T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VARYANS BİLEŞENLERİNİ KESTİRİM METODLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Emel MENDEŞ

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih **30/06/2010**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

Emel MENDEŞ tarafından **PROF. DR. Bilgehan GÜVEN** yönetiminde hazırlanan **"VARYANS BİLEŞENLERİNİ KESTİRİM METODLARININ KARŞILAŞTIRILMASI"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN

Danışman

Prof. Dr. Yakup HACI

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. İsmail DEMİR

Jüri Üyesi

Sıra No:

Tez Savunma Tarihi: 30/06/2010

Prof Dr. İsmail TARHAN

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Emel MENDEŞ

TEŞEKKÜRLER

Bu tezin gerçekleştirilmesinde bana yol gösteren, eleştiri ve önerileri ile daha doğruya ulaşmama yardımcı olan saygı değer danışman hocam sayın Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN'e, her zaman yardımlarını yanımda hissettiğim Araştırma Görevlisi Ahmet MOLLAOĞULLARI'na teşekkürlerimi sunarım.

Emel MENDEŞ

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Y_{ij} : i. gruptaki j. gözlem değeri

μ : Genel popülasyon ortalaması

α_i : i. grubun etkisi

ε_{ij} : Rastgele hata terimi

$\overline{Y}_{i.}$: i.grubun ortalaması

$\overline{Y}_{..}$: Genel ortalama

T_i : i.gruptaki gözlemlerin toplamı

$T_{..}$: Genel toplam

n_i : i.gruptaki gözlem sayısı

N : Toplam gözlem sayısı

t : Grup sayısı (Faktör Seviye Sayısı)

A_1 : SSA'nın Karesel Formu

A_2 : SSE'nin Karesel Formu

σ_e^2 : Hata Varyansı

σ_α^2 : Gruplar Arası Varyans

$\hat{\sigma}_\alpha^2$: σ_α^2'nın tahmin edicisi

$\hat{\sigma}_e^2$: σ_e^2'nin tahmin edicisi

W : Dizayn ya da Tasarım Matrisi

$(\mathbf{Y})_{n x 1}$: Gözlemler vektörü

$(\mathbf{X})_{n x p}$: β vektörü için dizayn ya da tasarım matrisi

$(\boldsymbol{\beta})_{p x 1}$: Sabit etkiler vektörü

$(\mathbf{U}_i)_{n x c_i}$: ξ_i vektörleri için tasarım matrisi

$(\xi_i)_{c_i x 1}$: Rastgele etkiler vektörü

ANOVA : Varyans Analizi

ML : En büyük Olabilirlik

REML : Kısıtlandırılmış En Büyük Olabilirlik

MINQUE : En Küçük Norm Karesel Yansız Tahmin

TSS : Genel Kareler Toplamı

SSA : Gruplar Arası Kareler Toplamı

SSE : Gruplar İçi Kareler Toplamı (Hata Kareler Toplamı)

MSA : Gruplara Arası Kareler Ortalaması

MSE : Gruplar İçi Kareler Ortalaması (Hata Kareler Ortalaması)

Var (Y) : Y'nin varyansı

E (MSE) : Hata Kareler Ortalamasının Beklenen Değeri

E (MSA) : Gruplar Arası Kareler Ortalamasının Beklenen Değeri

ÖZET

VARYANS BİLEŞENLERİNİ KESTİRİM METODLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Emel MENDEŞ

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN

30/06/2010, 26

Bu tez çalışmasında ANOVA, Henderson-I, Henderson-II, Henderson-III ve MINQUE gibi farklı tahmin yöntemlerden yararlanılarak varyans bileşenlerinin nasıl tahmin edilebileceği üzerinde durulmuştur. Bu amaçla öncelikle söz konusu yöntemlerin teorik temelleri hakkında bilgiler verilmiştir. Daha sonra bu yöntemlerin tek yönlü rastgele etkili modellerde varyans bileşenlerinin tahminlerinin teorik olarak nasıl elde edildikleri üzerinde durulmuştur. Söz konusu tahmin yöntemleri aynı zamanda gerçek bir veri seti üzerinde uygulanmış ve her bir yöntem ile tahmin edilen varyans bileşenleri birbirleri ile karşılaştırılmıştır. Yapılan tahminler sonucunda bütün yöntemlerde $\hat{\sigma}_e^2$ tahminlerinin birbirine oldukça yakın olduğu görülmüştür. Diğer yandan ANOVA ve Henderson-I yöntemleri ile tahmin edilen $\hat{\sigma}_\alpha^2$ değerlerinin benzer olduğu, buna karşın, diğer yöntemlerin farklı tahminler verdikleri görülmüştür. Her bir varyasyon kaynağının ya da bileşenin toplam varyasyondaki payları incelendiğinde, farklı yöntemlerle yapılan tahminlerin genel olarak farklılık gösterdiği belirlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Varyans Bileşenleri, ANOVA, Rastgele Etkili Model, Henderson Metodları

ABSTRACT

VARIANCE COMPONENT ESTIMATION METHODS

Emel MENDEŞ

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversity

Graduate School of Science and Engineering

Chair for Mathematics Thesis of Master of Science

Advisor: Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN

30/06/2010, 26

This thesis has focused on how to estimate the variance components by the aim of the estimation methods such as ANOVA, Henderson-I, Henderson-II, Henderson-III and MINQUE. For his purpose, initially, detailed information about the theoretical basis of the methods was provided. Afterwards, by using these methods, obtaining the components of the variances theoretically in one-way random-effect models were emphasized. These prediction methods in question were implemented on real data set as well and, by each method, the estimated variance components were compared to each other. As a result of the estimations, the estimations of $\hat{\sigma}_e^2$ s were observed to be quite close to each other in all methods. On the other hand, similarity of the values of $\hat{\sigma}_\alpha^2$ s estimated by ANOVA and Henderson-I methods has been displayed whereas the other methods has given different estimated results. When the each variation source or the share of total variation of the component is examined, it has been concluded that different estimation methods generally displayed different results.

Keywords: Variance components, ANOVA, random effect model, Henderson' metods

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

İstatistikte etkisi araştırılan faktörlerin seviyelerinin seçimine bağlı olarak; sabit etkili, rastgele etkili ve karışık etkili olmak üzere üç model söz konusudur. Sabit etkili modellerde muamele etkilerinin karşılaştırılması söz konusudur. Rastgele ve karışık modellerde ise esas olarak varyans bileşenlerinin tahmin edilmesi ile ilgilenilir (Mondal 2000; Sahai ve Ojeda, 2005; Searle ve ark., 2006; Rash and Masata, 2006). Varyans bileşenlerinin tahmin edilmesi, toplam varyasyon içerisinde her bir varyasyon kaynağının payının belirlenmesi bakımından oldukça önemlidir (Falconer, 1989). Bu amaçla En Küçük Kareler (ANOVA), En Yüksek Olabilirlik (ML), Kısıtlanmış En Yüksek Olabilirlik (REML), HENDERSON I, II, III metotları, Bayesian metodu ve En Küçük Norm Karesel Yansız Tahmin (MINQUE) vb gibi pek çok metot geliştirilmiştir (Eisenhart, 1947; Crump, 1951; Henderson, 1983; Hartley ve Rao, 1967; Rao, 1970; Harville, 1977; Searle ve ark., 1992; Kelly ve Mathew, 1993; Shai ve Ojeda, 2004 ve 2005). Ancak söz konusu metotlar, her deneme koşulunda varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde güvenilir sonuçlar verememektedirler. Mesela ANOVA yöntemi her ne kadar varyans bileşenlerinin tahmin edilmesi amacıyla ilk kullanılan yöntem olsa da, bu yöntem birçok durumda varyans bileşenlerini negatif olarak tahmin etmektedir (Thompson, 1962; Searle, 1971). Halbuki varyans, tanımı gereğince negatif olamaz. Bundan dolayı varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde ANOVA yönteminin kullanılması pek tercih edilmemektedir. Bu tez çalışmasında ANOVA yöntemi ile birlikte, varyans unsurlarının negatif tahminlerinden kurtulmak amacıyla ANOVA yöntemine alternatif olarak geliştirilen Henderson I, II, III metotları (Henderson, 1953) ve MINQUE (Rao, 1970) yönteminin teorik temelleri üzerinde durulacak ve bunlara ilişkin bazı uygulamalar yapılacaktır.

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Varyans bileşenlerinin tahmin edilmesi amacıyla geliştirilmiş değişik metotlar mevcuttur. Gerek gerçek veri setleri üzerinden gerekse de simülasyon çalışmaları üzerinden söz konusu metotlardan elde edilen tahminlerin birbirleriyle karşılaştırıldığı pek çok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalar ve elde edilen sonuçlardan bir kısmı aşağıda özetlenmiştir.

İlk olarak Fisher 1918'de varyansın tanımını yapmış ve varyans analizi yöntemini geliştirmiştir. Varyans analizi yöntemini kullanarak varyans unsurlarının tahmini ilk olarak Crump (1946 ve 1951) ve Eisenhart (1947) tarafından yapılmıştır (Searle ve ark., 1992).

Sabit modelde etki, rastgele ve karışık modeller de ise varyans unsurları tahmin edilebilmektedir. Varyans unsurlarının tahminleri model ve deneme düzenine bağlı olarak çeşitli yöntemlerle yapılabilmektedir. Bunlardan ilki ve en temel olanı varyans analizi tekniğidir (Analysis of variance; ANOVA). Bu teknikten sonra Henderson I, II, III, en iyi olabilirlik (Maximum Likelihood; ML) ve kısıtlanmış en iyi olabilirlik (Restricted Maximum Likelihood; REML) metotları geliştirilmiştir. Bu sayede en uygun modelle ve yöntemle gerçeğe en yakın tahminler yapılmaya çalışılmaktadır (Searle ve ark., 1992).

Varyans bileşenlerini ilk kullanan araştırıcılar söz konusu tahminlerin yapılmasında ANOVA yönteminden yararlanmışlardır. Daha sonra 1953'te Henderson tarafından alt grup sayıları farklı olan deneme düzenleri için de uygun olan yöntemler (I, II ve III) geliştirilmiştir. Ancak bu yöntemlerden sonra geliştirilen ML yönteminin, Henderson tarafından geliştirilen yöntemlere göre daha iyi özelliklere sahip olduğu bildirilmiştir (Harville, 1977).

Varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde ANOVA yönteminden uzun yıllar yararlanılmıştır. Ancak, bu yöntem için gerekli olan varsayımlar (normallik ve Varyansların Homojenliği) yerine gelse bile negatif varyans bileşeni tahmini verme olasılığı vardır (Searle, 1971; Verdooren, 1982; Swallow ve Monaham, 1984; Smith ve Sawage,1992; Searle ve ark., 1992; Rao, 2001).

Henderson (1953), dengesiz denemelerde varyans bileşenlerini tahmin etmek amacıyla kendi ismiyle anılan Henderson I, II, III yöntemlerini geliştirmiştir. Her üç yönteminde temel prensibi dengeli denemelerde uygulanan varyans analizi sonucunda elde edilen kareler toplamlarının, beklenen değerlerine eşitlenerek elde edilen eşitliklerin çözülmesidir. Bu yöntemlerin en iyi özelliği sapmasız tahmin vermeleridir. Henderson I, modelde μ dışındaki bütün etkilerin şansa bağlı (rastgele, random) olduğu verilerde kullanılır. Henderson II ve III ise karışık (mixed) modellerde kullanılır. Henderson II, modeldeki sabit (fixed) etkilerin şansa bağlı (rastgele, random) farz edilmesinden kaynaklanan varyans unsurlarındaki sapmayı elemine eder. Bunun için sabit etkiler bu tahminlere göre düzeltilir ve Henderson I uygulanır. Yani Henderson II sabit etkiler üzerinde düzeltme yaptıktan sonra Henderson I 'in uygulanması yöntemidir. Henderson III yöntemi varyans unsurları tahmininde oldukça etkili bir yöntemdir. Bu yöntem sabit ve şansa bağlı etkiler arasında interaksiyonun bulunması durumunda dahi kullanılabilmektedir (Sahai ve Ojeda, 2005; Searle ve ark., 2006).

1953 yılına kadar ancak alt grup sayıları eşit olan deneme düzenlerinde yapılan varyans unsurları tahmini Henderson tarafından geliştirilen ve kendi adıyla anılan metotlarla yapılabilir hale gelmiştir. Henderson I yalnızca rastgele modellerde kullanılabilirken, Henderson II ve III metotları karışık modellerde uygulanabilmektedir (Searle ve ark., 1992).

Hartley ve Rao (1967), en iyi olabilirlik (Maximum Likelihood; ML) yöntemini geliştirmiştir. Daha sonra geliştirilen kısıtlanmış en iyi olabilirlik (Restricted Maximum Likelihood: REML) yöntemiyle, ML'nin negatif tahminler yapma sorununu ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Böylece parametre tahminlerinin daha güvenilir olması sağlanmaya çalışılmıştır.

Harvey (1970), iki ve üç faktörlü karışık modellerde interaksiyonun olmadığı durumlarda varyans bileşenleri tahmininde Henderson III yöntemini kullanmıştır.

Rao (1970), karışık modellerde varyans bileşenlerinin tahmin edilmesi amacıyla MINQUE yöntemini geliştirmiştir (Rao, 2001).

MINQUE yöntemi, rastgele etkilerin ya da hataların dağılımların hakkında herhangi bir varsayım gerektirmez. Bu yöntem sadece doğrusal eşitliklerin çözümünden ibarettir. Ancak, MINQUE yöntemi ile elde edilen tahminler, tahminleme işleminde varyans bileşenleri yerine kullanılan ilk değerlerinin (priori) fonksiyonudurlar. Diğer taraftan, ilk değerler ne olursa olsun MINQUE tahmin edicileri yansızdır (Searle ve ark., 1992).

Corbeil ve Searle (1976), yaptıkları çalışmada, karışık (mixed) modellerde genel olarak ANOVA ve REML tahminlerinin benzerlik gösterdikleri, buna karşın ML tahminlerinin bu iki yöntemden farklılık gösterdiğini bildirmiştir.

Swallow ve Monohan (1984), alt grup sayıları farklı olan tek yönlü sınıflandırma modelinde simulasyon tekniğinden yararlanılarak ANOVA, ML, REML ve MIVQUE gibi dört farklı yöntem ile yapılan tahminlerin karşılaştırıldığı çalışma bu alanda yapılan temel çalışmalardan birisidir. Çalışma sonucunda $\sigma_\alpha^2/\sigma_e^2 < 0.5$ olduğu durumlarda ML yönteminin, $\sigma_\alpha^2/\sigma_e^2 > 0.05$ olduğunda REML yönteminin ve $\sigma_\alpha^2/\sigma_e^2 > 1$ olduğunda ise varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde MIVQUE yönteminden yararlanılmasının uygun olduğu bildirilmiştir.

Orhan (1977), yaptığı çalışmada, Henderson I, Henderson II, Henderson III, ML, MIVQUE, REML ve MINQUE gibi farklı varyans bileşen tahmin yöntemlerini hem dengeli (alt gruplarda eşit sayıda gözlem bulunan) ve dengesiz (alt gruplarda farklı sayıda gözlem bulunan) denemelerde Monte Carlo Simülasyon tekniğinden yararlanılarak üretilen veriler üzerinden karşılaştırmalı olarak incelemiştir.

Searle (1971), yaptığı çalışmada dengeli denemelerde ANOVA ve REML yöntemlerinin benzer sonuçlar verdiklerini bildirmiştir.

İstatistiğin temel amaçlardan birisi çalışılan veri setindeki toplam varyasyonu unsurlarına göre ayırıp analiz etmektir. Bu amaçla en yaygın olarak kullanılan istatistik tekniği varyans analizi tekniğidir (ANOVA). Ancak varyans analizi tekniğinden beklenilen yararların sağlanabilmesi için çalışılan veri gruplarında normallik ve varyansların homojenliği ön şartlarının yerine getirilmesine bağlıdır (Winer ve ark., 1991; Searle ve ark., 1992; Zar, 1999).

Varyans analizi tekniği grup ortalamalarının karşılaştırılması imkânını verdiği gibi, varyans unsurlarını tahmin etme olanağı da sağlamaktadır. Ancak bu tekniğin kullanılabilmesi için bazı ön şartların (normal dağılım, homojenlik, bağımsızlık, eklenebilirlik) yerine getirilmesi gerekir. Bu ön şartlar yerine getirilmediği halde verilere varyans analizi tekniği uygulanarak yapılacak hipotez kontrollerinde kararlaştırılan I. tip hata olasılığı değişir ve elde edilecek sonuçlar güvenilir olmaz (Kaps ve Lamberson, 2004).

Young ve Su (2005), ANOVA, ML, REML ve MINQUE tahmin yöntemlerini karşılaştırmak amacıyla yaptıkları çalışma sonucunda eğer örnek genişliği yeterince büyükse bu dört yönteminde benzer performans sergilediklerini, ancak dengesiz denemelerle çalışılması ve varyansların da homojen olmaması durumunda bütün yöntemlerin performanslarının oldukça düşük seviyelere indiğini bildirmişlerdir.

BÖLÜM 3

MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. MATERYAL

Bu çalışmanın materyalini ÇOMÜ Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümünde etlik piliçler üzerinden yürütülen bir denemeden elde edilen veriler oluşturmuştur. Çalışmada 7 farklı uygulama koşulunda yetiştirilen etlik piliçlerden rastgele seçilen üç uygulamaya (Grup 1, Grup 2 ve Grup 3) ilişkin 6.hafta canlı ağırlıkları kullanılmıştır (Çizelge 1). Varyans bileşenlerinin tahmin edilmesine başlanmadan önce dikkate alınan veri gruplarında normallik ve varyansların homojenliği ön şartlarının yerine gelip gelmediği test edilmiştir. Normallik testinin yapılmasında Anderson-Darling testinden, varyansların homojenlik testinin yapılmasında ise Levene testinden yararlanılmıştır. Gerek normallik ve varyansların homojenlik testlerinin yapılmasında gerekse de varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde MINITAB for Windows (ver.15,0) ve SPSS for Windows (ver 18,0) istatistik paket programlarından yararlanılmıştır.

Çizelge 1. Üç farklı uygulama altında yetiştirilen etlik piliçlerin 2. hafta canlı ağırlıkları

GRUP1	GRUP2	GRUP3
200	240	315
225	355	270
250	230	300
205	315	365
205	230	280
235	305	355
230	215	355
190	270	320
215	315	300
210	295	335
215	395	
285	230	
265	250	
265	235	
230	320	
180	310	
195	225	
220	265	
190		
195		
135		
195		

3.2. TAHMİN YÖNTEMLERİ

3.2.1. ANOVA METODU

t tane muamele grubu ve her bir grupta eşit sayıda gözlemin bulunduğunu varsayalım. Bu durumda tek yönlü rastgele etkili model genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, t \quad \text{ve} \quad j = 1,2,\ldots, n_t \qquad [1]$$

Burada;

Y_{ij} : i. gruptaki j. gözlem değerini

μ : Genel popülasyon ortalamasını yani bütün Y_{ij} 'lerin ortalamasını

α_i : i. grubun etkisini ve

ε_{ij} : Rastgele hata terimini göstermektedir.

α_i ve ε_{ij} birbirinden bağımsız olup (Cov $(\alpha_i, \varepsilon_{ij})$=0), $\alpha_i \sim N(0, \sigma^2_\alpha)$ ve $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2_e)$ dır.

(1) numaralı model matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad [2]$$

Burada

$$Y = \left[Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{tn_t} \right]'$$

$$X = (1_n X^*)$$

$$X^* = \text{diag}\ (1_{n_1}, 1_{n_2}, \ldots, 1_{n_t})$$

$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t]'$ ve olmak üzere

$$Y = 1_n\ \mu + X^*_\alpha + \varepsilon \text{ olur} \qquad [3]$$

Rastgele hata vektörü olan ε, Y vektörüne benzer şekilde tanımlanır. α rastgele vektörünün dağılımı $\alpha_i \sim N(\sigma^2_\alpha I_t)$ dir. Benzer şekilde hata vektörü olan ε'nin dağılımı ise $\varepsilon \sim N(\sigma^2_e I_n)$ dır.

$\overline{Y}_{i.} = \dfrac{\sum_{i=1}^{t} Y_{ij}}{n_i} = \dfrac{T_i}{n_i}$ i.grubun ortalamasını, $\overline{Y}_{..} = \dfrac{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{tn_i} = \dfrac{T_{..}}{N}$ genel ortalamayı ve

$N = \sum_{i=1}^{t} n_i$ de toplam gözlem sayısını göstermek üzere;

Genel Kareler Toplamı (TSS):

$$TSS = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{t}(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i..})^2 \qquad [4]$$

şeklinde tarif edilir (Winer ve ark., 1991).

(4) no'lu eşitlikteki ilk terim gruplar arası kareler toplamı (SSA) ve ikinci terim de gruplar içi kareler toplamı ya da hata kareler toplamıdır (SSE)

Gruplar arası kareler toplamı olan SSA ;

$$SSA = \sum_{i=1}^{t}(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{t}n_i(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{t}n_i(\overline{Y}_{i.}^2 - 2\overline{Y}_{i.}\overline{Y}_{..} + \overline{Y}_{..}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{t}n_i\overline{Y}_{i.}^2 - 2\sum_{i=1}^{t}n_i\overline{Y}_{i.}\overline{Y}_{..} + \sum_{i=1}^{t}n_i\overline{Y}_{..}^2 \qquad [5]$$

$\overline{Y}_{i.}$ 'nin yerine $\frac{T_i}{n_i}$ ve $\overline{Y}_{..}$ yerine de $\frac{T_{..}}{N}$ yazılırsa

$$SSA = \sum_{i=1}^{t}\left(\frac{T_i^2}{n_i}\right) - \frac{T_{..}^2}{N} \text{ 'ye eşit olur.} \qquad [6]$$

Hata kareler toplamı olan (SSE) ise:

$$SSE = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i}Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{t}n_i\overline{Y}_{i.}^2$$

$$= Y'Y - Y'\operatorname{diag}\left(\frac{1}{n_1}J_{n_1}, \frac{1}{n_2}J_{n_2}, \ldots, \frac{1}{n_t}J_{n_t}\right)Y \text{ şeklinde yazılabilir.} \qquad [7]$$

Gözlemler vektörü olan Y'nin varyansı:

$Var(Y) = \sigma_\alpha^2 XX^* + \sigma_e^2 I_n$ şeklindedir. Burada:

$XX^* = \operatorname{diag}(J_{n_1}, J_{n_2}, \ldots, J_{n_t})$ ve J_{n_1} olup, bütün elemanları 1 olan $n_i \times n_i$ boyutlu bir kare matristir. Dolayısıyla bu durumda Y'nin varyansı:

$Var(Y) = \sigma_\alpha^2 \operatorname{diag}(J_{n_1}, J_{n_2}, \ldots, J_{n_t}) + \sigma_e^2 I_n$ olur.

ANOVA metodu kullanılarak varyans unsurlarının tahmin edilmesindeki temel prensip, kareler ortalamalarının beklenen değerlerine eşitlenmesi ve daha sonra elde edilen doğrusal eşitliklerin çözülmesidir.

Gruplara arası kareler ortalaması (MS_α), gruplar arası kareler toplamının (SST), gruplar arası serbestlik derecesine bölünmesiyle elde edilir.

$$MSA = \frac{SST}{t-1}$$

Hata kareler ortalaması ise (MSE), hata kareler toplamının (SSE), hata serbestlik derecesine bölünmesiyle elde edilir.

$$MSE = \frac{SSE}{N - t}$$

Gruplar arası kareler toplamının beklenen değeri $E(MS_\alpha)$:

$$E(MSA) = \frac{1}{t-1} E\left[\sum_{i=1}^{t} n_i (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 \right]$$

$$= \frac{1}{t-1} E\left[\sum_{i=1}^{t} n_i (\mu + \alpha_i + \overline{e}_{i.} - \mu - \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{t} n_r \alpha_r - \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{t} n_r \overline{e}_{r.})^2 \right]$$

$$= \frac{1}{t-1} E\left[\sum_{i=1}^{t} n_i (\alpha_i - \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{t} n_r \alpha_r + \overline{e}_{i.} - \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{t} n_r \overline{e}_{r.})^2 \right]$$

$$= \frac{1}{t-1}\left[\sum_{i=1}^{t} n_i E\left(\alpha_i^2 - \frac{2}{N}\alpha_i \sum_{r=1}^{t} n_r \alpha_r + \frac{1}{N^2}\left(\sum_{r=1}^{t} n_r \alpha_r\right)^2 \right) + \sum_{i=1}^{t} n_i E\left(\overline{e}_{i.}^2 - \frac{2}{N}\overline{e}_{i.}\sum_{r=1}^{t} n_r \overline{e}_{r.} + \frac{1}{N^2}\left(\sum_{r=1}^{t} n_r \overline{e}_{r.}\right)^2 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{t-1}\left[\sum_{i=1}^{t} n_i \left(\sigma_\alpha^2 - \frac{2}{N} n_i \sigma_\alpha^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{r=1}^{t} n_r^2 \sigma_\alpha^2 \right) + \sum_{i=1}^{t} n_i \left(\frac{\sigma_e^2}{n_i} - \frac{2 n_i \sigma_e^2}{N n_i} + \frac{1}{N^2}\sum_{r=1}^{t} n_r^2 \frac{\sigma_e^2}{n_r} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{t-1}\left[\sum_{i=1}^{t} n_i - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{t} n_i^2 + \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{t} n_i\right)\left(\sum_{r=1}^{t} n_r^2\right) \right]\sigma_\alpha^2$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{n_i}{n_i} - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{t} n_i + \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{t} n_i\right)\left(\sum_{r=1}^{t} n_r\right) \right)\sigma_e^2]$$

$$= \frac{1}{t-1}\left[\left(N - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{t} n_i^2 \right)\sigma_\alpha^2 + (a-1)\sigma_e^2 \right]$$

$E(MSA) = \sigma_e^2 + n\,\sigma_\alpha^2$ olarak elde edilir. [8]

Dolayısıyla $\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{(MSA - MSE)}{n}$ olur. [9]

Hata kareler toplamının beklenen değeri de E(MSE) benzer şekilde aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$E(MSE) = \frac{1}{N-t} E\left[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2 \right] = \frac{1}{N-t} E\left[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} (\mu + \alpha_i + e_{ij} - \mu - \alpha_i - \overline{e}_{i.})^2 \right]$$

$= \frac{1}{N-t} E\left[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} (e_{ij} - \overline{e}_{i.})^2 \right]$ olur. [10]

$E\left[\sum_{j=1}^{n_i} (e_{ij} - \overline{e}_{i.})^2 \right] = (n_i - 1)\,\sigma_e^2$’dir.

Bu değeri (9) numaralı eşitlikte yerine yazarsak hata kareler ortalamasının beklenen değerine ulaşılır.

$$E(MSE) = \frac{1}{N-t}\left[\sum_{i=1}^{t}(n_i - 1)\sigma_e^2\right] = \sigma_e^2 \qquad [11]$$

3.2.2. HENDERSON METODLARI

Henderson (1953) tarafından geliştirilen Henderson metotlarının (I, II ve III) temel prensibi dengeli denemelerde uygulanan varyans analizi sonucunda elde edilen kareler toplamlarının, beklenen değerlerine eşitlenerek elde edilen eşitliklerin çözülmesidir. Henderson I ve II metotları tamamen rastgele modeller için geliştirilmişken, Hendorson III metodu karışık modeller için daha uygundur. Henderson I metodu, dengeli denemelere uygulanan varyans analizinden elde edilen kareler toplamlarına karşılık gelen karesel formları kullanır. Henderson II metodu, modelde sabit etkilerin bulunması durumunda Henderson I metodundaki varyasyonda bir düzeltme yapar. Metod III ise farklı model ve alt modellerin oluşturulmasından kaynaklanan kareler toplamalarındaki düşüşleri kullanır (Henderson, 1953; Sahai ve Ojeda, 2005; Searle ve ark., 2006).

i. gruptaki j. gözlem değeri olan Y_{ij} için tek yönlü rastgele etkili model aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, ..., t \quad \text{ve} \quad j = 1,2,..., n_i \qquad [12]$$

Burada

μ : Genel populasyon ortalamasını yani bütün Y_{ij} lerin ortalamasını

α_i : i. grubun etkisini ve

ε_{ij} : Rastgele hata terimini göstermektedir.

α_i ve ε_{ij} birbirinden bağımsız olup (Cov ($\alpha_i, \varepsilon_{ij}$)=0), $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$ ve $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$ 'dır.

[1] numaralı model matris formunda ise;

$$Y = X\mu + Z\alpha + \varepsilon \qquad [13]$$

şeklinde yazılabilir. Burada:

$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t)$

$e' = (e_1, e_2, ..., e_{tn_t})$

$X = 1_N$ ve

$Z_1 = \{_d 1_{ni}\}_{i=1}^{t}$ dir. $\{_d A_i\}_{i=1}^{r}$ ifadesi ise $A_1, A_2, ..., A_r$ matrisinin köşegen bloğunu gösterir.

Y gözlem vektörü, ortalaması $1_N \mu$ ve varyansı da V olan çok değişkenli normal dağılım gösterir. Yani Y~ ($1_N \mu$, V)'dir.

$A_1, A_2, ..., A_r$ matrisinin köşegen bloğu aynı zamanda $\sum_{i=1}^{r+} A_i$ şeklinde de gösterilebilir. Dolayısıyla kareler toplamları ve modelin varyans matrisini belirlemek amacıyla matrislerin diyagonal bloğunu göstermek için iki notasyon kullanılır. Bu durumda V:

$$V = \sigma_\alpha^2 V_1 + \sigma_e^2 V_2 = \sum_{i=1}^{r+} (\sigma_e^2 I_{n_1} + \sigma_\alpha^2 J_{n_1}) \qquad [14]$$

olarak yazılır.

3.2.2.1. HENDERSON I METODU

Bu yöntem Henderson (1953), tarafından geliştirilmiş olan ve sırası ile araştırıcının kendi ismi ile anılan Henderson I, II ve III yöntemlerinden ilkidir. Üç metot arasında hesaplaması en kolay olan ve bundan dolayı da varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde en sık kullanılan metottur. Bu metot varyans analizi metodu olarak ta bilinmektedir. Bu metotla varyans bileşenleri tahmin edilirken önce hesaplanan kareler toplamları beklenen değerlerine eşitlenir. Daha sonra söz konusu eşitlikler çözülerek varyans bileşenleri tahmin edilir. Bu yöntem sadece şansa bağlı modellerde kullanılmaktadır.

$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ modeli için gruplar arası ve gruplar için ya da hata kareler toplamları olan SSA ve SSE aşağıdaki gibi yazılır.

$$SSA = \sum_{i=1}^{t} n_i (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{t} n_i \overline{Y}_{i.}^2 - \overline{Y}_{..}^2 \qquad [15]$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2 = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{n_i} n_i \overline{Y}_{i.}^2 \qquad [16]$$

Henderson I metodunda SSA ve SSE'nin beklenen değerleri, kendilerine eşitlenerek elde edilen eşitliklerin çözülmesiyle varyans bileşenleri tahmin edilir. SSA ve SSE'nin beklenen değerleri ise bunlara ilişkin karesel formların (A_1 ve A_2) beklenen değerleri kullanılarak bulunur. Dolayısıyla SSA ve SSE'nin karesel formları ise:

$SSA = Y^{'}A_1Y$ ve $SSE = Y^{'}A_2Y$ şeklindedir. Burada

$$A_1 = \left\{_d \bar{J}_{n_i}\right\}_{i=1}^{t} - \bar{J}_N = \text{diag}\left(\frac{1}{n_1}J_{n_1}, \frac{1}{n_2}J_{n_2}, ..., \frac{1}{n_t}J_{n_t}\right) - \frac{1}{n}J_n \text{ ve} \quad [17]$$

$$A_2 = I_N - \left\{_d \bar{J}_{n_i}\right\}_{i=1}^{t} = I_N - \text{diag}\left(\frac{1}{n_1}J_{n_1}, \frac{1}{n_2}J_{n_2}, ..., \frac{1}{n_t}J_{n_t}\right) - \frac{1}{n}J_n \text{ dir.} \quad [18]$$

Bu karesel formların beklenen değerleri kullanılarak SSA ve SSE'nin beklenen değerleri olan E(SSA) ve E(SSE) aşağıdaki gibi bulunur.

$$E(SSA) = E(Y^{'}A_1Y) = tr(A_1V) + E(Y^{'})A_1E(Y) \quad [19]$$

$$= tr\left[\left(\left\{_d \bar{J}_{n_i}\right\}_{i=1}^{t} - \bar{J}_N\right)\left(_d\, \sigma_\alpha^2 J_{n_i} + \sigma_e^2 I_{n_i}\right)\right] + \mu 1_N^{'}\left(\left\{_d \bar{J}_{n_i}\right\}_{i=1}^{t} - \bar{J}_N\right)\mu 1_N$$

$$= \sigma_\alpha^2\left[tr\left\{_d \bar{J}_{n_i} J_{n_i}\right\} - tr\left(\bar{J}_N\left\{_d J_{n_i}\right\}\right)\right] + \sigma_e^2\left[tr\left\{_d \bar{J}_{n_i}\right\} - tr\,\bar{J}_N\right] + \mu^2\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{n_i^2}{n_i} - \frac{N^2}{N}\right)$$

$$= \sigma_\alpha^2\left[N - \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i^2}{N}\right] + \sigma_e^2(t-1) \text{ olur.} \quad [20]$$

Hata Kareler Toplamının beklenen değeri ise E(SSE):

$$E(SSE) = E(Y^{'}A_2Y) = tr(A_2, V) + E(Y^{'})A_2\, E(Y)$$

$$= tr(A_2V) + \mu 1_N^{'}\left(I_N - \left\{_d \bar{J}_{n_i}\right\}\right)1_N\mu$$

$$= \left[\left(I_N - \left\{_d \bar{J}_{n_i}\right\}\right)\left(_d\, \sigma_\alpha^2 J_{n_i} + \sigma_e^2 J_{n_i}\right)\right] + \mu^2.0$$

$$= \sigma_\alpha^2\left[tr\left(I_N\left\{_d J_{n_i}\right\}\right) - tr\left\{_d \bar{J}_{n_i} J_{n_i}\right\}\right] + \sigma_e^2\left[tr(I_N) - tr\left\{_d \bar{J}_{n_i}\right\}\right]$$

$$= \sigma_\alpha^2[N - N] + \sigma_e^2[N - t] = (N - t)\sigma_e^2 \text{ olarak bulunur.} \quad [21]$$

SSA ve SSE'nin beklenen değerleri kendilerine eşitlenip, elde edilen eşitlikler çözüldüğünde varyans bileşenleri olan σ_α^2 ve σ_e^2'nin tahmin edicileri elde edilir.

$$SSA = \left(N - \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i^2}{N} \right) \hat{\sigma}_\alpha^2 + (t-1)\hat{\sigma}_e^2 \quad \text{ve} \qquad [22]$$

$$SSE = (N-t)\,\hat{\sigma}_e^2 \text{ olur.} \qquad [23]$$

Sonuç olarak σ_α^2 ve σ_e^2'nin tahmin edicileri olan $\hat{\sigma}_\alpha^2$ ve $\hat{\sigma}_e^2$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{SSE}{N-t} = MSE \qquad [24]$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{(t-1)}{(N - \frac{\sum n_i^2}{N})} (MSA - MSE) \qquad [25]$$

3.2.2.2. HENDERSON II METODU

Daha öncede belirtildiği üzere Henderson I metodu sadece rastgele etkili modellerde varyans bileşenlerinin tahmin edilmesine imkan verir. Bu da Henderson I metodunun önemli bir dezavantajı olarak karşımıza çıkmaktadır. Halbuki uygulamada bir çok durumda dikkate alınan model karışık etkili bir model olabilir. Bu durumda Henderson I metodundan yararlanılarak varyans bileşenleri tahmin edilemez. İşte Henderson II metodu karışık modellerde kullanılabilir. Bu metotta eğer modelde sabit etkiler varsa önce verileri sabit etkilere göre düzeltir daha sonra Henderson I metodunu uygular.

Bu metotla yapılan varyans bileşenleri tahminleri sapmasız olup değişmezlik özelliğine sahiptir. Ancak, Henderson II metodu sabit ve rastgele faktörler arasında etkileşimin olmadığı durumlarda varyans bileşenlerinin tahmin edilmesine imkan vermektedir. Bu da Henderson II metodunun önemli bir dezavantajıdır (Henderson ve ark., 1974).

Henderson II metodu ile varyans bileşenlerinin tahminleri aşağıdaki gibi yapılır:

$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ modeli aynı zamanda $Y = W\beta + e$ şeklinde de yazılabilir.

Burada

$\beta' = [\mu\ \alpha']$,

$W = (\,X \quad Z)\; X = 1_N$ ve $Z = \left\{{}_{d} 1_{n_i}\right\}_{i=1}^{t}$ 'dir.

$W = (X, Z) = (X_b \quad X_a \quad Z_a \quad Z_b)$ şeklindeki parçalamaya göre μ hariç, modelde herhangi bir sabit etkili bulunmadığından X_a mevcut değildir. Benzer şekilde hata terimi olan e hariç modelde sadece t seviyeli bir tek rastgele etkili terim bulunduğundan Z_b matrisi de mevcut değildir. Diğer yandan $r\,(1_N) = 1$ ve $r = \left(\left\{{}_{d} 1_{n_i}\right\}\right) = t$ 'dir. Sonuç olarak W matrisinin rankı $r\left(1_N, \left\{{}_{d} 1_{n_i}\right\}\right) = t$ 'dır. [26]

Dizayn matrisi olan W'nin parçalanması ancak $X_b = 1_N$ ve $Z_a = \left\{{}_{d} 1_{n_i}\right\}_{i=1}^{t}$ alınmasıyla yapılabilir. $W^{'}W$ genelleştirilmiş tersi aslında W matrisinden doğrudan elde edilebilir. $W^{'}W$ ve bunun genelleştirilmiş tersi olan $(W^{'}W)^{-}$ ise aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$W^{'}W = \begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & . & . & . & n_t \\ n_1 & n_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 0 & . & 0 & . & . \\ . & . & . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & . & . & 0 & . & 0 \\ n_t & 0 & 0 & . & . & 0 & n_t \end{bmatrix} \qquad [27]$$

$$(W^{'}W)^{-} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_1}-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & . & . & . & -\frac{1}{n} \\ 0 & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n_2}-\frac{1}{n} & . & . & . & -\frac{1}{n} \\ .\;. & . & -\frac{1}{n} & . & -\frac{1}{n} & . & . \\ . & . & . & -\frac{1}{n} & . & -\frac{1}{n} & . \\ . & . & . & . & -\frac{1}{n} & . & -\frac{1}{n} \\ 0 & -\frac{1}{n} & . & . & . & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n_t}-\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

β 'nın en küçük kareler tahmin edicileri $\hat{\beta} = (W'W)^{-} W'Y$ 'dır. [28]

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ . \\ . \\ . \\ Y_{t\,n_t} \end{bmatrix}$$

$$W_{n\,x\,(t+1)} = \begin{pmatrix} 1_n & \{_d\, 1_{n_i}\}_{i=1}^{t} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$W'Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n_i} Y_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{t} Y_{tj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{..} \\ Y_{1.} \\ Y_{2.} \\ . \\ . \\ Y_{t.} \end{pmatrix} \text{ olduğu için}$$

$$\hat{\beta} = (W'W)^{-} W'Y = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{..} \\ \overline{Y}_{1.} - \sum_{j=1}^{n_1} Y_{1j} - \sum_{j=1}^{n_2} Y_{2j} - \ldots - \sum_{j=1}^{n_t} Y_{tj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{..} \\ \overline{Y}_{1.} - \overline{Y}_{..} \\ \overline{Y}_{2.} - \overline{Y}_{..} \\ . \\ . \\ \overline{Y}_{t.} - \overline{Y}_{..} \end{bmatrix} \text{ olur.} \qquad [29]$$

ve $\hat{\beta} = [\overline{Y}_{..} \quad \overline{Y}_{1.} - \overline{Y}_{..} \quad \overline{Y}_{2.} - \overline{Y}_{..} \quad . \quad . \quad . \; \overline{Y}_{t.} - \overline{Y}_{..}]$

Buradan hata varyansının yansız tahmin edicisi $\hat{\sigma}_e^2$:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{(Y - W\hat{\beta})' (Y - W\hat{\beta})}{N - r(W)}$$

$$= \frac{1}{N - r(W)}\left[Y'Y - (\overline{Y}_{..}, \hat{\alpha}')\left(1_N, \left\{_d 1_{n_i}\right\}_{i=1}^{t}\right) Y \right]$$

$$= \frac{1}{N - r(W)}\left[Y'Y - (\overline{Y}_{..}, \hat{\alpha}')\left(N\overline{Y}_{..}, \left\{_d n_i \overline{Y}_{i..}\right\}_{i=1}^{t}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{N - r(W)}\left[Y'Y - N\,\overline{Y}_{..}^2 - \sum_{i=1}^{t} n_i\, \hat{\alpha}_i\, \overline{Y}_{i.} \right]$$

$$= \frac{1}{N - t}\left[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - N\overline{Y}_{..}^2 + N\overline{Y}_{..}^2 - \sum_{i=1}^{t} n_i \overline{Y}_{i.}^2 \right]$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{t} n_i\, \overline{Y}_{i.}^2}{N - t} = \text{MSE olur.} \qquad [30]$$

Buradan da

SSE=(N-t) $\hat{\sigma}_e^2$ olduğu görülür. [31]

Henderson II metodunda da X_a mevcut olmadığı için varyans bileşenlerini tahmin etmek için oluşturulacak tahmin eşitlikleri için gerekli olan kareler toplamları Henderson I metodundaki gibidir. Dolayısıyla SSA aşağıdaki gibi olacaktır.

$$SSA = \left(N - \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i^2}{N} \right) \hat{\sigma}_\alpha^2 + (t-1)\,\hat{\sigma}_e^2 \qquad [32]$$

Sonuç olarak MSA'nın tahmin edicisi $\hat{\sigma}_\alpha^2$:

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{MSA - MSE}{\left(N - \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i^2}{N} \right)(t-1)} \text{ olarak elde edilir.} \qquad [33]$$

3.2.2.3. HENDERSON III METODU

Henderson III metodundan yararlanılarak σ_α^2 ve σ_e^2'nin tahmin edicilerini elde etmek için öncelikle $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ modeli için gerekli olan tahmin eşitliklerinin elde edilebilmesi gerekir. Bunun için ise $E[R(\alpha \backslash \mu)]$ ve $E[SSE]$ 'nin hesaplanması gerekir.

$E[R(b_2 \backslash b_1)]$ 'nin genel hesaplanması:

$E[R(b_2 \backslash b_1)] = tr\,[W_2' M_1 W_2\, E(b_2 b_2')] + \sigma_e^2\,[r(W_1, W_2) - r(W_2)]$ şeklindedir. [34]

Dolayısıyla modelimiz için $W_1 = 1_N$, $W_2 = \{_d 1_{n_1}\}_{i=1}^{t}$ ve $M = I_N - \frac{1}{N} J_N$ alınarak $E[R(b_2 \backslash b_1)]$ 'nin bekleneni bulunabilir.

$Y = 1_n \mu + W\alpha + \varepsilon \qquad W = \{_d 1_{n_i}\}_{i=1}^{t}$

$$R(\alpha / \mu) = Y' M W (W' M W)^- W' M Y = \sum_{i=1}^{t} n_i (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2$$

$$R(\alpha / \mu) = (W_\alpha + \varepsilon)' M W (W' M W)^- W' M (W_\alpha + \varepsilon)$$

$$= \alpha' W' M W (W' M W)^- W' M W_\alpha + 2\varepsilon' M W (W' M W)^- W' M W_\alpha$$

$$+ \varepsilon' M W (W' M W)^- W' M\varepsilon$$

$$= \alpha' W' M W_\alpha + 2\varepsilon' M W (W' M W)^- W' M W_\alpha + \varepsilon' M W (W' M W)^- W' M\varepsilon \qquad [35]$$

$$E(R(\alpha / \mu)) = tr(W' M W E(\alpha\alpha')) + tr(M W (W' M W)^- W M$$

$E(\alpha\alpha') = \sigma_\alpha^2 I_N$ ve $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_e^2 I_N$ olduğundan

$$R(\alpha / \mu) = tr(W' M W)\sigma_\alpha^2 + tr(M W (W' M W))^- W M)\sigma_e^2$$

$$= \mathrm{tr}\left[\left\{{}_d 1_{n_i}\right\}_{i=1}^{t} (I_N - \frac{1}{N} J_N) \left\{{}_d 1_{n_i}\right\}\right] \sigma_\alpha^2 + (\, r\,(1_N, \left\{{}_d 1_{n_i}\right\}) - r\,(1_N))\, \sigma_e^2$$

$$R\,(\alpha / \mu) = \left(N - \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i^2}{N} \right) \hat{\sigma}_\alpha^2 + (t-1)\, \hat{\sigma}_e^2 \text{ olur.} \qquad [36]$$

$$E\,(SSE) = \sigma_e^2 \, \mathrm{tr}\left[I - \left[1_N \;\; \left\{{}_d 1_{n_i}\right\}_{i=1}^{t}\right]\left[1_N \;\; \left\{{}_d 1_{n_i}\right\}_{i=1}^{t}\right]^{+} \right]$$

$$= \sigma_e^2 \left[N - r \left[1_N \;\; \left\{{}_d 1_{n_i}\right\}_{i=1}^{t} \right] \right] \qquad [37]$$

$$SSE = \sigma_e^2 \,(N - t) \quad \text{olarak elde edilir.} \qquad [38]$$

σ_α^2 ve σ_e^2 ’nin tahmin edicileri olan $\hat{\sigma}_\alpha^2$ ve $\hat{\sigma}_e^2$ Henderson I ve II metotlarındaki gibi elde edilir.

3.2.3. MINQUE METODU

Daha öncede belirtildiği üzere genel doğrusal model matris şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad [39]$$

Bu model aynı zamanda

$$Y = X\beta + U_1\xi_1 + U_2\xi_2 + \ldots + U_k\xi_k \qquad [40]$$

şeklinde de yazılabilir. Burada

$(\mathbf{Y})_{n\,x\,1}$: Gözlemler vektörünü

$(\mathbf{X})_{n\,x\,p}$: β vektörü için dizayn ya da tasarım matrisini

$(\boldsymbol{\beta})_{p\,x\,1}$: Sabit etkiler vektörünü

$(\mathbf{U_i})_{n\,x\,c_i}$: ξ_i vektörleri için tasarım matrisini

$(\xi_i)_{c_i\,x\,1}$: Rastgele etkiler vektörünü göstermektedir.

$$\boldsymbol{U} = (U_1 \ \vdots \ U_2 \ \vdots \cdots \vdots \ U_k)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_k \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa; genel doğrusal model denklemi

$$Y = X\beta + U\xi \quad \text{şeklinde olur.} \qquad [41]$$

Bu model, rastgele etkili bir model olduğu için

$$\boldsymbol{\beta} \sim (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{0})$$

$\xi_i \sim \left(\mathbf{0},\ \sigma_i^2 I_{c_i x\, c_i}\right)\ i = 1,2,3,\ldots,k$ ve $Cov\left(\xi_i, \xi_j\right) = \mathbf{0}\ \ \forall\ i \neq j$ yazılabilir.
Dolayısıyla Y'nin beklenen değeri:

$$E(Y) = E(X\beta + U\xi) = X\beta \ \text{ olur.} \qquad [42]$$

Y nin varyansı ise;

$$Var\ (Y) = Var\,(X\beta + U\xi) = Var\,(X\beta + U_1\,\xi_1 + U_2\,\xi_2 + \ldots + U_k\,\xi_k)$$

$$= X\,Var\,(\beta)\,X' + U_1 Var\,(\xi_1)\,U_1' + U_2 Var\,(\xi_2)\,U_2' + \ldots + U_k Var\,(\xi_k)\,U_k'$$

$$= U_1\,\sigma_1^2\,I\,U_1' + U_2\,\sigma_2^2\,I\,U_2' + \ldots + U_k\,\sigma_k^2\,I\,U_k' = U_1\,\sigma_1^2\,U_1' + U_2\,\sigma_2^2\,U_2' + \ldots + U_k\,\sigma_k^2\,U_k' \qquad [43]$$

olarak elde edilir. Buradaki $U_i U_i'$ yerine V_i yazılırsa, Y nin varyansı olan Var (Y):

$$Var\,(Y) = \sigma_1^2\,V_1 + \sigma_2^2\,V_2 + \ldots + \sigma_k^2\,V_k \ \text{ olarak elde edilir.} \qquad [44]$$

Buradaki σ_i^2'ler varyans bileşenleridir.

Rao (1971a) , varyans bileşenlerinin

$$p_1\,\sigma_1^2 + p_2\,\sigma_2^2 + \ldots + p_k\,\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i\,\sigma_i^2 \qquad [45]$$

şeklindeki, doğrusal fonksiyonunun tahminini simetrik bir A matrisi için değişmezlik, yansızlık ve minimum norm kriterleri altında Y rastgele değişkeninin $Y'AY$ gibi bir karesel fonksiyonu ile hesaplanabileceğini göstermiştir.

Rao (1972)'deki teoreminde ise; A matrisi simetrik bir matris, V matrisi de simetrik ve tersinir bir matris olmak üzere $tr(AVAV)$ ifadesinin $AX = 0$ ve $tr[AV_i] = p_i$ şartları altında minumum değeri olarak

$$A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j R V_j R \qquad [46]$$

Elde edileceğini göstermiştir. Burada

$$R = V^{-1}Q_v = Q_v{}'V^{-1}$$
[47]

$$Q_v = I - P_v$$
[48]

$P_v = X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}$'dir. [49]

[46] numaralı eşitlikteki λ_j 'lerin çarpanlarına ise $S\lambda = p$ ve $p = (p_1, p_2,..., p_k)'$ birlikte çözümüyle bulaşılır. Burada

$$S = tr\left(RV_iRV_j\right) \quad i,j = 1,2,\dots,k$$

Dolayısıyla $\sum_{i=1}^{k} p_i\,\sigma_i{}^2$'nin MINQUE tahmin edicisini aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

$$p = (p_1, p_2,..., p_k)'$$

Burada $p_1 = 1$ ve $p_2 = 0$ alındığında $\hat{\sigma}_\alpha^2 = \hat{\sigma}_1^2$ elde edilir. Diğer taraftan $p_1 = 0$ ve $p_2 = 1$ alınırsa bu durumda ise $\hat{\sigma}_e^2 = \hat{\sigma}_2^2$ elde edilir.

$$\hat{\sigma}^2 = (\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_k^2)'$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_k)'$$

$$u_i = e'V^{-1}V_iV^{-1}$$

$$e = Q_vY$$

şeklindeki gösterimler yardımıyla;

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \sigma_i^{\,2} = p'\hat{\sigma}^2 = Y'AY$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Y'RV_iR'Y$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Y'Q_v'V^{-1}V_iV^{-1}Q_vY$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e'V^{-1}V_iV^{-1}e$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$$
$$= \lambda' u$$
$$= p'S^{-1}u$$

olarak elde ederiz. Bu denklem düzenlenerek;

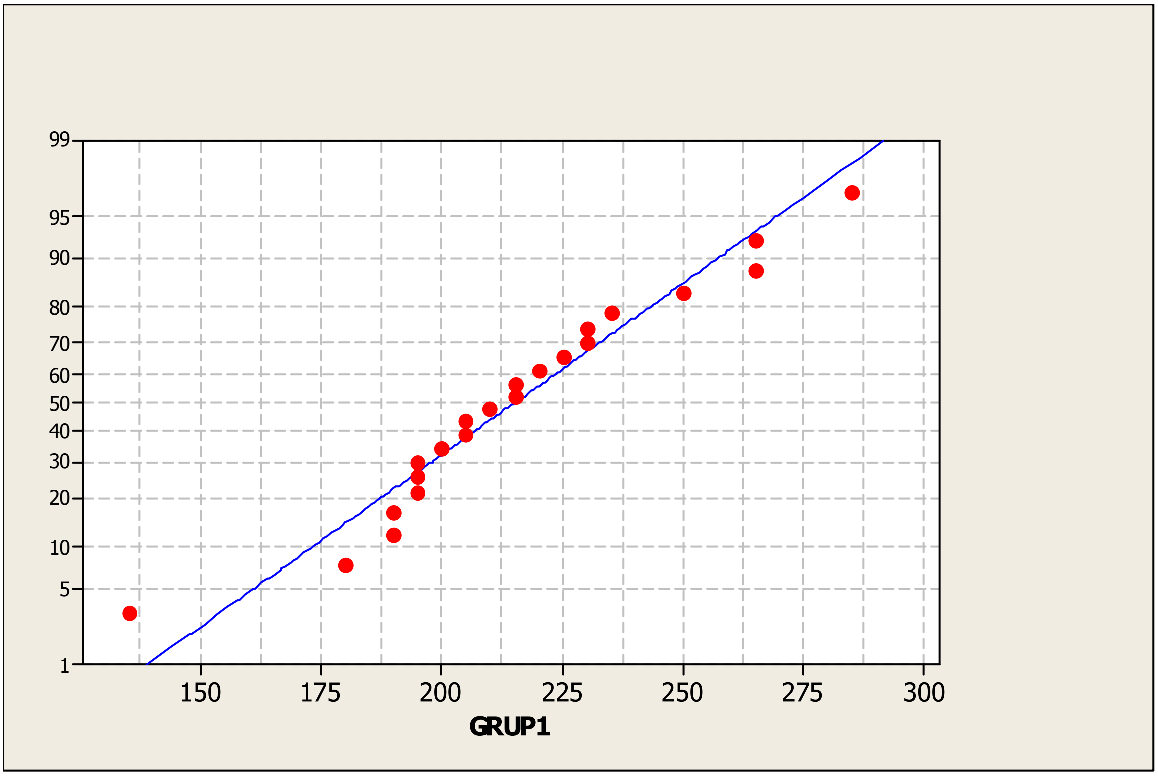
$$\hat{\sigma}^2 = S^{-1}u \qquad [50]$$

eşitliği elde edilir.

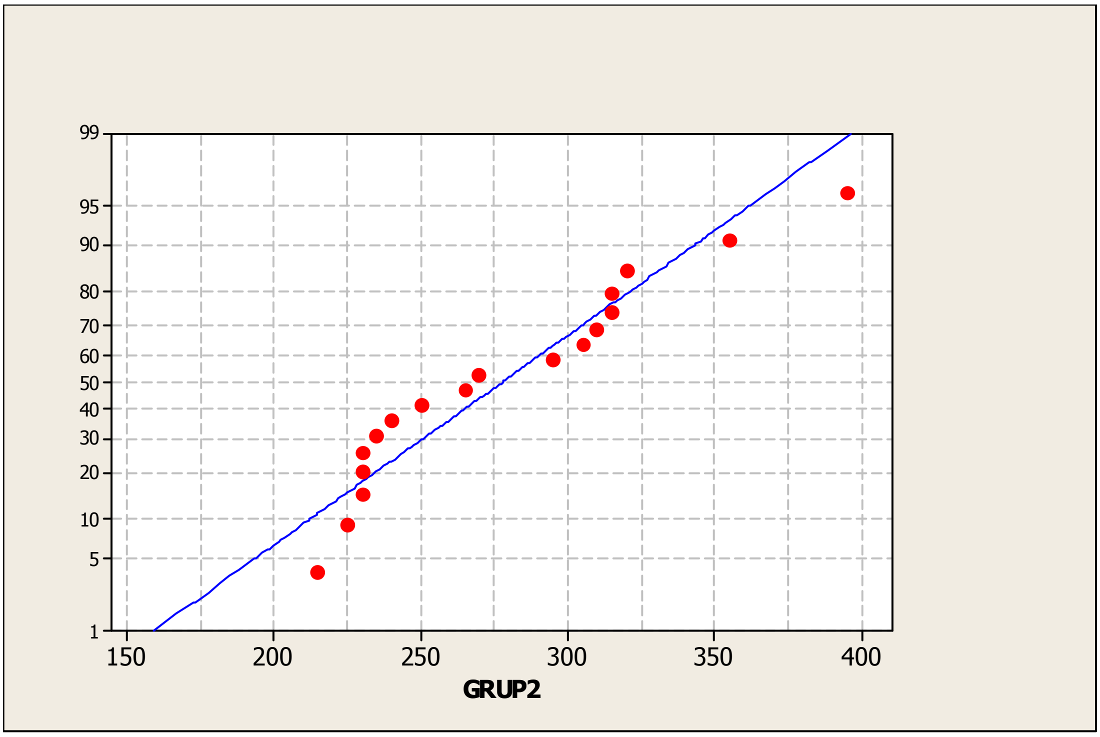
BÖLÜM 4

BULGULAR ve TARTIŞMA

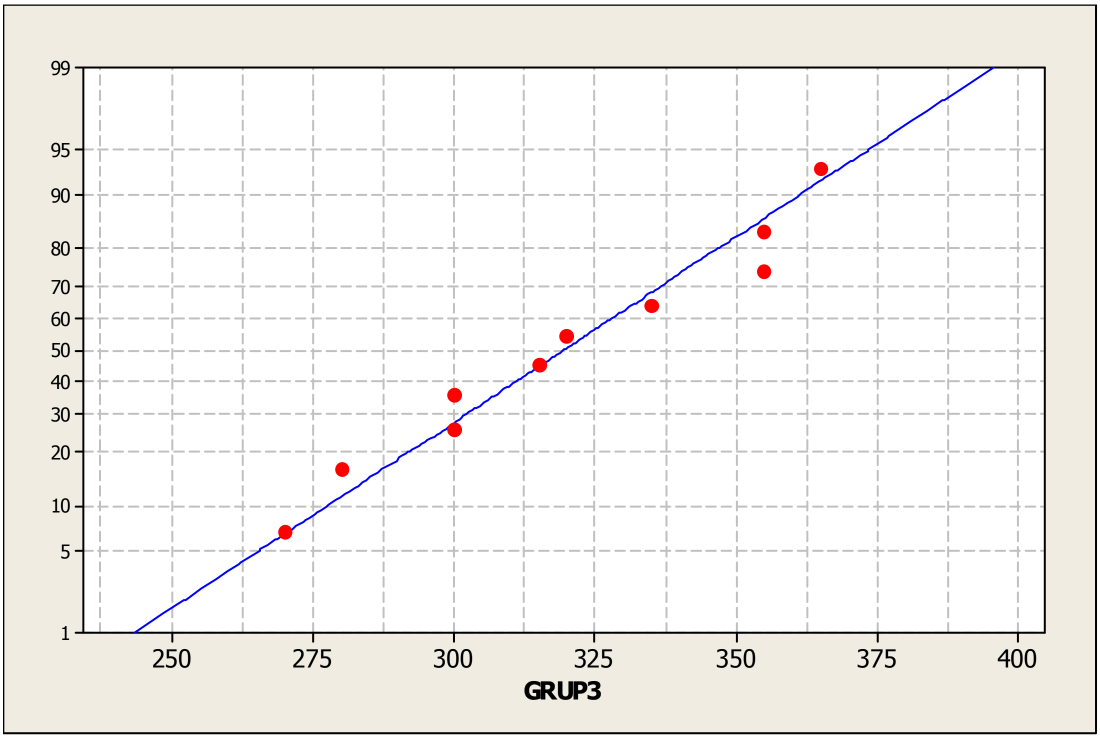
Çalışılan veri gruplarında normallik ve varyansların homojenliği ön şartlarının yerine gelip gelmediğini test etmek amacıyla yapılan Anderson-Darling ve Levene testleri sonucunda normallik ön şartının yerine gelmediği (Grafik 1, 2 ve 3) buna karşın varyansların homojenliği ön şartının (Grafik 4) yerine geldiği görülmüştür. Yapılan normallik testi sonucunda Grup 1 (P=0.234) ve Grup 3 (P=0.705) teki verilerin normal dağılım gösterdikleri, ancak Grup 2'deki verilerin normal dağılım göstermediği görülmüştür (P=0.042). Dolayısıyla çalışılan grupların alınmış oldukları populasyonlarda normallik ön şartı yerine gelmemiştir. Ancak varyansların homojenliği ön şartının yerine geldiği belirlenmiştir (P=0.153).



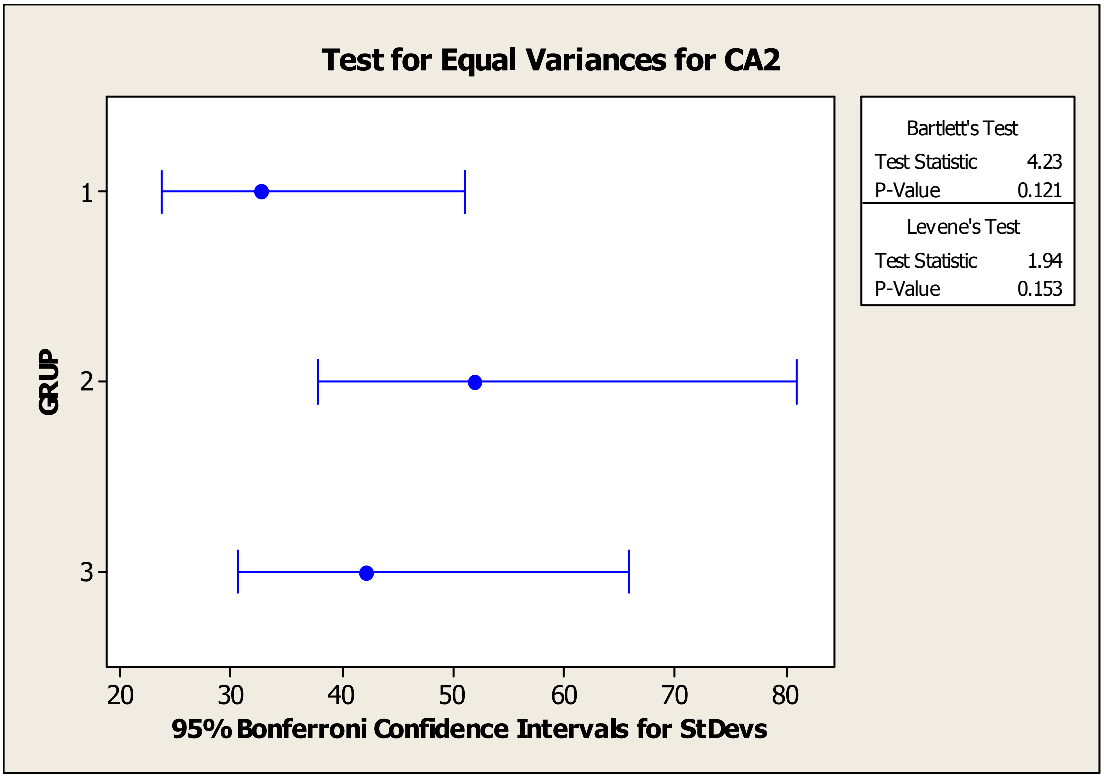
Şekil 1. Grup 1 İçin Normal Olasılık Grafiği.



Şekil 2. Grup 2 İçin Normal olasılık Grafiği.



Şekil 3. Grup 3 İçin Normal Olasılık Grafiği.



Şekil 4. Varyansların Homojenlik Testi Sonuçları.

Dikkate alınan yöntemlerle tahmin edilen varyans bileşenlerine ilişkin değerler Çizelge 2'de verilmiştir. Çizelge 2 incelendiğinde bütün yöntemlerde $\hat{\sigma}_e^2$ tahminlerinin birbirine oldukça yakın olduğu görülür. $\hat{\sigma}_\alpha^2$ tahminleri incelendiğinde ANOVA ve Henderson-I yöntemleri benzer tahminler verirken, diğer yöntemlerin farklı tahminler verdikleri görülür.

Her bir varyasyon kaynağının veya bileşenin toplam varyasyondaki payları incelendiğinde, farklı yöntemlerle yapılan tahminlerin genel olarak farklılık gösterdiği görülür. Varyans bileşenlerinin ANOVA, Henderson-I ve MINQUE yöntemlerinden yararlanılarak tahmin edilmesi, gruplar arası varyasyonun toplam varyasyondaki payının daha yüksek çıkmasını sağlamıştır. Dolayısıyla bu üç yöntemden yararlanılarak yapılacak tahminler sonucunda toplam varyasyonun büyük bir kısmının gruplar arasındaki farklılıkla izah edilebildiği dikkati çekmektedir. Dikkat edileceği üzere toplam varyasyonun yaklaşık % 61'lik bir kısmının gruplar arası farklılıktan, yaklaşık % 39'luk bir kısmının ise hata varyansından kaynaklanmıştır. Diğer taraftan varyans bileşenlerinin Henderson-II ve Henderson-III yöntemlerinden yararlanılarak tahmin edilmesi durumunda ise toplam varyasyonun büyük bir kısmının açıklanamadığı göze çarpmaktadır. Dikkat edileceği üzere bu durumda varyasyonun sırasıyla toplam % 28.34 ve % 33.74'lık bir kısmının gruplar arasındaki farklılıktan kaynaklandığı, geriye kalan kısmının da açıklanamadığı dikkati çekmektedir. Söz konusu yöntemlerle farklı tahminlere ulaşılması beklenen bir durumdur. Çünkü her yöntemin uygulanma koşulları (mesela normallik ön şartı yerine gelmemiştir, deneme dengesizdir vb.), gerektirdiği varsayımlar ve varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde izlenen işlem adımları farklıdır.

Çizelge 2. Beş farklı yöntemle tahmin edilen varyans bileşenleri

Yöntemler	$\hat{\sigma}_{\alpha}^{2}$	Toplamdaki Payı (%)	$\hat{\sigma}_{e}^{2}$	Toplamdaki Payı (%)
ANOVA	2570.450	61.26	1625.691	38.74
HENDERSON I	2570.445	61.26	1625.617	38.74
HENDERSON II	642.613	28.34	1624.808	71.66
HENDERSON III	827,705	33.74	1625.492	66.26
MINQUE	2635.999	61.85	1625.879	38.15

KAYNAKLAR

Corbeil R. ve Searle S. R., 1976. Restricted Maximum Likelihood (REML) Estimation Variance Components in The Mixed Model. *Teknometrics.* 18; 31–38.

Crump S.L., 1951. The Present Status of Variance Components Analysis. *Biometrics,* 7: 1-16.

Einshart C., 1947. The assumptions underlying the analysis of variance. *Biometrics,* 3: 1–21.

Falconer D. S., 1989. *Intoduction to Quantitative Genetics*, 3rd ed.John Wiley and Sons, New York.

Harvey W. R., 1970. Estimation of Variance and Covariance Components in The Mixed Model. *Biometrics* 26; 485–502.

Harville D.A., 1977. Maximum-likelihood approaches to variance component estimation and to related problems, *J. Amer. Statist. Assoc.,* 72: 320–340.

Hartley H. O. ve Rao J. N. K., 1967. Maximum Likelihood estimation for the mixed model analysis of variance model. *Biometrica,* 54: 93-98.

Henderson C. R., 1953. Estimation of Variance and Covariance Components. *Biometrics.* 9; 223–252.

Kaps M. ve Lamberson W., 2004. *Biostatistics for Animal Science. CABI International, Wallingford, Oxforshire,* London.

Kelly R.J. ve Mathew T., 1993. Improved estimators of variance components with smaller probability of negativity, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 4:* 897–911.

Mondal P. M., 2000. On the principle of MINQUE fort he estimation of variance and covariance components. Master thesis, Concordia University, *Department of Mathematics and Statistics,* Canada.

Orhan H., 1997. Varyans Unsurları Tahmin Yöntemlerinin Monte Carlo Çalışması ile Karşılaştırmalı Olarak İncelenmesi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi.*

Rasch D. ve Masata O., 2006. Methods of variance component estimation. *Czech J. Anim. Sci.,* 51 (6): 227-235.

Rao C. R., 1970, Estimation of heteroscedastic variances in linear models. *JASA,* 65 (329), 161–172.

Rao C. R., 2001. Nonnegative estimators for the one-way random effects model, *Comm. Statist. A Theory Methods*, 30: 1605–1613.

Sarhai H. ve Ojeda M.M., 2004. *Analysis of Variance for Random Models*, Volume I: Balanced Data. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin

Sarhai H. ve Ojeda M.M., 2005. *Analysis of Variance for Random Models*, Volume II: Unbalanced Data. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.

Searle S.R., 1971. *Linear Models*. John Wiley & Sons, New York.

Searle S. R., Casella G. ve McCulloch C. E., 1992. *Varince Components*. A Wiley-Interscience Publication, USA.

Searle S. R., Casella G. ve McCulloch C. E., 2006. *Varince Components*. A Wiley-Interscience, A John Wiley & Sons, Inc., *Hoboken, New Jersey,* USA.

Smith E. J. ve Savage T. F., 1992. A comparison of four methods of variance component estimation for heritability of embryonic mortality in turkeys. *Poultry science,* 71: 229–234.

Swallow W. H. ve Monahan J. F., 1984. Monte Carlo Comparison of ANOVA, MIVQUE, REML, and ML *Estimators of Variance Components. Tecnometrics,* 26 (1): 47–57.

Thompson W.A., Jr., 1962. The problems of Negative Estimates of Variance Components. *Annals of Mathematical Statistics*, 33: 273–289.

Verdooren L.R., 1982. How large is the probability for the estimate of a variance component to be negative? *Biometrical Journal*, *24*, 339–360.

Winer B. J., Brown D. R. ve Mıchels K. M., 1991. Statistical principles in experimental design. *Third Ed., McGraw-Hill, Inc.,* USA.

Yang C.C. ve Su C. M., 2005. A simulation study on estimators for G-coefficient of generaliziability theory. *Journal of Education and Psychology*, 28 (4): 773–797.

Zar J.H., 1999. Biostatistical analysis. New Jersey: Prentice –Hall Inc. *Simon and Schuster/A Viacom Company.*

ÇİZELGELER LİSTESİ **Sayfa No**

ŞEKİLLER LİSTESİ **Sayfa No**

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Emel MENDEŞ

Doğum Yeri: Trabzon

Doğum Tarihi: 1976

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLER

a) Yayınlar -SCI –Diğer:

Mendeş, M., Akkartal, E., Mendeş, E. (2010). Determination of suitable permutation numbers in comparing independent group means: a Monte Carlo Simulation study. Journal of Scientific & Industrial Research, 69, 422-425.

b) Bildiriler -Uluslararası –Ulusal: ____

Mendeş, M., Mendeş, E. (2009). ANOVA F ve Welch Testi ile Bunların Permutasyon Versiyonlarının 1.Tip Hata ve Testin Gücü Bakımından Karşılaştırılması. 6. Ulusal Zootekni Bilim Kongresi, 24-27 Haziran 2009-Erzurum.

c) Katıldığı Projeler: ____

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl: Milli Eğitim Bakanlığı (Matematik Öğretmeni) ve 1999-____

İLETİŞİM

E-posta Adresi: emelmendes@gmail.com