FRENET DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ SİSTEMİ İÇİN

TERS PROBLEMLER

TUĞBA MERT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2009

FRENET DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ SİSTEMİ İÇİN TERS PROBLEMLER

Tuğba MERT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2009

Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf AMİROV
Üye : Doç. Dr. Esin KASAPOĞLU
Üye : Yrd. Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

...15/06/2009

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Sezai ELAGÖZ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FRENET DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ SİSTEMİ İÇİN TERS PROBLEMLER

Tuğba MERT
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sıkça kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Yurko ve Freiling tarafından verilen singülaritelere ve dönüm noktalarına sahip diferansiyel denklemlerin belirlenmesi problemine yer verilmiştir. İstenilen mertebeden sonlu sayıda singülariteye ve dönüm noktasına sahip diferansiyel sistemlerin sentez parametrelerinin ters problemi çalışılmıştır. Spektral karakteristiklerin özellikleri tanıtılmış, teklik teoremi ve ters problemin çözümünün yapılabilmesi için bir yöntem verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Çevirme operatörü ve özellikleri incelenmiştir. Alınan integral denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiş ayrıca ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çevirme operatörünün sağladığı özellikler incelenmiştir.

Son bölümde ise Özdeğer ve normalleştirici sayıların davranışları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Spektral Teori, Çevirme Operatörü, Öz değer, Öz vektör, Normalleştirici sayılar, Ters problem, Frenet

SUMMARY

MSc Thesis

INVERSE PROBLEMS FOR FRENET DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM

Tuğba MERT
Cumhuriyet University
Graduate School of Natural and Applied Science of Department of Mathematics
Advisor: Proff. Dr. Rauf AMİROV

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, important concepts and theorems, which are used frequently in the spectral theory of differential operators, have been given.

In the second chapter, we have given place to problem of determining differential equations which have singularities and points of inflection, introduced by Yurko and Freiling. Inverse problem of synthesis parameters of arbitrary ordered differential systems, which have finite number of singularity and point of inflection, have been studied. Properties of spectral characteristics have been introduced. Uniqueness theorem and a method for the solution of inverse problem have been given.

In the third chapter, transformation operator and its properties have been examined. Existence and uniqueness of solution of the integral equation have been showed. Also, using the method of successive approximations properties of transformation operator have been observed.

In the last chapter, behaviors of eigenvalues and normalizer numbers have been examined.

Key Words: Spectral theory, Transformation Operator, Eigenvalue, Eigenvector, Inverse Problem, Frenet

Sizlere Yüksek lisans tezi olarak sunduğumuz bu çalışmada araştırmalarımın başından sonuna kadar değerli fikir ve tecrübeleriyle emeğini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof.Dr.Rauf AMİROV'a, ayrıca Yaşar ÇAKMAK, Sinan ÖZKAN,Nuh DURNA, Hasret YAZARLI hocalarıma ve eğitim hayatım boyunca herzaman yanımda olan aileme vermiş olduğu manevi destekten dolayı çok teşekkür ederim.

Tuğba MERT

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Spektral analizin bir dalı olan inverse (ters) problemler yani, spektral karakteristiklere göre operatörlerin kurulması problemi, fiziğin bir çok alanında kullanılmaktadır. Örneğin mekanikte, verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesinde, Kuantum mekaniğinde, verilen enerji seviyelerine veya saçılma verilerine göre parçacıklar arasında etkileşmenin öğrenilmesinde, jeofizikte yer altı madenlerinin aranmasında karşımıza çıkmaktadır.

Bu yüzden verilen sistemin enerji seviyelerinin ve dalga fonksiyonlarının bulunması en önemli problemlerden birisidir. Söz konusu problemler verilen sistemin yerleştiği potansiyel alana bağlıdır. Bu tip problemlerin çözümü, farklı potansiyelli Schrödinger denklemi için sınır-değer problemlerinin özdeğer, özfonksiyon ve normalleştirici sayıların bulunmasına indirgenmektedir.

Ayrıca, Kuantum teorisinin önemli problemlerinden biriside sistemin enerji seviyeleri belli iken sistemin bulunduğu potansiyel alanı bulmaktır. Bu tip problemler, singülariteye sahip Sturm-Liouville operatörler için inverse(ters) problemler yardımıyla çözülmektedir. Bu yüzden de, söz konusu operatörlerin spektral karakteristiklerine göre belirlenmesi probleminin çözülmesi için önem taşımaktadır.

Tanım : Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları toplanabilir fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler operatör, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan diferansiyel operatöre singüler operatör denir.

İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin dağılımı Birkof tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Riestz, Neumann, Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q\left(x\right)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuşur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q\left(x\right)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülüde verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar, 1949 yılında Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular Courant, Carleman, Birman, Salamyak, Maslov, Keldish vs. matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1: $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L_2[a,b]$ uzayı,

$$L_2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b |x(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, \bar{g}(x)\, dx$$

şeklinde tanımlanır. (reel durumda $g(x) = \bar{g}(x)$)

Tanım 1.2: ℓ_2 uzayı,

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \mid \sum_{n=1} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3:

$$L = \left\{ \begin{array}{l} ly = -y'' + q(x)\, y = \lambda y \quad , \quad x \in [a,b] \\ U(y) = A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ V(y) = A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{array} \right\}$$

$A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer bu şekilde tanımlı L operatörünün

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ çözümü varsa λ ya L operatörünün özdeğeri, λ özdeğerine karşılık gelen y çözümünede L operatörünün öz fonksiyonu denir.

Tanım 1.4: $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün özdeğerileri ve $y(x, \lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x, \lambda_n)\, dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 1.5: L sınırlı lineer operatör olmak üzere $(L-\lambda I)$ operatörünün $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olduğu λ lar kümesine L operatörünün regüler noktaları, bu $(L-\lambda I)^{-1}$ operatörünede rezolvent operatötü denir ve $\rho(\lambda)$ ile gösterilir. $\sigma(L)=\mathbb{C}\setminus\rho(\lambda)$ kümesinede L operatörünün spektrumu denir.

Tanım (Adjoint Operatör)1.6: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L: H_1\to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $L^*: H_2\to H_1$ operatörü

$$\langle Lx,y\rangle=\langle x,L^*y\rangle$$

şartları sağlıyorsa L^* operatörüne L operatörünün adjoint operatörü denir. Eğer $L=L^*$ ise L operatörüne self adjoint operatör denir.

Tanım (Çevirme Operatörü)1.7: E lineer topolojik uzay, A ve B de $A:E\to E$, $B:E\to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları ve $E_1,E_2\subset E$ olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörü,

İ) X operatörü E_1 uzayında ve X^{-1} operatörü E_2 uzayında süreklidir,

İİ) $AX=XB$ operatör denklemi sağlanır.

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatör çifti için çevirme operatörü denir.

Tanım 1.8: $f(z)$ fonksiyonu ve kompleks düzlemin bir z_0 noktası verilsin. Eğer z_0 noktasının enaz bir δ komşuluğu varsaki bu komşuluktan olan her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 1.9: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna tam fonksiyon denir.

Teorem (Rouche Teoremi)1.10: f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar olsunlar. Eğer γ, f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen, B içinde bulunan basit kapalı bir eğri ve de γ üzerinde

$|g(z)| < |f(z)|$ ise bu durumda $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonlarının γ içindeki sıfırlarının sayısı katlılığı ile birlikte aynıdır.

Teorem (Cauchy İntegral Teoremi)1.11: $f(z)$ bağlantılı G bölgesinde analitik fonksiyon, γ ise G de bulunan keyfi basit kapalı eğri olsun. Bu durumda $f(z)$ nin γ eğrisi üzerinden integrali sıfırdır. Yani;

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

dır.

Teorem (Cauchy İntegral Formülü)1.12: B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer a, γ içinde bir nokta ve $f(z)$, B de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

dir.

Tanım 1.13: $f(z)$ analitik bir fonksiyon ve z_0 onun ayrık aykırı noktası olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası denir.

Teorem (Rezidü Teoremi)1.14: $f(z)$ fonksiyonu bir B bölgesinde ve sınırında sonlu sayıda $z_1, z_2, ..., z_n \in B$ ayrık aykırı noktalarına sahip ve bu noktaların dışında B bölgesinde ve sınırında analitik olsun.Bu durumda

$$\int\limits_{\partial B} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Re}_{z=z_k} s f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Re}_{z=z_0} s f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z=z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[f(z)(z-z_0)^k \right]$$

z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Re}_{z=z_0} s f(z) = \lim_{z=z_0} \left[f(z)(z-z_0) \right]$$

dir.

Tanım 1.15: Diyelimki $f(z)$ bir tam fonksiyon ve $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ serisi verilsin.

$$R = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}$$

sayısı serisinin yakınsaklık yarıçapı ve $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ olsun. $r > R$ için

$$M_f(r) < \exp(r^{\mu})$$

olacak şekilde $\mu > 0$ varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir ve

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$$

sayısınada $f(z)$ nin mertebesi denir.

Tanım 1.16: $f(z)$ bir tam fonksiyon ve $\rho > 0$ onun mertebesiolsun. $r > R$ için

$$M_f(r) < \exp(ar^{\rho})$$

olacak şekilde $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir.

$M_f(r) < \exp(ar^{\rho})$ eşitsizliğini sağlayan $\sigma = \inf\{a\}$ sayısına $f(z)$ fonksiyonunun tipi denir ve

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho}}$$

formülüyle hesaplanır.

Tanım 1.17: $f(z)$ bir tam fonksiyon ve σ_f de onun tipi olsun.Eğer

i- $\sigma_f = \infty$ ise f fonksiyonuna maksimum tipe sahiptir denir.

ii- $0 < \sigma_f < \infty$ ise f fonksiyonuna normal tipe sahiptir denir.

iii- $\sigma_f = 0$ ise f fonksiyonuna minimal tipe sahiptir denir.

2.BÖLÜM

SİNGÜLARİTELERE VE DÖNÜM NOKTALARINA SAHİP DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde istenilen mertebeden sonlu sayıda singülariteye ve dönüm noktasına sahip diferansiyel sistemlerin sentez parametrelerinin ters problemi çalışılmıştır. Spektral karakteristiklerin özellikleri tanıtılmış, teklik teoremi ve ters problemin çözümünün yapılabilmesi için bir yöntem ispatlanmıştır.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = i\rho R(x)\, y_2 \ , \ \dfrac{dy_2}{dx} = i\rho \dfrac{1}{R(x)} y_1 \ , \ x \in [0,T] \\ y_1(0,\rho) = 1 \ , \ y_2(0,\rho) = -1 \end{cases} \tag{1}$$

sistemini düşünelim. Burada $\rho = \sigma + i\tau$ spektral parametre ve R dalga diranci olarak adlandırılan bir reel fonksiyondur.

(1) sistemi doğal bilimde bir çok problem için bir kanonikal formdur. Örneğin (1) sistemi katmanlı bir ortamda dalga yayılımı tanımlar ve optik, spektraskopy, elektrodinamik ve akustik problemlerinde sıkça kullanılır. Radio Mühendisliğindeki düzgün olmayan elektronik çizgiler ve sentezleyici geçişler arasındaki akustik dalgalar için bağdaştırıcıların oluşturulması problemi de (1) sistemine indirgenebilir.

Bu bölümün temel amacı, sistem istenilen mertebeden singülaritelere ve aralık içerisinde dönüm noktalarına sahip olduğu durumda istenilen spektral karakteristiklere sahip R dalga direnci sentezinin ters problemini çalışmaktır. Daha ilerde

$$R(x) = \prod_{j=1}^{N} \left| x - \gamma_j \right|^{P_j - 1} R_0(x) \tag{2}$$

kabuledilecektir. Burada $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < ... < \gamma_n < T$, P_j reel sayılar , $R_0(x) \in W_2^1[0,T]$, $R(0) = 1$ ve $R'(0) = 0$ dır.

Temel spektral karakteristikler sırasıyla genişleme yansıma katsayısı, dönüşüm katsayıları, karakteristik fonksiyon olmak üzere

$$r(\rho) = \frac{y_1(T,\rho) + a y_2(T,\rho)}{y_2(T,\rho) - a y_2(T,\rho)} \ , \ a := R(T)$$

$$f_j(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[y_1(T,\rho) + (-1)^j\, a y_2(T,\rho)\right]\ ,\ j = 1,2$$

$$\Delta(\rho) = \frac{1}{\sqrt{a}} y_1(T,\rho)$$

şeklinde tanımlansın. Açıktırki

$$r(\rho) = \frac{f_1(\rho)}{f_2(\rho)} \tag{3}$$

$$\Delta(\rho) = f_1(\rho) + f_2(\rho) \tag{4}$$

şeklindedir.

Burada $r(\rho)$ verildiğinde $R(x)$ in kurulması problemi çalışılmış,

2.1 de spektral karakteristiklerin özelliklerini çalışılmış,

2.4 de bir teklik teoremi ispatlanmıştır.

2.1 SPEKTRAL KARAKTERİSTİKLERİN ÖZELLİKLERİ

$$y_1(x,\rho)=\sqrt{R(x)}U(x,\rho)\ ,\ y_2(x,\rho)=\frac{1}{\sqrt{R(x)}}V(x,\rho) \tag{5}$$

dönüşümü ile (1) sistemi

$$\begin{aligned} U'+h(x)U &= i\rho V\ ,\ V'-h(x)V=i\rho V\ ,\ x\in[0,T] \\ U(0,\rho) &= 1\ ,\ V(0,\rho)=-1 \end{aligned} \tag{6}$$

sistemine dönüşür. Burada

$$h(x)=(2R(x))^{-1}R'(x) \tag{7}$$

dir. V yi yok ettikten sonra (6) sistemi

$$-U''+q(x)U=\lambda U\ ,\ \lambda=\rho^2 \tag{8}$$

denklemi ve

$$U(0,\rho)=1\ ,\ U'(0,\rho)=-i\rho \tag{9}$$

başlangıç koşulları elde edilir. Burada

$$q(x)=h^2(x)-h'(x) \tag{10}$$

dir. (2) , (7) , (10) dan

$$q(x)=\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j}{\left(x-\gamma_j\right)^2}+q_0(x)$$

şeklindedir. Burada $a_j:=\left(\frac{P_j}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ dür. Kabuledelimki $\frac{P_j}{2}\notin\mathbb{Z}$ ve

$$q_0(x)\prod_{j=1}^{N}\left|x-\gamma_j\right|^{1-|P_j|}\in L(0,T)$$

olsun. Budurumda r genişleme yansıma katsayısı, Δ karakteristik fonksiyonu ve f_j dönüşüm katsayıları

$$\begin{cases} r(\rho)=\dfrac{U(T,\rho)+V(T,\rho)}{U(T,\rho)-V(T,\rho)} \\ \Delta(\rho)=U(T,\rho) \\ f_j(\rho)=\dfrac{U(T,\rho)+(-1)^jV(T,\rho)}{2} \end{cases} \tag{11}$$

şeklini alır.

2.2 ÇÖZÜMLERİN ÖZELLİKLERİ

$$\begin{aligned} V_j &= \frac{|P_j|}{2} \ , \ \mu_{kj} = (-1)^k V_j + \frac{1}{2} \ , w_j = \left(\gamma_j, \gamma_{j+1}\right) \\ \gamma_0 &= 0 \ , \ \gamma_{N+1} := T \end{aligned}$$

olsun.

$$C_{kj} = \left(x - \gamma_j\right)^{\mu_{kj}} \sum_{m=0}^{\infty} C_{kmj} \left(\rho \left(x - \gamma_j\right)\right)^{2m} \ , k = 1, 2 \ , j = 1, 2, ..., N$$

tanımlansın. Burada

$$C_{10j} C_{20j} = \left(2V_j\right)^{-1}$$

$$C_{kmj} = (-1)^m C_{k0j} \left(\prod_{s=1}^{m} \left(2s + \mu_{kj}\right) \left(2s + \mu_{kj} - 1\right) - a_j \right)^{-1}$$

dir. Ayrıca

$$z^{\mu} = \exp\left(\mu \left(\ln |z| + i \arg z\right)\right) \quad , \quad \arg z \in [-\pi, \pi]$$

dir. $x \in W_j U W_{j-1}$ için $C_{kj}(x, \lambda)$ fonksiyonları

$$-y'' + \frac{a_j}{\left(x - \gamma_j\right)^2} y = \lambda y$$

denkleminin çözümüdür ve

$$\det \left[C_{kj}^{(m-1)}(x, \lambda) \right]_{k,m=1,2} \cong 1$$

dir. $S_{kj}(x, \lambda)$, $j = 1, 2, ..., N$, $k = 1, 2$ aşağıdaki integral denklemin çözümleri olsun.

$$S_{kj}(x, \lambda) = C_{kj}(x, \lambda) + \int_{\gamma_j}^{x} g_j(x, t, \lambda) \left(q(t) - \frac{a_j}{\left(t - \gamma_j\right)^2} S_{kj}(t, \lambda) \right) dt, \ x \in W_j U W_{j-1}$$

Burada

$$g_j(x, t, \lambda) = C_{1j}(t, \lambda) C_{2j}(x, \lambda) - C_{2j}(t, \lambda) C_{1j}(x, \lambda)$$

dir. $S_{kj}(x,\lambda)$ fonksiyonları $\dfrac{1}{2}$. mertebeden λ ya göre tamdır ve (8) denkleminin bir fundamental temel çözüm sistemidir. Ayrıca

$$\det\left[S_{kj}^{(m-1)}(x,\lambda)\right]_{k,m=1,2}\cong 1$$

$$\begin{aligned}\left|S_{kj}^{(m)}(x,\lambda)\right| &\leq C\left|\left(x-\gamma_j\right)^{\mu_{kj}-m}\right|\\ \left|S_{kj}(x,\lambda)-C_{kj}(x,\lambda)\right| &\leq C\left|\left(x-\gamma_j\right)^{2\mu_{kj}+\mu_{jk}}\right|\\ \left|\rho\left(x-\gamma_j\right)\right| &\leq 1\end{aligned}$$

dir. C sembolü x ve ρ ya bağlı olmayan pozitif sabitdir.

[18] de $S_{kj}(x,\lambda)$ nın asimptotik özellikleri ve Stokes çarpımları araştırılmıştır. Özelliklede $x\in W_jUWj-1$

$$(\rho,x)\in\Omega:=\left\{(\rho,x):\left|\rho\left(x-\gamma_j\right)\right|\geq 1\ ,\ j=1,2,...,N\right\}$$

için aşağıdaki asimptotik formül

$$\begin{aligned}&S_{kj}^{(m)}(x,\lambda)=\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}(-i\rho)^m\exp\left(-i\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)[1]_j+\\&\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}(i\rho)^m\exp\left(i\pi\mu_{kj}sign\left(\gamma_j-x\right)\right)\exp\left(i\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)[i]_j\end{aligned}\tag{12}$$

geçerlidir. Burada

$$[1]_j=1+O\left(\left(\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)^{-1}\right)\ ,\ \beta_{1j}\beta_{2j}=(-4i\sin\pi V_j)^{-1}$$

dir. Notedelimki fundamental temel çözüm sistemi $\{S_{kj}(x,\lambda)\}$ singüler noktalardaki uygun çözümler için kullanılmıştır. Özelliklede eğer $q_0(x)$ bir analitik fonksiyonsa $\operatorname{Im}x>0$ üst yarı düzleminde analitik devam ile uygun çözümler karşılık gelir.

$$S_{kj}(x,\lambda)=A_{kj}^{1s}(\lambda)S_{1s}(x,\lambda)+A_{kj}^{2s}(\lambda)S_{2s}(x,\lambda)\ ,\ x\in W_sUW_{s-1}\tag{13}$$

formülüyle $[0,T]$ aralığında $S_{kj}(x,\lambda)$ fonksiyonları genişletilsin.

Lemma-2.2.1: $x\in w_s$, $(S,x)\in\Omega$ için

$$\begin{aligned}&S_{kj}^{(m)}(x,\lambda)=\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}(-i\rho)^m\exp\left(-i\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)[1]_\gamma+\\&\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}(i\rho)^m\exp\left(-i\pi\mu_{kj}\right)\exp\left(i\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)[1]_\gamma\\&-\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}2i(i\rho)^m\sum_{p=j+1}^{s}\cos\pi V_p\exp\left(i\rho\left(x+\gamma_j-2\gamma_\rho\right)\right)[1]_\gamma\quad,\quad s\geq j\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&S_{kj}^{(m)}(x,\lambda)=\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}(-i\rho)^m\exp\left(-i\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)[1]_\gamma+\\&+\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}(i\rho)^m\exp\left(i\pi\mu_{kj}\right)\exp\left(i\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)[1]_\gamma\\&+\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}2i(i\rho)^m\sum_{p=s+1}^{j}\cos\pi V_p\exp\left(i\rho\left(x+\gamma_j-2\gamma_\rho\right)\right)[1]_\gamma\quad,\quad s<j\end{aligned}\tag{15}$$

$$[1]_\gamma=1+\sum_{j=1}^{N}O\left(\rho\left(x-\gamma_j\right)^{-1}\right)$$

dir.

İspat: Lemmayı tümevarımla ispatlayalım. $s\geq j$ olsun. $s=j$ için (12) aracılığı ile (14) sağlanır. $s>j$ ve $x\in W_{s-1}$ için;kabuledelim. (12) den $x\in W_{s-1}$ için;

$$\begin{aligned}&S_{kj}^{(m)}(x,\lambda)=\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}(-i\rho)^m\exp\left(-i\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)[1]_\gamma+\\&+\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}(i\rho)^m\exp\left(i\pi\mu_{kj}\right)\exp\left(i\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)[1]_\gamma\\&+\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}2i(i\rho)^m\sum_{p=j+1}^{s-1}\cos\pi V_p\exp\left(i\rho\left(x+\gamma_j-2\gamma_\rho\right)\right)[1]_\gamma\quad,\quad s<j\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}&S_{ks}^{(m)}(x,\lambda)=\beta_{ks}\rho^{-\mu_{ks}}(-i\rho)^m\exp\left(-i\rho\left(x-\gamma_s\right)\right)[1]_\gamma\\&+\beta_{ks}\rho^{-\mu_{ks}}(i\rho)^m\exp\left(i\pi\mu_{kj}\right)\exp\left(i\rho\left(x-\gamma_j\right)\right)[1]_\gamma\end{aligned}\tag{17}$$

dir. (16) ve (17) yi (13) de yerine yazılırsa $A_{kj}^{rs}(\lambda)$ ya göre aşağıdaki cebirsel sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}&A_{kj}^{1s}(\lambda)\beta_{1s}\rho^{-\mu_{1s}}[1]+A_{kj}^{2s}(\lambda)\beta_{2s}\rho^{-\mu_{2s}}[1]=\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}\exp\left(i\rho\left(\gamma_j-\gamma_s\right)\right)\\&A_{kj}^{1s}(\lambda)\beta_{1s}\rho^{-\mu_{1s}}\exp\left(i\pi\mu_{1s}\right)[1]+A_{kj}^{2s}(\lambda)\beta_{2s}\rho^{-\mu_{2s}}\exp\left(i\pi\mu_{2s}\right)[1]=\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}B_{kjs}(\lambda)\end{aligned}\tag{18}$$

Burada $[1]=1+O\left(\rho^{-1}\right)$ dir ve

$$\begin{aligned}&\beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}B_{kjs}(\lambda)=\exp\left(-i\pi\mu_{kj}\right)\exp\left(i\rho\left(\gamma_s-\gamma_j\right)\right)\\&-2i\sum_{\rho=j+1}^{s-1}\cos\pi V_p\exp\left(i\rho\left(\gamma_s+\gamma_j-2\gamma_\rho\right)\right)[1]\end{aligned}$$

dir

$$\mu_{1s}+\mu_{2s}=1,\beta_{1s}\beta_{2s}=\left(-4i\sin\pi V_s\right)^{-1},\exp\left(i\pi\mu_{1s}\right)-\exp\left(i\pi\mu_{2s}\right)=2\sin\pi V_s$$

olduğundan (18) in determinantı $(2i\rho)^{-1}[1]$ e eşittir. (18) çözülürse

$$
\begin{aligned}
A_{kj}^{1s}(\lambda) &= 2i\rho^{1-\mu_{ki}-\mu_{2s}}\beta_{kj}\beta_{2s}\left(\exp\left(i\pi\mu_{2s}\exp\left(i\rho\left(\gamma_j-\gamma_s\right)\right)\right)\right)[1]\,\beta_{kjs}(\lambda)[1] \\
A_{kj}^{2s}(\lambda) &= 2i\rho^{1-\mu_{kj}-\mu_{1s}}\beta_{kj}\beta_{1s}\left(-\exp\left(i\pi\mu_{1s}\right)\exp\left(\gamma_j-\gamma_s\right)\right)[1]+\beta_{kjs}(\lambda)[1]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

elde edilir. $x\in W_s$ olsun. O halde (12) den

$$
\begin{aligned}
S_{kj}^{(m)}(x,\lambda) &= \beta_{ks}\rho^{-\mu_{ks}}(-i\rho)^m\Big(\exp\left(-i\rho\left(x-\gamma_s\right)\right)[1]_\gamma \\
&\quad +(i\rho)^m\exp\left(-i\pi\mu_{ks}\right)\exp\left(i\rho\left(x-\gamma_s\right)\right)[1]_\gamma\Big)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

dır. (19) ve (20) yi (13) de yerine yazılırsa (14) elde edilir.

2.3 ÇÖZÜMLERİN DAVRANIŞI

$$\varphi_k(x,\lambda) = (-1)^{k-1}\left(S_{2j}^{(2-k)}(0,\lambda)\, S_{1j}(x,\lambda) - S_{1j}^{(2-k)}(0,\lambda)\, S_{2j}(x,\lambda)\right), k = 1,2$$

tanımlansın. $\varphi_k(x,\lambda)$ fonksiyonları (8) in çözümleridir ve

$$\varphi_k^{(m-1)}(x,\lambda) = \delta_{km} \ , \ k,m = 1,2$$

(δ_{km} kronecker deltadır.) Açıktırki

$$\langle \varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda)\rangle \cong 1 \tag{21}$$

dir. Burada $\langle y,z\rangle = yz' - zy'$ dür. (14) ve (15) kullanılarak $x \in W_s$, $(\rho, x) \in \Omega$ için

$$\begin{gathered}\varphi_k^{(m-1)}(x,\lambda) = \frac{1}{2}(i\rho)^{m-k}\left(\exp(i\rho x)[1]_\gamma + (-1)^{m-k}\exp(-i\rho x)[1]_\gamma\right) + \\ +\frac{1}{2}(i\rho)^{m-k}\left((-1)^k 2i\sum_{j=1}^{s}\cos\pi V_j \exp\left(i\rho\left(x-2\gamma_j\right)\right)[1]_\gamma\right) \quad , \quad |\rho| \to \infty \ , \ k,m = 1,2\end{gathered} \tag{22}$$

dir. Benzer şekilde

$$\psi_k(x,\lambda) = (-1)^{k-1}\left(S_{2j}^{(2-k)}(T,\lambda)\, S_{1j}(x,\lambda) - S_{1j}^{(2-k)}(T,\lambda)\, S_{2j}(x,\lambda)\right) \ , \ k = 1,2$$

fonksiyonları (8) i ve $\psi_k^{(m-1)}(T,\lambda) = \delta_{k,m}$, $k,m = 1,2$ koşullarını sağlar. Ayrıca

$$\langle \psi_1(x,\lambda), \psi_2(x,\lambda)\rangle \approxeq 1 \tag{23}$$

dir ve $x \in W_s$, $(\rho, x) \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}\psi_k^{(m-1)}(x,\lambda) &= \frac{1}{2}(i\rho)^{m-k}\left((-1)^{m-k}\exp(i\rho(T-x))[1]_\gamma + \exp(-i\rho(T-x))[1]_\gamma\right) + \\ &+\frac{1}{2}(i\rho)^{m-k}\left((-1)^{k-1} 2i\sum_{j=s+1}^{N}\cos\pi V_j \exp(i\rho(x+T-2\gamma_i))[1]_\gamma\right)\end{aligned} \tag{24}$$

$|\rho| \to \infty$, $k,m = 1,2$ dir. (9) dan dolayı

$$U(x,\rho) = \varphi_1(x,\lambda) - i\rho\varphi_2(x,\lambda) \tag{25}$$

olur. $|\rho| \to \infty$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$ için $(25), (22)$ ve (11) den

$$U^{(m)}(x,\rho) = (-i\rho)^m \exp(-i\rho x)[1]_\gamma - 2i(i\rho)^m \sum_{j=1}^{s} \cos \pi V_j \exp\left(i\rho\left(x - 2\gamma_j\right)\right)[1]_\gamma \tag{26}$$

$x \in W_s$, $(\rho, x) \in \Omega$, $m = 0, 1$

$$\Delta(\rho) = \exp(i\rho T)[1] - 2i \sum_{j=1}^{N} \cos \pi V_j \exp(i\rho)\left(T - 2\gamma_j\right)[1]_\gamma \tag{27}$$

dir.

Lemma-2.3.1: Aşağıdaki

$$|\Delta(\rho)| + |\Delta(-\rho)| \neq 0 \tag{28}$$

bağıntısı sağlanır.

İspat: $\rho = 0$ için (5) den

$$R(x)|U(x,0)|^2 = |y_1(x,0)|^2 \tag{29}$$

dir. Diğer taraftan $\rho = 0$ için (1) kullanılarak $y_1'(x,0) = 0$ elde edilir ve sonuç olarak

$$|y_1(x,0)|^2 = A_j \ , \ x \in W_j \ , \ j = 0, 1, ..., N \tag{30}$$

dir. Burada A_j sabittir ve $A_0 = 1$ dir. Şimdi gösterelim ki $\forall j = 0, 1, ..., N$ için $A_j \neq 0$ dır. Aksine olarak kabuledelim ki $A_s = 0$ ve $A_j \neq 0$, $j = 0, 1, ..., s-1$ dir. Fundamental temel çözüm sistemi kullanılarak $\{S_{ks}(x,\lambda)\}$

$$U(x,0) = \alpha_{1s} S_{1s}(x,\lambda) + \alpha_{2s} S_{2s}(x,0) \ , \ x \in W_s \cup W_{s-1}$$

yazabilir.

$A_s = 0$ olduğundan (29) dan ve (30) dan $x \in W_s$ için $U(x,0) = 0$ dır ve sonuç olarak $\alpha_{1s} = \alpha_{2s} = 0$ dır. Dolayısıyla $x \in W_{s-1}$ için $U(x,0) = 0$ dır. Yani $A_{s-1} = 0$ dır. Bu ise kabul ile çelişir. $A_0 \neq 0$ olduğundan $\forall j = 0, 1, ..., N$ için $A_j \neq 0$ olduğu elde edilir. Özelliklede bu

$$\Delta(0) \neq 0 \tag{31}$$

olduğunu verir. Ayrıca (21) ve (25) den

$$\langle U(x,\rho), U(x,-\rho)\rangle \equiv 2i\rho$$

dur. $\rho \neq 0$ için (28) geçerlidir. Bu (31) ile birlikte $\forall\rho$ için (28) i verir.

$$\Pi_+ = \{\rho : \operatorname{Im}\rho > 0\} \ , \ w(\rho) = \Delta(\rho)\exp(i\rho T) \tag{33}$$

tanımlansın. $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$, $\bar{\Pi}_+$ da $w(\rho)$ nun sıfırları olsun. Eğer R singülaritelere ve dönüm noktalarına sahip değilse $w(\rho)$, $\bar{\Pi}_+$ da hiçbir sıfıra sahip değildir. Dolayısıyla genel durumda $w(\rho)$ sonlu veya $\bar{\Pi}_+$ da sayılabilir sıfırların kümesine sahiptir.

(27) ve (33) kullanılarak iyi bilinen metodlar aracılığı ile (ρ_n) in aşağıdaki özellikleri elde edilir.

1- $\operatorname{Im}\rho \geq h$ için $|w(\rho)| \geq C_n$ olacak şekilde $h > 0$, $C_h > 0$ vardır. Dolayısıyla $\bar{\Pi}_+$ da (w_ρ) nun sıfırları

$$\Pi_h = \{\rho : 0 \leq \operatorname{Im}\rho \leq h\}$$

şeridi üzerinde bulunur.

2- $R_a = \{\rho : \operatorname{Re}\rho \in [a, a+1], \operatorname{Im}\rho \in [0,h]\}$ dikdörtgeni üzerinde $w(\rho)$ nun N_a sıfırları a ya göre sınırlıdır.

3- $G_\delta = \{\rho : |\rho - \rho_n| \geq \delta\} \cap \bar{\Pi}_+$ tanımlansın. Ohalde

$$|w(\rho)| \geq C_s \ , \ \rho \in G_\delta \tag{34}$$

dır.

4- $R_n \to \infty$ sayıları vardır öyleki yeterince küçük $\delta > 0$ için $|\rho| = R_n$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$, $\forall n$ için G_δ bulunur.

Basitlik için $w(\rho)$ nun $\bar{\Pi}_+$ daki tüm sıfırlarının basit olduğu durum düşünülmüştür.

2.4.TEKLİK TEOREMİ

2.4.1 Yarı Eksende Periyodik Problemin Çözümü

$$P(x) = \begin{cases} q(T-x), & 0 \leq x \leq T \\ 0 & x > T \end{cases}$$

tanımlansın ve yarı düzlemde

$$-y'' + p(x)y = \lambda y \ , \ x > 0 \ ,\lambda = \rho^2 \tag{35}$$

denklemini düşünelim. Açıktırki

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{j1}}{(x - x_j)^2} + P_0(x)$$

$$P_0(x) = \prod_{j=1}^{N} |x - x_j|^{1-2V_{j1}} \in L(0,T)$$

dir. Burada

$$x_j = T - \gamma_{N-j+1} \ , \ a_{j1} = a_{N-j+1} \ , \ v_{j1} = v_{N-j+1}$$

dir.

$$e(x,\rho) = \begin{cases} U(T-x,\rho)\exp(i\rho T), & 0 \leq x \leq T \\ \exp(i\rho x), & x > T \end{cases}$$

formülü ile $e(x,\rho)$ fonksiyonunu tanımlansın. $e(x\,\rho)$ fonksiyonu (35) denkleminin bir çözümüdür ve $e(0,\rho) = w(\rho)$ dur.

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{e(x,\rho)}{w(\rho)}, \ M(\lambda) = \frac{e'(0,\rho)}{w(\rho)} \tag{36}$$

tanımlansın. $M(\lambda)$ fonksiyonuna Weyl fonksiyonu denir.

$$C(x,\lambda) = \psi_1(T-x,\lambda) \ , \ S(x,\lambda) = -\psi_2(T-x,\lambda)$$

alalım. $C(x,\lambda)$ ve $S(x,\lambda)$ (35) denklemini sağlar ve

$$C(0,\lambda) = S'(0,\lambda) = 1$$

$$S(x,\lambda) = C'(0,\lambda) = 0$$

dir. (23) den dolayı

$$\langle C(x,\lambda), S(x,\lambda)\rangle \cong 1$$

dir. $\Phi(0,\lambda)=1$, $\Phi'(0,\lambda)=M(\lambda)$ olduğundan

$$\Phi(x,\lambda)=C(x,\lambda)+M(\lambda)S(x,\lambda) \tag{37}$$

$$\langle \Phi(x,\lambda), S(x,\lambda)\rangle \cong 1 \tag{38}$$

dir. $\varepsilon>0$ olmak üzere $\Omega_\varepsilon=\{x : x\in[0,T], |x-x_j|\geq\varepsilon, j=1,2,...,N\}$ tanımlansın. $|\rho|\to\infty$ için $(24),(26)$ ve (27) den $\rho\in\bar{\Pi}_+$, $x\in\Omega_\varepsilon\cap w_s$, $m=0,1$ dir.

$$\begin{aligned} e^{(m)}(x,\rho) &= (i\rho)^m \exp(i\rho x)[1]- \\ &\quad -2i(-i\rho)^m\sum_{j=s+1}^{N}\cos\pi v_j \exp(i\rho(2x_j-x))[1] \end{aligned} \tag{39}$$

$$w(\rho)=[1]-2i\sum_{j=1}^{N}\cos\pi v_{j1}\exp(2i\rho x_j)[1] \tag{40}$$

$$\begin{aligned} S^{(m)}(x,\lambda) &= \frac{1}{2}(i\rho)^{m-1}\left(\exp(i\rho x)[1]-(-1)^m\exp(-i\rho x)[1]\right)+ \\ &+\frac{1}{2}(i\rho)^{m-1}\left(2i(-1)^m\sum_{j=1}^{s}\cos\pi v_{j1}\exp(i\rho)(2x_j-x)[1]\right) \end{aligned} \tag{41}$$

dir.

$$\Gamma=\{\lambda : \lambda\geq 0\}$$

ve

$$\Lambda=\{\lambda_k\}_{k\geq 1} \ , \ \lambda_k=\rho_k^2$$

$\operatorname{Im}\rho_k\geq 0$ tanımlansın. Burada Π ve $\bar{\Pi}$ kök fonksiynunun Riemann yüzeyinin alt kümeleri gibi düşünülmelidir.

Teorem-2.4.1: $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonu Π/Λ da analitiktir. $\lambda=\lambda_k$ noktalarında $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonları basit kutuplara sahiptir ve

$$\operatorname*{Re}_{\lambda=\lambda_k} sM(\lambda)=\frac{4i\rho_k^2}{\dot{w}(\rho_k)\,w(-\rho_k)} \tag{42}$$

dır. Burada $\dot{w}(\rho) = \dfrac{d}{d\rho} w(\rho)$ dur. $\lambda \in \Pi \diagup \Lambda$ için

$$M_{\pm}(\lambda) = \lim M(\lambda \pm iz) \ , \ z \to 0 \ , \ \operatorname{Re} z > 0$$

sonlu limitleri vardır ve

$$V(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\left(M^{+}(\lambda) - M^{-}(\lambda)\right) = \frac{\rho}{\pi w(\rho)\, w(-\rho)} \ , \ \rho > 0, \lambda = \rho^2 \qquad (43)$$

dir. Ayrıca

$$|M(\lambda)| \le C_\delta |\rho| \ , \ \rho \in G_\delta \ , \ |V(\lambda)| \le C_\delta |\rho| \, , \ \rho \in G_\delta \cap \{\rho : \rho > 0\} \qquad (44)$$

$$M(\lambda) = i\rho[1] \, , \ |\rho| \to \infty \ , \ \arg \rho \in [\varepsilon_0, \pi - \varepsilon_0] \, , \ \varepsilon_0 > 0 \qquad (45)$$

dir.

İspat: Π nin λ düzlemindeki tanım kümesi, ρ düzleminde Π_+ nin tanim kümesine karşılık gelir. (36) dan dolayı $M(\lambda)$, $\Pi \diagup \Lambda$ da analitik, $\bar{\Pi} \diagup \Lambda$ da sürekli ve

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda) &= e'(0,\rho_k)\left(\left(\frac{d}{d\lambda} w(\rho)\right)_{\rho=\rho_k}\right)^{-1} \\ &= \frac{2\rho_k e'(0,\rho_k)}{\dot{w}(\rho_k)} \end{aligned} \qquad (46)$$

$(32), (36), (37)$ ve (38) den

$$\langle e(x,\rho), e(x,-\rho)\rangle \equiv -2i\rho \ , \ \langle e(x,\rho), S(x,\lambda)\rangle \equiv w(\rho) \qquad (47)$$

dir. Bu

$$e(x,\rho_k) = e'(0,\rho_k)\, S(x,\lambda_k)$$

$$w(-\rho_k)\, e'(0,\rho_k) = 2i\rho_k$$

sağlar. (46) ile birlikte bu (42) yi verir.

Ayrıca (36) ve (47) kullanılarak $\rho > 0$ için

$$M^{+}(\lambda) - M^{-}(\lambda) = \frac{e'(0,-\rho)}{w(-\rho)} - \frac{e'(0,\rho)}{w(-\rho)} = \frac{2i\rho}{w(\rho)\, w(-\rho)}$$

hesaplanır. Yani (43) geçerlidir. Sonunda $(34),(36),(39),(40)$ ve (43) den (44) ve (45) hesaplanır.

$\beta_k = -4i\rho_k^2 \left(\dot{w}(\rho_k) w(-\rho_k)\right)^{-1}$ tanımlansın. Eğer $\rho_k \in \Pi_+$ ve $\beta_k = -2i\rho_k^2 \left(\dot{w}(\rho_k) w(\rho)\right)^{-1}$ ise $\operatorname{Im}\rho_k = 0$ dır.

$$S = \left(V(\lambda), \{\rho_k, \beta_k\}\right)$$

kümesine spektral veri denir.

2.4.2 Farklı Konumlarda Ters Problemler

R ve $\tilde{R}$ dalga dirençlerini düşünelim. Eğer α , R ile alakalı bir elemansa , $\tilde{\alpha}$ nın da $\tilde{R}$ ile alakalı bir eleman olduğu kabul edilir ve $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$ olsun.

Teorem-2.4.2: Eğer $r = \tilde{r}$ ise $R = \tilde{R}$ dır. Böylece genlik yansıma katsayısı dalga direnci ile tek olarak belirlenir.

İspat: (6) ve (11) den dolayı

$$f_j(\rho) = \frac{U(T,\rho)}{2} + \frac{(-1)^j}{2i\rho}\left(U'(T,\rho) + h(T)\,U(T,\rho)\right) \ , \ j = 1,2$$

dir. (32) ile birlikte bu

$$f_1(\rho)\,f_1(-\rho) - f_2(\rho)\,f_2(-\rho) = 1 \tag{48}$$

eşitliğini sağlar. (48) den $f_1(\rho)$ ve $f_2(\rho)$ fonksiyonları hiçbir sıfıra sahip değildir. Dolayısıyla (4) den dolayı $\Delta(\rho)$ ve $f_1(\rho)$ fonksiyonları sıfıra sahip değildir. Ayrıca $(3),(4)$ ve (33) den

$$r(\rho) + 1 = \frac{w(\rho)\exp(-i\rho T)}{f_1(\rho)}$$

alınır. $w(\rho)$ fonksiyonu ρ ya göre tam, exponansiyel tipli ve (40) a göre

$$w(\rho) = 1 + O\left(\rho^{-1}\right) \ , \ |\rho| \to \infty \ , \ \arg\rho \in [\varepsilon_0, \pi - \varepsilon_0] \ , \ \varepsilon_0 > 0$$

dır. $\{\rho_k\}$, $r(\rho) + 1$ in sıfırlarının dizisi olsun yani $w(\rho)$ nun sıfırları olsun. O halde

$$w(\rho) = a\exp(b_\rho)\,G(\rho)$$

dur. Burada

$$G(\rho) = \prod_k \left(1 - \frac{\rho}{\rho_k}\right)\exp\frac{\rho}{\rho_k}$$

$$b = -\lim_{|\rho|\to\infty}\frac{G(\rho)}{\rho}$$

$$a = \left(\lim_{|\rho|\to\infty}\exp(b_\rho)\,G(\rho)\right)^{-1} \ , \arg\rho \in [\varepsilon_0, \pi - \varepsilon_0]$$

dır. Böylece genlik yansıma katsayısı $w(\rho)$ fonksiyonu ile tek olarak belirlenir. Diğer taraftan Teorem-2.4.2 nin hipotezleri altında

$$w(\rho) = \tilde{w}(\rho) \tag{49}$$

dur. $(42), (45)$ ve (49) kullanılarak $\hat{M}(\lambda)$ fonksiyonunun λ ya göre tam fonksiyon olduğu elde edilir.

Şimdi $P(x,\lambda) = [P_{kj}(x,\lambda)]_{k,j=1,2}$ matrisini

$$P(x,\lambda)\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}(x,\lambda) & \tilde{S}(x,\lambda) \\ \tilde{\Phi}'(x,\lambda) & \tilde{S}'(x,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(x,\lambda) & S(x,\lambda) \\ \Phi'(x,\lambda) & S'(x,\lambda) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. (38) den dolayı

$$P_{jk}(x,\lambda) = (-1)^{k-1}\left(\Phi^{(j-1)}(x,\lambda)\,\tilde{S}^{(2-k)}(x,\lambda) - S^{(j-1)}(x,\lambda)\,\tilde{\Phi}^{(2-k)}(x,\lambda)\right) \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \Phi(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\,\tilde{\Phi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\,\tilde{\Phi}'(x,\lambda) \\ S(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\,\tilde{S}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\,\tilde{S}'(x,\lambda) \end{aligned} \tag{51}$$

dır. $\varepsilon > 0$ olsun. $x \in \Omega_\varepsilon$, $\rho \in \bar{\Pi}_+$, $m; = 0,1$ için $(34), (36), (39), (41)$ den

$$\begin{aligned} &\left|S^{(m)}(x,\lambda)\right| \le C\,(|\rho|+1)^{m-1}\exp(\tau x) \\ &\left|S^{(m)}(x,\lambda) - \tilde{S}^{(m)}(x,\lambda)\right| \le C\,(|\rho|+1)^{m-1}\exp(\tau x) \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} &\left|\Phi^{(m)}(x,\lambda)\right| \le C_\delta\,(|\rho|+1)^{m}\exp(-\tau x)\ \ , \rho \in C_\delta \\ &\left|\Phi^{(m)}(x,\lambda) - \tilde{\Phi}^{(m)}(x,\lambda)\right| \le C_\delta\,(|\rho|+1)^{m-1}\exp(-\tau x)\ \ , \rho \in G_\delta^+ = G_\delta \cap \tilde{G}_\delta \end{aligned} \tag{53}$$

$(50), (52), (53)$ ve (38) kullanılarak $x \in \Omega_\varepsilon, \rho \in G_\delta^+$ için

$$\begin{aligned} &|P_{jk}(x,\lambda) - \delta_{jk}| \le \frac{C_\delta}{|\rho|+1}, j \le k \\ &|P_{21}(x,\lambda)| \le C_\delta \end{aligned} \tag{54}$$

elde edilir. Ayrıca (37) ve (50) ye göre

$$P_{11}(x,\lambda) = \left(C(x,\lambda)\,\tilde{S}'(x,\lambda) - S(x,\lambda)\,\tilde{C}'(x,\lambda)\right) + \hat{M}(\lambda)\,S(x,\lambda)\,\tilde{S}'(x,\lambda)$$

$$P_{12}(x,\lambda) = \left(S(x,\lambda)\,\tilde{C}(x,\lambda) - C(x,\lambda)\,\tilde{S}(x,\lambda)\right) + \hat{M}(\lambda)\,S(x,\lambda)\,\tilde{S}(x,\lambda)$$

dır. $\hat{M}(\lambda)$, λ ya göre tam olduğundan herbir sabitleştirilmiş $x = x_j$ için $P_{1k}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının λ ya göre tam olduğu elde edilir. (54) ile birlikte bu $P_{11}(x,\lambda) = 1, P_{12}(x,\lambda) = 0$ olduğunu verir. Bunu (51) de yerine yazılırsa $\forall x$ ve $\forall \lambda$ için

$$\Phi(x,\lambda) = \tilde{\Phi}(x,\lambda)$$

$$S(x,\lambda) = \tilde{S}(x,\lambda)$$

elde edilir. Sonuç olarak $P(x) = \tilde{P}(x)$ yani $q(x) = \tilde{q}(x)$ dir. Özelliklede bu $U(x,\rho) = \tilde{U}(x,\rho)$ olduğunu verir. $(2), (29)$ ve (30) kullanılarak

$$R_0(x) = C_j \tilde{R}_0(x) \ \ , x \in w_j \ ,j = 1,2,...,N$$

olduğu elde edilir. $C_0 = 1$ ve $R_0, \tilde{R}_0$ sürekli pozitif fonksiyonlar olduğundan $C_j = 1, j = 1,2,...,N$ ve $R_0 = \tilde{R}_0$, $R = \tilde{R}$ dır.

3.BÖLÜM

ÇEVİRME OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ

3.1 İntegral Denklemin Oluşturulması

$$\begin{cases} y_1'(x) = i\rho K(x)\, y_2(x) \\ y_2'(x) = i\rho \dfrac{1}{K(x)} y_1(x) \end{cases}, \quad \lambda = \rho^2\ ,\ 0 < x < \pi$$
$$\begin{cases} y_2(0) - h y_1(0) = 0 \\ y_2(\pi) + H y_1(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır-değer problemini ele alalım. Burada $K(x) \in L_2[0,\pi]$ ve $\forall\ x \in [0,\pi]$ için $K(x) \neq 0$ dır. İlk önce

$$y_1(x,\rho) = \sqrt{K(x)}U(x,\rho) \text{ ve } y_2(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{K(x)}}V(x,\rho)$$

dönüşümü yapalım.

$$y_1(x,\rho) = \sqrt{K(x)}U(x,\rho) \Rightarrow y_1'(x,\rho) = \frac{K'(x)}{2\sqrt{K(x)}}U(x,\rho) + \sqrt{K(x)}U'(x,\rho)$$

ve

$$y_2(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{K(x)}}V(x,\rho) \Rightarrow y_2'(x,\rho) = \frac{\dfrac{-K'(x)}{2\sqrt{K(x)}}}{K(x)}V(x,\rho) + \frac{1}{\sqrt{K(x)}}V'(x,\rho)$$

ifadelerini denklemde yerine yazalım.

$$y_1'(x) = i\rho K(x)\, y_2(x)$$

ise

$$\frac{K'(x)}{2\sqrt{K(x)}}U(x,\rho) + \sqrt{K(x)}U'(x,\rho) = i\rho K(x)\, V(x,\rho)$$

dir. Buradan

$$U'(x,\rho) + \frac{K'(x)}{2K(x)}U(x,\rho) = i\rho V(x,\rho)$$

ise

$$U'(x,\rho)+m(x)\,U(x,\rho)=i\rho V(x,\rho)\ \ ,\ m(x)=\frac{K'(x)}{2K(x)}$$

şeklinde yazılır.

$$y_2'(x)=i\rho\frac{1}{K(x)}y_1(x)$$

ise

$$\frac{\frac{-K'(x)}{2\sqrt{K(x)}}}{K(x)}V(x,\rho)+\frac{1}{\sqrt{K(x)}}V'(x,\rho)=i\rho\frac{1}{K(x)}\sqrt{K(x)}U(x,\rho)$$

dır. Dolayısıyla

$$V'(x,\rho)-\frac{K'(x)}{2K(x)}V(x,\rho)=i\rho U(x,\rho)$$

olur. Buradanda

$$V'(x,\rho)-m(x)\,V(x,\rho)=i\rho U(x,\rho)$$

şeklinde yazlır. Dolayısıyla

$$\begin{cases} U'(x,\rho)+m(x)\,U(x,\rho)=i\rho V(x,\rho) \\ V'(x,\rho)-m(x)\,V(x,\rho)=i\rho U(x,\rho) \end{cases}$$

denklem sistemini elde edilir.

$$U'(x,\rho)+m(x)\,U(x,\rho)=i\rho V(x,\rho)$$

ise

$$U''(x,\rho)+m'(x)\,U(x,\rho)+m(x)\,U'(x,\rho)=i\rho V(x,\rho)$$

dır. Buradan

$$U''(x,\rho)+m'(x)\,U(x,\rho)+m(x)\,U'(x,\rho)=i\rho m(x)\,V(x,\rho)-\rho^2U(x,\rho)$$

ise

$$U''(x,\rho)+m'(x)\,U(x,\rho)+m(x)\,U'(x,\rho)=m(x)\,U'(x,\rho)+m^2(x)\,U(x,\rho)-\rho^2U(x,\rho)$$

ve

$$U''(x,\rho)+\left[m'(x)-m^2(x)\right]U(x,\rho)=-\rho^2U(x,\rho)$$

dır. Ohalde

$$-U''(x,\rho)+q(x)\,U(x,\rho)=\lambda U(x,\rho)$$

elde edilir. Burada $q(x)=m^2(x)-m'(x) \quad , \quad \lambda=\rho^2, q(x)\in L_2[0,\pi]$ dir. Böylece Sturm-Liouville denklemi elde edilmiş olur.

Şimdi

$$-U''(x,\rho)+q(x)\,U(x,\rho)=\lambda U(x,\rho)$$

$q(x)=m^2(x)-m'(x) \quad , \quad \lambda=\rho^2$ denkleminin çözümünü bulalım. İlk önce $q(x)=0$ için homojen kısmın çözümünü bulalım.

$$-U''(x,\rho)=\lambda U(x,\rho)\ \ ,\ \ \lambda=\rho^2$$

denkleminin genel çözümü

$$U(x,\rho)=c_1e^{i\rho x}+c_2e^{-i\rho x}$$

şeklindedir. Şimdi homojen olmayan kısmı çözmek için sabitlerin değişimi yöntemini kullanalım.

$$U(x,\rho)=c_1(x)\,e^{i\rho x}+c_2(x)\,e^{-i\rho x}$$

ise

$$U'(x,\rho)=i\rho c_1(x)\,e^{i\rho x}-i\rho c_2(x)\,e^{-i\rho x}+c_1'(x)\,e^{i\rho x}+c_2'(x)\,e^{-i\rho x}$$

olmak üzere

$$c_1'(x)\,e^{i\rho x}+c_2'(x)\,e^{-i\rho x}=0 \qquad (*)$$

dır. Buradan

$$U'(x,\rho) = i\rho c_1(x)\, e^{i\rho x} - i\rho c_2(x)\, e^{-i\rho x}$$

ise

$$U''(x,\rho) = -\rho^2 c_1(x)\, e^{i\rho x} - \rho^2 c_2(x)\, e^{-i\rho x} + i\rho c_1'(x)\, e^{i\rho x} - i\rho c_2'(x)\, e^{-i\rho x}$$

olur. Elde edilen bu ifadeleri denklemde yerine yazalım.

$$-U''(x,\rho) + q(x)\, U(x,\rho) = \lambda U(x,\rho)$$

ise

$$\begin{aligned} &\rho^2 c_1(x)\, e^{i\rho x} + \rho^2 c_2(x)\, e^{-i\rho x} - i\rho c_1'(x)\, e^{i\rho x} + i\rho c_2'(x)\, e^{-i\rho x} \\ &+q(x)\, U(x,\rho) = \rho^2 c_1(x)\, e^{i\rho x} + \rho^2 c_2(x)\, e^{-i\rho x} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$-i\rho c_1'(x)\, e^{i\rho x} + i\rho c_2'(x)\, e^{-i\rho x} = -q(x)\, U(x,\rho) \qquad (**)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^{i\rho x} + c_2'(x)\, e^{-i\rho x} = 0 \\ -i\rho c_1'(x)\, e^{i\rho x} + i\rho c_2'(x)\, e^{-i\rho x} = -q(x)\, U(x,\rho) \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. O halde

$$2i\rho e^{-i\rho x} c_2'(x) = -q(x)\, U(x,\rho)$$

ise

$$c_2'(x) = \frac{-1}{2i\rho} q(x)\, e^{i\rho x} U(x,\rho)$$

olur. Buradan da

$$c_2(x) = \frac{-1}{2i\rho} \int_0^x q(t)\, U(t,\rho)\, e^{i\rho t} dt + c_2^*$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$-2i\rho e^{i\rho x}c_1'(x) = -q(x)U(x,\rho)$$

ise

$$c_1'(x) = \frac{1}{2i\rho}q(x)e^{-i\rho x}U(x,\rho)$$

olmak üzere

$$c_1(x) = \frac{1}{2i\rho}\int_0^x q(t)U(t,\rho)e^{i\rho t}dt + c_1^*$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} U(x,\rho) &= c_1^* e^{i\rho x} + c_2^* e^{-i\rho x} + \frac{1}{2i\rho}\int_0^x q(t)U(t,\rho)e^{-i\rho(t-x)}dt - \\ &- \frac{1}{2i\rho}\int_0^x q(t)U(t,\rho)e^{i\rho(t-x)} \end{aligned}$$

ise

$$U(x,\rho) = c_1^* e^{i\rho x} + c_2^* e^{-i\rho x} + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q(t)U(t,\rho)dt$$

elde edilir.

Şimdi sınır koşulları yardımıyla c_1^* ve c_2^* ı hesaplayalım.

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0$$

ise

$$\frac{1}{\sqrt{K(0)}}V(0,\rho) - h\sqrt{K(0)}U(0,\rho) = 0$$

olur. Buradan da

$$V(0,\rho) - hK(0)U(0,\rho) = 0$$

olur. Öteyandan

$$y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0$$

ise

$$\frac{1}{\sqrt{K(\pi)}} V(\pi,\rho) + H\sqrt{K(\pi)} U(\pi,\rho) = 0$$

olur. Buradanda

$$V(\pi,\rho) + HK(\pi)\, U(\pi,\rho) = 0$$

sınır koşullarını elde edilir. Ohalde

$$V(0,\rho) - hK(0)\, U(0,\rho) = 0$$

olduğundan

$$U(0,\rho) = 1$$

ve

$$V(0,\rho) = hK(0)$$

başlangıç koşulları elde edilir. Dolayısıyla

$$U'(x,\rho) + \frac{K'(x)}{2K(x)} U(x,\rho) = i\rho V(x,\rho)$$

ise $V(0,\rho) = hK(0)$ ve $U(0,\rho) = 1$ olmak üzere

$$U'(0,\rho) + \frac{K'(0)}{2K(0)} U(0,\rho) = i\rho V(0,\rho)$$

ise

$$U'(0,\rho) = i\rho hK(0) - \frac{K'(0)}{K(0)}$$

olur. Ohalde

$$\begin{cases} U(x,\rho) = c_1^* e^{i\rho x} + c_2^* e^{-i\rho x} + \int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q(t)\, U(t,\rho)\, dt \\ U(0,\rho) = 1 \ , \ U'(0,\rho) = i\rho hK(0) - \dfrac{K'(0)}{K(0)} \end{cases}$$

elde edilir. Buradan

$$U(0,\rho)=1\Rightarrow c_1^*+c_2^*=1$$

olur ve

$$U'(0,\rho)=i\rho hK(0)-\frac{K'(0)}{K(0)}$$

ise

$$i\rho c_1^*-i\rho c_2^*=i\rho hK(0)-\frac{K'(0)}{K(0)}$$

dır. Ohalde

$$\begin{aligned} c_1^*+c_2^* &= 1 \\ c_1^*-c_2^* &= hK(0)-\frac{K'(0)}{2i\rho K(0)} \end{aligned}$$

denklem sistemini elde edilir. Buradan

$$c_1^*=\frac{1}{2}+h\frac{K(0)}{2}-\frac{K'(0)}{4i\rho K(0)}$$

ve

$$c_2^*=\frac{1}{2}-h\frac{K(0)}{2}+\frac{K'(0)}{4i\rho K(0)}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$U(x,\rho)=\left(\frac{1}{2}+h\frac{K(0)}{2}-\frac{K'(0)}{4i\rho K(0)}\right)e^{i\rho x}+\left(\frac{1}{2}-h\frac{K(0)}{2}+\frac{K'(0)}{4i\rho K(0)}\right)e^{-i\rho x}$$
$$+\int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q(t)U(t,\rho)\,dt$$

olur. Burada

$$A=\frac{1}{2}+h\frac{K(0)}{2}-\frac{K'(0)}{4i\rho K(0)}$$

ve

$$B=\frac{1}{2}-h\frac{K(0)}{2}+\frac{K'(0)}{4i\rho K(0)}$$

denilirse

$$U(x,\rho)=Ae^{i\rho x}+Be^{-i\rho x}+\int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q(t)U(t,\rho)\,dt$$

şeklinde elde edilir.

3.2 Çevirme Operatörünün Varlığı ve Özellikleri

Bu bölümde 3.1 alt bölümünde alınan integral denklemlerin her bölge için çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecektir. Ayrıca çevirme operatörünün çekirdeğinin sağladığı özellikler incelenecektir. Bunun için ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanacaktır.

Şimdi $U(x,\rho)$ çözümünü

$$U(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt$$

şeklinde arayalım.

$$U(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{0}^{x} \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q(t)\, U(t,\rho)\, dt$$

ifadesinde

$$U(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt$$

eşitliğini yerine yazalım.

$$Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} +$$

$$+\int_{0}^{x} \frac{\sin\rho(x-\xi)}{\rho} q(\xi) \left[Ae^{i\rho\xi} + Be^{-i\rho\xi} + \int_{-\xi}^{\xi} K(\xi,\mu)\, e^{i\rho\mu} d\mu \right] d\xi$$

dır. Ohalde

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt &= \int_{0}^{x} \frac{e^{i\rho(x-\xi)} - e^{-i\rho(x-\xi)}}{2i\rho} q(\xi) \left[A e^{i\rho\xi} + B e^{-i\rho\xi} + \int_{-\xi}^{\xi} K(\xi,\mu)\, e^{i\rho\mu} d\mu \right] d\xi \\
&= A \int_{0}^{x} \frac{e^{i\rho x} - e^{-i\rho(x-2\xi)}}{2i\rho} q(\xi)\, d\xi + B \int_{0}^{x} \frac{e^{i\rho(x-2\xi)} - e^{-i\rho x}}{2i\rho} q(\xi)\, d\xi + \\
&+ \int_{0}^{x} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{e^{i\rho(x-\xi+\mu)} - e^{-i\rho(x-\xi-\mu)}}{2i\rho} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu d\xi \\
&= \frac{A}{2} \int_{0}^{x} \int_{-x+2\xi}^{x} e^{i\rho t} q(\xi)\, dt d\xi + \frac{B}{2} \int_{0}^{x} \int_{-x}^{x-2\xi} e^{i\rho t} q(\xi)\, dt d\xi + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{0}^{x} \int_{-\xi}^{\xi} \int_{-x+\xi+\mu}^{x-\xi+\mu} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, dt d\mu d\xi
\end{aligned}$$

şeklinde yazarız.

Şimdi yukardaki integrallerde gerekli bölge dönüşümlerini yapalım. Burada

$$I_1 = \int_{0}^{x} \int_{-x+2\xi}^{x} e^{i\rho t} q(\xi)\, dt d\xi$$

şeklinde alırsak

$$I_1 = \int_{0}^{x} \int_{-x+2\xi}^{x} e^{i\rho t} q(\xi)\, dt d\xi = \int_{-x}^{x} \int_{0}^{\frac{x+t}{2}} e^{i\rho t} q(\xi)\, d\xi dt$$

elde edilir.

$$I_2 = \int_{0}^{x} \int_{-x}^{x-2\xi} e^{i\rho t} q(\xi)\, dt d\xi$$

şeklinde alırsak

$$I_2 = \int_{0}^{x} \int_{-x}^{x-2\xi} e^{i\rho t} q(\xi)\, dt d\xi = \int_{-x}^{x} \int_{0}^{\frac{x-t}{2}} e^{i\rho t} q(\xi)\, d\xi dt$$

elde edilir ve

$$I_3 = \int_{0}^{x} \int_{-\xi}^{\xi} \int_{-x+\xi+\mu}^{x-\xi+\mu} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, dt d\mu d\xi$$

alalım. Burada

$$I_4 = \int_{-\xi}^{\xi} \int_{-x+\xi+\mu}^{x-\xi+\mu} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, dt d\mu$$

alırsak

$$I_4 = \int_{-x}^{x-2\xi} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu dt + \int_{x-2\xi}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu dt$$

burada $\mu > \xi$ için $K(\xi,\mu) = 0$ dır.

ohalde

$$I_3 = \int_0^x \int_{-x}^{x-2\xi} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu dt d\xi + \int_0^x \int_{x-2\xi}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu dt d\xi$$

olur. Bu integralde

$$I_5 = \int_0^x \int_{-x}^{x-2\xi} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, dt d\xi$$

şeklinde alırsak

$$I_5 = \int_0^x \int_{-x}^{x-2\xi} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, dt d\xi = \int_{-x}^{x} \int_0^{\frac{x-t}{2}} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\xi dt$$

elde edilir.ve

$$I_6 = \int_0^x \int_{x-2\xi}^{x} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, dt d\xi$$

alırsak

$$I_6 = \int_0^x \int_{x-2\xi}^{x} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, dt d\xi = \int_{-x}^{x} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} e^{i\rho t} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\xi dt$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla

$$I_3=\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right)e^{i\rho t}dt+\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right)e^{i\rho t}dt$$

şeklinde elde edilir.

Ohalde

$$\begin{aligned}\int\limits_{-x}^{x}K(x,t)\,e^{i\rho t}dt= &\ \frac{A}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left[\int\limits_{0}^{\frac{x+t}{2}}q(\xi)\,d\xi\right]e^{i\rho t}dt+\frac{B}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left[\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}q(\xi)\,d\xi\right]e^{i\rho t}dt+\\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left[\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right]e^{i\rho t}dt+\\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left[\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right]e^{i\rho t}dt=0\end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-x}^{x}\Bigg(K(x,t)-\frac{A}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x+t}{2}}q(\xi)\,d\xi-\frac{B}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}q(\xi)\,d\xi-\\ &-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\Bigg)e^{i\rho t}dt=0\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}A(x,t)=K(x,t)-\frac{A}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x+t}{2}}q(\xi)\,d\xi-\frac{B}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}q(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\\ -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\end{aligned}$$

alınırsa

$$\int\limits_{-x}^{x}A(x,t)\,e^{i\rho t}dt=0$$

olur.

$$\tilde{A}(x,t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < x \\ A(x,t) & -x < t < x \\ 0 & x < t < +\infty \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlarsak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(x,t)\, e^{i\rho t} dt = 0$$

yazılabilir. Son eşitlik $\tilde{A}(x,t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. Fourier dönüşümünün birebirliğinden

$$\tilde{A}(x,t) = 0$$

yani

$$A(x,t) = 0$$

dır. Ohalde

$$K(x,t) = \frac{A}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\, d\xi + \frac{B}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)\, d\xi + +\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu d\xi$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} K(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu d\xi \quad , \quad -x < t < x$$

olarak elde edilir.

Şimdi

$$\sigma(x) = \int_0^x |q(\xi)|\, d\xi$$

ve

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma(t)\, dt$$

şeklinde tanımlansın.

1- $\sigma(x)$ ve $\sigma_1(x)$ artan fonksiyonlardır.

$$2\text{- } \sigma_1(x) = \int_0^x \sigma(t)\,dt = \int_0^x \int_0^t |q(s)|\,ds dt = \int_0^x \int_s^x |q(s)|\,dt ds = \int_0^x (x-s)\,|q(s)|\,ds$$

olur. Dolayısıyla

$$\sigma_1(x) = \int_0^x (x-s)\,|q(s)|\,ds$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} K(x,t) &= \frac{A}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\,d\xi + \frac{B}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)\,d\xi \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi \qquad\qquad , \; -x<t<x \\ &+\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi \end{aligned}$$

olmak üzere

$$K_0(x,t) = \frac{A}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\,d\xi + \frac{B}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)\,d\xi$$

ve

$$K_m(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} K_{m-1}(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} K_{m-1}(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$olacak şekilde

$$K(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)$$

serisini tanımlansın. Gösterelimki $\sum\limits_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)$ serisi düzgün yakınsaktır.

$$
\begin{aligned}
|K_0(x,t)| &= \left|\frac{A}{2}\int\limits_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\,d\xi + \frac{B}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)\,d\xi\right| \le \frac{A}{2}\int\limits_0^{\frac{x+t}{2}} |q(\xi)|\,d\xi + \frac{B}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,d\xi \\
&\le \frac{A}{2}\int\limits_0^{x} |q(\xi)|\,d\xi + \frac{B}{2}\int\limits_0^{x} |q(\xi)|\,d\xi = \frac{A+B}{2}\int\limits_0^{x} |q(\xi)|\,d\xi = \frac{1}{2}\sigma(x)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla

$$
|K_0(x,t)| \le \frac{1}{2}\sigma(x)
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
|K_1(x,t)| &= \left|\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} K_0(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} K_0(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right| \\
&\le \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_0(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} |K_0(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır.

Diyelimki

$$
j_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_0(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \text{ ve } j_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} |K_0(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi
$$

olsun.

$$
\begin{aligned}
j_1 &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_0(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \le \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} d\mu d\xi \\
&= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\,(x+t)\,d\xi \le \frac{1}{4}\sigma\left(\tfrac{x-t}{2}\right)\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} (x+t)\,|q(\xi)|\,d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sigma\left(\tfrac{x-t}{2}\right)\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} \left(x-\tfrac{x-t}{2}\right)|q(\xi)|\,d\xi \le \frac{1}{2}\sigma\left(\tfrac{x-t}{2}\right)\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} (x-\xi)\,|q(\xi)|\,d\xi \\
&\le \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} (x-\xi)\,|q(\xi)|\,d\xi
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla

$$j_1 \leq \frac{1}{2}\sigma(x) \int_0^{\frac{x-t}{2}} (x-\xi) |q(\xi)| \, d\xi$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} j_2 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_0(\xi,\mu)| \, |q(\xi)| \, d\mu d\xi \leq \frac{1}{4} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)| \, \sigma(\xi) \int_{t-x+\xi}^{\xi} d\mu d\xi \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)| \, \sigma(\xi) (x-t) \, d\xi \leq \frac{1}{4}\sigma(x) \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} (x-\xi) |q(\xi)| \, d\xi \\ &\leq \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} (x-\xi) |q(\xi)| \, d\xi \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$j_2 \leq \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} (x-\xi) |q(\xi)| \, d\xi$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} |K_1(x,t)| &\leq j_1 + j_2 \\ &\leq \frac{1}{2}\sigma(x) \int_0^{\frac{x-t}{2}} (x-\xi) |q(\xi)| \, d\xi + \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} (x-\xi) |q(\xi)| \, d\xi \\ &\leq \frac{1}{2}\sigma(x) \int_0^{x} (x-\xi) |q(\xi)| \, d\xi = \frac{1}{2}\sigma(x) \sigma_1(x) \end{aligned}$$

olduğundan

$$|K_1(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma(x) \sigma_1(x)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|K_2(x,t)| &= \left| \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} K_1(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} K_1(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \\
&+\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi
\end{aligned}$$

olur. Diyelimki

$$j_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi$$

ve

$$j_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi$$

olsun

$$\begin{aligned}
j_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \leq \frac{1}{4}\int_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)| \int_{-\xi}^{t+x-\xi} \sigma(\xi)\,\sigma_1(\xi)\,d\mu d\xi \\
. \quad &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{x-t}{2}} \sigma(\xi)\,\sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x+t)\,d\xi \leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int_0^{\frac{x-t}{2}} \sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\left(x-\tfrac{x-t}{2}\right)d\xi \\
&\leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int_0^{\frac{x-t}{2}} \sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$j_1 \leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int_0^{\frac{x-t}{2}} \sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x-\xi)\,d\xi$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
j_2 &= \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \leq \frac{1}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)| \int_{t-x+\xi}^{\xi} \sigma(\xi)\,\sigma_1(\xi)\,d\mu d\xi \\
&= \frac{1}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \sigma(\xi)\,\sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x-t)\,d\xi \leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$j_2 \leq \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \sigma_1(\xi) |q(\xi)| (x-\xi) d\xi$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
|K_2(x,t)| &\leq j_1 + j_2 \\
&\leq \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{0}^{\frac{x-t}{2}} \sigma_1(\xi) |q(\xi)| (x-\xi) d\xi + \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \sigma_1(\xi) |q(\xi)| (x-\xi) d\xi \\
&\leq \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{0}^{x} (x-s) \sigma_1(s) |q(s)| ds = \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{0}^{x} \sigma_1(s) |q(s)| \int_{s}^{x} d\xi ds \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{0}^{x} \int_{0}^{\xi} \sigma_1(s) |q(s)| ds d\xi = \frac{1}{2}\sigma(x) \int_{0}^{x} \sigma_1(\xi) \left[\int_{0}^{\xi} |q(s)| ds \right] d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x) \frac{[\sigma_1(x)]^2}{2}
\end{aligned}$$

veya

$$|K_2(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma(x) \frac{[\sigma_1(x)]^2}{2}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|K_3(x,t)| &= \left| \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{x-t}{2}} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} K_2(\xi,\mu) q(\xi) d\mu d\xi + \frac{1}{2} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} K_2(\xi,\mu) q(\xi) d\mu d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{x-t}{2}} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_2(\xi,\mu)| |q(\xi)| d\mu d\xi + \frac{1}{2} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_2(\xi,\mu)| |q(\xi)| d\mu d\xi
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Diyelimki

$$j_1 = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{x-t}{2}} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_2(\xi,\mu)| |q(\xi)| d\mu d\xi$$

ve

$$j_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_2(\xi,\mu)| |q(\xi)| d\mu d\xi$$

olsun.

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_2(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \le \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)| \int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} \frac{1}{2}\sigma(\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2} d\mu d\xi \\ &\le \tfrac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}(x+t)\,d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}\left(x-\tfrac{x-t}{2}\right)d\xi \\ &\le \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}(x-\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$j_1 \le \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}(x-\xi)\,d\xi$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} j_2 &= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} |K_2(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \\ &= \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}(x-t)\,d\xi \\ &\le \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)|\,(x-\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}d\xi \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$j_2 \le \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)|\,(x-\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}d\xi$$

elde edilir. Ohalde

$$
\begin{aligned}
|K_3(x,t)| &\leq j_1 + j_2 \\
&\leq c \int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)| \frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2} (x-\xi)\, d\xi \\
&+ \frac{1}{2}\sigma(x) \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)| (x-\xi) \frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2} d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x) \int\limits_0^x (x-\xi) \frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2} |q(\xi)|\, ds \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x) \int\limits_0^x \int\limits_s^x \frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2} |q(\xi)|\, ds d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x) \int\limits_0^x \int\limits_0^\xi \frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2} |q(\xi)|\, ds d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x) \int\limits_0^x \frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2} \left[\int\limits_0^\xi |q(s)|\, ds \right] d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x) \frac{[\sigma_1(x)]^3}{3!}
\end{aligned}
$$

ise

$$|K_3(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma(x) \frac{[\sigma_1(x)]^3}{3!}$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelimki

$$|K_m(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma(x) \frac{[\sigma_1(x)]^m}{m!}$$

olsun. Gösterelim ki

$$|K_{m+1}(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma(x) \frac{[\sigma_1(x)]^{m+1}}{(m+1)!}$$

dir.

$$
\begin{aligned}
|K_{m+1}(x,t)| &= \left| \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} \int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} K_m(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu d\xi + \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} K_m(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} \int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_m(\xi,\mu)|\, |q(\xi)|\, d\mu d\xi + + \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} |K_m(\xi,\mu)|\, |q(\xi)|\, d\mu d\xi
\end{aligned}
$$

dir. Diyelim ki

$$j_1 = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_m(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi$$

ve

$$j_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_m(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi$$

olsun.

$$\begin{aligned}
j_1 &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_m(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)| \int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_m(\xi,\mu)|\,d\mu d\xi \\
&\leq \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)| \int_{-\xi}^{t+x-\xi} \sigma(\xi)\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!} d\mu d\xi = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}\,(x+t)\,d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}\left(x-\tfrac{x-t}{2}\right) d\xi \\
&\leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int_{0}^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}\,(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$j_1 \leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int_{0}^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}\,(x-\xi)\,d\xi$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
j_2 &= \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_m(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi = \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)| \int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_m(\xi,\mu)|\,d\mu d\xi \\
&\leq \frac{1}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)| \int_{t-x+\xi}^{\xi} \sigma(\xi)\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!} d\mu d\xi \\
&= \frac{1}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}\,(x-t)\,d\xi \\
&\leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)|\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}\,(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$j_2 \leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}|q(\xi)|\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}(x-\xi)\,d\xi$$

olur. Ohalde

$$\begin{aligned}
|K_{m+1}(x,t)| &\leq j_1+j_2 \\
&\leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}|q(\xi)|\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}(x-\xi)\,d\xi+ \\
&+\frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}|q(\xi)|\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}(x-\xi)\,d\xi \\
&\leq \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_{0}^{x}(x-\xi)|q(\xi)|\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_{0}^{x}|q(\xi)|\frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}\int\limits_{s}^{x}d\xi ds \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{\xi}|q(\xi)|[\sigma_1(\xi)]^m\,ds d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x)\int\limits_{0}^{x}[\sigma_1(\xi)]^m\left[\int\limits_{0}^{\xi}|q(s)|\,ds\right]d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^{m+1}}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

ise

$$|K_{m+1}(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^{m+1}}{(m+1)!}$$

elde edilir. Bu ise gösterirki tümevarımdan

$$\forall\ m \text{ için } |K_m(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^m}{m!}$$

dir. Dolayısıyla

$$K(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty}K_m(x,t) \text{ ve } |K(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma(x)\exp[\sigma_1(x)]$$

şeklinde elde edilir.

3.3 Çevirme Operatörünün Özellikleri

$$\begin{cases} y_1'(x,\rho) = i\rho K(x)\, y_2(x,\rho) \\ y_2'(x,\rho) = i\rho \dfrac{1}{K(x)} y_1(x,\rho) \end{cases}$$ denklem sistemini alalım.

$$y_1(x,\rho) = \sqrt{K(x)}\,U(x,\rho)$$

ve

$$y_2(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{K(x)}} V(x,\rho)$$

olmak üzere

$$-U''(x,\rho) + q(x)\,U(x,\rho) = \lambda U(x,\rho)$$

ve burada

$$\lambda = \rho^2 \ , \ q(x) = m^2(x) - m'(x) \ \ , \ m(x) = \frac{K'(x)}{2K(x)}$$

dir. Ayrıca

$$U(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt$$

idi. Ohalde

$$U'(x,\rho) = i\rho Ae^{i\rho x} - i\rho Be^{-i\rho x} + K(x,x)\, e^{i\rho x} - K(x,-x)\, e^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K_x(x,t)\, e^{i\rho t} dt$$

ve

$$\begin{aligned} U''(x,\rho) \ &= -\rho^2 Ae^{i\rho x} - \rho^2 Be^{-i\rho x} + \frac{dK(x,x)}{dx} e^{i\rho x} + i\rho K(x,x)\, e^{i\rho x} - \\ &\quad - \frac{dK(x,-x)}{dx} e^{-i\rho x} + i\rho K(x,-x)\, e^{-i\rho x} + K_x(x,t)\,|_{t=x}\, e^{i\rho x} - \\ &\quad - K_x(x,t)\,|_{t=-x}\, e^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K_{xx}(x,t)\, e^{i\rho t} dt \end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi bu ifadeleri

$$-U''(x,\rho) + q(x)\,U(x,\rho) = \lambda U(x,\rho)$$

denkleminde yerine yazalım. Ohalde

$$\rho^2 Ae^{i\rho x}+\rho^2 Be^{-i\rho x}-\frac{dK\left(x,x\right)}{dx}e^{i\rho x}-i\rho K\left(x,x\right)e^{i\rho x}$$

$$+\frac{dK\left(x,-x\right)}{dx}e^{-i\rho x}-i\rho K\left(x,-x\right)e^{-i\rho x}-K_x\left(x,t\right)|_{t=x}\,e^{i\rho x}$$

$$+K_x\left(x,t\right)|_{t=-x}\,e^{-i\rho x}-\int\limits_{-x}^{x}K_{xx}\left(x,t\right)e^{i\rho t}dt+Aq\left(x\right)e^{i\rho x}$$

$$+Bq\left(x\right)e^{-i\rho x}+\int\limits_{-x}^{x}q\left(x\right)K\left(x,t\right)e^{i\rho t}dt$$

$$=A\rho^2 e^{i\rho x}+B\rho^2 e^{-i\rho x}+\rho^2\int\limits_{-x}^{x}K\left(x,t\right)e^{i\rho t}dt$$

ise

$$-\frac{dK\left(x,x\right)}{dx}e^{i\rho x}-i\rho K\left(x,x\right)e^{i\rho x}+\frac{dK\left(x,-x\right)}{dx}e^{-i\rho x}-i\rho K\left(x,-x\right)e^{-i\rho x}$$
$$-K_x\left(x,t\right)|_{t=x}\,e^{i\rho x}+K_x\left(x,t\right)|_{t=-x}\,e^{-i\rho x}-\int\limits_{-x}^{x}K_{xx}\left(x,t\right)e^{i\rho t}dt+Aq\left(x\right)e^{i\rho x}$$
$$+Bq\left(x\right)e^{-i\rho x}+\int\limits_{-x}^{x}q\left(x\right)K\left(x,t\right)e^{i\rho t}dt=\rho^2\int\limits_{-x}^{x}K\left(x,t\right)e^{i\rho t}dt$$

olur. Öteyandan $\rho^2 \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt$ integralinde iki kez kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
\rho^2 \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt &= -i\rho \int\limits_{-x}^{x} K(x,t) \left(e^{i\rho t}\right)' dt \\
&= -i\rho \left[K(x,t)\, e^{i\rho t} \mid_{-x}^{x} - \int\limits_{-x}^{x} K_t(x,t)\, e^{i\rho t} dt \right] \\
&= -i\rho K(x,x)\, e^{i\rho x} + i\rho K(x,-x)\, e^{-i\rho x} + \int\limits_{-x}^{x} K_t(x,t) \left(e^{i\rho t}\right)' dt \\
&= -i\rho K(x,x)\, e^{i\rho x} + i\rho K(x,-x)\, e^{-i\rho x} + K_t(x,t) \mid_{t=x} e^{i\rho x} \\
&\quad -K_t(x,t) \mid_{t=-x} e^{-i\rho x} - \int\limits_{-x}^{x} K_{tt}(x,t)\, e^{i\rho t} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&-\frac{dK(x,x)}{dx} e^{i\rho x} - i\rho K(x,x)\, e^{i\rho x} + \frac{dK(x,-x)}{dx} e^{-i\rho x} - i\rho K(x,-x)\, e^{-i\rho x} \\
&-K_x(x,t) \mid_{t=x} e^{i\rho x} + K_x(x,t) \mid_{t=-x} e^{-i\rho x} - \int\limits_{-x}^{x} K_{xx}(x,t)\, e^{i\rho t} dt \\
&+Aq(x)\, e^{i\rho x} + Bq(x)\, e^{-i\rho x} + \int\limits_{-x}^{x} q(x)\, K(x,t)\, e^{i\rho t} dt \\
&= -i\rho K(x,x)\, e^{i\rho x} + i\rho K(x,-x)\, e^{-i\rho x} + K_t(x,t) \mid_{t=x} e^{i\rho x} - \\
&-K_t(x,t) \mid_{t=-x} e^{-i\rho x} - \int\limits_{-x}^{x} K_{tt}(x,t)\, e^{i\rho t} dt
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$K_{xx}(x,t) - q(x)\, K(x,t) = K_{tt}(x,t)$$

$$-2\frac{dK(x,x)}{dx} + Aq(x) = 0$$

$$2\frac{dK(x,-x)}{dx} + Bq(x) = 0$$

$$K(x,-x) = 0$$

elde edilir.

4.BÖLÜM

ÖZDEĞER VE NORMALLEŞTİRİCİ SAYILARIN DAVRANIŞLARI

$$\begin{cases} y_1'(x) = i\rho K(x)\, y_2(x) \\ y_2'(x) = i\rho \dfrac{1}{K(x)} y_1(x) \end{cases}, \qquad \lambda = \rho^2 \ , \ 0 < x < \pi \ \ , \ y_1(0) = 0 \ , \ y_2(0) = 1$$

$,y_1(\pi) = 0$ problemi için

$$U(x,\rho) = \frac{\sqrt{K(0)}}{2} e^{i\rho x} - \frac{\sqrt{K(0)}}{2} e^{-i\rho x} + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q(t)\, U(t,\rho)\, dt$$

çözümü elde edilir. Burada $A = \dfrac{\sqrt{K(0)}}{2}$ ve $B = -\dfrac{\sqrt{K(0)}}{2}$ olarak alırsak

$$U(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q(t)\, U(t,\rho)\, dt$$

ve

$$U(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt$$

olur.

$$y_1(\pi) = 0 \ , \ \Delta(\rho) = U(\pi,\rho) = y_1(\pi) = 0$$

ise

$$\Delta(\rho) = Ae^{i\rho\pi} + Be^{-i\rho\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} K(\pi,t)\, e^{i\rho t} dt = 0$$

olur. Buradan

$$\Delta(\rho) = Ae^{i\rho\pi} + Be^{-i\rho\pi} + \int_0^{\pi} K(\pi,t)\, e^{i\rho t} dt + \int_0^{\pi} K(\pi,-t)\, e^{-i\rho t} dt = 0$$

ise

$$\frac{\sqrt{K(0)}}{2} e^{i\rho\pi} - \frac{\sqrt{K(0)}}{2} e^{-i\rho\pi} + \int_0^{\pi} K(\pi,t)\, e^{i\rho t} dt + \int_0^{\pi} K(\pi,-t)\, e^{-i\rho t} dt = 0$$

ve

$$i\sqrt{K(0)}\sin\rho\pi+\int_0^{\pi}K(\pi,t)\,e^{i\rho t}dt+\int_0^{\pi}K(\pi,-t)\,e^{-i\rho t}dt=0$$

burandan

$$\sin\rho\pi+\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}K(\pi,t)\,e^{i\rho t}dt+\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}K(\pi,-t)\,e^{-i\rho t}dt=0$$

ise

$$\Delta(\rho)=\sin\rho\pi+K(\rho)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
K(\rho) &= \frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}K(\pi,t)\,e^{i\rho t}dt+\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}K(\pi,-t)\,e^{-i\rho t}dt \\
&= \frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}K(\pi,t)\left[\cos\rho t+i\sin\rho t\right]dt+ \\
&+\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}K(\pi,-t)\left[\cos(-\rho t)+i\sin(-\rho t)\right]dt \\
&= \frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}\left[K(\pi,t)+K(\pi,-t)\right]\cos\rho t+ \\
&+\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}\left[K(\pi,t)-K(\pi,-t)\right]\sin\rho t dt
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\Gamma_n=\left\{\lambda \mid |\lambda|=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

bölgesi tanımlansın.

$$\Delta(\lambda)=f(\lambda)+g(\lambda)\ \ ,\ \ f(\lambda)=\sin\rho\pi\ ,\ \ g(\lambda)=K(\rho)$$

yazılabilir.

$$|\sin \rho\pi| = \left|\frac{e^{i\rho\pi} - e^{-i\rho\pi}}{2i}\right| \geq \frac{|e^{i\rho\pi}| - |e^{-i\rho\pi}|}{2}$$

$$= \frac{e^{-\operatorname{Im}\rho\pi} - e^{\operatorname{Im}\rho\pi}}{2} \geq \frac{1}{2}e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

ise

$$|\sin \rho\pi| \geq c_\delta e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

$\rho \in G = \{\rho \mid |\rho - k| \geq \ , k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$, $\delta > 0$ dır. Ayrıca

$$\begin{cases} |\cos \rho\pi| \leq e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi} \\ |\sin \rho\pi| \leq e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi} \end{cases}$$

olduğundan

$$|g(\lambda)| \leq c.e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}$$

yazılır.

Dolayısıyla n ler yeterince büyük olmak üzere $\lambda \in \Gamma_n$ için

$$|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$$

yazılır. Ohalde Rouche teoreminden

$$f(\lambda) = \sin \rho\pi$$

fonksiyonunun sıfırlarının sayısı ile $\Delta(\lambda)$ nin Γ_n içindeki sıfırlarının sayısı aynıdır yani $(n+1)$ tanedir. Böylece $|\lambda| < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ çemberinde verilen L probleminin $\lambda_0, \lambda_1, .., \lambda_n$ olmak üzere tam olarak $(n+1)$ tane özdeğeri vardır.

$$\Delta_0(\rho) = \sin \rho\pi = 0$$

ise

$$\rho_n \pi = n\pi$$

buradanda

$$\rho_n = n$$

yani

$$\rho_n = n + \epsilon_n \quad , \quad \epsilon_n = \circ(1) \quad , n \to \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta\left(\rho_n^2\right) \\ &= \sin\left(n + \epsilon_n\right)\pi + K_n \end{aligned}$$

ise

$$\sin n\pi \cos \epsilon_n \pi + \cos n\pi \sin \epsilon_n \pi + K_n = 0$$

olur. Buradan

$$(-1)^n \sin \epsilon_n \pi + K_n = 0$$

ise

$n \to \infty$ iken $\epsilon_n \to 0$ olduğundan $(-1)^n \epsilon_n \pi + K(\rho_n) = 0 \Rightarrow \epsilon_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi} K(\rho_n)$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\epsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)+K(\pi,-t)]\cos\rho_n t dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)-K(\pi,-t)]\sin\rho_n t dt\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)+K(\pi,-t)]\cos(n+\epsilon_n)t dt + \right.$$
$$\left. \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)-K(\pi,-t)]\sin(n+\epsilon_n)t dt\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)+K(\pi,-t)](\cos nt\cos\epsilon_n t - \sin nt\sin\epsilon_n t) dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)-K(\pi,-t)](\sin nt\cos\epsilon_n t + \cos nt\sin\epsilon_n t) dt\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)+K(\pi,-t)]\cos nt\,(1+O(\epsilon_n t)) dt\right.$$
$$- \frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)+K(\pi,-t)]\sin nt O(\epsilon_n t) dt$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)-K(\pi,-t)]\sin nt\,(1+O(\epsilon_n t)) dt$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int\limits_0^{\pi}[K(\pi,t)-K(\pi,-t)]\cos nt O(\epsilon_n t) dt\right)$$

$$\epsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}[K(\pi,t)+K(\pi,-t)]\cos nt\cos\epsilon_n t dt - \right.$$
$$-\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}[K(\pi,t)+K(\pi,-t)]\sin nt\sin\epsilon_n t dt$$
$$+\frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}[K(\pi,t)+K(\pi,-t)]\sin nt\cos\epsilon_n t dt$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}[K(\pi,t)-K(\pi,-t)]\cos nt\sin\epsilon_n t dt\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$\epsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left[\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}\hat{K}(\pi,t)\cos nt dt + \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}\check{K}(\pi,t)\sin nt dt\right]$$
$$+O(\epsilon_n t)\ ,\ \epsilon_n \to 0, \epsilon_n \in l_2$$

şeklindedir. Burada

$$\hat{K}(\pi,t) = K(\pi,t)+K(\pi,-t)$$

ve

$$\check{K}(\pi,t) = K(\pi,t)-K(\pi,-t)$$

dir. Ayrıca

$$O(\epsilon_n t) = a_n, \epsilon_n \to 0$$

dersek

$$a_n < c\epsilon_n \Rightarrow a_n^2 < c^2\epsilon_n^2$$

olduğundan

$$O(\epsilon_n t) \in l_2$$

dir ve $\hat{K}(\pi,t) \in L_2(0,\pi)$, $\check{K}(\pi,t) \in L_2(0,\pi)$ olduğundan

$$\int_0^{\pi}\hat{K}(\pi,t)\cos nt dt \in l_2$$

ve

$$\int_0^\pi \check{K}(\pi,t)\sin ntdt \in l_2$$

olur. Böylece gösterdikki

$$\rho_n = n + \epsilon_n \ , \ \epsilon_n = \circ(1) \ , \ n \to \infty$$

ve

$$\epsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left[\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^\pi \hat{K}(\pi,t)\cos ntdt + \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int_0^\pi \check{K}(\pi,t)\sin ntdt\right]$$
$$+O(\epsilon_n t) \ , \ \epsilon_n \to 0 \ , \ \epsilon_n \in l_2$$

dir.

Şimdi α_n normalleştirici sayımızı hesaplayalım. $\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\rho_n)\,dx$ idi. Bu sayımızı hesaplamak için gerekli hazırlıklarımızı yapalım.

$$\varphi(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\,e^{i\rho t}dt$$

ifadesinde bir kez kismi integrasyon yapılısa

$$\varphi(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

yazılabilir.$A = \dfrac{\sqrt{K(0)}}{2}$ ve $B = -\dfrac{\sqrt{K(0)}}{2}$ olmak üzere

$$\varphi(x,\rho_n) = Ae^{i\rho_n x} + Be^{-i\rho_n x} + O\left(\frac{1}{\rho_n}\right)$$

$$\varphi^2(x,\rho_n) = \frac{K(0)}{4}e^{2i\rho_n x} + \frac{K(0)}{4}e^{-2i\rho_n x} - \frac{K(0)}{2} + \sqrt{K(0)}e^{i\rho_n x}O\left(\tfrac{1}{\rho_n}\right)$$

$$-\sqrt{K(0)}e^{-i\rho_n x}O\left(\tfrac{1}{\rho_n}\right) + \left[O\left(\tfrac{1}{\rho_n}\right)\right]^2$$

$$= \frac{K(0)}{4}e^{2i\rho_n x} + \frac{K(0)}{4}e^{-2i\rho_n x} - \frac{K(0)}{2} + \sqrt{K(0)}e^{i\rho_n x}\left[\frac{b}{\rho_n} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)\right] -$$

$$-\sqrt{K(0)}e^{-i\rho_n x}\left[\frac{b}{\rho_n} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$= \frac{K(0)}{4}e^{2i\rho_n x} + \frac{K(0)}{4}e^{-2i\rho_n x} - \frac{K(0)}{2} + \frac{\sqrt{K(0)}b}{\rho_n}e^{i\rho_n x}$$

$$-\frac{\sqrt{K(0)}b}{\rho_n}e^{-i\rho_n x} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

şeklinde yazılır. Ohalde

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\rho_n)\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{K(0)}{4}e^{2i\rho_n x} + \frac{K(0)}{4}e^{-2i\rho_n x} - \frac{K(0)}{2} + + \frac{\sqrt{K(0)}b}{\rho_n}e^{i\rho_n x}$$
$$-\frac{\sqrt{K(0)}b}{\rho_n}e^{-i\rho_n x} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)dx$$

$$= \frac{K(0)}{8i\rho_n}e^{2i\rho_n x} - \frac{K(0)}{8i\rho_n}e^{-2i\rho_n x} - \frac{K(0)}{2}x +$$

$$+\frac{\sqrt{K(0)}b}{i\rho_n^2}e^{i\rho_n x} + \frac{\sqrt{K(0)}b}{i\rho_n^2}e^{-i\rho_n x} \Big|_0^\pi + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$= \frac{K(0)}{8i\rho_n} e^{2i\rho_n\pi} - \frac{K(0)}{8i\rho_n} e^{-2i\rho_n\pi} - \frac{K(0)}{2}\pi +$$

$$+ \frac{\sqrt{K(0)}b}{i\rho_n^2} e^{i\rho_n\pi} + \frac{\sqrt{K(0)}b}{i\rho_n^2} e^{-i\rho_n\pi} - \frac{2\sqrt{K(0)}b}{i\rho_n^2} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{K(0)}b}{i\rho_n^2} e^{i\rho_n\pi} + \frac{\sqrt{K(0)}b}{i\rho_n^2} e^{-i\rho_n\pi} - \frac{2\sqrt{K(0)}b}{i\rho_n^2} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$= \frac{K(0)}{4\rho_n} \sin 2\rho_n\pi - \frac{K(0)}{2}\pi + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon_n\pi + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\sin 2n\pi \cos 2\varepsilon_n\pi + \cos 2n\pi \sin 2\varepsilon_n\pi\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon_n\pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\varepsilon_n}{n}}}\sin 2\varepsilon_n\pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_n}{n}\pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\varepsilon_n}{n} + \frac{\varepsilon_n^2}{n^2} - \cdots\right]\left[2\varepsilon_n\pi - \frac{(2\varepsilon_n\pi)^3}{3!} + \frac{(2\varepsilon_n\pi)^5}{5!} - \cdots\right]$$

elde edilir. Yani

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^\pi \hat{K}(\pi,t)\cos nt dt \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int_0^\pi \check{K}(\pi,t)\sin nt dt + O(\epsilon_n t)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{K_n}{n} + \delta_n$$

şekilnde elde edilir. Burada K_n sınırlı dizi ve $\delta_n \in l_2$dir.

KAYNAKLAR

1. Sveshnikov, A.G. and II'inskii, A.S. , Design problems in electrodynamics, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 204 (1972), 5, 1077-1080

2. Meshanov, V.P. and Feldstein, A.L.,AutomaticDesign of Directional Couplers, Moscow:Sviaz',1980 (in Russian)

3. Litvinenko, O.N. and Soshnikov, V.I.,The Theory of Heterogenious Lines and their Applications in Radio Engineering, Moscow: Radio, 1964 (in Russian)

4. Tikhonravov, A.V. ,The accuracy obtainable in principle whensolving synthesis problems, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 22 (1982), 6, 1421-1433; English transl. İn USSR Comput. Maths. Math. Phys. 22 (1982), 6, 143-157

5. Marchenko, V.A.,Sturm-Liouville Operators and their Applications, Kiev: Naukova Dumka, 1977, (Endl. Transl. 1986 (Basel: Birkhauser))

6. Freiling, G. and Yurko, V.A., Inverse problems for differential equations with turning points, Inverse Problems, 13 (1997), 1247-1263

7. Freiling G. and Yurko A.A.,Inverse spectral problems for differential equations on the half-line with turning points, J. Diff. Equations, 154 (1999), 419-453

8. Yurko, V.A., Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications, New York: Gordon & Breach, 1999

9. Yurko, V.A., On higher-order differential operators with a singular point, Inverse problems, 9 (1993), 495-502

10. Wasow, W., Linear Turning Point Theory, Berlin:Springer,1985

11. McHugh, J.M., An historical survey of ordinary linear differential equations with a large parameter and turning points, Arch. Hist. Exact Sci 7 (1971), 277-324

12. Eberhard, W., Freiling, G. And Schneider, A., Connection formular for second-arder differential equations with a complex parameter and having an arbitary number of turning points, Math. Nachr. 165 (1994), 205-229

13. Freiling, G. And Yurko, V.A.,On constructing differential equations with singularities from incomplete spectral information, Inverse Problems 14 81998), 1131-1150

14. Freiling, G. And Yurko, V.A.,Reconstructing parameters of a medium from incomplete spectral information, Result in Matematics 35 (1999), 228-249

15. Hurt, N.E., Phase Retrieval and Zero Crossing, Dordrecht: Kluwer, 1989

16. Bates, R.H.T. and McDonnell, M.J., Image Restoration and Reconstruction, Oxford: Clarendon, 1986

17. Hoenders, B.J., On the solution of the phase retrieval problem, J. Math. Phys. 16 (1975), 1719-1725

18. Yurko, V.A., Inverse problem for differential equations with a singularity, Differ. Uravreniya 28 (1992), no. 8, 1355-1362 (in Russian); English transl. İn Differ. Equations 28 (1992),1100-1107

19. Bellman, R. and Cook, K., Differential-difference Equations, Academic Press, New York,1963

20. Convay, J.B., Functions of One Complex Variable, 2nd ed., vol. I, Springer-Verlag, New York,1995

21. Borg, G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenweraufgabe, Acta Math. 78 (1946), 1-96

22. Levitan, B.M., Inverse Sturm-Liouville Problems, Moscow: Nauka, 1984, (Engl. Transl.1987 (Utrecth: VNU Science Press))

23. Pöschel, J. And Trubowitz, E., Inverse Spectral Theory, New York: Academic, 1987

24. 24 McLaughlin, Analiytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, SIAM Rev. 28 (1986), 53-72

KAYNAKLAR

1. Sveshnikov, A.G. and II'inskii, A.S. , Design problems in electrodynamics, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 204 (1972), 5, 1077-1080
2. Meshanov, V.P. and Feldstein, A.L.,AutomaticDesign of Directional Couplers, Moscow:Sviaz',1980 (in Russian)
3. Litvinenko, O.N. and Soshnikov, V.I.,The Theory of Heterogenious Lines and their Applications in Radio Engineering, Moscow: Radio, 1964 (in Russian)
4. Tikhonravov, A.V. ,The accuracy obtainable in principle whensolving synthesis problems, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 22 (1982), 6, 1421-1433; English transl. İn USSR Comput. Maths. Math. Phys. 22 (1982), 6, 143-157
5. Marchenko, V.A.,Sturm-Liouville Operators and their Applications, Kiev: Naukova Dumka, 1977, (Endl. Transl. 1986 (Basel: Birkhauser))
6. Freiling, G. and Yurko, V.A., Inverse problems for differential equations with turning points, Inverse Problems, 13 (1997), 1247-1263
7. Freiling G. and Yurko A.A.,Inverse spectral problems for differential equations on the half-line with turning points, J. Diff. Equations, 154 (1999), 419-453
8. Yurko, V.A., Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications, New York: Gordon & Breach, 1999
9. Yurko, V.A., On higher-order differential operators with a singular point, Inverse problems, 9 (1993), 495-502
10. Wasow, W., Linear Turning Point Theory, Berlin:Springer,1985
11. McHugh, J.M., An historical survey of ordinary linear differential equations with a large parameter and turning points, Arch. Hist. Exact Sci 7 (1971), 277-324
12. Eberhard, W., Freiling, G. And Schneider, A., Connection formular for second-arder differential equations with a complex parameter and having an arbitary number of turning points, Math. Nachr. 165 (1994), 205-229
13. Freiling, G. And Yurko, V.A.,On constructing differential equations with singularities from incomplete spectral information, Inverse Problems 14 81998), 1131-1150
14. Freiling, G. And Yurko, V.A.,Reconstructing parameters of a medium from incomplete spectral information, Result in Matematics 35 (1999), 228-249
15. Hurt, N.E., Phase Retrieval and Zero Crossing, Dordrecht: Kluwer, 1989
16. Bates, R.H.T. and McDonnell, M.J., Image Restoration and Reconstruction, Oxford: Clarendon, 1986
17. Hoenders, B.J., On the solution of the phase retrieval problem, J. Math. Phys. 16 (1975), 1719-1725
18. Yurko, V.A., Inverse problem for differential equations with a singularity, Differ. Uravreniya 28 (1992), no. 8, 1355-1362 (in Russian); English transl. İn Differ. Equations 28 (1992),1100-1107
19. Bellman, R. and Cook, K., Differential-difference Equations, Academic Press, New York,1963
20. Convay, J.B., Functions of One Complex Variable, 2nd ed., vol. I, Springer-Verlag, New York,1995

21. Borg, G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenweraufgabe, Acta Math. 78 (1946), 1-96
22. Levitan, B.M., Inverse Sturm-Liouville Problems, Moscow: Nauka, 1984, (Engl. Transl.1987 (Utrecth: VNU Science Press))
23. Pöschel, J. And Trubowitz, E., Inverse Spectral Theory, New York: Academic, 1987
24. 24 McLaughlin, Analiytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, SIAM Rev. 28 (1986), 53-72

ÖZGEÇMİŞ

Tuğba MERT 1984 yılında Sivas'da doğdu. İlk, orta ve lise öğremini Sivas'da tamamladı. 2002 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandı ve 2006 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2007 yılından itibaren Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.