SÜREKSİZLİK KOŞULLARINA SAHİP
STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ
İÇİN SPEKTRAL PROBLEMLER

Sema KAPLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2009

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKSİZLİK KOŞULLARINA SAHİP STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ İÇİN SPEKTRAL PROBLEMLER

SEMA KAPLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. SELMA GÜLYAZ

SİVAS
2009

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ÇEVEN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selma GÜLYAZ

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2009

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Sezai ELAGÖZ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fenk Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

SÜREKSİZLİK KOŞULLARINA SAHİP STURM-LIOUVILLE
OPERATÖRÜ İÇİN
SPEKTRAL PROBLEMLER

Sema KAPLAN
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Selma GÜLYAZ
2009, 66 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sıkça kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Yurko ve Freiling tarafından ters problemlerin çözümünü yapılandırmak için verilen Gelfand- Levitan metoduna yer verilmiştir.Bu metot yardımıyla ters problemin çözümü için algoritma elde edilmiş ve onların çözülebilirliği için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde, Sonlu aralıkta süreksizlik koşullarına sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörlerinin ters problemi için Gelfand- Levitan metodundaki esas denklem elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Spektral Teori, Çevirme Operatörü, Öz değer, Öz fonksiyon, Normalleştirici sayılar, Ters problem.

ABSTRACT

SPECTRAL PROMBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE OPERATORS
WHICH HAVE DISCONTINUITY CONDITIONS

Sema KAPLAN
Master of Science Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Selma GÜLYAZ
2009, 66 pages

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, important concepts and theorems, which are used frequently in the spectral theory of differential operators, have been given.

In the second chapter, we have given place to the Gelfand-Levitan method for constructing the solution of inverse problems, introduced by Yurko and Freiling. By the method we have been obtained algorithms for the solution of inverse problems and provide necessary and sufficient conditions for their solvability.

In the third chapter, we have been obtained the main equation in Gelfand-Levitan method for inverse problems of Sturm-Liouville differential operators which have discontinuity conditions inside a finite interval.

Key Words: Spectral theory, Transformation Operator, Eigenvalue, Eigenfunction, Inverse Problem.

Araştırmalarımın başından sonuna kadar tüm safhalarında yardımını esirgemeyen danışmanım Yrd.Doç.Dr. Selma GÜLYAZ' a, değerli fikir ve tecrübeleriyle bana büyük destek sağlayan değerli hocam Prof.Dr. Rauf AMİROV'a ayrıca katkılarından dolayı TÜBİTAK'a ve eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan aileme vermiş olduğu manevi destekten dolayı çok teşekkür ederim.

Sema KAPLAN

Sivas, Temmuz 2009

GİRİŞ

Spektral analizin bir dalı olan inverse (ters) problemler yani, spektral karakteristiklerine göre operatörlerin kurulması problemi, fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin mekanikte, verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesinde, Kuantum mekaniğinde, verilen enerji seviyelerine veya saçılma verilerine göre parçacıklar arasında etkileşimin öğrenilmesinde, jeofizikte yer altı madenlerinin aranmasında karşımıza çıkmaktadır.

Bu alandaki temel sonuçlar G. Borg, N. Levinson, A.N. Tychonoff, V.A. Marchenko, İ.M. Gelfand, B.M. Kreyn, Yu M. Brzezinski, L.D. Fadeev, M.M.Lavrentiev, M.G. Gasimov, F.S.Rofe-Beketov, L.P. Nijnik tarafından verilmiştir.

1967 yılında G. Gardner, J. Green, M. Kruskal ve R. Miura ilk kez inverse problemlerin yardımıyla fiziğin birçok alanında ortaya çıkan nonlineer evolyosyon denklemlerin çözümlerini vermişlerdir (Kortfeg-de Friz denklemi bunlara ait bir örnektir). Bu çalışmadan sonra inverse problemlere olan ilgi daha da artmış, bunun sonucu olarak da inverse problemler konusu aktüel bir konu olarak güncelliğini korumaya devam etmiştir.

Tezde elde edilen önemli sonuçları vermeden önce II. mertebeden diferansiyel operatörler için spektral teorinin tarihsel gelişimi verilecek ve daha sonra tezde elde edilen sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 0.1: $l(y) = -y'' + q(x)y$ diferansiyel ifadesi verilsin. Eğer, a ve b sonlu olmak üzere $x \in [a, b]$ ve $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirse $l(y)$ ifadesine regüler diferansiyel ifade denir. Eğer, a ve b sayılarından herhangi biri ya da her ikisi de sonsuz ise veya $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenemezse ve ya da her iki durum birlikte söz konusu ise $l(y)$ ifadesine singüler diferansiyel ifade denir.

Tanım 0.2: (1.1) diferansiyel denklemi ve (1.2) sınır koşulları tarafından üretilen lineer operatör L olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ çözümü varsa λ ya L operatörünün özdeğeri, y çözümüne de λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 0.3: $(L-\lambda I)^{-1}$ operatörüne L operatörünün Resolvent operatör denir.

Tanım 0.4: $(L-\lambda I)^{-1}$ in tüm $L_2[0,\pi]$ de mevcut ve sınırlı olduğu $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün regüler noktası denir. Tüm regüler noktalarının kümesine resolvent küme denir ve $\rho(L)$ ile gösterilir.

Tanım 0.5:

I) $(L-\lambda I)^{-1}$ in mevcut olmadığı λ noktalarının kümesine L operatörünün noktasal spektrumu veya özdeğerler kümesi denir. Noktasal spektrum

$$\sigma(L) = \{\lambda \colon Ly = \lambda y, y \in D(L)\}$$

ile gösterilir. Buradan

$$\sigma(L) = \mathbb{C} \backslash \rho(L)$$

dır.

II) $(L-\lambda I)^{-1}$ mevcut olup, yoğun kümede tanımlı ve sınırlı olmayacak şekildeki λ ların kümesine sürekli spektrum denir.

III) $(L-\lambda I)^{-1}$ mevcut, fakat yoğun olmayan kümede tanımlı λ ların kümesine rezidü spektrum denir.

Tanım 0.6: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $\{y(x,\lambda_n)\}$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun.

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x,\lambda_n)dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 0.7: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine L operatörünün spektral karakteristikleri denir.

Tanım 0.8: L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerin bulunması problemine düz problem, spektral karakteristikler verildiğinde bu hangi Sturm-Liouville tipinde L diferansiyel operatörünün spektral karakteristikleri olduğu problemine ise ters problem denir.

Ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörlerin spektral analizinde önemli bir yere sahiptir ve de fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V.A. Ambartsumyan'a [1] aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 0.9: $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...'$ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \quad 0 < x < \pi \tag{0.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{0.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2 \quad (n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V.A. Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler ve farklı problemler ortaya çıkmıştır. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G. Borg'a aittir ve elde ettiği sonuç, aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 0.10: $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$(0.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{0.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n, ...'$ler ise (0.1) denklemi ve

$$y^{'}(0) - h_1 y(0) = 0, \quad h \neq h_1 \tag{0.5}$$

$$y^{'}(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.4}$$

sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. (h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılardır.)

Borg'un 1945 yılındaki çalışmasında [8] $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin verilen operatörün farklı spektrumları olduğu kabul edilmiş ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirlenmiştir. Yani, bu tip operatörün varlığının önceden belli olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca, Borg aynı çalışmasında bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. Bu yüzden, V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki aşamalardan birisi V.A. Marchenko [25] tarafından kaydedilmiştir.

1950 yılında V.A. Marchenko yapmış olduğu çalışmasında [25] bu tip problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (0.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi^{'}(0,\lambda) = h, \tag{0.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda verilen operatörün

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx$$

normalleştirici sayılarından faydalanarak oluşturulan

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonuna ise bu operatörün spektral fonksiyonu denir. V.A. Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada Borg'un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonun, Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı anda M.G. Krein [23], [24] çalışmalarında, Sturm-Liouville tipindeki bir diferansiyel ope-
ratörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V.A. Marchenko'nun çalışması yayınlanmadan önce A.N. Tychonoff [33] tarafından V.A. Marchenko'nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A.N. Tychonoff çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 0.11: $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda\rho^2(x)U = 0, \quad x > 0 \quad U(\infty) = 0$$

problemin çözümü $U(x, \lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı sürekli analitik fonksiyondur ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$. $R(\lambda) = \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. O halde $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtir.

1951 yılında I.M. Gelfand ve B.M. Levitan [19], $\rho(x)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli koşullar vermişlerdir. Ayrıca, bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ $(\alpha_n > 0)$ dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen klasik asimptotik formüllerin sağlanmasıdır;

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + ... + \frac{a_{[|\frac{m}{2}|]}}{n^{2[|\frac{m}{2}|]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2[|\frac{m}{2}|]+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + ... + \frac{b_{[|\frac{m}{2}|]}}{n^{2[|\frac{m}{2}|]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2[|\frac{m}{2}|]+1}},$$

burada $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek ise $\sum \tau_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir.Regüler Sturm- Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm- Liouville operatörünün belirlenmesi problemi 1964 yılında B.M.Levi-tan ve M.G. Gasimov [17] tarafından yapılan bir çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada iki spektruma göre ters problemin çözümünde kullanılan en önemli formül

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{0.8}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod{}'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n.$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.8) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (0.8) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve B.M.Levitan ve M.G.Gasimov [17] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşullar verilecektir ve bu koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır, yani
$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < ...$ dir,

2) λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O(\frac{1}{n^4})$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0^{'}}{n} + \frac{a_1^{'}}{n^3} + O(\frac{1}{n^4})$$

asimptotik formüllere sahiptir,

3) $a_0 \neq a_0^{'}$.

Çevirme operatörlerine dayanan regüler Sturm-Liouville operatörünün spektral verisinden, q potansiyelini yeniden elde etmenin algoritması 1950 yılında V.A.Marchenko [25] ve 1951 yılında I.M.Gelfand ve B.M. Levitan [19] tarafından geliştirilen Gelfand-Levitan-Marchenko denklemini vermişlerdir. İki spektrum ile q potansiyelinin kurulumu için bir alternatif metod, 1951 yılında M.G.Krein [23] tarafından geliştirildi. Daha sonra H Hilbert uzayından potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için 1987 yılında E.Trubowitz ve J. Poeschel [31] tarafından farklı bir yaklaşım öne-
rildi. Yazarlar, spektral veriyi ve H' daki potansiyeller arasındaki dönüşümü ayrıntılı olarak çalışmışlar ve ters spektral problemin çözülebilirliğini ispatlamışlardır. Özellikle spektral veriyi tam olarak karakterize etmişlerdir.

1999 yılında R. Kh. Amirov ve S. Gülyaz [2] tarafından $[0, \pi]$ aralında $x = 0$ noktasında $\left(\frac{l(l-1)}{x^2} + \frac{A}{x}\right)$ bir singulariteye sahip denklem için Gelfand-Levitan denkleminin varlığı ve tekliğini araştırmışlardır. Ayrıca bir spektrum ve bir normalleştirici sayıya göre ters problemin çözümünü vermişlerdir.

2003 yılında Hryniv ve Mkytyuk' un çalışmalarında [21] Gelfand, Levitan ve Marchenko' ya göre, klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve $W_2^{-1}(0,1)$ den singüler potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüştür. Şöyle ki, spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elemanından q'nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır.

Aralığın iç noktasında singülariteye ve süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler, 2001 yılında R.Kh. Amirov ve V.A.Yurko [3] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $x = 0$ noktasında singülariteye sahip self-adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralığın iç noktasında çözümün süreksizliğe sahip olduğu durumu incelenmiştir ve verilen opera-törün spektral özellikleri ve bu spektral özelliklere göre ters problemin konumu ve çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Benzer şekilde 2002 yılında R.Kh.Amirov 'un [4] çalışmasında self-adjoint olmayan, Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahip olduğu durum incelenmiştir. Burada verilen diferan-

siyel operatörü üreten diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışları, operatörün spektral özellikleri, spektrumu basit olduğu durumda yani yalnızca özdeğerlerden oluştuğu durumda, özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon ve koşulmuş fonksiyonlara göre operatörün ayrılışımı, spektral parametrelere göre ters problemin konumu ve bu ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

2006 yılında R.Kh. Amirov' un [5] çalışmasında, sonlu aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörler sınıfı için çevirme operatörü, çekirdek fonksiyonunun, spektral karakteristiklerinin bazı özellikleri ve ters problem için teklik teoremleri öğrenilmiştir.

2008 yılında R. Kh.Amirov ve N. Topsakal [6] tarafından sonlu aralıkta Coloumb potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerin çevirme operatörü, spektral karakteristiklerin özellikleri ve çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri çalışılmıştır.

2006 yılında R.Kh. Amirov' un [5] çalışmasında sonlu aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörler sınıfının ters problem için teklik teoremleri verilmiştir. Tezde bu çalışmadan farklı olarak sonlu aralıkta süreksizlik koşullarına sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörlerinin ters problemi için Gelfand- Levitan metodundaki esas denklem araştırılmıştır. Bu tezde aşağıdaki yol izlenmiştir:

I. bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

II bölümde, V.A. Yurko ve G. Freiling (2008) [16] kitabında ters problemlerin çözümünü yapılandırmak için verilen Gelfand- Levitan metoduna yer verilmiştir. Bu metot yardımıyla ters problemin çözümü için algoritma elde edilmiş ve onların çözülebilirliği için gerek ve yeter koşullar ispatlanmıştır.

III.bölümde, sonlu aralıkta süreksizlik koşullarına sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörlerinin ters problemi için Gelfand- Levitan metodundaki esas denklem elde edilmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1: $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L_2[a,b]$ uzayı,

$$L_2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b |x(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2: ℓ_2 uzayı,

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \;\middle|\; x_i \in \sum_{n=1} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3: L, $D(L)$ tanım kümesinde sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$L(y) = By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 1.4: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ dizisi L operatörünün özdeğeri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \left\{ y_1^2(x,\lambda_n) + y_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 1.5 (Adjoint Operatör) : H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı $L : H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \to H_1$ operatörü

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^* y \rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne self adjoint operatör denir.

Tanım 1.6 (Çevirme Operatörü) : E lineer topolojik uzay, A ve B de $A : E \to E$, $B : E \to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatör çifti için çevirme operatörü denir.

Tanım 1.7: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 1.8: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna tam fonksiyon denir.

Teorem 1.9 (Rouche Teoremi) : f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar olsunlar. Eğer γ, f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen, B içinde bulunan basit kapalı bir eğri ve de γ üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ ise bu durumda $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonlarının γ içindeki sıfırlarının sayısı katlılığı ile aynıdır.

Teorem 1.10 (Cauchy İntegral Teoremi) : $f(z)$ bağlantılı G bölgesinde bire-bir analitik fonksiyon, γ ise G ' de bulunan keyfi düzlendirilebilir kapalı eğri olmak üzere $f(z)$ nin γ eğrisi üzerinden integrali sıfırdır. Yani;

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

dır.

Teorem 1.11 (Cauchy İntegral Formülü) : B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer a, γ içinde bir nokta ve $f(z)$, B ' de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

dir.

Tanım 1.12: Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık aykırı noktası z_0 olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası denir.

Teorem 1.13 (Rezidü Teoremi) : D bölgesinde ($f(z)$ nin sonlu sayda ayrık tekil $z_1, z_2, ..., z_n$ noktaları hariç) ve D nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z=z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[f(z)(z-z_0)^k \right],$$

z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z=z_0} \left[f(z)(z-z_0) \right]$$

dir.

Teorem 1.14:

i)

$$L = L\left(q\left(x\right), h, H\right) := \begin{cases} l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = k^2, \quad 0 < x < \pi \\ U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin $\{\varphi\left(x, \lambda_n\right)\}_{n \geq 0}$ öz fonksiyonları sistemi $L_2\left[0, \pi\right]$ de tamdır.

ii) $f(x)$, $x \in [0, \pi]$ de mutlak sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} f(t)\varphi\left(t, \lambda_n\right) dt$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi\left(x, \lambda_n\right),$$

serisi $x \in [0, \pi]$ de düzgün yakınsaktır.

iii) $f(x) \in L_2\left[0, \pi\right]$ için (ii) deki seri $L_2\left[0, \pi\right]$ uzayında yakınsaktır ve

$$\int_0^{\pi} \left|f(x)\right|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left|a_n\right|^2$$

Parseval eşitliği sağlanmaktadır.

2.BÖLÜM

GELFAND-LEVITAN METODU

Bu bölümde ters problemlerin çözümünü yapılandırmak için bir metot veril-di. Dönüşüm operatörleri yardımıyla Gelfand-Levitan metodu tanımlandı. Gelfand-Levitan metodu yardımıyla ters problemin çözümü için algoritma elde edildi ve onların çözülebilirliği için gerek ve yeter koşullar ispatlandı. Bu bölümün temel sonuçları teorem 1.2 ve 1.4 de ifade edilmiştir.

Yardımcı Önerme 2.1: Dönüşüm operatör metodunu öğrenmek için önce bazı yardımcı lemmalar verilecektir.

Lemma 2.1: B bir Banach uzayı $A : B \longrightarrow B$, $A_0 : B \longrightarrow B$ sınırlı lineer operatörler ve E özdeşlik operatörü olmak üzere;

$$(E + A_0)\, y_0 = f_0$$
$$(E + A)\, y = f$$

denklemleri verilsin.

$$R_0 := (E + A_0)^{-1}$$

sınırlı lineer operatör olsun. Bu durumda $(E + A_0)\, y_0$ denklemi B Banach uzayında tek olarak çözülebilirdir. Eğer

$$\|A - A_0\| \leq (2\, \|R_0\|)^{-1}$$

ise

$$R := (E + A)^{-1}$$
$$R = R_0 \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} ((A - A_0)\, R_0)^k \right)$$

sınırlı lineer operatörü vardır ve

$$\|R - R_0\| \leq 2\, \|R_0\|^2\, \|A - A_0\|$$

dır. Ayrıca y ve y_0

$$\|y - y_0\| \leq c_0 \left(\|A - A_0\| + \|f - f_0\|\right)$$

olarak hesaplanır. Burada c_0 sadece $\|R_0\|$ ve $\|f_0\|$ a bağlıdır.

Lemma 2.2: $A\left(t, s, \alpha\right)$ ve $f\left(t, \alpha\right)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y\left(t, \alpha\right) + \int_a^b A\left(t, s, \alpha\right) y\left(s, \alpha\right) ds = f\left(t, \alpha\right), \ a \leq t \leq b \tag{2.1}$$

integral eşitliği verilsin.

$\alpha = \alpha_0$ sabitlenmiş noktası için

$$z(t) + \int_a^b A_0\left(t, s\right) z\left(s\right) ds = 0, \quad A_0\left(t, s\right) := A\left(t, s, \alpha_0\right)$$

homojen denklemi trivial çözüme sahip olsun. O halde $\alpha = \alpha_0$ noktasının bir komşuluğunda (2.1) denklemi t ve α ya bağlı sürekli bir fonksiyon olan bir tek $y\left(t, \alpha\right)$ çözümüne sahiptir.

Lemma 2.3: $\varphi_j\left(x, \lambda\right), \ j \geq 1$ fonksiyonu $\varphi_j\left(0, \lambda\right) = 1$ ve $\varphi_j'\left(0, \lambda\right) = h_j$ koşulları altında

$$-y'' + q_j(x)y = \lambda y, \quad q_j(x) \in L_2(0, \pi)$$

denkleminin çözümü ve $\varphi\left(x, \lambda\right)$ fonksiyonu da; $\varphi\left(0, \lambda\right) = 1$ ve $\varphi'\left(0, \lambda\right) = h$ koşulları altında

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(x) \in L_2(0, \pi)$$

denkleminin çözümü olsun. Eğer

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \|q_j - q\|_{L_2} = 0, \quad \lim_{j \longrightarrow \infty} h_j = h$$

ise

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq n} \max_{|\lambda| \leq r} \left|\varphi_j\left(x, \lambda\right) - \varphi\left(x, \lambda\right)\right| = 0$$

dır.

Lemma 2.4:

$$\rho_n = n + \frac{w}{n\pi} + \frac{k_n}{n}, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{k_{n_1}}{n}, \quad \{k_n\}, \{k_{n_1}\} \in l_2, \ \alpha_n \neq 0 \tag{2.2}$$

şeklindeki $\{\rho_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayıları verilsin. $(\rho_n = \lambda_n^2)$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos \rho_n x}{\alpha_n} - \frac{\cos nx}{\alpha_n^0} \right) \tag{2.3}$$

tanımlansın. Burada

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n > 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

dır. O halde $a(x) \in W_2^1(0, 2\pi)$ dir..

Lemma 2.5:

$$\rho_n = n + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{w_j^+}{n^j} + \frac{k_n}{n^{n+1}} \qquad , w_{2p} = 0 \quad , w_1 = \frac{w}{\pi}$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{w_j^+}{n^j} + \frac{k_n}{n^{n+1}} \quad , w_{2p} = 0 \quad , p \geq 0, \alpha_n \rangle 0$$

şeklindeki $\{\rho_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayıları verilsin. O halde $a(x) \in W_2^{N+1}(0, 2\pi)$ dir.

Lemma 2.6: (2.2) şeklindeki $\{\rho_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayıları verilsin. $c_0 > 0$ sabit olsun. Eğer $\{\widetilde{\rho}_n, \widetilde{\alpha}_n\}_{n\geq 0}$, $\widetilde{\alpha}_n \neq 0$ sayıları

$$\Omega := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)\, \xi_n \right)^2 \right)^{1/2} \leq c_0$$

$$\xi_n := |\widetilde{\rho}_n - \rho_n| + |\widetilde{\alpha}_n - \alpha_n|$$

koşullarını sağlarsa

$$\widehat{a}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos \widetilde{\rho}_n x}{\widetilde{\alpha}_n} - \frac{\cos \rho_n x}{\alpha_n} \right) \in W_2^1(0, 2\pi) \tag{2.4}$$

ve

$$\max_{0\leq x\leq 2\pi} |\widehat{a}(x)| \leq c \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n, \quad \|\widehat{a}(x)\|_{W_2^1} \leq c\Omega$$

dır. Burada c sabiti, $\{\rho_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ ve c_0 'a bağlıdır.

2.1 Spektral Karakteristiklerden Elde Edilen Diferansiyel Operatörler

$$L = L\left(q\left(x\right), h, H\right) := \begin{cases} l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = k^2, \quad 0 < x < \pi \\ U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemini düşünelim. $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ L nin spektral karakteristiği $\rho_n = \lambda_n^2$ olmak üzere

$$\rho_n = n + \frac{w}{n\pi} + \frac{k_n}{n} \quad , \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{k_{n_1}}{n}, \{k_n\}, \{k_{n1}\} \in \ell_2, \alpha_n > 0 \quad , \quad \lambda_n \neq \lambda_m$$

$(n \neq m)$ asimptotik davranışlarına sahiptir. Burada

$$k_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(t)\cos 2ntdt + O(\frac{1}{n}), \;\; k_{n1} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi (\pi - t)\, q(t)\sin 2ntdt + O(\frac{1}{n})$$

dir. Şimdi;

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\cos\rho_n x\cos\rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx\cos nt}{\alpha_n^0}\right] \tag{2.5}$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & n > 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

dır.Ayrıca $F(x,t) = \dfrac{a(x+t) - a(x-t)}{2}$, $F(x,t)$ sürekli ve $\dfrac{d}{dx}\, F(x,x) \in L_2(0,\pi)$ dir.

Teorem 2.1: Sabitlenmiş her $x \in (0,\pi]$ için

$$\varphi\left(x,\lambda\right) = \cos\rho x + \int_0^x G\left(x,t\right)\cos\rho t dt \tag{2.6}$$

çevirme operatörünün çekirdeği olan $G\left(x,t\right)$ fonksiyonu

$$G\left(x,t\right) + F\left(x,t\right) + \int_0^x G\left(x,s\right)F\left(s,t\right)ds = 0, \quad 0 < t < x \tag{2.7}$$

lineer integral denklemini sağlar.

Bu denkleme Gelfand-Levitan-Marchenko denklemi denir.

İspat : $\cos\rho x$ fonksiyonuna göre (2.6) Volterra tip integral denkleminin çözümü yazılırsa

$$\cos\rho x = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt \qquad (2.6')$$

elde edilir. Burada $H(x,t)$ sürekli bir fonksiyondur. (2.6) ve (2.6') kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\varphi(x,\lambda_n)\cos\rho_n t}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\cos\rho_n x \cos\rho_n t}{\alpha_n} + \frac{\cos\rho_n t}{\alpha_n}\int_0^x G(x,s)\cos\rho_n s ds\right)$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\varphi(x,\lambda_n)\cos\rho_n t}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\varphi(x,\lambda_n)\,\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n} + \frac{\varphi(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\int_0^x H(t,s)\,\varphi(s,\lambda)\,ds\right).$$

eşitlikleri yazılabilir.

$$\Phi_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\varphi(x,\lambda_n)\,\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0}\right)$$

$$\Phi_{N_1}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\cos\rho_n x \cos\rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0}\right)$$

$$\Phi_{N_2}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos nt}{\alpha_n^0} \int_0^x G(x,s)\cos ns ds$$

$$\Phi_{N_3}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \int_0^x G(x,s) \left(\frac{\cos\rho_n s \cos\rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos ns \cos nt}{\alpha_n^0}\right) ds$$

$$\Phi_{N_4}(x,t) = -\sum_{n=0}^{N} \frac{\varphi(x,\lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^t H(t,s)\,\varphi(s,\lambda_n)\,ds$$

olarak alınırsa

$$\Phi_N(x,t) = \Phi_{N_1}(x,t) + \Phi_{N_2}(x,t) + \Phi_{N_3}(x,t) + \Phi_{N_4}(x,t)$$

olur. $f \in AC[0,\pi]$ olsun. Teorem 1.14 den dolayı;

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\le x\le\pi} \int_0^\pi f(t)\Phi_N(x,t)dt = 0$$

dır. Ayrıca $x \in [0,\pi]$ ye göre düzgün yakınsaktır. Diğer taraftan

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi f(t)\Phi_{N_1}(x,t)dt = \int_0^\pi f(t)F(x,t)dt$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi f(t)\Phi_{N_2}(x,t)dt = \int_0^x f(t)G(x,t)dt$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi f(t)\Phi_{N_3}(x,t)dt = \int_0^\pi f(t)\left(\int_0^x G(x,s)F(s,t)ds\right)dt$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi f(t)\Phi_{N_4}(x,t)dt = -\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} \frac{\varphi(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\int_0^\pi \varphi(s,\lambda_n)\left(\int_s^\pi H(t,s)f(t)dt\right)ds$$

$$= -\int_x^\pi f(t)H(t,x)\,dt.$$

eşitliklerinden ve $x < t$ için $G(x,t) = H(x,t) = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa $f(x)$ in keyfi seçiminden

$$G(x,t) + F(x,t) + \int_0^x G(x,s)F(s,t)\,ds - H(t,x) = 0$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla $t < x$ için (2.7) eşitliği elde edilir.

Teorem 2.2: $q(x) \in L_2(0,\pi)$ olmak üzere $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\ge0}$ çiftinin verilen $L(q(x), h, H)$ probleminin özdeğer ve normalleştirici sayıları olması için gerek ve yeter koşul
$\rho_n = n + \dfrac{w}{n\pi} + \dfrac{K_n}{n}$, $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k_{n_1}}{n}$, $\{k_n\},\{k_{n_1}\} \in l_2$, $\alpha_n > 0$, $\lambda_n \ne \lambda_m$ $(n \ne m)$ asimptotik davranışlarının mevcut olmasıdır. Ayrıca,

$$q(x) \in W_2^N(0,\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_n = n + \sum\limits_{n=1}^{N+1} \dfrac{w_j^+}{n^j} + \dfrac{k_n}{n^{n+1}} & , w_{2p} = 0 \quad , w_1 = \dfrac{w}{\pi} \\ \alpha_n = \dfrac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N+1} \dfrac{w_j^+}{n^j} + \dfrac{k_n}{n^{n+1}} & , w_{2p} = 0 \quad , p \geq 0, \alpha_n \rangle 0 \end{cases}$$

dır.

Algoritma 2.1:

i) $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayıları yardımıyla

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\cos \rho_n x \cos \rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0} \right]$$

fonksiyonu oluşturuluyor.

ii)

$$G(x,t) + F(x,t) + \int_0^x G(x,s)\, F(s,t)\, ds = 0, \quad 0 < t < x$$

integral denkleminin çözülmesiyle $G(x,t)$ fonksiyonu bulunur.

iii)

$$q(x) = 2\frac{d}{dx} G(x,x), \quad h = G(0,0), \tag{2.8}$$

$$H = w - h - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(t) dt \tag{2.9}$$

formülleri ile $q(x), h, H$ hesaplanır.

Lemma 2.7: Her sabit $x \in (0,\pi]$ için

$$G(x,t) + F(x,t) + \int_0^x G(x,s)\, F(s,t)\, ds = 0, \quad 0 < t < x$$

denklemi $L_2(0,x)$ de bir tek $G(x,t)$ çözümüne sahiptir.

Lemma 2.8: Aşağıdaki bağıntılar sağlanmaktadır:

$$-\varphi''(x,\lambda) + q(x)\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda) \tag{2.10}$$

$$\varphi(0,\lambda)=1, \quad \varphi'(0,\lambda)=0 \tag{2.11}$$

İspat:

1) İlk önce kabul edelim ki $a(x)\in W_2^2(0,2\pi)$ olsun. Burada $a(x)$ (2.3) ile tanımlanan fonksiyondur.

$$J(x.t):=F(x.t)+G(x.t)+\int_0^x G(x,s)\,F(s,t)\,ds=0 \tag{2.12}$$

ifadesinin diferansiyelleyerek;

$$J_t(x.t)=F_t(x.t)+G_t(x.t)+\int_0^x G(x,s)\,F_t(s,t)\,ds=0 \tag{2.13}$$

$$J_{tt}(x.t)=F_{tt}(x.t)+G_{tt}(x.t)+\int_0^x G(x,s)\,F_{tt}(s,t)\,ds=0 \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}J_{xx}(x.t)=F_{xx}(x.t)+G_{xx}(x.t)+\frac{d}{dx}G(x,x)\,F(x.t)+G(x,x)\,F_x(x.t)\\+\frac{d}{dx}G(x.t)\mid_{t=x}F(x.t)+\int_0^x G_{xx}(x,s)\,F(s,t)\,ds=0\end{aligned} \tag{2.15}$$

olarak hesaplanır. (2.5) e göre

$$F_{tt}(s,t)=F_{ss}(s.t)\;\; ve\;\; F_t(x,t)\mid_{t=0}=0$$

dır. O halde $t=0$ için (2.13) den

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)\mid_{t=0}=0 \tag{2.16}$$

elde edilir. Ayrıca (2.14) de kısmi integrasyonla

$$\begin{aligned}J_{tt}(x,t)=F_{tt}(x,t)+G_{tt}(x,t)+G_{xx}\frac{\partial F(s,t)}{\partial s}\mid_{s=x}-\frac{\partial G(x,s)}{\partial s}\mid_{s=x}F(x,t)\\+\int_0^x G_{ss}(x,s)\,F(s,t)\,ds=0\end{aligned} \tag{2..17}$$

olduğunu alırız. (2.12), (2.15) ve (2.17) ve

$$J_{xx}(x,t)-J_{tt}(x,t)-q(x)\,J(x,t)\equiv 0$$

eşitliklerinden

$$\begin{gathered}\left[G_{xx}(x,t)-G_{tt}(x,t)-q(x)G(x,t)\right]\\ +\int\limits_0^x\left(G_{xx}(x,s)-G_{ss}(x,s)-q(x)G(x,s)\right)F(s,t)\,ds=0\end{gathered}$$

elde edilir. Lemma 2.7 ye göre bu homojen denklem sadece trivial çözüme sahiptir. Yani

$$G_{xx}(x,t)-G_{tt}(x,t)-q(x)G(x,t)=0,\ \ 0<t<x \tag{2.18}$$

dir.

(2.6) ifadesinin iki kez diferansiyellenmesiyle

$$\varphi'(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+G(x,x)\cos\rho x+\int\limits_0^x G_x(x,t)\cos\rho t dt \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x,\lambda)&=-\rho^2\cos\rho x-G(x,x)\rho\sin\rho x\\ &+\left(\frac{dG(x,x)}{dx}+\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\right)|_{t=x}\cos\rho x+\int\limits_0^x G_{xx}(x,t)\cos\rho t dt\end{aligned} \tag{2.20}$$

elde ederiz. Diğer taraftan iki kez kısmi integrasyonla

$$\lambda\varphi(x,\lambda)=\rho^2\cos\rho x+\rho^2\int\limits_0^x G(x,t)\cos\rho t dt=\rho^2\cos\rho x+G(x,x)\rho\sin\rho x$$

$$+\left.\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\right|_{t=x}\cos\rho x-\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\,|_{t=0}-\int\limits_0^x G_{tt}(x,t)\cos\rho t dt$$

elde ederiz. (2.6) ve (2.20) ile birlikte

$$\begin{aligned}&\varphi''(x,\lambda)+\lambda\varphi(x,\lambda)-q(x)\varphi(x,\lambda)=\\ &\quad=\left.\left(\left(\frac{2dG(x,x)}{dx}-q(x)\right)\cos\rho x-\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\right)\right|_{t=0}\end{aligned}$$

$$+\int\limits_0^x \left(G_{xx}(x,t) - G_{tt}(x,t) - q(x)\,G(x,t)\right)\cos\rho t dt$$

olduğunu alırız.

(2.8) , (2.16) ve (2.18) den

$$-\varphi''(x,\lambda) + q(x)\,\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)$$

eşitliğine ulaşırız. $x=0$ için (2.6) ve (2.19) dan

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = 0$$

elde ederiz.

(2) Şimdi $\rho_n = n + \dfrac{w}{n\pi} + \dfrac{k_n}{n}$, $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k_{n_1}}{n}$, $\alpha_n > 0$, $\lambda_n \neq \lambda_m \quad (n \neq m)$ nin sağladığı genel durumu düşünelim. Lemma 2.4 e göre $a(x) \in W_2^1(0,2\pi)$ dir. $\widetilde{\varphi}(0,\lambda) = 1$, $\widetilde{\varphi}'(o,\lambda) = h$ koşullarını sağlayan

$$l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = k^2, \quad 0 < x < \pi$$

denkleminin çözümünü $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ ile tanımlayalım. Amacımız

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda) \equiv \varphi(x,\lambda)$$

olduğu ispatlamaktır.

$$\begin{aligned} \rho_{n_1}(j) &= n + \frac{w}{n\pi} + \frac{k_{n_1}(j)}{n^2} \\ \alpha_{n_1}(j) &= \frac{\pi}{2} + \frac{w_{n_1}(j)}{n^2} + \frac{k_{n1,}\{j\}}{n^2}, \quad \{k_{n_1}(j)\}, \quad \{k_{n1,}\{j\}\} \in \ell_2 \end{aligned}$$

şeklindeki $\left\{\rho_{n_1}(j),\ \alpha_{n_1}(j)\right\}_{n\geq 0}$, $j \geq 1$ sayılarını seçelim. $j \to \infty$ için

$$\begin{aligned} \Omega_j &:= \left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|(n+1)\,\xi_{n_1}(j)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \\ \xi_{n_1}(j) &:= |P_{n_1}(j) - P_n| + |\alpha_{n_1}(j) - \alpha_n| \end{aligned}$$

dır.

$$a_j(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos\rho_{n1}(j)\,x}{\alpha_{n_1}(j)} - \frac{\cos nx}{\alpha_n^0}\right), \quad j \geq 1$$

tanımlayalım. Lemma 2.5 den $a_j(x) \in W_2^2(0,2\pi)$ dir. $G_j(x,t)$ $(j \in \mathbb{N})$ fonksiyonları

$$G_j(x,t) + F_j(x,t) + \int_0^x G_j(x,s) F_j(s,t)\, ds = 0, 0 < t < x$$

olsun. Yani

$$F_j(x,t) = \frac{a_j(x+t) + a_j(x-t)}{2}$$

dir.

$$q_j(x) := 2\frac{d}{dx} G_j(x,x), \quad h_j := G_j(0,0)$$

$$\varphi_j(x,\lambda) := \cos\rho x + \int_0^x G_j(x,t) \cos\rho t dt \tag{2.21}$$

alalım. $a_j(x) \in W_2^2(0,2\pi)$ olduğundan Lemma 2.8 den

$$-\varphi_j''(x,\lambda) + q_j(x)\varphi_j(x,\lambda) = \lambda\varphi_j(x,\lambda)$$

$$\varphi_j(0,\lambda) = 1, \ \varphi_j'(0,\lambda) = h_j$$

olur. Ayrıca Lemma 2.6 dan

$$\lim_{j\to\infty} \|a_j(x) - a(x)\|_{W_2^1} = 0$$

olduğundan lemma 2.1 den yaralanırsak

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\le t\le x\le\pi} |G_j(x,t) - G(x,t)| = 0 \tag{2.22}$$

$$\lim_{j\to\infty} \|q_j - q\|_{L_2} = 0, \ \lim_{j\to\infty} h_j = h \tag{2.23}$$

elde edilir. (2.6) , (2.21) ve (2.22) den

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\le x\le n} \max_{|\lambda|\le r} \left|\varphi_j(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\right| = 0$$

dır. Diğer taraftan Lemma (2.3) ve (2.23) e göre

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\le x\le\pi} \max_{|\lambda|\le r} \left|\varphi_j(x,\lambda) - \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\right| = 0$$

dır. Sonuç olarak

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda) \equiv \varphi(x,\lambda)$$

elde edilir.

Lemma 2.9: $H(x,t)$,

$$\cos\rho x = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt \tag{2.24}$$

ile tanımlanan sürekli fonksiyon olmak üzere

$$H(x,t) = F(x,t) + \int_0^t G(t,u)\,F(x,u)\,du, \qquad 0 \le t \le x \tag{2.25}$$

bağıntısı sağlanır.

İspat:

1) İlk önce kabul edelimki $a(x) \in W_2^2(0,2\pi)$ olsun. (2.24) yi iki kez diferansiyellersek

$$-\rho\sin\rho x = \varphi'(x,\lambda) + H(x,x)\,\varphi(x,\lambda) + \int_0^x H_t(x,t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} -\rho^2\cos\rho x = {} & \varphi''(x,\lambda) + H(x,x)\,\varphi'(x,\lambda) \\ & + \left(\frac{dH(x,x)}{dx} + \left.\frac{\partial H(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x} \right) \varphi(x,\lambda) \\ & + \int_0^x H_{xx}(x,t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt \end{aligned} \tag{2.27}$$

olur. Diğer taraftan (2.24) ve (2.10) dan

$$-\rho^2\cos\rho x = \varphi''(x,\lambda) - q(x)\,\varphi(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\,\varphi''(x,t) - q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt$$

iki kez kısmi integrasyon ve (2.11) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
-\rho^2 \cos \rho x = {} & \varphi''(x,\lambda) + H(x,x)\,\varphi'(x,\lambda) \\
& - \left(\left.\frac{\partial H(x,t)}{\partial t}\right|_{t=x} + q(x) \right) \varphi(x,\lambda) + \left(\left.\frac{\partial H(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} - hH(x,0) \right) \\
& + \int_0^x (H_{tt}(x,t) - q(t)\,H(x,t))\varphi(t,\lambda)\,dt
\end{aligned}
$$

olduğunu çıkarırız. (2.27) ve

$$
\frac{dH(x,x)}{dx} = \left.\left(\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} \right)\right|_{t=x}
$$

ile birlikte

$$
b_0(x) + b_1(x)\,\varphi(x,\lambda) + \int_0^x b(x,t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt = 0 \tag{2.28}
$$

elde ederiz. Burada

$$
\begin{cases}
b_0(x) & := -\left(\left.\dfrac{\partial H(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} - hH(x,0) \right) \\
b_1(x) & := 2\dfrac{dH(x,x)}{dx} + q(x) \\
b(x,t) & := H_{xx}(x,t) - H_{tt}(x,t) + q(t)\,H(x,t)
\end{cases} \tag{2.29}
$$

dır.

(2.28) de (2.6) yı yerine yazarsak

$$
b_0(x) + b_1(x)\cos \rho x + \int_0^x B(x,t)\cos \rho t dt = 0 \tag{2.30}
$$

buluruz. Burada

$$
B(x,t) = b(x,t) + b_1(x)\,G(x,t) + \int_t^x b(x,s)\,G(s,t)\,ds \tag{2.31}
$$

dir.

$B(x,t)$ Riemann anlamında integrallenebilirse $\rho = \left(n+\frac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{x}$ $(x>0)$ için (2.30) dan

$$
b_0(x) + \int_0^x B(x,t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{x}dt = 0
$$

dır. Riemann-Lebesque lemmasından $n \to \infty$ iken integral 0 dır. Sonuç olarak $b_0(x) = 0$ dır. Ayrıca (2.30) da $\rho = \dfrac{2n\pi}{x}$ $(x > 0)$ olarak alırsak

$$b_1(x) + \int_0^x B(x,t) \cos \frac{2n\pi t}{x} dt = 0$$

elde ederiz. Benzer şekilde $b_1(x) = 0$ dır. Dolayısıyla (2.30) dan

$$\int_0^x B(x,t) \cos \rho t dt = 0, \;\; \rho \in \mathbb{C}$$

alırız ve sonuç olarak $B(x,t) = 0$ dır. Bu yüzden (2.31)

$$b(x,t) + \int_t^x b(x,s) G(s,t) \, ds = 0$$

sağlar. Buradan $b(x,t) = 0$ dır. (2.26) da $x = 0$ yazarsak

$$H(0,0) = -h \tag{2.32}$$

den $H(x,t)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} H_{xx}(x,t) - H_{tt}(x,t) + q(t) H(x,t) = 0, \;\; 0 \le t \le x \\ H(x,x) = -h - \frac{1}{2} \displaystyle\int_0^x q(t) \, dt, \quad \left. \dfrac{\partial H(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} - hH(x.0) = 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

sınır-değer probleminin çözümüdür.

Tersini kabul edersek de geçerlidir. Yani $H(x,t)$ fonksiyonu (2.33) ü sağlarsa o halde (2.24) sağlanır.

$$\gamma(x,\lambda) := \varphi(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t) \varphi(t,\lambda) \, dt$$

tanımlayalım. Benzer düşünceyle,

$$\begin{aligned} \gamma"(x,\lambda) + \lambda\gamma(x,\lambda) &= \left(2\frac{dH(x,x)}{dx} + q(x) \right) \varphi(x,\lambda) \\ &\quad - \left(\left. \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} - hH(x,0) \right) \\ &\quad + \int_0^x \left(H_{xx}(x,t) - H_{tt}(x,t) + q(t) H(x,t) \right) \varphi(t,\lambda) \, dt \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. (2.33) e göre

$$\gamma^{"}(x,\lambda)+\lambda\gamma(x,\lambda)=0$$

elde ederiz. Açıktırki $\gamma(0,\lambda)=1, \gamma^{'}(0,\lambda)=0$ dır. Dolayısıyla $\gamma(x,\lambda)=\cos\rho x$ yani (2.24) sağlanır.

$$\widetilde{H}(x,t):=F(x,t)+\int_0^t G(t,u)F(x,u)\,du \tag{2.34}$$

tanımlayalım. Gösterelimki $\widetilde{H}(x,t)$ fonksiyonu (2.33) ü sağlar.

(i) t ye göre (2.34) ı diferansiyellersek ve $t=0$ alırsak

$$\left.\frac{\partial\widetilde{H}(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=G(0,0)F(x,0)=hF(x,0)$$

elde ederiz. $\widetilde{H}(x,0)=F(x,0)$ olduğu için

$$\left.\frac{\partial\widetilde{H}(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}-h\widetilde{H}(x,0)=0$$

dır.

(ii) (2.6) ve (2.34) dan

$$\widetilde{H}(x,x)=F(x,x)+\int_0^x G(x,u)F(x,u)\,du=-G(x,x)$$

yani (2.8) e göre

$$\widetilde{H}(x,x)=-h-\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt$$

dır.

(iii) (2.34) tekrar kullanılarak

$$\begin{aligned}\widetilde{H_{tt}}(x,t)&=F_{tt}(x,t)+\frac{dG(t,t)}{dt}F(x,t)\\&+G(t,t)F_t(x,t)+\left.\frac{dG(t,u)}{dt}\right|_{u=t}F(x,t)\\&+\int_0^t G_{tt}(t,u)F(x,u)\,du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{H_{xx}}(x,t) &= F_{xx}(x,t)+\int_0^t G(t,u)\,F_{xx}(x,u)\,du \\ &= F_{xx}(x,t)+\int_0^t G(t,u)\,F_{\mathrm{uu}}(x,u)\,du \\ &= F_{xx}(x,t)+G(t,t)\,F_t(x,t)-\left.\frac{\partial G(t,u)}{\partial u}\right|_{u=t}F(x,t) \\ &+\int_0^t G_{\mathrm{uu}}(t,u)\,F(x,u)\,du\end{aligned}$$

olarak hesaplarız. Sonuç olarak

$$\widetilde{H_{xx}}(x,t)-\widetilde{H_{tt}}(x,t)+q(t)\,\widetilde{H}(x,t)=\left[q(t)-2\frac{dG(t,t)}{dt}\right]F(x,t)-\int_0^t G_{tt}(t,u)$$

$$-G_{uu}(t,u)-q(t)\,G(t,u)\,dt$$

dir. (2.8) ve (2.18) e göre

$$\widetilde{H_{xx}}(x,t)-\widetilde{H_{tt}}(x,t)+q(t)\,\widetilde{H}(x,t)=0$$

elde ederiz. $\widetilde{H}(x,t)$ (2.33) u sağladığından yukarıda gösterildiği gibi

$$\cos\rho x=\varphi(x,\lambda)+\int_0^x \widetilde{H}(x,t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt$$

dir. (2.24) ile bu bağıntıyı karşılaştırırsak $\forall\lambda$ için

$$\int_0^x\left(\widetilde{H}(x,t)-H(x,t)\right)\varphi(t,\lambda)\,dt=0$$

yani

$$\widetilde{H}(x,t)=H(x,t)$$

dir.

(2) Şimdi $\rho_n=n+\dfrac{w}{n\pi}+\dfrac{k_n}{n}$, $\alpha_n=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k_{n_1}}{n}$, $\alpha_n>0$, $\lambda_n\neq\lambda_m$ $(n\neq m)$ nin sağladığı genel durumu düşünelim. $a(x)\in W_2^1(0,2\pi)$ dir. Lemma2.8

in ispatındaki düşünceden yararlanırsak $\left\{\rho_{n(j)}, \alpha_{n(j)}\right\}_{n\geq 0}$, $j \geq 1$ sayılarını ve $a_j(x) \in W_2^2(0, 2\pi)$, $j \geq 1$ fonksiyonlarını kurarız öyle ki

$$\lim_{j\to\infty} \|a_j(x) - a(x)\|_{W_2^1} = 0$$

dir. O halde

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\leq t\leq x\leq \pi} |F_j(x,t) - F(x,t)| = 0$$

ve (2.22) geçerlidir. Yukarıda ispatlandı ki

$$H_j(x,t) = F_j(x,t) + \int_0^t G_j(t,u) F_j(x,u)\, du$$

dur. $j \to \infty$ iken (2.25) e ulaşırız.

Lemma 2.10: Herbir $g(x) \in L_2(0,\pi)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\pi g^2(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^\pi g(t) \varphi(t,\lambda)\, dt \right)^2 \tag{2.35}$$

eşitliği sağlanmaktadır.

İspat:

$$Q(t) := \int_0^\pi g(t) \varphi(t,\lambda)\, dt$$

tanımlayalım. (2.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \int_0^\pi g(t) \cos \rho t dt + \int_0^\pi \int_0^t g(t) G(t,s) \cos \rho s ds dt \\ &= \int_0^\pi g(t) \cos \rho t dt + \int_0^\pi \int_s^\pi g(t) G(t,s) \cos \rho s dt ds \\ &= \int_0^\pi g(t) \cos \rho t dt + \int_0^\pi \int_t^\pi g(s) G(s,t) \cos \rho t ds dt \\ &= \int_0^\pi \left[g(t) + \int_t^\pi g(s) G(s,t)\, ds \right] \cos \rho t dt \\ &= \int_0^\pi h(t) \cos \rho t dt \end{aligned}$$

dir. Burada

$$h(t) = g(t) + \int_t^\pi g(s) G(s,t)\, ds \tag{2.36}$$

olarak yazılır. Benzer şekilde

$$\cos \rho x = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda)\, dt$$

ifadesinden

$$g(t) = h(t) + \int_t^\pi H(s,t) h(s)\, ds \tag{2.37}$$

yi buluruz. Şimdi

$$h(t) = g(t) + \int_t^\pi g(s) G(s,t)\, ds$$

ifadesini $F(x,t)$ ile çarpıp $(0,\pi)$ de integre edelim

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi h(t) F(x,t)\, dt &= \int_0^\pi g(t) F(x,t)\, dt + \int_0^\pi \int_t^\pi G(u,t) g(u) F(x,t)\, du dt \\
&= \int_0^\pi g(t) F(x,t)\, dt + \int_0^\pi \int_0^u G(u,t) g(u) F(x,t)\, dt du \\
&= \int_0^\pi g(t) F(x,t)\, dt + \int_0^\pi \int_0^u G(u,t) g(u) F(x,t)\, dt du \\
&= \int_0^\pi g(t) \left[F(x,t) + \int_0^t G(t,u) F(x,u)\, du \right] dt \\
&= \int_0^x g(t) \left[F(x,t) + \int_0^t G(t,u) F(x,u)\, du \right] dt \\
&+ \int_x^\pi g(t) \left[F(x,t) + \int_0^t G(t,u) F(x,u)\, du \right] dt
\end{aligned}$$

dir.

$$H(x,t) = F(x,t) + \int_0^t G(t,u) F(x,u)\, du, 0 \le t \le x$$

$$G(x,t) + F(x,t) + \int_0^x G(x,s) F(s,t)\, ds = 0, 0 < t < x$$

eşitliklerini $g(t)$ ile çarpıldığında

$$g(t)\,H(x,t)=g(t)\,F(x,t)+g(t)\int_0^t G(t,u)\,F(x,u)\,du$$

$$g(t)\,G(x,t)+g(t)\,F(x,t)+g(t)\int_0^x G(x,s)\,F(s,t)\,ds=0$$

olur. Birinci eşitliği $(0,x)$ aralığında, ikinci eşitliği (x,π) aralığında integre edersek,

$$\int_0^x g(t)\,H(x,t)\,dt=\int_0^x g(t)\left[F(x,t)+\int_0^t G(t,u)\,F(x,u)\,du\right]dt$$

$$-\int_x^\pi g(t)\,G(x,t)=\int_x^\pi g(t)\left[F(x,t)+\int_0^t G(t,u)\,F(x,u)\,du\right]dt$$

elde edilir. (2.25) ve (2.7) de yerine yazılırsa

$$\int_0^\pi h(t)\,F(x,t)\,dt=\int_0^x g(t)\,H(x,t)\,dt-\int_x^\pi g(t)\,G(t,x)\,dt \qquad (2.38)$$

dir.

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos\rho_n x-\cos\rho_n t}{\alpha_n}-\frac{\cos nx-\cos nt}{\alpha_n^0}\right)$$

ifadesi ve Parseval eşitliğinden

$$\int_0^\pi h^2(t)\,dt+\int_0^\pi\int_0^\pi h(x)\,h(t)\,F(x,t)\,dxdt$$

$$=\int_0^\pi h^2(t)\,dt+\int_0^\pi\int_0^\pi h(x)\,h(t)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos\rho_n x-\cos\rho_n t}{\alpha_n}-\frac{\cos nx-\cos nt}{\alpha_n^0}\right)\right]dxdt$$

$$=\int_0^\pi h^2(t)\,dt+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^\pi h(t)\cos\rho_n t dt\right)^2-\frac{1}{\alpha_{n^0}}\left(\int_0^\pi h(t)\cos nt dt\right)^2\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^2(n^2)}{\alpha_{n^0}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n}-\frac{Q^2(n^2)}{\alpha_{n^0}}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n}$$

olur. (2.38) i kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n} = \int_0^{\pi} h^2(t)\,dt + \int_0^{\pi} h(x)\left(\int_0^{x} g(t)\,H(x,t)\,dt\right)dx$$
$$-\int_0^{\pi} h(x)\left(\int_x^{\pi} g(t)\,G(t,x)\,dt\right)dx$$
$$= \int_0^{\pi} h^2(t)\,dt + \int_0^{\pi} g(t)\left(\int_t^{\pi} h(x)\,H(x,t)\,dx\right)dt$$
$$-\int_0^{\pi} h(x)\left(\int_x^{\pi} g(t)\,G(t,x)\,dt\right)dx$$

bulunur.

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t) + \int_t^{\pi} g(s)\,G(s,t)\,ds \\ g(t) &= h(t) + \int_t^{\pi} H(s,t)\,h(s)\,ds \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n} = \int_0^{\pi} h^2(t)\,dt + \int_0^{\pi} g(t)\,(g(t)-h(t))\,dt$$
$$-\int_0^{\pi} h(x)\,(h(x)-g(x))\,dx$$
$$= \int_0^{\pi} h^2(t)\,dt + \int_0^{\pi} g^2(t)\,dt - \int_0^{\pi} g(t)\,h(t)\,dt$$
$$-\int_0^{\pi} h^2(x)\,dx + \int_0^{\pi} h(x)\,g(x)\,dx$$
$$= \int_0^{\pi} g^2(t)\,dt$$

olur. Bu durumda

$$\int_0^{\pi} g^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^{\pi} g(t)\,\varphi(t,\lambda_n)\,dt\right)^2$$

eşitliği geçerlidir.

Sonuç 2.1: $f(x),\ g(x) \in L_2(0,\pi)$ keyfi fonksiyonları için

$$\int_0^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\pi} f(t)\, \varphi(t,\lambda_n)\, dt \int_0^{\pi} g(t)\, \varphi(t,\lambda_n)\, dt \qquad (2.39)$$

dir.

Lemma 2.11: Aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\int_0^{\pi} \varphi(t,\lambda_k)\, \varphi(t,\lambda_n)\, dt = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \alpha_n, & n = k \end{cases} \qquad (2.40)$$

İspat: 1) $f(x) \in W_2^2[0,\pi]$ olsun.

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(x,\lambda_n) \qquad (2.41)$$

serisini düşünelim. Burada

$$c_n := \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} f(x)\, \varphi(x,\lambda_n)\, dx \qquad (2.42)$$

dir. Lemma 2.8 ve kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\alpha_n \lambda_n} \int_0^{\pi} f(x) \left(-\varphi''(x,\lambda_n) + q(x)\, \varphi(x,\lambda_n)\right) dx \\ &= \frac{1}{\alpha_n \lambda_n} (hf(0) - f'(0) + \varphi(\pi,\lambda_n)\, f'(\pi) - \varphi'(\pi,\lambda_n)) f(\pi) \\ &\quad + \int_0^{\pi} \varphi(x,\lambda_n) \left(-f''(x) + q(x)\, f(x)\right) dx \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$$\rho_n = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{k n}{n}, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{k n_1}{n}, \quad \{k_n\}, \{k_{n_1}\} \in l_2$$

ve

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+q_1(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}+\frac{1}{2p}\int_0^x q(t)\sin\rho(x-2t)\,dt+o\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^2}\right)$$

$$\varphi^{'}(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+q_1(x)\cos\rho x+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\cos\rho(x-2t)\,dt+o\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^2}\right)$$

asimptotik formüllerinden $n\to\infty$ için

$$c_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad \varphi(x,\lambda_n)=O(1),\quad x\in[0,\pi]$$

dir. Dolayısıyla

$$f^*(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi(x,\lambda_n)$$

serisi $[0,\pi]$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Sonuç 2.1 ve c_n nin tanımından

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_0^\pi g(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt\\ &= \int_0^\pi g(t)\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi(t,\lambda_n)\,dt\\ &= \int_0^\pi g(t)f^*(t)\,dt\end{aligned}$$

olarak bulunur. $g(x)$ keyfi olduğundan $f^*(x)=f(x)$ tir. Yani

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi(x,\lambda_n)$$

dır.

2) $k\geq 0$ sabit ve $f(x)=\varphi(x,\lambda_k)$ alalım. O halde

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{2.43}$$

ifadesinden

$$\varphi(x,\lambda_k)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n_k}\varphi(x,\lambda_n)\quad c_{n_k}=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi\varphi(x,\lambda_k)\varphi(t,\lambda_n)\,dx$$

olur. Ayrıca bu sistem $\{\cos \rho_n x\}_{n\geq 0}$ $L_2(0,\pi)$ de tamdır. Sonuç olarak (2.6) ya göre $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ sistemi de $L_2(0,\pi)$ de tamdır. Böylece

$$c_{n_k} = \delta_{n_k} \quad (\delta_{n_k} \text{ Kronecker deltadır})$$

olur. Dolayısıyla

$$\int_0^\pi \varphi(t,\lambda_k)\varphi(t,\lambda_n)\,dt = \begin{cases} 0 & n\neq k \\ \alpha_n & n=k \end{cases}$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 2.12: $\forall n,m\geq 0$ için

$$\frac{\varphi'(\pi,\lambda_n)}{\varphi(\pi,\lambda_n)} = \frac{\varphi'(\pi,\lambda_m)}{\varphi(\pi,\lambda_m)} \tag{2.44}$$

dır.

İspat:

$\dfrac{d}{dx} < \varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu) > dx = (\lambda-\mu)\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)$ den;

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\,dx = \varphi(x,\lambda_n)\varphi'(x,\lambda_m) - \varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\,|_0^\pi$$

$\displaystyle\int_0^\pi \varphi(t,\lambda_k)\varphi(t,\lambda_n)\,dt = \begin{cases} 0 & n\neq k \\ \alpha_n & n=k \end{cases}$ olduğundan

$$\varphi(x,\lambda_n)\varphi'(x,\lambda_m) - \varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m) = 0 \tag{2.45}$$

dır. Açıktırki $\forall n \geq 0$ için $\varphi(x,\lambda_n) \neq 0$ dır. Aslında eğer belli bir m için $\varphi(\pi,\lambda_m) = 0$ olduğunu kabul edersek bu durumda $\varphi'(x,\lambda_m) \neq 0$ ve (2.45) e göre $\forall n$ için $\varphi(\pi,\lambda_n) = (-1)^n + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ olduğundan imkansızdır. Yani $\varphi(\pi,\lambda_m) \neq 0$ olmalıdır.

$\forall n \geq 0$ için $\varphi(\pi,\lambda_n) \neq 0$ olduğundan

$$\frac{\varphi'(\pi,\lambda_n)}{\varphi(\pi,\lambda_n)} = \frac{\varphi'(\pi,\lambda_m)}{\varphi(\pi,\lambda_m)}$$

dır.

$$\widetilde{H} = -\frac{\varphi'(\pi, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)}$$

tanımlayalım. Not edelim ki n den bağımsız olan $\widetilde{H}$ ile (2.44) elde edilir. Böylece

$$\varphi'(\pi, \lambda_n) + \widetilde{H}\varphi(\pi, \lambda_n) = 0, \qquad n \geq 0$$

dır. Lemma 2.8 ve

$$\int_0^\pi \varphi(t, \lambda_k)\varphi(t, \lambda_n)\,dt = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \alpha_n, & n = k \end{cases}$$

ile birlikte $L\left(q(x), h, \widetilde{H}\right)$ sınır değer problemi için $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral karakteristiklerini verir. Açıktır ki

$$H = w - h - \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt \qquad (2.46)$$

olmak üzere $H = \widetilde{H}$ dır. Böylece Teorem 2.2 ispatlandı.

Örnek 2.1: $\lambda_n = n^2$ $(n \geq 0)$, $\alpha_n = \frac{\pi}{2}$ $(n \geq 1)$ ve $\alpha_0 > 0$ keyfi pozitif bir sayı olsun.

$a := \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi}$ tanımlayalım. Algoritma 2.1 i kullanarak $F(x,t)$, $G(x,t)$, h, H ve $q(x)$ i bulalım:

1)

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\cos\rho_n x\cos\rho_n t}{\lambda_n} - \frac{\cos nx\cos nt}{\lambda_n^0}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\cos nx\cos nt}{\lambda_n} - \frac{\cos nx\cos nt}{\lambda_n^0}\right] \\ &= \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0^0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0^0}\right)\cos nx\cos nt \\ &= \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi} = a \end{aligned}$$

$\Rightarrow F(x,t) = a$

2) $G(x,t)+F(x,t)+\int\limits_0^x G(x,s)\,F(s,t)\,ds=0, \quad 0<t<x$ denkleminde bulduğumuz ifadeler yerine yazılırsa;

$G(x,t)+a+a\int\limits_0^x G(x,s)\,ds=0 \; G_x\in L_2(0,\pi)$

$G(x,t)=-a-a\int\limits_0^x G(x,s)\,ds$

olur. Ardışık yaklaşım yönteminden

$$G(x,t)=-\frac{a}{1+ax}$$

elde edilir.

3)

$$q(x)=2\frac{d}{dx}G(x,x), \qquad h=G(0,0), \qquad H=w-h-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt$$

eşitliklerinden

$$q(x)=2\frac{d}{dx}G(x,x)=2\frac{d}{dx}\left(-\frac{a}{1+ax}\right)=-2a\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+ax}\right)$$

$$q(x)=\frac{2a^2}{(1+ax)^2}$$

bulunur.

$$h=G(0,0)=-\frac{a}{1+a.0}=-a$$

ve

$$\begin{aligned} H &= w-h-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt \\ &= a-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \frac{2a^2}{(1+ax)^2}dx \\ &= a+\left.\frac{a}{1+ax}\right|_0^\pi \\ &= a+\frac{a}{1+ax}-a=\frac{a}{1+a\pi} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.3: $q(x) \in L_2(0,\pi)$ olmak üzere $\{\mu_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ reel sayıları

$$L_1(q(x), h) := \begin{cases} l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = k^2, \quad 0 < x < \pi \\ U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin spektral karakteristikleri olması için gerek ve yeter koşul $\mu_n \neq \mu_m \ (n \neq m)$, $\alpha_{n_1} > 0$ olmak üzere

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{w_1}{\pi n} + \frac{k_n}{n}, \quad \{k_n\} \in l_2 \tag{2.47}$$

$$\alpha_{n_1} = \frac{\pi}{2} + \frac{k_{n_1}}{n}, \quad \{k_{n_1}\} \in l_2 \tag{2.48}$$

sağlanmasıdır.

2.2 İki Spektruma Göre Diferansiyel Operatörlerin Belirlenmesi

$\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ sırasıyla

$$L\left(q\left(x\right),h,H\right):=\begin{cases} l(y):=-y^{''}+q(x)y=\lambda y, \quad \lambda=k^2, \quad 0<x<\pi \\ U(y):=y^{'}(0)-hy(0)=0, \quad V(y):=y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \end{cases}$$

ve

$$L_1\left(q\left(x\right),h\right):=\begin{cases} l(y):=-y^{''}+q(x)y=\lambda y, \quad \lambda=k^2, \quad 0<x<\pi \\ U(y):=y^{'}(0)-hy(0)=0, \quad V(y):=y(\pi)=0 \end{cases}$$

operatörlerinin özdeğerleri olsun. O halde

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n}=n+\frac{w}{n\pi}+\frac{k_n}{n} \quad \{k_n\}\in l_2 \tag{2.49}$$

$$\sqrt{\mu_n} = n+\frac{1}{2}+\frac{w_1}{n\pi}+\frac{k_n}{n} \quad \{k_n\}\in l_2 \tag{2.50}$$

sağlanır ve $\Delta\left(\lambda\right), d\left(\lambda\right)$ karakteristik fonksiyonları için sırasıyla

$$\Delta\left(\lambda\right) = \pi\left(\lambda_0-\lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{n^2} \tag{2.51}$$

$$d\left(\lambda\right) = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n-\lambda}{(n+\frac{1}{2})^2} \tag{2.52}$$

gösterimleri geçerli olur.

Teorem 2.4: $q\left(x\right)\in L_2\left(0,\pi\right)$ olmak üzere$\{\lambda_n,\mu_n\}_{n\geq 0}$ reel sayılarının L ve L_1 sınır değer problemlerinin spektral karakteristikleri olması için gerek ve yeter koşul (2.49), (2.50) ve

$$\lambda_n<\mu_n<\lambda_{n+1}, \qquad n\geq 0 \tag{2.53}$$

sağlanmasıdır.

$q\left(x\right)$ fonksiyonu, h ve H sayıları aşağıdaki algoritma ile yapılandırılabilir:

i) Verilen $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ sayılarından

$$\alpha_n = -\acute{\Delta}(\lambda)\, d(\lambda_n) \tag{2.54}$$

formülünden α_n hesaplanır. Burada $\Delta(\lambda)$ ve $d(\lambda)$ (2.51) ve (2.52) ile bulunur.

ii) $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının verilmesinden algoritma 2.1 aracılığıyla $q(x)$, h ve H bulunur.

Teorem 2.4 ün gerekli kısmı yukarıda ispatlandı. Burada yeterlilik ispatlanacaktır.Teorem 2.4 ün koşullarını sağlayan $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ reel sayıları verilsin (2.51) ve (2.52) ile $\Delta(\lambda)$ ve $d(\lambda)$ fonksiyonlarını bulalım ve (2.54) aracılığıyla α_n sayılarını hesaplayalım.

Amacımız teorem 2.2 yi kullanmaktır. Bunun için α_n sayıları için asimptotikleri elde etmeliyiz. Teorem 2.2 den $\widetilde{q}(x) \in L_2(0,\pi)$ olmak üzere $\widetilde{L} = L\left(\widetilde{q}(x), \widetilde{h}, \widetilde{H}\right)$ sınır değer problemi vardır öyle ki $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ $\widetilde{L}$ nın özdeğerleridir. O halde $\Delta(\lambda)$ $\widetilde{L}$ nın karakteristik fonksiyonudur ve sonuç olarak

$$\acute{\Delta}(\lambda_n) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{k_n}{n}, \qquad \{k_n\} \in \ell_2$$

dir. Ayrıca

$$sign\Delta(\lambda) = (-1)^{n+1}$$

şeklindedir. Benzer şekilde teorem 2.3 kullanılarak

$$d(\lambda_n) = (-1)^n + \frac{k_n}{n} \qquad \rho(k_n) \in \ell_2$$

olduğu ispatlanabilir.

O halde teorem 2.2 den $q(x) \in L_2(0,\pi)$ olacak şekilde $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer problemi vardır öyleki $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ L nin spektral karakteristiğidir. $L_1(q(x), h)$ sınır değer probleminin özdeğerlerini $\{\widetilde{\mu}_n\}_n \geq 0$ ile gösterelim.

$\forall n \geq 0$ için $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ olduğunu göstermeliyiz. $\widetilde{d}(\lambda)$ L_1 in karakteristik fonksiyonu olsun. Böylece (2.54) den $\alpha_n = -\Delta(\lambda_n)\,\widetilde{d}(\lambda_n)$ olur. Fakat tersine $\alpha_n = -\Delta(\lambda_n)\, d(\lambda_n)$ ve $d(\lambda_n) = \widetilde{d}(\lambda_n)$, $n \geq 0$ olduğu çıkar. Sonuç olarak

$$Z(\lambda) := \frac{d(\lambda) - \widetilde{d}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

fonksiyonu λ ya göre tamdır. Diğer taraftan

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + O(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\rho|\, x))$$

$$\varphi^{'}(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + O(\exp(|\rho|\, x))$$

asimptotik formüllerinden

$$|d(\lambda)| \le ce^{|\tau|\pi}$$

$$\left|\widetilde{d}(\lambda)\right| \le ce^{|\tau|\pi}$$

olduğunu alırız.

$|\Delta(\lambda)| \ge c_\delta |\rho|\, e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$ ifadesinden yararlanırsak sabit bir $\delta > 0$ sayısı için

$$|Z(\lambda)| \le \frac{c}{|\rho|}, \quad \lambda \in G_\delta, \quad |\rho| \ge \rho^*$$

dir. Maksimum prensibi ve Liouville teoremini kullanarak $Z(\lambda) \equiv 0$ yani $d(\lambda) \equiv \widetilde{d}(\lambda)$ olduğu çıkar. Sonuç olarak $\forall n \ge 0$ için $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ dir.

3. BÖLÜM

$F(x,t)$ FONKSİYONUNUN ARAŞTIRILMASI

$$l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = k^2, \quad 0 < x < \pi \tag{3.1}$$

diferansiyel denklemi,

$$U(y) := y'(0) = 0, \quad V(y) := y(\pi) = 0 \tag{3.2}$$

sınır koşulları ve

$$y(d+0) = ay(d-0), \quad y'(d+0) = ay'(d-0), \tag{3.3}$$

süreksizlik koşulları verilmiş olsun. Burada λ spektral parametre; $q(x)$ ve a reel; $d \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir.

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = 0, \tag{3.4}$$

başlangıç koşullarını ve (3.3) süreksizlik koşullarını sağlayan (3.1) denkleminin çözümü $\varphi(x,\lambda)$ olsun. $\lambda_0, \lambda_1, ...$ler (3.1), (3.2), (3.3) sınır değer probleminin özdeğerleri, $\varphi(x,\lambda_n)$ ler $n \geq 0$ özfonksiyonları, $q(x) = 0$ olması durumunda ise (3.1), (3.2), (3.3) sınır değer probleminin özdeğerleri $\lambda_0^0, \lambda_1^0, ...$ ve özfonksiyonları $\varphi_0(x,\lambda_n^0)$, $n \geq 0$ olsun.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx, \quad n \geq 0 \tag{3.5}$$

sayılarına (3.1), (3.3), (3.4) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları denir.

α_n^0, $n \geq 0$ sayıları ise (3.1), (3.3), (3.4) sınır değer probleminin $q(x) = 0$ durumuna karşılık gelen normalleştirici sayılarıdır.

1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [18] yapmış oldukları bir çalışmada $f(x)$, $g(x) \in L_2(0,\pi)$ olmak üzere

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi f(x)\varphi(x,\lambda_n)dx \int_0^\pi g(t)\varphi(t,\lambda_n)dt \right]$$

Parseval eşitliğinin doğru olduğunu göstermişlerdir.

Buradaki $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine (3.1), (3.2), (3.3) sınır değer probleminin spektral karakteristikleri denir.

$\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin yardımıyla ile $F(x,t)$ fonksiyonu

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n) - \frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0) \right] \tag{3.6}$$

olarak oluşturulsun. Oluşturulan bu fonksiyon yardımı ile, $K(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi = 0 \tag{3.7}$$

Volterra tipi integral denklem kurulabilir. Bu integral denklemin çözümünün varlığı ilk kez 1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov tarafından [18] potansiyeli $\left(\frac{A}{x} + q(x)\right)$ olan diferansiyel operatör için gösterilmiştir. Bu çalışmada ise bu integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği $q(x)$ reel potansiyeline ve (3.2)-(3.3) süreksizlik koşullarına sahip bir operatör için araştırılacaktır. Bunu yapmak için $F(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir. Bunun içinde $\varphi_0(x,\lambda_n)$ ve $\varphi_0(x,\lambda_n^0)$ fonksiyonlarının asimptotik formüllerinden yararlanılacaktır. Bu asimptotik formüller $x > 0$ ve n'nin yeterince büyük değerleri için geçerlidir.

2006 yılında R.Kh. Amirov [32] yapmış olduğu çalışmada (3.1) denkleminin $q(x) = 0$ olduğu duruma karşılık gelen ve $e_0(0,\lambda) = 1$, $e_0'(0,\lambda) = ik$ başlangıç koşulları ile (3.3) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü $e_0(x,\lambda)$ olmak üzere $e_0(x,\lambda)$ fonksiyonunu

$$e_0(x,\lambda) = \begin{cases} e^{ikx}, & 0 < x < d, \\ a^+e^{ikx} + a^-e^{ik(2d-x)}, & d < x < \pi, \end{cases}$$

olarak elde etmiştir. Burada $a^{\pm}=\dfrac{1}{2}\left(a\pm\dfrac{1}{a}\right)$ dır.Problemin

$$e(x,\lambda)=e_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{ikt}dt$$

şeklinde çözüme sahip olduğunu göstermiştir.

(3.1) denkleminin $q(x)=0$ olduğu duruma karşılık gelen

$$\varphi_0(0,\lambda)=1,\quad \varphi_0'(0,\lambda)=0, \tag{3.4}$$

başlangıç koşullarını ve (3.3) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü

$$\varphi_0(x,\lambda)=\begin{cases}\cos kx, & 0<x<d,\\ a^{+}\cos kx+a^{-}\cos k(2d-x), & d<x<\pi,\end{cases} \tag{3.8}$$

olarak elde etmiştir. (3.1), (3.2), (3.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı

$$k_n=k_n^0+\frac{d_n}{k_n^0}+\frac{\delta_n}{k_n^0}, \tag{3.9}$$

olarak bulmuştur. Burada $d_n=\left[\dfrac{a^{+}\sin k_n^0\pi-a^{-}\sin k_n^0(2d-\pi)}{2\acute{\Delta}(k_n^0)}\right]\displaystyle\int_0^{\pi}q(t)dt$

ve $\delta_n=\dfrac{1}{k_n^0}\displaystyle\int_0^{\pi}\acute{K_t}(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$ dir.

$\varphi_0(x,\lambda_n^0)$ fonksiyonunun asimptotik formülü

$$\varphi_0(x,\lambda_n^0)=\begin{cases}\cos k_n^0 x, & 0<x<d,\\ a^{+}\cos k_n^0 x+a^{-}\cos k_n^0(2d-x), & d<x<\pi,\end{cases} \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$\alpha_n=\alpha_n^0+\delta_n$ ve $\alpha_n^0=((a^{+})^2+(a^{-})^2)\dfrac{\pi}{2}+(1-(a^{+})^2-(a^{-})^2)\dfrac{d}{2}+\delta_{1n}$ dir.

Burada

$\delta_{1n}=\dfrac{\sin 2k_n^0 d}{4k_n^0}+(a^{+})^2\dfrac{\sin 2k_n^0\pi}{4k_n^0}-(a^{+})^2\dfrac{\sin 2k_n^0 d}{4k_n^0}+2a^{+}a^{-}(\pi-d)\cos 2k_n^0 d+$
$\dfrac{a^{+}a^{-}}{k_n^0}\sin 2k_n^0(\pi-d)-\dfrac{(a^{-})^2}{4k_n^0}\sin 2k_n^0(2d-\pi)+\dfrac{(a^{-})^2}{4k_n^0}\sin 2k_n^0 d$

sınırlı dizidir. Ayrıca

$$\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\alpha_n^0+\delta_n}=\frac{1}{\alpha_n^0}-\frac{\delta_n}{(\alpha_n^0)^2}+O(\frac{1}{n}) \tag{3.11}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha_n^0}=\frac{2}{((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d}+O(\frac{1}{n}) \tag{3.12}$$

dir.

Eğer $F(x,t)$ fonksiyonu (3.6) ifadesinde (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) ve (3.12) yerine yazılırsa;

$0<x<d$ için;

$$\begin{aligned}
F(x,t)=&-\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cos k_n^0(x+t)\\
&-\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cos k_n^0(x-t)\\
&-\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin\frac{k_n^0(x+t)}{k_n^0}\\
&-\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\sin\frac{k_n^0(x-t)}{k_n^0}\\
&-\frac{(x-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{\sin k_n^0(x-t)}{k_n^0}\\
&-\frac{(x-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\frac{\sin k_n^0(x-t)}{k_n^0}\\
&+\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\sin k_n^0(x+t)}{k_n^0}\\
&+\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\sin k_n^0(x+t)}{k_n^0}\\
&+\frac{(x-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\sin k_n^0(x-t)}{k_n^0}\\
&+\frac{(x-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\sin k_n^0(x-t)}{k_n^0}
\end{aligned}$$

$$-\frac{(x+t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{2(x+t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{(x+t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{(x-t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{2(x-t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{(x-t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(x+t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\delta_n\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(x+t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n^2\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(x+t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^3\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(x-t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\delta_n\frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{2(x-t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n^2\frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(x-t)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^3\frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}+O(\frac{1}{n^3})$$

olarak bulunur. Son eşitlikte d_n ve δ_n ifadelerinin değerleri yerlerine yazılırsa;

$$F(x,t)=-\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n^0(x+t)}{k_n^0}\int_0^{\pi}K_t'(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$$

$$-\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n^0(x-t)}{k_n^0}\int_0^{\pi}K_t'(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$$

$$-\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}\left[\frac{a^+\sin k_n^0\pi-a^-\sin k_n^0(2d-\pi)}{2\Delta'(k_n^0)}\right]\int_0^{\pi}q(t)dt$$

$$-\frac{1}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}\int_0^{\pi}K_t'(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$$

$$-\frac{(x-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}\left[\frac{a^+\sin k_n^0\pi-a^-\sin k_n^0(2d-\pi)}{2\Delta'(k_n^0)}\right]\int_0^{\pi}q(t)dt$$

$$-\frac{(x-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}\int_0^{\pi}K_t'(\pi,t)\sin k_n^0 t dt+O(\frac{1}{n^3})$$

ifadesi elde edilir.

$d<x<\pi$ için;

$$F(x,t)=-\frac{2(a^+)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cos k_n^0(x+t)$$

$$-\frac{2((a^+)^2+(a^-)^2)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cos k_n^0(x-t)$$

$$-\frac{2a^+a^-}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cos k_n^0(x+2d-t)$$

$$-\frac{4a^+a^-}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cos k_n^0(2d-x-t)$$

$$-\frac{2a^+a^-}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cos k_n^0(2d-x+t)$$

$$-\frac{2(a^-)^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cos k_n^0(4d-x-t)$$

$$-\frac{(a^+)^2(x+t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{\sin k_n^0(x+t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{(a^+)^2(x+t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\frac{\sin k_n^0(x+t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2(a^+)^2(x+t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\sin k_n^0(x+t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2(a^+)^2(x+t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\sin k_n^0(x+t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{\sin k_n^0(x-t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\frac{\sin k_n^0(x-t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\sin k_n^0(x-t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\sin k_n^0(x-t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{a^+a^-(x+2d-t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{\sin k_n^0(x+2d-t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{a^+a^-(x+2d-t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\frac{\sin k_n^0(x+2d-t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2a^+a^-(x+2d-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\sin k_n^0(x+2d-t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2a^+a^-(x+2d-t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\sin k_n^0(x+2d-t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{2a^+a^-(x-2d+t)\,[\,((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{\sin k_n^0(x-2d+t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{2a^+a^-(x-2d+t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\frac{\sin k_n^0(x-2d+t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{4a^+a^-(x-2d+t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\sin k_n^0(x-2d+t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{4a^+a^-(x-2d+t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\sin k_n^0(x-2d+t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{a^+a^-(2d-x+t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{\sin k_n^0(2d-x+t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{a^+a^-(2d-x+t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\frac{\sin k_n^0(2d-x+t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2a^+a^-(2d-x+t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\sin k_n^0(2d-x+t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2a^+a^-(2d-x+t)}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\sin k_n^0(2d-x+t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{(a^-)^2(4d-x-t)\,[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{\sin k_n^0(4d-x-t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{(a^-)^2(4d-x-t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\frac{\sin k_n^0(4d-x-t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2(a^-)^2(4d-x-t)}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\sin k_n^0(4d-x-t)}{k_n^0}$$

$$+\frac{2(a^-)^2(4d-x-t)}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\sin k_n^0(4d-x-t)}{k_n^0}$$

$$-\frac{(a^+)^2(x+t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{(a^+)^2(x+t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{(a^+)^2(x+t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(a^+)^2(x+t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\delta_n\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{2(a^+)^2(x+t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n^2\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(a^+)^2(x+t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^3\frac{\cos k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\delta_n \frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2\delta_n \frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{2((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\delta_n^2 \frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^3 \frac{\cos k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{a^+a^-(x+2d-t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \frac{\cos k_n^0(x+2d-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{a^+a^-(x+2d-t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\delta_n \frac{\cos k_n^0(x+2d-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{a^+a^-(x+2d-t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \frac{\cos k_n^0(x+2d-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{a^+a^-(x+2d-t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2\delta_n \frac{\cos k_n^0(x+2d-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{2a^+a^-(x+2d-t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\delta_n^2 \frac{\cos k_n^0(x+2d-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{a^+a^-(x+2d-t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^3 \frac{\cos k_n^0(x+2d-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{a^+a^-(x-2d+t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \frac{\cos k_n^0(x-2d+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{2a^+a^-(x-2d+t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\delta_n \frac{\cos k_n^0(x-2d+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{a^+a^-(x-2d+t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \frac{\cos k_n^0(x-2d+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{2a^+a^-(x-2d+t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2\delta_n \frac{\cos k_n^0(x-2d+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{4a^+a^-(x-2d+t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\delta_n^2 \frac{\cos k_n^0(x-2d+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{2a^+a^-(x-2d+t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^3 \frac{\cos k_n^0(x-2d+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{a^+a^-(2d-x+t))^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \frac{\cos k_n^0(2d-x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{a^+a^-(2d-x+t))^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\delta_n \frac{\cos k_n^0(2d-x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{a^+a^-(2d-x+t))^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \frac{\cos k_n^0(2d-x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{a^+a^-(2d-x+t))^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2\delta_n \frac{\cos k_n^0(2d-x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{2a^+a^-(2d-x+t))^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\delta_n^2 \frac{\cos k_n^0(2d-x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{a^+a^-(2d-x+t))^2}{[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^3\frac{\cos k_n^0(2d-x+t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{(a^-)^2(4d-x-t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\frac{\cos k_n^0(4d-x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{(a^-)^2(4d-x-t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n\frac{\cos k_n^0(4d-x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$-\frac{(a^-)^2(4d-x-t)^2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^2\frac{\cos k_n^0(4d-x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(a^-)^2(4d-x-t)^2}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2\delta_n\frac{\cos k_n^0(4d-x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(a^-)^2(4d-x-t)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\delta_n^2\frac{\cos k_n^0(4d-x-t)}{(k_n^0)^2}$$

$$+\frac{(a^-)^2(4d-x-t)^2}{2\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^3\frac{\cos k_n^0(4d-x-t)}{(k_n^0)^2}+O(\frac{1}{n^3})$$

olarak bulunur. Son eşitlikte d_n ve δ_n ifadelerinin değerlerini yerlerine yazılırsa;

$$F(x,t)=F_1(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n^0(x+t)}{k_n^0}\int_0^{\pi}K_t'(\pi,t)\sin k_n^0t\,dt$$

$$+F_2(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n^0(x-t)}{k_n^0}\int_0^{\pi}K_t'(\pi,t)\sin k_n^0t\,dt$$

$$+F_3(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n^0(x+2d-t)}{k_n^0}\int_0^{\pi}K_t'(\pi,t)\sin k_n^0t\,dt$$

$$+F_4(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n^0(2d-x-t)}{k_n^0}\int_0^{\pi}K_t'(\pi,t)\sin k_n^0t\,dt$$

$$+F_5(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n^0(2d-x+t)}{k_n^0}\int_0^{\pi}K_t'(\pi,t)\sin k_n^0t\,dt$$

$$+F_6(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n^0(4d-x-t)}{k_n^0}\int\limits_0^{\pi}\acute{K_t}(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$$

$$+F_7(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}\left[\frac{a^+\sin k_n^0\pi-a^-\sin k_n^0(2d-\pi)}{2\acute{\Delta}(k_n^0)}\right]\int\limits_0^{\pi}q(t)dt$$

$$+F_8(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x+t)}{(k_n^0)^2}\int\limits_0^{\pi}\acute{K_t}(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$$

$$+F_9(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}\left[\frac{a^+\sin k_n^0\pi-a^-\sin k_n^0(2d-\pi)}{2\acute{\Delta}(k_n^0)}\right]\int\limits_0^{\pi}q(t)dt$$

$$+F_{10}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x-t)}{(k_n^0)^2}\int\limits_0^{\pi}\acute{K_t}(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$$

$$+F_{11}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x+2d-t)}{(k_n^0)^2}\left[\frac{a^+\sin k_n^0\pi-a^-\sin k_n^0(2d-\pi)}{2\acute{\Delta}(k_n^0)}\right]\int\limits_0^{\pi}q(t)dt$$

$$+F_{12}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x+2d-t)}{(k_n^0)^2}\int\limits_0^{\pi}\acute{K_t}(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$$

$$+F_{13}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x-2d+t)}{(k_n^0)^2}\left[\frac{a^+\sin k_n^0\pi-a^-\sin k_n^0(2d-\pi)}{2\acute{\Delta}(k_n^0)}\right]\int\limits_0^{\pi}q(t)dt$$

$$+F_{14}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(x-2d+t)}{(k_n^0)^2}\int\limits_0^{\pi}\acute{K_t}(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$$

$$+F_{15}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(2d-x+t)}{(k_n^0)^2}\left[\frac{a^+\sin k_n^0\pi-a^-\sin k_n^0(2d-\pi)}{2\acute{\Delta}(k_n^0)}\right]\int\limits_0^{\pi}q(t)dt$$

$$+F_{16}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(2d-x+t)}{(k_n^0)^2}\int\limits_0^{\pi}\acute{K_t}(\pi,t)\sin k_n^0 t dt$$

$$+F_{17}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(4d-x-t)}{(k_n^0)^2}\left[\frac{a^+\sin k_n^0\pi-a^-\sin k_n^0(2d-\pi)}{2\acute{\Delta}(k_n^0)}\right]\int\limits_0^{\pi}q(t)dt$$

$$+F_{18}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k_n^0(4d-x-t)}{(k_n^0)^2}\int\limits_0^{\pi}\acute{K_t}(\pi,t)\sin k_n^0 t dt+O(\frac{1}{n^3})$$

olarak elde edilir. Burada;

$$F_1(x,t) = -\frac{2(a^+)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_2(x,t) = -\frac{2((a^+)^2+(a^-)^2)}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_3(x,t) = -\frac{2a^+a^-}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_4(x,t) = -\frac{4a^+a^-}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_5(x,t) = -\frac{2a^+a^-}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_6(x,t) = -\frac{2(a^-)^2}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_7(x,t) = -\frac{(a^+)^2(x+t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_8(x,t) = -\frac{(a^+)^2(x+t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_9(x,t) = -\frac{((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_{10}(x,t) = -\frac{((a^+)^2+(a^-)^2)(x-t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_{11}(x,t) = -\frac{a^+a^-(x+2d-t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_{12}(x,t) = -\frac{a^+a^-(x+2d-t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_{13}(x,t) = -\frac{2a^+a^-(x-2d+t)\left[\,((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_{14}(x,t) = -\frac{2a^+a^-(x-2d+t)\left[\,((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_{15}(x,t) = -\frac{a^+a^-(2d-x+t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_{16}(x,t) = -\frac{a^+a^-(2d-x+t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_{17}(x,t) = -\frac{(a^-)^2(4d-x-t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

$$F_{18}(x,t) = -\frac{(a^-)^2(4d-x-t)\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]}{\left[((a^+)^2+(a^-)^2)\pi+(1-(a^+)^2-(a^-)^2)d\right]^2}$$

şeklindedir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12},\ 0<x<2\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}=x\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\int x\cot\frac{x}{2}dx,\ \ 0\leq x\leq 2\pi$$

olduğundan $F(x,t)$ fonksiyonu $0<x<\pi$ ve $0<t<\pi$ için x ve t değişkenlerine göre sürekli türevlenebilirdir.

Teorem 3.1: Sabitlenmiş her $x\in(0,\pi]$ için

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x \tilde{K}(x,t)\cos ktdt \tag{3.13}$$

çevirme operatörünün çekirdeği olan $\tilde{K}\,(x,t)$ fonksiyonu

$$F(x,t)+\kappa(x,t)+\int_0^x \tilde{K}(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi=0 \tag{3.14}$$

lineer integral denklemini sağlar.

İspat: $f\in AC(0,\pi)$, $f(0)=f(\pi)=0$ olan bir f fonksiyonu için;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} f(t)\frac{\varphi(x,k_n)\varphi(t,k_n)}{\alpha_n}dt=f(x)$$

eşitliği sağlansın.

$$\varphi_0(x,\lambda)=\begin{cases}\cos kx, & 0<x<d,\\ a^+\cos kx+a^-\cos k(2d-x), & d<x<\pi,\end{cases}$$

çözümünden faydalanarak $\cos kx$ e göre düzenlersek

$$\cos kx=\begin{cases}\varphi_0(x,k), & 0<x<d,\\ \\ a^+\varphi_0(x,k)-a^-\varphi_0(2d-x,k), & d<x<\pi,\end{cases}$$

elde edilir. (3.8) ve (3.13) kullanırak hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
\Phi_N(x,t) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi(x,k_n)\varphi(t,k_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,k_n^0)\varphi_0(t,k_n^0)}{\alpha_n^0}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(x,k_n)\varphi_0(t,k_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,k_n^0)\varphi_0(t,k_n^0)}{\alpha_n^0}\right) \\
&+ \int_0^x \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}d\xi \\
&+ \int_0^x \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_0(t,k_n)\cos k_n\xi}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}\right)d\xi \\
&+ \int_0^t \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,k_n)\cos k_n\xi}{\alpha_n}d\xi
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$\Phi_N(x,t) = \Phi_{N_1}(x,t) + \Phi_{N_2}(x,t) + \Phi_{N_3}(x,t) + \Phi_{N_4}(x,t)$$

burada

$$
\begin{aligned}
\Phi_{N_1}(x,t) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(x,k_n)\varphi_0(t,k_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,k_n^0)\varphi_0(t,k_n^0)}{\alpha_n^0}\right) \\
\Phi_{N_2}(x,t) &= \int_0^x \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}d\xi \\
\Phi_{N_3}(x,t) &= \int_0^x \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_0(t,k_n)\cos k_n\xi}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}\right)d\xi \\
\Phi_{N_4}(x,t) &= \int_0^t \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,k_n)\cos k_n\xi}{\alpha_n}d\xi
\end{aligned}
$$

dir.

$f(x) \in AC\,[0,\pi]$ olsun. Teorem 1.14 göre $N \to \infty$ için bu ifadelerin asimptotik davranışları;

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\Phi_{N_1}(x,t)dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\sum_{n=1}^N\left(\frac{\varphi_0(x,k_n)\varphi_0(t,k_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,k_n^0)\varphi_0(t,k_n^0)}{\alpha_n^0}\right)dt$$

$$= \int\limits_0^\pi f(t)\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\varphi_0(x,k_n)\varphi_0(t,k_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,k_n^0)\varphi_0(t,k_n^0)}{\alpha_n^0}\right)dt$$

$$= \int\limits_0^\pi f(t)F(x,t)dt$$

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\Phi_{N_2}(x,t)dt = \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\int\limits_0^x \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}d\xi dt$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\int\limits_0^d \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}d\xi dt$$

$$+ \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\int\limits_d^{2d-x} \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}d\xi dt$$

$$+ \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\int\limits_{2d-x}^{x} \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}d\xi dt$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\int\limits_0^d \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\varphi_0(\xi,k_n^0)}{\alpha_n^0}d\xi dt$$

$$+a^+\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\int\limits_d^{2d-x} \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\varphi_0(\xi,k_n^0)}{\alpha_n^0}d\xi dt$$

$$-a^-\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\int\limits_d^{2d-x} \tilde{K}(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\varphi_0(2d-\xi,k_n^0)}{\alpha_n^0}d\xi dt$$

$$= \int\limits_0^d \tilde{K}(x,\xi)\int\limits_0^\pi f(t)\sum_{n=1}^\infty\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\varphi_0(\xi,k_n^0)}{\alpha_n^0}dt d\xi$$

$$+a^+\int\limits_d^{2d-x} \tilde{K}(x,\xi)\int\limits_0^\pi f(t)\sum_{n=1}^\infty\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\varphi_0(\xi,k_n^0)}{\alpha_n^0}dt d\xi$$

$$-a^-\int_d^{2d-x}\tilde K(x,\xi)\int_0^\pi f(t)\sum_{n=1}^\infty\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\varphi_0(2d-\xi,k_n^0)}{\alpha_n^0}dtd\xi$$

$$=\int_0^d\tilde K(x,\xi)f(\xi)d\xi+a^+\int_d^{2d-x}\tilde K(x,\xi)f(\xi)d\xi-a^-\int_d^{2d-x}\tilde K(x,\xi)f(2d-\xi)d\xi$$

$$=\int_0^d\tilde K(x,\xi)f(\xi)d\xi+a^+\int_d^{2d-x}\tilde K(x,\xi)f(\xi)d\xi+a^-\int_d^x\tilde K(x,2d-\xi)f(\xi)d\xi$$

$$=a^+\int_0^x\tilde K(x,\xi)f(\xi)d\xi+a^-\int_0^x\tilde K(x,2d-\xi)f(\xi)d\xi$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\Phi_{N_3}(x,t)dt=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\int_0^x\tilde K(x,\xi)\sum_{n=1}^N\left(\frac{\varphi_0(t,k_n)\cos k_n\xi}{\alpha_n}-\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}\right)d\xi dt$$

$$=\int_0^\pi f(t)\int_0^d\tilde K(x,\xi)\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\varphi_0(t,k_n)\cos k_n\xi}{\alpha_n}-\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}\right)d\xi dt$$

$$=\int_0^\pi f(t)\int_0^x\tilde K(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi dt$$

$$F_0(\xi,t)=\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\varphi_0(t,k_n)\cos k_n\xi}{\alpha_n}-\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0\xi}{\alpha_n^0}\right)$$

$$\begin{aligned}F(x,t)&=a^+F_0(x,t)+a^-F_0(2d-x,t)\\&=a^+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\varphi_0(t,k_n)\cos k_nx}{\alpha_n}-\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0x}{\alpha_n^0}\right)\\&\quad+a^-\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\varphi_0(t,k_n)\cos k_n(2d-x)}{\alpha_n}-\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\cos k_n^0(2d-x)}{\alpha_n^0}\right)\\&=\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\varphi_0(t,k_n)\varphi_0(x,k_n)}{\alpha_n}-\frac{\varphi_0(t,k_n^0)\varphi_0(x,k_n^0)}{\alpha_n^0}\right)\end{aligned}$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\Phi_{N_4}(x,t)dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\int_0^t\tilde K(t,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi(x,k_n)\cos k_n\xi}{\alpha_n}d\xi dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(x,k_n)}{\alpha_n} \int_0^t \tilde{K}(t,\xi)\cos k_n\xi d\xi$$

$$= -\sum_{n=1}^{N} \frac{\psi(x,k_n)}{\acute{\Delta}(k_n)} \int_0^t \tilde{K}(t,\xi)\cos k_n\xi d\xi$$

$$= -\sum_{|k_n|<N}^{N} \frac{\psi(x,k_n)}{\acute{\Delta}(k_n)} \int_0^t \tilde{K}(t,\xi)\cos k_n\xi d\xi$$

$$= -\sum_{|k_n|<N}^{N} \operatorname*{Re s}_{\lambda=\lambda_n} \frac{\psi(x,\lambda)}{\acute{\Delta}(\lambda)} \int_0^t \tilde{K}(t,\xi)\cos \lambda\xi d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{\psi(t,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^t \tilde{K}(t,\xi)\cos \lambda\xi d\xi d\lambda, \qquad 0 < t < x$$

burada

$\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = N\}$

dir. $G_\delta = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n| \geq \delta,\ \delta$ yeterince küçük pozitif sayı$\}$ bölgesinde

$|\psi(x,k)| \leq \dfrac{c}{|k|} e^{|\operatorname{Im} k|(\pi-t)}$ $|\Delta(k)| \geq \dfrac{c_\delta}{|k|} e^{|\operatorname{Im} k|\pi}$

dir. Dolayısıyla

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(t)\Phi_{N_4}(x,t)dt \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^t \tilde{K}(t,\xi)\cos\lambda\xi d\xi d\lambda \right|$$

$$\leq \frac{c}{2\pi c_\delta} \left| e^{\operatorname{Im} k(\pi-t)} \int_0^t \tilde{K}(t,\xi)\cos\lambda\xi d\xi \right| \text{ olduğundan}$$

$N \to \infty$ iken limite geçilirse;

$\lim\limits_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(t)\Phi_{N_4}(x,t)dt = 0$ elde edilir. Ohalde

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(t)\Phi_N(x,t)dt = \int_0^{\pi} f(t)F(x,t)dt$$

$$+a^+ \int_0^x \tilde{K}(x,\xi)f(\xi)d\xi + a^- \int_0^x \tilde{K}(x,2d-\xi)f(\xi)d\xi$$

$$+ \int_0^{\pi} f(t) \int_0^x \tilde{K}(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi dt = 0$$

bulunur.

$$F(x,t) + a^{+}\tilde{K}(x,\xi) + a^{-}\tilde{K}(x,2d-\xi) + \int\limits_{0}^{x} \tilde{K}(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi = 0$$

$\kappa(x,t) = a^{+}\tilde{K}(x,t) + a^{-}\tilde{K}(x,2d-t)$ yazılırsa

$F(x,t) + \kappa(x,t) + \int\limits_{0}^{x} \tilde{K}(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi = 0$ esas integral denklemi elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Ambartsumyan, V.A. (1929). Über enie Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53 , 690-695.

[2] Amirov, R. Kh. and Gülyaz, S. (1999). Inverse Problem for The Sturm-Liouville According to a Spectrum and Normalizing, 9 th. International Colloquium on Differential Equations, pp. 15-22, vsp.

[3] Amirov, R. Kh. and Yurko, V.A. (2001). On Differential Operators with a Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval. Ukr. Math. Jour., V.53, No:11, pp. 1443-1458.

[4] Amirov, R. Kh. (2002). Direct and Inverse Problems for Differential Operators with a Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval Transactions of NAS Azerbaijan., Vol 22, No:1, pp. 21-39.

[5] Amirov, R. Kh. (2006). On Sturm-Liouville Operators with Discotinuity conditions inside an interval, J. Math. Anal. Appl., 317 , pp. 163-176.

[6] Amirov, R. Kh. and Topsakal, N. (2008) Sturm-Liouville operators with Coulomb potential which have discontinuity conditions inside an interval., Integral Transforms Spec. Funct. 19 , no. 11-12, 923–937.

[7] Bates, R.H.T. and McDonnell, M.J. (1986). Image Restoration and Reconstruction, Oxford: Clarendon.

[8] Borg, G. (1945). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78 , 1-96.

[9]Borg, G. (1946). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenweraufgabe, Acta Math. 78, 1-96.

[10] Bellman, R. and Cook, K. (1963). Differential-difference Equations, Academic Press, New York.

[11] Convay, J.B. (1995). Functions of One Complex Variable, 2nd ed., vol. I, Springer-Verlag, New York.

[12] Eberhard, W., Freiling, G. And Schneider, A. (1994). Connection formular for second-arder differential equations with a complex parameter and having an arbitary number of turning points, Math. Nachr. 165 , 205-229.

[13] Freiling, G. And Yurko, V.A. (1999). Reconstructing parameters of a medium from incomplete spectral information, Result in Matematics 35 , 228-249.

[14] Freiling, G. and Yurko, V.A. (1997). Inverse problems for differential equations with turning points, Inverse Problems, 13 , 1247-1263.

[15] Freiling G. and Yurko V.A. (1999). Inverse spectral problems for differential equations on the half-line with turning points, J. Diff. Equations, 154 , 419-453.

[16] Freiling, G. and Yurko, V.A. (2008). Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Application, Newyork.

[17] Gasimov, M.G. and Levitan, B.M. (1964). About Sturm-Liouville Differential operators. Math. Sborn., 63 (105), No. 3.

[18] Gasimov, M.G. and Amirov,R. Kh. (1985). Direct and Inverse Spectral Problems for Second order Differential Operators which has Coulumb Singularty., Dokl. Akad., Nauk Az.SSR, vol. 41 No.8, 1-5.

[19] Gelfand, I.M. and Levitan,B.M. (1951). On the Determmination of a Differential Equation by its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 15, 309-360.

[20] Hoenders, B.J. (1975). On the solution of the phase retrieval problem, J. Math. Phys. 16 , 1719-1725

[21] Hryniv, R.O. and Mykytyuk, Ya. V. (2003). Transformation Operators for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials, Mat. Phys. Anal. Geom.

[22] Hurt, N.E. (1989). Phase Retrieval and Zero Crossing, Dordrecht: Kluwer.

[23] Krein, M.G. (1951). Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76 , 21-24.

[24] Krein, M.G. (1954). On a Method of the Effective Solution of an Inverse

Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95 , 767-770.

[25] Marchenko, V.A. (1950). Some Problems in the Theory of Second-Order Differential Operators, Dokl. Akad.,Nauk SSSR. 72 , 457-560.

[26] Marchenko, V.A. (1977). Sturm-Liouville Operators and their Applications, Kiev: Naukova Dumka, (Endl. Transl. 1986 (Basel: Birkhauser)

[27] McHugh, J.M. (1971). An historical survey of ordinary linear differential equations with a large parameter and turning points, Arch. Hist. Exact Sci 7 , 277-324

[28] Naimark, M. A. (1967). Linear Differential Operators, Moscow, Nauka, (in Russian).

[29] Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. (1970). Intoduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.

[30] Levitan, B.M. (1984). Inverse Sturm-Liouville Problems, Moscow: Nauka, , (Engl. Transl.1987 (Utrecth: VNU Science Press))

[31] Poeschel, J. And Trubowitz, E. (1987). Inverse Spectral Theory, New York: Academic.

[32] Tikhonravov, A.V. (1982). The accuracy obtainable in principle whensolving synthesis problems, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 22 , 6, 1421-1433; English transl. İn USSR Comput. Maths. Math. Phys. 22 ,6, 143-157.

[33] Tychonoff, A.N.(1949). Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 797-800.

[34] Yurko, V.A. (1992). Inverse problem for differential equations with a singularity, Differ. Uravreniya 28 , no. 8, 1355-1362 (in Russian); English transl. İn Differ. Equations 28 1100-1107.

[35] Yurko, V.A. (1993). On higher-order differential operators with a singular point, Inverse problems, 9 , 495-502

[36] Yurko, V.A. (1999). Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications, New York: Gordon & Breach.

ÖZGEÇMİŞ

Sema KAPLAN 1986 yılında Sivas'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimi Sivas'ta tamamladı. 2003 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 2007 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.