T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

T-NORMLAR

Ramazan EKMEKÇİ

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **12.08.2010**

Tez Danışmanı:

Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

RAMAZAN EKMEKÇİ tarafından **YRD. DOÇ. DR. HASAN DALGIN** yönetiminde hazırlanan **"T-NORMLAR"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN

____

Danışman

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK	Doç. Dr. Erdal EKİCİ
__________________________	__________________________
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Sıra No: ………….

Tez Savunma Tarihi: 12/08/2010

Prof. Dr. İsmail TARHAN

____

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Ramazan EKMEKÇİ

TEŞEKKÜR

Bu tezin ortaya çıkmasında yardımlarını esirgemeyen, Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bana her konuda destek olan Prof. Dr. Rıza ERTÜRK'e ve tecrübesi ile bana yol gösteren danışmanım Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN'a teşekkür ederim. Ayrıca, Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ramazan EKMEKÇİ

ÖZET

T-NORMLAR

Ramazan EKMEKÇİ

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN

12/08/2010, 64

Brinci bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve kavramlar ve bazı teoremler verildi.

İkinci bölüm üç kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda, t-normlar ve t-konormlar ile ilgili genel bilgiler ve temel özellikler verildi. İkinci kısımda ise, bazı t-norm oluşturma teknikleri verildi. Üçüncü kısımda, sürekli t-normların bazı özellikleri incelendi.

Üçüncü bölümde, fuzzy metrik uzaylar ile ilgili temel tanımlar, özellikler ve örnekler verildikten sonra, fuzzy metrikler tarafından üretilen topolojiler ve bu topolojilerin özellikleri incelendi. Daha sonra, fuzzy metriklerin ürettiği topolojilerin özellikleri genel metriklerin ürettiği topolojilerin özellikleri ile karşılaştılıdı.

Dördüncü bölüm üç kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda, fuzzy quasi-metrik uzayların ve fuzzy quasi-metriklerin ürettiği topolojilerin temel özellikleri verildi. İkinci kısımda, bir topolojik uzayın, quasi-metriklenebilir olması ile fuzzy quasi-metriklenebilir olmasının denk olduğu gösterildi. Üçüncü kısımda ise, ikili-tam fuzzy quasi-metrik uzayların bazı özellikleri incelendi.

Anahtar sözcükler: t-norm, fuzzy (quasi-) metrik uzay, topoloji.

ABSTRACT

T-NORMS

Ramazan EKMEKÇİ

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Science and Engineering

Chair for Mathematics Thesis of Master of Science

Advisor: Assis. Prof. Hasan DALGIN

12/08/2010, 64

In the first chapter fundamental definitons and notions and some theorems which are essential for the thesis are given.

The second chapter consists of three sections. In the first section general information and fundamental properties of t-norms and t-conorms are given. In the second section some technics of construction of t-norms are given. In the third chapter some properties of continuous t-norms are studied.

In the third chapter after the fundamental definitons, properties and examples of fuzzy metric spaces are given, the topologies induced by fuzzy metrics and the properties of these topologies are studied. Afterwords, the properties of the topologies induced by fuzzy metrics compared to the properties of the topologies induced by general metrics.

The final chapter is composed of three sections. In the first of these the fundamental properties of fuzzy quasi-metric spaces and topologies induced by fuzzy quasi-metrics are given. In the second section it is shown that a topological space is quasi-metrizable iff this space is fuzzy quasi-metrizable. In the third section some properties of bicomplete fuzzy quasi-metric spaces are studied.

Keywords: t-norms, fuzzy (quasi-) metric spaces, topology.

İÇERİK

Sayfa

TEZ SINAVI SONUÇ BELGESİ……………………………………………..………...ii

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI……………………………………......iii

TEŞEKKÜR………………………………………………………………............iv

ÖZET……………………………………………………………………….……...v

ABSTRACT………………………………………………………………………..vi

BÖLÜM 1 – TEMEL BİLGİLER…………………………………………….....…1

1. 1. Giriş………………………………………………………………………...1

1. 2. Temel Tanım ve Kavramlar………….………………………………….….1

BÖLÜM 2 – T-NORMLAR……………………………………………….....…..5

2. 1. Temel Tanımlar ve Özellikler…………………………………………...…...5

2. 2. T-normların Oluşturulması.………………………………………….……16

2. 3. Sürekli t-normlar……….………………………………………………..25

BÖLÜM 3 – FUZZY METRİK UZAYLAR…………………………………....28

3. 1. Fuzzy Metrik Uzaylar………...……………………………………….....28

3. 2. Bir Fuzzy Metrik Tarafından Üretilen Topoloji………………………….....33

BÖLÜM 4 – FUZZY QUASİ METRİK UZAYLAR………………………………..54

4. 1. Tanımlar ve Temel Sonuçlar…………………………………………….....54

4. 2. Bir Fuzzy Quasi-Metrik Uzayın Topolojisinin Quasi-Metriklenebilirliği....60

4. 3. İkili-tam Fuzzy Quasi-metrik Uzaylar……………………………………61

KAYNAKLAR…………………………………………………………………...63

ÖZGEÇMİŞ……………………………………………………………………….I

BÖLÜM 1

TEMEL BİLGİLER

1. 1. Giriş

T-normlar ile ilgili çalışmalar 1942 yılında "İstatistiksel Metrikler" isimli çalışmayla Menger tarafından başlatılmıştır ve 1958-1964 yılları arasında Schweizer, Sklar ve Serstnew gibi araştırmacılar olasılık metrik uzaylardaki çalışmalarıyla bu alana katkı sağlamışlardır.

Tezin amacı, t-normlar ve sürekli t-normlar ile ilgili genel bilgileri ve temel özellikleri verdikten sonra, bu teorinin fuzzy metriklerle olan ilişkilerini sunmak ve daha sonra fuzzy metriklerin ürettiği topolojiler ve bu topolojilerin temel özelliklerini vermektir.

Tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, tezin tanıtımı ve tezde kullanılacak temel tanım ve kavramlar ve bazı teoremler verilmektedir.

İkinci bölümde, t-normların temel özellikleri, t-norm oluşturma teknikleri ve sürekli t-normlarla ilgili genel bilgiler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, fuzzy metrikler ve bu metriklerin ürettiği topolojilerin özellikleri incelenmiş ve bu özellikler genel metriklerin ürettiği topolojilerin özellikleri ile karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, fuzzy quasi-metrikler ve bu metriklerin ürettiği topolojiler incelendi.

1. 2. Temel Tanım ve Kavramlar

1. 2. 1. Tanım: X herhangi bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna, X üzerinde bir quasi-pseudo metriktir denir.

$\forall x, y, z \in X$ için;

(**i**) $x = y \implies d(x, y) = 0$

(**ii**) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

X üzerindeki bir d quasi-pseudo metriği, ayrıca her $x, y, z \in X$ için,

(**i′**) $x = y \iff d(x, y) = d(y, x) = 0$

koşulunu sağlıyor ise, d ye, X üzerinde bir quasi-metriktir denir; eğer her $x, y, z \in X$ için,

(**i′′**) $x = y \iff d(x, y) = 0$

koşulu sağlanıyor ise, d ye, X üzerinde bir T_1 quasi-metriktir denir (Fletcher ve Lindgren, 1982; Gregori ve Romaguera, 2004).

1. 2. 2. Tanım: d, bir X kümesi üzerinde bir quasi- (pseudo-) metrik olsun. Her $x, y, z \in X$ için,

(**iii**) $d(x, y) = d(y, x)$

koşulu sağlanıyorsa, d ye X üzerinde bir (pseudo-) metriktir denir.

X herhangi bir küme, d ise bu küme üzerinde bir quasi- (pseudo-) metrik olsun. O zaman (X, d) ikilisine bir quasi- (pseudo-) metrik uzay denir (Fletcher ve Lindgren, 1982; Gregori ve Romaguera, 2004).

1. 2. 3. Tanım: X bir küme olmak üzere, $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesine $X \times X$ in köşegeni denir.

$U, V \subseteq X \times X$ ise,

$$U \circ V := \{(x, y) : (x, z) \in V, (z, y) \in U \text{ olacak şekilde bir } z \in X \text{ vardır}\}$$

ile tanımlıdır (Bülbül, 2004).

1. 2. 4. Tanım: X bir küme ve $\mathcal{D}$, $X \times X$ in altkümelerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Aşağıdakiler sağlanırsa $\mathcal{D}$ ailesine X üzerinde bir düzgün yapı denir.

(i) $\forall D \in \mathcal{D}$ için $\Delta \subseteq$ D

(ii) $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ için $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$

(iii) $\forall D \in \mathcal{D}$ için $\exists E \in \mathcal{D} : E \circ E \subseteq D$

(iv) $\forall D \in \mathcal{D}$ için $\exists E \in \mathcal{D} : E^{-1} \subseteq D$

(v) $D \in \mathcal{D}$ ve $D \subseteq E$ ise $E \in \mathcal{D}$.

Bu tanımda (i), (ii), (iii) ve (v) koşullarını sağlayan $\mathcal{D}$ ailesine X üzerinde bir quasi-düzgün yapı denir.

$\mathcal{D}$, X üzerinde bir (quasi-) düzgün yapı olmak üzere $(X, \mathcal{D})$ ikilisine, diğer bir ifade ile, üzerinde bir (quasi-) düzgün yapı verilen her X kümesine bir (quasi-) düzgün uzay denir (Bülbül, 2004; Fletcher ve Lindgren, 1982).

1. 2. 5. Tanım: $(X, \mathcal{D})$ bir düzgün uzay olsun. Eğer $\bigcap\{D : D \in \mathcal{D}\} = \Delta$ ise, $\mathcal{D}$ düzgün yapısına ve dolayısıyla $(X, \mathcal{D})$ düzgün uzayına bir Hausdorff düzgün uzayı denir (Bülbül, 2004).

1. 2. 6. Tanım: $(X, \mathcal{D})$ bir (quasi-) düzgün uzay, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ nin bir altailesi olsun. Eğer her $D \in \mathcal{D}$ için, $B \subseteq D$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ varsa, bu $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{D}$ (quasi-) düzgün yapısı için bir tabandır denir. Buna göre, eğer bir $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$ altailesi $\mathcal{D}$ (quasi-) düzgün yapısı için bir taban ise, $\mathcal{D}$ ailesi, $\mathcal{B}$ nin elemanlarına bütün üst kümeleri de katılarak elde edilir (Bülbül, 2004; Fletcher ve Lindgren, 1982).

1. 2. 7. Teorem: X bir küme, $\mathcal{B}$, $X \times X$ in altkümelerinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir ailesi ise, bu $\mathcal{B}$ ailesi X üzerinde bir düzgün yapının tabanıdır.

(i) $\forall B \in \mathcal{B}$ için $\Delta \subseteq$ B

(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $\exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

(iii) $\forall B \in \mathcal{B}$ için $\exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subseteq B$

(iv) $\forall B \in \mathcal{B}$ için $\exists C \in \mathcal{B} : C^{-1} \subseteq B$

$\mathcal{B}$ ailesi (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{B}$ ailesi X üzerinde bir quasi-düzgün yapının tabanıdır (Bülbül, 2004; Fletcher ve Lindgren, 1982).

1. 2. 8. Tanım: $(X, \mathcal{D})$ bir (quasi-) düzgün uzay ise, her x$\in X$ ve $U \in \mathcal{D}$ için,

$$U[x] := \{y \in X : (x, y) \in U\}$$

şeklinde tanımlanır (Bülbül, 2004; Fletcher ve Lindgren, 1982).

1. 2. 9. Teorem:

a) Her $x \in X$ için, $\mathcal{U}_x = \{U[x] : U \in \mathcal{D}\}$ ailesi X üzerinde bir topolojinin x noktasındaki komşuluk sistemini oluşturur ve bu topoloji $\tau_{\mathcal{D}}$ ile gösterilecektir.

b) $(X, \mathcal{D})$ Hausdorfftur ancak ve ancak $(X, \tau_{\mathcal{D}})$ topolojik uzayı Hausdorfftur (Bülbül, 2004; Fletcher ve Lindgren, 1982).

1. 2. 10. Tanım: 1. 2. 9. Teoremdeki şekilde verilen bir $(X, \mathcal{D})$ (quasi-) düzgün uzayı üzerinde, (quasi-) düzgün yapı yardımıyla bir topoloji tanımlanır. $\tau_{\mathcal{D}}$ ile gösterilen bu topolojiye, $\mathcal{D}$ ile üretilen (quasi-) düzgün uzay topolojisi veya kısaca (quasi-) düzgün topoloji denir (Bülbül, 2004; Fletcher ve Lindgren, 1982).

1. 2. 11. Tanım: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

eşitliğine Cauchy fonksiyonel eşitliği denir (Aczél ve Dohmbres, 1989).

1. 2. 12. Tanım: (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $X = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$ olacak şekilde sonlu bir $A \subseteq X$ altkümesi varsa (X, d) metrik uzayına öntıkızdır denir. Bu durumda d, X üzerinde bir öntıkız metriktir denir (Engelking, 1989).

1. 2. 13. Teorem: (X, τ) bir metriklenebilir topolojik uzay olsun. (X, τ) topolojik uzayı ayrılabilirdir ancak ve ancak X üzerinde $\tau = \tau_d$ olacak şekilde bir d öntıkız metriği vardır (Engelking, 1989).

1. 2. 14. Önerme: (X, τ) bir metriklenebilir topolojik uzay olsun. (X, τ) topolojik uzayı tıkızdır ancak ve ancak X üzerinde $\tau = \tau_d$ olacak şekildeki her d metriği öntıkızdır (Engelking, 1989).

1. 2. 15. Niemytzki-Tychonoff Teoremi: (X, τ) bir metriklenebilir topolojik uzay olsun. (X, τ) topolojik uzayı tıkızdır ancak ve ancak X üzerinde $\tau = \tau_d$ olacak şekildeki her d metriği tamdır (Engelking, 1989).

1. 2. 16. Tanım: $(X, \mathcal{D})$ bir quasi-düzgün uzay olsun. $\mathcal{D}^*$, $\{D \cap D^{-1} : D \in \mathcal{D}\}$ ailesinin ürettiği düzgünlük olmak üzere, $(X, \mathcal{D}^*)$ düzgün uzayı tam ise $(X, \mathcal{D})$ ye ikili-tam quasi-düzgün uzay denir (Fletcher ve Lindgren, 1982).

1. 2. 17. Tanım: $(X, \mathcal{D})$ ve $(Y, \mathcal{F})$ iki quasi-düzgün uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $F \in \mathcal{F}$ için $(x, y) \in D \Longrightarrow \big(f(x), f(y)\big) \in F$ olacak şekilde bir $D \in \mathcal{D}$ varsa, f ye bir quasi-düzgün sürekli fonksiyon denir (Fletcher ve Lindgren, 1982).

1. 2. 18. Teorem: $(X, \mathcal{D})$ bir quasi-düzgün uzay, $(Y, \mathcal{F})$ bir ikili-tam T_0 quasi-düzgün uzay, $\mathcal{D}^*$, $\{D \cap D^{-1} : D \in \mathcal{D}\}$ ailesinin ürettiği düzgünlük olmak üzere, A, $(X, \tau_{\mathcal{D}^*})$ ın bir yoğun altkümesi ve $f : (A, \mathcal{D}|A \times A) \longrightarrow (Y, \mathcal{F})$ bir quasi-düzgün sürekli fonksiyon olsun. O zaman tek bir $g : (X, \tau_{\mathcal{D}^*}) \longrightarrow (Y, \tau_{\mathcal{F}^*})$ sürekli genişlemesi vardır ve g quasi-düzgün süreklidir (Fletcher ve Lindgren, 1982).

1. 2. 19. Sonuç: (X, τ) bir metriklenebilir topolojik uzay olsun. 1. 2. 14. önerme ve 1. 2. 15. Niemytzki-Tychonoff Teoreminden; X üzerinde $\tau = \tau_d$ olacak şekildeki her d metriği tamdır ancak ve ancak X üzerinde $\tau = \tau_d$ olacak şekildeki her d metriği öntıkızdır.

BÖLÜM 2

T-NORMLAR

2. 1. Temel Tanımlar ve Özellikler

2. 1. 1. Tanım: Her $x, y, z \in [0,1]$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna, bir üçgensel norm veya kısaca t-norm denir.

(T1) $T(x,y) = T(y,x)$ (simetri özelliği)

(T2) $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z)$ (birleşmelilik)

(T3) $y \leq z \Longrightarrow T(x,y) \leq T(x,z)$ (monotonluk)

(T4) $T(x,1) = x$ (sınır koşulu)

Bir t-norm, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir ikili işlem olduğundan $T(x,y)$ gösterimi yerine $x * y$ gösterimi de kullanılır. Bu durumda (T1) – (T4) aksiyomları aşağıdaki gibi yazılabilir: Her $x, y, z \in [0,1]$ için,

(T1) $x * y = y * x$

(T2) $x * (y * z) = (x * y) * z$

(T3) $y \leq z \Longrightarrow x * y \leq x * z$

(T4) $x * 1 = x$ (Klement ve ark., 2000).

T-normların özelliklerini incelerken kolaylık sağlaması bakımından, bölüm 2 boyunca $T(x,y)$ gösterimi kullanılacaktır.

Sayılamaz çoklukta t-norm mevcuttur. İlk olarak dört temel t-norm verilecektir.

2. 1. 2. Örnek: Aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyonlar birer t-normdur. Bu dört temel t-norm, sırasıyla minimum (T_M), çarpım (T_P), Lukasiewicz (T_L) ve drastik çarpım (T_D) (bkz. Şek. 1) olarak adlandırılır.

$$T_M(x,y) = \min\{x,y\}$$

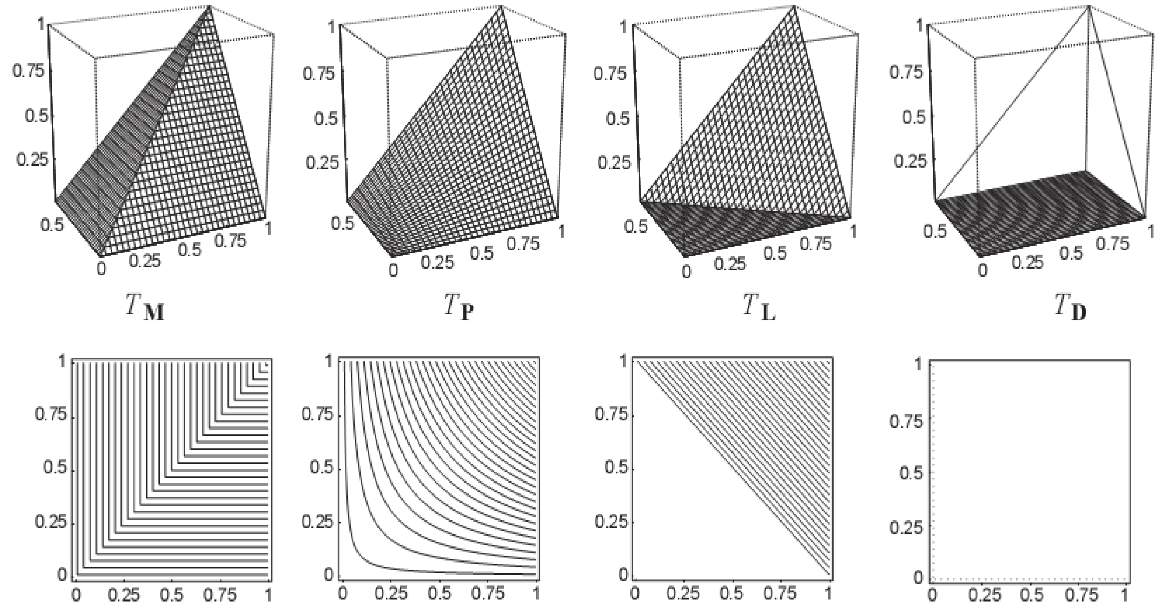
$$T_P(x,y) = x \cdot y$$

$$T_L(x,y) = \text{maks}\{x+y-1, 0\}$$

$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & ,(x,y) \in [0,1)^2 \ ise \\ \min\{x,y\} & ,(x,y) \notin [0,1)^2 \ ise \end{cases}$$

(Klement ve ark., 2000).

T-normların grafik ile gösterimi çeşitli yollarla yapılacaktır: 3 boyutlu çizim, yani birim küpte yüzey olarak; söz konusu fonksiyonun sabit değerler aldığı yerlerdeki eğrileri gösteren dış hat çizimi olarak ve nadiren köşegen kesitleri olarak, yani $x \longmapsto F(x,x)$ fonksiyonunun grafiği olarak.



Şekil 1. Dört temel t-norm T_M, T_P, T_L, T_D nin 3 boyutlu çizimi (üstte) ve dış hat çizimi (altta) (Klement ve ark., 2004a).

Sınır koşulu (T4) ve monotonluk (T3) minimal formda verilmiştir. Aslında, daha fazlası vardır:

2. 1. 3. Uyarı: 2. 1. 1. Tanımdan, bir T t-normu her $x \in [0,1]$ için aşağıdaki ek sınır koşullarını sağlar:

$$T(0,x) = T(x,0) = 0 \quad \textbf{(2.1)}$$

$$T(1,x) = x \quad \textbf{(2.2)}$$

O halde, bütün t-normlar $[0,1]^2$ birim karesinin sınırı üzerinde aynı değere sahiptir (Klement ve ark., 2000).

Kanıt: T bir t-norm ve $x \in [0,1]$ olsun. O zaman,

$$0 \leq T(x,0) = T(0,x) \leq T(0,1) = 0$$

ve

$$T(1,x) = T(x,1) = x$$

bulunur.

2. 1. 4. Uyarı: T bir t-norm ve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ olsun. O zaman,

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \Longrightarrow T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2) \qquad \textbf{(2.3)}$$

(Klement ve ark., 2000).

Kanıt: $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ verilsin. O zaman,

$$T(x_1, y_1) \leq T(x_1, y_2) = T(y_2, x_1) \leq T(y_2, x_2) = T(x_2, y_2)$$

olur.

2. 1. 5. Tanım: T_1 ve T_2 iki t-norm olsun. Her $x, y \in [0,1]$ için, $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ oluyorsa T_1, T_2 den daha zayıftır veya T_2, T_1 den daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

Eğer $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise, yani, eğer $T_1 \leq T_2$ ve $T_1(x_0, y_0) \neq T_2(x_0, y_0)$ olacak şekilde bir $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ varsa, $T_1 < T_2$ biçiminde yazılır (Klement ve ark., 2004a).

2. 1. 6. Uyarı: Drastik çarpım T_D en zayıf ve minimum T_M en güçlü t-normdur, yani her T t-normu için,

$$T_D \leq T \leq T_M \qquad \textbf{(2.4)}$$

sağlanır (Klement ve ark., 2000).

Kanıt: T bir t-norm ve $x, y \in [0,1]$ olsun. O zaman,

$$T(x,y) \leq T(x,1) = x, \qquad T(x,y) \leq T(1,y) = y$$

olur. Buradan,

$$T(x,y) \leq \min\{x,y\} = T_M(x,y)$$

bulunur. 2. 1. 3. Uyarıda görüldüğü gibi, bütün t-normlar $[0,1]^2$ birim karesinin sınırı üzerinde aynı değere sahip, ve her $x,y \in (0,1)$ için, $T(x,y) \geq 0 = T_D(x,y)$ olduğundan,

$$T_D(x,y) \leq T(x,y)$$

olur. O halde, $T = T_D$ veya $T = T_M$ olabileceği için,

$$T_D \leq T \leq T_M$$

elde edilir.

2. 1. 7. Uyarı: Dört temel t-norm arasında aşağıdaki biçimde bir sıralama ilişkisi vardır.

$$T_D < T_L < T_P < T_M \tag{2.5}$$

(Klement ve ark., 2000).

Kanıt: 2. 1. 6. Uyarı göz önüne alındığında, $T_L < T_P$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x,y \in (0,1)$ olsun. $x + y \leq 1$ ise,

$$T_P(x,y) = xy > 0 = T_L(x,y)$$

olur, $x + y > 1$ ise,

$$T_P(x,y) - T_L(x,y) = xy - (x + y - 1) = (x-1)(y-1) > 0$$

ve

$$T_P(x,y) > T_L(x,y)$$

olur. O halde, $T_L < T_P$ dir.

2. 1. 8. Tanım: Her $x,y,z \in [0,1]$ için, (T1) - (T3) koşullarını sağlayan bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x,y \in [0,1]$ için,

$$F(x,y) \leq \min\{x,y\} = T_M(x,y) \tag{2.6}$$

biçiminde ise F ye bir t-alt norm denir (Klement ve ark., 2004a).

2. 1. 9. Önerme: $F : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-alt norm olsun. O zaman,

$$T(x,y) := \begin{cases} F(x,y), & (x,y) \in [0,1)^2 \\ \min\{x,y\}, & (x,y) \notin [0,1)^2 \end{cases} \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlanan $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur (Klement ve ark., 2004a).

Kanıt: (T1) ve (T4) koşullarının sağlandığı açıktır. Eğer $x, y, z \in [0,1)$ ise F t-alt norm olduğundan $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z)$ olur. Eğer $x = 1$ veya $y = 1$ veya $z = 1$ ise, (T4) sağlandığından $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z)$ dir. Böylece, (T2) koşulu sağlanır. Ayrıca $x, y, z \in [0,1)$ ve $y \le z$ ise, F t-alt norm olduğundan, $T(x,y) \le T(x,z)$ dir. Eğer $x = 1$ veya $y = 1$ veya $z = 1$ ve $y \le z$ ise, (2.6) gereği $T(x,y) \le T(x,z)$ olur. Yani, (T3) koşulu da sağlanır. O halde, T bir t-normdur.

Bir t-normunun, birim kare köşegeni üzerindeki değerleri ile tek olarak belirlenip belirlenemeyeceği ilginç bir problemdir. Genel olarak bu doğru değildir, ancak iki uç t-norm T_D ve T_M, birim kare köşegeni üzerindeki değerleri ile tamamıyla belirlenebilir.

2. 1. 10. Önerme: T bir t-norm olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

(i) $T = T_M \iff \forall x \in [0,1]$ için $T(x,x) = x$

(ii) $T = T_D \iff \forall x \in [0,1)$ için $T(x,x) = 0$

(Klement ve ark., 2000).

Kanıt: **(i)** $T = T_M$ ise $\forall x \in [0,1]$ için $T(x,x) = T_M(x,x) = \min\{x,x\} = x$ dir. Diğer taraftan, $\forall x \in [0,1]$ için $T(x,x) = x$ olsun. $T = T_M$ olduğunu göstermek için; $x, y \in [0,1]$ ve $x \le y$ verilsin. O zaman,

$$T_M(x,y) = \min\{x,y\} = x = T(x,x) \le T(x,y)$$

olur, $T \le T_M$ olduğundan, $T(x,y) = \min\{x,y\}$ dir. Buradan, $T = T_M$ bulunur.

(ii) $\forall x \in [0,1)$ için $T_D(x,x) = 0$ dır. Diğer taraftan, $\forall x \in [0,1)$ için $T(x,x) = 0$ olsun. $T = T_D$ olduğunu göstermek için; $x, y \in [0,1)$ ve $x \le y$ verilsin. O zaman, $T(x,y) \le T(y,y) = 0 = T_D(x,y)$ dır. Buradan, bütün t-normlar $[0,1]^2$ birim karesinin sınırı üzerinde aynı değere sahip olduğundan $T \leq T_D$ dir. Ayrıca, $T_D \leq T$ olduğundan $T = T_D$ olur.

2. 1. 11. Uyarı: (i) Birleşmelilik (T2) sayesinde, ikili işlem olarak tanımlanan bir T t-normu, herhangi bir $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için tümevarım ile bir tek şekilde n-li işleme genişletilebilir: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ olmak üzere,

$$T_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n), & n \neq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

olur. Özel olarak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ ise, kısaca

$$x_T^{(n)} = T(x, x, \dots, x) \tag{2.9}$$

biçiminde yazılabilir.

(ii) Her bir T t-normu T_M den daha zayıf olduğundan elemanları $[0,1]$ de olan her $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisi için, $\{T_{i=1}^{n} x_i\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi artmayan ve alttan sınırlı, dolayısıyla yakınsaktır. O halde aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n \to \infty} T_{i=1}^{n} x_i \tag{2.10}$$

(Klement ve ark., 2000).

2. 1. 12. Örnek: Dört temel t-norm için n-li genişlemeler aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$T_M(x_1, x_2, \dots, x_n) = min\,\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$T_P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

$$T_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{maks}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0\right\}$$

$$T_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i, & her\ j \neq i\ için\ x_j = 1\ ise \\ 0, & diğer\ durumda \end{cases}$$

2. 1. 1. Tanımda verilen (T1)-(T4) aksiyomları, aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi birbirinden bağımsızdır (Klement ve ark., 2000).

2. 1. 13. Örnek: $i = 1, 2, 3, 4$ için $F_i : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$F_1(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, 0.5] \times [0, 1) \\ \min\{x, y\}, & diğer\ durumda \end{cases}$$

$$F_2(x, y) = x \cdot y \cdot \text{maks}\,\{x, y\}$$

$$F_3(x, y) = \begin{cases} 0.5, & (x, y) \in (0, 1)^2 \\ \min\{x, y\}, & diğer\ durumda \end{cases}$$

$$F_4(x, y) = 0$$

Her bir F_i fonksiyonu (Ti) aksiyomu hariç (T1)-(T4) aksiyomlarını sağlar (Klement ve ark., 2000).

2. 1. 14. Tanım: $S : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) koşullarını sağlayan bir S fonksiyonu her $x \in X$ için,

$$\text{(S4)} \qquad S(x,0) = x$$

biçiminde ise S ye bir üçgensel konorm (t-konorm) denir (Klement ve ark., 2000).

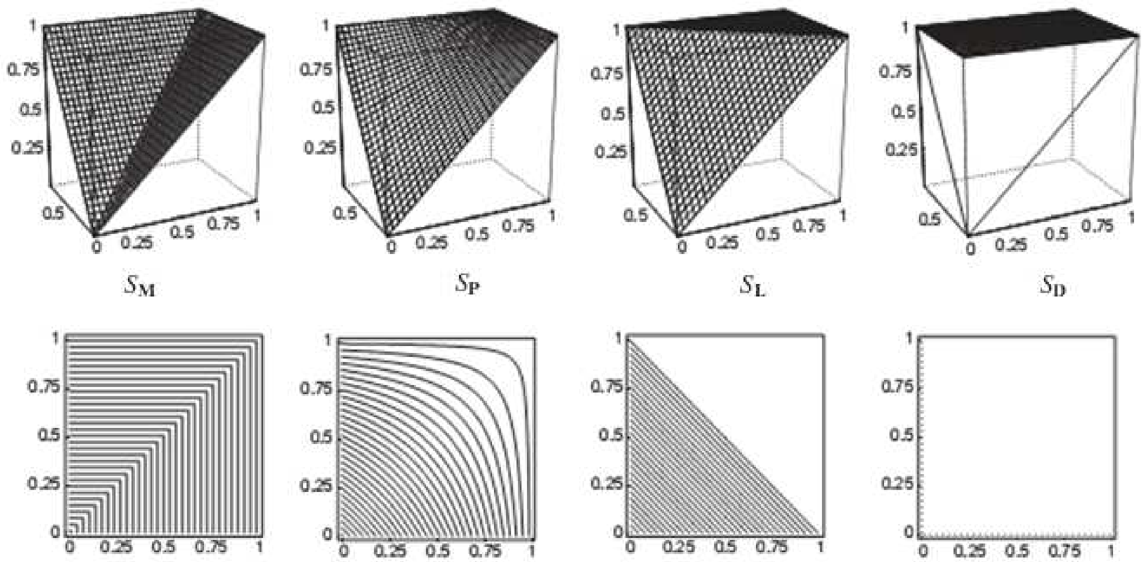
2. 1. 15. Örnek: Aşağıda, dört temel t-konorm verilmiştir. Bu dört temel t-konorm, sırasıyla maksimum (S_M), probabilistik toplam (S_P), Lukasiewicz t-konorm veya (sınırlı toplam) (S_L) ve drastik toplam (S_D) (bkz. Şek. 2) olarak adlandırılır.

$$S_M(x,y) = \text{maks}\,\{x,y\}$$

$$S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$$

$$S_L(x,y) = \min\,\{x+y, 1\}$$

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & ,(x,y) \in (0,1]^2 \; ise \\ \text{maks}\{x,y\} & ,(x,y) \notin (0,1]^2 \; ise \end{cases}$$



Şekil 2. Dört temel t-konorm S_M, S_P, S_L, S_D nin 3 boyutlu çizimi (üstte) ve dış hat çizimi (altta). (Klement ve ark., 2004a).

2. 1. 16. Önerme: $S : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur ancak ve ancak her $(x,y) \in [0,1]^2$ için aşağıdaki koşulu sağlayan bir T t-normu vardır (Klement ve ark., 2000).

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y) \qquad \textbf{(2.11)}$$

Kanıt: T bir t-norm ise, (2.11) ile tanımlanan S fonksiyonu (T1)-(T3) ve (S4) koşullarını sağlar, bu nedenle S bir t-konormdur. Diğer taraftan, S bir t-konorm ise,

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y) \tag{2.12}$$

ile tanımlı $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu (T1)-(T4) koşullarını sağlar. Dolayısıyla T bir t-normdur.

2. 1. 17. Tanım: (2.11) ile tanımlanan t-konorma, T t-normunun dual t-konormu ve benzer şekilde, (2.12) ile tanımlanan t-norma, S t-konormunun dual t-normu denir (Klement ve ark., 2000).

(2.11) ile ifade edilen duallik, t-normların birçok özelliğinin t-konormların ilgili özelliklerine aktarılmasını sağlar.

2. 1. 18. Uyarı: (i) 2. 1. 16. Önermeden, her t-normun, bir t-konormun dual işlemi olduğu sonucu elde edilir. $(T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L)$ ve (T_D, S_D) t-norm ve t-konorm ikilileri karşılıklı olarak birbirine dualdirler.

(ii) Aşağıda verilen ek sınır koşullarının sonucu olarak, bütün t-konormlar $[0,1]^2$ birim karesinin sınırları üzerinde aynı değere sahiptir.

$$S(1,x) = S(x,1) = 1$$

$$S(0,x) = x$$

(iii) Duallik sıralamanın yönünü değiştirir: $T_1 \leq T_2$ olacak şekildeki herhangi T_1 ve T_2 t-normları için, S_1 ve S_2 sırasıyla T_1 ve T_2 nin dual t-konormları ise $S_1 \geq S_2$ elde edilir. Sonuç olarak, herhangi bir S t-konormu için,

$$S_M \leq S \leq S_D$$

olur, yani maksimum S_M en zayıf, drastik toplam S_D en güçlü t-konormlardır. 2. 1. 15. Örnekteki t-konormlar için aşağıdaki sıralama geçerlidir:

$$S_M < S_P < S_L < S_D$$

(iv) Verilen bir S t-konormu, 2. 1. 11. uyarıdakine benzer şekilde, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ olmak üzere aşağıdaki gibi genişletilebilir:

$$S_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ S(S_{i=1}^{n-1} x_i, x_n), & n \neq 0 \end{cases}$$

(Klement ve ark., 2000).

2. 1. 19. Örnek: Dört temel t-konorm için aşağıdaki n-li genişlemeler elde edilir:

$$S_M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{maks}\,\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$S_P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

$$S_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \, , 1\right\}$$

$$S_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i, & \forall j \neq i \; için \; x_j = 0 \; ise \\ 1, & diğer \; durumda \end{cases}$$

(Klement ve ark., 2000).

2. 1. 20. Uyarı: Eğer (T, S) birbirlerinin duali olan t-norm ve t-konorm ise (2.11) ve (2.12) duallikleri aşağıdaki gibi genişletilebilir:

$$S_{k\in K}(x_k) = 1 - T_{k\in K}(1 - x_k)$$
$$T_{k\in K}(x_k) = 1 - S_{k\in K}(1 - x_k)$$

(Klement ve ark., 2000).

Drastik çarpım T_D ve onun duali olan S_D den de görüleceği gibi t-normlar ve t-konormlar verilecek tanım doğrultusunda sürekli olmak zorunda değildirler. Buna karşın, 3. bölümde fuzzy metrik uzaylar tanımlanırken sürekli t-norm kavramı kullanılacağından, sürekli t-normlar ve sürekli t-konormlar incelenecektir.

2. 1. 21. Tanım: $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-norm olsun. Eğer her $\{x_n\}, \{y_n\} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ yakınsak dizileri için

$$T\left(\lim_{n\to\infty} x_n \, , \lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(x_n, y_n)$$

oluyorsa T süreklidir (Klement ve ark., 2000).

T-konormun tanımından, bir t-konormun sürekliliği onun dual t-normunun sürekliliğine denktir.

$[0,1]^2$ birim karesi, $\mathbb{R}^2$ reel düzleminin bir tıkız altkümesi olduğundan, bir $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ t-normunun sürekli olması, onun düzgün sürekli olmasına denktir.

Genel olarak, iki değişkenli bir reel fonksiyon, her bir değişkenine göre sürekli olabilir ancak, iki değişkenli bir fonksiyon olarak, kendi tanım kümesi üzerinde sürekli olmayabilir. Monotonluklarından dolayı, üçgensel normlar (ve konormlar) bu durumun dışındadır:

2. 1. 22. Önerme: Bir $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ t-normu süreklidir ancak ve ancak her bir bileşenine göre süreklidir, yani, her $x_0, y_0 \in [0,1]$ için hem $T(x_0, .): [0, 1] \longrightarrow [0,1]$ hem de $T(., y_0): [0, 1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu süreklidir (Klement ve ark., 2004a).

Kanıt: $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ t-normu sürekli ise, her bir bileşenine göre de süreklidir.

Diğer taraftan, T her bir bileşenine göre sürekli olsun. $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, [0,1] de sırasıyla x_0 ve y_0 noktalarına yakınsayan birer dizi olsunlar. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için, aşağıdaki koşulları sağlayan $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ monoton dizileri oluşturulabilir.

$$a_n \leq x_n \leq b_n \text{ ve } \{a_n\} \nearrow x_0,\ \{b_n\} \searrow x_0$$
$$c_n \leq y_n \leq d_n \text{ ve } \{c_n\} \nearrow y_0,\ \{d_n\} \searrow y_0$$

T, ikinci bileşenine göre sürekli olduğundan $T(x_0, .)$ süreklidir. Buradan, T nin monotonluğu da kullanılarak,

$$\exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N \text{ için}$$
$$T(x_0, y_0) - \varepsilon < T(x_0, c_N) \leq T(x_0, y_n) \leq T(x_0, d_N) < T(x_0, y_0) + \varepsilon$$

elde edilir.

T, birinci bileşenine göre sürekli olduğundan, $T(., c_N)$ ve $T(., d_N)$ fonksiyonları da süreklidir. Buradan, T nin monotonluğu da kullanılarak,

$$\exists M \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N, \forall m \geq M \text{ için}$$
$$T(x_0, c_N) - \varepsilon < T(a_M, c_N) \leq T(x_m, y_n) \leq T(b_M, d_N) < T(x_0, d_N) + \varepsilon$$

olur.

$K := \text{maks}\,\{M, N\}$ yazılırsa, her $k \geq K$ için,

$$T(x_0, y_0) - 2\varepsilon < T(x_k, y_k) < T(x_0, y_0) + 2\varepsilon$$

elde edilir ki, bu da $\{T(x_k, y_k)\}$ dizisinin $T(x_0, y_0)$ değerine yakınsaması demektir. Yani T, (x_0, y_0) da süreklidir. ■

(T1) simetri özelliğinden ve 2. 1. 22. teoremden dolayı, bir t-normun ya da bir t-konormun sürekliliği, onun birinci bileşenine göre sürekliliğine denktir.

Bazı durumlarda, uygulamalar için sürekliliğin daha zayıf formları yeterli olmaktadır:

2. 1. 23. Tanım: $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-norm olsun. Eğer her $y \in [0,1]$ için ve her azalmayan (artmayan) $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n, y) = T(\lim_{n\to\infty} x_n\, , y)$$

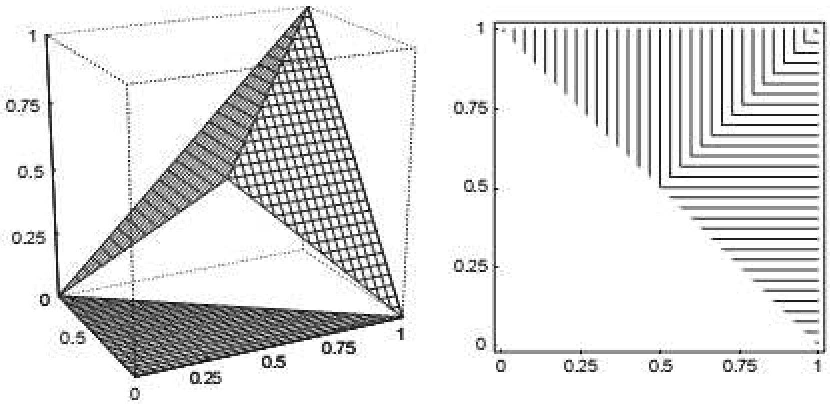
oluyorsa, T t-normu sol-süreklidir (sağ-süreklidir) denir (Klement ve ark., 2004a).

Bir t-norm süreklidir ancak ve ancak hem sol- hem de sağ-süreklidir.

$$T^{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1 \\ \min\{x, y\}, & x + y > 1 \end{cases} \qquad \textbf{(2.13)}$$

ile tanımlanan nilpotent minimum T^{nM}, sol-sürekli olan ama sağ-sürekli olmayan bir t-normdur. Diğer taraftan, drastik çarpım T_D sağ-süreklidir ama sol-sürekli değildir.

Bir T t-normu sol- (sağ-) süreklidir ancak ve ancak onun dual t-konormu sağ- (sol-) süreklidir.



Şekil 3. (2.13) ile tanımlı nilpotent minimum T^{nM} nin 3 boyutlu (solda) ve dış hat çizimi (sağda). (Klement ve ark., 2004a).

2. 1. 24. Tanım: T bir t-norm olsun.

(i) $a \in [0,1]$ için $T(a,a) = a$ ise, a ya, T nin bir idempotent elemanı denir.

(ii) $a \in (0,1)$ için $a_T^{(n)} = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa, a ya, T nin bir nilpotent elemanı denir.

(iii) $a \in (0,1)$ için $T(a,b) = 0$ olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ varsa, a ya T nin sıfır böleni denir (Klement ve ark., 2004a).

2. 1. 25. Örnek: Minimum t-normu, T_M nin idempotent elemanları kümesi $[0,1]$ e eşittir. Lukasiewicz t-normu T_L ve drastik çarpım T_D için nilpotent elemanlar kümesi ve sıfır bölenler kümesi $(0,1)$ e eşittir. Minimum t-normu T_M ve çarpım t-normu T_P nin ne nilpotent elemanı ne de sıfır böleni vardır (Klement ve ark., 2004a).

2. 1. 26. Tanım: T bir t-norm olsun.

(i) Eğer $x > 0$ ve $y < z$ olduğunda, $T(x,y) < T(x,z)$ oluyorsa T ye kesin monotondur denir.

(ii) Eğer her $x, y \in (0,1)$ için, $x_T^{(n)} < y$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa T ye Arşimedyandır denir (Klement ve ark., 2004a).

2. 1. 27. Örnek: T_M ne kesin monoton, ne de Arşimedyandır. T_P hem kesin monoton, hem de Arşimedyandır. T_L ve T_D ise Arşimedyandır ancak kesin monoton değildir (Klement ve ark., 2004a).

2. 1. 28. Tanım:

(i) Sürekli ve kesin monoton bir T t-normuna sıkıdır (strikt) denir.

(ii) T bir t-norm olsun. T sürekli ve her $a \in (0,1)$ noktası T nin bir nilpotent elemanı ise T ye nilpotenttir denir (Klement ve ark., 2004a).

2. 1. 29. Örnek: Çarpım t-normu T_P bir sıkı t-norm ve Lukasiewicz t-normu T_L bir nilpotent t-normdur (Klement ve ark., 2004a).

2. 2. T-normların Oluşturulması

Bu kısımda bazı t-norm oluşturma teknikleri kanıtsız olarak verilecektir.

2. 2. 1. Önerme: T bir t-norm ve $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, kesin artan, bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}\Big(T\big(\varphi(x),\varphi(y)\big)\Big) \tag{2.14}$$

ile verilen $T_\varphi : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

Başka bir deyişle, T ve T_φ t-normları, her $x, y \in [0,1]$ için,

$$\varphi\Big(T_\varphi(x,y)\Big) = T\big(\varphi(x),\varphi(y)\big)$$

olması anlamında birbirlerine izomorfturlar (Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 2. Uyarı: Her $\varphi, \psi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ kesin artan, bire-bir ve örten fonksiyonları ve her T t-normu için,

$$(T_\varphi)_\psi = T_{\varphi\circ\psi}$$

$$(T_\varphi)_{\varphi^{-1}} = (T_{\varphi^{-1}})_\varphi = T$$

olur (Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 3. Uyarı: Herhangi kesin artan, bire-bir ve örten fonksiyon altında, (2.14) yapısına göre değişmeyen t-normlar sadece iki uç t-norm T_M ve T_D dir. Yani, eğer bir T t-normu sadece kendine izomorf ise ya $T = T_M$ ya da $T = T_D$ dir.

(2.14) eşitliği, her bir t-norm için, idempotent ve nilpotent eleman varlığını ve sıfır bölen varlığını koruduğu gibi, sürekliliği, Arşimedyan özelliğini ve sıkılığı da korur. Bu, (2.14) eşitliğinin hem güçlü hem de zayıf olduğunu gösterir: Herhangi bir T t-normu için bir T_φ t-normu oluşturulabilir ve bu T_φ t-normu tam olarak T ile aynı cebirsel özelliklere sahiptir (Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 4. Tanım: $[a,b]$ ve $[c,d]$, genelleştirilmiş reel eksen $[-\infty,\infty]$ un kapalı alt aralıkları olmak üzere, $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ bir monoton fonksiyon olsun.

$$f^{(-1)}(y) := \begin{cases} \sup\{x \in [a,b] | f(x) < y\}, & f(a) < f(b)\ ise \\ \sup\{x \in [a,b] | f(x) > y\}, & f(a) > f(b)\ ise \\ a & , \quad f(a) = f(b)\ ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f^{(-1)} : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ fonksiyonuna, f fonsiyonunun pseudo-tersi denir (Klement ve ark., 2004b).

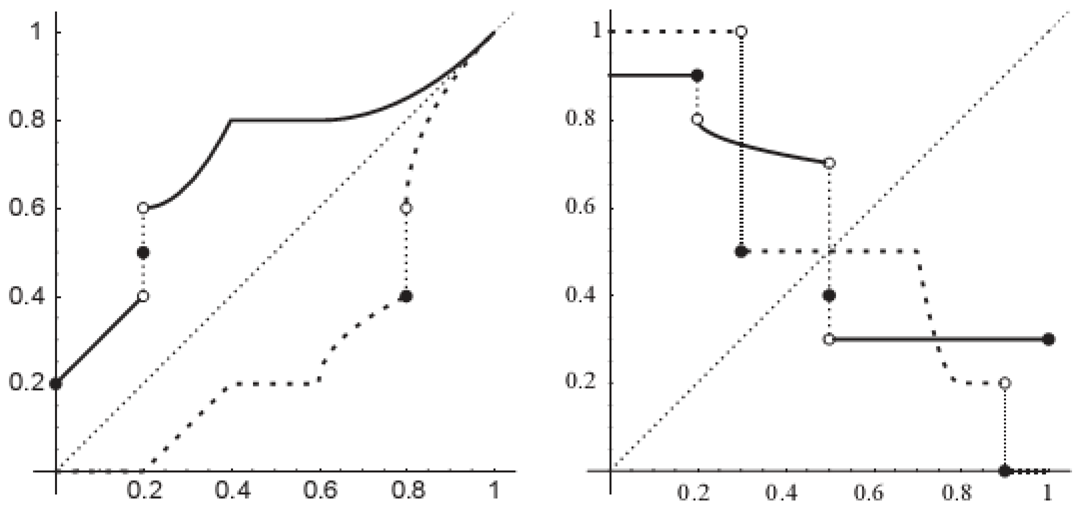
2. 2. 5. Örnek: $[1.5, 2.5] \subseteq [c,d]$ olmak üzere, $f(x) = \frac{x+4}{2}$ biçiminde verilen $f : [-1,1] \longrightarrow [c,d]$ fonksiyonunun pseudo-tersi olan $f^{(-1)} : [c,d] \longrightarrow [-1,1]$, $f^{(-1)}(x) = \text{maks}\,\{\min\{2x-4, 1\}, -1\}$ biçiminde elde edilir (Klement ve ark., 2004b).

Sürekli olmayan, bire-bir ve örten olmayan monoton fonksiyonların pseudo-terslerinin gösterimi şekil 4 deki gibidir. Bu şekiller ayrıca sabit olmayan bir $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ monoton fonksiyonun, $f^{(-1)}$ pseudo-tersinin grafiğinin nasıl çizileceğini de gösterir:

(1) f nin süreksizlik noktalarında dikey doğru parçaları çizilir.

(2) Elde edilen grafiğin $y = x$ doğrusuna göre simetriği alınır.

(3) Elde edilen grafikten, en alt noktaları hariç dikey doğru parçaları kaldırılır.



Şekil 4. Pseudo-tersleri ile birlikte (kesikli çizgili grafikler), $[0,1]$ den $[0,1]$ e iki monoton fonksiyon.

(Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 6. Teorem: $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ kesin azalan bir fonksiyon, $f(1) = 0$, f, 0 noktasında sağ-sürekli ve her $x, y \in [0,1]$ için

$$f(x) + f(y) \in Ran(f) \cup [f(0), \infty]$$

olsun. Aşağıda verilen $T :\ [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur:

$$T(x,y) = f^{(-1)}\big(f(x) + f(y)\big)$$

(Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 7. Tanım: T bir t-norm, $t : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ kesin azalan bir fonksiyon, $t(1) = 0$, t, 0 noktasında sağ-sürekli ve her $x, y \in [0,1]$ için

$$t(x) + t(y) \in Ran(t) \cup [t(0), \infty]$$

olsun.

$$T(x,y) = t^{(-1)}\big(t(x) + t(y)\big)$$

ise, t ye, T t-normunun bir toplamsal üretecidir denir (Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 8. Örnek: $t :\ [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ olmak üzere, $t(x) = 1 - x$ Lukasiewicz t-norm T_L yi, $t(x) = -lnx$ çarpım t-normu T_P yi üretir. Ayrıca,

$$t(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in [0,1) \\ \quad 0, & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonu, Drastik çarpım T_D nin bir toplamsal üretecidir (Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 9. Önerme: T bir t-norm ve $t :\ [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$, T nin bir toplamsal üreteci olsun. O zaman, aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) T süreklidir.

(ii) T, $(1,1)$ noktasında sol-süreklidir.

(iii) t süreklidir.

(iv) t, 1 de sol-süreklidir (Klement ve ark., 2000).

Kanıt: (iii) $\Longrightarrow$ (i) : t, T nin bir toplamsal üreteci olduğundan t sürekli ise T de süreklidir.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : T sürekli ise, T, $(1,1)$ noktasında sol-süreklidir.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) : t, 1 de sol-sürekli olmasın. Buradan, $\lim_{x\to 1^-} t(x) > 0$ olur. O halde, $\lim_{x\to 1^-} T(x,x) = \lim_{x\to 1^-} t^{(-1)}\big(2t(x)\big) < 1$ olur ki bu durum T nin $(1,1)$ noktasında sol-sürekli olması ile çelişir.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) : t, $(0,1]$ üzerinde sürekli olmasın. O zaman, $(a,b) \cap Ran(t) = \emptyset$ olacak şekilde bir $(a,b) \subseteq \big(0, t(0)\big)$ aralığı vardır. $Ran(t)$ nin özelliğinden, her $n \in \mathbb{N}$ için

$\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right) \cap Ran(t) = \emptyset$ dir. n_0, $\frac{a}{b-a}$ sayısından daha büyük olan en küçük tam sayı olsun. O zaman, her $n \geq n_0$ için $\frac{a}{n} < \frac{b}{n+1}$ olur, yani $\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)$ ve $\left(\frac{a}{n+1},\frac{b}{n+1}\right)$ kesişir. Dolayısıyla,

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right) = \left(0,\frac{b}{n_0}\right)$$

olur. Buradan, $\lim_{x\to 1^-} t(x) \geq \frac{b}{n_0}$ bulunur. O halde, t, 1 de sol-sürekli değildir.

2. 2. 10. Sonuç: Toplamsal üretece sahip bir sol-sürekli t-norm süreklidir (Klement ve ark., 2000).

2. 2. 11. Önerme: T bir t-norm ve $t:\ [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$, T nin bir toplamsal üreteci olsun. T sağ-süreklidir ancak ve ancak T nin sağ-sürekli bir toplamsal üreteci vardır (Klement ve ark., 2000).

Kanıt: Eğer T nin bir $t:\ [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ sağ-sürekli toplamsal üreteci varsa, t nin pseudo-tersi $t^{(-1)}: [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$ sürekli olur. O halde, T sağ-süreklidir.

Tersine, T bir sağ-sürekli t-norm ve $t:\ [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ onun herhangi bir toplamsal üreteci olsun. $\bar{t}:\ [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$,

$$\bar{t}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{y\to x^+} t(x), & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

tanımlansın. $\bar{t}$, bir t-normun bir sağ-sürekli toplamsal üretecidir. Hem $Ran(t)$ hem de $Ran(\bar{t})$, aynı uç noktalı aralıkların birleşimi olarak yazılabilir. $Ran(\bar{t})$ için bu aralıklar (birinci aralık farklı olabilir) $(a,b]$ formundadır, yani her $x,y \in [0,1]$ için, $\bar{t}(x)+\bar{t}(y) \in Ran(\bar{t}) \cup [\bar{t}(0),\infty]$ sağlanır. Ayrıca, $\bar{t}^{(-1)} = t^{(-1)}$ dir. Öyleyse, her $x,y \in [0,1]$ için ve $x+\varepsilon, y+\varepsilon \in (0,1)$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} T(x+\varepsilon, y+\varepsilon) &= t^{(-1)}\big(t(x+\varepsilon)+t(y+\varepsilon)\big) \\ &\geq \bar{t}^{(-1)}\big(\bar{t}(x)+\bar{t}(y)\big) \\ &\geq t^{(-1)}\big(t(x)+t(y)\big) \\ &= T(x,y) \end{aligned}$$

olur. T nin sağ-sürekliliğinden $\bar{t}$, T nin bir toplamsal üretecidir.

2. 2. 12. Önerme: Bir T t-normunun bir $t:\ [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ toplamsal üreteci varsa, T Arşimedyan olmak zorundadır. Ayrıca aşağıdakiler sağlanır:

(i) T t-normu kesin artandır ancak ve ancak $t(0) = \infty$ dur.

(ii) Her $x \in (0,1)$, T nin bir nilpotent elemanıdır ancak ve ancak $t(0) < \infty$ dur.

(iii) t sürekli değil ve $t(0) < \infty$ ise, $\exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall x \in [0,1)$ için $x_T^{(n_0)} = 0$ dır.

(Klement ve ark., 2004b).

Kanıt: T bir t-norm, $t : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$, T nin bir toplamsal üreteci olsun ve $x, y \in (0,1)$ verilsin. $t(x) > 0$ ve $t\left(\frac{y}{2}\right) < \infty$ dur. Buradan,

$$\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot t(x) > t\left(\frac{y}{2}\right)$$

olur. Dolayısıyla,

$$x_T^{(n)} = t^{(-1)}\big(n \cdot t(x)\big) < t^{(-1)}\left(t\left(\frac{y}{2}\right)\right) = \frac{y}{2} < y$$

bulunur. O halde T Arşimedyandır.

(i) ve (ii) nin kanıtına birlikte bakılması daha uygun olacaktır:

$t(0) = \infty$ ise, $Ran(t) \cup [t(0),\infty] = Ran(t)$ dir. $x \in (0,1]$, $y, z \in [0,1]$, $y < z$ verilsin.

$$t(x) + t(y) \in Ran(t) \text{ ve } t(x) + t(z) \in Ran(t)$$

dir. t kesin azalan olduğundan $t(x) + t(y) > t(x) + t(z)$ olur ve $t^{(-1)}|_{Ran(t)}$ de kesin azalandır. Buradan,

$$T(x,y) = t^{(-1)}\big(t(x) + t(y)\big) < t^{(-1)}\big(t(x) + t(z)\big) = T(x,z)$$

olur. O halde T kesin artandır.

$0 < a < b < 1$ olsun. T kesin monoton olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $a_T^{(n)} < b_T^{(n)}$ olur. Buradan, $b_T^{(n)} = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ yoktur, yani $b \in (0,1)$, T nin nilpotent elemanı değildir.

$t(0) < \infty$ ise, $x \in (0,1)$ için $t(x) > 0$ olduğundan,

$$\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot t(x) \geq t(0)$$

olur. Buradan,

$$x_T^{(n)} = t^{(-1)}\big(n \cdot t(x)\big) \leq t^{(-1)}\big(t(0)\big) = 0$$

ve böylece $x_T^{(n)} = 0$ dır. O halde her $x \in (0,1)$, T nin bir nilpotent elemanıdır.

$a \in (0,1)$ olsun. $\exists m \in \mathbb{N}: a_T^m = 0,\ a_T^{m-1} > 0$ dır. Buradan, $T(a_T^{m-1}, a) = 0$ olur. Ancak, $0 < \frac{a}{2} < a$ olmasına rağmen $T\left(a_T^{m-1}, \frac{a}{2}\right) \nless T(a_T^{m-1}, a)$ dır. Yani, T kesin monoton değildir. Böylece (i) ve (ii) nin kanıtı tamamlanmış olur.

t sürekli olmasın ve $t(0) < \infty$ olsun. O zaman $\lim_{x \to 1^-} t(x) > 0$ olur. $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq \frac{t(0)}{\lim_{x\to 1^-} t(x)}$ seçilirse, $n_0 \cdot \lim_{x\to 1^-} t(x) \geq t(0)$ ve buradan da her $a \in (0,1)$ için

$$a_T^{(n_0)} = t^{(-1)}\big(n_0 \cdot t(a)\big) < t^{(-1)}\left(n_0 \cdot \lim_{x\to 1^-} t(x)\right) \leq t^{(-1)}\big(t(0)\big) = 0$$

bulunur.

2. 2. 13. Sonuç: Minimum t-normu T_M, Arşimedyan olmadığından hiç bir toplamsal üreteci yoktur (Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 14. Sonuç: $t: [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$, bir T sürekli Arşimedyan t-normunun bir sürekli toplamsal üreteci ise,

(i) T sıkıdır ancak ve ancak $t(0) = \infty$ dur.

(ii) T nilpotenttir ancak ve ancak $t(0) < \infty$ dur (Klement ve ark., 2004b).

İlerde verilecek olan “t-normun çarpımsal üreteci” kavramı ile t-normun toplamsal üreteci kavramı birbirlerine dual kavramlardır. Herhangi bir t-norm için, her bir toplamsal üretece karşılık bir çarpımsal üreteç ve her bir çarpımsal üretece karşılık bir toplamsal üreteç karşılık gelir. Bu duallik, üstel fonksiyon ve logaritma fonksiyonunun $([0,\infty],+)$ toplamsal yarı grubu ile $([0,1],\cdot)$ çarpımsal yarı grubu arasında doğal izomorfizmalar olmalarından kaynaklanır:

$f: [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$, $f(x) = e^{-x}$ olsun. $f^{-1}: [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$, $f^{-1}(x) = -\ln x$ olur. Her $x, y \in [0,\infty]$ için,

$$f(x+y) = e^{-(x+y)} = e^{-x} \cdot e^{-y} = f(x) \cdot f(y)$$

ve her $x, y \in [0,1]$ için,

$$f^{-1}(x \cdot y) = -\ln(x \cdot y) = -\ln x - \ln y = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

olur.

2. 2. 15. Önerme: T bir t-norm ve $t: [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$, T nin bir toplamsal üreteci olmak üzere

$$\theta(x) := e^{-t(x)}$$

biçiminde tanımlı, $\theta: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ kesin artan fonksiyonu alınırsa, her $x, y \in [0,1]$ için,

$T(x,y) = \theta^{(-1)}\big(\theta(x) \cdot \theta(y)\big)$ olur (Klement ve ark., 2000).

2. 2. 16. Sonuç: $\theta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, 0 noktasında sağ-sürekli bir kesin artan fonksiyonu; $\theta(1) = 1$ ve her $x, y \in [0,1]$ için,

$$\theta(x) \cdot \theta(y) \in Ran(\theta) \cup [0, \theta(0)]$$

olsun. O zaman,

$$T(x,y) = \theta^{(-1)}\big(\theta(x) \cdot \theta(y)\big)$$

ile verilen $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur (Klement ve ark., 2000).

2. 2. 17. Tanım: T bir t-norm, 0 noktasında sağ-sürekli, kesin artan bir $\theta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu; $\theta(1) = 1$ ve her $x, y \in [0,1]$ için,

$$\theta(x) \cdot \theta(y) \in Ran(\theta) \cup [0, \theta(0)]$$

biçiminde olsun. Bu durumda,

$$T(x,y) = \theta^{(-1)}\big(\theta(x) \cdot \theta(y)\big)$$

ise, θ ya, T t-normunun bir çarpımsal üretecidir denir (Klement ve ark., 2000).

T-normlar ve t-konormlar arasındaki duallik nedeniyle, t-konormların da toplamsal ve çarpımsal üreteçleri düşünülebilir.

2. 2. 18. Önerme: T bir t-norm, S bu t-normun dual t-konormu ve $t : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ T nin bir toplamsal üreteci, $\theta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ T nin bir çarpımsal üreteci olsun. Sırasıyla

$$s(x) := t(1-x), \ \xi(x) := \theta(1-x)$$

biçiminde $s : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ ve $\xi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonları tanımlanırsa, her $x, y \in [0,1]$ için

$$S(x,y) = s^{(-1)}\big(s(x) + s(y)\big), \ S(x,y) = \xi^{(-1)}\big(\xi(x) \cdot \xi(y)\big)$$

elde edilir (Klement ve ark., 2000).

Kanıt: S, T nin t-konormu olduğundan, her $x, y \in [0,1]$ için, $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$ dir. Ayrıca, $s^{(-1)}(x) = 1 - t^{(-1)}(x)$, $\xi^{(-1)}(x) = 1 - \theta^{(-1)}(x)$ dir. O halde, her $x, y \in [0,1]$ için,

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y) = 1 - t^{(-1)}\big(t(1-x) + t(1-y)\big)$$

$$= 1 - t^{(-1)}\big(s(x) + s(y)\big) = s^{(-1)}\big(s(x) + s(y)\big),$$

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y) = 1 - \theta^{(-1)}\big(\theta(1-x) \cdot \theta(1-y)\big)$$

$$= 1 - \theta^{(-1)}\big(\xi(x) \cdot \xi(y)\big) = \xi^{(-1)}\big(\xi(x) \cdot \xi(y)\big)$$ elde edilir.

2. 2. 6. Teoremdekine ve 2. 2. 16. Sonuçtakine benzer şekilde, t-konormlar için aşağıdaki sonuç elde edilir.

2. 2. 19. Sonuç: (i) $s : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ kesin artan fonksiyonu, $s(0) = 0$, s, 1 noktasında sol-sürekli ve her $x, y \in [0,1]$ için,

$$s(x) + s(y) \in Ran(s) \cup [s(1), \infty]$$

biçiminde olsun. O zaman,

$$S(x, y) = s^{(-1)}\big(s(x) + s(y)\big)$$

ile verilen $S : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur.

(ii) $\xi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu; 1 noktasında sol-sürekli, kesin azalan, $\xi(0) = 1$ ve her $x, y \in [0,1]$ için,

$$\xi(x) \cdot \xi(y) \in Ran(\xi) \cup [0, \xi(1)]$$

biçiminde tanımlı ise,

$$S(x, y) = \xi^{(-1)}\big(\xi(x) \cdot \xi(y)\big)$$

ile ifade edilen $S : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur (Klement ve ark., 2000).

2. 2. 20. Tanım: (i) S bir t-konorm, $s : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ fonksiyonu; 1 noktasında sol-sürekli, kesin artan, $s(0) = 0$ ve her $x, y \in [0,1]$ için,

$$s(x) + s(y) \in Ran(s) \cup [s(1), \infty]$$

biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$S(x, y) = s^{(-1)}\big(s(x) + s(y)\big)$$

eşitliği ile verilen, s ye, S t-konormunun bir toplamsal üretecidir denir.

(ii) S bir t-konorm, $\xi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu; 1 noktasında sol-sürekli, kesin azalan, $\xi(0) = 1$ ve her $x, y \in [0,1]$ için,

$$\xi(x) \cdot \xi(y) \in Ran(\xi) \cup [0, \xi(1)]$$

biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$S(x, y) = \xi^{(-1)}\big(\xi(x) \cdot \xi(y)\big)$$

eşitliği ile verilen, ξ ye, S t-konormunun bir çarpımsal üretecidir denir (Klement ve ark., 2000).

Aşağıda tanımları verilen N, E ve L operatörleri, her bir $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ fonksiyonunu sırasıyla

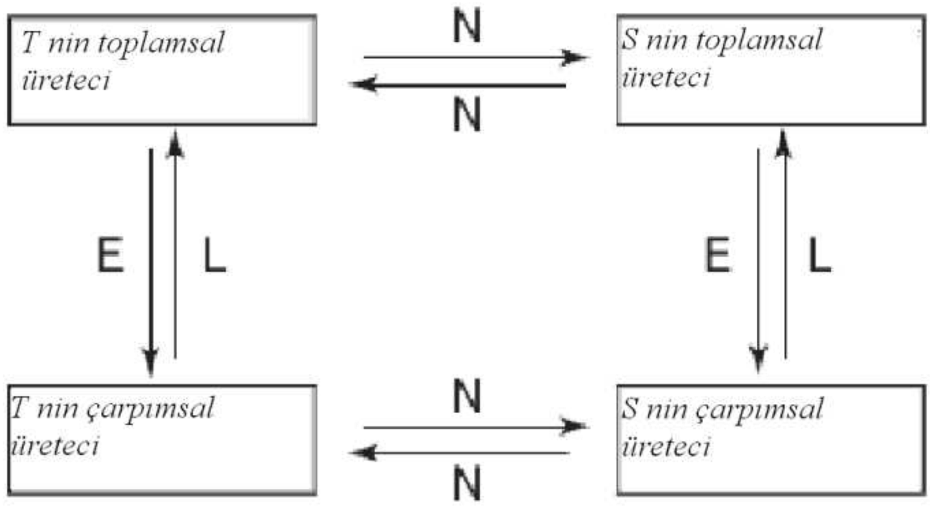
$$\mathrm{N}f(x) = f(1-x),\ \mathrm{E}f(x) = e^{-f(x)},\ \mathrm{L}f(x) = -\ln\big(f(x)\big)$$

şeklinde tanımlı $\mathrm{N}f,\ \mathrm{E}f,\ \mathrm{L}f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ fonksiyonlara dönüştürmek üzere, t-normların ve t-konormların toplamsal ve çarpımsal üreteçleri arasındaki ilişki şekil 5'te verilmiştir (Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 21. Teorem: $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ t-normlar ve $\big((a_\alpha, e_\alpha)\big)_{\alpha\in A}$, $[0,1]$ in boş olmayan, ikişer ayrık, açık alt aralıklarından oluşan bir aile olsun. O zaman, aşağıdaki şekilde tanımlanan $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur:

$$T(x,y) = \begin{cases} a_\alpha + (e_\alpha - a_\alpha)\cdot T_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha}, \frac{y-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha}\right), & x,y \in [a_\alpha, e_\alpha] \\ \min\{x,y\}, & diğer\ durumda \end{cases} \qquad \textbf{(2.15)}$$

(Klement ve ark., 2004b).



Şekil 5. Bir T t-normunun ve onun dual t-konormu S nin toplamsal ve çarpımsal üreteçleri arasındaki ilişkiler: değişmeli bir şema. Burada N, E ve L operatörleri, her bir $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ fonksiyonunu sırasıyla $\mathrm{N}f(x) = f(1-x),\ \mathrm{E}f(x) = e^{-f(x)},\ \mathrm{L}f(x) = -\ln\big(f(x)\big)$ şeklinde tanımlı $\mathrm{N}f, \mathrm{E}f, \mathrm{L}f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ fonksiyonlara dönüştürmektedir (Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 22. Tanım: $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ t-normlar ve $\big((a_\alpha, e_\alpha)\big)_{\alpha\in A}$, $[0,1]$ in boş olmayan, ikişer ayrık, açık alt aralıklarından oluşan bir aile olsun. (2.15) ile tanımlanan T t-normu $\langle a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha\rangle$, $\alpha \in A$ nın sıralı toplamıdır denir ve

$$T = (\langle a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$$

ile ifade edilir (Klement ve ark., 2004b).

2. 2. 23. Örnek:

(i) Her bir T t-normu, tek terim $\langle 0,1,T\rangle$ ile bir sıralı toplamdır, yani $T = (\langle 0,1,T\rangle)$ olur.

(ii) $T = (\langle 0.1, 0.5, T_P\rangle, \langle 0.7, 0.9, T_L\rangle)$ sıralı toplamı aşağıdaki gibidir:

$$T(x,y) = \begin{cases} 0.1 + 2.5(x-0.1)(y-0.1), & x,y \in [0.1, 0.5] \\ 0.7 + \text{maks}\{x+y-1.6, 0\}, & x,y \in [0.7, 0.9] \\ \min\{x,y\}, & diğer\ durumda \end{cases}$$

(Klement ve ark., 2000).

2. 3. Sürekli t-normlar

2. 3. 1. Teorem: Bir $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(i) T bir sürekli Arşimedyan t-normdur.

(ii) T nin bir sürekli toplamsal üreteci vardır, yani, pozitif çarpımsal sabite göre tek olarak belirlenen ve $t(1) = 0$, her $(x,y) \in [0,1]^2$ için,

$$T(x,y) = t^{(-1)}(t(x) + t(y))$$

biçiminde tanımlı bir sürekli, kesin azalan $t : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ fonksiyonu vardır. Burada, t nin pozitif çarpımsal sabite göre tek olarak belirlenmesinden; t_1 ve t_2 yukarıdaki koşulları sağlayan iki fonksiyon ise, $\lambda \in (0,\infty)$ olmak üzere $t_1 = \lambda t_2$ olduğu kastedilmektedir (Klement ve ark., 2004c).

Kanıt: (ii) $\Longrightarrow$ (i) : 2. 2. 6. Teorem, 2. 2. 9. Önerme ve 2. 2. 12. Önermeden çıkar.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : $x \in [0,1]$ ve $m,n \in \mathbb{N}$ için,

$$x_T^{(\frac{1}{n})} = \sup\left\{y \in [0,1] : \ y_T^{(n)} < x\right\},$$

$$x_T^{(\frac{m}{n})} = (x_T^{(\frac{1}{n})})_T^{(m)}$$

tanımlansın. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_T^{(\frac{km}{kn})} = x_T^{(\frac{m}{n})}$ olduğundan $x_T^{(\frac{m}{n})}$ iyi tanımlıdır. T Arşimedyan olduğu için, her $x \in (0,1]$ için,

$$\lim_{n\to\infty} x_T^{(\frac{1}{n})} = 1$$

olur. Eğer bir $x \in [0,1]$ ve bir $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_T^{(n)} = x_T^{(n+1)}$ ise, tümevarımdan

$$x_T^{(n)} = x_T^{(2n)} = (x_T^{(n)})_T^{(2)}$$

elde edilir ve T sürekli Arşimedyan olduğundan, $x_T^{(n)} \in \{0,1\}$ olur. Yani, $x_T^{(n)} \in (0,1)$ olduğunda, $x_T^{(n)} > x_T^{(n+1)}$ dir.

Herhangi bir $a \in (0,1)$ elemanı seçilsin ve $h : \mathbb{Q} \cap [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$, $h(r) = a_T^{(r)}$ fonksiyonu tanımlansın. T sürekli ve $\lim_{n\to\infty} x_T^{(\frac{1}{n})} = 1$ olduğundan h süreklidir. Ayrıca, her $x \in [0,1]$ ve $m,n,p,q \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} x_T^{(m/n)+(p/q)} &= x_T^{((mq+np)/nq)} \\ &= \left(x_T^{(1/nq)}\right)_T^{(mq+np)} \\ &= T\left(\left(x_T^{(1/nq)}\right)_T^{(mq)}, \left(x_T^{(1/nq)}\right)_T^{(np)}\right) \\ &= T\left(x_T^{(m/n)}, x_T^{(p/q)}\right) \end{aligned}$$

olur ve sonuç olarak her $r,s \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$ için,

$$h(r+s) = a_T^{(r+s)} = T\left(a_T^{(r)}, a_T^{(s)}\right) \le a_T^{(r)} = h(r)$$

elde edilir, yani, h artmayandır. $h(m/n) > 0$ olacak şekilde her $m/n\,, p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$ için,

$$h\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) \le h\left(\frac{mq+1}{nq}\right) = \left(a_T^{(1/nq)}\right)_T^{(mq+1)} < (\left(a_T^{(1/nq)}\right)_T^{(mq)} = h\left(\frac{m}{n}\right)$$

olduğundan, h fonksiyonu $(0,1]$ in ters resmi üzerinde kesin azalandır.

h, $\mathbb{Q} \cap [0,\infty)$ üzerinde monoton ve sürekli olduğundan, bir $\bar{h} : [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$, $\bar{h}(x) = \inf\{h(r) : r \in \mathbb{Q} \cap [0,x]\}$ fonksiyonuna tek olarak genişletilebilir. O zaman, $\bar{h}$ sürekli ve artmayandır ve her $x,y \in [0,\infty]$ için,

$$\bar{h}(x+y) = T\left(\bar{h}(x), \bar{h}(y)\right)$$

olur. Ayrıca, $\bar{h}$, $(0,1]$ in ters resmi üzerinde kesin azalandır. $\sup\emptyset = 0$ olmak üzere, $t : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$,

$$t(x) = \sup\left\{y \in [0,\infty] : \bar{h}(y) > x\right\}$$

tanımlansın. Bu durumda t, $\bar{h}$ nin pseudo-tersidir ve $\bar{h}$, t nin pseudo-tersidir. O zaman t süreklidir, kesin azalandır ve $t(1) = 0$ dır. O halde, her $x,y \in [0,1]$ için,

$$T(x,y) = T\left(\bar{h}\big(t(x)\big), \bar{h}\big(t(y)\big)\right) = \bar{h}\big(t(x)+t(y)\big) = t^{(-1)}\big(t(x)+t(y)\big)$$

olduğundan, t, T nin bir sürekli toplamsal üretecidir.

$t_1, t_2 : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ fonksiyonları, T nin sürekli toplamsal üreteçleri olsunlar, yani, her $x, y \in [0,1]$ için,

$$t_1^{(-1)}\big(t_1(x) + t_1(y)\big) = t_2^{(-1)}\big(t_2(x) + t_2(y)\big)$$

olsun. $u = t_2(x)$ ve $v = t_2(y)$ dönüşümleri ile, $u + v \in \big[0, t_2(0)\big)$ olacak şekilde her $u, v \in [0, t_2(0)]$ için,

$$t_1 \circ t_2^{(-1)}(u) + t_1 \circ t_2^{(-1)}(v) = t_1 \circ t_2^{(-1)}(u+v) \quad \textbf{(2.16)}$$

bulunur. t_1 ve $t_2^{(-1)}$ in sürekliliğinden, $u + v \in [0, t_2(0)]$ olacak şekilde her $u, v \in [0, t_2(0)]$ için (2.16) eşitliği sağlanır. (2.16) eşitliği, sürekli, kesin artan $t_1 \circ t_2^{(-1)} : [0, t_2(0)] \longrightarrow [0,\infty]$ çözümleri, bir $b \in (0,\infty)$ için $t_1 \circ t_2^{(-1)} = b \cdot id_{[0,t_2(0)]}$ eşitliğini sağlaması gereken bir Cauchy fonksiyonel eşitliğidir. Sonuç olarak, bir $b \in (0,\infty)$ için $t_1 = bt_2$ elde edilir.

2. 3. 2. Teorem: Bir $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir sürekli t-normdur ancak ve ancak T, sürekli arşimedyan t-normların bir sıralı toplamıdır (Klement ve ark., 2004c).

2. 3. 3. Önerme: T bir sürekli t-norm, $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in (0,1)$ olsun. Herhangi $r_1 > r_2$ için, $T(r_1, r_3) \geq r_2$ olacak şekilde bir r_3 ve herhangi r_4 için $T(r_5, r_5) \geq r_4$ olacak şekilde bir r_5 bulunabilir (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $r_1 > r_2$ olsun. $T(r_1, 0) = 0$ ve $T(r_1, 1) = r_1$ dir. $T(r_1, .) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu sürekli ve $r_2 \in (0, r_1)$ olduğundan, Ara Değer Teoremine göre $T(r_1, c) = r_2$ olacak şekilde bir $c \in (0,1)$ vardır. $r_3 \geq c$ seçilirse, $T(r_1, r_3) \geq T(r_1, c) = r_2$ bulunur.

$r_4 \in (0,1)$ için $a \in (r_4, 1)$ seçilsin. $T(a, 0) = 0$ ve $T(a, 1) = a$ dır. $T(a, .) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu sürekli ve $r_4 \in (0, a)$ olduğundan, Ara Değer Teoremine göre $T(a, b) = r_4$ olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ vardır. $r_5 \geq \text{maks}\,\{a, b\}$ seçilirse, $T(r_5, r_5) \geq T(a, b) = r_4$ bulunur.

BÖLÜM 3

FUZZY METRİK UZAYLAR

3. 1. Fuzzy Metrik Uzaylar

3. 1. 1. Tanım: X herhangi bir küme, $*$ bir sürekli t-norm ve M, $X \times X \times [0, \infty)$ üzerinde bir fuzzy kümesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $(X, M, *)$ üçlüsüne (Kramosil ve Michalek 1975; Grabiec, 1988) anlamında bir fuzzy metrik uzay denir:

$\forall x, y, z \in X$, $\forall t, s > 0$ için;

(i) $M(x, y, 0) = 0$

(ii) $\forall t > 0$ için $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

(iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$

(v) $M(x, y, .): [0, \infty) \longrightarrow [0,1]$ soldan süreklidir.

3. 1. 2. Uyarı: $M(x, y, t)$ değeri, t ye göre x ve y arasındaki yakınlık derecesi olarak düşünülebilir. Bu durum; $t > 0$ için x ve y arasındaki mesafenin sıfır (yani $x = y$) olması $M(x, y, t) = 1$ biçiminde, x ve y arasındaki mesafenin sonsuz olması ise, $M(x, y, t) = 0$ ile belirtilir. Kramosil ve Michalek anlamındaki bir fuzzy metrik uzayın oluşturacağı topoloji Hausdorff olamayacağından, fuzzy metrik uzay üzerinde bir Hausdorff topoloji oluşturmak için 3. 1. 1. Tanımı değiştirilerek 3. 1. 3. Tanımı elde edilmiştir (George ve Veeramani, 1994).

3. 1. 3. Tanım: X herhangi bir küme, $*$ bir sürekli t-norm ve M, $X \times X \times (0, \infty)$ üzeride bir fuzzy kümesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $(X, M, *)$ üçlüsüne (George ve Veeramani, 1994) anlamında bir fuzzy metrik uzay denir:

$\forall x, y, z \in X$, $\forall t, s > 0$ için;

(i) $M(x, y, t) > 0$

(ii) $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

(iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$

(v) $M(x, y, .): (0, \infty) \longrightarrow [0,1]$ süreklidir.

Bu durumda $(M,*)$ ikilisine, X üzerinde (George ve Veeramani, 1994) anlamında bir fuzzy metriktir denir. Karışıklık yaratmayacak durumlarda $(M,*)$ yerine sadece M kullanılacaktır.

3. 1. 4. Yardımcı Teorem: Her $x, y \in X$ için, $M(x, y, .)$ fonksiyonu azalmayandır (Grabiec, 1988).

Kanıt: $x, y \in X$ ve $0 < t < s$ olsun. O zaman,

$$M(x, y, t) = M(x, y, t) * M(y, y, s - t) \leq M(x, y, s)$$

3. 1. 5. Uyarı: $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay ve $x, y \in X$ olsun. $t > 0$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere, $M(x, y, t) > 1 - r$ ise $M(x, y, t_0) > 1 - r$ ve $0 < t_0 < t$ olacak şekilde bir t_0 bulunabilir (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $t > 0$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere, $M(x, y, t) > 1 - r$ olsun. $M(x, y, {}^{t}/_{2}) \leq M(x, y, t)$ dir. Eğer $M\left(x, y, {}^{t}/_{2}\right) > 1 - r$ ise, $t_0 = {}^{t}/_{2}$ alındığında istenen sağlanır. Eğer $M\left(x, y, {}^{t}/_{2}\right) \leq 1 - r$ ise, $M\left(x, y, {}^{t}/_{2}\right) \leq 1 - r < M(x, y, t)$ ve $M(x, y, .)$ sürekli olduğundan Ara Değer Teoremine göre $1 - r < M(x, y, t_0) < M(x, y, t)$ olacak şekilde bir $t_0 \in \left({}^{t}/_{2}, t\right)$ vardır.

3. 1. 6. Örnek: $X = \mathbb{R}$ olsun. $a * b = ab$ ve her $x, y \in X, t \in (0, \infty)$ için,

$$M(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}}$$

fonksiyonu verilsin. O zaman, $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olsun. Bu durumda;

(i) $x \neq y$ ise, $e^{\frac{|x-y|}{t}} > 0 \implies M(x, y, t) > 0$

$x = y$ ise, $e^{\frac{|x-y|}{t}} = 1 \implies M(x, y, t) = 1 > 0.$

(ii) $x = y \iff |x - y| = 0 \iff e^{\frac{|x-y|}{t}} = 1 \iff M(x, y, t) = 1.$

(iii) $M(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{|y-x|}{t}}} = M(y, x, t).$

(iv) Üçgen eşitsizliğinden,

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

dir. Ayrıca, $\frac{t+s}{t} > 1$ ve $\frac{t+s}{s} > 1$ olduğundan,

$$|x-z| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right)|x-y| + \left(\frac{t+s}{s}\right)|y-z|$$

olur ve buradan,

$$\frac{|x-z|}{t+s} \leq \frac{|x-y|}{t} + \frac{|y-z|}{s}$$

ve dolayısı ile,

$$e^{\frac{|x-z|}{t+s}} \leq e^{\frac{|x-y|}{t}} \cdot e^{\frac{|y-z|}{s}}$$

elde edilir. O halde,

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{|y-z|}{s}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{|x-z|}{t+s}}} = M(x,z,t+s)$ dir.

(v) $k = |x-y|$ olsun. O zaman, $t \in (0,\infty)$ için $t \longmapsto \frac{1}{e^{\frac{k}{t}}}$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $M(x,y,.): (0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ sürekli olur.

Böylece $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

3. 1. 7. Uyarı: 3. 1. 6. Örnekte $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir X metrik uzayı ve $|x-y|$ yerine $d(x,y)$ alındığında da $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay olur. Ayrıca 3. 1. 6. Örnekte, $a * b = ab$ t-normu yerine $a * b = \min\{a, b\}$ t-normu alınsa da örnek doğru olur (George ve Veeramani, 1994).

Aşağıdaki örnek; her metriğin bir fuzzy metrik ürettiğini ve dolayısıyla da fuzzy metrik uzay kavramının metrik uzay kavramın bir genellemesi olduğunu gösterir.

3. 1. 8. Örnek: (X, d) bir metrik uzay olsun. $a * b = ab$ ve $x, y \in X$ ve $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$M(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)}$$

tanımlansın. O zaman, $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır. $(M,*)$ fuzzy metriğine, d metriğinin ürettiği fuzzy metrik denir (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olsun.

(1) $k, m, n \in \mathbb{R}^{+}, t > 0$ ve $d(x,y) \geq 0$ olduğundan, $M(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} > 0$ olur.

(2) $M(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} = 1 \Leftrightarrow md(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

(3) $M(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} = \frac{kt^n}{kt^n + md(y,x)} = M(y,x,t)$

(4) Genelliği bozmadan $s^n \leq t^n$ olsun.

$$
\begin{aligned}
M(x,y,t) * M(y,z,s) &= \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} \cdot \frac{ks^n}{ks^n + md(y,z)} \\
&= \frac{k^2 t^n s^n}{k^2 t^n s^n + kt^n md(y,z) + ks^n md(x,y) + m^2 d(x,y) d(y,z)} \\
&\leq \frac{k^2 t^n s^n}{k^2 t^n s^n + ks^n md(y,z) + ks^n md(x,y)} = \frac{kt^n}{kt^n + m[d(x,y) + d(y,z)]} \\
&\leq \frac{kt^n}{kt^n + md(x,z)} \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x,z)} = M(x,z,t+s)
\end{aligned}
$$

bulunur.

(5) $f = M(x,y,.) : (0,\infty) \longrightarrow [0,1]$, $f(t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)}$ fonksiyonu süreklidir.

O halde, $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

3. 1. 9. Uyarı: 3. 1. 8. Örnek, $a * b = ab$ t-normu yerine $a * b = min\{a, b\}$ t-normu alındığında da sağlanır (George ve Veeramani, 1994).

3. 1. 10. Tanım: 3. 1. 8. Örnekte, $k = m = n = 1$ alınarak elde edilen

$$M(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$$

fuzzy metriğine, d metriği tarafından üretilen standart fuzzy metrik denir (George ve Veeramani, 1994).

3. 1. 11. Örnek: $X = \mathbb{N}$, $a * b = ab$ olsun. Her $t > 0$ için,

$$M(x,y,t) = \begin{cases} x/y & , x \leq y \; ise \\ y/x & , y \leq x \; ise \end{cases}$$

biçiminde ise $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $x, y, z \in \mathbb{N}$ ve $t, s > 0$ olsun.

(1) $x \leq y$ ise, $M(x,y,t) = \frac{x}{y} > 0$ ve $y \leq x$ ise, $M(x,y,t) = \frac{y}{x} > 0$ dır.

(2) $M(x,y,t) = 1 \Longrightarrow \frac{x}{y} = 1$ veya $\frac{y}{x} = 1 \Longrightarrow x = y$

$x = y \Longrightarrow M(x,y,t) = \frac{x}{y} = 1$

(3) $x \leq y$ ise, $M(x,y,t) = \frac{x}{y} = M(y,x,t)$

$y \leq x$ ise, $M(x,y,t) = \frac{y}{x} = M(y,x,t)$

(4) Genelliği bozmadan, $x \leq y$ olsun.

$y \leq z$ veya $z \leq y$ dir.

$y \leq z$ ise; $x \leq z$ olacağından $M(x,y,t) * M(y,z,s) = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{z} = M(x,z,t+s)$

olur.

$z \leq y$ ise; iki durum söz konusudur: $x \leq z$ veya $z \leq x$.

$x \leq z$ ise; $M(x,y,t) * M(y,z,s) = \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} \leq \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{z} = \frac{x}{z} = M(x,z,t+s)$

$z \leq x$ ise; $M(x,y,t) * M(y,z,s) = \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} \leq \frac{x}{x} \cdot \frac{z}{x} = \frac{z}{x} = M(x,z,t+s)$

bulunur.

(5) $M(x,y,.) : (0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu sabit olduğundan süreklidir.

O halde, $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

3. 1. 12. Uyarı: 3. 1. 11. Örnekte, her $x, y \in \mathbb{N}$ için

$$M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$$

koşulunu sağlayan $\mathbb{N}$ üzerinde bir d metriği yoktur. Ayrıca, 3. 1. 11. Örnekteki M fonksiyonu, $a * b = min\{a,b\}$ t-normu ile göz önüne alındığında bir fuzzy metrik değildir (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $\mathbb{N}$ üzerinde, yukarıdaki koşulu sağlayan bir d metriği var olsun.

$t := d(1,5) + 1$ olsun. O zaman,

$$M(1,5,t) = \tfrac{1}{5} = \tfrac{t}{t+d(1,5)} \text{ ve } M(2,5,t) = \tfrac{2}{5} = \tfrac{t}{t+d(2,5)}$$

olur. Buradan,

$$\frac{2t}{t+d(1,5)} = \frac{t}{t+d(2,5)} \Rightarrow 2t + 2d(2,5) = t + d(1,5) \Rightarrow t = d(1,5) - 2d(2,5)$$
$$\Rightarrow d(1,5) + 1 = d(1,5) - 2d(2,5) < d(1,5)$$

olur ki, bu bir çelişkidir. O halde, 3. 1. 11. örnekte, her $x, y \in \mathbb{N}$ için $M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$

koşulunu sağlayan $\mathbb{N}$ üzerinde bir d metriği yoktur. Ayrıca, 3. 1. 11. örnekteki M fonksiyonu, $a * b = min\{a,b\}$ t-normu ile göz önüne alındığında

$$M(1,2,t) * M(2,5,s) = \frac{1}{2} * \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \nleq \frac{1}{5} = M(1,5,t+s)$$

olduğundan bir fuzzy metrik değildir.

3. 2. Bir Fuzzy Metrik Tarafından Üretilen Topoloji

3. 2. 1. Tanım: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzayı olsun ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. $t > 0$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere,

$$B(x,r,t) = \{y \in X : M(x,y,t) > 1 - r\}$$

kümesine, $x \in X$ merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar denir (George ve Veeramani, 1994).

3. 2. 2. Sonuç: Bir fuzzy metrik uzayda her açık yuvar bir açık kümedir (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay, $x \in X$, $t > 0$ ve $0 < r < 1$ için $B(x,r,t)$ bu uzayda bir açık yuvar ve $y \in B(x,r,t)$ olsun. O zaman, $M(x,y,t) > 1 - r$ olur. Buradan,

$$\exists t_0 : 0 < t_0 < t \quad \text{ve} \quad M(x,y,t_0) > 1 - r$$

dir ve $r_0 = M(x,y,t_0) > 1 - r$ seçilsin. Bu durumda $r_0 > 1 - r$ olduğundan, $\exists s: \ r_0 > 1 - s > 1 - r, \ 0 < s < 1$ dir. Ayrıca, $\exists r_1: \ 0 < r_1 < 1, \ r_0 * r_1 \geq 1 - s$ ve böylece,

$$B(y, 1 - r_1, t - t_0) \subseteq B(x,r,t)$$

olur. Gerçekten, $z \in B(y, 1 - r_1, t - t_0)$ ise, $M(y,z,t - t_0) > r_1$ ve buradan,

$$M(x,z,t) \geq M(x,y,t_0) * M(y,z,t - t_0) \geq M(x,y,t_0) * r_1 = r_0 * r_1 \geq 1 - s > 1 - r$$

bulunur. Yani, $M(x,z,t) > 1 - r$ ve dolayısıyla, $z \in B(x,r,t)$ dir. O halde $B(x,r,t)$ bir açık kümedir.

3. 2. 3. Sonuç: $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. O zaman,

$$\tau_M := \{A \subseteq X : x \in A \implies \exists t, r: \ t > 0, 0 < r < 1, B(x,r,t) \subseteq A\}$$

ailesi, X üzerinde bir topolojidir (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: (i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) $A, B \in \tau$ ve $x \in A \cap B$ olsun. Buradan, $x \in A$ ve $x \in B$ olur. Öyleyse,

$$B(x, r_1, t_1) \subseteq A, \ B(x, r_2, t_2) \subseteq B$$

olacak şekilde $t_1, t_2 > 0$, $0 < r_1, r_2 < 1$ vardır. $r := \min\{r_1, r_2\}$ ve $t := \min\{t_1, t_2\}$ seçilirse,

$$B(x,r,t) \subseteq [B(x, r_1, t_1) \cap B(x, r_2, t_2)] \subseteq A \cap B$$

olur. Gerçekten; $z \in B(x,r,t)$ ise,

$$M(z,x,t_1) \geq M(z,x,t) > 1-r \geq 1-r_1 \implies z \in B(x,r_1,t_1)$$

$$M(z,x,t_2) \geq M(z,x,t) > 1-r \geq 1-r_2 \implies z \in B(x,r_2,t_2)$$

olur. O halde, $A \cap B \in \tau$ dur.

(iii) $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ ve $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ olsun.

$$\exists j \in I : x \in A_j$$

olur ve $A_j \in \tau$ olduğundan,

$$\exists t > 0, r \in (0,1) : B(x,r,t) \subseteq A_j$$

dir. Buradan,

$$B(x,r,t) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

olduğundan

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$$

olur.

O halde τ_M, X üzerinde bir topolojidir.

3. 2. 4. Not: 3. 2. 3. Sonuçta tanımlanan (X,τ_M) topolojik uzayında, her $x \in X$ noktası için, $\{B(x, {}^1\!/_n, {}^1\!/_n) : n = 1,2,3,...\}$ ailesi, x noktasının bir komşuluklar tabanı olduğundan, X üzerindeki τ_M topolojisi birinci sayılabilirdir (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: N, $x \in X$ noktasının herhangi bir komşuluğu olsun. O zaman,

$$\exists A \in \tau : x \in A \subseteq N$$

olur. Buradan,

$$\exists t > 0, r \in (0,1) : B(x,r,t) \subseteq A \subseteq N$$

dir. $k := \min\{r,t\}$ seçilsin.

$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < k$$

dır. Öyleyse,

$$B\left(x, {}^{1}/_{n}, {}^{1}/_{n}\right) \subseteq B(x,r,t) \subseteq A \subseteq N$$

olur. Gerçekten; $z \in B\left(x, {}^{1}/_{n}, {}^{1}/_{n}\right)$ ise,

$$M(x,z,t) \geq M(x,z,k) \geq M\left(x,z,{}^{1}/_{n}\right) > 1 - {}^{1}/_{n} > 1 - k > 1 - r$$

$$\Longrightarrow z \in B(x,r,t)$$

olur. O halde, $\left\{B\left(x, {}^{1}/_{n}, {}^{1}/_{n}\right) : n = 1,2,3,\ldots\right\}$ ailesi, x noktasının bir komşuluklar tabanıdır.

3. 2. 5. Teorem: Her fuzzy metrik uzay Hausdorff tur (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $(X, M,*)$ fuzzy metrik uzayı verilsin ve $x, y \in X,\ x \neq y$ olsun. O zaman, $t > 0$ için $0 < M(x,y,t) < 1$ dir. $r := M(x,y,t)$ olsun. Bu durumda, $\exists r_0 : r < r_0 < 1$,ve $r_1 * r_1 \geq r_0,\ 0 < r_1 < 1$ olacak şekilde bir r_1 bulunabilir. Buradan,

$$B\left(x, 1-r_1, \tfrac{1}{2}t\right) \cap B\left(y, 1-r_1, \tfrac{1}{2}t\right) = \emptyset$$

dir. Gerçekten,

$$z \in B\left(x, 1-r_1, \tfrac{1}{2}t\right) \cap B\left(y, 1-r_1, \tfrac{1}{2}t\right)$$

var olsaydı,

$$r = M(x,y,t) \geq M\left(x,z,\tfrac{1}{2}t\right) * M\left(z,y,\tfrac{1}{2}t\right) \geq \big(1-(1-r_1)\big) * \big(1-(1-r_1)\big) = r_1 * r_1$$
$$\geq r_0 > r$$

olurdu ki, bu bir çelişkidir.

O halde, $(X, M,*)$ fuzzy metrik uzayı Hausdorff tur.

3. 2. 6. Teorem: Her fuzzy metrik uzay normaldir ve her fuzzy metrik uzayın T_1 olmasından dolayı regülerdir.

Kanıt: $(X, M,*)$ fuzzy metrik uzayı, $A, B \subseteq X$ ayrık kapalı altkümeleri ve $t > 0$ verilsin. $M(A,B,t) = \sup\{M(a,b,t) : a \in A, b \in B\}$ olmak üzere, $\varepsilon := 1 - M(A,B,t)$

olsun. 2. 3. 3. Önermeden, $\left(1-{}^{\varepsilon}/_{k}\right)*\left(1-{}^{\varepsilon}/_{k}\right)\geq 1-{}^{\varepsilon}/_{2}$ olacak şekilde bir $k\in\mathbb{N}$ vardır.

$$U:=\bigcup_{a\in A}B(a,{}^{\varepsilon}/_{k},{}^{t}/_{2}) \text{ ve } V:=\bigcup_{b\in B}B(b,{}^{\varepsilon}/_{k},{}^{t}/_{2})$$

kümeleri tanımlansın. O zaman, $A\subseteq U, B\subseteq V$ dir, U ve V kümeleri açıktır ve $U\cap V=\emptyset$ dir. Gerçekten, bir $x\in U\cap V$ var olsaydı;

$M\left(a,x,{}^{t}/_{2}\right)>\left(1-{}^{\varepsilon}/_{k}\right)$ ve $M\left(b,x,{}^{t}/_{2}\right)>\left(1-{}^{\varepsilon}/_{k}\right)$ olacak biçimde $a\in A$ ve $b\in B$ elemanları var olurdu, buradan

$$(1-\varepsilon)=M(A,B,t)\geq M(a,b,t)\geq M\left(a,x,{}^{t}/_{2}\right)*M\left(x,b,{}^{t}/_{2}\right)$$

$$\geq\left(1-{}^{\varepsilon}/_{k}\right)*\left(1-{}^{\varepsilon}/_{k}\right)\geq 1-{}^{\varepsilon}/_{2}>1-\varepsilon$$

olurdu ki bu bir çelişkidir. O halde $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzayı normaldir.

3. 2. 7. Sonuç: (X,d) bir metrik uzay olsun. M, X üzerinde, d metriği tarafından üretilen standart fuzzy metrik olsun. O zaman, d metriği tarafından üretilen τ_d topolojisi ile M fuzzy metriği tarafından üretilen τ_M topolojisi aynıdır (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $A\in\tau_d$ ve $x\in A$ olsun. O zaman,

$$\exists\varepsilon>0 : B(x,\varepsilon)\subseteq A$$

olur. $t=\varepsilon$ ve $r\in(0,0.5)$ seçilirse,

$$B(x,r,t)\subseteq A$$

olur. Gerçekten;

$$z\in B(x,r,t)\ \Rightarrow M(x,z,t)=\frac{t}{t+d(x,z)}>1-r\ \Rightarrow\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon+d(x,z)}>1-r$$

$$\Rightarrow d(x,z)<\frac{r}{1-r}\cdot\varepsilon<\varepsilon\ \Rightarrow z\in B(x,\varepsilon)\subseteq A$$

olur, buradan $A\in\tau_M$ bulunur.

Diğer taraftan, $A\in\tau_M$ ve $x\in A$ olsun. O zaman,

$$\exists t>0, r\in(0,1) :\ B(x,r,t)\subseteq A$$

olur. $\varepsilon \in \left(0, \frac{rt}{1-r}\right)$ seçilirse,

$$B(x,\varepsilon) \subseteq A$$

olur. Gerçekten;

$$z \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow d(z,x) < \frac{rt}{1-r} \Rightarrow M(z,x,t) = \frac{t}{t+d(z,x)} > 1-r \Rightarrow z \in B(x,r,t)$$

olur, buradan $A \in \tau_d$ bulunur.

O halde, $\tau_d = \tau_M$ dir.

3. 2. 8. Tanım: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\forall x, y \in A$ için $M(x,y,t) > 1-r$, $t > 0$, $0 < r < 1$ olacak şekilde t ve r sayıları varsa $A \subseteq X$ altkümesine F-sınırlıdır denir (George ve Veeramani, 1994).

3. 2. 9. Sonuç: $(X, M, *)$, X üzerindeki bir d metriği tarafından üretilen fuzzy metrik uzay olsun. O zaman, bir $A \subseteq X$ altkümesinin F-sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq X$ nın d-sınırlı olmasıdır (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi F-sınırlı olsun. O zaman, her $x, y \in A$ için $M(x,y,t) > 1-r$, $t > 0$, $0 < r < 1$ olacak şekilde t ve r sayıları vardır. Buradan, her $x, y \in A$ için, $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $M(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} > 1-r$ dir. Yani, her $x, y \in A$ için, $d(x,y) < \frac{1}{m}\left(\frac{kt^n}{1-r} - kt^n\right) \in \mathbb{R}^+$ olur. O halde, A d-sınırlıdır.

Tersine, $A \subseteq X$ altkümesi d-sınırlı olsun. O zaman, her $x, y \in A$ için, $d(x,y) < K$ olacak şekilde bir $K \in \mathbb{R}^+$ vardır. Buradan, $k, m, n \in \mathbb{R}^+, t > 0$ olmak üzere $M(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} > \frac{kt^n}{kt^n + mK} = 1 - \left(1 - \frac{kt^n}{kt^n + mK}\right)$ olur. $r = 1 - \frac{kt^n}{kt^n + mK}$ yazılırsa, her $x, y \in A$ için $M(x,y,t) > 1-r$, $t > 0$, $0 < r < 1$ olacak şekilde t ve r sayıları bulunmuş olur. O halde, A F-sınırlıdır.

3. 2. 10. Teorem: Bir fuzzy metrik uzayın her tıkız A altkümesi F-sınırlıdır (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, $A \subseteq X$ bir tıkız altküme, $t > 0$ ve

$0 < r < 1$ sabitleri verilsin. $\{B(x,r,t) : x \in A\}$ ailesi, A nın bir açık örtüsüdür. A tıkız olduğundan, $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A: \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r, t)$ olur. $x, y \in A$ verilsin. O zaman, $\exists x_i, x_j \in A, \ i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ x \in B(x_i, r, t)$ ve $y \in B(x_j, r, t)$ dir. Buradan, $M(x, x_i, t) > 1 - r$ ve $M\big(y, x_j, t\big) > 1 - r$ olur. $\alpha := \min\{M\big(x_i, x_j, t\big) : 1 \le i, j \le n\}$ olsun. $\alpha > 0$ olup

$$M(x, y, 3t) \ge M(x, x_i, t) * M\big(x_i, x_j, t\big) * M\big(x_j, y, t\big) \ge (1 - r) * \alpha * (1 - r)$$

ve $\exists s \in (0,1): \ (1 - r) * \alpha * (1 - r) > 1 - s$ dir. $t' := 3t$ alındığında,

$$M(x, y, t') > 1 - s$$

olur. O halde $A \subseteq X$, F-sınırlıdır.

3. 2. 11. Uyarı: Bir fuzzy metrik uzaydaki her tıkız küme kapalı ve F-sınırlıdır. (George ve Veeramani, 1994).

3. 2. 12. Teorem: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve τ, M fuzzy metriğinin ürettiği topoloji olmak üzere X de verilen her bir $\{x_n\}$ dizisi için aşağıdaki önerme sağlanır:

$$n \longrightarrow \infty \ \ iken \ \ x_n \longrightarrow x \ \Leftrightarrow \ \forall t > 0 \text{ için } n \longrightarrow \infty \ iken \ M(x_n, x, t) \longrightarrow 1$$

(George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $t > 0$ verilsin ve $n \longrightarrow \infty \ iken \ \ x_n \longrightarrow x$ olsun. O zaman, her $0 < r < 1$ için, $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \ge n_0 \ için \ x_n \in B(x, r, t)$ dir ve buradan,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \ge n_0 \ için \ M(x_n, x, t) > 1 - r$$

olur. Bu da $n \longrightarrow \infty \ iken \ M(x_n, x, t) \longrightarrow 1$ demektir.

Tersine, $\forall t > 0$ için $n \longrightarrow \infty \ iken \ M(x_n, x, t) \longrightarrow 1$ olsun. Buradan, her $0 < r < 1$ için, $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \ge n_0 \ için \ 1 - M(x_n, x, t) < r$ ve böylece,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \ge n_0 \ için \ M(x_n, x, t) > 1 - r$$

dir. Yani $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \ge n_0 \ için \ x_n \in B(x, r, t)$ olur. O zaman, $n \longrightarrow \infty \ \ iken \ \ x_n \longrightarrow x$ olur.

3. 2. 13. Tanım: $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay ve $\{x_n\}$, bu uzayda bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1, \qquad t > 0, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots$$

koşulu sağlanıyorsa, $\{x_n\}$ dizisine Grabiec anlamında Cauchy dizisidir denir. Her Grabiec anlamında Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir fuzzy metrik uzaya, Grabiec anlamında tam fuzzy metrik uzay denir (Grabiec, 1988).

3. 2. 14. Not: 3. 2. 13. Tanıma göre, $\mathbb{R}$ bile Grabiec anlamında tam değildir. Mesela, d, $\mathbb{R}$ üzerinde Euclid metriği ve M, d metriği tarafından üretilen standart fuzzy metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, M,\cdot)$ fuzzy metrik uzayında $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ dizisi ele alınsın.

$$M\left(S_{n+p}, S_n, t\right) = \frac{t}{t + \left|S_{n+p} - S_n\right|} = \frac{t}{t + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+p}}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} M\left(S_{n+p}, S_n, t\right) = 1$$

bulunur. Yani, $\{S_n\}$ dizisi$(\mathbb{R}, M,\cdot)$ fuzzy metrik uzayında Grabiec anlamında bir Cauchy dizisidir. $(\mathbb{R}, M,\cdot)$ fuzzy metrik uzayının Grabiec anlamında tam olduğu kabul edilsin. O zaman,

$$\exists x \in \mathbb{R} : \ n \longrightarrow \infty \ iken \ M(S_n, x, t) \longrightarrow 1$$

dir. Buradan, $n \longrightarrow \infty \ iken \ \frac{t}{t+|S_n - x|} \longrightarrow 1$ ve böylece, $n \longrightarrow \infty \ iken \ |S_n - x| \longrightarrow 0$

yani, $n \longrightarrow \infty \ iken \, S_n \longrightarrow x$ olur ki, bu $\mathbb{R}$ de doğru değildir. (George ve Veeramani, 1994).

Çok kullanışlı olmayan bu Cauchy dizisi tanımına alternatif olan ve daha kullanışlı olacağı düşünülen ve de $(\mathbb{R}, M,\cdot)$ yi tam fuzzy metrik uzay yapan bir Cauchy dizisi tanımı aşağıdaki biçimde verilecektir.

3. 2. 15. Tanım: $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay ve $\{x_n\}$, bu uzayda bir dizi olsun.

$$\forall \varepsilon \in (0,1), t > 0 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \Longrightarrow M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$$

koşulu sağlanıyorsa, $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi ve her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir fuzzy metrik uzayına da tam fuzzy metrik uzay denir (George ve Veeramani, 1994).

Bu tanıma göre; d, $\mathbb{R}$ üzerinde Euclid metriği ve M, d metriği tarafından üretilen standart fuzzy metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, M, \cdot)$ fuzzy metrik uzayı 3. 2. 18. Sonuçtan görüleceği üzere gerçekten tamdır.

3. 2. 16. Tanım: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. $t > 0$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere,

$$B[x, r, t] = \{y \in X : M(x, y, t) \geq 1 - r\}$$

kümesine, $x \in X$ merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar denir (George ve Veeramani, 1994).

3. 2. 17. Sonuç: Bir fuzzy metrik uzayda her kapalı yuvar bir kapalı kümedir (George ve Veeramani, 1994).

Kanıt: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, $B[x, r, t]$ bu uzayda bir kapalı yuvar ve $y \in \overline{B[x, r, t]}$ olsun. X birinci sayılabilir olduğundan, $\{y_n\} \longrightarrow y$ olacak şekilde $B[x, r, t]$ de bir $\{y_n\}$ dizisi vardır. Buradan, $\forall t > 0$ için $M(y_n, y, t) \longrightarrow 1$ dir ve $\varepsilon > 0$ verilirse

$$M(x, y, t + \varepsilon) \geq M(x, y_n, t) * M(y_n, y, \varepsilon)$$

olur. Dolayısıyla,

$$M(x, y, t + \varepsilon) \geq \lim_{n \to \infty} M(x, y_n, t) * \lim_{n \to \infty} M(y_n, y, \varepsilon) \geq (1 - r) * 1 = 1 - r$$

olur. Özel olarak, $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon = {}^1\!/_n$ alınırsa, $M\left(x, y, t + {}^1\!/_n\right) \geq 1 - r$ ve buradan da, $M(x, y, t) = \lim_{n \to \infty} M\left(x, y, t + {}^1\!/_n\right) \geq 1 - r$ elde edilir. Yani, $y \in B[x, r, t]$ dir. O halde $B[x, r, t]$ bir kapalı kümedir.

3. 2. 18. Sonuç: (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) tamdır ancak ve ancak d tarafından üretilen standart fuzzy metrik uzay $(X, M_d, *)$ tamdır (George ve Veeramani, 1997).

Kanıt: İlk olarak; $\{x_n\}$, (X, d) de bir Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\{x_n\}$, $(X, M_d, *)$ da bir Cauchy dizisidir. Gerçekten;

$\{x_n\}$, (X,d) de bir Cauchy dizisi olsun ve $t > 0$, $r \in (0,1)$ verilsin. $\varepsilon = \frac{rt}{1-r} > 0$ tanımlansın. $\{x_n\}$, (X,d) de bir Cauchy dizisi olduğundan,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n,m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olur. Buradan,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n,m \geq n_0 \Longrightarrow M(x_n, x_m, t) = \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} > 1 - r$$

bulunur. Yani $\{x_n\}$, $(X, M_d, *)$ da bir Cauchy dizisidir.

Tersine, $\{x_n\}$, $(X, M_d, *)$ da bir Cauchy dizisi olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $t > 0$ belirlensin ve $r = \frac{\varepsilon}{t+\varepsilon} \in (0,1)$ tanımlansın. $\{x_n\}$, $(X, M_d, *)$ da bir Cauchy dizisi olduğundan,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n,m \geq n_0 \Longrightarrow M(x_n, x_m, t) = \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} > 1 - r$$

olur. Buradan,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n,m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

bulunur. Yani $\{x_n\}$, (X,d) de bir Cauchy dizisidir.

(X,d) tam ve $\{x_n\}$, $(X, M_d, *)$ da bir Cauchy dizisi olsun. $\{x_n\}$, (X,d) de bir Cauchy dizisi olacağından, τ_d ye göre $x_n \longrightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. 3. 2. 7. sonuçtan $\tau_d = \tau_{M_d}$ olduğundan, τ_{M_d}ye göre $x_n \longrightarrow x$ dir. O halde $(X, M_d, *)$ tamdır.

Tersine, $(X, M_d, *)$ tam ve $\{x_n\}$, (X,d) de bir Cauchy dizisi olsun. $\{x_n\}$, $(X, M_d, *)$ da bir Cauchy dizisi olacağından, τ_{M_d} ye göre $x_n \longrightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. 3. 2. 7. sonuçtan $\tau_d = \tau_{M_d}$ olduğundan, $\tau_d$ye göre $x_n \longrightarrow x$ dir. O halde (X,d) tamdır.

3. 2. 19. Önerme: $(X_1, M_1, *)$ ve $(X_2, M_2, *)$ fuzzy metrik uzayları verilsin. Verilen $t > 0$ sayısı ve $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ noktaları için,

$$M\big((x_1, x_2), (y_1, y_2), t\big) = M_1(x_1, y_1, t) * M_2(x_2, y_2, t)$$

biçiminde tanımlanan M, $X_1 \times X_2$ kümesi üzerinde bir fuzzy metriktir (George ve Veeramani, 1997).

Kanıt: $(X_1, M_1, *)$ ve $(X_2, M_2, *)$ fuzzy metrik uzaylar olduklarından $*$ t-normu süreklidir. $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in X_1 \times X_2$ ve $t, s > 0$ verilsin. Bu durumda,

(i) $M\big((x_1, x_2), (y_1, y_2), t\big) = M_1(x_1, y_1, t) * M_2(x_2, y_2, t) > 0$

(ii) $M\big((x_1,x_2),(y_1,y_2),t\big) = 1 \Leftrightarrow M_1(x_1,y_1,t) * M_2(x_2,y_2,t) = 1$

$$\Leftrightarrow M_1(x_1,y_1,t) = 1, M_2(x_2,y_2,t) = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1, = y_1, x_2 = y_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1,x_2) = (y_1,y_2)$$

(iii) $M\big((x_1,x_2),(y_1,y_2),t\big) = M_1(x_1,y_1,t) * M_2(x_2,y_2,t)$

$$= M_1(y_1,x_1,t) * M_2(y_2,x_2,t)$$

$$= M\big((y_1,y_2),(x_1,x_2),t\big)$$

(iv) $M\big((x_1,x_2),(y_1,y_2),t\big) * M\big((y_1,y_2),(z_1,z_2),s\big)$

$$= M_1(x_1,y_1,t) * M_2(x_2,y_2,t) * M_1(y_1,z_1,s) * M_2(y_2,z_2,s)$$

$$= M_1(x_1,y_1,t) * M_1(y_1,z_1,s) * M_2(x_2,y_2,t) * M_2(y_2,z_2,s)$$

$$\leq M_1(x_1,z_1,t+s) * M_2(x_2,z_2,t+s)$$

$$= M\big((x_1,x_2),(z_1,z_2),t+s\big)$$

(v) $M_1(x_1,y_1,.) : (0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ ve $M_2(x_2,y_2,.) : (0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonları ve $*$ t-normu sürekli olduğundan,

$$M\big((x_1,x_2),(y_1,y_2),.\big) : \ (0,\infty) \longrightarrow [0,1]$$

fonksiyonu da süreklidir. O halde M, $X_1 \times X_2$ üzerinde bir fuzzy metriktir.

3. 2. 20. Tanım: 3. 2. 19. Önermedeki şekilde tanımlanan M fuzzy metriğine $X_1 \times X_2$ üzerindeki çarpım fuzzy metriği, $(X_1 \times X_2, M,*)$ üçlüsüne de çarpım fuzzy metrik uzayı denir.

3. 2. 21. Teorem: $(X_1, M_1,*)$ ve $(X_2, M_2,*)$ tam fuzzy metrik uzaylar ise, $(X_1 \times X_2, M,*)$ çarpım fuzzy metrik uzayı tamdır (George ve Veeramani, 1997).

Kanıt: $(X_1, M_1,*)$ ve $(X_2, M_2,*)$ tam fuzzy metrik uzaylar ve $\{a_n\}$, $X_1 \times X_2$ de bir Cauchy dizisi olsun. O zaman, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = (x_n, y_n) \in X_1 \times X_2$ şeklindedir ve her $t > 0, r \in (0,1)$ için,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n,m \geq n_0 \Longrightarrow M\big((x_n,y_n),(x_m,y_m),t\big) > 1 - r$$

dir. Buradan,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n,m \geq n_0 \Longrightarrow M_1(x_n,x_m,t) \geq M_1(x_n,x_m,t) * M_2(y_n,y_m,t) > 1 - r$$

ve

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n,m \geq n_0 \Longrightarrow M_2(y_n,y_m,t) \geq M_1(x_n,x_m,t) * M_2(y_n,y_m,t) > 1 - r$$

olacağından, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri sırasıyla $(X_1, M_1,*)$ ve $(X_2, M_2,*)$ uzaylarında birer Cauchy dizileridir. $(X_1, M_1,*)$ ve $(X_2, M_2,*)$ tam olduklarından, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsadığı bir $x \in X_1$ noktası ve $\{y_n\}$ dizisinin yakınsadığı bir $y \in X_2$ noktası vardır. $t > 0,\ r \in$

$(0,1)$ olsun. O zaman $(1-s)*(1-s) \geq (1-r)$ olacak şekilde bir $s>0$ vardır. Ayrıca $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin yakınsaklıklarından;

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Longrightarrow M_1(x_n, x, t) > 1-s$$

ve

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Longrightarrow M_2(y_n, y, t) > 1-s$$

olduğu biliniyor. $N := \max\{n_1, n_2\}$ seçilirse, her $n \geq N$ için,

$$M\big((x_n, y_n), (x, y), t\big) = M_1(x_n, x, t) * M_2(y_n, y, t) > (1-s)*(1-s) \geq 1-r$$

olur. Yani, $\{a_n\}$ dizisi $(X_1 \times X_2, M, *)$ çarpım fuzzy metrik uzayında (x,y) noktasına yakınsaktır. O halde $(X_1 \times X_2, M, *)$ tamdır.

3. 2. 22. Tanım: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X in altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer her $t>0, r \in (0,1)$ için,

$\exists n \in \mathbb{N} :\ \forall x, y \in F_n$ için $M(x,y,t) > 1-r$

koşulu sağlanıyor ise, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ailesi fuzzy sıfır çapa sahiptir denir (George ve Veeramani, 1997).

3. 2. 23. Uyarı: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $F \subseteq X$ boştan farklı bir küme olsun. F fuzzy sıfır çapa sahiptir ancak ve ancak F tek nokta kümesidir (George ve Veeramani, 1997).

Kanıt: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $F \subseteq X$ fuzzy sıfır çapa sahip boştan farklı bir küme olsun. F nin tek nokta kümesi olmadığı varsayılsın. O zaman, $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in F$ noktaları vardır. Buradan, her $t>0$ için $M(x,y,t) \in (0,1)$ dir. $t>0$ ve $r < 1 - M(x,y,t)$ olacak şekilde $r \in (0,1)$ alınabileceğinden, $M(x,y,t) < 1-r$ olur. Bu ise F nin fuzzy sıfır çapa sahip olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır, yani F tek nokta kümesidir.

Tersine, F tek nokta kümesi ise, her $x, y \in F$ için $x = y$ olacağından; her $t>0$, $x, y \in F$ için $M(x,y,t) = 1 > 1-r$ bulunur. Dolayısıyla, F fuzzy sıfır çapa sahiptir.

3. 2. 24. Teorem: Bir $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul, fuzzy sıfır çapa sahip, boştan farklı kapalı kümelerden oluşan ve iç içe azalan her $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ olmasıdır. (George ve Veeramani, 1997)

Kanıt: $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı verilsin. Fuzzy sıfır çapa sahip, boştan farklı kapalı kümelerden oluşan ve iç içe azalan her $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ olsun ve de X de bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi verilsin. $A_n := \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ olmak üzere $F_n := \overline{A_n}$ kümeleri tanımlanırsa $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi fuzzy sıfır çapa sahip olur: $s \in (0,1), t>0$ verilsin. Bu durumda,

$$\exists r \in (0,1) : (1-r) * (1-r) * (1-r) > (1-s)$$

olur ve $\{x_n\}$, bir Cauchy dizisi olduğundan,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow M\left(x_n, x_m, {t}/{3}\right) > (1-r)$$

dir. Dolayısıyla, $\forall x, y \in A_{n_0}$ için $M\left(x, y, {t}/{3}\right) > (1-r)$ elde edilir. Ayrıca $x, y \in F_{n_0}$ ise, F_{n_0} kapalı olduğundan, F_{n_0} da x noktasına yakınsayan bir $\{x'_n\}$ dizisi ve y noktasına yakınsayan bir $\{y'_n\}$ dizisi vardır. Böylece de,

$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Longrightarrow x'_n \in B(x, r, {t}/{3})$ ve $\exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Longrightarrow y'_n \in B(y, r, {t}/{3})$

bulunur. $N :=$ max $\{n_0, n_1, n_2\}$ seçilirse,

$$\begin{aligned} M(x, y, t) &\geq M\left(x, x'_N, {t}/{3}\right) * M\left(x'_N, y'_N, {t}/{3}\right) * M\left(y'_N, y, {t}/{3}\right) \\ &> (1-r) * (1-r) * (1-r) > (1-s) \end{aligned}$$

olur. Yani, $\forall x, y \in F_{n_0}$ için $M(x, y, t) > 1 - s$ ve dolayısıyla, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ fuzzy sıfır çapa sahiptir. Öyleyse hipotezden, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ olur ve $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ alınsın. O zaman, $r \in (0,1), t > 0$ için,

$\exists n_3 \in \mathbb{N} : n \geq n_3 \Longrightarrow M(x_n, x, t) > 1 - r$ ve $\exists n_3 \in \mathbb{N} : n \geq n_3 \Longrightarrow x_n \in B(x, r, t)$

dir. Yani, $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsak olur ki bu $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayının tam olması demektir.

Tersine, $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı tam ve $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi, fuzzy sıfır çapa sahip, boştan farklı kapalı kümelerden oluşan ve iç içe azalan bir kümeler dizisi olsun. $\{x_n\}$ dizisi, her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $x_n \in F_n$ olacak şekilde tanımlansın. $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, fuzzy sıfır çapa sahip olduğundan, her $r \in (0,1), t > 0$ için,

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall x, y \in F_{n_0}$ için $M(x, y, t) > 1 - r$

olur ve yine her $n, m \geq n_0$ için; $x_n \in F_n \subseteq F_{n_0}$ ve $x_m \in F_m \subseteq F_{n_0}$ olduğundan, $M(x_n, x_m, t) > 1 - r$ elde edilir. Yani $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $(X, M, *)$ tam olduğundan, $\{x_n\}$ dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsar. Böylece, her $n \in \mathbb{N}$ sabiti için, $k \geq n \Longrightarrow x_k \in F_n$ olduğundan, $\forall r \in (0,1), t > 0$ için $B(x, r, t) \cap F_n \neq \emptyset$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x \in \overline{F_n} = F_n$ olur. O halde $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ dir.

3. 2. 25. Uyarı: $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ elemanı tektir. Gerçekten $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ise, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, fuzzy sıfır çapa sahip olduğundan, her $t > 0$ sabiti ve her $n \in \mathbb{N}$ için $M(x, y, t) > 1 - {1}/{n}$ dir. Dolayısıyla, $M(x, y, t) = 1$ ve böylece $x = y$ dir (George ve Veeramani, 1997).

3. 2. 26. Sonuç: Bir (X, d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul, boştan farklı kapalı kümelerden oluşan, çapları sıfıra yaklaşan ve iç içe azalan her $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ olmasıdır. (George ve Veeramani, 1997)

Kanıt: (X, d) bir metrik uzayı ve hipotezde verilen koşullar sağlansın. d ile üretilen M_d standart fuzzy metriği tarafından üretilen τ_{M_d}topolojisi ile d metriği tarafından üretilen τ_d topolojisi aynıdır. Eğer $x, y \in F_n,\ r \in (0,1), t > 0$ ise, $\delta(F_n)$ sıfıra yakınsadığından; $\exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \delta(F_{n_0}) < \frac{tr}{1-r} \quad \Rightarrow \forall x, y \in F_{n_0}$ için $d(x, y) < \frac{tr}{1-r} \Rightarrow \forall x, y \in F_{n_0}$ için $M_d(x, y, t) > 1 - r$ olur. Böylece $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ fuzzy sıfır çapa sahip ve 3. 2. 24. Teoremden, $(X, M_d,*)$ bir tam fuzzy metrik uzaydır. Buradan da 3. 2. 18. Sonuç kullanılırsa (X, d) tam olur.

Tersine, (X, d) metrik uzayı tam ve bu uzayda, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi boştan farklı kapalı kümelerden oluşan, çapları sıfıra yaklaşan ve iç içe azalan bir dizi olsun. 3. 2. 18. Sonuç gereği $(X, M_d,*)$ fuzzy metrik uzayı tamdır. Ayrıca $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(X, M_d,*)$ de fuzzy sıfır çapa sahip ve 3. 2. 24. Teoremden $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ elde edilir.

3. 2. 27. Sonuç: Her ayrılabilir fuzzy metrik uzay ikinci sayılabilirdir (George ve Veeramani, 1997).

Kanıt: $(X, M,*)$ ayrılabilir fuzzy metrik uzayı ve $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, X in sayılabilir yoğun bir altkümesi verilsin. $\mathcal{B} = \left\{B\left(a_j, {}^1\!/_k, {}^1\!/_k\right) : j, k \in \mathbb{N}\right\}$ ailesi X deki açık kümeler için bir sayılabilir tabandır. Bu iddiayı doğrulamak için; G, X de bir açık küme ve $x \in G$ ise, $\exists r \in (0,1), t > 0 : B(x, r, t) \subseteq G$ ve $r \in (0,1)$ olduğundan, $(1 - s) * (1 - s) > 1 - r$ olacak şekilde bir $s \in (0,1)$ bulunabilir. ${}^1\!/_m < \min\{s, {}^t\!/_2\}$ biçiminde bir $m \in \mathbb{N}$ seçilirse A, X de yoğun olduğundan $B\left(x, {}^1\!/_n, {}^1\!/_n\right) \cap A \neq \emptyset$, $\exists a_j \in A :\ a_j \in B\left(x, {}^1\!/_m, {}^1\!/_m\right)$ elde edilir ve $x \in B\left(a_j, {}^1\!/_m, {}^1\!/_m\right) \subseteq B(x, r, t)$ dir. Gerçekten, $y \in B\left(a_j, {}^1\!/_m, {}^1\!/_m\right)$ ise,

$$M(x, y, t) \geq M\left(x, a_j, {}^t\!/_2\right) * M\left(a_j, y, {}^t\!/_2\right) \geq M\left(x, a_j, {}^1\!/_m\right) * M\left(a_j, y, {}^1\!/_m\right)$$
$$\geq \left(1 - {}^1\!/_m\right) * \left(1 - {}^1\!/_m\right) \geq (1 - s) * (1 - s) > 1 - r$$

olacağından $y \in B(x, r, t)$ dir. O halde $\mathcal{B}$ bir tabandır. Yani, $(X, M,*)$ ikinci sayılabilirdir.

3. 2. 28. Sonuç: Ayrılabilir bir fuzzy metrik uzayın her alt uzayı da ayrılabilirdir. (George ve Veeramani, 1997).

Kanıt: X ayrılabilir fuzzy metrik uzayı ve Y, X in bir alt uzayı olsun. O zaman, X in sayılabilir yoğun bir $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ altkümesi vardır. Her sabit $n, k \in \mathbb{N}$ için $\emptyset \neq \left\{x \in X : M\left(x_n, x, {}^1\!/_k\right) > 1 - {}^1\!/_k\right\}$ kümesinden bir x_{nk} seçilsin ve $B := \{x_{nk} : n, k \in \mathbb{N}\}$ tanımlansın. Bu B kümesi sayılabilirdir ve $Y \subseteq \overline{B}$ dir. Gerçekten, $y \in Y$, $r \in (0,1), t > 0$ ise $\exists k \in \mathbb{N} : 0 < {}^1\!/_k < {}^t\!/_2, \left(1 - {}^1\!/_k\right) * \left(1 - {}^1\!/_k\right) > 1 - r$ ve A, X de yoğun olduğundan, $\exists m \in \mathbb{N} : M\left(x_m, y, {}^1/_k\right) > 1 - {}^1/_k$ olur ve B nin tanımından, $\exists x_{mk} \in B :$ $M\left(x_{mk}, x_m, {}^1/_k\right) > 1 - {}^1/_k$ dir. Buradan da;

$$M(x_{mk}, y, t) \geq M\left(x_{mk}, x_m, {}^t/_2\right) * M\left(x_m, y, {}^t/_2\right) \geq M\left(x_{mk}, x_m, {}^1/_k\right) * M\left(x_m, y, {}^1/_k\right)$$

$$\geq \left(1 - {}^1/_k\right) * \left(1 - {}^1/_k\right) > 1 - r$$

bulunur ki bu $y \in \overline{B}$ demektir, yani $Y \subseteq \overline{B}$ dir. $C := B \cap Y$ tanımlanırsa, C sayılabilirdir ve Y alt uzayında yoğundur. O halde Y alt uzayı ayrılabilirdir.

3. 2. 29. Tanım: X boştan farklı herhangi bir küme ve $(Y, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olmak üzere $\{f_n\}$, X den Y ye fonksiyonların bir dizisi ve f, X den Y ye bir fonksiyon olsun. Eğer her $r \in (0,1), t > 0, x \in X$ için,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow M(f_n(x), f(x), t) > 1 - r$$

koşulu sağlanıyor ise, $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar denir (George ve Veeramani, 1997).

3. 2. 30. Düzgün Limit Teoremi: X bir topolojik uzay, Y bir fuzzy metrik uzay ve $f_n : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\{f_n\}$ dizisi, bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyor ise f süreklidir (George ve Veeramani, 1997).

Kanıt: X topolojik uzayı ve $(Y, M, *)$ fuzzy metrik uzayı, V, Y de bir açık küme ve $x_0 \in f^{-1}(V)$ olsun. $f(x_0) \in V$ dir ve V açık olduğundan,

$\exists r \in (0,1), t > 0 : B(f(x_0), r, t) \subseteq V$ dir ve $r \in (0,1)$ olduğu için,

$$\exists s \in (0,1) : (1 - s) * (1 - s) * (1 - s) > 1 - r$$

olur. $\{f_n\}$, f ye düzgün yakınsadığından, her $x \in X$ için,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow M\left(f_n(x), f(x), {}^t/_3\right) > 1 - s,$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için f_n'ler sürekli olduğundan, sabit bir $n \geq n_0$ için $f_n(U) \subseteq B\left(f_n(x_0), s, {}^t/_3\right)$ biçiminde x_0 ın bir U komşuluğu bulunabilir. Yani, $\forall x \in U$ için $M\left(f_n(x), f_n(x_0), {}^t/_3\right) > 1 - s$ dir. O halde, $\forall x \in U$ için

$$M(f(x), f(x_0), t) \geq M\left(f(x), f_n(x), {}^t/_3\right) * M\left(f_n(x), f_n(x_0), {}^t/_3\right) * M\left(f_n(x_0), f(x_0), {}^t/_3\right)$$

$$\geq (1 - s) * (1 - s) * (1 - s) > 1 - r$$

olur. Böylece, her $x \in U$ için $f(x) \in B(f(x_0), r, t) \subseteq V$ ve $f(U) \subseteq V$ olur. Öyleyse, $x_0 \in U \subseteq f^{-1}(V)$ dir. O halde, f süreklidir.

3. 2. 31. Yardımcı Teorem: Bir (X, τ) T_1 topolojik uzayı metriklenebilirdir ancak ve ancak X üzerinde $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$ olacak şekilde sayılabilir tabanlı bir $\mathcal{U}$ düzgünlüğü vardır. (Kelley, 1955)

3. 2. 32. Teorem: $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. O zaman, M fuzzy metriği tarafından üretilen (X, τ_M) topolojik uzayı metriklenebilirdir (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $U_n := \{(x,y) \in X \times X : M(x,y,1/n) > 1 - 1/n\}$ tanımlansın. $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi, X üzerindeki bir $\mathcal{U}$ düzgünlüğü için bir tabandır ve X üzerinde $\mathcal{U}$ düzgünlüğünün tanımladığı $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisi ile τ_M topolojisi aynıdır:

(i) $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$ için, $M(x,x,1/n) = 1 > 1 - 1/n$ olduğundan,

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\} \subseteq U_{\boldsymbol{n}}$$

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_{n+1} \subseteq U_n$ dir. Gerçekten, $(x,y) \in U_{n+1}$ ise,

$$M(x,y,1/n) \geq M(x,y,1/n+1) > 1 - 1/n+1 > 1 - 1/n$$

dir ve buradan da, $(x,y) \in U_n$ bulunur. O halde, $U_n, U_m \in \mathcal{B}$ ise,
$U_{\text{maks}\,\{n,m\}} \subseteq U_n \cap U_m$ ve $U_{\text{maks}\,\{n,m\}} \in \mathcal{B}$

(iii) Her $x,y \in X$, $t > 0$ için $M(x,y,t) = M(y,x,t)$ olduğundan, $U_n = U_n^{-1}$ dir. O halde, $U_n \in \mathcal{B}$ ise, $U_n^{-1} \subseteq U_n$ ve $U_n^{-1} \in \mathcal{B}$ olur.

(iv) $U_n \in \mathcal{B}$ olsun, $n \in \mathbb{N}$ olduğu için ve $*$ t-normunun sürekliliğinden,

$m > 2n$ ve $(1 - 1/m) * (1 - 1/m) > (1 - 1/n)$

Biçiminde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman, $U_m \circ U_m \subseteq U_n$ dir. Gerçekten, $(x,y) \in U_m$ ve $(y,z) \in U_m$ ise $M(x,y,.)$ fonksiyonu azalmayan olduğundan, $M(x,z,1/n) \geq M(x,z,2/m)$ dir ve böylece,

$$M(x,z,1/n) \geq M(x,z,2/m) \geq M(x,y,1/m) * M(y,z,1/m)$$
$$\geq (1 - 1/m) * (1 - 1/m) > (1 - 1/n)$$

olur ki bu $(x,z) \in U_n$ demektir. O halde, $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi, X üzerindeki bir $\mathcal{U}$ düzgünlüğü için bir tabandır. Diğer taraftan; her $x \in X, n \in \mathbb{N}$ için,

$$U_n(x) = \{y \in X : M(x,y,1/n) > 1 - 1/n\} = B(x, 1/n, 1/n)$$

olmak üzere $\{B(x, 1/n, 1/n) : n = 1,2,3,...\}$ ailesi, x noktasının bir komşuluklar tabanı olacağından, $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_M$ bulunur. Ayrıca, (X, τ_M) Hausdorff olduğundan, 3. 2. 31. Yardımcı Teorem gereği (X, τ_M) metriklenebilirdir.

3. 2. 33. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

a) X kümesi üzerinde, $\tau = \tau_M$ olacak şekilde bir $(M,*)$ fuzzy metriği varsa, (X, τ) topolojik uzayı fuzzy metriklenebilirdir denir.

b) X kümesi üzerinde, $\tau = \tau_M$ olacak şekilde bir $(M,*)$ tam fuzzy metriği varsa, (X, τ) topolojik uzayı tamamıyla fuzzy metriklenebilirdir denir.

3. 2. 34. Sonuç: Bir topolojik uzayın metriklenebilir olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın fuzzy metriklenebilir olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: (X, τ) bir metriklenebilir topolojik uzay olsun. O zaman, X üzerinde, τ topolojisini üreten bir d metriği vardır. X üzerinde, d metriği bir M_d fuzzy metriği üretir. 3. 2. 7. Sonuçtan, $\tau_{M_d} = \tau$ dir. Tersi, 3. 2. 32. Teoremden çıkar.

3. 2. 35. Teorem: $(X, M,*)$ bir tam fuzzy metrik uzay olsun. O zaman (X, τ_M) tamamıyla metriklenebilirdir (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $U_n := \{(x, y) \in X \times X : M(x, y, {}^1/_n) > 1 - {}^1/_n\}$ tanımlansın. 3. 2. 32. Teoremin kanıtından, $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi, X üzerindeki bir $\mathcal{U}$ düzgünlüğü için bir tabandır ve X üzerinde $\mathcal{U}$ düzgünlüğünün tanımladığı $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisi ile τ_M topolojisi aynıdır. O zaman, 3. 2. 31. Yardımcı Teoremden, X üzerinde $\mathcal{U}$ düzgünlüğüne bir d metriği karşılık gelir. Ayrıca (X, d) metrik uzayı tamdır. Gerçekten, (X, d) metrik uzayında bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi verilsin. $\{x_n\}$ dizisinin $(X, M,*)$ de Cauchy dizisi olduğunu göstermek için, $0 < r < 1$ ve $t > 0$ sayıları verilsin. Buradan ${}^1/_k \leq \min\{t, r\}$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ belirlenebilir. (X, d) metrik uzayında, $\{x_n\}$ dizisi Cauchy olduğundan, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow (x_n, x_m) \in U_k$, yani

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow M(x_n, x_m, t) \geq M\left(x_n, x_m, {}^1/_k\right) > 1 - {}^1/_k \geq 1 - r$$

bulunur. O halde $\{x_n\}$ dizisi, $(X, M,*)$ tam fuzzy metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve dolayısıyla τ_M ye göre yakınsaktır. Dolayısıyla, (X, d) metrik uzayı tamdır ve (X, τ_M) tamamıyla metriklenebilirdir.

3. 2. 36. Sonuç: Bir topolojik uzayın tamamıyla metriklenebilir olması için gerek ve yeter koşul tamamıyla fuzzy metriklenebilir olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: (X, τ) tamamıyla metriklenebilir bir topolojik uzay olsun. O zaman, X üzerinde $\tau = \tau_d$ olacak şekilde bir d metriği vardır ve (X, d) metrik uzayı tamdır. M_d, d metriğinin ürettiği standart fuzzy metrik olmak üzere, $(X, M_d,\cdot)$ fuzzy metrik uzayı tamdır. Gerçekten, $\{x_n\}$ dizisi, $(X, M,*)$ fuzzy metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $t > 0$, $0 < r < 1$ için, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow M(x_n, x_m, t) > 1 - r$ olur. $r := \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$ seçilirse,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow M(x_n, x_m, t) = \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} > 1 - r = 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} = \frac{1}{\varepsilon + 1}$$

ve buradan, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ bulunur. Öyleyse $\{x_n\}$, (X, d) tam metrik uzayında Cauchy dizisidir, dolayısıyla yakınsaktır. O halde, $(X, M_d, \cdot)$ fuzzy metrik uzayı tamdır. Yani (X, τ) tamamıyla fuzzy metriklenebilirdir. Önermenin diğer yönü, 3. 2. 35. Teoremden çıkar.

3. 2. 37. Tanım: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Eğer (X, τ_M) topolojik uzayı tıkız ise $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı tıkızdır denir (Gregori ve Romaguera, 2000).

3. 2. 38. Tanım: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Eğer her $r \in (0,1), t > 0$ için $X = \bigcup_{a \in A} B(a, r, t)$ olacak şekilde sonlu bir $A \subseteq X$ altkümesi varsa $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayına öntıkızdır denir. Bu durumda, M, X üzerinde bir öntıkız fuzzy metriktir denir (Gregori ve Romaguera, 2000).

3. 2. 39. Yardımcı Teorem: Bir fuzzy metrik uzayın öntıkız olması için gerek ve yeter koşul bu uzaydaki her dizinin bir Cauchy alt dizisinin var olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: $(X, M, *)$ bir öntıkız fuzzy metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\forall m \in \mathbb{N}$ için $X = \bigcup_{a \in A_m} B(a, {}^1/_m, {}^1/_m)$ olacak şekilde sonlu bir $A_m \subseteq X$ altkümesi vardır. Buradan, $m = 1$ için, $X = \bigcup_{a \in A_1} B(a, 1, 1)$ olacak şekilde sonlu bir $A_1 \subseteq X$ altkümesi vardır. Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{1(n)} \in B(a_1, 1, 1)$ olacak şekilde bir $a_1 \in A_1$ ve $\{x_n\}$ nin bir $\{x_{1(n)}\}$ alt dizisi vardır. Benzer şekilde, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{2(n)} \in B(a_2, {}^1/_2, {}^1/_2)$ olacak şekilde bir $a_2 \in A_2$ ve $\{x_{1(n)}\}$ nin bir $\{x_{2(n)}\}$ alt dizisi vardır. Bu işlemler takip edilerek, $m \in \mathbb{N}, m > 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{m(n)} \in B(a_m, {}^1/_m, {}^1/_m)$ olacak şekilde bir $a_m \in A_m$ ve $\{x_{(m-1)(n)}\}$ nin bir $\{x_{m(n)}\}$ alt dizisi vardır. $\{x_n\}$ nin $\{x_{n(n)}\}$ alt dizisi ele alınsın. Verilen $0 < r < 1$ ve $t > 0$ sayıları için,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \left(1 - {}^1/_{n_0}\right) * \left(1 - {}^1/_{n_0}\right) > 1 - r \text{ ve } {}^2/_{n_0} < t$$

dir. Öyleyse, her $k, m \geq n_0$ için,

$$M(x_{k(k)}, x_{m(m)}, t) \geq M(x_{k(k)}, x_{m(m)}, {}^2/_{n_0}) \geq M(x_{k(k)}, a_{n_0}, {}^1/_{n_0}) * M(a_{n_0}, x_{m(m)}, {}^1/_{n_0})$$
$$\geq \left(1 - {}^1/_{n_0}\right) * \left(1 - {}^1/_{n_0}\right) > 1 - r$$

elde edilir. O halde $\{x_{n(n)}\}$, $(X, M, *)$ uzayında bir Cauchy dizisidir.

Tersine, $(X, M, *)$ öntıkız olmayan bir fuzzy metrik uzay olsun. O zaman, her sonlu $A \subseteq X$ için $X \neq \bigcup_{a \in A} B(a, r, t)$ olacak şekilde $r \in (0,1), t > 0$ sayıları vardır ve alınan $x_1 \in X$ için, bir $x_2 \in X \backslash B(x_1, r, t)$ ve yine bir $x_3 \in X \backslash (\bigcup_{k=1}^{2} B(x_k, r, t))$ noktası seçilebilir. Bu işlemleri devam ettirerek, terimleri X de ayrık noktalar olan ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r, t)$ biçiminde olan, bir $\{x_n\}$ dizisi ele edilebilir. Elde edilen bu

$\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy alt dizisi yoktur. Eğer $\{y_n\}$, $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy alt dizisi ise, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow M(y_n, y_n, t) > 1 - r$ ve buradan, $m = n + 1$ seçilirse, $y_{n+1} \in B(y_n, r, t)$ elde edilir. $\{y_n\}$, $\{x_n\}$ nin bir alt dizisi olduğundan $y_{n+1} = x_p$ ve $y_n = x_s$, $p > s$ olacak şekilde $p, s \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. Buradan, $x_p \in B(x_s, r, t) \subseteq \bigcup_{k=1}^{p-1} B(x_k, r, t)$ elde edilir ki bu $x_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r, t)$ olması ile çelişir. Böylece kanıt tamamlanır.

3. 2. 40. Teorem: Bir $(X, M,*)$ fuzzy metrik uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul X üzerinde $\tau_M = \tau_L$ olacak şekilde bir L öntıkız fuzzy metriğinin var olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: $(X, M,*)$ bir ayrılabilir fuzzy metrik uzay olsun. 3. 2. 32. Teorem ve 3. 2. 27. Sonuçtan (X, τ_M) bir ayrılabilir metriklenebilir topolojik uzaydır. Bu durumda 1. 2. 13. Teoremden; τ_d, X üzerinde d metriğinin ürettiği topoloji olmak üzere, $\tau_M = \tau_d$ olacak şekilde X üzerinde bir d öntıkız metriği vardır. X üzerinde, d tarafından üretilen M_d fuzzy metriği öntıkızdır. Gerçekten, $\{x_n\}$, X de bir dizi ise, d nin öntıkızlığından, $\{x_n\}$ nin (X, d) de bir $\{x_{k(n)}\}$ Cauchy alt dizisi vardır. Verilen $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ sayıları için $\varepsilon := \frac{t}{1-r} - t$ seçilirse,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow d\big(x_{k(n)}, x_{k(m)}\big) < \varepsilon$$

olur. Buradan da,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow M\big(x_{k(n)}, x_{k(m)}, t\big) = \frac{t}{t + d\big(x_{k(n)}, x_{k(m)}\big)} > \frac{t}{t + \varepsilon} = 1 - r$$

elde edilir. Yani, $\{x_{k(n)}\}$, $(X, M_d,*)$ fuzzy metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve böylece, 3. 2. 39. Yardımcı Teoremden, $(X, M_d,*)$ öntıkızdır.

Tersine X üzerinde, $\tau_M = \tau_L$ olacak şekilde bir L öntıkız fuzzy metriği var olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için, $X = \bigcup_{a \in A_n} B(a, {}^1\!/_n, {}^1\!/_n)$ biçiminde sonlu bir $A_n \subseteq X$ altkümesi vardır. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ise, $A \subseteq X$ altkümesi sayılabilirdir ve X de yoğun olur. Gerçekten, $x \in X$ ve $B(x, {}^1\!/_m, {}^1\!/_m)$, x noktasının bir temel komşuluğu olarak alınırsa, $x \in B(a, {}^1\!/_m, {}^1\!/_m)$ olacak şekilde bir $a \in A_m$ vardır ki bu A'nın X de yoğun olması demektir. O halde, $(X, L,*)$ fuzzy metrik uzayı ayrılabilirdir, yani (X, τ_M) bir ayrılabilir topolojik uzaydır.

3. 2. 41. Yardımcı Teorem: $(X, M,*)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Eğer X'deki herhangi bir Cauchy dizisinin bir $x \in X$ yığılma noktası var ise, bu dizi x noktasına yakınsar (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: $\{x_n\}$, $(X, M,*)$ fuzzy metrik uzayında bir $x \in X$ yığılma noktasına sahip bir Cauchy dizisi olsun. O zaman, $\{x_n\}$ nin τ_M ye göre x noktasına yakınsayan bir $\{x_{k(n)}\}$ alt dizisi vardır. O halde, $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ verildiğinde, $s > 0$ ve $(1-s) * (1-s) > 1-r$ olmak üzere $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow M\left(x, x_{k(n)}, {}^{t}/_{2}\right) > 1-s$ dir. Diğer taraftan, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan, $\exists n_1 \geq k(n_0) : n, m \geq n_1 \Longrightarrow M\left(x_n, x_m, {}^{t}/_{2}\right) > 1-s$ olur. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için;

$$M(x, x_n, t) \geq M\left(x, x_{k(n)}, {}^{t}/_{2}\right) * M\left(x_{k(n)}, x_n, {}^{t}/_{2}\right) \geq (1-s) * (1-s) > 1-r$$

Böylece, $\{x_n\}$ Cauchy dizisi x noktasına yakınsar.

3. 2. 42. Teorem: Bir fuzzy metrik uzayın tıkız olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın öntıkız ve tam olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: $(X, M,*)$ bir tıkız fuzzy metrik uzay olsun. Her $r \in (0,1), t > 0$ için $\{B(x,r,t) : x \in X\}$ ailesi X in bir açık örtüsüdür ve $(X, M,*)$ tıkız olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Dolayısıyla $(X, M,*)$ öntıkızdır. $\{x_n\}$, $(X, M,*)$ da bir Cauchy dizisi olsun. $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi tanımlansın. A kümesi sonlu ise $\{x_n\}$ bir x noktasına yakınsaktır ve bu x noktası bu dizinin bir yığılma noktasıdır. $\{x_n\}$ dizisinin hiç bir yığılma noktası olmasın. O halde A sonlu değildir. $\{x_n\}$ dizisinin hiç bir yığılma notası olmadığından A kümesinin de hiç bir yığılma noktası yoktur. Yani,

$$\forall x \in X \text{ için } (B_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$$

olacak şekilde bir B_x açığı bulunabilir. Buradan,

$$\forall x \in X \text{ için } B_x \cap A = \emptyset \text{ veya } B_x \cap A = \{x\}$$

dir. $\mathcal{U} = \{B_x : x \in X\}$ ailesi X in bir açık örtüsüdür. $(X, M,*)$ tıkız olduğundan,

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n \ : \ X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}$$

olur ve böylece

$$A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_{x_i}) \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

olur ki bu A nın sonlu olmaması ile çelişir. O halde $(X, M,*)$ deki her Cauchy dizisinin bir yığılma noktası vardır. 3. 2. 41. Yardımcı Teoremden $(X, M,*)$ deki her Cauchy dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla $(X, M,*)$ tamdır.

Tersine, $(X, M, *)$ öntıkız ve bir tam fuzzy metrik uzay ve $\{x_n\}$, X'de bir dizi olsun. 3. 2. 39. Yardımcı Teorem ve $(X, M, *)$'nin tamlığı gereği, $\{x_n\}$ nin bir yığılma noktası vardır. Yani (X, τ_M) dizisel tıkızdır. Ayrıca 3. 2. 32. Teoremden (X, τ_M) metriklenebilirdir. Her metriklenebilir dizisel tıkız topolojik uzay tıkız olduğundan $(X, M, *)$ tıkızdır.

3. 2. 43. Teorem: Bir metriklenebilir (X, τ) topolojik uzayının tıkız olması için gerek ve yeter koşul $\tau_M = \tau$ biçimindeki her M fuzzy metriğinin öntıkız olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: (X, τ) bir metriklenebilir tıkız topolojik uzay olsun. O zaman, X üzerinde $\tau_d = \tau$ olacak şekilde bir d metriği vardır. X üzerinde, d metriğinin ürettiği standart fuzzy metrik M_d, 3. 2. 42. Teoremden öntıkızdır.

Tersine, (X, τ) metriklenebilir topolojik uzayı için $\tau_M = \tau$ biçimindeki her M fuzzy metriği öntıkız ve d, X üzerinde $\tau_d = \tau$ olacak şekilde herhangi bir metrik olsun. $\tau_{M_d} = \tau_d$ olduğundan, hipotezden, bu d metriğinin ürettiği fuzzy metrik M_d öntıkızdır. $\{x_n\}$, X de herhangi bir dizi ise, 3. 2. 39. Yardımcı Teoremden, $\{x_n\}$ nin $(X, M_d, *)$ da bir $\{x_{k(n)}\}$ Cauchy alt dizisi vardır. Seçilen bir $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ için,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow M_d\left(x_{k(n)}, x_{k(m)}, \frac{1}{2}\right) > 1 - \varepsilon$$

ve buradan,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow d\big(x_{k(n)}, x_{k(m)}\big) < \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisinin (X, d) metrik uzayında bir Cauchy alt dizisi var olmuş olur. Öyleyse, X üzerinde $\tau_d = \tau$ olan her d metriği öntıkızdır. 1. 2. 14. Teoremden, (X, τ) tıkızdır.

3. 2. 44. Teorem: Bir metriklenebilir (X, τ) topolojik uzayının tıkız olması için gerek ve yeter koşul $\tau_M = \tau$ biçimindeki her M fuzzy metriğinin tam olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

Kanıt: (X, τ) bir metriklenebilir tıkız topolojik uzay olsun. O zaman, X üzerinde $\tau_d = \tau$ olacak şekilde bir d metriği vardır. X üzerinde, d metriğinin ürettiği standart fuzzy metrik M_d, 3. 2. 42. Teoremden tamdır.

Tersine, (X, τ) metriklenebilir topolojik uzayı için $\tau_M = \tau$ olacak şekilde her M fuzzy metriği tam ve d, X üzerinde $\tau_d = \tau$ olacak şekilde herhangi bir metrik olsun. $\tau_{M_d} = \tau_d$ olduğundan, hipotezden, bu d metriğinin ürettiği fuzzy metrik M_d tamdır. Öyleyse 3. 2. 18. Sonuçtan d tamdır ve 1. 2. 15. Niemytzki-Tychonoff Teoreminden, (X, τ) tıkızdır.

BÖLÜM 4

FUZZY QUASİ METRİK UZAYLAR

Bu bölümde George ve Veeramani anlamında fuzzy metrikler üzerinden fuzzy quasi-metrik tanımı verilecek ve buna bağlı bazı özellikler incelenecektir. Kramosil ve Michalek anlamında fuzzy metrikler için de benzer özellikler elde edilebilir.

4. 1. Tanımlar ve Temel Sonuçlar:

4. 1. 1. Tanım: X herhangi bir küme, $*$ bir sürekli t-norm ve M, $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde bir fuzzy küme olsun. Aşağıdakiler sağlanıyor ise, $(M,*)$ çiftine, X üzerinde bir fuzzy quasi-pseudo metriktir denir.

$\forall x, y, z \in X, \forall t, s > 0$ için;

(**i**) $M(x, y, t) > 0$

(**ii**) $x = y \Longrightarrow M(x, y, t) = 1$

(**iii**) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$

(**iv**) $M(x, y, .): (0, \infty) \longrightarrow (0,1]$ süreklidir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 2. Tanım: $(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-pseudo metrik olsun. Eğer her $x, y \in X, t > 0$ için,

(**ii′**) $x = y \Leftrightarrow M(x, y, t) = M(y, x, t) = 1$

koşulu sağlanıyor ise $(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-metriktir denir; Eğer her $x, y \in X, t > 0$ için,

(**ii″**) $x = y \Leftrightarrow M(x, y, t) = 1$

koşulu sağlanıyor ise $(M,*)$, X üzerinde bir T_1 fuzzy quasi-metriktir denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 3. Tanım: $(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-(pseudo-) metrik olsun. Eğer her $x, y \in X, t > 0$ için,

(**v**) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

koşulu sağlanıyor ise $(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy (pseudo-) metriktir denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 4. Uyarı: Her fuzzy metrik bir T_1 fuzzy quasi-metrik, her T_1 fuzzy quasi-metrik bir fuzzy quasi-metrik ve her fuzzy quasi-metrik bir fuzzy quasi-pseudo-metriktir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 4. Uyarıdaki ifadenin tersi doğru değildir:

4. 1. 5. Örnek: $X = \{a, b, c\}$ ve $M : X \times X \times (0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$ fonksiyonu her $x \in X$, $t > 0$ için; $M(a, b, t) = M(b, a, t) = 1$, $M(a, c, t) = M(c, a, t) = M(b, c, t) = M(c, b, t) = 0.5$, $M(x, x, t) = 1$ biçiminde tanımlansın. O zaman, $(M,\cdot)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-pseudo-metriktir ancak bir fuzzy quasi-metrik değildir.

$X = \{a, b\}$ ve $M : X \times X \times (0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$ fonksiyonu her $x \in X$, $t > 0$ için; $M(a, b, t) = 1, M(b, a, t) = 0.5, M(x, x, t) = 1$ biçiminde tanımlansın. O zaman, $(M,\cdot)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-metriktir ancak bir T_1 fuzzy quasi-metrik değildir.

$X = \{a, b\}$ ve $M : X \times X \times (0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$ fonksiyonu her $x \in X$, $t > 0$ için; $M(a, b, t) = 0.5, M(b, a, t) = 0.6, M(x, x, t) = 1$ biçiminde tanımlansın. O zaman, $(M,\cdot)$, X üzerinde bir T_1 fuzzy quasi-metriktir ancak bir fuzzy metrik değildir.

4. 1. 6. Tanım: X boştan farklı bir küme ve $(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-(pseudo-) metrik ise $(X, M,*)$ üçlüsüne bir fuzzy quasi-(pseudo-) metrik uzay denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

T_1 fuzzy quasi-metrik uzay ve fuzzy (pseudo-) metrik uzay kavramları yukarıdaki tanıma benzer olarak, uygun şekilde tanımlanır. Buradaki fuzzy metrik uzay kavramı ile George ve Veeramani anlamındaki fuzzy metrik uzay kavramı tamamen aynıdır (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 7. Uyarı: $(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-(pseudo-) metrik olsun. M^{-1}, her $x, y \in X, t > 0$ için, $M^{-1}(x, y, t) := M(y, x, t)$ olmak üzere, $(M^{-1},*)$ da X üzerinde bir fuzzy quasi-(pseudo-) metriktir. Ayrıca, M^i, her $x, y \in X, t > 0$ için, $M^i(x, y, t) := \min\{M(x, y, t), M^{-1}(x, y, t)\}$ olmak üzere, $(M^i,*)$ X üzerinde bir fuzzy (pseudo-) metriktir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: $(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-pseudo metrik ve $x, y, z \in X, t, s > 0$ olsun.

(i) $M^{-1}(x, y, t) = M(y, x, t) > 0$

(ii) $x = y \Longrightarrow M^{-1}(x, y, t) = M(y, x, t) = 1$

(iii) $M^{-1}(x, y, t) * M^{-1}(y, z, s) = M(y, x, t) * M(z, y, s) = M(z, y, s) * M(y, x, t) \leq M(z, x, t + s) = M^{-1}(x, z, t + s)$

(iv) $M^{-1}(x, y, .) = M(y, x, .): (0, \infty) \longrightarrow (0,1]$ süreklidir.

Buradan, $(M^{-1},*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-pseudo metriktir. Eğer $(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi metrik ise, ayrıca $x = y \Leftrightarrow M(x, y, t) = M(y, x, t) = 1$ olacağından, $x = y \Leftrightarrow M^{-1}(x, y, t) = M^{-1}(y, x, t) = 1$ olur, yani, $(M^{-1},*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi- metrik olur.

$(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-pseudo metrik ve $x, y, z \in X, t, s > 0$ olsun. $(M^{-1},*)$ de X üzerinde bir fuzzy quasi-pseudo metriktir. Buradan,

(i) $M^i(x, y, t) := \text{Min}\{M(x, y, t), M^{-1}(x, y, t)\} > 0$

(ii) $x = y \implies M(x, y, t) = 1,\ M^{-1}(x, y, t) = 1 \implies M^i(x, y, t) = 1$

(iii)
$M^i(x, y, t) * M^i(y, z, s) = \text{Min}\{M(x, y, t), M^{-1}(x, y, t)\} * \text{Min}\{M(y, z, s), M^{-1}(y, z, s)\}$ olduğundan,

$$M^i(x, y, t) * M^i(y, z, s) \leq M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$$

ve

$$M^i(x, y, t) * M^i(y, z, s) \leq M^{-1}(x, y, t) * M^{-1}(y, z, s) \leq M^{-1}(x, z, t + s)$$

olur, böylece

$$M^i(x, y, t) * M^i(y, z, s) \leq \text{Min}\{M(x, z, t + s), M^{-1}(x, z, t + s)\} = M^i(x, z, t + s)$$

(iv) $M^i(x, y, .) := \text{Min}\{M(x, y, .), M^{-1}(x, y, .)\} : (0, \infty) \longrightarrow (0,1]$ süreklidir.

Buradan, $(M^i,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi-pseudo metriktir. Eğer $(M,*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi metrik ise, ayrıca $x = y \Leftrightarrow M(x, y, t) = M(y, x, t) = 1$ ve

$x = y \Leftrightarrow M^{-1}(x,y,t) = M^{-1}(y,x,t) = 1$ olacağından, $x = y \Leftrightarrow M^{i}(x,y,t) = M^{i}(y,x,t) = 1$ olur, yani, $(M^{i},*)$, X üzerinde bir fuzzy quasi- metrik olur.■

Ayrıca, yukarıda verilen (**ii′**) koşulu aşağıdaki koşula denktir:

Her $x \in X$ ve her $t > 0$ için $M(x,x,t) = 1$ dir ve her $t > 0$ ve her $x \neq y$ için $M^{i}(x,y,t) < 1$ dir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 8. Önerme: $(X,M,*)$ bir fuzzy quasi-pseudo-metrik uzay olsun. O zaman, her $x,y \in X$ için $M(x,y,.)$ fonksiyonu azalmayandır (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: $x,y \in X$ ve $0 < t < s$ olsun. O zaman,

$$M(x,y,t) = M(x,x,s-t) * M(x,y,t) \leq M(x,y,s)$$

olur.

4. 1. 9. Tanım: $(X,M,*)$ bir fuzzy quasi-pseudo metrik uzay olsun ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. $t > 0$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere,

$$B_M(x,r,t) = \{y \in X : M(x,y,t) > 1 - r\}$$

kümesine, $x \in X$ merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 10. Önerme: $(X,M,*)$ bir fuzzy quasi-pseudo metrik uzay olsun. $x \in X$, $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ ve $0 < t_1 \leq t_2$ ise $B_M(x,r_1,t_1) \subseteq B_M(x,r_2,t_2)$ olur (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: $y \in B_M(x,r_1,t_1)$ olsun. 4. 1. 7. Önermeden,

$$M(x,y,t_2) \geq M(x,y,t_1) > 1 - r_1 \geq 1 - r_2$$

yani, $y \in B_M(x,r_2,t_2)$ dir.

4. 1. 11. Önerme: $(X,M,*)$ bir fuzzy quasi-pseudo metrik uzay olsun. O zaman,

$$\tau_M := \{A \subseteq X : x \in A \Leftrightarrow \exists t,r : t > 0, 0 < r < 1, B(x,r,t) \subseteq A\}$$

ailesi, X üzerinde bir topolojidir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: 3. 2. 3. Sonuçtakine benzer şekilde yapılır.

4. 1. 12. Tanım: 4. 1. 11. Önermede verilen τ_M topolojisine, $(X, M,*)$ fuzzy quasi-pseudo metrik uzayı tarafından üretilen topoloji denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 13. Önerme: τ_M, $(X, M,*)$ fuzzy quasi-pseudo metrik uzayı tarafından üretilen topoloji olsun. Her $x \in X$ için $\{B_M(x, 1/n, 1/n): n = 2, 3, ...\}$ açık yuvarlar ailesi, τ_M ye göre x noktasının bir komşuluklar tabanıdır (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: 3. 2. 4. Nottakine benzer şekilde yapılır.

4. 1. 14. Önerme: τ_M, bir $(X, M,*)$ fuzzy quasi-pseudo metrik uzayı tarafından üretilen topoloji olsun. Eğer M bir fuzzy quasi-metrik (bir T_1 fuzzy quasi-metrik, bir fuzzy metrik) ise, τ_M sırsıyla bir T_0 (bir T_1, bir Hausdorff) topolojidir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: τ_M, bir $(X, M,*)$ fuzzy quasi-metrik uzayı tarafından üretilen topoloji ve $x, y \in X,\ x \neq y$ olsun. O zaman, her $t > 0$ için $M(x, y, t) \neq 1$ veya $M(y, x, t) \neq 1$ dir.

$$r_1 := 1 - M(x, y, t) \text{ ve } r_2 := 1 - M(y, x, t)$$

tanımlansın. O halde,

$$x \in B(x, r_1, t), y \notin B(x, r_1, t) \text{ veya } y \in B(y, r_2, t), x \notin B(y, r_2, t)$$

olur, buradan, τ_M topolojisi T_0 dır.

τ_M, bir $(X, M,*)$ T_1 fuzzy quasi-metrik uzayı tarafından üretilen topoloji ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. O zaman, her $t > 0$ için $M(x, y, t) \neq 1$ ve $M(y, x, t) \neq 1$ dir.

$$r_1 := 1 - M(x, y, t) \text{ ve } r_2 := 1 - M(y, x, t)$$

tanımlansın. O halde,

$$x \in B(x, r_1, t), y \notin B(x, r_1, t) \text{ ve } y \in B(y, r_2, t), x \notin B(y, r_2, t)$$

olur, buradan, τ_M topolojisi T_1 dir.

Ayrıca, 3. 2. 5. Teoremden her fuzzy metrik uzay Hausdorfftur.

4. 1. 15. Önerme: $(X, M,*)$ bir fuzzy quasi-pseudo metrik uzay olsun. O zaman, her $B_M(x, r, t)$ açık yuvarı, τ_M topolojisi için bir açık kümedir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: 3. 2. 2. Sonuçtakine benzer şekilde yapılır.

4. 1. 16. Önerme: : $(X, M, *)$ bir fuzzy quasi-pseudo metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\{x_n\}$, τ_M topolojisine göre bir $x \in X$ noktasına yakınsaktır ancak ve ancak her $t > 0$ için $\lim_n M(x, x_n, t) = 1$ dir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: 3. 2. 12. Teoremdekine benzer şekilde yapılır.

4. 1. 17. Örnek: (X, d) bir quasi-metrik uzay olsun. $\cdot$, çarpım t-normu ve M_d, $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

ile tanımlı fonksiyon olsun. O zaman, $(X, M_d, \cdot)$ bir fuzzy quasi-metrik uzaydır. 3. 1. 8. Örnekteki gibi gösterilebilir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 18. Tanım: 4. 1. 17. Örnekte verilen $(X, M_d, \cdot)$ fuzzy quasi-metrik uzayına d fuzzy quasi-metriği tarafından üretilen standart fuzzy quasi-metrik uzayı denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 19. Önerme: d, X üzerinde bir quasi-metrik olmak üzere, $(M_d)^{-1} = M_{d^{-1}}$ ve $(M_d)^i = M_{d^s}$ dir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: d, X üzerinde bir quasi-metrik, $x, y \in X$ ve $t > 0$ olsun.

$$(M_d)^{-1}(x, y, t) = M_d(y, x, t) = \frac{t}{t + d(y, x)} = \frac{t}{t + d^{-1}(x, y)} = M_{d^{-1}}(x, y, t)$$

ve

$$\begin{aligned}(M_d)^i(x, y, t) &= \mathrm{Min}\{M_d(x, y, t), (M_d)^{-1}(x, y, t)\} = \mathrm{Min}\left\{\frac{t}{t + d(x, y)}, \frac{t}{t + d^{-1}(x, y)}\right\} \\ &= \frac{t}{t + \mathrm{maks}\{d(x, y),\ d^{-1}(x, y)\}} = \frac{t}{t + d^s(x, y)} = M_{d^s}(x, y, t)\end{aligned}$$

olur.

4. 1. 20. Önerme: d, X üzerinde bir quasi-metrik olmak üzere, $\tau_d = \tau_{M_d}$ dir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: 3. 2. 7. Sonuçtakine benzer şekilde yapılır.

4. 1. 21. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\tau = \tau_M$ olacak şekilde X üzerinde bir $(M,*)$ fuzzy quasi-metriği varsa (X, τ) topolojik uzayına fuzzy quasi-metriklenebilirdir denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 1. 22. Sonuç: 4. 1. 17. Örnekten ve 4. 1. 20. Önermeden, her quasi-metriklenebilir topolojik uzay fuzzy quasi-metriklenebilirdir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 2. Bir Fuzzy Quasi-Metrik Uzayın Topolojisinin Quasi-Metriklenebilirliği

4. 2. 1. Yardımcı Teorem: $(X, M,*)$ bir fuzzy quasi-metrik uzay olsun. O zaman $n = 2, 3, ...$ için

$$U_n = \{(x,y) \in X \times X : M\left(x, y, {}^{1}/_{n}\right) > 1 - {}^{1}/_{n}\}$$

olmak üzere, $\{U_n : n = 2, 3, ...\}$, X üzerinde τ_M topolojisini üreten bir $\mathcal{U}_M$ quasi-düzgünlüğü için bir tabandır.

Ayrıca, $(\mathcal{U}_M)^{-1} = \mathcal{U}_{M^{-1}}$ olup eşlenik quasi-düzgünlük $(\mathcal{U}_M)^{-1}$, $\tau_{M^{-1}}$ topolojisini üretir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 2. 2. Teorem: Sayılabilir tabanlı bir quasi-düzgünlük tarafından üretilen topoloji quasi-pseudo metriklenebilirdir. (Fletcher ve Lindgren, 1982)

4. 2. 3. Teorem: Bir topolojik uzay quasi-metriklenebilirdir ancak ve ancak fuzzy quasi-metriklenebilirdir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: 4. 1. 22. Sonuçtan, bir topolojik uzay quasi-metriklenebilir ise fuzzy quasi-metriklenebilirdir. Diğer taraftan, bir topolojik uzay fuzzy quasi-metriklenebilir ise bu uzay T_0 dır ve 4. 2. 1. Yardımcı Teoremden bu uzayın topolojisini üreten sayılabilir tabanlı bir quasi-düzgünlük vardır. 4. 2. 2. Teoremden bu topolojiyi üreten bir d quasi-pseudo metriği vardır. Aynı zamanda uzay T_0 olduğundan d bir quasi-metriktir. Dolayısıyla, bir topolojik uzay fuzzy quasi-metriklenebilir ise quasi-metriklenebilirdir.

4. 2. 4. Uyarı: $\mathcal{U}_{M^i}$ düzgünlüğü ile $(\mathcal{U}_M)^s := \mathcal{U}_M \vee (\mathcal{U}_M)^{-1}$ düzgünlüğü aynıdır (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 3. İkili-tam Fuzzy Quasi-metrik Uzaylar

4. 3. 1. Tanım: $(X, M,*)$ bir fuzzy quasi-metrik uzay olsun. $(X, M^i,*)$ fuzzy metrik uzayı tam ise $(X, M,*)$ fuzzy quasi-metrik uzayına ikili-tamdır denir. Bu durumda, $(M,*)$, X üzerinde bir ikili-tam fuzzy quasi-metriktir denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 3. 2. Önerme:

(a) $(X, M,*)$ bir ikili-tam fuzzy quasi-metrik uzay olsun. O zaman, X üzerinde $\tau_M = \tau_d$ olacak şekilde bir d ikili-tam quasi-metriği vardır.

(b) (X, d) bir ikili-tam quasi-metrik uzay olsun. O zaman, $(X, M_d,\cdot)$ bir ikili-tam fuzzy quasi-metrik uzaydır (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: (a) $(X, M,*)$ bir ikili-tam fuzzy quasi-metrik uzay olarak verildiğinden, X üzerinde $\mathcal{U}_M$ quasi-düzgünlüğünü üreten bir d quasi-metriği vardır. O zaman $\tau_M = \tau_d$ dir. $\{x_n\}$, (X, d^s) de bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\{x_n\}$, $(X, M^i,*)$ fuzzy metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Öyleyse $\{x_n\}$, τ_{M^i} ye göre bir $y \in X$ noktasına yakınsar. Dolayısıyla $\{x_n\}$, τ_{d^s} ye göre $y \in X$ noktasına yakınsar. Buradan, d ikili-tamdır.

(b) $(M_d)^i = M_{d^s}$ olduğundan $(X, (M_d)^i,\cdot)$ fuzzy metrik uzayındaki her Cauchy dizisi (X, d^s) metrik uzayında da Cauchy dizisidir. Buradan istenen çıkar.

4. 3. 3. Tanım: $(X, M,*)$ ve $(Y, N,\star)$ iki fuzzy quasi-metrik uzay olsun.

(a) f, X den Y ye bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için $M(x, y, t) = N(f(x), f(y), t)$ oluyorsa f ye bir izometri denir.

(b) X den Y ye bir örten izometri varsa, $(X, M,*)$ ve $(Y, N,\star)$ izometriktir denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 3. 4. Tanım: $(X, M,*)$ bir fuzzy quasi-metrik uzay, $(Y, N,\star)$ bir ikili-tam fuzzy quasi-metrik uzay olsun. Eğer $(X, M,*)$, Y nin bir τ_{N^i}-yoğun alt uzayına izometrik ise $(Y, N,\star)$, $(X, M,*)$ fuzzy quasi-metrik uzayının bir ikili-tamlamasıdır denir (Gregori ve Romaguera, 2004).

4. 3. 5. Önerme: $(X, M,*)$ bir fuzzy quasi-metrik uzay, $(Y, N,\star)$ bir ikili-tam fuzzy quasi-metrik uzay olsun. Eğer X in bir τ_{M^i}-yoğun A altkümesi ve bir $f : (A, M,*) \longrightarrow$

$(Y, N,\star)$ izometrisi varsa, $F|_A = f$ olacak şekildeki $F : (X, M,*) \longrightarrow (Y, N,\star)$ izometrisi tektir (Gregori ve Romaguera, 2004).

Kanıt: f, $(A, \mathcal{U}_M|_{A\times A})$ quasi-düzgün uzayından $(Y, \mathcal{U}_N)$ quasi-düzgün uzayına bir quasi-düzgün sürekli dönüşümdür. 1. 2. 18. Teoremden, f nin tek bir $F : (X, \mathcal{U}_M) \longrightarrow (Y, \mathcal{U}_N)$ quasi-düzgün sürekli genişlemesi vardır. Bu durumda, F nin $(X, M,*)$ den $(Y, N,\star)$ ye bir izometri olduğunu görmek yeterlidir. $x, y \in X$ ve $t > 0$ olsun. O zaman, A, X de τ_{M^i}-yoğun olduğundan, τ_{M^i} ye göre $x_n \longrightarrow x$ ve $y_n \longrightarrow y$ olacak şekilde A da $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri vardır. Buradan, τ_{M^i} ye göre $F(x_n) \longrightarrow F(x)$ ve $F(y_n) \longrightarrow F(y)$ olur. $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varepsilon < t$ olsun.

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_\varepsilon \text{ için,}$$

$$M\left(x, x_n, {}^{\varepsilon}/_{2}\right) > 1 - \varepsilon, \qquad M\left(y_n, y, {}^{\varepsilon}/_{2}\right) > 1 - \varepsilon$$

$$N\left(F(x_n), F(x), {}^{\varepsilon}/_{2}\right) > 1 - \varepsilon, \qquad N\left(F(y), F(y_n), {}^{\varepsilon}/_{2}\right) > 1 - \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla,

$$M(x, y, t) \geq M\left(x, x_n, {}^{\varepsilon}/_{2}\right) * M(x_n, y_n, t - \varepsilon) * M\left(y_n, y, {}^{\varepsilon}/_{2}\right)$$

$$\geq (1 - \varepsilon) * N(F(x_n), F(y_n), t - \varepsilon) * (1 - \varepsilon)$$

$$\geq (1 - \varepsilon) * \left[N\left(F(x_n), F(x), {}^{\varepsilon}/_{2}\right) \star N(F(x), F(y), t - 2\varepsilon) \star N\left(F(y), F(y_n), {}^{\varepsilon}/_{2}\right)\right] * (1 - \varepsilon)$$

$$\geq (1 - \varepsilon) * [(1 - \varepsilon) \star N(F(x), F(y), t - 2\varepsilon) \star (1 - \varepsilon)] * (1 - \varepsilon)$$

olur. $*$ ve $\star$ t-normları ve $N(F(x), F(y), .)$ sürekli olduklarından, yukarıdaki eşitsizlikte $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken limite geçilirse, $M(x, y, t) \geq N(F(x), F(y), t)$ elde edilir. Benzer şekilde $N(F(x), F(y), t) \geq M(x, y, t)$ olur. O halde F, $(X, M,*)$ den $(Y, N,\star)$ ye bir izometridir.

KAYNAKLAR

Aczél J. ve Dhombres J., 1989. *Functional Equations in Several Variables.*

Bülbül A., 2004. *Genel Topoloji*.

Engelking R., 1989. *General Topology.*

Fletcher P. ve Lindgren W. F., 1982. *Quasi-Uniform Spaces.*

George A. ve Veeramani P., 1994. On Some Results in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems 64 (1994) 395-399.*

George A. ve Veeramani P., 1997. On Some Results of Analysis for Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems 90 (1997) 365-368.*

Grabiec M., 1988. Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets ans Systems 27 (1988) 385-389.*

Gregori V. ve Romaguera S., 2000. Some Properties of Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems 115 (2000) 485-489.*

Gregori V. ve Romaguera S., 2004. Fuzzy Quasi-Metric Spaces. *Applied General Topology Vol. 5 no. 1, 2004 pp. 129-136.*

Kelley L. J., 1955. *General Topology*.

Klement E. P., Mesiar R. ve Pap E., 2000. *Triangular Norms.*

Klement E. P., Mesiar R. ve Pap E., 2004a. Triangular Norms. Position Paper I: Basic Analytical and Algebraic Properties. *Fuzzy Sets and Systems 143 (2004) 5-26.*

Klement E. P., Mesiar R. ve Pap E., 2004b. Triangular Norms. Position Paper II: General Constructions and Parameterized Families. *Fuzzy Sets and Systems 145 (2004) 411-438.*

Klement E. P., Mesiar R. ve Pap E., 2004c. Triangular Norms. Position Paper III: Continuous T-norms. *Fuzzy Sets and Systems 145 (2004) 439-454*

Kramosil O. ve Michalek J., 1975. Fuzzy Metric and Statistical Metric Spaces. *Kybernetica 11 (1975) 326-334.*

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Ramazan EKMEKÇİ

Doğum Yeri: Antakya

Doğum Tarihi: 20.12. 1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi OFMA Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi ABD

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce, Almanca.

BİLİMSEL FAALİYETLER

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl: ÇOMÜ Matematik Bölümü (Araştırma Görevlisi) 2009-…

İLETİŞİM

E-posta Adresi: ekmekci@comu.edu.tr