau(v),a]
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada her $u\in U$ için, $a\tau(u)[\tau(v), a]=0$ dır. Yani, $a\tau(U)[\tau(v), a]=(0)$ olur. Burda ise, $\tau(U)$ R nin sıfırdan farklı ideali ise, her $u\in U$ için, $[\tau(v), a]=0$ veya $a=0$ dır. Kabulümden $a\neq 0$ olduğundan $[\tau(U), a]=(0)$ olur. Bu ise [*Herstein, I.N.1976 Lemma 1.1.6*] dan $a\in Z$ dir. Bu durumda her $v\in U$ için, $ad(v)=0$ dır. Bu ise Lemma 4.14 den $a=0$ veya $d=0$ dır. Bu sonuçlarda kabullerimle çelişir. O halde $d(b)=0$ dır. Burada b elemanı için, $\tau(b)=a$ yazılır d(bu) ifadesi düzenlenir ise, her $u\in U$ için,

$$\begin{aligned} d(bu)&=d(b)\sigma(u)+\tau(b)d(u)\\ &=ad(u)\in C_{\sigma,\ \tau} \end{aligned}$$

olur. O halde, $d(bu)\in C_{\sigma,\ \tau}$ olur. Buarada her $u\in U$ için, $ad(bu)\in C_{\sigma,\ \tau}$ dır. Bu durumda [*P. H. Lee and T. K. Lee, 1981. Lemma3*] den her $u\in U$ için, $d(bu)=0$ olur. $d(bu)=ad(u)$ olduğundan her $u\in U$ için, $ad(u)=0$ dır. Bu ise Lemma 4.14 den $a=0$ veya $d=0$ elde edilir. Bu sonuçta kabullerimle çelişir. O halde kabulüme her koşulda çelişki oluştuğundan $a\in Z$ dir. Ayrıca $a\in Z$ ve $ad(u)\in C_{\sigma,\ \tau}$ olduğundan ifade açılır ise, her $u\in U$ ve her $x\in R$ için, $ad(u)\sigma(x)=\tau(x)ad(u)$ iken $a[d(u),x]_{\sigma,\ \tau}=0$ dır. $a\neq 0\in Z$ ve $a[d(u),x]_{\sigma,\ \tau}=0$ ise Teorem 4.16 dan R değişmelidir.

Lemma 4.19: $0\neq d$ (σ,τ)-türev olmak üzere, $a\in R$ için $[d(R), a]_{\sigma,\ \tau}\in C_{\sigma,\ \tau}$ ise $a\in Z$ olur.

İspat: $a\notin Z$ olsun. Hipotezden $a^2\in R$ için, $[d(a^2),a]_{\sigma,\ \tau}\in C_{\sigma,\ \tau}$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenir ise,

$$\begin{aligned} [d(a^2),a]_{\sigma,\ \tau} &= [d(a)\sigma(a)+\tau(a)d(a),\ a]_{\sigma,\ \tau}\\ &=d(a)\sigma(a)\sigma(a)-\tau(a)\tau(a)d(a)=[d(a),a^2]_{\sigma,\ \tau}\\ &=\tau(a)[d(a),\ a]_{\sigma,\ \tau}+[d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a)\\ &=2\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \end{aligned}$$

ifadesinde $charR\neq 2$ olduğu kullanılırsa,

$$\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Bu ifadeye [*K. Kaya 1988 Lemma 3.*] uygulanırsa,

$$\tau(a)\in Z \text{ veya } [d(a),a]_{\sigma,\tau}=0$$

elde edilir. Eğer $[d(a), a]_{\sigma,\tau}=0$ ise her $x\in R$ için, $[d([a, x]), a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan ifade açılır ise $[d([a, x]), a]_{\sigma,\tau}=[[d(a),x]_{\sigma,\tau}-[d(x), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}$ olur. Böylece

$$[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]\in C_{\sigma,\tau}\quad \forall\, x\in R$$

bulunur. Son elde edilen eşitlikte x yerine ax alınır ve kabulüm uygulandığında

$$\tau(a)\,[[d(a),x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \quad \forall\ x\in R$$

elde edilir. Bu ise [*K. Kaya 1988 Lemma 3.*]koşullarını saladığından sonuç uygulanır ise,

$$a \in Z \text{ veya } [[d(a),x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall\ x\in R$$

elde edilir. $[[d(a),x]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise; Bu ifadeye $[x,[y,z]]_{\sigma,\tau} + [[x,z]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau} - [x,y]_{\sigma,\tau}, z] = 0$ özdeşliği uygulanır ve $\tau(a) \in Z$ veya $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ eşitliği kullanılırsa, her $x \in R$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= [\,[d(a), x]_{\sigma,\tau}, a] \\ &= [d(a), [x, a]]_{\sigma,\tau} + [[d(a), a]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} \\ &= [d(a), [a, x]]_{\sigma,\tau} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi, $x \in R$ için $d_{d(a)}(x) = [d(a), x]_{\sigma,\tau}$ ile tanımlanan $d_{d(a)}$ dönüşümü bir (σ,τ)-türev ve $d_a(x) = [a, x]$ ile tanımlanan d_a dönüşümü bir türevdir. Üstelik $d_a(R)\subset R$ ve $d_a d_{d(a)}(R) = 0$ dir. Böylece Lemma 4.15 den $d_{d(a)} = 0$ veya $d_a = 0$ bulunur. Yani,

$$d(a)\in C_{\sigma,\tau} \text{ veya } a\in Z$$

elde edilir. Eğer $d(a)\in C_{\sigma,\tau}$ ise her $x\in R$ için,

$$\begin{aligned} [d(ax), a]_{\sigma,\tau} &= [d(a)\sigma(x)+\tau(a)d(x), a]_{\sigma,\tau} \\ &= d(a)\sigma(x)\sigma(a)+\tau(a)d(x)\sigma(a)-\tau(a)d(a)\sigma(x)-\tau(a)\tau(a)d(x) \end{aligned}$$

olur. $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan buradan,

$$d(a)\sigma([x, a])+\tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \ \forall x\in R$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} 0 &= [d(a)\,\sigma([x, a])+\tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \\ &= d(a)\,\sigma([x, a])\sigma(a)+\tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau}\,\sigma(a)-\tau(a)d(a)\sigma([x, a])-\tau(a)\tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $d(a)$, $[d(x), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa, $\forall\ x\in R$,

$$d(a)\,\sigma([[x, a], a]) = 0$$

elde edilir. $d(a)\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan,

$$d(a)R\sigma([[x, a], a])=(0)$$

ve buradan R halkasının asal olması kullanılarak,

$$d(a) = 0 \text{ veya } [a, [a, R]]=0$$

bulunur. $[a, [a,R]] = 0$ ise**;** bu takdirde $x \in R$ için $I_a(x)=[a, x]$ ile tanımlanan bir iç türev olmak üzere $I_a^2(R)=0$ demektir. Lemma 4.15 den $I_a = 0$ bulunur. Bu ise $a\in Z$ olduğunu verir.

$d(a) = 0$ ise bu takdirde her $x\in R$ için $d(a)\sigma([x, a])+\tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $x\in R$ için, $\tau(a)[d(x), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur . Burada R nin asal halka ve $[d(x),a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olması kullanılarak

$$a \in Z \text{ veya } [d(R), a]_{\sigma,\tau} = 0$$

elde edilir. $[d(R), a]_{\sigma,\tau} =0$ ise Teorem 4.16'dan $a \in Z$ olur.

Teorem 4.20: $0\neq d(\sigma,\tau)$-türev olmak üzere, $[d(R), d(R)]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise R değişmelidir.

İspat: Lemma 4.19 dan $d(R) \subset Z$ olur. Bu ise Lemma 4.13 den R halkası değişmelidir.

Kaya, K., 1991

Bu makalede, aksi belirtilmedikçe R asal halka, U sıfırdan farklı ideal, karakteristik ikiden farklı, $\sigma,\tau:R\to R$ iki otomorfizma ve d R nin (σ, τ)-türevi olarak alınmıştır.

Lemma 4.21: d, (σ, τ)-türev ve $U\neq(0)$ ideal olmak üzere, $a\in R$ için $ad(U)=(0)$ (veya $d(U)a=(0)$) ise $a=0$ veya $d=0$ olur.

İspat: Her $x\in R$ için $u\in U$ için $ux\in U$ iken hipotezden $ad(ux)=0$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenir ise,

$$0=ad(ux)=a(d(u)\sigma(x)+\tau(u)d(x))=a\tau(u)d(x)$$

bulunur. Yani,

$$a\tau(U)d(x)=(0)$$

olur. $\tau(U)$ R nin sıfırdan farklı bir ideali olduğunu $a=0$ veya her $x\in R$ için, $d(x)=(0)$ olur. Yani,

$a=0$ veya $d=0$

elde edilir.

Lemma 4.22: $d_1: R \to R$ bir (σ,τ)-türev ve α, R nin bir halka otomorfizmi olmak üzere $d_2: R\to R$ bir (α,α)- türev, $d_2\alpha = \alpha d_2$, $d_1\alpha=\alpha d_1$ olsun. Buna göre $d_2(U)\subset U$ ve $d_1d_2(U)=0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dir.

İspat: $u,v \in U$ için hipotezden,

$$\begin{aligned}0&=d_1d_2(uv)\\&=d_1(d_2(u)\alpha(v)+\alpha(u)d_2(v))\\&=\tau(d_2(u))d_1(\alpha(v))+d_1(\alpha(u)))\sigma(d_2(v))\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$d_1(\alpha(u))\sigma(d_2(v))+\tau(d_2(u))d_1(\alpha(v)) = 0,\ \forall u, v\in U \quad (4.6)$$

bulunur. Elde edilen (4.6) eşitliğinde u yerine $d_2(u)$ alınırsa,

$$\tau(d_2^2(u))d_1(\alpha(v)) = 0, \forall u,\ v \in U \quad (4.7)$$

elde edilir. $\alpha(U)\neq(0)$, R nin bir ideali olduğundan $d_1 \neq 0$ ise (4.7) ve Lemma 4.14 den $d_2^2(U)=0$ bulunur. O halde $\forall$ u, v$\in$ U için

$$\begin{aligned}0&=d_2^2(uv)\\&=d_2(d_2(u)\alpha(v)+\alpha(u)d_2(v))\\&=\alpha(d_2(u))d_2(\alpha(v))+d_2(\alpha(u))\alpha(d_2(v))\\&=2d_2(\alpha(u))d_2(\alpha(v))\end{aligned}$$

elde edilir. CharR$\neq$2 oduğundan

$$d_2(\alpha(U))d_2(U))=0 \quad (4.8)$$

bulunur. Lemma 4.14 ve (4.8) den $d_2(\alpha(U)))=0$ ve dolayısıyla $d_2 = 0$ olur.

Sonuç 4.23: $U \neq (0)$, R nin bir ideali ve $a, b\in U$ olsun. Buna göre, $\forall x\in U$ için, $[a, [b,x]]_{\sigma,\tau} =0$ ise $a\in C_{\sigma,\tau}$ veya $b\in Z$ dir.

İspat: $d_1: R \to R$, $d_1(x)=[a, x]_{\sigma,\tau}$ olarak tanımlandığında R halkasının bir (σ, τ)-türevi ve $d_2: R\to R$, $d_2(x)=[b, x]$ olarak tanımlandığında R halkasının bir türevidir. Üstelik $d_2(U)$ ve $d_1d_2(U)=0$ dir. Böylece Lemma 4.21 kullanılarak $d_1=0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir.

Bu ise $a \in C_{\sigma,\tau}$ veya $b \in Z$ demektir.

Lemma 4.24: $0\neq d: R \to R$ bir (σ,τ)-türev ve $U\neq(0)$, R nin bir ideali olsun. $a\in U$ için $[d(U), a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu taktirde $a \in Z$ dir.

İspat: $a\notin Z$ olsun. Hipotezden $a^2\in R$ için, $[d(a^2), a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenir ise,

$$[d(a^2),a]_{\sigma,\tau}=[d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a), a]_{\sigma,\tau}$$

$$= d(a)\sigma(a)\sigma(a) +\tau(a)d(a)\sigma(a) - \tau(a)d(a)\sigma(a) - \tau(a)\tau(a)d(a)$$

$$=[d(a), a^2]_{\sigma,\tau}$$

$$=\tau(a) [d(a), a]_{\sigma,\tau} +[d(a), a]_{\sigma,\tau}\, \sigma(a)$$

$$=2\tau(a)[d(a), a]_{\sigma,\tau}$$

ifadesinde $\mathrm{char}R\neq 2$ olduğu kullanılırsa,

$$\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Bu ifadeye [*K. Kaya 1988 Lemma 3.*] uygulanırsa

$$\tau(a) \in Z \text{ veya } [d(a), a]_{\sigma,\tau} = 0 \qquad (4.9)$$

elde edilir. Eğer $[d(a), a]_{\sigma,\tau}=0$ ise her $u\in U$ için, $[d([a, u]), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, $[d([a, u]), a]=[[d(a), u]_{\sigma,\tau} - [d(u), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}$ olur. Böylece ,

$$[[d(a), u]_{\sigma,\tau}, a]\in C_{\sigma,\tau}, \quad \forall u \in U \qquad (4.10)$$

bulunur. (4.10) eşitliğinde u yerine au alınırsa,

$$\tau(a) [[d(a),u]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \quad \forall u \in U$$

olur. [*K. Kaya 1988 Lemma 3.*]'den

$$a \in Z \text{ veya } [[d(a), u]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} =0 , \forall u \in U \qquad (4.11)$$

elde edilir. $[[d(a), u]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}= 0$ ise; Bu ifadeye $[x, [y, z]]_{\sigma,\tau}+[[x, z]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau}-[x, y]_{\sigma,\tau}, z]=0$ özdeşliği uygulanır ve (4.9) eşitliği kullanılırsa, her $u \in U$ için,

$$0=[[d(a), u]_{\sigma,\tau}, a]$$

$$=[d(a), [u, a]]_{\sigma,\tau}+[[d(a), a]_{\sigma,\tau}, u]_{\sigma,\tau}$$

$$=[d(a), [a, u]]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Şimdi, $x \in R$ için $d_{d(a)}(x)=[d(a), x]_{\sigma,\tau}$ ile tanımlanan $d_{d(a)}$ dönüşümü bir (σ, τ)-türev ve $d_a(x)=[a, x]$ ile tanımlanan d_a dönüşümü bir türevdir. Üstelik $d_a(U)\subset U$ ve $d_a d_{d(a)}(U) = 0$ dir. Böylece Lemma 4.22 den $d_{d(a)} = 0$ veya $d_a = 0$ bulunur. Yani,

$$d(a)\in C_{\sigma,\tau} \text{ veya } a\in Z$$

elde edilir. Eğer $d(a)\in C_{\sigma,\tau}$ ise her $u\in U$ için,

$$[d(au), a]_{\sigma,\tau} =[d(a)\sigma(u)+\tau(a)d(u), a]_{\sigma,\tau}$$

$$=d(a)\sigma(u)\sigma(a)+\tau(a)d(u)\sigma(a)-\tau(a)d(a)\sigma(u)-\tau(a)\tau(a)d(u)$$

olur. $d(a)\in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan buradan,

$$d(a)\sigma([u, a])+\tau(a)[d(u), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau} \quad \forall u\in U \qquad (4.12)$$

elde edilir. Böylece,

$$0 = [d(a)\sigma([u, a])+\tau(a)[d(u), a]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau}$$

$$=d(a)\sigma([u, a])\sigma(a)+\tau(a)[d(u), a]_{\sigma,\tau}\sigma(a)-\tau(a)d(a)\sigma([u, a])-\tau(a)\tau(a)[d(u), a]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Burada $d(a)$, $[d(u), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa, $\forall u\in U$ için,

$$d(a)\sigma([[u, a], a])=0$$

elde edilir. $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$d(a)R\sigma([[u, a], a])=(0)$$

ve buradan R halkasının asal halka olması kullanılarak $d(a)=0$ veya $[a, [a, U]]=0$ bulunur. $[a, [a, U]]=0$ ise; bu takdirde $x\in R$ için, $I_a(x)=[a, x]$ ile tanımlanan bir iç türev olmak üzere $I_a^2(U)=(0)$ demektir. Lemma 4.34 den $I_a = 0$ bulunur. Bu ise $a\in Z$ olduğunu verir. $d(a) = 0$ ise; bu takdirde (4.12) den $\forall u\in U$ için, $\tau(a)[d(u), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur . Burada R nin asal halka ve $[d(u), a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olması kullanılarak

$$a \in Z \text{ veya } [d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0$$

elde edilir. $[d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise Teorem 4.16’dan $a \in Z$ olur.

Lemma 4.25: $0 \neq d:R \to R$ bir (σ, τ)-türev ve $U\neq(0)$, R nin bir ideali olsun. $d(U)\subset U$ ve $[d(U), d(U)]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu takdirde R halkası komülatiftir.

İspat : Lemma 4.24 dan $d(U) \subset Z$ dir. Dolayısıyla Lemma 4.22 dan R komütatiftir.

Teorem 4.26: $0\neq d_1$: R bir (σ,τ)–türev ve $0 \neq d_2 :R\to R$ bir türev olsun. $U\neq(0)$, R nin bir ideali ve $d_2(U) \subset U$ olsun. Buna göre $d_1d_2(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R komütatiftir.

İspat: Her $u, v \in U$ için,

$$d_1d_2([u,d_2(v)])=d_1([d_1(u),d_2(v)]-[d_2^2(v),u])$$

$$=[d_1(u), d_2^2(v)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$$

ve dolayısıyla,

$$[d_1(U), d_2^2(U)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau} \qquad (4.13)$$

olur. $d_2(U) \subset U$ ve $d_1 \neq 0$ olduğu Lemma 4.24 da kullanılarak, (4.13) eşitliğinden $d_2^2(U) \subset Z$ elde edilir . Buna göre $\forall\, u, v \in U$ için $d_2^2([u,v])\in Z$ olduğundan,

$$d_2^2([u, v])=d_2([d_2(u), v]-[d_2(v), u])$$
$$=-[d_2(v), d_2(u)]+[d_2(u), d(v)])$$
$$=2[d_2(u), d_2(v)]\in Z$$

ifadesinden char $R \neq 2$ olduğu kullanılarak $[d_2(U), d_2(U)] \subset Z$ elde edilir. Lemma 4.25 den R halkası komütatiftir.

Teorem 4.27: U, R nin bir (σ,τ)-sağ Lie ideali olsun. $[U, U]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu takdirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dir.

İspat : $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu kabul edelim. Buna göre $a\in U$ ve $a\notin C_{\sigma,\tau}$ $b\in U$ ve $b \notin Z$ olacak biçimde a ve b elemanları vardır. Her $x \in R$ için $[a, x]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan hipotezden,

$$[[a,x]_{\sigma,\tau}, b]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall\, x \in R$$

olur. Öte yandan $[[a, x]_{\sigma,\tau}, b]_{\sigma,\tau} =[a, [x, b]]_{\sigma,\tau}+[[a, b]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau}$ ve $[a, b]_{\sigma,\tau} \in [U, U]_{\sigma,\tau}$ olması kullanılarak son eşitlikten

$$[[a, x]_{\sigma,\tau}, b]_{\sigma,\tau}= [a, [x, b]]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau} \qquad (4.14)$$

elde edilir. d_a: R $\rightarrow$ R, $d_a(x)=[a, x]_{\sigma,\tau}$ bir (σ, τ)–türev ve $d_b(x)=[b, x]$, b elemanı ile belirlenen bir iç türevdir. Üstelik $a\notin C_{\sigma,\tau}$ ve $b \notin Z$ olduğundan d_a ve d_b sıfırdan farklıdır. Böylece (4.14) eşitliğinden

$$d_a d_b (R) \subset C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Bu ise Teorem 4.26 den R halkası komülatif demektir. Yani $U\subset Z$ ki bu bir çelişkidir.

Sonuç 4.28: $M \neq (0)$, R halkasının bir ideali ve $[M, R]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R komütatiftir.

İspat: M, R nin bir (σ,τ)-sağ Lie idealidir. Hipotezden $[M, M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise buna göre, Teorem 4.27 dan $M \subset Z$ veya $M \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Böylece R halkasının komülatif olduğu elde edilir.

Sonuç 4.29: Her x, y, z $\in$ R için $[[x, y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau}=0$ ise R komütatiftir.

İspat : Hipotezden $[R, R]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Dolayısıyla Sonuç 4.28 dan R komütatiftir.

Teorem 4.30: U, karakteristiği 2 den farklı olan R asal halkasının hem sıfırdan farklı bir (σ,τ)-sağ Lie ideali ve hem de alt-halkası ise bu taktirde $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya U, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat: $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu varsayalım. $[U, U]_{\sigma,\tau}=(0)$ ise bu takdirde Teorem 4.27 dan $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ dir. Bu kabulümüzle çelişir. O halde,

$[U, U]_{\sigma,\tau} \neq (0)$ dır. Her u, v $\in$ U ve y$\in$ R için $[u, \tau^{-1}(v)y]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan

$[u, \tau^{-1}(v)y]_{\sigma,\tau}=v[u, y]_{\sigma,\tau}+[u, \tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)$ ifadesinden $[U, \tau^{1}(U)]_{\sigma,\tau}R\subset U$ bulunur. Buna göre $\forall$ u, v$\in$U ve x, y$\in$R için,

$$[u, \tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\, x\sigma(y)-\tau(y)[u, \tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\, x \in U$$

olur. Buradan,

$$R\,[U, \tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}\, R \subset U$$

elde edilir. $R\,[U, \tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}\,R=0$ ise**;** bu takdirde $[U, \tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}=0$ dir. Dolayısıyla her u, v$\in$U ve x$\in$R için $0=[[u, x]_{\sigma,\tau}, \tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau} =[[u, \tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau}+ [u, [x, \tau^{-1}(v)]]_{\sigma,\tau}$ ifadesinden

$$[u, [x, \tau^{-1}(v)]]_{\sigma,\tau} = 0 , \forall\, u, v \in U, x \in R$$

bulunur. $d_u: R \to R$, $d_u(x)=[u, x]_{\sigma,\tau}$ ve $d_{\tau^{-1}(v)}: R \to R$, $d_{\tau^{-1}(v)}(x)=[\tau^{-1}(v), x]$ ile tanımlanan d_u ve $d_{\tau^{-1}(v)}$ dönüşümleri sırasıyla R halkasının bir (σ, τ)-türevi ve τ^{-1} ile belirlenen iç türevi bulunur. Üstelik $d_u d_{\tau^{-1}(v)}(R) =(0)$ dir. Bu ise Lemma 4.22 den $d_u = 0$ veya $d_{\tau^{-1}(v)} = 0$ olur. Yani, $U \subset C_{\sigma,\tau}$ veya $U \subset Z$ olur. Çelişki elde edilir.

Aydın, N. ve Kandarmar, H., 1994

Bu makalede, aksi belirtilmedikçe R asal halka, karakteristik ikiden farklı ve σ, τ R nin iki otomorfizimi olarak alınmıştır.

Lemma 4.31: U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olmak üzere $a \in R$ için , $[U, a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: $a \notin Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman $u \notin C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde $u \in U$ vardır. Diğer taraftan hipotezden $[U, a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $x \in R$ için, $[[u, a]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = 0 \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Burada jacobi özdeşliği kullanılarak,

$$[[u, a]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} = [u, [a, x]]_{\sigma,\tau} + [[u, x], a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

ve $[[u, x], a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $x \in R$ ve $u \in U$ için,

$$[[u, a]_{\sigma,\tau}, x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. R üzerinde her $x \in R$ için $d_u(x)=[u, x]_{\sigma,\tau}$ ile tanımlı (σ,τ) iç türev ve $d_a(x)=[a, x]$ olarak tanımlanan iç türevi tanımlansın. $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d_u \neq 0$ ve $a \notin Z$ olduğundan $d_a \neq 0$ olur. Yine $d_a(R) \subset R$ dir. Her $x \in R$ için, $[u, [a, x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d_u d_a(R) \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Teorem 2.39 dan R değişmeli olur. Yani $a \in Z$ olur. Bu ise $a \notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde,

$$a \in Z \text{ veya } U \subset C_{\sigma,\tau}$$

bulunur.

Lemma 4.32: $a \in R$ ve $aU=(0)$ (veya $Ua=(0)$) olsun.

(i) U, (σ,τ)-sol Lie ideal ise a=0 veya $U \subset Z$

(ii) U, (σ,τ)-sağ Lie ideal ise a=0 veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: (i) U, (σ,τ)- sol Lie ideal olduğundan her x, $y \in R$, $u \in U$ için $[x, u] \in U$ olduğu için $a[xy, u]_{\sigma,\tau}=0$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenirse,

$$0=ax[y, \sigma(u)] +a[x, u]_{\sigma,\tau}y =ax[y, \sigma(u)]$$

bulunur. Her $x \in R$ için sağlandığından $aR[y, \sigma(u)]=(0)$ dır. R asal halka olduğundan her $y \in R$ ve $u \in U$ için, a=0 veya $[y, \sigma(u)] = 0$ bulunur. Yani,

$$a=0 \text{ veya } U \subset Z$$

olur. Benzer biçimde, Ua=(0) olduğunda,

$$0=x[y,u]_{\sigma,\ \tau}a+[x,\tau(u)]ya=[x,\ \tau(u)]ya$$

bulunur. Her $y\in R$ için sağlandığından $[x,\tau(u)]Ra=(0)$ dır. R asal olduğundan her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $[x,\ \tau(u)]=0$ veya a=0 bulunur. O halde

$$U\subset Z \text{ veya } a=0$$

elde edilir.

(ii) $\forall x,y\in R$ ve $u\in U$ için,

$$\begin{aligned}0&=a[u,xy]_{\sigma,\tau}\\&=a\tau(x)[u,y]_{\sigma,\tau}+a[u,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y)\\&=a\tau(x)[u,y]_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

olur. Her $x\in R$ için $\tau(x)\in R$ olduğundan $aR[U,R]_{\sigma,\tau}=(0)$ bulunur. R asal halka olduğundan,

$$a=0 \text{ veya } U\subset C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Ua = 0 olması durumunda,

$$0=[u,xy]_{\sigma,\tau}a=\tau(x)[u,y]_{\sigma,\tau}a+[u,x]_{\sigma,\tau}\tau(y)a=[u,x]_{\sigma,\tau}\tau(y)a$$

olur. Benzer şekilde $[U,R]_{\sigma,\tau}Ra=(0)$ bulunur. Yani,

$$a=0 \text{ veya } U\subset C_{\sigma,\tau}$$

bulunur.

Teorem 4.33: U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olmak üzere $a\in R$ için $[U,a]=(0)$ ise $a\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\ \tau}$ olur.

İspat: $[U,a]=(0)$ olduğundan her $x\in R$ ve $u\in U$ için, $[[u,x]_{\sigma,\ \tau},a]=0$ olur. Her $x\in R$ ve $u\in U$ için,

$$\begin{aligned}0&=[u\sigma(x)-\tau(x)u,a]\\&=u\sigma(x)a-\tau(x)ua-au\sigma(x)+a\tau(x)u\\&=u\sigma(x)a-\tau(x)au-ua\sigma(x)+a\tau(x)u\\&=u(\sigma(x)a-a\sigma(x))+(a\tau(x)-\tau(x)a)u=u[\sigma(x),a]+[a,\tau(x)]u\end{aligned}$$

bulunur.

$$u[\sigma(x),\ a]=[\tau(x),\ a]u,\ \forall\ u\in U,\forall x\in R \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) eşitliğinde x yerine xy yazılırsa, $u[\sigma(xy),a]=[\tau(xy),a]u$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenirse,

$$0=u[\sigma(xy), a]-[\tau(xy), a]u$$
$$=u[\sigma(x)\sigma(y), a]-[\tau(x)\tau(y), a]u$$
$$=u[\sigma(x)\sigma(y), a]-[\tau(x)\tau(y), a]u$$
$$=u\sigma(x)[\sigma(y),a]+u[\sigma(x),a]\sigma(y)-\tau(x)[\tau(y), a]u-[\tau(x), a]\tau(y)u$$

elde edilir. Burada (4.15) ifadesi uygulanırsa,

$$[u, x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y), a]+[\tau(x), a][u, y]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall u\in U,\ \forall x\in R \qquad (4.16)$$

eşitliği bulunur. (4.16) ifadesinde y yerine $\sigma^{-1}(a)$ alınırsa, her $u\in U$ ve $x\in R$ için,

$$[\tau(x), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$$

bulunur. Bu son ifade kullanılarak x yerine xy yazılırsa,

$$0=[\tau(xy), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$$
$$=[\tau(x)\tau(y), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$$
$$=\tau(x)[\tau(y), a][u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}+[\tau(x), a]\tau(y)[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$$
$$=[\tau(x), a]\tau(y)[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Bu ifade her $y\in R$ için $\tau(y)\in R$ olduğunda $[\tau(x), a]R[u, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=(0)$ olur. Bu durumda R asal halka olduğundan her $x\in R$ için,

$$[\tau(x), a]=0 \text{ veya her } u\in U \text{ için, } [u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$$

olur. Buradan $y\in R$ için $\tau(y)\in R$ olduğundan, $a\in Z$ veya $[U, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=(0)$ elde edilir. $[U, \sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=(0)\subset C_{\sigma,\tau}$ ise Lemma 4.21 den $\sigma^{-1}(a)\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur. O halde,

$$a\in Z \text{ veya } U\subset C_{\sigma,\tau}$$

bulunur.

Sonuç 4.34: U, (σ,τ)-sağ Lie ideal olmak üzere U değişmeli ise $U\subset Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur.

İspat: U değişmeli olduğundan [U, U]=(0) olur. Her $u\in U$ için, [U, u]=(0) olduğundan Teorem 4. 33 den her $u\in U$ için $u\in Z$ veya $U\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani,

$$U\subset Z \text{ veya } U\subset C_{\sigma,\tau}$$

bulunur.

NOT: $(0)\neq U$, R nin bir (σ,τ)- sol Lie ideali olsun. $T(U)=\{a\in R \mid [R, a]_{\sigma,\tau}\subset U\}$ tanımlayalım. $U\subset T(U)$ olduğu açıktır. Üstelik T(U), R halkasının (σ,τ)–sol Lie ideali ve alt halkasıdır.

İspat: T(U)={$a\in R$ | $[R,a]_{\sigma,\ \tau}\subset U$}kümesinin alt halka ve (σ,τ)-sol Lie ideal olduğunu gösterilsin. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $[R,U]_{\sigma,\ \tau}\subset U$ olur. Yani $U\subset$ T(U) olur. a, $b\in$ T(U) ve her $x\in R$ için $[x,\ a-b]_{\sigma,\ \tau}=[x,a]_{\sigma,\ \tau}-[x,b]_{\sigma,\ \tau}\in U$ olduğundan $a-b\in$ T(U) olur. a, $b\in$ T(U) ve her $x\in R$ için,

$$[x,\ ab]_{\sigma,\ \tau}= [x\sigma(a),\ b]_{\sigma,\ \tau}+[\tau(b)x,\ a]_{\sigma,\ \tau}\in U$$

olduğundan $ab\in$ T(U) olur. Yani T(U) alt halkadır.

T(U) nun tanımından $[R,T(U)]_{\sigma,\ \tau}\subset U$ ve $U\subset T(U)$ olduğundan $[R,T(U)]_{\sigma,\ \tau}\subset$ T(U) bulunur. Yani T(U) bir (σ,τ)-sol Lie idealdir.

Lemma 4.35: R bir halka, $(0)\neq U$, (σ,τ)-sol Lie ideal, T(U)={$a\in R$ | $[R,a]_{\sigma,\ \tau}\subset U$} olmak üzere, $R[T(U),\ \sigma(T(U))]\subset T(U)$ ve $[T(U),\ \tau(T(U))]R\subset T(U)$ dir.

İspat: T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olduğu için her u, $v\in$ T(U) ve $x\in R$ için, $[u,\ [x,v]_{\sigma,\ \tau}]\in$ T(U) yazılır. Buradan,

$$[u,\ x\sigma(v)-\tau(v)x]=ux\sigma(v)-u\tau(v)x-x\sigma(v)u+\tau(v)xu\in T(U)$$

bulunur.

Öte yandan T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her $x\in R$, u, $v\in$ T(U) için, $[xu,\ v]_{\sigma,\ \tau}\in$ T(U) olur. O halde $[u,\ [x,\ v]_{\sigma,\ \tau}]\in$ T(U) ve $[xu,\ v]_{\sigma,\ \tau}\in$ T(U) olduğundan T(U) nun alt halka olmasından dolayı,

$$[u,\ [x,\ v]_{\sigma,\ \tau}]+[xu,\ v]_{\sigma,\ \tau}\in T(U)$$

elde edilir. Bunu açık yazacak olursak,

$$ux\sigma(v)-u\tau(v)x-x\sigma(v)u+xu\sigma(v)=u(x\sigma(v)-\tau(v)x)-x(\sigma(v)u-u\sigma(v))$$
$$=u[x,\ y]_{\sigma,\ \tau}-x[\sigma(v),\ u]\in T(U)$$

elde edilir. $u[x,\ v]_{\sigma,\ \tau}\in$ T(U) olduğundan, $-x[\sigma(v),\ u]\in$ T(U) olur. Yani,

$$R[T(U),\ \sigma(T(U))]\subset T(U)$$

bulunur. Yine T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan her u, $v\in$ T(U) ve $x\in R$ için $[ux,\ v]_{\sigma,\ \tau}\in$ T(U) ve böylece $u[x,\ v]_{\sigma,\ \tau}+[u,\tau(v)]x\in$ T(U) elde edilir. $u[x,\ v]_{\sigma,\ \tau}\in$ T(U) olduğu için, $[u,\tau(v)]x\in$ T(U) ve buradan,

$$[T(U),\ \tau(T(U))]R\subset T(U)$$

elde edilir.

Lemma 4.36: $(0)\neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\ \tau}$ olmak üzere $a,b\in R$ için aT(U)b=(0) ise a=0 veya b=0 olur.

İspat: T(U), (σ,τ)-sol Lie ideal olduğu için her $u\in U$, $v\in$ T(U) ve $y\in R$ için,

$[uby, v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olur. Hipotezden $aT(U)b=(0)$ olduğundan $a[uby, v]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. Bu ifadeyi açar ve düzenlenir ise,

$$0 = aub\,[y, v]_{\sigma,\tau}b+a[ub, \tau(v)]yb$$
$$=a[ub, \tau(v)]yb$$
$$= aub\tau(v)yb-a\tau(v)ubyb$$
$$=-a\tau(v)ubyb$$

bulunur. Yani her $v\in T(U)$, $u\in U$ için, sağlandığından $a\tau(v)ubRb=(0)$ olur. R asal halka olduğundan $a\tau(v)ub=0$ veya $b=0$ bulunur.Her $v\in T(U)$, $u\in U$ olduğundan,

$$a\tau(T(U))Ub=(0) \text{ veya } b=0$$

elde edilir. $a\tau(T(U))Ub=(0)$ ise her $x\in R$, $u\in U$ ve $v\in T(U)$ için, $a\tau(v)[u, x]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. Bu ifade açılır ve x yerine $\sigma^{-1}(bx)$ yazılırsa,

$$0 = \tau(v)u\sigma(\sigma^{-1}(bx))b-a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(bx))ub$$
$$=a\tau(v)ubxb-a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub$$
$$=-a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub$$

bulunur. σ örten olduğundan, $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))Rub=(0)$ elde edilir. R asal olduğundan,

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))=0 \text{ veya } Ub = (0)$$

olur. Buradan $Ub=(0)$ ise $U\not\subset Z$ ve $U\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan Lemma 4.22 den $b=0$ elde edilir. Her $v\in T(U)$ için, $a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))=0$ olsun. Yani,

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))=0,\ \forall v\in T(U) \tag{4.17}$$

olsun. Lemma 4.25 den U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan $[U, \tau(T(U))]R\subset T(U)$ olur. Buradan $[R, [U, \tau(T(U))]R]_{\sigma,\tau}\subset[R, T(U)]_{\sigma,\tau}\subset U\subset T(U)$ olduğundan her $x, y\in R$, $u\in U$ ve $v\in T(U)$ için, $[\tau(x), [u, \tau(v)]y]_{\sigma,\tau}\in [R, [U, \tau(T(U))]R]_{\sigma,\tau}\subset U\subset T(U)$ olur.

Böylece $\tau(x)\sigma([u, \tau(v)]y)-\tau([u, \tau(v)]y)\tau(x)\in T(U)$ elde edilir. Bu ifadeyi soldan a, sağdan b ile çarpar ve hipotezden $aT(U)b=(0)$ olduğu kullanılırsa ,

$$a\tau(x)\sigma([u, \tau(v)]y)b-a\tau([u, \tau(v)]y)\tau(x)b=0$$

elde edilir. Bu ifadede x yerine $x\sigma^{-1}(b)z$ yazılır ve (4.17) kullanılır ise,

$$0=a\tau(x\sigma^{1}(b)z)\sigma([u, \tau(v)]y)b-a\tau([u, \tau(v)]y)\tau(x\sigma^{1}(b)z)b$$
$$=a\tau(x)\tau(\sigma^{1}(b))\tau(z)\sigma([u, \tau(v)]y)b-a\tau([u, \tau(v)]y)\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)b$$
$$=a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u, \tau(v)]y)ba-\tau([u, \tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)b$$

bulunur. Burada $[u, \tau(v)]yx\in[U, \tau(T(U))]R\subset T(U)$ ve (4.17) eşitliği kullanılırsa, $a\tau([u, \tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b))\in a\tau(T(U))\tau(\sigma^{-1}(b))=(0)$ olur. Yani her $x, y, z\in R$, $u\in U$ ve $v\in$

T(U) için, σ ve τ örten olduğundan $aR\,\tau(\sigma^{-1}(b))\,R\,\sigma([u,\tau(v)])Rb=(0)$ olur. Bu durumda R asal halka olduğundan,

$$a = 0 \text{ veya } b = 0 \text{ veya } \sigma[U, \tau(U)] = (0)$$

$\sigma([u, \tau(v)])=0$ ise her $u \in U$ için $[u, \tau(v)]=0$ ve böylece, $[U, \tau(v)]=(0)$ olur. Teorem 4.33 den $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ bulunur. Bu ise $U \not\subset Z$, $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olmasıyla çelişir. O halde $[U, \tau(U)] \neq (0)$ dir. Sonuç olarak,

$$a=0 \text{ veya } b=0$$

bulunur.

Teorem 4.37: U, (σ,τ)-Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde R nin bir $(0) \neq M$ ideali vardır.

İspat: U (σ,τ)-Lie ideal olduğundan Lemma 4.25 den $R[T(U),\sigma(T(U))] \subset T(U)$ ve $[T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$ olur. T(U), R halkasının alt halkası olduğu için

$$M = R\,[T(U), \sigma(T(U))]\,[T(U), \tau(T(U))]\,R \subset T(U)$$

olur. Eğer M=(0) ise; R halkası asal olduğundan

$$[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U)]=0$$

olur. $\forall u, v, w, z \in T(U)$ için,

$$[u, \sigma(v)][w, \tau(z)] = 0, \quad \forall\, u, v, w, z \in T(U) \qquad (4.18)$$

elde edilir. $t \in T(U)$ için w yerine wt yazar ve (4.18) uygulanır ise,

$$\begin{aligned} 0&=[u, \sigma(v)][wt, \tau(z)] \\ &=[u, \sigma(v)]w[t, \tau(z)]+[u, \sigma(v)][w, \tau(z)]t \\ &=[u, \sigma(v)][w, \tau(z)] \end{aligned}$$

elde edilir. $[u, \sigma(v)]T(U)[t, \tau(z)]=(0)$ bulunur. Lemma 4.26 dan

$$[T(U), \sigma(T(U))]=(0) \text{ veya } [T(U), \tau(T(U))]=(0)$$

elde edilir. $U \subset T(U)$ olduğundan $[U, \sigma(U)]=(0)$ veya $[U, \tau(U)]=(0)$ yazabiliriz. $a, b \in U$ için $[U, \sigma(a)]=(0)$ veya $[U, \tau(b)]=(0)$ olduğundan Lemma 4.31 den $\sigma(a) \in Z$ veya $\tau(b) \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani $a \in Z$ veya $b \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$U \subset Z \text{ veya } U \subset C_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $M=R[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U))]R \neq (0)$ olur. Yani $(0) \neq M \subset T(U)$ olur. T(U) nun tanımından $[R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur. $M \subset T(U)$

olduğundan $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U$ bulunur.

$[R, M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsaydı, R, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan Lemma 4.31 den

$$M \subset Z \text{ veya } R \subset C_{\sigma,\tau}$$

olurdu. $M \subset Z$ ise Önerme 2.34 den R değişmelidir. R değişmeli ise $U \subset Z$ dir.

$R \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Bu ise $U \not\subset Z$ veya $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olmasıyla çelişir. O halde,

$$[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$$

bulunur.

Sonuç 4.38: $(0) \neq U$, (σ,τ)-Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve $a, b \in R$ için, $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ olur.

İspat: Bu koşullar altında Teorem 4.37 den R nin, $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde $(0) \neq M$ ideali vardır. Her $x \in R$, $u \in U$ ve $m \in M$ için, $[x, \tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan $aU b=(0)$ olur. Yani, bu ifade açılır ve düzenlenir ise,

$$\begin{aligned}
0 &= a[x, \tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau} b \\
&= ax\sigma(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m)b - a\tau(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m)xb \\
&= ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b - a\tau(\tau^{-1}(u))\tau(\tau^{-1}(b))\tau(m)xb \\
&= ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b - aub\tau(m)xb \\
&= ax\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade her $x \in R$ için sağlandığından $aR\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = (0)$ elde edilir. Buradan R asal halka olduğundan,

$$a=0 \text{ veya } \sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b=0$$

bulunur. Bu durumda, $\sigma(\tau^{-1}(u))\sigma(\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = 0$ ise ,bu ifade düzeltildiğinde,

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b))\sigma(m)b \\
&= \sigma(\tau^{-1}(ub))\sigma(m)b \\
&= \sigma(\tau^{-1}(ub)m\sigma^{-1}(b))
\end{aligned}$$

olur. Ayrca ve σ, 1-1 olduğundan, $\tau^{-1}(ub)m\sigma^{-1}(b) = 0$ ve böylece $\tau^{-1}(ub)M\sigma^{-1}(b) =(0)$ olur. M ideal ve R asal olduğundan,

$$\tau^{-1}(ub)=0 \text{ veya } \sigma^{-1}(b)=0$$

olur. τ ve σ, 1-1 olduğundan her $u \in U$ için $ub=0$ veya $b=0$ olur. Yani,

$$Ub=(0) \text{ veya } b=0$$

olur. $Ub=(0)$ ise Lemma 4.32 den,

$$b=0$$

olur.

Aydın, N., 1996

Bu makalede, aksi belirtilmedikçe R asal halka, karakteristik ikiden farklı ve U, (σ, τ)-sol Lie ideal olarak alınmıştır.

Lemma 4.39: U, (σ, τ)-Lie ideal olmak üzere, $U \subset Z$ ise her $u \in U$ için, $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R değişmeli olur.

İspat: Her $x \in R$, her $u \in U$ için $[x, u]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. $U \subset Z$ olduğundan, her $u \in U$ için $\tau(u)$, $\sigma(u)$, $[x, u]_{\sigma,\tau} \in Z$ olur. Her $x \in R$, her $u \in U$ için,

$$\begin{aligned}[x, u]_{\sigma,\tau} &= x\sigma(u)-\tau(u)x \\ &= x\sigma(u)-x\tau(u) \\ &= x(\sigma(u)-\tau(u)) \in Z\end{aligned}$$

olur. $(\sigma(u)-\tau(u)) \in Z$ olduğundan, $\sigma(u)-\tau(u)=0$ veya $x \in Z$ elde edilir. Yani her $u \in U$ için,

$$\sigma(u) = \tau(u) \text{ veya R değişmeli}$$

olur.

Teorem 4.40: R asal halka ve U, (σ, τ)-sol Lie ideal olmak üzere, $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise, her $u \in U$ için, $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R değişmeli olur.

İspat: Her $x \in R$, $u \in U$ için $[\tau(u)x, u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Buradan her $x \in R$, her $u \in U$ için $\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u), \tau(u)]x=\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ bulunur. $[x, u]_{\sigma,\tau} \in [R, U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan, Önerme 2.36 dan,

$$[x, u]_{\sigma,\tau}=0 \text{ veya } \tau(u) \in Z$$

olur. Yani, her $x \in R$, her $u \in U$ için,

$$[x, u]_{\sigma,\tau}=0 \text{ veya } u \in Z$$

elde edilir.

$L=\{u \in U \mid u \in Z\}$ ve $K=\{u \in U \mid [R, U]_{\sigma,\tau}=(0)\}$ kümelerini tanımlayalım. L ve K U Lie idealinin toplamsal alt grupları ve $U=K \cup L$ dir. Bu ise Brauer Trick'ten U=L veya U=K olur.

U=L ise her $u \in U$ için $u \in Z$ olduğundan, $U \subset Z$ bulunur. Lemma 4.39 dan her $u \in U$ için, $\sigma(u)=\tau(u)$ veya R değişmeli olur.

U=K ise her $u \in U$ için $[R, U]_{\sigma,\tau}=(0)$ olur. Böylece her $x, y \in R$ için, $0=[xy, u]_{\sigma,\tau}=x[y, \sigma(u)]+[x, u]_{\sigma,\tau}y=x[y, \sigma(u)]$ bulunur. Her $y \in R$, her $u \in U$ için, R[y, σ(u)]=(0) ise [y, σ(u)]=0 olur. Her u $\in$ U için u $\in$ Z olduğundan, U $\subset$ Z elde edilir. Lemma 4.39 dan her u $\in$ U için, σ(u)= τ (u) veya R değişmeli olur.

Lemma 4.41: R asal halka ve U,(σ, τ)-sol Lie ideal olmak üzere, a $\in$ R için [a,U]=(0) ise her u $\in$ U için τ (u)+ σ(u) $\in$ Z veya a $\in$ Z olur.

İspat: a $\notin$ Z olsun. Her x $\in$ R, her u $\in$ U için $[\tau(u)x, u]_{\sigma,\tau} \in$ U olur. Bu ifade hipotez uygulanarak açılır ve düzenlenir ise,

$$\begin{aligned}0&=[\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}+[\tau(u), \tau(u)]x, a]\\&=[\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}, a]\\&=[\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}, a]\\&=\tau(u)[[x, u]_{\sigma,\tau}, a]+[\tau(u), a][x, u]_{\sigma,\tau}\\&=[\tau(u), a][x, u]_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$[\tau(u), a][x, u]_{\sigma,\tau}=0, \ \forall x \in R, \ \forall u \in U \tag{4.19}$$

elde edilir.(4.19) ifadesinde y $\in$ R için, x yerine xy yazarsak

$$\begin{aligned}0&=[\tau(u), a][xy, u]_{\sigma,\tau}=[\tau(u), a](x[y, \sigma(u)]+[x, u]_{\sigma,\tau}y)\\&=[\tau(u), a]x[y, \sigma(u)]+[\tau(u), a][x, u]_{\sigma,\tau}y\\&=[\tau(u), a]x[y, \sigma(u)]\end{aligned}$$

bulunur. Her u $\in$ U, her y $\in$ R için, [τ (u), a]R[y, σ(u)]=(0) ve R asal halka olduğundan [τ (u), a]=0 veya [y, σ(u)]=0 bulunur. Yani [τ (u), a]=0 veya her u $\in$ U için, u $\in$ Z bulunur. Dolayısıyla her u $\in$ U için,

$$[\tau(u), a] = 0, \ \forall \ u \in U \tag{4.20}$$

elde edilir. Diğer yandan, U, (σ, τ)-sol Lie ideal ve [U, a]=(0) olduğundan, $[[x, u]_{\sigma,\tau}, a]=0$ olur. Bu ifade açılır (4.20) göre düzenlenir ise her x $\in$ R, her u $\in$ U için,

$$\begin{aligned}0&=[x, u]_{\sigma,\tau}a-a[x, u]_{\sigma,\tau}\\&=(x\sigma(u)-\tau(u)x)a-a(x\sigma(u)-\tau(u)x)\\&=x\sigma(u)a-\tau(u)xa-ax\sigma(u)+a\tau(u)x\\&=x\sigma(u)a-ax\sigma(u)\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\tau(u)[x, a]=x\sigma(u)a-ax\sigma(u), \forall x \in R, \ \forall u \in U \tag{4.21}$$

bulunur. Her v $\in$ U için, x yerine v yazarsak, [v, a]=0 olduğundan, her u, v $\in$ U için,

$$\begin{aligned}0&=\tau(u)[v, a]\\&=v\sigma(u)a-av\sigma(u\end{aligned}$$

$=v\sigma(u)a-av\sigma(u)=[v\sigma(u), a]$

$=v[\sigma(u), a]+[v, a]\sigma(u)$

$=v[\sigma(u), a]$

olduğu görülür. Her $u\in U$ için, $U[\sigma(u), a] = (0)$ olduğundan, Lemma 4.32 den,

$[\sigma(u), a] = 0$ veya $U \subset Z$

bulunur. Yani, her $u\in U$ için, $[\sigma(u), a] = 0$ elde edilir. Bu ifade ile (4.21) eşitliğini bir arada kullanılır ise,

$$[x, a]\sigma(u)+\tau(u)[a, x] = 0, \quad \forall x\in R, \ \forall u\in U \tag{4.22}$$

elde edilir. $y\in R$ için, x yerine xy yazılır (4.22) kullanılır ise,

$0=[xy, a]\sigma(u)+\tau(u)[a, xy]$

$=x[y, a]\sigma(u)+[x, a]y\sigma(u)+\tau(u)x[a, y]+\tau(u)[a, x]y$

$=-x\tau(u)[a, y]+[x, a]y\sigma(u)+\tau(u)x[a, y]-[x, a]\sigma(u)y$

$=(\tau(u)x-x\tau(u))[a, y]+[x, a](y\sigma(u)-\sigma(u)y)$

$=[\tau(u), x][a, y]+[x, a][y, \sigma(u)]$

bulunur. Buradan her $x, y\in R$, her $u\in U$ için,

$$[x, \tau(u)][y, a]=[a, x][y, \sigma(u)], \quad \forall x, y\in R, \ \forall u\in U \tag{4.23}$$

elde edilir. R üzerinde, her $x, y\in R$ ve her $u\in U$ için $d(x)=[x, \tau(u)]$, $g(y)=[y, a]$, $h(x)=[a, x]$ ve $f(y)=[y, \sigma(u)]$ türevlerini tanımlayalım. Her $x, y\in R$ ve her $u\in U$ için (4.23) yerine yazılır ise, $d(x)g(y) = h(x)f(y)$ olur.

$d=f=0$ ise, her $u\in U$ için $u\in Z$ olur ve her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ bulunur.

$d\neq 0$ ve $f\neq 0$ olsun. Önerme 2.43 den, her $x\in R$ için, $g(x)=\lambda f(x)$ ve $h(x)=\lambda d(x)$ olacak biçimde $\lambda\in C$ vardır. $g(x)=\lambda f(x)=[x, a]=\lambda[x, \sigma(u)]$ ve $h(x)=\lambda d(x)=[a, x]=\lambda[x, \tau(u)]$ bulunur. Yani, her $x\in R$ için $\lambda[x, \sigma(u)] = [x, a] = \lambda[\tau(u), x]$ olacak biçimde $\lambda\in C$ vardır. Her $x\in R$, her $u\in U$ için,

$0 = \lambda[x, \sigma(u)]-\lambda[\tau(u), x] = \lambda([x, \sigma(u)]-[\tau(u), x]) = \lambda(x\sigma(u)-\sigma(u)x-\tau(u)x+x\tau(u))$ $= \lambda(x\sigma(u)+x\tau(u)-\sigma(u)x-\tau(u)x) = \lambda(x(\sigma(u)+\tau(u))-(\sigma(u)+\tau(u))x) = \lambda([x, \sigma(u)+\tau(u)])$ olur. Burada $[R,\sigma(u)+\tau(u)]=(0)$ olduğundan, her $u\in U$ için,

$\sigma(u)+\tau(u)\in Z$

bulunur.

Lemma 4.42: R bir asal halka, U, R halkasının bir (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $a\in R$ için $[a, U]=(0)$ ve $[a, U]_{\sigma,\tau}=(0)$ ise bu taktirde $a=0$ veya $\forall u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ dir.

İspat: $u_0\in U$ için $\sigma(u_0)\neq\tau(u_0)$ olduğunu kabul edelim. $\sigma(u_0)-\tau(u_0)\neq 0$ olduğundan

Lemma 4.41 kullanılarak $a\in Z$ veya her $u\in U$ için, $\tau(u)+\sigma(u)\in Z$ bulunur. Eğer $a\in Z$ ise $0=[a, u_0]_{\sigma,\tau}= a\sigma(u_0)-\tau(u_0)a=a(\sigma(u_0-\tau(u_0))$ olur. R asal halka olduğundan $a=0$ elde edilir.

Teorem 4.43: R asal halka, U (σ,τ)-sol Lie ideali olsun. $[U, U]_{\sigma,\tau}=(0)$ ve $[U, U]=(0)$ ise o zaman $U\subset Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $U\not\subset Z$ olsun. Lemma 4.42 den, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur. Diğer yandan, her $u, v\in U$ için $[xv, u]_{\sigma,\tau}=[x, \tau(u)]v\in U$ olduğundan her $u, v, w\in U$ için, $[w, [x, \tau(u)]v]=0$ olur. Bu ifade düzenlenir ise

$$\begin{aligned}0&=[w, [x, \tau(u)]v]\\&=[x, \tau(u)][w, v]+[w,[x, \tau(u)]]v\\&=[w, [x, \tau(u)]]v\end{aligned}$$

bulunur. Her $u, w\in U$ ve her $x\in R$ için $[w,[x, \tau(u)]]U=(0)$ olur. Lemma 4.32 den,

$$[w, [x, \tau(u)]] = 0 \text{ veya } U\subset Z$$

elde edilir. $U\not\subset Z$ olduğundan, her $u, w\in U$ ve her $x\in R$ için $[w, [x, \tau(u)]]=0$ bulunur. R üzerinde, her $u,w\in U$ ve her $x\in R$ için $I_w(x)=[w, x]$ ve $I_{\tau(u)}(x)=[\tau(u), x]$ iç türevleri tanımlansın. Her $x\in R$ ve her $u, w\in U$ için $I_wI_{\tau(u)}(x)=0$ olduğundan, $I_wI_{\tau(u)}=0$ elde edilir. Teorem 3.4 den,

$$I_w \text{ veya } I_{\tau(u)}=0$$

olur. Her $w, u\in U$ için $w\in Z$ veya $\tau(u)\in Z$ olduğundan $w, u\in Z$ bulunur. Yani $U\subset Z$ dir. Bu ise $U\not\subset Z$ olmasıyla çelişir. O halde $U\subset Z$ bulunur.

Lemma 4.44: R asal halka olmak üzere, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka ise, her $u\in U$ için, $\tau(u)+\sigma(u)\in Z$ veya U, R nin sıfırdan farklı sol ve sağ idealini kapsar.

İspat: $u_0\in U$için $\sigma(u_0)+\tau(u_0)\notin Z$ olsun. Her $x\in R$, her $v\in U$ için,

$$[x u_0, v]_{\sigma,\tau} = [x u_0, \sigma(v)]+[x, v]_{\sigma,\tau} u_0 \in U$$

olur. İkinci terim U alt halkasının elemanı olduğundan, her $v\in U$, her $x\in R$ için $x[u_0, \sigma(v)]\in U$ bulunur. Yani,

$$R[u_0, \sigma(U)]\subset U$$

bulunur. $R[u_0, \sigma(U)]=(0)$ ise her $u\in U$ için $R[u_0, \sigma(u)]=(0)$ ve R asal haka olduğundan, $[u_0,\sigma(u)]=0$ bulunur. Her $u\in U$ için $\sigma([\sigma^{-1}(u_0), u])=0$ ve σ, 1-1 olduğundan, her $u\in U$ için $[\sigma^{-1}(u_0), u]=0$ ve böylece,

$$[\sigma^{-1}(u_0), U]=(0)$$

olur. Lemma 4.41 den, her $u\in U$ için,

$$\sigma(u)+\tau(u)\in Z \text{ veya } \sigma^{-1}(u_0)\in Z$$

bulunur. $u_0 \in U$ için $\sigma(u_0)+\tau(u_0) \notin Z$ olduğundan, $u_0 \in U$ için $\sigma^{-1}(u_0) \in Z$ elde edilir. Yani, $u_0 \in U$ için, $u_0 \in Z$ dir. O halde $u_0 \in U$ için, $\sigma(u_0)+\tau(u_0) \in Z$ olur. Bu ise $\sigma(u_0)+\tau(u_0) \notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde,

$$(0) \neq R[(u_0), \sigma(U)] \subset U$$

bulunur. Yani, U, R nin sıfırdan farklı sol Lie idealini kapsar.

Benzer şekilde, U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, $[ux,v]_{\sigma,\tau} = u[x,v]_{\sigma,\tau} + [u,\tau(v)]x \in U$ olduğu kullanılarak U nun R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini kapsadığı görülür.

Teorem 4.45: R asal halka, U, R nin (σ,τ) – sol Lie ideali ve $\sigma(v)+\tau(v) \notin Z$ olacak biçimde bir $v \in U$ olsun. O zaman R halkasının sıfırdan farklı bir A sol ve sıfırdan farklı bir B sağ idealleri vardır ve $[R, A]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R, B]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R, A]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ ve $[R, B]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ dir.

İspat: $T=\{ x \in R \mid [R, x]_{\sigma,\tau} \subset U \}$ kümesini tanımlayalım. T, R nin $U \subset T$ olacak biçimde (σ,τ)-sol Lie ideali ve alt halkası olduğunu gösterelim. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur. Yani, $U \subset T$ dir. $a,b \in T$ ve $x \in R$ olsun.

$$[x, a-b]_{\sigma,\tau} = [x, a]_{\sigma,\tau} - [x, b]_{\sigma,\tau} \in U$$

olduğundan, $a-b \in T$ olur. $[x, ab]_{\sigma,\tau} = [x\sigma(a), b]_{\sigma,\tau} + [\tau(b)x, a]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan, $ab \in T$ bulunur. Yani, T alt halkadır.

T nin tanımından $[R, T]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur. $U \subset T$ olduğundan $[R, T]_{\sigma,\tau} \subset U \subset T$bulunur. Yani, $[R, T]_{\sigma,\tau} \subset T$ olduğundan, T, (σ,τ)-sol Lie idealdir.

Bir $v \in U$ için $\tau(v)+\sigma(v) \notin Z$ olduğundan, $U \not\subset Z$ dir. $U \subset T$ olduğundan $T \not\subset Z$ bulunur. T, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halkadır. Aynı zamanda bir $v \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \notin Z$ olduğundan Lemma 4.44 den T, R nin sıfırdan farklı A sol idealini ve sıfırdan farklı B sağ idealini kapsar. $A \subset T$ ve $B \subset T$ olduğundan T nin tanımından

$$[R, A]_{\sigma,\tau} \subset U \text{ ve } [R, B]_{\sigma,\tau} \subset U$$

bulunur. $[R, A]_{\sigma,\tau} \subset Z$ olsaydı, her $x \in R$, $a \in A$ için $[\tau(a)x, a]_{\sigma,\tau} \in Z$ bulunur. Her $x \in R$ ve $a \in A$ için, ifade açılır ise,

$$\tau(a)[x, a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a), \tau(a)]x = \tau(a)[x, a]_{\sigma,\tau} \in Z$$

bulunur. $[x, a]_{\sigma,\tau} \in Z$ olduğundan, her $x \in R$, $a \in A$ için $[x, a]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $\tau(a) \in Z$ bulunur. Yani her $x \in R$, $a \in A$ için,

$[x, a]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $a \in Z$

olur. Her $x \in R$, her $a \in A$ için $[x, a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise, her $y \in R$ için x yerine xy alınır ise,

$0=[xy, a]_{\sigma,\tau} = x[y, a]_{\sigma,\tau} + [x, \tau(a)]y = [x, \tau(a)]y$

bulunur. Her $x \in R$, $a \in A$ için, $[x, \tau(a)]R=(0)$ ve R asal halka olduğundan $[x, \tau(a)] = 0$ bulunur. Yani, her $a \in A$ için $a \in Z$ dir. Sonuç olarak, $A \subset Z$ bulunur. A sol ideal olduğundan, her $x, y \in R$ ve $a \in A$ için $[x, ya] = 0$ olur. Her $x, y \in R$, $a \in A$ için

$0 = y[x, a]+[x, y]a=[x, y]a$

bulunur. Her $x, y \in R$ ve $a \in A$ için $[x, y]Ra= (0)$ olur.Bu ifadede R asal halka olduğundan $[x, y]=0$ veya $a=0$ bulunur. Yani,

R değişmeli veya A=(0)

bulunur. Bu ise bir $v \in U$ için $\tau(v)+\sigma(v) \notin Z$ ve $A \neq (0)$ olmasıyla çelişir. $[R, B]_{\sigma,\tau} \subset Z$ olsun. Her $x \in R$ ve $b \in B$ için $[x\sigma(b), b]_{\sigma,\tau} \in Z$ olur. Her $x \in R$, $b \in B$ için $x[\sigma(b), \sigma(b)]+[x, b]_{\sigma,\tau}\sigma(b) = [x, b]_{\sigma,\tau}\sigma(b) \in Z$ bulunur. $[x, b]_{\sigma,\tau} \in Z$ olduğundan, her $x \in R$, $b \in B$ için, $[x, b]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $\sigma(b) \in Z$ ve buradan,

$[x, b]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $b \in Z$

olur. Her $x \in R$, $b \in B$ için $[x, b]_{\sigma,\tau} = 0$ ise, bu ifadede $y \in R$ için x yerine xy alınırsa,

$0 = [xy, b]_{\sigma,\tau} = x[y, b]_{\sigma,\tau} + [x, \tau(b)]y = [x, \tau(b)]y$ bulunur. Her $x \in R$, $b \in B$ için $[x, \tau(b)]R=(0)$ ve R asal halka olduğundan,$[x, \tau(b)]=0$ ve böylece $B \subset Z$ elde edilir. B sağ ideal olduğundan, her $x, y \in R$, $b \in B$ için, $0=[x, by] = [x, b]y + b[x, y] = b[x, y]$ bulunur. Bu durumda $bR[x, y] = (0)$ ve R asal halka olduğundan $b=0$ veya her $x, y \in R$ için $[x, y]=0$ bulunur. Yani,

B=(0) veya R değişmelidir.

Bu ise $B \neq (0)$ ve bir $v \in U$ için $\sigma(v)+\tau(v) \notin Z$ olmasıyla çelişir. O halde,

$[R, B]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$

bulunur**.**

Teorem 4.46: R asal halka, U, (σ,τ)-sol Lie ideal, bir $v \in U$ için $\tau(v)+\sigma(v) \notin Z$ olmak üzere, $a, b \in R$ için $aUb=(0)$ ise $a=0$ veya $b=0$ olur.

İspat: $b \neq 0$ olsun. U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve bir $v \in U$ için $\tau(v)+\sigma(v) \notin Z$ olduğu için Teorem 4.45 den $[R, B]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R, B]_{\sigma,\tau} \not\subset Z$ olacak biçimde $0 \neq B$ sağ ideal vardır. $aUb=(0)$ olduğundan, her $x \in R$, $s \in B$ için $a[x, s]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. Bu ifadede $y \in R$ için x yerine xy alınır ve düzenlenir ise,

$0 = a[xy, s]_{\sigma,\tau}b = a(x[y, s]_{\sigma,\tau}+[x, \tau(s)]y)b=ax[y, s]_{\sigma,\tau}b+a[x, \tau(s)]yb$

bulunur. Burada $u \in U$ için, x yerine ub yazılır ve açılır ise, her $y \in R$, $u \in U$ ve $s \in B$ için,

$$0=aub[y, s]_{\sigma,\tau} b+ a[ub, \tau(s)]yb=a[ub, \tau(s)]yb$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $y \in R$ için sağlandığından, her $u \in U$, $s \in B$ için, $a[ub, \tau(s)]Rb=(0)$ olur. O halde R asal halka olduğundan,

$$a[ub, \tau(s)]=0 \text{ veya } b=0$$

bulunur. $b \neq 0$ olduğundan, her $u \in U$, $s \in B$ için, $a[ub, \tau(s)]=0$ bulunur. Bu eşitsizlik açılır ve düzenlenirse, her $u \in U$, $s \in B$ için,

$$0=a(ub\tau(s)-\tau(s)ub)=aub\tau(s)-a\tau(s)ub=-a\tau(s)\,ub$$

olsun. Burada her $s \in B$ için sağlandığından $a\tau(s)ub=0$ olduğundan, $a\tau(B)ub=0$ elde edilir. $\tau(B)$ sağ ideal ve R asal halka olduğundan $a\tau(B)=(0)$ veya $ub=0$ bulunur. Yani,

$$a\tau(B)=(0) \text{ veya } Ub=(0)$$

olur. $Ub=(0)$ olsun. Lemma 4.32 den $b=0$ veya $U \subset Z$ olur. Bunlar ise kabüllerimle çelişir.

O halde $a\tau(B)=(0)$ elde edilir. $aUb=(0)$ olduğundan, her $x \in R$, $s \in B$ için $a[x, s]_{\sigma,\tau} b = 0$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenir ise her $x \in R$, $s \in B$ için,

$$0=a(x\sigma(s)-\tau(s)x)b=ax\sigma(s)b-a\tau(s)xb = ax\sigma(s)b$$

bulunur. Bu eşitsizlik her $x \in R$ için sağlandığndan her $s \in B$ için, $aR\sigma(s)b=(0)$ elde edilir. Burada R asal halka olduğundan, her $s \in B$ için, $a=0$ veya $\sigma(s)b=0$ bulunur. Yani,

$$a=0 \text{ veya } \sigma(B)b=(0)$$

elde edilir. $\sigma(B)b=(0)$ ise $\sigma(B)$ sağ ideal olduğundan $b=0$ bulunur. $b \neq 0$ olduğundan $a=0$ elde edilir.

Lemma 4.47: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve $(0) \neq U$, (σ,τ)-sağ Lie ideal olsun. $U \subset Z$ ise $\sigma=\tau$ veya R değişmeli olur.

İspat: Kabul edelim ki R halkası değişmeli olmasın. Hipotezden her $x \in R$ ve $u \in U$ için $[u, x]_{\sigma,\tau} \in Z$ olduğundan bu ifadeyi açalım.

$$[u, x]_{\sigma,\tau} = u\sigma(x)-\tau(x)u = u\sigma(x)-u\tau(x) = u(\sigma(x)-\tau(x)) \in Z$$

olur. Burada $u \in Z$ olduğundan, $u=0$ veya $\sigma(x)-\tau(x) \in Z$ elde edilir. Yani,

$$U=(0) \text{ veya } \sigma(x)-\tau(x) \in Z$$

bulunur. $U \neq (0)$ olduğundan, her $x \in R$ için $\sigma(x)-\tau(x) \in Z$ olur. Her $y \in R$ için, $[\sigma(x)-\tau(x), y]=0$ olduğundan,

$$[\sigma(x), y]-[\tau(x), y]=0, \quad \forall\, x, y \in R \qquad (4.24)$$

bulunur. Bu eşitsizlikte x yerine x^2 alınır (4.24) ve $\sigma(x)-\tau(x) \in Z$ uygulanır ise,

$$\begin{aligned}0&=[\sigma(x^2), y]-[\tau(x^2), y]\\&=[\sigma(x)\sigma(x), y]-[\tau(x)\tau(x), y]\end{aligned}$$

$$=\sigma(x)[\sigma(x), y] + [\sigma(x), y]\sigma(x) - \tau(x)[\tau(x), y] - [\tau(x), y]\tau(x)$$
$$=(\sigma(x)\tau(x))[\sigma(x), y]+[\sigma(x), y](\sigma(x)-\tau(x))$$
$$=(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x), y] + (\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x), y]$$
$$=2(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x), y]$$

elde edilir. char$R \neq 2$ olduğundan, her $x, y \in R$ için $(\sigma(x)-\tau(x))[\sigma(x), y] = 0$ olur. Her $x, y \in R$ için $t \in R$ ile sağdan çapar ve $\sigma(x)-\tau(x) \in Z$ olduğu kullanılır ise, $(\sigma(x)-\tau(x))t[\sigma(x), y] = (0)$ olur. Yani, her $t \in R$ için sağlandığından $(\sigma(x)-\tau(x))R[\sigma(x),y]=(0)$ dır. R asal halka olduğundan, her $x, y \in R$ için $\sigma(x)-\tau(x)=0$ veya $[\sigma(x), y]=0$ olur. Yani, her $x,y \in R$ için,

$$\sigma(x)=\tau(x) \text{ veya } x \in Z$$

elde edilir. $A=\{x \in R \mid \sigma(x)=\tau(x)\}$ ve $B=\{x \in R \mid x \in Z\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B kümleri R nin toplamsal iki alt grupları ve $R=A \cup B$ olduğundan Brauer Trick'ten R=A veya R=B olur.

R=B olsun. R değişmeli olması demektir. Bu ise kabulümle çelişir.

O halde R=A olur. Bu ise, her $x \in R$ için $\sigma(x)=\tau(x)$ olduğundan $\sigma = \tau$ olur.

Lemma 4.48: R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U sıfırdan farklı (σ,τ)-sağ Lie ideali ve $U \subset Z$ olsun. Bu durumda $\sigma = \tau$ veya R halkası komütatiftir.

İspat : Her $x \in R$, Her $u \in U$ için, $[u, x]_{\sigma,\tau} = u\,\sigma(x) - \tau(x)\,u = u\,(\sigma(x) - \tau(x)) \in Z$ olduğundan,

$$u = 0 \text{ veya } \forall\, x \in R \text{ için } \sigma(x) - \tau(x) \in Z$$

olur. Her $u \in U$ için U=(0) olur. $U \neq (0)$ olduğundan $\forall\, x \in R$ için, $\sigma(x)-\tau(x) \in Z$ bulunur. Bu ise Lemma 4.47 den $\sigma = \tau$ veya R halkası komütatif olur.

Kaya, K., Aydın, N., 1999

Bu makalede, aksi belirtilmedikçe R asal halka, karakteristik ikiden farklı ve U, (σ, τ)-sol Lie ideal olarak alınmıştır.

Lemma 4.49: $a,b \in R$ için,

(i) $d_1 : R \to R$, $d_1(x) = [x,b]_{\sigma,\tau}$ şeklinde tanımlanan bir dönüşüm ve $ad_1(R)=(0)$ (veya $d_1(R)\,a = (0)$) ise $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

(ii) $a[R,b]_{\sigma,\tau} = (0)$ (veya $[R,b]_{\sigma,\tau}\, a = (0)$) ise $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

(iii) $Ua = (0)$ (veya $aU = (0)$) ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

İspat: (i) Herhangi $x, y \in R$ için, $d_1(xy) = [xy,b]_{\sigma,\tau} = x[y,\sigma(b)] + [x,b]_{\sigma,\tau} y$, yani $d_1(xy) = d_1(x)y + x[y,\sigma(b)]$, $\forall x, y \in R$ olur. Buna göre, hipotezden,

$$0=ad_1(xy)=ad_1(x)y+ax[y, \sigma(b)]=ax[y, \sigma(b)]$$

olur. Yani $aR[R, \sigma(b)]=(0)$ olur. R asal olduğundan $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

Benzer biçimde, eğer, $d_1(xy) = [xy, b]_{\sigma,\tau}= x[y, b]_{\sigma,\tau}+[x, \tau(b)]y=xd_1(y)+[x, \tau(b)]y$ yani $d_1(xy)=xd_1(y)+[x, \tau(b)]y$ alınırsa $d_1(R)\, a = (0)$ ise $a = 0$ veya $b \in Z$ olduğu görülür.

(ii) $\forall x \in R$ için $d_1(x) =[x, b]_{\sigma,\tau}$ olsun. Buna göre, $a[R, b]_{\sigma\tau} =(0)$ olduğundan $ad_1(R) = (0)$ yazılabilir. (i) kullanılırsa $a = 0$ veya $b \in Z$ elde edilir. Benzer biçimde diğer durum da ispatlanabilir.

(iii) $a[R, U]_{\sigma,\tau} \subset aU = (0)$ olduğundan, (ii) den $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

Lemma 4.50: $0 \neq d$ türev olmak üzere,

$$d(U)=(0) \Rightarrow [U, \sigma(U)] =(0) \text{ ve } [\sigma(U), \tau(U)]=(0) \text{ dır.}$$

İspat: Hipotezden dolayı $d(U)=(0)$, iken her $u,v,w \in U$ için, $([wv, u]_{\sigma,\tau}) \in U$ olduğundan $d([wv, u]_{\sigma,\tau})=0$ yazılır. Her $u, v, w \in U$ için,

$$\begin{aligned} 0&=d(w[v,\sigma(u)] + [w, u]_{\sigma,\tau} v)\\ &=d(w[v, \sigma(u)]) + d([w, u]_{\sigma,\tau} v)\\ &= d(w)[v, \sigma(u)] + wd([v, \sigma(u)]) + d([w, u]_{\sigma,\tau})v + [w, u]_{\sigma,\tau} d(v)\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden dolayı her $u, v, w \in U$ için, $wd([v,\sigma(u)])=0$ bulunur. Her $u \in U$ için $d(u)=0$ olduğundan,

$$0 = w ([d(v), \sigma(u)] + [v, d(\sigma(u))]) = w[v, d(\sigma(u))]$$

bulunur. Her $u, v \in U$ için, $U[v, d(\sigma(u))] = (0)$ olduğundan, Lemma 4.49 (iii) den, $[v, d(\sigma(u))] = 0$ veya $U \subset Z$ bulunur. Yani,

$$[U, d(\sigma(u))]=0 \tag{4.25}$$

elde edilir. Hipotezden her $r \in R$, $u, v \in U$ için, $d([rv, u]_{\sigma,\tau}) =0$ olur. Bu ifade açılır ve (4.25) göre düzenlenir ise her $u, v \in U$ ve $r \in R$ için,

$$0 = d[rv, u]_{\sigma,\tau} = d(r[v, \sigma(u)] + [r, u]_{\sigma,\tau}v)=d(r)[v, \sigma(u)]$$

olur. Yani, $d(r)[v, \sigma(u)]=0$ dir. Bu ise her $r \in R$ için sağlandığından $d(R)[v,\sigma(u)]=(0)$ elde edilir. Lemma 3.2 den dolayı, her $u, v \in U$ için,

$[v,\sigma(u)]=0$ veya $d=0$

bulunur. Kabulümden $d\neq 0$ olduğundan, $[U,\sigma(U)]=(0)$ elde edilir. Bu durumda herhangi bir $s\in R$ ve $u, v\in U$ için, $[[\tau(u)s, u]_{\sigma,\tau}, \sigma(v)]=0$ olur. Her $u, v\in U$ ve $s\in R$ için, ifade açılır $[U,\sigma(U)]=(0)$ ve düzenlenirse,

$$0=[[\tau(u)s,u]_{\sigma,\tau}, \sigma(v)]$$
$$=\tau(u)[[s,u]_{\sigma,\tau}, \sigma(v)]+[\tau(u), \sigma(v)][s, u]_{\sigma,\tau}=[\tau(u), \sigma(v)][s, u]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Yani,

$$[\tau(u), \sigma(v)][s, u]_{\sigma,\tau}=0\ ,\ \forall u, v\in U \text{ ve } \forall s\in R \qquad (4.26)$$

bulunur. (4.26) eşitsizliğinde, s yerine $r\in R$ olmak üzere sr alınır ve (4.26) kullanılır ise, her $u,v\in U$ ve $r\in R$ için,

$$0=[\tau(u), \sigma(v)]s[r, \sigma(u)] + [\tau(u), \sigma(v)][s, u]_{\sigma,\tau}\, r$$
$$=[\tau(u), \sigma(v)]s[r, \sigma(u)]\ b$$

elde edilir. Bu ifade her $s\in R$ için sağlandığından her $u, v\in U$ ve $r\in R$ için, $[\tau(u), \sigma(v)]R[r, \sigma(u)]=(0)$ olur. Bu durumda R asal halka olduğundan, $[\tau(u), \sigma(v)]=0$ veya $[r, \sigma(u)]=0$ olur. Yani,

$$[\tau(u), \sigma(v)]=0 \text{ veya } u\in Z$$

elde edilir. $u\in Z$ ise $[\tau(U), \sigma(U)]=(0)$ elde edilir. O halde,

$$[\tau(U), \sigma(U)]=(0)$$

bulunur.

Lemma 4.51: $0\neq d$ türev olmak üzere, $d(U)=(0)$ ise her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$olur.

İspat: Hipotezden dolayı $d(U)=(0)$ olduğundan, Lemma 4.50 den, $[U,\sigma(U)]=[\sigma(U), \tau(U)]=(0)$ olur.

$[U,\sigma(U)]=(0)$ ise, her $u, v, w\in U$ ve $r\in R$ için $[[rw, v]\sigma,\tau\ , \sigma(u)]=0$ yazılır.

Burada ifade açılır ve düzenlenir ise,

$$0=[[rw, v]_{\sigma,\tau}, \sigma(u)]$$
$$=[r[w, v]_{\sigma,\tau}+[r, \tau(v)]w, \sigma(u)]$$
$$=[r, \sigma(u)][w, v]_{\sigma,\tau}+[[r,\tau(v)],\sigma(u)]w,$$

olur. Yani,

$$[r, \sigma(u)][w, v]_{\sigma,\tau}+[[r, \tau(v)], \sigma(u)]w=0,\ \forall u, v, w\in U,\ \forall r\in R \qquad (4.27)$$

elde edilir. Lemma 4.49 (iii) ve (4.27) den

$$[[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau} = 0\ ,\ \forall u,v\in U\ ,\ \forall r\in R \tag{4.28}$$

Diğer yandan (4.27) de $[U,\sigma(U)] = (0) = [\sigma(U),\tau(U)]$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}0 &= (r\sigma(u)-\sigma(u)r)(w\sigma(v)-\tau(v)w)+[r\tau(v)-\tau(v)r, \sigma(u)]w\\
&= r\sigma(u)w\sigma(v)-r\sigma(u)\tau(v)w-\sigma(u)rw\sigma(v)+\sigma(u)r\tau(v)w+r\tau(v)\sigma(u)w\\
&\quad - \tau(v)r\sigma(u)w - \sigma(u)r\tau(v)w + \sigma(u)\tau(v)rw\\
&= r\sigma(u)w\sigma(v)-\sigma(u)rw\sigma(v) -\tau(v)r\sigma(u)w + \sigma(u)\tau(v)rw\\
&=[r,\sigma(u)]w\sigma(v) - [\tau(v)rw,\sigma(u)] = [r,\sigma(u)]w\sigma(v) - \tau(v)[r,\sigma(u)]w\\
&=[[r,\sigma(u)]w,v]_{\sigma,\tau} = [r,\sigma(u)][w,\sigma(v)] + [[r,\sigma(u)],v]_{\sigma,\tau}\, w\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$[[r, \sigma(u)], v]_{\sigma, \tau}w = 0\ ,\ \forall u, v, w\in U,\ \forall r\in R \tag{4.28}$$

olur. Lemma 4.49 (iii) ve (4.28) dan

$$[[r, \sigma(u)], v]_{\sigma, \tau} = 0\ ,\ \forall u, v\in U\ ,\ \forall r\in R \tag{4.29}$$

bulunur. (4.29) de r yerine rs alınır ve (4.29) kullanılır ise,

$$\begin{aligned}0 &= [[rs, \sigma(u)], v]_{\sigma, \tau}\\
&=[r[s, \sigma(u)] + [r, \sigma(u)]s,v]_{\sigma,\tau}\\
&=r[[s, \sigma(u)], v]_{\sigma,\tau}+[r, \tau(v)][s, \sigma(u)]+[r, \sigma(u)][s, \sigma(v)]+[[r, \sigma(u)], v]_{\sigma, \tau}s\\
&=[r, \tau(v)][s, \sigma(u)]+[r, \sigma(u)][s, \sigma(v)]\end{aligned}$$

bulunur. Burada v yerine u alırsa,

$\forall u\in U$ ve $\forall r, s\in R$ için, $[r, \sigma(u)+\tau(u)][s, \sigma(u)]=0$ elde edilir. Bulduğumuz eşitsizlikte her s yerine $x\in R$ olmak üzere sx alınır ise,

$$\begin{aligned}0&=[r, \sigma(u)+\tau(u)][sx, \sigma(u)]\\
&=[r, \sigma(u)+\tau(u)][s, \sigma(u)]x+[r, \sigma(u)+\tau(u)]s[x, \sigma(u)]\\
&=[r,\sigma(u)+\tau(u)]s[x,\sigma(u)]\end{aligned}$$

bulunur. Her $u\in U$ ve her $r\in R$ için, $[r,\sigma(u)+\tau(u)]R[x,\sigma(u)]=(0)$ dır. R asal halka olduğundan, $[r, \sigma(u)+\tau(u)]=0$ veya $[x, \sigma(u)] = 0$ bulunur. Yani,

$$\sigma(u)+\tau(u)\in Z \text{ veya } u\in Z$$

olur. $u\in Z$ olsun. Bu durumda $\sigma(u)+\tau(u)\in Z$ olur. O halde, her $u\in U$ için $\sigma(u)+\tau(u)$

$\in$ Z elde edilir.

Lemma 4.52: $a \in R$ için $[a, U] = (0)$ ise $a \in Z$ veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ dir.

İspat: R üzerinde, her $x \in R$ için $d(x)=[a, x]$ iç türevi tanımlansın. $[a, U] = (0)$ olduğundan, $d(U) = (0)$ olur. Lemma 4.51 den, her $u \in U$ için,

$$\sigma(u)+\tau(u) \in Z \text{ veya } d=0$$

olur. d=0 ise d(x)=0 olur. Bu ise tanımından dolayı $a \in Z$ dir. Böylece her $u \in U$ için,

$$\sigma(u)+\tau(u) \in Z \text{ veya } a \in Z$$

elde edilir.

Sonuç 4.53: U değişmeli ise her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur.

İspat: Hipotezden $[U, U] = (0)$ yazılabilir. Dolayısıyla Lemma 4.52 den ispat tamamlanır.

Lemma 4.54: $U \not\subset Z$ olmak üzere, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka ise U, R halkasının sıfırdan farklı sağ idealini kapsar veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ dir.

İspat: U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan $u, v \in U$ ve $y \in R$ için, $[vy, u]_{\sigma,\tau} \in U$ için, $[vy, u]_{\sigma,\tau}=v[y, u]_{\sigma,\tau}+[v, \tau(u)]y$ yazılabilir. Burada U bir alt halka olduğundan, eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim U nun elemanıdır. Dolayısıyla, $[v, \tau(u)]y \in U$ olmalıdır. Yani, $[U,\tau(U)]R \subset U$ olur.

$[U, \tau(U)]R=(0)$ olsun. R asal olduğundan, $[U, \tau(U)] =(0)$ dır. Böylece Lemma 4.52 den $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$, $\forall u \in U$ olur.

Eğer, $M = [U,\tau(U)]R \neq (0)$ ise, U sıfırdan farklı bir M sağ idealini kapsar

Lemma 4.55: $U \not\subset Z$, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olmak üzere, $a, b \in R$ için $aUb=(0)$ ise a=0 veya b=0 veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur.

İspat: $U \not\subset Z$, U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olduğundan, Lemma 4.54 den, U, $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset [R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M sağ idealini kapsar veya $\forall u \in U$ için $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir. U sıfırdan farklı bir M sağ idealini kapsıyorsa, bu taktirde herhangi $m \in M$ ve $r \in R$ için, hipotezimden $a[r, m\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b=0$ olur. Bu ifade açılır ve düzenlenir ise, her $r \in R$, her $m \in M$ için,

$$\begin{aligned} 0&=a[r, m\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau} b \\ &=a\tau(m)[r, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b+a[r, m]_{\sigma,\tau}bb \end{aligned}$$

$=a\tau(m)[r, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau} b$

olur. Yani,

$$a\tau(m)[r, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}b=0,\ \forall r\in R,\ \forall m\in M \qquad (4.30)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte m yerine, $s\in R$ için ms alınır ise ,

$$a\tau(M)R[R, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau} b = (0)$$

bulunur. Burada ise R asal hakaolduğundan,

$$a\,\tau(m)=0 \text{ veya } [R, \sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau} b = (0)$$

olur. Eğer, $[R,\sigma^{-1}(b)]_{\sigma,\tau} b = (0)$ ise; Lemma 4.49 (ii) den, b=0 veya $\sigma^{-1}(b)\in Z$ olur. Yani,

$$b=0 \text{ veya } b\in Z$$

elde edilir. $b\in Z$ olsun. Bu ise aUb=(0) olduğundan, aURb=(0) yazılabilir.R asal halka olduğundan,

$$aU=(0) \text{ veya } b=0$$

bulunur. aU=(0) ise Lemma 4.49 (iii) den,

$$a=0 \text{ veya } U\subset Z$$

bulunur. Hipotezden $U\not\subset Z$ olduğundan, a=0 bulunur. Yani, sonuç olarak

$$a=0 \text{ veya } b=0$$

elde edilir. $a\tau(M) = (0)$ ise; her $m\in M$ için $a\,\tau(m)=0$ ise $\tau(\tau^{-1}(a)m)=0$ olur ve τ, 1-1 olduğundan $\tau^{-1}(a)m=0$ bulunur. Yani, $\tau^{-1}(a)M=(0)$ dır. Buna göre, $\emptyset\neq K=\{r\in R|\ rM=(0)\}$ kümesi sol idealdir.

$K\neq(0)$ olsun. M sağ ideal olduğundan, $MK\subset M$ ve K sol ideal olduğundan, $MK\subset K$ olur. Yani $MK\subset M\cap K$ dır. $M\cap K = (0)$ ise; $MK = (0)$ olur. Buradan $K = (0)$ dır. Bu bir çelişkidir. $M\cap K\neq(0)$ ise; bir $0\neq m'\in M\cap K$ elemanı vardır. Bu ise, $0\neq m'\in M$ ve $m'M = (0)$ demektir.

Şimdi, $L = \{ m'\in M \mid m'M = (0) \}$ kümesini tanımlayalım. Buna göre, $L\neq(0)$ bir sol ideali olduğunu gösterelim. $r\in R$, $y\in L$ ise her $m\in M$ için rym=0 olduğundan, $ry\in L$ olur. Yani, L sol idealdir. L= M ise, $M^2 = (0)$, buradan da $M = (0)$ olur. Bir çelişki elde edilir. Buradan, $L\subset M$ olmalıdır. Öyleyse, $L = L\cap M$ dir. Diğer yandan, $(L\cap M)(L\cap M)\subset LM = (0)$, buradan ise, $L^2 = (0)$ dır. R asal halka olduğundan, $L = (0)$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Öyleyse, $K = (0)$ olmalıdır. Yani, $\tau^{-1}(a) = 0$, ve böylece $a = 0$ olur.

Teorem 4.56: $U \not\subset Z$, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka ise U, R halkasının sıfırdan farklı idealini kapsar veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur.

İspat: $U \not\subset Z$ ve U, (σ,τ)-sol Lie ideal ve alt halka olduğundan, Lemma 4.54 den, $[U, \tau(U)]R \subset U$ veya her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ olur. $[U, \tau(U)]R \subset U$ ise U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, her $u,v \in U$ ve $y \in R$ için, $[[yv, u]_{\sigma,\tau} \in U$ için, $[yv, u]_{\sigma,\tau} = y[v, \sigma(u)]+ [y, u]_{\sigma,\tau}v$ yazılabilir. Burada U bir alt halka olduğundan, eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim U nun bir elemanıdır. Dolayısıyla, $y[v, \sigma(u)] \in U$ olmalıdır. Yani,

$$R[U,\sigma(U)] \subset U$$

bulunur. Yine, $[U, \tau(U)]R \subset U$ ve U alt halka olduğundan, $M=R[U,\sigma(U)][U, \tau(U)]R \subset U$ bulunur.

$M \neq (0)$ ise U, R nin sıfırdan farklı idealini kapsar.

$M=(0)$ ise, R asal olduğundan, $[U, \sigma(U)][U,\tau(U)] = (0)$ olur. Böylece, herhangi w', u, v, w, $t\in U$ için,

$$0 = [u, \sigma(v)][ww', \tau(t)]=[u, \sigma(v)]w[w', \tau(t)][u, \sigma(v)][w, \tau(t)]w'$$

$= [u, \sigma(v)]w[w', \tau(t)]$, yani, $[U, \sigma(U)]U[U, \tau(U)] = (0)$ bulunur. Lemma 4.55 den, $[U, \sigma(U)] = (0)$ veya $[U, \tau(U)] = (0)$ veya $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$, $\forall u\in U$ dur. Lemma 4.52 den, $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$, $\forall u\in U$ elde edilir.

Teorem 4.57: $U \not\subset Z$ bir (σ,τ)-sol Lie ideal olsun. Bu taktirde, $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak biçimde R halkasının sıfırdan farklı bir M ideali vardır veya $\forall u\in U$ için, $\sigma(u) + \tau(u) \in Z$ dir.

İspat: $K=\{x\in R|\ [R, x]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ kümesini tanımlayalım. U, (σ,τ)-sol Lie ideal olduğundan, $[R, U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olur. K nın tanımından $U \subset K$ olur. Yani, $K \neq \emptyset$ dir. Diğer yandan $[R,K]_{\sigma,\tau} \subset U \subset K$ ve böylece $U \not\subset Z$ olduğundan $K \not\subset Z$ dir ve K bir (σ,τ)-sol Lie idealdir. $U \subset K$ ve $U \not\subset Z$ olduğundan, $K \not\subset Z$ olur. $[R, K] \subset U$ olduğundan her $x, y \in K$ ve $r \in R$ için, $[r, xy]_{\sigma,\tau} = [r\sigma(x), y]_{\sigma,\tau} + [\tau(y)r, x]_{\sigma,\tau} \in U$, yani $\forall x, y\in K$, $\forall r\in R$ için $[r, xy]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Bu yüzden K bir alt halkadır K, (σ,τ)-sol Lie ideal, alt halka ve $K \not\subset Z$ olduğundan, Teorem 4.56 dan, K, R halkasının sıfırdan farklı idealini kapsar veya her $k \in K$ için $\sigma(k)+\tau(k) \in Z$ dir. Her $k \in K$ için $\sigma(k)+\tau(k) \in Z$ ve $U \subset K$ olduğundan, her $u \in U$ için $\sigma(u)+\tau(u) \in Z$ yazılabilir.

K nın sıfırdan farklı bir M idealini kapsadığını düşünelim. Yani $[R, M]_{\sigma,\tau} \subset U$ olsun. Buna göre, $[R, M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Aksi taktirde, herhangi $a, b \in M$ ve $r \in R$ için ise,

$$0 = [[r, a]_{\sigma,\tau}, b]_{\sigma,\tau} = [[r, b]_{\sigma,\tau}, a]_{\sigma,\tau} + [r, [a, b]]_{\sigma,\tau} = [r, [a, b]]_{\sigma,\tau}$$

olur. Yani $\forall a, b \in M$ ve $\forall r \in R$ için, $[r, [a, b]]_{\sigma,\tau} = 0$ olur.

Şimdi, R üzerinde $d_r(x)=[r, x]_{\sigma,\tau}$ ve $d_a(x)=[a, x]$ dönüşümlerini düşünelim. Buna göre, d_r bir (σ,τ)-iç türevi, d_a ise bir iç türevdir. Üstelik, $d_r d_a(M) = (0)$ ve $d_a(M) \subset M$ dir. Teorem 4.22 den $d_r = 0$ veya $d_a = 0$ olur. Yani $M \subset Z$ veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ dir.

$R \subset C_{\sigma,\tau}$ ise; her $x, s, r \in R$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= [rs, x]_{\sigma,\tau} \\ &= r[s, \sigma(x)]+[r, x]_{\sigma,\tau}s=r[s, \sigma(x)] \end{aligned}$$

olur. Yani, $R[R, R]=(0)$ dır. Öyleyse, R komütatif olmalıdır. Bu durumda, $U \not\subset Z$ hipotezi ile çelişir. Bu yüzden, $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olmalıdır.

KAYNAKLAR

Aydın, N. ve Kaya, K., 1992. "Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ)-Derivation", Doğa-Tr. J. of Mathematics 16:169-176,

Aydın, N. ve Kandamar, H., 1994. "(σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings", Doğa Tr.J.of Math, 18(2):143-148,

Aydın, N. ve Soytürk, M., 1995. "(σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings with Derivations", DoğaTr. J. of Math. 19:239-244,

Aydın, N. 1997. "On One Sided (σ,τ)-Lie Ideals in Prime Rings", Tr. J. Mathematics 21:1-7 ,

Aydın, N. ve Kaya, K., 1999. "Notes On Generalized Lie Ideals", Analele Univ. Timisoara Vol. XXXVII, fasc, 2:7-13,

Bergen. J. ve Herstein, 1981. I.N. ve Kerr, J.W., "Lie Ideals and Derivations of Prime Rings", J. of Algebra, 71:259-267

Herstein, I.N., 1969. "*Topics in Ring Theory*". University of Chicago Press, Chicago,

Herstein, I.N., 1976. "*Rings with Involution*", Univ. Of Chicago Press, Chicago,

Herstein, I.N., 1978. "A Note on Derivations", Canad. Math. Bull, 21(3): 369-370,

Herstein, I.N.,1979. "A Note on Derivations II", Canad. Math. Bull, 22(4): 509-511,

J. Mayne, 1976. " Centralizing automorphisms of prime rings, " Canad. Math. Bull. 19, 113-115.

J. Mayne, 1992. " Centralizing automorphisms of Lie ideals ın prime rings, " Canad. Math. Sociery.

J. Mayne 1982. " Ideals and centralizing mappings in prime rings", Proc. Amer. Math Soc. 86-, 211, 212. Erratum 89 (1983).187

Kaya, K., 1991. "(σ, τ)-Right Lie Ideals in Prime Rings", Proc. 4. National Math., Symposium Antakya,

Posner, E.C., 1957."Derivations in Prime Rings", Proc. Amer. Math. Soc, 8: 1093-1100.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Müjde DEMİR

Doğum Yeri : AMASYA

Doğum Tarihi : 24.07.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Yabancı Dili : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLER

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : YADEM kuruluşunda eğitmenlik 2009-2010

İLETİŞİM

E-posta Adresi : mujdee001@hotmail.com