SÜREKSİZ KATSAYILI DİFÜZYON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN İNTEGRAL GÖSTERİLİMİ

Seval KARACAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2009

SÜREKSİZ KATSAYILI DİFÜZYON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN İNTEGRAL GÖSTERİLİMİ

Seval KARACAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2009

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ÇEVEN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2009

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Sezai ELAGÖZ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fenk Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SÜREKSİZ KATSAYILI DİFÜZYON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN İNTEGRAL GÖSTERİLİMİ

Seval KARACAN
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK

Bu çalışmada, kuantum fiziğinin önemli denklemlerinden biri olan süreksiz katsayılı difüzyon denkleminin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için bir integral gösterilim elde edilmiştir.Ayrıca bu tip denklem için çevirme operatörünün varlığı ispatlanmış ve çekirdek fonksiyonunun önemli özellikleri alınmıştır.

Bu çevirme operatörü difüzyon operatörü için düz ve ters problemler çözümünde, spektral verilerin davranışlarının öğrenilmesinde ve Gelfand-Levitan-Marchenko tipinde integral denklemin elde edilmesinde önemli bir yere sahiptir.

Anahtar Kelimeler: Difüzyon denklemi, Sturm-Liouville denklemi, İntegral gösterilimi

SUMMARY

MSc Thesis

AN INTEGRAL REPRESENTATION OF SOLUTION OF DIFFUSION EQUATION
WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

Seval KARACAN
Cumhuriyet University
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics
Advisor: Assist. Prof. Dr. Yaşar ÇAKMAK

In this study, on integral representation for solution which satisfies certain initial conditions of diffusion equation with discontinuous coefficients which is from important equations of Quantum physics has been obtained. Moreover existence of transformation operator for this kind of equation has been provided and important properties of kernel function has been taken.

This transformation operator has an important place in solution of direct and inverse problems for diffusion operator, in learning of behaviour of spectral datas and in obtaining of integral equation with the type of Gelfand-Levitan-Marchenko.

Key Words: Diffusion equation, Sturm-Liouville equation, Integral representation

Araştırmalarımın başından sonuna kadar tüm safhalarında yardımını esirgemeyip, değerli fikir ve tecrübeleriyle bana büyük destek sağlayan değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK' a ve manevi desteklerinden dolayı aileme ayrıca katkılarından dolayı Tübitak'a teşekkür ederim.

Seval KARACAN

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Fizikte, matematiksel fizikte karşımıza çıkan pek çok problem operatörlerin spektral teorisi ile yakından ilişkilidir. Özellikle fiziğin bir çok alanındaki çoğu problem spektral analizin dalı olan ters (inverse) problemlere başka bir deyişle spektral karakteristiklerine göre operatörlerin kurulması problemine indirgenebilmektedir. Örneğin Mekanikte, verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesinde, Kuantum mekaniğinde, verilen enerji seviyelerine veya saçılma verilerine göre parçacıklar arasında etkileşmenin öğrenilmesinde, jeofizikte yer altı madenlerinin aranmasında ters probleme başvurulur.

1. BÖLÜM
TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1. $V \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve K herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa V ye K cismi üzerinde lineer uzay denir.

A) $(V, +)$ cebirsel yapısı değişmeli gruptur.

a$_1$) $\forall x, y \in V$ için $x + y \in V$ dir. (Kapalılık Özelliği)

a$_2$) $\forall x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir. (Birleşme Özelliği)

a$_3$) $\forall x \in V$ için $x + 0 = 0 + x = x \in V$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ vardır.

a$_4$) $\forall x \in V$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde bir tek $-x \in V$ vardır.

a$_5$) $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$ dir. (Değişme Özelliği)

B)$\forall x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

b$_1$) $\alpha x \in V$ dir.

b$_2$) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

b$_3$) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta y$ dir.

b$_4$) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ dir.

b$_5$) $\forall x \in V$ için $1.x = x$ olacak şekilde $1 \in K$ vardır. Burada 1, K cisminin birim elemanıdır.

Tanım 1.2. Lineer uzayda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 1.3. X ve Y aynı bir K cismi üzerinde tanımlanmış iki lineer uzay olsun. $A : X \to Y$ operatörü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere

L_1) $A(x + y) = A(x) + A(y)$

L_2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$

koşullarını sağlıyorsa A ya lineer operatör (dönüşüm) veya Lineer Homomorfizm denir. $A : X \to Y$ operatörü bire-bir örten ise A operatörüne Lineer İzomorfizm denir. X e A operatörünün tanım kümesi, Y ye de A operatörünün değer kümesi denir. Genellikle A operatörünün tanım kümesi $D(A)$, değer kümesi $R(A)$ işaretlemelerinden biri kullanılarak gösterilir..

Tanım 1.4. Aynı D kümesi üzerinde tanımlı A ve B operatörleri $\forall x \in D$ için $Ax = Bx$ eşitliğini sağlıyor ise bu operatörler eşittir denir.

$D(B) \subset D(A)$ ve operatörler $D(B)$ de eşit yani

$$\forall x \in D(B) \text{ için } Ax = Bx$$

ise A operatörüne B operatörünün genişlemesi denir. Böyle bir durumda B operatörüne A operatörünün $D(B)$ ye kısıtlanışı da denir.

Tanım 1.5. $[a,b]$ aralığında tanımlı sonlu değerli $f(x)$ fonksiyonu verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $[a,b]$ ye ait olan ve $\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$ koşulunu sağlayan keyfi sonlu sayıda ikişerli ayrık $\{(a_k, b_k)\}$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna $[a,b]$ kapalı aralığında mutlak süreklidir denir. $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olan fonksiyonlar uzayı $AC[a,b]$ sembolü ile gösterilir.

Tanım1.6. (a,b) aralığında tanımlı f fonksiyonunun $k = \overline{0, n-1}$ için $f^{(k)} \in AC[a,b]$ ve $f^{(n)} \in L_2[a,b]$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev Uzayı denir ve $W_2^n[a,b]$ ile gösterilir.

Tanım 1.7. $a \leq x \leq b$ olmak üzere $L_2[a,b]$ uzayı,

$$L_2[a,b] = \left\{ f(x) : \quad \int_a^b [f(x)]^2 \, dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda iç çarpım ise

$$< f, g > = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

biçimindedir.(reel değerli fonksiyonlar olduğu durumda $\overline{g(x)} = g(x)$ olarak alınır.)

Tanım 1.8. $L : D(L) \subset W_2^1[0,\pi] \to W_2^1[0,\pi]$ diferansiyel operatörü verilmiş olsun. $\forall y, z \in D(L)$ için

$$< Ly, z > = < y, Lz >$$

oluyorsa L operatörüne Hermitian operatör, $\overline{D(L)} = W_2^1[0,\pi]$ ise L Hermitian operatörüne Simetrik operatör denir.

Tanım 1.9. $< Ly, z > = < y, L^* z >$ eşitliğini sağlayan L^* operatörüne L nin adjoint operatörü denir.

Simetrik adjoint operatör self-adjoint operatördür. Buradan $L = L^*$ dır.

Tanım 1.10. n. mertebeden bir lineer diferansiyel ifade

$$\ell(y) = p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y$$

formundadır. Burada $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları, n sayısına da mertebesi denir.

Tanım 1.11. λ gerçel (veya karmaşık) parametre

$$\ell(y) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)\, y, \quad x \in [a,b]$$

diferansiyel ifade olmak üzere

$$\ell(y) - \lambda \rho(x)\, y = 0 \tag{1.1}$$

denkleminin

$$\begin{cases} U(y) = A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ V(y) = A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

sınır koşullarının sağladığı çözümün bulunması problemine Sturm-Liouville sınır değer problemi denir. Burada A_1,B_1,A_2, B_2 reel sabitler olup $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$ koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca $p(x)$, $q(x)$ ve $\rho(x)$ reel değerli fonksiyonlardır.

(1.1)-(1.2) sınır değer probleminde

$a)$ $\forall x \in [a,b]$ için $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$

$b)$ $p'(x)$, $q(x)$ ve $\rho(x)$ $[a,b]$ aralığında süreklidir.

$c)\ -\infty < a < b < +\infty$

koşullarının hepsi birden sağlanırsa problem Regüler Sturm-Liouville, koşullardan en az biri sağlanmazsa problem Singüler Sturm-Liouville sınır değer problemi adını alır.

$\rho(x) > 0 \quad f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x \in [a,b]$ aralığında tanımlanmış ve sürekli fonksiyonlar olsun. O halde

$$< f, g >_\rho = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \, dx$$

büyüklüğüne $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre iç çarpımı denir.

Burada özel olarak $\rho(x) = 1$ alınırsa iç çarpım

$$< f, g > = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

şekline dönüşür.

Tanım 1.12. (1.1) diferansiyel denklemi ve (1.2) sınır koşulları tarafından üretilen lineer operatör L olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ çözümü varsa λ ya L operatörünün özdeğeri, y çözümüne de λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 1.13. $(L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne L operatörünün Resolvent operatörü denir.

Tanım 1.14. $(L - \lambda I)^{-1}$ in tüm $L_2[0,\pi]$ de mevcut ve sınırlı olduğu $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün regüler noktası denir. Tüm regüler noktalarının kümesine resolvent küme denir ve $\rho(L)$ ile gösterilir.

Tanım 1.15.

I) $(L-\lambda I)^{-1}$ in mevcut olmadığı λ noktalarının kümesine L operatörünün noktasal spektrumu veya özdeğerler kümesi denir. Noktasal spektrum

$$\sigma(L)=\{\lambda\colon Ly=\lambda y, y\in D(L)\}$$

ile gösterilir. Buradan

$$\sigma(L)=\mathbb{C}\backslash\rho(L)$$

dır.

II) $(L-\lambda I)^{-1}$ mevcut olup, yoğun kümede tanımlı ve sınırlı olmayacak şekildeki λ ların kümesine sürekli spektrum denir.

III) $(L-\lambda I)^{-1}$ mevcut, fakat yoğun olmayan kümede tanımlı λ ların kümesine rezidü spektrum denir.

Teorem 1.16. λ_1,λ_2, L self-adjoint operatörünün iki özdeğeri olsun. Bu özdeğerlere karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$, $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir, yani

$$\int_a^b y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx=0$$

İspat. $f\in D(L)$ olsun. L self-adjoint olduğundan $L=L^*$ dır. Dolayısıyla

$$<Lf,g>=<f,Lg>$$

yazılabilir.

$$\int_a^b Lf(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)Lg(x)dx$$

Burada $f(x)=y(x,\lambda_1)$, $g(x)=y(x,\lambda_2)$ alınırsa ve

$$\begin{aligned} Lf &= Ly(x,\lambda_1)=\lambda_1 y(x,\lambda_1) \\ Lg &= Ly(x,\lambda_2)=\lambda_2 y(x,\lambda_2) \end{aligned}$$

eşitlikleri göz önünde bulundurulursa

$$\int_a^b \lambda_1 y(x,\lambda_1) y(x,\lambda_2) dx = \int_a^b y(x,\lambda_1)\lambda_2 y(x,\lambda_2) dx$$

olur. Buradan

$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b y(x,\lambda_1) y(x,\lambda_2) dx = 0$ ve $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ olduğundan

$$\int_a^b y(x,\lambda_1) y(x,\lambda_2) dx = 0$$

elde edilir.

Teorem 1.17. L operatörünün özdeğerleri reeldir.

İspat. Özdeğerler reel olmasın Yani λ özdeğeri kompleks olsun. $q(x)$ fonksiyonu ve h, H sayıları reel olduğundan $\lambda = u + iv$ özdeğer olduğundan $\overline{\lambda} = u - iv$ de L nin özdeğerleridir. λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonuna $y(x,\lambda)$, $\overline{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonuna $\overline{y(x,\lambda)}$ denirse Teorem1.16 dan $y(x,\lambda)$ ve $\overline{y(x,\lambda)}$ özfonksiyonları ortogonaldir.

$$\int_a^b y(x,\lambda)\overline{y(x,\lambda)} dx = \int_a^b |y(x,\lambda)|^2 dx = 0$$

Böylece $y(x,\lambda) \equiv 0$ olur. Bu da $y(x,\lambda)$ nın özfonksiyon olması ile çelişir. O halde kabul yanlıştır; yani λ reeldir.

Tanım 1.18. $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $\{y(x,\lambda_n)\}$ ler de bu özdeğerlere karşılık gelen özonksiyonlar olsunlar.

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x,\lambda_n) dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 1.19. $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine L operatörünün spektral karakteristikleri denir.

Tanım 1.20. a bir sabit $K(x,y)$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq x$ bölgesinde ve $f(x)$ ise $0 \leq x \leq a$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,y)\, u(y)\, dy$$

şeklindeki denkleme Volterra integral denklemi denir.

Tanım 1.21. E lineer topolojik uzay olsun.E_1, $E_2 \subset E$ kapalı alt uzayları olmak üzere $A : E \to E_2$, $B : E \to E_1$ tanımlı lineer operatörleri verilsin.

X ise E de tanımlanmış $X : E_1 \to E_2$ terse sahip lineer operatör olsun. Eğer

I) X operatörü E_1 uzayında ve X^{-1} operatörü E_2 uzayında sürekli,

II) $AX = XB$ veya $A = XBX^{-1}$ eşitlikleri doğru

koşulları sağlanırsa X operatörüne A ve B operatörler çifti için çevirme operatörü denir.

Lemma 1.22. B operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu $\varphi_\lambda \in E_1$ olsun. Eğer

$$B\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$$

ise X çevirme operatörü olmak üzere A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu

$$\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$$

dır.

İspat. X çevirme operatörü olduğundan

$$AX = XB$$

dir.

$$A\psi_\lambda = AX\varphi_\lambda = XB\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

olur.

II. BÖLÜM
TERS PROBLEMLER

Bu bölümde spektral teoride yapılan çalışmalar ışığında " Süreksiz Katsayılı Difüzyon Denkleminin İntegral Gösterilimi " konulu yüksek lisans tezimde izlenilecek yol hakkında bilgi verilecektir.

L şeklindeki diferansiyel operatör verildiğinde onun $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral karakteristiklerinin bulunması problemine Düz Problem ve tersine eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ veya $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$,$\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri belli asimptotlara sahip diziler ise bu diziler hangi L biçimindeki operatörün spektral karakteristikleridir şeklinde verilen probleme ise Ters (inverse) Problem denir.

İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı Birkoff tarafından incelenmiştir.Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Rietsz, Neumann, Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan(artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q\left(x\right)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q\left(x\right)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar, 1949 yılında Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular Courant, Carleman, Birman, Salamyak, Maslov, Keldish vs. matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörlerin spektral analizinde önemli bir yere sahiptir ve de fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma Ambartsumyan'a aittir. 1929 yılında Ambartsumyan tarafından Sturm-Liouville operatörleri için ters problemler ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 2.1. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ 'ler

$$\begin{cases} y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2, (n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi Borg' a aittir ve elde ettiği sonuç, aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 2.2. $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ 'ler (2.1) diferansiyel denklemi ve

$$\begin{cases} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

sınır koşulları ile verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n, ...$ 'ler ise (2.1) diferansiyel denklemi ve

$$\begin{cases} y'(0) - h_1 y(0) = 0 \\ y'(\pi) + H y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.2'}$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri, $q(x)$ fonksiyonu ve h, h_1, ve H sayılarını tek olarak belirtir ($h \neq h_1$ ve h, h_1, H sonlu gerçel sayılardır).

Borg' un (1945) çalışmasında, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilir ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirlenir. Yani bu tip operatörün varlığı önceden kabul edilir. Borg aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, Ambartsumyan' ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Çevirme operatörü kavramı operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde Delsarte, Lions (1938), (1956) ve Levitan, Gasimov (1964) tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm opertörünün yapısını ilk olarak Povzner (1948) kendi çalışmalarında incelemiştir.

Aralığın iç noktasında singülariteye ve süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler, Amirov ve Yurko (2001) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $x = 0$ noktasında singülariteye sahip self-adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralığın iç noktasında çözümün süreksizliğe sahip olduğu durumu incelenmiştir ve verilen operatörün spektral özellikleri ve bu spektral özelliklere göre ters problemin konumu ve çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Benzer şekilde Amirov (2002) çalışmasında self-adjoint olmayan, Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahip olduğu durum incelenmiştir. Burada verilen diferansiyel operatörü üreten diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışları, operatörün spektral özellikleri, spektrumu basit olduğu durumda yani yalnızca özdeğerlerden oluştuğu durumda, özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon ve koşulmuş fonksiyonlara göre operatörün ayrılışımı, spektral parametrelere göre ters problemin konumu ve bu ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Amirov' un (2006) çalışmasında, sonlu aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörler sınıfı için çevirme operatörü, çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri, spektral karakteristiklerinin bazı özellikleri ve ters problem için teklik teoremleri öğrenilmiştir.

Guseinov G.Sh. (1984) çalışmasında,

$p(x) \in W_2^1(0,\pi)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ olmak üzere

$$-y'' + [2\lambda p(x) + q(x)]\, y = \lambda^2 y$$

regüler diferansiyel denklemini ele almıştır. $f_\nu(0,\lambda) = 1, \quad f'_\nu(0,\lambda) = \lambda w_\nu,$

$w_\nu = (-1)^{v+1} i \ (\nu = 1,2)$ başlangıç koşullarını sağlayan $f_\nu(x,\lambda)$ çözümleri için

$$f_\nu(x,\lambda) = R_\nu(x)\, e^{\lambda w_\nu x} + \int_{-x}^{x} A_\nu(x,t)\, e^{\lambda w_\nu t} dt$$

şeklinde gösterimin varlığını ispatlamıştır ve $R_\nu(x)$ fonksiyonu ve $A_\nu(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun sağladığı aşağıdaki özellikleri elde etmiştir:

$$R_\nu(x) = e^{-w_\nu \beta(x)}, \qquad \beta(x) = \int_0^x p(t)\, dt$$

$$A_\nu(x,x) = \frac{1}{2}\left\{ w_\nu p(x) + \int_0^x [q(t) + p^2(t)]\, dt \right\} e^{-w_\nu \beta(x)}$$

$$A_\nu(x,-x) = \frac{1}{2} w_\nu p(0)\, e^{w_\nu \beta(x)}$$

$$|A_\nu(x,t)| \le \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right)[1 + \sigma(x)]\, e^{\sigma^2(x)}$$

$$w_\nu(u) = \max_{0 \le \xi \le u}\left(\left| \int_0^\xi q(t)\, R_\nu(t)\, dt \right| + |p(\xi)\, R_\nu(\xi)| \right)$$

$$\sigma(x) = \int_0^x [(x-t)\,|q(t)| + 2\,|p(t)|]\, dt$$

Ayrıca $A_\nu(x,t)$ fonksiyonları x ve t değişkenlerine göre $\left[-a^{'},a^{'}\right]$ aralığında ikinci mertebeden türevlenebilir ve bu türevler de $L_2\left[-a^{'},a^{'}\right]$ sınıfındandır, ve aşağıdaki denklemi sağlamaktadır.

$$\frac{\partial^2 A_\nu(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_\nu(x,t)}{\partial t^2}=q(x)\,A_\nu(x,t)+2w_\nu p(x)\frac{\partial A_\nu(x,t)}{\partial t}.$$

Akhmedova (2002) çalışmasında $q(x)\in L_2(0,\pi)\,,\ 0<\alpha\neq 1$ için

$$\rho(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a\\ \alpha^2, & a<x\le\pi\end{cases}\quad \text{olmak üzere}$$

$$-y''+q(x)\,y=\lambda^2\rho(x)\,y,\quad 0\le x\le\pi$$

süreksizlik katsayısına sahip Singüler Sturm-Liouville denkleminde $e(0,\lambda)=1$, $e'(0,\lambda)=i\lambda$ başlangıç koşullarını sağlayan $e(x,\lambda)$ çözümü için

$$e(x,\lambda)=e_o(x,\lambda)+\int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)}K(x,t)\,e^{i\lambda t}dt$$

şeklinde gösterimin varlığını ispatlamıştır ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun aşağıdaki özelliklerini elde etmiştir:

a) $\dfrac{d}{dx}K(x,\mu^+(x))=\dfrac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)q(x)$

b) $\dfrac{d}{dx}\left\{K(x,\mu^-(x)+0)-K(x,\mu^-(x)-0)\right\}=\dfrac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)q(x)$

c) $K(x,-\mu^+(x))=0$

d) $\rho(x)\,K''_{tt}-K''_{xx}+q(x)\,K=0,\qquad 0\le x\le\pi,\qquad |t|<\mu^+(x)$

e) $\displaystyle\int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)}|K(x,t)|\,dt\le C\left(\exp\left\{\int_0^x|q(t)|\,dt\right\}-1\right)\quad 0<C=\text{sabit}$

Burada $K(x;.)\in L_1(-\mu^+(x),\mu^+(x))$ dır.

Bu tez çalışmasında, Guseinov G.Sh. (1984) ve Akhmedova'nın (2002) çalışmalarından farklı olarak diferansiyel denklem,

$$-y''+[2\lambda p(x)+q(x)]\,y=\lambda^2\rho(x)\,y,\quad 0\le x\le\pi,$$

biçiminde ele alınacaktır, yani süreksiz katsayılı difüzyon denklem incelenecektir.

Burada λ kompleks parametre $p(x) \in W_2^1(0,\pi)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$,ve

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a \\ \alpha^2, & a < x \leq \pi \end{cases} \quad 0 < \alpha \neq 1 \text{ şeklindedir.}$$

Bu singüler diferansiyel denklem için konulan başlangıç değer probleminin çözümünün bir integral gösterilimi verilecek ve bu integral denklemin çekirdeğinin varlığı ve sağladığı özellikler elde edilecektir.

III. BÖLÜM
SÜREKSİZ KATSAYILI DİFÜZYON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN İNTEGRAL GÖSTERİLİMİ

Burada süreksiz katsayılı difüzyon denkleminin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri için integral gösterilimleri elde edilmiş ve çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri öğrenilmiştir.

Süreksiz katsayılı difüzyon denklemin çözümünün integral gösterilimi.

$0 \leq x \leq \pi$ aralığında

$$-y'' + [2\lambda p(x) + q(x)]\, y = \lambda^2 \rho(x)\, y, \tag{3.1}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada

$$p(x) \in W_2^1(0,\pi),\, q(x) \in L_2(0,\pi), \tag{3.2}$$

λ kompleks parametre, $\rho(x)$ parçalı sabit fonksiyon:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a \\ \alpha^2, & a < x \leq \pi \end{cases}, 0 < \alpha \neq 1. \tag{3.3}$$

Marchenko (1977)' e göre, $\rho(x) = 1$ olduğunda (3.1) denklemi

$$e(0,\lambda) = 1,\ e'(0,\lambda) = i\lambda \tag{3.4}$$

başlangıç koşullarını sağlayan "üçgensel" şeklinde gösterime sahip

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\lambda t} dt$$

bir tek çözümüne sahiptir.

Bu alt bölümde (3.1)-(3.4) probleminin çözümünün gösterilimi ile ilgili aşağıdaki teorem ispatlanacaktır. Öyleki bu teorem, $\rho(x)$ fonksiyonunun verilen problemin çözümünü nasıl etkilediğini, dolayısıyla bu durumda "üçgensellik" kavramının geçerli olmadığını gösterecektir.

Teorem 3.1. Eğer (3.2) ve(3.3) koşulları sağlanıyorsa o halde tüm λ'lar için (3.1) denkleminin (3.4) koşullarını sağlayan ve

$$e(x,\lambda) = e_0(x,\lambda) + \int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} K(x,t)\, e^{i\lambda t} dt \tag{3.5}$$

gösterimine sahip bir tek $e(x,\lambda)$ çözümü vardır. Burada $\alpha^{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\alpha}\right)$ ve $\nu = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le a \\ 2, & a < x \le \pi \end{cases}$ olmak üzere

$$\mu^{\pm}(x) = \pm\sqrt{\rho(x)}x + a\left(1 \mp \sqrt{\rho(x)}\right) \tag{3.6}$$

$$e_0(x,\lambda) = \begin{cases} R_1(x)\, e^{i\lambda x}, & 0 \le x \le a \\ \alpha^+ R_2(x)\, e^{i\lambda(\alpha x - \alpha a + a)} + \alpha^- R_3(x)\, e^{i\lambda(-\alpha x + \alpha a + a)}, & a < x \le \pi \end{cases}$$

veya

$$e_0(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right) R_\nu(x)\, e^{i\lambda\mu^+(x)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right) R_3(x)\, e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

şeklindedir. Ayrıca $K(x,\cdot)$ çekirdeği $L_1(-\mu^+(x), \mu^+(x))$ uzayının elemanıdır. $K(x,t)$ fonksiyonu sürekli, $t \ne \mu^-(x)$ olduğu bölgede $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}$ kısmi türevlere sahiptir ve aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

a) $$\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} |K(x,t)|\, dt \le C\left(e^{\int_0^x [(x-t)|q(t)| + 2|p(t)|]dt} - 1\right), \quad 0 < C\text{-sabit}. \tag{3.7}$$

b) $$\frac{d}{dx} K(x,\mu^+(x)) + \frac{i}{\sqrt{\rho(x)}} p(x)\, K(x,\mu^+(x))$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\left[\frac{i}{\sqrt{\rho(x)}} p'(x) + q(x) + \frac{1}{\rho(x)} p^2(x)\right] e^{\frac{i}{\sqrt{\rho(x)}}\int_0^x p(t)dt} \tag{3.8}$$

c) $$\frac{d}{dx}\left\{K(x,\mu^-(x) - 0) - K(x,\mu^-(x) + 0)\right\} -$$

$$-\frac{i}{\sqrt{\rho(x)}} p(x)\left\{K(x,\mu^-(x) - 0) - K(x,\mu^-(x) + 0)\right\}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\left[-\frac{i}{\sqrt{\rho(x)}}p'(x)+q\left(x\right)+\frac{1}{\rho(x)}p^2(x)\right]e^{-\frac{i}{\sqrt{\rho(x)}}\int\limits_0^x p(t)dt} \qquad (3.9)$$

d) $$\frac{d}{dx}K\left(x,-\mu^{+}\left(x\right)\right)-\frac{i}{2\sqrt{\rho(x)}}p\left(x\right)K\left(x,-\mu^{+}\left(x\right)\right)=0 \qquad (3.10)$$

Eğer $p\left(x\right)\in W_2^1\left(0,\pi\right), q\left(x\right)\in W_2^1\left(0,\pi\right)$ ise $K\left(x,t\right)$ fonksiyonu hemen hemen heryerde aşağıdaki denklemi sağlamaktadır:

e) $$\frac{\partial^2 K\left(x,t\right)}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 K\left(x,t\right)}{\partial t^2}-2ip\left(x\right)\frac{\partial K\left(x,t\right)}{\partial t}-q\left(x\right)K\left(x,t\right)=0 \qquad (3.11)$$

Teoremin ispatını aşağıdaki aşamalarla yapalım.

3.1.1. (3.1)-(3.4) probleminin $p\left(x\right)\equiv 0\equiv q\left(x\right)$ durumundaki çözümü.

İlk önce $p\left(x\right)\equiv 0\equiv q\left(x\right)$ durumunu inceleyelim ve bu durumda (3.1)-(3.4) probleminin $e_0\left(x,\lambda\right)$ çözümünü kuralım.

$p\left(x\right)\equiv 0\equiv q\left(x\right)$ durumunda (3.1) denklemi

$$-y''=\lambda^2\rho\left(x\right)y, \qquad (3.12)$$

veya

$$-y''=\lambda^2 y, \quad 0\leq x\leq a, \qquad (3.13)$$

$$-y''=\lambda^2\alpha^2 y, \quad a<x\leq\pi \qquad (3.13')$$

şeklinde olur.

$0\leq x\leq a$ iken $e_0\left(x,\lambda\right)$ çözümü olarak $e_0\left(x,\lambda\right)=e^{i\lambda x}$, $a<x\leq\pi$ iken ise (3.13′) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturan $e^{i\lambda\alpha x}$, $e^{-i\lambda\alpha x}$ çözümlerinin lineer kombinasyonunu alırsak:

$$e_0\left(x,\lambda\right)=\begin{cases} e^{i\lambda x}, & 0\leq x\leq a \\ c_1 e^{i\lambda\alpha x}+c_2 e^{-i\lambda\alpha x}, & a<x\leq\pi \end{cases}$$

olur.

$x=a$ noktasını inceleyelim. $e_0\left(a-0,\lambda\right)=e_0\left(a+0,\lambda\right)$ ve $e_0'\left(a-0,\lambda\right)=e_0'\left(a+0,\lambda\right)$ koşulları sağlandığında (3.12) denkleminin çözümünün ve onun birinci mertebeden türevinin sürekliliğini elde etmiş oluruz. c_1 ve c_2 sabitlerini bu koşullardan yararlanarak elde edilirse,

$$e_0(x,\lambda)=\begin{cases} e^{i\lambda x}, & 0\le x\le a \\ \alpha^+e^{i\lambda(\alpha x-\alpha a+a)}+\alpha^-e^{i\lambda(-\alpha x+\alpha a+a)}, & a<x\le\pi \end{cases} \tag{3.14}$$

veya

$$e_0(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

şeklinde bulunur.

3.1.2. (3.1)-(3.4) probleminin $e(x,\lambda)$çözümü için integral denklem.

(3.1) denklemini

$$y''+\lambda^2\rho(x)y=f(x), \tag{3.15}$$

şeklinde yazalım. Burada $f(x)=(2\lambda p(x)+q(x))\,y$ dir. Denklemin sağ tarafını bilinen fonksiyon alarak sabitlerin değişimi yöntemini uygulayarak $e(x,\lambda)$ fonksiyonu için integral denklem elde etmeye çalışalım. Bunun için $e(x,\lambda)$ fonksiyonunu

$$e(x,\lambda)=c_1(x)e_0(x,\lambda)+c_2(x)e_0(x,-\lambda) \tag{3.16}$$

şeklinde arayalım.

(3.16) fonksiyonunu diferansiyellersek ve $c_1'(x)e_0(x,\lambda)+c_2'(x)e_0(x,-\lambda)=0$ olduğunu kabul edersek

$$e(x,\lambda)=c_1(x)e_0'(x,\lambda)+c_2(x)e_0'(x,-\lambda),$$

$$e''(x,\lambda)=c_1'(x)e_0'(x,\lambda)+c_2'(x)e_0'(x,-\lambda)+c_1(x)e_0''(x,\lambda)+c_2(x)e_0''(x,-\lambda)$$

elde edilir.

$e(x,\lambda)$ ve $e''(x,\lambda)$ fonksiyonlarının ifadeleri (3.15) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$c_1'(x)e_0'(x,\lambda)+c_2'(x)e_0'(x,-\lambda)+c_1(x)e_0''(x,\lambda)+c_2(x)e_0''(x,-\lambda)+$$

$$+\lambda^2\rho(x)\left[c_1(x)e_0(x,\lambda)+c_2(x)e_0(x,-\lambda)\right]=f(x)$$

olur.

$e_0(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.12) denkleminin çözümü olduğundan $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ için aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} c_1'(x)e_0(x,\lambda)+c_2'(x)e_0(x,-\lambda)=0 \\ c_1'(x)e_0'(x,\lambda)+c_2'(x)e_0'(x,-\lambda)=f(x). \end{cases} \tag{3.17}$$

(3.17) sisteminin esas matrisinin determinantı $e_0(x,\lambda)$, $e_0(x,-\lambda)$ fonksiyonlarının Wronski determinantıdır ve bu determinant x'e bağlı değildir, yani

$$\Delta=\begin{vmatrix} e_0(x,\lambda) & e_0(x,-\lambda) \\ e_0'(x,\lambda) & e_0'(x,-\lambda) \end{vmatrix}=W\left[e_0(x,\lambda),e_0(x,-\lambda)\right]_{x=0}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i\lambda & -i\lambda \end{vmatrix}=-2i\lambda$$

şeklindedir.

(3.17) sisteminden $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonları için

$$c_1(x)=c_1^0+\int_0^x \frac{f(t)e_0(t,-\lambda)}{2i\lambda}dt,\quad c_2(x)=c_2^0-\int_0^x \frac{f(t)e_0(t,\lambda)}{2i\lambda}dt \tag{3.18}$$

ifadeleri elde edilir. (3.18)'i (3.16)'da yerlerine yazarsak,

$$e(x,\lambda)=\left[c_1^0+\int_0^x \frac{f(t)e_0(t,-\lambda)}{2i\lambda}dt\right]e_0(x,\lambda)+\left[c_2^0-\int_0^x \frac{f(t)e_0(t,\lambda)}{2i\lambda}dt\right]e_0(x,-\lambda)$$

eşitliği elde edilir. Buradanda (3.4) şartının sağlanması için $c_1^0=1$, $c_2^0=0$ olarak alınması gerekmektedir. Sonuçta $e(x,\lambda)$çözümü için

$$e(x,\lambda)=e_0(x,\lambda)+\int_0^x \frac{e_0(x,\lambda)e_0(t,-\lambda)-e_0(x,-\lambda)e_0(t,\lambda)}{2i\lambda}\left(2\lambda p(t)+q(t)\right)e(t,\lambda)\,dt \tag{3.19}$$

integral denklemini elde edilmiş olunur.

$$\Phi(x,t,\lambda)=\frac{e_0(x,\lambda)e_0(t,-\lambda)-e_0(x,-\lambda)e_0(t,\lambda)}{2i\lambda}$$

olarak alalım. O halde (3.19) denklemi

$$e(x,\lambda) = e_0(x,\lambda) + \int_0^x \Phi(x,t,\lambda)(2\lambda p(t) + q(t))\, e(t,\lambda)\, dt \tag{3.20}$$

şeklinde olur.

Kolayca görülebilinir ki (3.19) eşitliği ile belirlenen $e(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.1) denkleminin (3.4) koşullarını sağlayan çözümüdür.

3.1.3. (3.20) denkleminin çekirdeği için integral gösterilim.

(3.1) denkleminin

$$s_0(x,\lambda) = \frac{e_0(x,\lambda) - e_0(x,-\lambda)}{2i\lambda},\ c_0(x,\lambda) = \frac{e_0(x,\lambda) + e_0(x,-\lambda)}{2}$$

çözümlerini gözönünde bulunduralım.

(3.4)'den açıktırki $s_0(x,\lambda)$ ve $c_0(x,\lambda)$ çözümleri $p(x) \equiv 0 \equiv q(x)$ iken $s_0(0,\lambda) = c_0'(0,\lambda) = 0,\ s_0'(0,\lambda) = c_0(0,\lambda) = 1$ başlangıç koşullarını sağlamaktadır ve açıktır ki

$$\Phi(x,t,\lambda) = s_0(x,\lambda)\, c_0(t,\lambda) - s_0(t,\lambda)\, c_0(x,\lambda) \tag{3.21}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi $s_0(x,\lambda)$ ve $c_0(x,\lambda)$ çözümlerini belirleyelim.

$0 \leq x \leq a$ durumu için;

$-y'' = \lambda^2 y$ ise $y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$

$y(0,\lambda) = 0 \Rightarrow c_1 = 0,\ y'(0,\lambda) = 0 \Rightarrow c_2 = \dfrac{1}{\lambda}$ olduğundan

$$s_0(x,\lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$$

ve

$y(0,\lambda)=1 \Rightarrow c_1=1,\ y'(0,\lambda)=0 \Rightarrow c_2=0$ olduğundan

$$c_0(x,\lambda)=\cos\lambda x$$

şeklinde bulunur.

$a<x\leq\pi$ durumu ve $s_0(x,\lambda)$ için;

$-y''=\lambda^2\alpha^2 y$ ise $y=c_1\cos\lambda\alpha x+c_2\sin\lambda\alpha x$ bulunur. Dolayısıyla $x=a$ noktasındaki süreklilik koşullarından,

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\lambda a}{\lambda}=c_1\cos\lambda\alpha a+c_2\sin\lambda\alpha a \\ \cos\lambda a=-c_1\lambda\alpha\sin\lambda\alpha a+c_2\lambda\alpha\cos\lambda\alpha a \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülecek olursa,

$$\begin{aligned} c_1\alpha &= \frac{\alpha\sin\lambda a\cos\lambda\alpha a-\cos\lambda a\sin\lambda\alpha a}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\alpha\sin\lambda a(\alpha+1)-(\alpha+1)\sin\lambda\alpha a\cos\lambda a\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\alpha\sin\lambda a(\alpha+1)-\frac{1}{2}(\alpha+1)\sin\lambda a(\alpha+1)+\sin\lambda a(\alpha-1)\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2}(\alpha-1)\sin\lambda a(\alpha+1)-\frac{1}{2}(\alpha+1)\sin\lambda a(\alpha-1)\right] \\ c_1 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\sin\lambda a(\alpha+1)}{\lambda}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\sin\lambda a(\alpha-1)}{\lambda} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c_2\alpha &= \frac{\alpha\sin\lambda\alpha a\sin\lambda a+\cos\lambda\alpha a\cos\lambda a}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left\{\alpha\cos\lambda a(\alpha-1)-(\alpha-1)\cos\lambda\alpha a\cos\lambda a\right\} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left\{\alpha\cos\lambda a(\alpha-1)-\frac{1}{2}(\alpha-1)\left[\cos\lambda a(\alpha+1)+\cos\lambda a(\alpha-1)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2}(\alpha+1)\cos\lambda a(\alpha-1)-\frac{1}{2}(\alpha-1)\cos\lambda a(\alpha+1)\right] \\ \Rightarrow c_2 &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\cos\lambda a(\alpha-1)}{\lambda}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\cos\lambda a(\alpha+1)}{\lambda} \end{aligned}$$

sabitleri alınır. Bu sabitler yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
s_0(x,\lambda) &= c_1\cos\lambda\alpha x + c_2\sin\lambda\alpha x \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\sin\lambda a(\alpha+1)\cos\lambda\alpha x}{\lambda} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\sin\lambda a(\alpha-1)\cos\lambda\alpha x}{\lambda} \\
&+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\cos\lambda a(\alpha-1)\sin\lambda\alpha x}{\lambda} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\cos\lambda a(\alpha+1)\sin\lambda\alpha x}{\lambda} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\sin\lambda\left[\alpha x - a\alpha + a\right]}{\lambda} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\sin\lambda\left[-\alpha x + a\alpha + a\right]}{\lambda}
\end{aligned}
$$

çözümü elde edilmiş olur. Benzer şekilde $c_0(x,\lambda)$ için;

$$
\begin{cases}
\cos\lambda a = c_1\cos\lambda\alpha a + c_1\sin\lambda\alpha a \\[2ex]
-\lambda\sin\lambda a = -c_1\lambda\alpha\sin\lambda\alpha a + c_2\lambda\alpha\cos\lambda\alpha a
\end{cases}
$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülecek olursa

$$
\begin{aligned}
c_1\alpha &= \alpha\cos\lambda a\cos\lambda\alpha a + \sin\lambda a\sin\lambda\alpha a \\
&= \alpha\cos\lambda a(\alpha+1) + (\alpha+1)\sin\lambda a\sin\lambda\alpha a \\
&= \alpha\cos\lambda a(\alpha+1) + \frac{1}{2}(\alpha+1)\left[\cos\lambda a(\alpha-1) - \cos\lambda a(\alpha+1)\right] \\
\Rightarrow c_1 &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda a(\alpha-1) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda a(\alpha+1)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
c_2\alpha &= \alpha\cos\lambda a\sin\lambda\alpha a - \sin\lambda a\cos\lambda\alpha a \\
&= \alpha\sin\lambda a(\alpha+1) - (1+\alpha)\sin\lambda a\cos\lambda\alpha a \\
\Rightarrow c_2 &= \sin\lambda a(\alpha+1) - \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{2}\left[\sin\lambda a(1+\alpha) - \sin\lambda a(\alpha-1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\sin\lambda a(\alpha+1) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\lambda a(\alpha-1)
\end{aligned}
$$

sabitleri alınır. Bu sabitler yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
c_0(x,\lambda) &= c_1\cos\lambda\alpha x + c_2\sin\lambda\alpha x \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda a(\alpha-1)\cos\lambda\alpha x + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda a(\alpha+1)\cos\lambda\alpha x \\
&+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\sin\lambda a(\alpha+1)\sin\lambda x + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\lambda a(\alpha-1)\sin\lambda\alpha x
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda\left[\alpha x-\alpha a+a\right]+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda\left[-\alpha x+\alpha a+a\right]$$

çözümü elde edilmiş olur.

O halde $p(x) \equiv 0 \equiv q(x)$ durumunda ve $\alpha^{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\alpha}\right)$ olmak üzere

$$c_0(x,\lambda) = \\ = \begin{cases} \cos\lambda x, & 0 \le x \le a \\ \alpha^{+}\cos\lambda\left(\alpha x-\alpha a+a\right)+\alpha^{-}\cos\lambda\left(-\alpha x+\alpha a+a\right), & a < x \le \pi \end{cases} \quad (3.22)$$

$$s_0(x,\lambda) = \\ = \begin{cases} \frac{\sin\lambda x}{\lambda}, & 0 \le x \le a \\ \alpha^{+}\frac{\sin\lambda\left(\alpha x-\alpha a+a\right)}{\lambda}+\alpha^{-}\frac{\sin\lambda\left(-\alpha x+\alpha a+a\right)}{\lambda}, & a < x \le \pi \end{cases} \quad (3.23)$$

buradanda (3.3) ve (3.6) gözönünde bulundurularak

$$c_0(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\frac{\sin\lambda\mu^{+}(x)}{\lambda}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\frac{\sin\lambda\mu^{-}(x)}{\lambda},$$

$$s_0(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\cos\lambda\mu^{+}(x)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\cos\lambda\mu^{-}(x)$$

ifadeleri elde edilir.

(3.22) ve (3.23), (3.21) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$t \le x \le a$ iken,

$$\Phi(x,t,\lambda) = \cos\lambda t\frac{\sin\lambda x}{\lambda}-\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\cos\lambda x = \frac{\sin\lambda\left(x-t\right)}{\lambda}$$

$t \le a < x$ iken,

$$\Phi(x,t,\lambda) = \cos\lambda t\left[\alpha^{+}\frac{\sin\lambda\left(\alpha x-\alpha a+a\right)}{\lambda}+\alpha^{-}\frac{\sin\lambda\left(-\alpha x+\alpha a+a\right)}{\lambda}\right] \\ -\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\left[\alpha^{+}\cos\lambda\left(\alpha x-\alpha a+a\right)+\alpha^{-}\cos\lambda\left(-\alpha x+\alpha a+a\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha^{+}\frac{\sin\lambda\left(\alpha x-\alpha a+a\right)\cos\lambda t-\sin\lambda t\cos\lambda\left(\alpha x-\alpha a+a\right)}{\lambda}\\
&+\alpha^{-}\frac{\sin\lambda\left(-\alpha x+\alpha a+a\right)\cos\lambda t-\sin\lambda t\cos\lambda\left(-\alpha x+\alpha a+a\right)}{\lambda}\\
&= \alpha^{+}\frac{\sin\lambda\left(\alpha x-\alpha a+a-t\right)}{\lambda}+\alpha^{-}\frac{\sin\lambda\left(-\alpha x+\alpha a+a-t\right)}{\lambda}
\end{aligned}
$$

$a<t\leq x$ iken,

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(x,t,\lambda\right) &= \left[\alpha^{+}\cos\lambda\left(\alpha t-\alpha a+a\right)+\alpha^{-}\cos\lambda\left(-\alpha t+\alpha a+a\right)\right]\times\\
&\times\left[\alpha^{+}\frac{\sin\lambda\left(\alpha x-\alpha a+a\right)}{\lambda}+\alpha^{-}\frac{\sin\lambda\left(-\alpha x+\alpha a+a\right)}{\lambda}\right]\\
&-\left[\alpha^{+}\frac{\sin\lambda\left(\alpha t-\alpha a+a\right)}{\lambda}+\alpha^{-}\frac{\sin\lambda\left(-\alpha t+\alpha a+a\right)}{\lambda}\right]\times\\
&\times\left[\alpha^{+}\cos\lambda\left(\alpha x-\alpha a+a\right)+\alpha^{-}\cos\lambda\left(-\alpha x+\alpha a+a\right)\right]\\
&= \frac{\sin\lambda\alpha\left(x-t\right)}{\lambda\alpha}
\end{aligned}
$$

alınır. Dolayısıyla $\Phi\left(x,t,\lambda\right)$ fonksiyonu,

$$
\Phi\left(x,t,\lambda\right)=
$$

$$
=\begin{cases}
\dfrac{\sin\lambda\left(x-t\right)}{\lambda}, & t\leq x\leq a\\
\alpha^{+}\dfrac{\sin\lambda\left[\alpha x-\alpha a+a-t\right]}{\lambda}+\alpha^{-}\dfrac{\sin\lambda\left[-\alpha x+\alpha a+a-t\right]}{\lambda}, & t\leq a<x\\
\dfrac{\sin\lambda\alpha\left(x-t\right)}{\lambda\alpha}, & a<t\leq x
\end{cases}
\tag{3.24}
$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Diğer taraftan (3.1) denkleminin (3.4) başlangıç koşullarını sağlayan diğer bir çözümü

$$
e\left(x,\lambda\right)=e_0\left(x,\lambda\right)+\int_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K\left(x,t\right)e^{i\lambda t}dt \tag{3.25}
$$

şeklinde bir integral gösterilime sahiptir. Burada

$$
e_0\left(x,\lambda\right)=\begin{cases}
R_1\left(x\right)e^{i\lambda x}, & 0\leq x\leq a\\
\alpha^{+}R_2\left(x\right)e^{i\lambda(\alpha x-\alpha a+a)}+\alpha^{-}R_3\left(x\right)e^{i\lambda(-\alpha x+\alpha a+a)}, & a<x\leq\pi
\end{cases}
$$

veya

$$e_0(x,\lambda) = \frac{1}{2}R_\nu(x)\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)R_3(x)\,e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

biçimindedir.

(3.25) ifadesi (3.20) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$\frac{1}{2}R_\nu(x)\left(1+\tfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)} + \frac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)R_3(x)\,e^{i\lambda\mu^-(x)} + \int\limits_{-\mu^+(t)}^{\mu^+(t)} K(x,t)\,e^{i\lambda t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)} + \frac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

$$+\int\limits_0^x \Phi(x,t,\lambda)\left(2\lambda p(t)+q(t)\right)e_0(t,\lambda)\,dt$$

$$+\int\limits_0^x \Phi(x,t,\lambda)\left(2\lambda p(t)+q(t)\right)\int\limits_{-\mu^+(t)}^{\mu^+(t)} K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt \tag{3.26}$$

eşitliği alınır.

(3.25) ifadesi ile verilen $e(x,\lambda)$ fonksiyonunun (3.1) denklemini ve (3.4) koşullarını sağlaması için (3.26) eşitliğinin sağlanması gerekmektedir ve tersine eğer $K(x,t)$ fonksiyonu her $\lambda \in \mathbb{C}$ için (3.26) denklemini sağlarsa o halde $e(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.25) eşitliğini sağlar, yani (3.1) denklemini ve (3.4) koşullarını sağlayan çözümüdür.

$0 \le x \le a$ durumu için (3.26) denklemi,

$$R_1(x)\,e^{i\lambda x} + \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)\,e^{i\lambda t}dt = e^{i\lambda x} + \int\limits_0^x \Phi(x,t,\lambda)\left(2\lambda p(t)+q(t)\right)e(t,\lambda)\,dt$$

$$\left[R_1(x)-1\right]e^{i\lambda x} + \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)\,e^{i\lambda t}dt =$$

$$= \int\limits_0^x \Phi(x,t,\lambda)\left(2\lambda p(t)+q(t)\right)\left[R_1(t)\,e^{i\lambda t} + \int\limits_{-t}^{t} K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi\right]dt$$

$$
=\int_{0}^{x}\frac{\sin\lambda\left(x-t\right)}{\lambda}2\lambda p\left(t\right)R_{1}\left(t\right)e^{i\lambda t}dt+\int_{0}^{x}\frac{\sin\lambda\left(x-t\right)}{\lambda}q\left(t\right)R_{1}\left(t\right)e^{i\lambda t}dt
$$

$$
+\int_{0}^{x}\frac{\sin\lambda\left(x-t\right)}{\lambda}2\lambda p\left(t\right)\int_{-t}^{t}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda\xi}d\xi dt
$$

$$
+\int_{0}^{x}\frac{\sin\lambda\left(x-t\right)}{\lambda}q\left(t\right)\int_{-t}^{t}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda\xi}d\xi
$$

$$
=\int_{0}^{x}\left(\frac{e^{i\lambda(x-t)}-e^{-i\lambda(x-t)}}{2i}\right)2p\left(t\right)R_{1}\left(t\right)e^{i\lambda t}dt
$$

$$
+\int_{0}^{x}\left(\frac{e^{i\lambda(x-t)}-e^{-i\lambda(x-t)}}{2i\lambda}\right)q\left(t\right)R_{1}\left(t\right)e^{i\lambda t}dt
$$

$$
+\int_{0}^{x}\left(\frac{e^{i\lambda(x-t)}-e^{-i\lambda(x-t)}}{2i}\right)2p\left(t\right)\int_{-t}^{t}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda\xi}d\xi dt
$$

$$
+\int_{0}^{x}\left(\frac{e^{i\lambda(x-t)}-e^{-i\lambda(x-t)}}{2i\lambda}\right)q\left(t\right)\int_{-t}^{t}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda\xi}d\xi dt
$$

$$
=-i\int_{0}^{x}p\left(t\right)R_{1}\left(t\right)e^{i\lambda x}dt+i\int_{0}^{x}p\left(t\right)R_{1}\left(t\right)e^{i\lambda(-x+2t)}dt
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}q\left(t\right)R_{1}\left(t\right)\left(\frac{e^{i\lambda x}-e^{i\lambda(-x+2t)}}{i\lambda}\right)dt
$$

$$
-i\int_{0}^{x}p\left(t\right)\int_{-t}^{t}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda(x-t+\xi)}d\xi dt+i\int_{0}^{x}p\left(t\right)\int_{-t}^{t}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda(-x+t+\xi)}d\xi dt
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}q\left(t\right)\int_{-t}^{t}K\left(t,\xi\right)\left(\frac{e^{i\lambda(x-t+\xi)}-e^{i\lambda(-x+t+\xi)}}{i\lambda}\right)d\xi dt
$$

$$
=-i\int_{0}^{x}p\left(t\right)R_{1}\left(t\right)e^{i\lambda x}dt+i\int_{0}^{x}p\left(t\right)R_{1}\left(t\right)e^{i\lambda(-x+2t)}dt
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}q\left(t\right)R_{1}\left(t\right)\int_{-x+2t}^{x}e^{i\lambda u}dudt-i\int_{0}^{x}p\left(t\right)\int_{-t}^{t}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda(x-t+\xi)}d\xi dt
$$

$$+i\int_0^x p(t)\int_{-t}^{t} K(t,\xi)\, e^{i\lambda(-x+t+\xi)}d\xi dt+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\int_{-t}^{t} K(t,\xi)\int_{-x+t+\xi}^{x-t+\xi} e^{i\lambda u}dud\xi dt$$

şeklini alır. Son eşitliğin sol tarafındaki integraller değerlendirilecek olunursa;

$$I_1=i\int_0^x p(t)\, R_1(t)\, e^{i\lambda(-x+2t)}dt=\frac{i}{2}\int_{-x}^{x} p\left(\frac{x+t}{2}\right)R_1\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\, R_1(t)\int_{-x+2t}^{x} e^{i\lambda u}dudt=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^{(x+t)/2} q(u)\, R_1(u)\, due^{i\lambda t}dt$$

$$I_3=-i\int_0^x p(t)\int_{-t}^{t} K(t,\xi)\, e^{i\lambda(x-t+\xi)}d\xi dt=-i\int_{-x}^{x}\int_{(x-t)/2}^{x} p(u)\, K(u,t-x+u)\, due^{i\lambda t}dt$$

$$I_4=i\int_0^x p(t)\int_{-t}^{t} K(t,\xi)\, e^{i\lambda(-x+t+\xi)}d\xi dt=i\int_{-x}^{x}\int_{(x+t)/2}^{x} p(u)\, K(u,t+x-u)\, due^{i\lambda t}dt$$

$$I_5=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\int_{-t}^{t} K(t,\xi)\int_{-x+t+\xi}^{x-t+\xi} e^{i\lambda u}dud\xi dt=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^{x} q(u)\int_{t-x+u}^{t+x-u} K(u,\xi)\, d\xi due^{i\lambda t}dt$$

ifadeleri elde edilir. İntegrallerin bu değerleri yerlerine yazılırsa,

$$(R_1(x)-1)\, e^{i\lambda x}+\int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\lambda t}dt=-ie^{i\lambda x}\int_0^x p(t)\, R_1(t)\, dt$$

$$+\frac{i}{2}\int_{-x}^{x} p\left(\frac{x+t}{2}\right)R_1\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^{(x+t)/2} q(u)\, R_1(u)\, due^{i\lambda t}dt$$

$$-i\int_{-x}^{x}\int_{(x-t)/2}^{x} p(u)\, K(u,t-x+u)\, due^{i\lambda t}dt$$

$$+i\int_{-x}^{x}\int_{(x+t)/2}^{x} p(u)\, K(u,t+x-u)\, due^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^{x} q(u)\int_{t-x+u}^{t+x-u} K(u,\xi)\, d\xi due^{i\lambda t}dt$$

eşitliği alınır. Buradan ise $0 \leq x \leq a$ durumunda $R_1(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları için,

$$R_1(x) = 1 - i\int_0^x p(t) R_1(t)\,dt \quad \text{ise} \quad R_1(x) = e^{-i\beta(x)},\ \beta(x) = \int_0^x p(t)\,dt$$

$$K(x,t) = \frac{i}{2}p\left(\frac{x+t}{2}\right) R_1\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2} q(u) R_1(u)\,du -$$

$$-i\int_{(x-t)/2}^{x} p(u) K(u, t-x+u)\,du + i\int_{(x+t)/2}^{x} p(u) K(u, t+x-u)\,du$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x q(u) \int_{t-x+u}^{t+x-u} K(u,\xi)\,d\xi du \tag{3.27}$$

eşitlikleri elde edilmiş olur.

Benzer şekilde $a < x \leq \pi$ durumu için (3.26) denklemi,

$$\alpha^+ R_2(x) e^{i\lambda\mu^+(x)} + \alpha^- R_3(x) e^{i\lambda\mu-(x)} + \int_{-\mu^+(t)}^{\mu^+(t)} K(x,t) e^{i\lambda t}dt = \alpha^+ e^{i\lambda\mu^+(x)} + \alpha^- e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

$$+\int_0^x \Phi(x,t,\lambda)(2\lambda p(t) + q(t)) \left[e_0(t,\lambda) + \int_{-\mu^+(t)}^{\mu^+(t)} K(t,\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi\right] dt$$

veya

$$\alpha^+ e^{i\lambda\mu^+(x)}[R_2(x) - 1] + \alpha^- e^{i\lambda\mu^-(t)}[R_3(x) - 1] + \int_{-\mu^+(t)}^{\mu^+(t)} K(x,t) e^{i\lambda t}dt =$$

$$= \int_0^x \Phi(x,t,\lambda)(2\lambda p(t) + q(t)) e_0(t,\lambda)\,dt$$

$$+\int_0^x \Phi(x,t,\lambda)(2\lambda p(t) + q(t)) \int_{-\mu^+(t)}^{\mu^+(t)} K(t,\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi dt$$

$$= \int_0^a \Phi(x,t,\lambda)(2\lambda p(t) + q(t)) R_1(t) e^{i\lambda t}dt$$

$$+\int_{a}^{x}\Phi(x,t,\lambda)(2\lambda p(t)+q(t))\left[\alpha^{+}R_{2}(t)e^{i\lambda\mu^{+}(t)}+\alpha^{-}R_{3}(t)e^{i\lambda\mu^{-}(t)}\right]dt$$

$$+\int_{0}^{a}\Phi(x,t,\lambda)(2\lambda p(t)+q(t))\int_{-t}^{t}K(t,\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$+\int_{a}^{x}\Phi(x,t,\lambda)(2\lambda p(t)+q(t))\int_{-\alpha t+\alpha a-a}^{\alpha t-\alpha a+a}K(t,\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$=\int_{0}^{a}\frac{\alpha^{+}\sin\lambda[\mu^{+}(x)-t]+\alpha^{-}\sin\lambda[\mu^{-}(x)-t]}{\lambda}(2\lambda p(t)+q(t))R_{1}(t)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\int_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha(x-t)}{\lambda\alpha}(2\lambda p(t)+q(t))\left[\alpha^{+}R_{2}(t)e^{i\lambda\mu^{+}(t)}+\alpha^{-}R_{3}(t)e^{i\lambda\mu^{-}(t)}\right]dt$$

$$+\int_{0}^{a}\frac{\alpha^{+}\sin\lambda[\mu^{+}(x)-t]+\alpha^{-}\sin\lambda[\mu^{-}(x)-t]}{\lambda}(2\lambda p(t)+q(t))\int_{-t}^{t}K(t,\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$+\int_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha(x-t)}{\lambda\alpha}(2\lambda p(t)+q(t))\int_{-\alpha t+\alpha a-a}^{\alpha t-\alpha a+a}K(t,\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

şeklini alır. Buradan ise

$$\alpha^{+}e^{i\lambda\mu^{+}(x)}[R_{2}(x)-1]+\alpha^{-}e^{i\lambda\mu^{-}(t)}[R_{3}(x)-1]+\int_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt=$$

$$=\alpha^{+}\int_{0}^{a}\frac{\sin\lambda[\mu^{+}(x)-t]}{\lambda}(2\lambda p(t)+q(t))R_{1}(t)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\alpha^{-}\int_{0}^{a}\frac{\sin\lambda[\mu^{-}(x)-t]}{\lambda}(2\lambda p(t)+q(t))R_{1}(t)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\alpha^{+}\int_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha(x-t)}{\lambda\alpha}(2\lambda p(t)+q(t))R_{2}(t)e^{i\lambda\mu^{+}(t)}dt$$

$$+\alpha^{-}\int_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha(x-t)}{\lambda\alpha}(2\lambda p(t)+q(t))R_{3}(t)e^{i\lambda\mu^{-}(t)}dt$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{0}^{a}\frac{\sin\lambda\left[\mu^{+}(x)-t\right]}{\lambda}\left(2\lambda p(t)+q(t)\right)\int\limits_{-t}^{t}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{a}\frac{\sin\lambda\left[\mu^{-}(x)-t\right]}{\lambda}\left(2\lambda p(t)+q(t)\right)\int\limits_{-t}^{t}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$+\int\limits_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha(x-t)}{\lambda\alpha}\left(2\lambda p(t)+q(t)\right)\int\limits_{-\alpha t+\alpha a-a}^{\alpha t-\alpha a+a}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$=\alpha^{+}\int\limits_{0}^{a}\sin\lambda\left[\mu^{+}(x)-t\right]2p(t)\,R_1(t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{0}^{a}\frac{\sin\lambda\left[\mu^{+}(x)-t\right]}{\lambda}q(t)\,R_1(t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{a}\sin\lambda\left[\mu^{-}(x)-t\right]2p(t)\,R_1(t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{a}\frac{\sin\lambda\left[\mu^{-}(x)-t\right]}{\lambda}q(t)\,R_1(t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}\sin\lambda\alpha(x-t)\,2p(t)\,R_2(t)\,e^{i\lambda\mu^{+}(t)}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha(x-t)}{\lambda}q(t)\,R_2(t)\,e^{i\lambda\mu^{+}(t)}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}\sin\lambda\alpha(x-t)\,2p(t)\,R_3(t)\,e^{i\lambda\mu^{-}(t)}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha(x-t)}{\lambda}q(t)\,R_3(t)\,e^{i\lambda\mu^{-}(t)}dt$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{0}^{a}\sin\lambda\left[\mu^{+}(x)-t\right]2p(t)\int\limits_{-t}^{t}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{0}^{a}\frac{\sin\lambda\left[\mu^{+}(x)-t\right]}{\lambda}q(t)\int\limits_{-t}^{t}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$+\alpha^{-}\int_{0}^{a}\sin\lambda\left[\mu^{-}(x)-t\right]2p(t)\int_{-t}^{t}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$+\alpha^{-}\int_{0}^{a}\frac{\sin\lambda\left[\mu^{-}(x)-t\right]}{\lambda}q(t)\int_{-t}^{t}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$+\int_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha(x-t)}{\alpha}2p(t)\int_{-\alpha t+\alpha a-a}^{\alpha t-\alpha a+a}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$+\int_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha(x-t)}{\lambda\alpha}q(t)\int_{-\alpha t+\alpha a-a}^{\alpha t-\alpha a+a}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

eşitliği alınır. Bu eşitliğin sol tarafında bulunan integraller değerlendirilecek olursa,

$$I_1=\alpha^{+}\int_{0}^{a}\sin\lambda\left[\mu^{+}(x)-t\right]2p(t)\,R_1(t)\,e^{i\lambda t}dt=$$

$$=-i\alpha^{+}e^{i\lambda\mu^{+}(x)}\int_{0}^{a}p(t)\,R_1(t)\,dt$$

$$+\frac{i\alpha^{+}}{2}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}p\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{i\alpha^{+}}{2}\int_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}p\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$I_2=\alpha^{+}\int_{0}^{a}\frac{\sin\lambda\left[\mu^{+}(x)-t\right]}{\lambda}q(t)\,R_1(t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$=\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{0}^{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}q(u)\,R_1(u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int_{0}^{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}q(u)\,R_1(u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int_{0}^{a}q(u)\,R_1(u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$I_3 = \alpha^- \int_0^a \sin\lambda \left[\mu^-(x) - t\right] 2p(t) R_1(t) e^{i\lambda t} dt =$$

$$= -i\alpha^- e^{i\lambda\mu^-(x)} \int_0^a p(t) R_1(t) dt$$

$$+ \frac{i\alpha^-}{2} \int_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} p\left(\frac{t - \alpha x + \alpha a + a}{2}\right) R_1\left(\frac{t - \alpha x + \alpha a + a}{2}\right) e^{i\lambda t} dt$$

$$+ \frac{i\alpha^-}{2} \int_{-\alpha x + \alpha a + a}^{\alpha x - \alpha a + a} p\left(\frac{t - \alpha x + \alpha a + a}{2}\right) R_1\left(\frac{t - \alpha x + \alpha a + a}{2}\right) e^{i\lambda t} dt$$

$$I_4 = \alpha^- \int_0^a \frac{\sin\lambda\left(\mu^-(x) - t\right)}{\lambda} q(t) R_1(t) e^{i\lambda t} dt$$

$$= \frac{\alpha^-}{2} \int_0^a q(t) R_1(t) \int_{\alpha x - \alpha a - a + 2t}^{-\alpha x + \alpha a + a} e^{i\lambda u} du dt$$

Burada $-\alpha x + \alpha a + a < a$ olduğundan

$$= \frac{\alpha^-}{2} \int_0^{-\alpha x + \alpha a + a} q(t) R_1(t) \int_{\alpha x - \alpha a - a + 2t}^{-\alpha x + \alpha a + a} e^{i\lambda u} du dt$$

$$+ \frac{\alpha^-}{2} \int_{-\alpha x + \alpha a + a}^{a} q(t) R_1(t) \int_{\alpha x - \alpha a - a + 2t}^{-\alpha x + \alpha a + a} e^{i\lambda u} du dt$$

$$= \frac{\alpha^-}{2} \int_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int_0^{(t - \alpha x + \alpha a + a)/2} q(u) R_1(u) du e^{i\lambda t} dt$$

$$- \frac{\alpha^-}{2} \int_{-\alpha x + \alpha a + a}^{\alpha x - \alpha a + a} \int_{(t - \alpha x + \alpha a + a)/2}^{a} q(u) R_1(u) du e^{i\lambda t} dt$$

$$I_5 = \frac{\alpha^+}{\alpha} \int_a^x \sin\lambda\alpha(x - t) 2p(t) R_2(t) e^{i\lambda\mu^+(t)} dt$$

$$= -\frac{i\alpha^+}{\alpha} e^{i\lambda\mu^+(x)} \int_a^x p(t) R_2(t) dt$$

$$+\frac{i\alpha^{+}}{2\alpha^{2}}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}p\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)R_{2}\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$I_{6}=\frac{\alpha^{+}}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha\left(x-t\right)}{\lambda}q\left(t\right)R_{2}\left(t\right)e^{i\lambda\mu^{+}(t)}dt$$

$$=\frac{\alpha^{+}}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{(t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}q\left(u\right)R_{2}\left(u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$I_{7}=\frac{\alpha^{-}}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}\sin\lambda\alpha\left(x-t\right)2p\left(t\right)R_{3}\left(t\right)e^{i\lambda\mu^{-}(t)}dt$$

$$=-\frac{i\alpha^{-}}{2\alpha^{2}}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}p\left(\frac{-t+\alpha x+\alpha a+a}{2\alpha}\right)R_{3}\left(\frac{-t+\alpha x+\alpha a+a}{2\alpha}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\frac{\alpha^{-}}{\alpha}e^{i\lambda\mu^{-}(x)}\int\limits_{a}^{x}p\left(t\right)R_{3}\left(t\right)dt$$

$$I_{8}=\frac{\alpha^{-}}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha\left(x-t\right)}{\lambda\alpha}q\left(t\right)R_{3}\left(t\right)e^{i\lambda\mu^{-}(t)}dt$$

$$=\frac{\alpha^{-}}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{(-t+\alpha x+\alpha a+a)/2\alpha}q\left(u\right)R_{3}\left(u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$I_{9}=\alpha^{+}\int\limits_{0}^{a}\sin\lambda\left[\mu^{+}\left(x\right)-t\right]2p\left(t\right)\int\limits_{-t}^{t}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$=-i\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\left(\int\limits_{(-t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}p\left(u\right)K\left(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u\right)du\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-i\alpha^{+}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{(-t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}p\left(u\right)K\left(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\alpha^{+}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}p\left(u\right)K\left(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$+ i\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a} p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$I_{10}=\alpha^{+}\int\limits_{0}^{a}\frac{\sin\lambda\left[\mu^{+}(x)-t\right]}{\lambda}q(t)\int\limits_{-t}^{t}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$=\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$I_{11}=\alpha^{-}\int\limits_{0}^{a}\sin\lambda\left[\mu^{-}(x)-t\right]2p(t)\int\limits_{-t}^{t}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$=-i\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{(-t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a} p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$-i\alpha^{-}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(-t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a} p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\alpha^{-}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a} p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a} p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$I_{12}=\alpha^{-}\int\limits_{0}^{a}\frac{\sin\lambda\left[\mu^{-}(x)-t\right]}{\lambda}q(t)\int\limits_{-t}^{t}K(t,\xi)\,e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$=\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t+\alpha x-\alpha a-a+u}^{t-\alpha x+\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q\left(u\right)\int\limits_{t+\alpha x-\alpha a-a+u}^{t-\alpha x+\alpha a+a-u}K\left(u,\xi\right)d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q\left(u\right)\int\limits_{t+\alpha x-\alpha a-a+u}^{t-\alpha x+\alpha a+a-u}K\left(u,\xi\right)d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$I_{13}=\int\limits_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha\left(x-t\right)}{\alpha}2p\left(t\right)\int\limits_{-\alpha t+\alpha a-a}^{\alpha t-\alpha a+a}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$=-\frac{i}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{(-t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x}p\left(u\right)K\left(u,t-\alpha x+\alpha u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i}{\alpha}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}p\left(u\right)K\left(u,t-\alpha x+\alpha u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}p\left(u\right)K\left(u,t-\alpha x+\alpha u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{i}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{a}^{x}p\left(u\right)K\left(u,t+\alpha x-\alpha u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{i}{\alpha}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}p\left(u\right)K\left(u,t+\alpha x-\alpha u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{i}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{(t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x}p\left(u\right)K\left(u,t+\alpha x-\alpha u\right)du e^{i\lambda t}dt$$

$$I_{14}=\int\limits_{a}^{x}\frac{\sin\lambda\alpha\left(x-t\right)}{\lambda\alpha}q\left(t\right)\int\limits_{-\alpha t+\alpha a-a}^{\alpha t-\alpha a+a}K\left(t,\xi\right)e^{i\lambda\xi}d\xi dt$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{a}^{x}q\left(u\right)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}K\left(u,\xi\right)d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}q\left(u\right)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}K\left(u,\xi\right)d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}K(u,\xi)\,d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

ifadeleri elde edilir. İntegrallerin bu değerleri yerlerine yazılırsa;

$$\alpha^{+}e^{i\lambda\mu^{+}(x)}\left[R_2(x)-1\right]+\alpha^{-}e^{i\lambda\mu^{-}(t)}\left[R_3(x)-1\right]+\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)\,e^{i\lambda t}dt=$$

$$=-i\alpha^{+}e^{i\lambda\mu^{+}(x)}\int\limits_{0}^{a}p(t)\,R_1(t)\,dt$$

$$+\frac{i\alpha^{+}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}p\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{i\alpha^{+}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}p\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\left(\int\limits_{0}^{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}q(u)\,R_1(u)\,du\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}q(u)\,R_1(u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\,R_1(u)\,du e^{i\lambda t}dt-i\alpha^{-}e^{i\lambda\mu^{-}(x)}\int\limits_{0}^{a}p(t)\,R_1(t)\,dt$$

$$+\frac{i\alpha^{-}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}p\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{i\alpha^{-}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}p\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}q(u)\,R_1(u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\left(\int\limits_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}q(u)\,R_1(u)\,du\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i\alpha^{+}}{\alpha}e^{i\lambda\mu^{+}(x)}\int\limits_{a}^{x}p\left(t\right)R_{2}\left(t\right)dt+\frac{i\alpha^{-}}{\alpha}e^{i\lambda\mu^{-}(x)}\int\limits_{a}^{x}p\left(t\right)R_{3}\left(t\right)dt$$

$$+\frac{i\alpha^{+}}{2\alpha^{2}}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}p\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)R_{2}\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{(t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}q\left(u\right)R_{2}\left(u\right)due^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i\alpha^{-}}{2\alpha^{2}}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}p\left(\frac{-t+\alpha x+\alpha a+a}{2\alpha}\right)R_{3}\left(\frac{-t+\alpha x+\alpha a+a}{2\alpha}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{(-t+\alpha x+\alpha a+a)/2\alpha}q\left(u\right)R_{3}\left(u\right)due^{i\lambda t}dt$$

$$-i\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(-t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}p\left(u\right)K\left(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u\right)due^{i\lambda t}dt$$

$$-i\alpha^{+}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{(-t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}p\left(u\right)K\left(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u\right)due^{i\lambda t}dt$$

$$+i\alpha^{+}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}p\left(u\right)K\left(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u\right)due^{i\lambda t}dt$$

$$+i\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}p\left(u\right)K\left(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u\right)due^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{0}^{a}q\left(u\right)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}K\left(u,\xi\right)d\xi due^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q\left(u\right)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}K\left(u,\xi\right)d\xi due^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q\left(u\right)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}K\left(u,\xi\right)d\xi due^{i\lambda t}dt$$

$$-i\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{(-t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)\,due^{i\lambda t}dt$$

$$-\,i\alpha^{-}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(-t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)\,due^{i\lambda t}dt$$

$$+\,i\alpha^{-}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)\,due^{i\lambda t}dt$$

$$+\,i\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)\,due^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t+\alpha x-\alpha a-a+u}^{t-\alpha x+\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi due^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t+\alpha x-\alpha a-a+u}^{t-\alpha x+\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi due^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t+\alpha x-\alpha a-a+u}^{t-\alpha x+\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi due^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{(-t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x}p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha u)\,due^{i\lambda t}dt$$

$$-\,\frac{i}{\alpha}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha u)\,due^{i\lambda t}dt$$

$$-\,\frac{i}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha u)\,due^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{i}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{a}^{x}p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha u)\,due^{i\lambda t}dt$$

$$+\,\frac{i}{\alpha}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha u)\,due^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{i}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{(t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x} p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha u)\,du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{a}^{x} q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u} K(u,\xi)\,d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x} q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u} K(u,\xi)\,d\xi du e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x} q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u} K(u,\xi)\,d\xi du e^{i\lambda t}dt \tag{3.30}$$

eşitliği elde edilir. Buradan ise $a < x \leq \pi$ durumunda $R_2(x)$ ve $R_3(x)$ fonksiyonları için,

$$R_2(x) = 1 - i\int\limits_{0}^{a} p(t)\,R_1(t)\,dt - \frac{i}{\alpha}\int\limits_{a}^{x} p(t)\,R_2(t)\,dt$$

$$R_3(x) = 1 - i\int\limits_{0}^{a} p(t)\,R_1(t)\,dt + \frac{i}{\alpha}\int\limits_{a}^{x} p(t)\,R_3(t)\,dt$$

denklemleri bulunur. Buradan ise $\beta(x) = \int\limits_{0}^{x} p(t)\,dt$ olmak üzere

$$R_2(x) = e^{-\frac{i}{\alpha}\beta(x)},\ R_3(x) = e^{\frac{i}{\alpha}\beta(x)}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $-\alpha x+\alpha a+a < \alpha x-\alpha a+a$ olduğunda (3.30) denkleminde $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu için aşağıdaki integral denklemleri alınır:

1) $a < x \leq \pi$, $-\alpha x + \alpha a - a < t < \alpha x - \alpha a - a$ durumu için,

$$K(x,t) = \frac{i\alpha^+}{2}p\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_{0}^{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2} q(u)\,R_1(u)\,du$$

$$+i\alpha^+\int\limits_{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a} p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)\,du$$

$$-i\alpha^{-}\int\limits_{(-t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)\,du$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi du+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t+\alpha x-\alpha a-a+u}^{t-\alpha x+\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi du$$

$$-\frac{i}{\alpha}\int\limits_{(-t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x}p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha u)\,du+\frac{i}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha u)\,du$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{a}^{x}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}K(u,\xi)\,d\xi du \tag{3.31}$$

2) $a<x\leq\pi$, $\alpha x-\alpha a-a<t<-\alpha x+\alpha a+a$ durumu için,

$$K(x,t)=\frac{i\alpha^{+}}{2}p\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)$$

$$+\frac{i\alpha^{-}}{2}p\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{0}^{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}q(u)\,R_1(u)\,du+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{0}^{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}q(u)\,R_1(u)\,du$$

$$-i\alpha^{+}\int\limits_{(-t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)\,du$$

$$+i\alpha^{+}\int\limits_{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)\,du$$

$$-\frac{i}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha u)\,du$$

$$-i\alpha^{-}\int\limits_{(-t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)\,du$$

$$+i\alpha^{-}\int\limits_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)\,du$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t+\alpha x-\alpha a-a+u}^{t-\alpha x+\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi du+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}K(u,\xi)\,d\xi du$$

$$+\frac{i}{\alpha}\int_{a}^{x} p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha u)\,du+\frac{1}{2\alpha}\int_{a}^{x} q(u)\int_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u} K(u,\xi)\,d\xi du \qquad (3.31')$$

3) $a<x\leq\pi$, $-\alpha x+\alpha a+a<t<\alpha x-\alpha a+a$ durumu için,

$$K(x,t)=\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{a} q(u)\,R_1(u)\,du+\frac{i\alpha^{-}}{2}p\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)R_1\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)$$

$$+\frac{i\alpha^{+}}{2\alpha^{2}}p\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)R_2\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)-\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{a} q(u)\,R_1(u)\,du$$

$$-\frac{i\alpha^{-}}{2\alpha^{2}}p\left(\frac{-t+\alpha x+\alpha a+a}{2\alpha}\right)R_3\left(\frac{-t+\alpha x+\alpha a+a}{2\alpha}\right)$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2\alpha}\int_{a}^{(t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha} q(u)\,R_2(u)\,du+\frac{\alpha^{-}}{2\alpha}\int_{a}^{(-t+\alpha x+\alpha a+a)/2\alpha} q(u)\,R_3(u)\,du$$

$$-i\alpha^{+}\int_{(-t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a} p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)\,du$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{a} q(u)\int_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u} K(u,\xi)\,d\xi du$$

$$+i\alpha^{-}\int_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a} p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)\,du$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{a} q(u)\int_{t+\alpha x-\alpha a-a+u}^{t-\alpha x+\alpha a+a-u} K(u,\xi)\,d\xi du-\frac{i}{\alpha}\int_{a}^{x} p(u)\,K(u,t-\alpha x+\alpha u)\,du$$

$$+\frac{i}{\alpha}\int_{(t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x} p(u)\,K(u,t+\alpha x-\alpha u)\,du$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{a}^{x} q(u)\int_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u} K(u,\xi)\,d\xi du \qquad (3.31'')$$

şeklindeki eşitlikleri alınır.

Böylece eğer $K(x,t)$ fonksiyonu $|t|>|\mu^{+}(x)|$ iken sıfıra eşit ve (3.27), (3.31), (3.31′), (3.31″) denklemlerini sağlıyorsa o halde (3.25) formülü ile verilen $e(x,\lambda)$

fonksiyonu tüm λ'lar için (3.26) denkleminin çözümüdür, yani (3.1) denkleminin (3.4) koşullarını sağlayan çözümüdür ve tersine.

Ardışık yaklaşımlar yöntemi ile gösterelim ki (3.31), (3.31′), (3.31″) denklemleri (3.7) özelliğini sağlayan $K(x,\cdot) \in L_1(-\mu^+(x), \mu^+(x))$ çözümüne sahiptir.

İlk olarak $0 \leq x \leq a$ durumunu inceleyelim.

Sıfırıncı yaklaşım olarak

$$K_0(x,t) = \frac{i}{2} p\left(\frac{x+t}{2}\right) R_1\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{(x+t)/2} q(u) R_1(u)\, du$$

fonksiyonunu alalım ve bir sonraki yaklaşımları sırasıyla

$$K_1(x,t) = -i\int_{(x-t)/2}^{x} p(u) K_0(u, t-x+u)\, du + i\int_{(x+t)/2}^{x} p(u) K_0(u, t+x-u)\, du$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x q(u)\int_{t-x+u}^{t+x-u} K_0(u,\xi)\, d\xi du$$

$$\vdots$$

$$K_n(x,t) = -i\int_{(x-t)/2}^{x} p(u) K_{n-1}(u, t-x+u)\, du + i\int_{(x+t)/2}^{x} p(u) K_{n-1}(u, t+x-u)\, du$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x q(u)\int_{t-x+u}^{t+x-u} K_{n-1}(u,\xi)\, d\xi du, \quad n = 1, 2, \ldots$$

şeklinde alalım. (3.27) denkleminin çözümünü

$$K(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x,t) \tag{3.32}$$

şeklinde arayalım. Tümevarım yöntemi ile gösterelim ki

$$\int_{-x}^{x} |K_n(x,t)|\, dt \leq \frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

eşitsizliği sağlanılmaktadır. Dolayısıyla,

$$\int_{-x}^{x} |K_0(x,t)|\, dt \leq \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \left|p\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \left|R_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| dt + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_0^{(x+t)/2} |q(u)| |R_1(u)|\, du dt$$

$$= \int_0^x |p(u)| \, |R_1(u)| \, du + \frac{1}{2}\int_0^x |q(u)| \, |R_1(u)| \left(\int_{2u-x}^x dt \right) du$$

$$\leq \int_0^x 2|p(t)| \, dt + \int_0^x (x-t) |q(t)| \, dt = \int_0^x [(x-t)|q(t)| + 2|p(t)|] \, dt$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer

$$\int_0^x [(x-t)|q(t)| + 2|p(t)|] \, dt = \sigma(x) \tag{3.33}$$

denilirse

$$\int_{-x}^x |K_0(x,t)| \, dt \leq \sigma(x) \tag{3.34}$$

alınır.

$n = 1$ için (3.33) ve (3.34) ifadeleri gözönüne alınırsa,

$$\int_{-x}^x |K_1(x,t)| \, dt \leq \int_{-x}^x \int_{(x-t)/2}^x |p(u)| \, |K_0(u, t-x+u)| \, du dt$$

$$+ \int_{-x}^x \int_{(x+t)/2}^x |p(u)| \, |K_0(u, t+x-u)| \, du dt + \frac{1}{2}\int_{-x}^x \int_0^x |q(u)| \int_{t-x+u}^{t+x-u} |K_0(u,\xi)| \, d\xi du dt$$

$$\leq \int_0^x |p(u)| \int_{x-2u}^x |K_0(u, t-x+u)| \, dt du + \int_0^x |p(u)| \int_{-x}^{2u-x} |K_0(u, t+x-u)| \, dt du$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^x |q(u)| \int_{-x}^x \int_{t-x+u}^{t+x-u} |K_0(u,\xi)| \, d\xi dt du$$

$$\leq \int_0^x |p(t)| \int_{-t}^t |K_0(t,\xi)| \, d\xi dt + \int_0^x |p(t)| \int_{-t}^t |K_0(t,\xi)| \, d\xi dt$$

$$+ \int_0^x (x-u) |q(u)| \int_{u-2x}^{2x-u} |K_0(u,\xi)| \, d\xi du$$

$$\leq \int_0^x |p(t)| \, \sigma(t) \, dt + \int_0^x |p(t)| \, \sigma(t) \, dt + \int_0^x (x-t) |q(t)| \, \sigma(t) \, dt$$

$$= \int_0^x \left[2\left|p\left(t\right)\right| + \left(x-t\right)\left|q\left(t\right)\right|\right]\sigma\left(t\right)dt$$

$$= \int_0^x \sigma\left(t\right)d\left(\int_0^t \left[2\left|p\left(s\right)\right| + \left(x-s\right)\left|q\left(s\right)\right|\right]ds\right) = \frac{\sigma^2\left(x\right)}{2!}$$

olur. Sonuç olarak

$$\int_{-x}^x \left|K_1\left(x,t\right)\right|dt \leq \frac{\sigma^2\left(x\right)}{2!}$$

alınır. Şimdi $n-1$ için

$$\int_{-x}^x \left|K_{n-1}\left(x,t\right)\right|dt \leq \frac{\sigma^n\left(x\right)}{n!} \tag{3.35}$$

doğru olduğunu kabul edelim. n için

$$\int_{-x}^x \left|K_n\left(x,t\right)\right|dt \leq \frac{\sigma^{n+1}\left(x\right)}{\left(n+1\right)!} \tag{3.36}$$

eşitsizliği sağlanır mı? Bunun için (3.33) ve (3.35) ifadeleri gözönüne alınırsa,

$$\int_{-x}^x \left|K_n\left(x,t\right)\right|dt \leq \int_{-x}^x \int_{(x-t)/2}^x \left|p\left(u\right)\right|\left|K_{n-1}\left(u,t-x+u\right)\right|dudt$$

$$+\int_{-x}^x \int_{(x+t)/2}^x \left|p\left(u\right)\right|\left|K_{n-1}\left(u,t+x-u\right)\right|dudt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^x \int_0^x \left|q\left(u\right)\right| \int_{t-x+u}^{t+x-u} \left|K_{n-1}\left(u,\xi\right)\right|d\xi dudt$$

$$\leq \int_0^x \left|p\left(u\right)\right| \int_{x-2u}^x \left|K_{n-1}\left(u,t-x+u\right)\right|dtdu$$

$$+\int_0^x \left|p\left(u\right)\right| \int_{-x}^{2u-x} \left|K_{n-1}\left(u,t+x-u\right)\right|dtdu$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x \left|q\left(u\right)\right| \int_{-x}^x \int_{t-x+u}^{t+x-u} \left|K_{n-1}\left(u,\xi\right)\right|d\xi dtdu$$

$$\leq \int_0^x |p(t)| \int_{-t}^{t} |K_{n-1}(t,\xi)|\, d\xi dt + \int_0^x |p(t)| \int_{-t}^{t} |K_{n-1}(t,\xi)|\, d\xi dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x |q(u)| \int_{-2x+u}^{2x-u} |K_{n-1}(u,\xi)| \left(\int_{\xi-x+u}^{\xi+x-u} dt\right) d\xi du$$

$$\leq \int_0^x |p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt + \int_0^x |p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt + \int_0^x (x-t)\, |q(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt$$

$$= \int_0^x [2\,|p(t)+|\,(x-t)\,|q(t)|] \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt$$

$$= \int_0^x \frac{\sigma^n(t)}{n!} d\left(\int_0^s [2\,|p(s)+|\,(x-s)\,|q(s)|]\, ds\right) = \frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

bulunur. Buradan ise

$$\int_{-x}^{x} |K_n(x,t)|\, dt \leq \frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

alınır.

Böylece (3.36) elde edildi.. (3.36) eşitsizliği sağlandığından alırız ki eğer $0 \leq x \leq a$ ise (3.32) serisi herbir fixe edilmiş x için $L_1(-x,x)$ uzayında yakınsaktır ve

$$\int_{-x}^{x} |K(x,t)|\, dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-x}^{x} |K_n(x,t)|\, dt$$

$$\leq 1 - 1 + \sigma(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2!} + ... + \frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!} + ... = e^{\sigma(x)} - 1$$

$$\int_{-x}^{x} |K(x,t)|\, dt \leq e^{\sigma(x)} - 1 = e^{\int_0^x [(x-t)|q(t)|+2|p(t)|]dt} - 1 \qquad (3.37)$$

eşitsizliği sağlanılmaktadır.

Şimdi ise $a < x \leq \pi$ durumunu inceleyelim. Burada üç ayrı durum söz konusudur. Dolayısıyla,

$a < x \leq \pi, \ \ -\alpha x + \alpha a - a < t < \alpha x - \alpha a - a$ iken

$$\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a} |K_0(x,t)|\, dt \leq$$

$$\leq \frac{\alpha^+}{2} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a} \left| p\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)\right| \left| R_1\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)\right| dt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a} \int\limits_{0}^{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2} |q(u)|\, |R_1(u)|\, du dt$$

$$\leq \frac{\alpha^+}{2} \int\limits_{0}^{\alpha x-\alpha a} |p(u)|\, 2du + \frac{\alpha^+}{2} \int\limits_{0}^{\alpha x-\alpha a} \left(\int\limits_{2u-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a} dt \right) |q(u)|\, du$$

$$\leq \alpha^+ \int\limits_{0}^{x} |p(u)|\, du + \frac{\alpha^+}{2} \int\limits_{0}^{\alpha x-\alpha a} (\alpha x - \alpha a - a - 2u + \alpha x - \alpha a + a)\, |q(u)|\, du$$

$$\leq \alpha^+ \int\limits_{0}^{x} |p(u)|\, du + \alpha^+ \int\limits_{0}^{\alpha x-\alpha a} (\alpha x - \alpha a - u)\, |q(u)|\, du$$

$$\leq \alpha^+ \int\limits_{0}^{x} 2\, |p(t)|\, dt + \alpha^+ \int\limits_{0}^{x} (x-t)\, |q(t)|\, dt$$

$$\leq \alpha^+ \int\limits_{0}^{x} \left[2\, |p(t)| + (x-t)\, |q(t)|\right] dt = \alpha^+ \sigma(x) \tag{3.38}$$

alınır.

$a < x \leq \pi \ , \ \ \alpha x - \alpha a - a < t < -\alpha x + \alpha a + a$ iken

$$\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a} |K_0(x,t)|\, dt \leq$$

$$\leq \frac{\alpha^+}{2} \int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a} \left| p\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)\right| \left| R_1\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2}\right)\right|$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\left|p\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)\right|\left|R_1\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)\right|$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}|q(u)|\,|R_1(u)|\,dudt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}|q(u)|\,|R_1(u)|\,dudt$$

$$\leq\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\,2du+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{0}^{-\alpha x+\alpha a+a}|p(u)|\,2du$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{0}^{-\alpha x+\alpha a+a}\left(\int\limits_{2u+\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}dt\right)|q(u)|\,du$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}\left(\int\limits_{2u-\alpha x+\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}dt\right)|q(u)|\,du$$

$$\leq\alpha^+\int\limits_{0}^{x}|p(t)|\,dt+\alpha^-\int\limits_{0}^{x}|p(t)|\,dt+\alpha^-\int\limits_{0}^{-\alpha x+\alpha a+a}(-\alpha x+\alpha a+a-u)\,|q(u)|\,du$$

$$+2\alpha^+\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}(a-u)\,|q(u)|\,du$$

$$\leq 4\alpha^+\int\limits_{0}^{x}|p(t)|\,dt+2\alpha^-\int\limits_{0}^{x}|p(t)|\,dt+\alpha^-\int\limits_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,dt+\alpha^+\int\limits_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,dt$$

$$\leq\alpha^+\int\limits_{0}^{x}[2\,|p(t)|+(x-t)\,|q(t)|]\,dt+\alpha^-\int\limits_{0}^{x}[2\,|p(t)|+(x-t)\,|q(t)|]\,dt$$

$$=(2\alpha^++\alpha^-)\int\limits_{0}^{x}[2\,|p(t)|+(x-t)\,|q(t)|]\,dt=(1+\alpha^+)\,\sigma(x) \tag{3.39}$$

alınır.

$a<x\leq\pi\ ,\ \ -\alpha x+\alpha a+a<t<\alpha x-\alpha a+a$ iken

$$\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\left|K_0\left(x,t\right)\right|dt\leq$$

$$\leq\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\left|p\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)\right|\left|R_1\left(\frac{t-\alpha x+\alpha a+a}{2}\right)\right|dt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2\alpha^2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\left|p\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)\right|\left|R_2\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)\right|dt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2\alpha^2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\left|p\left(\frac{-t+\alpha x+\alpha a+a}{2\alpha}\right)\right|\left|R_3\left(\frac{-t+\alpha x+\alpha a+a}{2\alpha}\right)\right|dt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}\left|q\left(u\right)\right|\left|R_1\left(u\right)\right|dudt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{(t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}\left|q\left(u\right)\right|\left|R_2\left(u\right)\right|dudt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{(-t+\alpha x+\alpha a+a)/2\alpha}\left|q\left(u\right)\right|\left|R_3\left(u\right)\right|dudt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}\left|q\left(u\right)\right|\left|R_1\left(u\right)\right|dudt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}\left|q\left(u\right)\right|\left|R_1\left(u\right)\right|dudt$$

$$\leq\alpha^-\int\limits_{0}^{x}\left|p\left(u\right)\right|du+\frac{\alpha^+}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}\left|p\left(u\right)\right|du+\frac{\alpha^-}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}\left|p\left(u\right)\right|du$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_{0}^{a}\left|q\left(u\right)\right|\left(\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}dt\right)du+\frac{\alpha^+}{2\alpha}\int\limits_{a}^{x}\left(\int\limits_{2u\alpha-\alpha x-\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}dt\right)\left|q\left(u\right)\right|du$$

$$+\frac{\alpha^-}{2\alpha}\int\limits_{a}^{x}\left(\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{-2u\alpha+\alpha x+\alpha a+a}dt\right)\left|q\left(u\right)\right|du+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{0}^{a}\left(\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}dt\right)\left|q\left(u\right)\right|du$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}\left|q\left(u\right)\right|\left(\int\limits_{2u+\alpha x-\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a+a}dt\right)du$$

$$\leq 4\alpha^{-}\int_{0}^{x}|p(t)|\,dt+4\alpha\alpha^{+}\int_{0}^{x}|p(t)|\,dt+4\alpha^{+}\int_{0}^{x}|p(t)|\,dt$$

$$+\alpha^{+}\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,dt+\alpha^{-}\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,dt+2\alpha\alpha^{+}\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,dt$$

$$+2\alpha^{-}\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,dt\leq\left(2+2\alpha\alpha^{+}\right)\int_{0}^{x}\left[2p(t)+(x-t)\,|q(t)|\right]dt$$

$$\leq c_{1}\int_{0}^{x}d\left(\int_{0}^{t}\left[2p(u)+(x-u)\,|q(u)|\right]du\right)=c_{1}\sigma(x) \tag{3.40}$$

eşitsizliği elde edilir.

O halde (3.38), (3.39), (3.40) eşitsizliklerinden $a<x\leq\pi$ durumu için

$$\int_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}|K_{0}(x,t)|\,dt\leq c_{2}\sigma(x) \tag{3.41}$$

olduğu alınır. Burada $c_{1}=2+2\alpha\alpha^{+}$, $c_{2}=2\alpha^{+}+1+c_{1}$ şeklinde sabitlerdir.

Şimdi ise $n=1$ için her üç durumda $\int_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}|K_{1}(x,t)|\,dt$ integrali değerlendirilecek olursa;

$a<x\leq\pi$, $-\alpha x+\alpha a-a<t<\alpha x-\alpha a-a$ iken

$$\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}|K_{1}(x,t)|\,dt\leq$$

$$\leq\alpha^{+}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}dt\int_{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}|p(u)|\,|K_{0}(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)|\,du$$

$$+\alpha^{-}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{(-t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}|p(u)|\,|K_{0}(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)|\,dudt$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{(-t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x}|p(u)|\,|K_{0}(u,t-\alpha x+\alpha u)|\,dudt$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{a}^{x}|p(u)|\,|K_0(u,t+\alpha x-\alpha u)|\,dudt$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dudt$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dudt$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{a}^{x}|q(u)|\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dudt$$

$$\leq\alpha^+\int\limits_{0}^{\alpha x-\alpha a}|p(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{2u-\alpha x+\alpha a-a}|K_0(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)|\,dtdu$$

$$+\alpha^+\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}|K_0(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)|\,dtdu$$

$$+\alpha^-\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}|p(u)|\int\limits_{-2u-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a-a}|K_0(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)|\,dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}|p(u)|\int\limits_{-2u\alpha+\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}|K_0(u,t-\alpha x+\alpha u)|\,dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}|p(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha u-\alpha a+a}|K_0(u,t+\alpha x-\alpha u)|\,dtdu$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{a}^{x}|q(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$\leq\alpha^+\int\limits_{0}^{x}|p(t)|\int\limits_{-t}^{t}|K_0(t,\xi)|\,d\xi dt+\alpha^-\int\limits_{0}^{x}|p(t)|\int\limits_{-t}^{t}|K_0(t,\xi)|\,d\xi dt$$

$$+\alpha^{+}\int_{0}^{x}|p(t)|\int_{-t}^{t}|K_0(t,\xi)|\,d\xi dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{\alpha}\int_{a}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt+\frac{c_2}{\alpha}\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-2\alpha x+2\alpha a-2a+u}^{2\alpha x-2\alpha a-u}|K_0(u,\xi)|\left(\int_{\xi-\alpha x+\alpha a-a+u}^{\xi+\alpha x-\alpha a+a-u}dt\right)d\xi du$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-2\alpha x+2\alpha a-u}^{2\alpha x-2\alpha a-2a+u}|K_0(u,\xi)|\left(\int_{\xi-\alpha x+\alpha a+a-u}^{\xi+\alpha x-\alpha a-a+u}dt\right)d\xi du$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{a}^{x}|q(u)|\int_{-2\alpha x+\alpha a-a+\alpha u}^{2\alpha x-\alpha a-a-\alpha u}|K_0(u,\xi)|\left(\int_{\xi-\alpha x+\alpha u}^{\xi+\alpha x-\alpha u}dt\right)d\xi du$$

$$\leq 4\alpha c_2\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt+2c_2\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt+2\alpha c_2\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt$$

$$+\,2\alpha c_2\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt+2\alpha c_2\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,\sigma(t)\,dt$$

$$+\,2\alpha c_2\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,\sigma(t)\,dt+c_2\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,\sigma(t)\,dt$$

$$\leq c_3\int_{0}^{x}\left[2\,|p(t)|+(x-t)\,|q(t)|\right]\sigma(t)\,dt \qquad (3.38')$$

bulunur. Burada $c_3=(2\alpha c_2+c_2+2c_2\alpha)$ şeklinde sabittir.

$a<x\leq\pi$, $\alpha x-\alpha a-a<t<-\alpha x+\alpha a+a$ iken

$$\int_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}|K_1(x,t)|\,dt\leq$$

$$\leq\alpha^{+}\int_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int_{(-t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}|p(u)|\,|K_0(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\,dudt$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}\left|p\left(u\right)\right|\left|K_{0}\left(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u\right)\right|dudt$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(-t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}\left|p\left(u\right)\right|\left|K_{0}\left(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u\right)\right|dudt$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}\left|p\left(u\right)\right|\left|K_{0}\left(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u\right)\right|dudt$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}\left|p\left(u\right)\right|\left|K_{0}\left(u,t-\alpha x+\alpha u\right)\right|dudt$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}\left|p\left(u\right)\right|\left|K_{0}\left(u,t+\alpha x-\alpha u\right)\right|dudt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}\left|q\left(u\right)\right|\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}\left|K_{0}\left(u,\xi\right)\right|d\xi dudt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}\left|q\left(u\right)\right|\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}\left|K_{0}\left(u,\xi\right)\right|d\xi dudt$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}\left|q\left(u\right)\right|\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}\left|K_{0}\left(u,\xi\right)\right|d\xi dudt$$

$$\leq\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}\left|p\left(u\right)\right|\int\limits_{-2u+\alpha x-\alpha a+a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\left|K_{0}\left(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u\right)\right|dtdu$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}\left|p\left(u\right)\right|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{2u-\alpha x+\alpha a-a}\left|K_{0}\left(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u\right)\right|dtdu$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{-\alpha x+\alpha a+a}\left|p\left(u\right)\right|\int\limits_{-2u-\alpha x+\alpha a+a}^{-\alpha x+\alpha a-a}\left|K_{0}\left(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u\right)\right|dtdu$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}\left|p\left(u\right)\right|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\left|K_{0}\left(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u\right)\right|dtdu$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{-\alpha x+\alpha a+a}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{2u+\alpha x-\alpha a-a}|K_0(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\,dtdu$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}|K_0(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\,dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}|K_0(u,t-\alpha x+\alpha u)|\,dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}|K_0(u,t+\alpha x-\alpha u)|\,dudt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{a}^{x}|q(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$\leq\alpha^{+}\int\limits_{0}^{x}|p(u)|\int\limits_{-u}^{-2\alpha x+\alpha a+u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi du$$

$$+\alpha^{+}\int\limits_{0}^{x}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{2u-\alpha x+\alpha a-a}|K_0(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)|\,dtdu$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{x}2|p(u)|\int\limits_{-u}^{u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi du+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{x}|p(u)|\int\limits_{-u}^{u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi du$$

$$+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{x}|p(u)|\int\limits_{-u}^{-2\alpha x+2\alpha a+2a-u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi du$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{0}^{x}|p(u)|\int\limits_{\alpha u-\alpha a-a}^{-2\alpha x+\alpha u+\alpha a+a}|K_0(u,\xi)|\,d\xi du$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{0}^{x}|p(u)|\int\limits_{-\alpha u+2\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha u+\alpha a+a}|K_0(u,\xi)|\,d\xi du$$

$$+\alpha^{+}\int_{0}^{x}|q(u)|\int_{-2a+u}^{2a-u}|K_0(u,\xi)|\left(\int_{\xi-\alpha x+\alpha a-a+u}^{\xi+\alpha x-\alpha a+a-u}dt\right)d\xi du$$

$$+\alpha^{-}\int_{0}^{x}|q(u)|\int_{-u}^{u}|K_0(u,\xi)|\left(\int_{\xi-\alpha x+\alpha a+a-u}^{\xi+\alpha x-\alpha a-a+u}dt\right)d\xi du$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{x}|q(u)|\int_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dt du$$

$$\leq 2\alpha^{+}\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt+2\alpha^{+}\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt+2\alpha^{+}\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt$$

$$+2\alpha^{+}\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt+2\alpha^{+}\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt$$

$$+2\alpha^{+}\int_{0}^{x}|p(t)|\,\sigma(t)\,dt+2\alpha^{+}\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,\sigma(t)\,dt$$

$$+2\alpha^{+}\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,\sigma(t)\,dt+2\alpha^{+}\int_{0}^{x}(x-t)\,|q(t)|\,\sigma(t)\,dt$$

$$\leq 6\alpha^{+}\int_{0}^{x}\left[|p(t)|+(x-t)\,|q(t)|\right]\sigma(t)\,dt$$

$$=c_4\int_{0}^{x}\left[2\,|p(t)|+(x-t)\,|q(t)|\right]\sigma(t)\,dt \tag{3.39$'$}$$

bulunur. Burada $c_4=6\alpha^{+}$ şeklinde sabittir.

$a<x\leq\pi,\ \ -\alpha x+\alpha a+a<t<\alpha x-\alpha a+a$ iken

$$\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}|K_1(x,t)|\,dt\leq$$

$$\leq\alpha^{+}\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int_{(-t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a}|p(u)|\,|K_0(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\,du dt$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}|p(u)|\,|K_0(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\,dudt\\
&+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}p(u)\,|K_0(u,t-\alpha x+\alpha u)|\,dudt\\
&+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{(t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x}|p(u)|\,|K_0(u,t+\alpha x-\alpha u)|\,dudt\\
&+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dudt\\
&+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{0}^{a}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dudt\\
&+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{a}^{x}q(u)\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dudt\\
&\leq\alpha^{+}\int\limits_{0}^{\alpha x-\alpha a}|p(u)|\int\limits_{-2u+\alpha x-\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}|K_0(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\,dtdu\\
&+\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}|K_0(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\,dtdu\\
&+\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}|p(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{2u+\alpha x-\alpha a-a}|K_0(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\,dtdu\\
&+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}|p(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}|K_0(u,t-\alpha x+\alpha u)|\,dtdu\\
&+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{0}^{x}|p(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{2u\alpha-\alpha x-\alpha a+a}|K_0(u,t+\alpha x-\alpha u)|\,dtdu\\
&+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dtdu\\
&+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}|K_0(u,\xi)|\,d\xi dtdu
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_a^x |q(u)| \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} \int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u} |K_0(u,\xi)|\, d\xi dt du$$

$$\le \alpha^+ \int\limits_0^x |p(u)| \int\limits_{-2u+\alpha x-\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} |K_0(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\, dt du$$

$$+\alpha^+ \int\limits_0^x |p(u)| \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} |K_0(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\, dt du$$

$$+\alpha^- \int\limits_0^x |p(u)| \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{2u+\alpha x-\alpha a-a} |K_0(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\, dt du$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^x |p(u)| \int\limits_{-2\alpha x+\alpha a+a-\alpha u}^{-\alpha x+a+\alpha u} |K_0(u,\xi)|\, d\xi du$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^x |p(u)| \int\limits_{-\alpha u+\alpha a+a}^{\alpha u-\alpha a+a} |K_0(u,\xi)|\, d\xi du$$

$$+\frac{\alpha^+}{2}\int\limits_0^x |q(u)| \int\limits_{-2\alpha x+2\alpha a+u}^{2\alpha x-2\alpha a+2a-u} |K_0(u,\xi)| \left(\int\limits_{\xi-\alpha x+\alpha a-a+u}^{\xi+\alpha x-\alpha a+a-u} dt \right) d\xi du$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_0^x |q(u)| \int\limits_{-2\alpha x+2\alpha a+2a-u}^{2\alpha x-2\alpha a+u} |K_0(u,\xi)| \left(\int\limits_{\xi-\alpha x+\alpha a+a-u}^{\xi+\alpha x-\alpha a-a+u} dt \right) d\xi du$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^x |q(u)| \int\limits_{-2\alpha x+\alpha a+a+\alpha u}^{2\alpha x-\alpha a+a-\alpha u} |K_0(u,\xi)| \left(\int\limits_{\xi-\alpha x+\alpha u}^{\xi+\alpha x-\alpha u} dt \right) d\xi du$$

$$\le 2c_2\left(\alpha\alpha^+ + \alpha^+\right) \int\limits_0^x |p(t)|\,\sigma(t)\, dt + 2c_2 \int\limits_0^x |p(t)|\,\sigma(t)\, dt$$

$$+c_2 \int\limits_0^x |p(t)|\,\sigma(t)\, dt + c_2 \int\limits_0^x |p(t)|\,\sigma(t)\, dt$$

$$+c_2\left(\alpha\alpha^+ + \alpha^+\right) \int\limits_0^x (x-t)\,|q(t)|\,\sigma(t)\, dt$$

$$+c_2 \int\limits_0^x (x-t)\,|q(t)|\,\sigma(t)\, dt + c_2 \int\limits_0^x (x-t)\,|q(t)|\,\sigma(t)\, dt$$

$$\leq c_5 \int_0^x [2|p(t)| + (x-t)|q(t)|]\,\sigma(t)\,dt \tag{3.40'}$$

bulunur. Burada $c_5 = c_2(\alpha^+\alpha + \alpha^+ + 2)$ şeklinde sabittir.

O halde (3.38′), (3.39′), (3.40′) eşitsizliklerinden $a < x \leq \pi$ durumu için,

$$\int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} |K_1(x,t)|\,dt = \int_{-\alpha x + \alpha a - a}^{\alpha x - \alpha a + a} |K_1(x,t)|\,dt \leq C \int_0^x [|p(t)| + (x-t)|q(t)|]\,dt$$

$$= C \int_0^x \sigma(t)\,d\left(\int_0^t [|p(u)| + (x-u)|q(u)|]\,du\right) = C\frac{\sigma^2(x)}{2!}$$

olduğundan

$$\int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} |K_1(x,t)|\,dt \leq C\frac{\sigma^2(x)}{2!}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Burada ve daha sonra $c_3 + c_4 + c_5 = C$ ile farklı sabitleri göstereceğiz.

Şimdi $n-1$ için

$$\int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} |K_{n-1}(x,t)|\,dt \leq C\frac{\sigma^n(x)}{n!} \tag{3.42}$$

eşitsizliği doğru olsun. n için

$$\int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} |K_n(x,t)|\,dt \leq C\frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!} \tag{3.43}$$

eşitsizliği sağlanır mı? Bunun için (3.33) ve (3.42) ifadeleri gözönüne alınırsa,

$a < x \leq \pi$, $-\alpha x + \alpha a - a < t < \alpha x - \alpha a - a$ iken

$$\int_{-\alpha x + \alpha a - a}^{\alpha x - \alpha a - a} |K_n(x,t)|\,dt \leq$$

$$\leq \alpha^+ \int_{-\alpha x + \alpha a - a}^{\alpha x - \alpha a - a} dt \int_{(t + \alpha x - \alpha a + a)/2}^{a} |p(u)|\,|K_{n-1}(u, t + \alpha x - \alpha a + a - u)|\,du$$

$$+\alpha^{-}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{(-t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a}|p(u)|\left|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)\right|dudt$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{(-t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x}|p(u)|\left|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha u)\right|dudt$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{a}^{x}|p(u)|\left|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha u)\right|dudt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}\left|K_{n-1}(u,\xi)\right|d\xi dudt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}\left|K_{n-1}(u,\xi)\right|d\xi dudt$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{a}^{x}|q(u)|\int_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}\left|K_{n-1}(u,\xi)\right|d\xi dudt$$

$$\leq\alpha^{+}\int_{0}^{\alpha x-\alpha a}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{2u-\alpha x+\alpha a-a}\left|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)\right|dtdu$$

$$\alpha^{+}\int_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\left|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)\right|dtdu$$

$$+\alpha^{+}\int_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\left|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)\right|dtdu$$

$$+\alpha^{-}\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}|p(u)|\int_{-2u-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a-a}\left|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)\right|dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{a}^{x}|p(u)|\int_{-2u\alpha+\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\left|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha u)\right|dtdu$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}\left|K_{n-1}(u,\xi)\right|d\xi dtdu$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}\left|K_{n-1}(u,\xi)\right|d\xi dtdu$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{a}^{x}|q(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\left(\int_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}|K_{n-1}(u,\xi)|\,d\xi dt\right)du$$

$$\leq \alpha^{+}\int_{0}^{\alpha x-\alpha a}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{2u-\alpha x+\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)|\,dtdu$$

$$+\alpha^{+}\int_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)|\,dtdu$$

$$+\alpha^{-}\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}|p(u)|\int_{-2u-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)|\,dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{a}^{x}|p(u)|\int_{-2u\alpha+\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha u)|\,dtdu$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a-a}\int_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}|K_{n-1}(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-2\alpha x+2\alpha a-2a+u}^{2\alpha x-2\alpha a-u}|K_{n-1}(u,\xi)|\left(\int_{\xi-\alpha x+\alpha a-a+u}^{\xi+\alpha x-\alpha a+a-u}dt\right)d\xi du$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-2\alpha x+2\alpha a-u}^{2\alpha x-2\alpha a-2a+u}|K_{n-1}(u,\xi)|\left(\int_{\xi-\alpha x+\alpha a+a-u}^{\xi+\alpha x-\alpha a-a+u}dt\right)d\xi du$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{a}^{x}|q(u)|\int_{-2\alpha x+\alpha a-a+\alpha u}^{2\alpha x-\alpha a-a-\alpha u}|K_{n-1}(u,\xi)|\left(\int_{\xi-\alpha x+\alpha u}^{\xi+\alpha x-\alpha u}dt\right)d\xi du$$

$$\leq 4\alpha c_2\int_{0}^{x}|p(t)|\frac{\sigma^{n}(t)}{n!}dt+2c_2\int_{0}^{x}|p(t)|\frac{\sigma^{n}(t)}{n!}dt+2\alpha c_2\int_{0}^{x}|p(t)|\frac{\sigma^{n}(t)}{n!}dt$$

$$+2\alpha c_2\int_{0}^{x}|p(t)|\frac{\sigma^{n}(t)}{n!}dt+2\alpha c_2\int_{0}^{x}(x-t)|q(t)|\frac{\sigma^{n}(t)}{n!}dt$$

$$+2\alpha c_2\int_{0}^{x}(x-t)|q(t)|\frac{\sigma^{n}(t)}{n!}dt+c_2\int_{0}^{x}(x-t)|q(t)|\frac{\sigma^{n}(t)}{n!}dt$$

$$\leq c_3\int_{0}^{x}\left[2|p(t)|+(x-t)|q(t)|\right]\frac{\sigma^{n}(t)}{n!}dt \tag{3.38$''$}$$

bulunur.

$a < x \leq \pi$, $\alpha x - \alpha a - a < t < -\alpha x + \alpha a + a$ iken

$$\int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} |K_n(x,t)| \, dt \leq$$

$$\leq \alpha^+ \int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int\limits_{(-t + \alpha x - \alpha a + a)/2}^{a} |p(u)| \, |K_{n-1}(u, t - \alpha x + \alpha a - a + u)| \, du dt$$

$$+ \alpha^+ \int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int\limits_{(t + \alpha x - \alpha a + a)/2}^{a} |p(u)| \, |K_{n-1}(u, t + \alpha x - \alpha a + a - u)| \, du dt$$

$$+ \alpha^- \int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int\limits_{(-t - \alpha x + \alpha a + a)/2}^{a} |p(u)| \, |K_{n-1}(u, t + \alpha x - \alpha a - a + u)| \, du dt$$

$$+ \alpha^- \int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int\limits_{(t - \alpha x + \alpha a + a)/2}^{a} |p(u)| \, |K_{n-1}(u, t - \alpha x + \alpha a + a - u)| \, du dt$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int\limits_{a}^{x} |p(u)| \, |K_{n-1}(u, t - \alpha x + \alpha u)| \, du dt$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int\limits_{a}^{x} |p(u)| \, |K_{n-1}(u, t + \alpha x - \alpha u)| \, du dt$$

$$+ \frac{\alpha^+}{2} \int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int\limits_{0}^{a} |q(u)| \int\limits_{t - \alpha x + \alpha a - a + u}^{t + \alpha x - \alpha a + a - u} |K_{n-1}(u, \xi)| \, d\xi du dt$$

$$+ \frac{\alpha^-}{2} \int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int\limits_{0}^{a} |q(u)| \int\limits_{t - \alpha x + \alpha a + a - u}^{t + \alpha x - \alpha a - a + u} |K_{n-1}(u, \xi)| \, d\xi du dt$$

$$+ \frac{1}{2\alpha} \int\limits_{\alpha x - \alpha a - a}^{-\alpha x + \alpha a + a} \int\limits_{a}^{x} |q(u)| \int\limits_{t - \alpha x + \alpha u}^{t + \alpha x - \alpha u} |K_{n-1}(u, \xi)| \, d\xi du dt$$

$$\leq \alpha^+ \int\limits_{\alpha x - \alpha a}^{a} |p(u)| \int\limits_{-2u + \alpha x - \alpha a + a}^{-\alpha x + \alpha a + a} |K_{n-1}(u, t - \alpha x + \alpha a - a + u)| \, dt du$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{2u-\alpha x+\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)|\,dtdu\\
&+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{-\alpha x+\alpha a+a}|p(u)|\int\limits_{-2u-\alpha x+\alpha a+a}^{-\alpha x+\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)|\,dtdu\\
&+\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)|\,dtdu\\
&+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{-\alpha x+\alpha a+a}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{2u+\alpha x-\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\,dtdu\\
&+\alpha^{-}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\,dtdu\\
&+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha u)|\,dtdu\\
&+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{a}^{x}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha u)|\,dtdu\\
&+\frac{\alpha^{+}}{2}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}|K_{n-1}(u,\xi)|\,d\xi dtdu\\
&+\frac{\alpha^{-}}{2}\int\limits_{0}^{a}|q(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}|K_{n-1}(u,\xi)|\,d\xi dtdu\\
&+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{a}^{x}|q(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a}\int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}|K_{n-1}(u,\xi)|\,d\xi dtdu\\
&\le\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\int\limits_{-2u+\alpha x-\alpha a+a}^{-\alpha x+\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\,dtdu\\
&+\alpha^{+}\int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{2u-\alpha x+\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a+a-u)|\,dtdu\\
&+\alpha^{-}\int\limits_{0}^{-\alpha x+\alpha a+a}|p(u)|\int\limits_{-2u-\alpha x+\alpha a+a}^{-\alpha x+\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha a-a+u)|\,dtdu
\end{aligned}
$$

$$+\alpha^- \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a} |p(u)| \int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a} |K_{n-1}(u, t+\alpha x-\alpha a-a+u)|\, dtdu$$

$$+\alpha^- \int\limits_{0}^{-\alpha x+\alpha a+a} |p(u)| \int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{2u+\alpha x-\alpha a-a} |K_{n-1}(u, t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\, dtdu$$

$$+\alpha^- \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a} |p(u)| \int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a} |K_{n-1}(u, t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\, dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha} \int\limits_{a}^{x} |p(u)| \int\limits_{\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha x+\alpha a+a} |K_{n-1}(u, t-\alpha x+\alpha u)|\, dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha} \int\limits_{0}^{x} |p(u)| \int\limits_{\alpha u-\alpha a-a}^{-2\alpha x+\alpha u+\alpha a+a} |K_{n-1}(u, \xi)|\, d\xi du$$

$$+\frac{1}{\alpha} \int\limits_{0}^{x} |p(u)| \int\limits_{-\alpha u+2\alpha x-\alpha a-a}^{-\alpha u+\alpha a+a} |K_{n-1}(u, \xi)|\, d\xi du$$

$$+\frac{\alpha^+}{2} \int\limits_{0}^{x} |q(u)| \int\limits_{-2a+u}^{2a-u} |K_{n-1}(u, \xi)| \left(\int\limits_{\xi-\alpha x+\alpha a-a+u}^{\xi+\alpha x-\alpha a+a-u} dt \right) d\xi du$$

$$+\alpha^- \int\limits_{0}^{x} |q(u)| \int\limits_{-u}^{u} |K_{n-1}(u, \xi)| \left(\int\limits_{\xi-\alpha x+\alpha a+a-u}^{\xi+\alpha x-\alpha a-a+u} dt \right) d\xi du$$

$$\leq \alpha^+ \int\limits_{0}^{x} |p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt + \alpha^+ \int\limits_{0}^{x} |p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt + \alpha^- \int\limits_{0}^{x} 2|p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt$$

$$+\alpha^- \int\limits_{0}^{x} 2|p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt + \alpha^+ \int\limits_{0}^{x} 2|p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt$$

$$+\alpha^+ \int\limits_{0}^{x} |p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt + \left(\alpha\alpha^+ + \alpha^+\right) \int\limits_{0}^{x} (x-t)|q(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt$$

$$+(\alpha\alpha^- + \alpha^-) \int\limits_{0}^{x} (x-t)|q(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt + \int\limits_{0}^{x} (x-t)|q(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt$$

$$\leq c_4 \int\limits_{0}^{x} [2|p(t)| + (x-t)|q(t)|] \frac{\sigma^n(t)}{n!} dt \qquad (3.39'')$$

elde edilir.

$a < x \leq \pi, \;\; -\alpha x + \alpha a + a < t < \alpha x - \alpha a + a$ için:

$$\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} |K_n(x,t)|\, dt \leq$$

$$\leq \alpha^{+} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} \int\limits_{(-t+\alpha x-\alpha a+a)/2}^{a} |p(u)|\, |K_{n-1}(u, t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\, dudt$$

$$+\alpha^{-} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} \int\limits_{(t-\alpha x+\alpha a+a)/2}^{a} |p(u)|\, |K_{n-1}(u, t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\, dudt$$

$$+\frac{1}{\alpha} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} \int\limits_{a}^{x} p(u)\, |K_{n-1}(u, t-\alpha x+\alpha u)|\, dudt$$

$$+\frac{1}{\alpha} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} \int\limits_{(t+\alpha x+\alpha a-a)/2\alpha}^{x} |p(u)|\, |K_{n-1}(u, t+\alpha x-\alpha u)|\, dudt$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} \int\limits_{0}^{a} q(u) \int\limits_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u} |K_{n-1}(u,\xi)|\, d\xi dudt$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} \int\limits_{0}^{a} q(u) \int\limits_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u} |K_{n-1}(u,\xi)|\, d\xi dudt$$

$$+\frac{1}{2\alpha} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} \int\limits_{a}^{x} q(u) \int\limits_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u} |K_{n-1}(u,\xi)|\, d\xi dudt$$

$$\leq \alpha^{+} \int\limits_{0}^{\alpha x-\alpha a} |p(u)| \int\limits_{-2u+\alpha x-\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} |K_{n-1}(u, t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\, dtdu$$

$$+\, \alpha^{+} \int\limits_{\alpha x-\alpha a}^{a} |p(u)| \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a} |K_{n-1}(u, t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\, dtdu$$

$$+\, \alpha^{-} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a} |p(u)| \int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{2u+\alpha x-\alpha a-a} |K_{n-1}(u, t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\, dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{a}^{x}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha u)|\,dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{0}^{x}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{2u\alpha-\alpha x-\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha u)|\,dtdu$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}|K_{n-1}(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$+\frac{\alpha^{-}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int_{t-\alpha x+\alpha a+a-u}^{t+\alpha x-\alpha a-a+u}|K_{n-1}(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{a}^{x}|q(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int_{t-\alpha x+\alpha u}^{t+\alpha x-\alpha u}|K_{n-1}(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$\leq\alpha^{+}\int_{0}^{\alpha x-\alpha a}|p(u)|\int_{-2u+\alpha x-\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\,dtdu$$

$$+\alpha^{+}\int_{\alpha x-\alpha a}^{a}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha a-a+u)|\,dtdu$$

$$+\alpha^{-}\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{2u+\alpha x-\alpha a-a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha a+a-u)|\,dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{a}^{x}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t-\alpha x+\alpha u)|\,dtdu$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_{0}^{x}|p(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{2u\alpha-\alpha x-\alpha a+a}|K_{n-1}(u,t+\alpha x-\alpha u)|\,dtdu$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{a}|q(u)|\int_{-\alpha x+\alpha a+a}^{\alpha x-\alpha a+a}\int_{t-\alpha x+\alpha a-a+u}^{t+\alpha x-\alpha a+a-u}|K_{n-1}(u,\xi)|\,d\xi dtdu$$

$$+\frac{\alpha^{+}}{2}\int_{0}^{x}|q(u)|\int_{-2\alpha x+2\alpha a+u}^{2\alpha x-2\alpha a+2a-u}|K_{n-1}(u,\xi)|\left(\int_{\xi-\alpha x+\alpha a-a+u}^{\xi+\alpha x-\alpha a+a-u}dt\right)d\xi du$$

$$+\frac{\alpha^-}{2}\int\limits_0^x |q(u)| \int\limits_{-2\alpha x+2\alpha a+2a-u}^{2\alpha x-2\alpha a+u} |K_{n-1}(u,\xi)| \left(\int\limits_{\xi-\alpha x+\alpha a+a-u}^{\xi+\alpha x-\alpha a-a+u} dt\right) d\xi du$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^x |q(u)| \int\limits_{-2\alpha x+\alpha a+a+\alpha u}^{2\alpha x-\alpha a+a-\alpha u} |K_{n-1}(u,\xi)| \left(\int\limits_{\xi-\alpha x+\alpha u}^{\xi+\alpha x-\alpha u} dt\right) d\xi du$$

$$\leq 2c_2\left(\alpha\alpha^+ + \alpha^+\right)\int\limits_0^x |p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt + 2c_2\int\limits_0^x |p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt$$

$$+c_2\int\limits_0^x |p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt + c_2\int\limits_0^x |p(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt + c_2\left(\alpha\alpha^+ + \alpha^+\right)\int\limits_0^x (x-t)|q(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt$$

$$+c_2\int\limits_0^x (x-t)|q(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt + c_2\int\limits_0^x (x-t)|q(t)| \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt$$

$$\leq 2c_2\left(\alpha^+\alpha + \alpha^+ + 1\right)\int\limits_0^x \left[|p(t)| + (x-t)|q(t)|\right] \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt$$

$$= c_5\int\limits_0^x \left[2|p(t)| + (x-t)|q(t)|\right] \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt \qquad (3.40'')$$

bulunur.

O halde (3.38″), (3.39″), (3.40″) eşitsizliklerinden $a < x \leq \pi$ durumu için,

$$\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} |K_n(x,t)|\, dt = \int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a+a} |K_n(x,t)|\, dt \leq C\int\limits_0^x \left[|p(t)| + (x-t)|q(t)|\right] \frac{\sigma^n(t)}{n!}dt$$

$$= C\int\limits_0^x \frac{\sigma^n(t)}{n!} d\left(\int\limits_0^t \left[|p(u)| + (x-u)|q(u)|\right] du\right) = C\frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

olduğu çıkar.

Böylece (3.43) ispatlanmış oldu. (3.43) eşitsizliğinden alırızki herbir fixe edilmiş $x > a$ için (3.32) serisi $L_1(-\alpha x + \alpha a - a, \alpha x - \alpha a + a)$ uzayında yakınsaktır. Ayrıca,

$$\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} |K(x,t)|\, dt = \int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a+a} |K(x,t)|\, dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{-\alpha x+\alpha a-a}^{\alpha x-\alpha a+a} |K_n(x,t)|\, dt$$

$$\leq C\sigma(x) + C\frac{\sigma^2(x)}{2!} + \ldots + C\frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!} + \ldots =$$

$$= C\left(1 - 1 + \sigma(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2!} + \ldots + \frac{\sigma^{n+1}(x)}{(n+1)!} + \ldots\right) = C\left(e^{\sigma(x)} - 1\right)$$

olduğundan

$$\int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} |K(x,t)|\, dt \leq C\left(e^{\sigma(x)} - 1\right) \leq C\left(e^{\int_0^x [(x-t)|q(t)|+2|p(t)|]dt} - 1\right) \qquad (3.44)$$

eşitsizliği sağlanılmaktadır.

(3.3) ve (3.6) gözönünde bulundurularak (3.37) ve (3.44) den (3.7) eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde gösterebilirizki (3.32) serisi $t \neq \mu^-(x)$ olduğu bölgede yakınsaktır.

Not: Yukarıdaki hesaplamalarda kolaylık olması açısından $\alpha > 1$ alınmıştır. Benzer işlemler $0 < \alpha < 1$ için de yapılabilir.

3.1.4. $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun (3.1) denklemindeki $p(x)$, $q(x)$ ve $\rho(x)$ katsayıları ile bağlantısı.

(3.31) integral denkleminden yararlanarak gösterelimki eğer $p(x) \in W_2^1(0,\pi)$, $q(x) \in W_2^1(0,\pi)$ ise $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu hemen hemen heryerde (3.8) , (3.9) ,(3.10) ve (3.11) denklemleri sağlanmaktadır. (3.5) den yararlanarak aşağıdaki hesaplamaları yapalım:

$a < x \leq \pi$ durumu için,

$$e(x,\lambda) = \alpha^+ R_2(x)\, e^{i\lambda\mu^+(x)} + \alpha^- R_3(x)\, e^{i\lambda\mu^-(x)} + \int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} K(x,t)\, e^{i\lambda t} dt$$

fonksiyonunun $-\mu^+(x) < \mu^-(x) < \mu^+(x)$ durumunu gözönünde bulundurarak $e'(x,\lambda)$, $e''(x,\lambda)$ türevleri alınırsa;

$$e'(x,\lambda) = \alpha^+ R_2'(x)\, e^{i\lambda\mu^+(x)} + i\lambda\alpha^+\alpha R_2(x)\, e^{i\lambda\mu^+(x)} + \alpha^- R_3'(x)\, e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

$$- i\lambda\alpha^-\alpha R_3(x)\, e^{i\lambda\mu^-(x)} - \alpha K(x, \mu^-(x) - 0)\, e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

$$+ \alpha K(x, -\mu^+(x))\, e^{-i\lambda\mu^+(x)} + \alpha K(x, \mu^+(x))\, e^{i\lambda\mu^+(x)}$$

$$+\alpha K\left(x,\mu^{-}(x)+0\right)e^{i\lambda\mu^{-}(x)}+\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}e^{i\lambda t}dt$$

$$e''(x,\lambda)=\alpha^{+}R_2''(x)\,e^{i\lambda\mu^{+}(x)}+2i\lambda\alpha^{+}\alpha R_2'(x)\,e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$-\lambda^2\alpha^{+}\alpha^2R_2(x)\,e^{i\lambda\mu^{+}(x)}+\alpha^{-}R_3''(x)\,e^{i\lambda\mu^{-}(x)}-2i\lambda\alpha^{-}\alpha R_3'(x)\,e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$-\lambda^2\alpha^{-}\alpha^2R_3(x)\,e^{i\lambda\mu^{-}(x)}-\alpha e^{i\lambda\mu^{-}(x)}\frac{d}{dx}K\left(x,\mu^{-}(x)-0\right)$$

$$+i\lambda\alpha^2K\left(x,\mu^{-}(x)-0\right)e^{i\lambda\mu^{-}(x)}+\alpha e^{-i\lambda\mu^{+}(x)}\frac{d}{dx}K\left(x,-\mu^{+}(x)\right)$$

$$-i\lambda\alpha^2K\left(x,-\mu^{+}(x)\right)e^{-i\lambda\mu^{+}(x)}-\alpha\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=\mu^{-}(x)-0}e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$+\alpha\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=-\mu^{+}(x)}e^{-i\lambda\mu^{+}(x)}+\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial x^2}e^{i\lambda t}dt$$

$$+\alpha e^{i\lambda\mu^{+}(x)}\frac{d}{dx}K\left(x,\mu^{+}(x)\right)+i\lambda\alpha^2K\left(x,\mu^{+}(x)\right)e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$+\alpha e^{i\lambda\mu^{-}(x)}\frac{d}{dx}K\left(x,\mu^{-}(x)+0\right)-i\lambda\alpha^2K\left(x,\mu^{-}(x)+0\right)e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$-\alpha\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=\mu^{+}(x)}e^{i\lambda\mu^{+}(x)}+\alpha\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=\mu^{-}(x)+0}e^{i\lambda\mu^{-}(x)} \tag{3.45}$$

eşitliği elde edilir.

(3.1) denklemindeki y ve y'' ifadelerinin yerine sırasıyla $e(x,\lambda)$ ve $e''(x,\lambda)$ fonksiyonlarının (3.5) ve (3.45) ifadeleri yazılırsa;

$$\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial x^2}e^{i\lambda t}dt+\alpha^{+}R_2''(x)\,e^{i\lambda\mu^{+}(x)}+2i\lambda\alpha^{+}\alpha R_2'(x)\,e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$-\lambda^2\alpha^{+}\alpha^2R_2(x)\,e^{i\lambda\mu^{+}(x)}+\alpha^{-}R_3''(x)\,e^{i\lambda\mu^{-}(x)}-2i\lambda\alpha^{-}\alpha R_3'(x)\,e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$-\lambda^2\alpha^{-}\alpha^2R_3(x)\,e^{i\lambda\mu^{-}(x)}-\alpha e^{i\lambda\mu^{-}(x)}\frac{d}{dx}K\left(x,\mu^{-}(x)-0\right)$$

$$+i\lambda\alpha^2K\left(x,\mu^{-}(x)-0\right)e^{i\lambda\mu^{-}(x)}+\alpha e^{-i\lambda\mu^{+}(x)}\frac{d}{dx}K\left(x,-\mu^{+}(x)\right)$$

$$-i\lambda\alpha^2K\left(x,-\mu^{+}(x)\right)e^{-i\lambda\mu^{+}(x)}-\alpha\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=\mu^{-}(x)-0}e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$+\alpha \left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=-\mu^{+}(x)} e^{-i\lambda\mu^{+}(x)}+\alpha e^{i\lambda\mu^{+}(x)}\frac{d}{dx}K\left(x,\mu^{+}(x)\right)$$

$$+i\lambda\alpha^{2}K\left(x,\mu^{+}(x)\right)e^{i\lambda\mu^{+}(x)}+\alpha e^{i\lambda\mu^{-}(x)}\frac{d}{dx}K\left(x,\mu^{-}(x)+0\right)$$

$$-i\lambda\alpha^{2}K\left(x,\mu^{-}(x)+0\right)e^{i\lambda\mu^{-}(x)}-\alpha \left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=\mu^{+}(x)} e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$+\alpha \left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=\mu^{-}(x)+0} e^{i\lambda\mu^{-}(x)}+\lambda^{2}\alpha^{2}\alpha^{+}R_{2}(x)e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$+\lambda^{2}\alpha^{2}\alpha^{-}R_{3}(x)e^{i\lambda\mu^{-}(x)}+\lambda^{2}\alpha^{2}\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

$$-2\lambda p(x)\alpha^{+}R_{2}(x)e^{i\lambda\mu^{+}(x)}-2\lambda p(x)\alpha^{-}R_{3}(x)e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$-2\lambda p(x)\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt-q(x)\alpha^{+}R_{2}(x)e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$-q(x)\alpha^{-}R_{3}(x)e^{i\lambda\mu^{-}(x)}-q(x)\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt=0 \tag{3.46}$$

alınır. (3.46) eşitliğindeki

$$\lambda^{2}\alpha^{2}\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt\ ,\ -2\lambda p(x)\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

integralleri değerlendirilirse;

$$\lambda^{2}\alpha^{2}\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt=\lambda^{2}\alpha^{2}\left(\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{-}(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt+\int\limits_{\mu^{-}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt\right)$$

$$=-i\lambda\alpha^{2}\left(\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{-}(x)}K(x,t)\,d\left(e^{i\lambda t}\right)+\int\limits_{\mu^{-}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)\,d\left(e^{i\lambda t}\right)\right)$$

$$=-i\lambda\alpha^{2}\left[K(x,t)e^{i\lambda t}\Big|_{t=-\mu^{+}(x)}^{\mu^{-}(x)-0}+K(x,t)e^{i\lambda t}\Big|_{t=\mu^{-}(x)+0}^{\mu^{+}(x)}-\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}e^{i\lambda t}dt\right]$$

$$=-i\lambda\alpha^{2}K\left(x,\mu^{-}(x)-0\right)e^{i\lambda\mu^{-}(x)}+i\lambda\alpha^{2}K\left(x,-\mu^{+}(x)\right)e^{-i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$-i\lambda\alpha^2 K\left(x,\mu^+(x)\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+i\lambda\alpha^2 K\left(x,\mu^-(x)+0\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

$$+\alpha^2\int\limits_{\mu^-(x)}^{\mu^+(x)}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}d\left(e^{i\lambda t}\right)+\alpha^2\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^-(x)}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}d\left(e^{i\lambda t}\right)$$

$$=-i\lambda\alpha^2 K\left(x,\mu^-(x)-0\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}+i\lambda\alpha^2 K\left(x,-\mu^+(x)\right)e^{-i\lambda\mu^+(x)}$$

$$-i\lambda\alpha^2 K\left(x,\mu^+(x)\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+i\lambda\alpha^2 K\left(x,\mu^-(x)+0\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

$$+\alpha^2\left[e^{i\lambda t}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=-\mu^+(x)}^{\mu^-(x)-0}+e^{i\lambda t}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=\mu^-(x)+0}^{\mu^+(x)}-\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}e^{i\lambda t}dt\right]$$

$$=-i\lambda\alpha^2 K\left(x,\mu^-(x)-0\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}+i\lambda\alpha^2 K\left(x,-\mu^+(x)\right)e^{-i\lambda\mu^+(x)}$$

$$-i\lambda\alpha^2 K\left(x,\mu^+(x)\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+i\lambda\alpha^2 K\left(x,\mu^-(x)+0\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

$$+\alpha^2 e^{i\lambda\mu^-(x)}\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right|_{t=\mu^-(x)-0}-\alpha^2 e^{-i\lambda\mu^+(x)}\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right|_{t=-\mu^+(x)}$$

$$+\alpha^2 e^{i\lambda\mu^+(x)}\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right|_{t=\mu^+(x)}-\alpha^2 e^{i\lambda\mu^-(x)}\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right|_{t=\mu^-(x)+0}$$

$$-\alpha^2\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}e^{i\lambda t}dt \tag{3.47}$$

ve

$$-2\lambda p(x)\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt=-2\lambda p(x)\left(\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^-(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt+\int\limits_{\mu^-(x)}^{\mu^+(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt\right)$$

$$=2ip(x)\left(\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^-(x)}K(x,t)d\left(e^{i\lambda t}\right)+\int\limits_{\mu^-(x)}^{\mu^+(x)}K(x,t)d\left(e^{i\lambda t}\right)\right)$$

$$=2ip(x)\left[K(x,t)e^{i\lambda t}\Big|_{t=-\mu^+(x)}^{\mu^-(x)-0}+K(x,t)e^{i\lambda t}\Big|_{t=\mu^-(x)+0}^{\mu^+(x)}-\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}e^{i\lambda t}dt\right]$$

$$=2ip(x)K\left(x,\mu^-(x)-0\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}-2ip(x)K\left(x,-\mu^+(x)\right)e^{-i\lambda\mu^+(x)}$$

$$+2ip(x)K\left(x,\mu^+(x)\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}-2ip(x)K\left(x,\mu^-(x)+0\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

$$-2ip(x)\int\limits_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)}\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}e^{i\lambda t}dt \tag{3.48}$$

ifadeleri elde edilir (3.47) ve (3.48) eşitlikleri (3.46) da yerlerine yazılırsa;

$$\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)} \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} e^{i\lambda t} dt + \alpha^{+} R_2''(x) e^{i\lambda\mu^{+}(x)} + 2i\lambda\alpha^{+}\alpha R_2'(x) e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$-\lambda^2\alpha^{+}\alpha^2 R_2(x) e^{i\lambda\mu^{+}(x)} + \alpha^{-} R_3''(x) e^{i\lambda\mu^{-}(x)} - 2i\lambda\alpha^{-}\alpha R_3'(x) e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$-\lambda^2\alpha^{-}\alpha^2 R_3(x) e^{i\lambda\mu^{-}(x)} - \alpha e^{i\lambda\mu^{-}(x)} \frac{d}{dx} K(x,\mu^{-}(x)-0)$$

$$+ i\lambda\alpha^2 K(x,\mu^{-}(x)-0) e^{i\lambda\mu^{-}(x)} + \alpha e^{-i\lambda\mu^{+}(x)} \frac{d}{dx} K(x,-\mu^{+}(x))$$

$$- i\lambda\alpha^2 K(x,-\mu^{+}(x)) e^{-i\lambda\mu^{+}(x)} - \alpha \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} \right|_{t=\mu^{-}(x)-0} e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$+ \alpha \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} \right|_{t=-\mu^{+}(x)} e^{-i\lambda\mu^{+}(x)} + \alpha e^{i\lambda\mu^{+}(x)} \frac{d}{dx} K(x,\mu^{+}(x))$$

$$+ i\lambda\alpha^2 K(x,\mu^{+}(x)) e^{i\lambda\mu^{+}(x)} + \alpha e^{i\lambda\mu^{-}(x)} \frac{d}{dx} K(x,\mu^{-}(x)+0)$$

$$- i\lambda\alpha^2 K(x,\mu^{-}(x)+0) e^{i\lambda\mu^{-}(x)} - \alpha \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} \right|_{t=\mu^{+}(x)} e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$+ \alpha \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} \right|_{t=\mu^{-}(x)+0} e^{i\lambda\mu^{-}(x)} + \lambda^2\alpha^2\alpha^{+} R_2(x) e^{i\lambda\mu^{+}(x)} + \lambda^2\alpha^2\alpha^{-} R_3(x) e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$- i\lambda\alpha^2 K(x,\mu^{-}(x)-0) e^{i\lambda\mu^{-}(x)} - i\lambda\alpha^2 K(x,-\mu^{+}(x)) e^{-i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$+ i\lambda\alpha^2 K(x,\mu^{+}(x)) e^{i\lambda\mu^{+}(x)} - i\lambda\alpha^2 K(x,\mu^{-}(x)+0) e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$+ \alpha^2 e^{i\lambda\mu^{-}(x)} \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \right|_{t=\mu^{-}(x)-0} - \alpha^2 e^{-i\lambda\mu^{+}(x)} \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \right|_{t=-\mu^{+}(x)}$$

$$+ \alpha^2 e^{i\lambda\mu^{+}(x)} \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \right|_{t=\mu^{+}(x)} - \alpha^2 e^{i\lambda\mu^{-}(x)} \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \right|_{t=\mu^{-}(x)+0}$$

$$- \alpha^2 \int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)} \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} e^{i\lambda t} dt - 2\lambda p(x) \alpha^{+} R_2(x) e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$- 2\lambda p(x) \alpha^{-} R_3(x) e^{i\lambda\mu^{-}(x)} + 2ip(x) K(x,\mu^{-}(x)-0) e^{i\lambda\mu^{-}(x)}$$

$$- 2ip(x) K(x,-\mu^{+}(x)) e^{-i\lambda\mu^{+}(x)} + 2ip(x) K(x,\mu^{+}(x)) e^{i\lambda\mu^{+}(x)}$$

$$- 2ip(x) K(x,\mu^{-}(x)+0) e^{i\lambda\mu^{-}(x)} - 2ip(x) \int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)} \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} e^{i\lambda t} dt$$

$$-q(x)\,\alpha^{+}R_2(x)\,e^{i\lambda\mu^{+}(x)}-q(x)\,\alpha^{-}R_3(x)\,e^{i\lambda\mu^{-}(x)}-q(x)\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}K(x,t)\,e^{i\lambda t}dt=0$$

alınır. Buradan ise

$$\int\limits_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}\left[\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial x^2}-\alpha^2\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial t^2}-2ip(x)\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}-q(x)K(x,t)\right]e^{i\lambda t}dt$$

$$+e^{i\lambda\mu^{+}(x)}\left\{\alpha^{+}R_2''(x)+2i\lambda\alpha^{+}\alpha R_2'(x)+\alpha\frac{d}{dx}K(x,\mu^{+}(x))+\alpha\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=\mu^{+}(x)}+\right.$$

$$\left.+2ip(x)K(x,\mu^{+}(x))+\alpha^2\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right|_{t=\mu^{+}(x)}-2\lambda p(x)\,\alpha^{+}R_2(x)-q(x)\,\alpha^{+}R_2(x)\right\}$$

$$+e^{i\lambda\mu^{-}(x)}\left\{\alpha^{-}R_3''(x)-2i\lambda\alpha^{-}\alpha R_3'(x)-\alpha\frac{d}{dx}K(x,\mu^{-}(x)-0)-\alpha\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=\mu^{-}(x)-0}\right.$$

$$+\alpha\frac{d}{dx}K(x,\mu^{-}(x)+0)+\alpha\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=\mu^{-}(x)+0}+\alpha^2\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right|_{t=\mu^{-}(x)-0}+$$

$$-\alpha^2\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right|_{t=\mu^{-}(x)+0}-2\lambda p(x)\,\alpha^{-}R_3(x)+2ip(x)K(x,\mu^{-}(x)-0)-$$

$$\left.-2ip(x)K(x,\mu^{-}(x)+0)-q(x)\,\alpha^{-}R_3(x)\right\}$$

$$+e^{-i\lambda\mu^{+}(x)}\left\{\alpha\frac{d}{dx}K(x,-\mu^{+}(x))+\alpha\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=-\mu^{+}(x)}-\alpha^2\left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right|_{t=-\mu^{+}(x)}\right.$$

$$\left.-2ip(x)K(x,-\mu^{+}(x))\right\}=0$$

veya

$$\alpha\frac{d}{dx}K(x,\mu^{+}(x))+\alpha\left[\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}+\alpha\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right]_{t=\mu^{+}(x)}+2ip(x)K(x,\mu^{+}(x))+$$

$$+\alpha^{+}R_2''(x)+2i\lambda\alpha^{+}\alpha R_2'(x)-2\lambda p(x)\,\alpha^{+}R_2(x)-q(x)\,\alpha^{+}R_2(x)=0$$

$$-\alpha\frac{d}{dx}K(x,\mu^{-}(x)-0)-\alpha\left[\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}-\alpha\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right]_{t=\mu^{-}(x)-0}+$$

$$+\alpha\frac{d}{dx}K(x,\mu^{-}(x)+0)+\alpha\left[\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}-\alpha\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right]_{t=\mu^{-}(x)+0}+$$

$$+2ip(x)K(x,\mu^{-}(x)-0)-2ip(x)K(x,\mu^{-}(x)+0)+\alpha^{-}R_3''(x)$$

$$- 2i\lambda\alpha^{-}\alpha R_3'(x) - 2\lambda p(x)\alpha^{-}R_3(x) - q(x)\alpha^{-}R_3(x) = 0$$

$$\alpha\frac{d}{dx}K\left(x,-\mu^{+}(x)\right) + \alpha\left[\frac{\partial K(x,t)}{\partial x} - \alpha\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right]_{t=-\mu^{+}(x)}$$

$$- 2ip(x)K\left(x,-\mu^{+}(x)\right) = 0$$

eşitlikleri elde edilmiş olur. Burada

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{dt}{dx} \text{ diferansiyel operatörü ve } \beta(x) = \int_0^x p(t)dt \text{ olmak üzere}$$

$$R_2(x) = e^{-\frac{i}{\alpha}\beta(x)},\ R_2'(x) = -\frac{i}{\alpha}p(x)R_2(x),\ R_2''(x) = \left[-\frac{i}{\alpha}p'(x) - \frac{1}{\alpha^2}p^2(x)\right]R_2(x)$$

$$R_3(x) = e^{\frac{i}{\alpha}\beta(x)},\ R_3'(x) = \frac{i}{\alpha}p(x)R_3(x),\ R_3''(x) = \left[\frac{i}{\alpha}p'(x) - \frac{1}{\alpha^2}p^2(x)\right]R_3(x)$$

eşitlikleri gözönünde bulundurulursa (3.8)-(3.10) eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca her λ için

$$\int_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}\left[\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} - 2ip(x)\frac{\partial K(x,t)}{\partial t} - q(x)K(x,t)\right]e^{i\lambda t}dt = 0 \tag{3.49}$$

eşitliği elde edilir.(3.49) eşitliğinin sol tarafındaki ifade herhangi bir fonksiyonun Fourier dönüşümü olduğundan Fourier dönüşümünün tekliğinden dolayı alırız ki $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu h.h.h.y. (3.11) denklemini sağlamaktadır.

$0 \le x \le a$ olması durumunda $\mu^{+}(x) = x$ ve $\alpha = 1$ olacağından,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}K(x,x) + ip(x)K(x,x) &= \frac{1}{2}\left[ip'(x) + q(x) + p^2(x)\right]R_1(x) \\ \frac{d}{dx}K(x,-x) - \frac{i}{2}p(x)K(x,-x) &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerinden

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\left\{ip(x) + \int_0^x\left[q(t) + p^2(t)\right]\right\}e^{-i\beta(x)}$$

ve

$$K(x,-x)=\frac{i}{2}p(0)\,e^{i\beta(x)}$$

eşitliklerinin alınacağı açıktır.

Sonuç olarak tezde ispatlanan Teorem 3.1 den $p(x)\neq 0$, $\rho(x)\equiv 1$ iken [11] çalışmasındaki Teorem1.1, $p(x)\equiv 0$, $\rho(x)\neq 0$ iken ise [15] çalışmasındaki Teorem1.1 elde edilmektedir.

KAYNAKLAR

Akhmedova E.N.(2002). On Represantation of Solution of Sturm-Liouville Equation With Discontinious Coefficients, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan v XVI, (XXIV) pp 5-9.

Ambartsumyan.V.A. (1929). Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53, 690-695.

Amirov, R. Kh. and Yurko, V.A. (2001). On Differential Operators with a Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval. Ukr. Math. Jour., V.53, No:11, pp. 1443-1458.

Amirov, R. Kh. (2002). Direct and Inverse Problems for Differential Operators with a Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval Transactions of NAS Azerbaijan., Vol 22, No:1, pp. 21-39.

Amirov, R. Kh. (2006). On Sturm-Liouville Operators with Discotinuity conditions inside an interval, J. Math. Anal. Appl., 317 , pp. 163-176.

Borg,G. (1945). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78, 1-96.

Delsarte, J. (1938). Sur Certains Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Linears Aux Derivees Partielles du Second-Order, C. R. Hebd. Acad. Sci.,206,pp. 178-182.

Delsarte, J. and Lions J. (1957). Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, Comm. Math. Helv., 32(2), pp. 113-128.

Gasimov, M.G. and Levitan, B.M. (1964). About Sturm-Liouville Differential Operators, Math. Sborn., 63 (105), No. 3.

Gasimov, M.G. (1965). Determination of Singular Sturm-Lioville Operators According to two Spectrums., Dokl. Akad., Nauk SSSR. Vol 161, No 2, pp. 274-276.

Gasimov, M.G. and Amirov, R. Kh. (1985). Direct and Inverse Spectral

Problems for Second Order Differential Operators which has Coulumb Singularity., Dokl. Akad., Nauk Az.SSR., Vol 41 ,No.8, pp. 1-5.

Gelfand, I. M. and Levitan, B.M. (1951). On the Determination of a Differential Equation by its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 15, pp. 309-360.

Guseinov,G.Sh. (1984). Asymptotic formulas for solutions and eigenvalues of quadratic pencil of Sturm-Liouville equations., Preprint No. 113, Inst. Phys. Akad. Nauk Azerb SSR Baku 49p.

Levitan, B. M. (1964). Generalized Translation Operators and some o its Applications, Jerusalem.

Marchenko V.A. (1977). Sturm-Liouville Operators and their Applications, Kiev, Naukova Dumka.

Naimark, M. A. (1967). Linear Differential Operators, Moscow, Nauka, (in Russian).

Povzner, A. V. (1948). On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb, 23.

ÖZGEÇMİŞ

Seval KARACAN 1984 yılında Sivas'ta doğdu. İlköğretim ve ortaöğretimini Sivas'ta tamamladı. 2002 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik öğretmenliği bölümünü kazandı ve 2007 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2007 yılından itibaren Orta öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.