STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMLERİN YEREL(LOKAL) ÇÖZÜMÜ VE ÇÖZÜMÜN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

ÖMER KİŞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2010

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMLERİN YEREL(LOKAL) ÇÖZÜMÜ VE ÇÖZÜMÜN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

ÖMER KİŞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. RAUF AMİROV

SİVAS
2010

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmış ve jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	Prof. Dr. Hüseyin SARI
Üye	Prof. Dr. Rauf AMİROV
Üye	Yrd. Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

…/…/2010

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Sezai ALAGÖZ

TEŞEKKÜR

Araştırmalarımın başından sonuna kadar tüm safhalarında yardımını esirgemeyip, değerli fikir ve tecrübeleriyle bana büyük destek sağlayan değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Rauf AMİROV' a ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

ÖMER KİŞİ

ÖZET

STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMLERİN YEREL(LOKAL) ÇÖZÜMÜ VE ÇÖZÜMÜN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

ÖMER KİŞİ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: PROF. DR. RAUF AMİROV

2010, 90 sayfa

Bu çalışmanın amacı Kuantum fiziğinin önemli denklemi olan bir boyutlu Coulumb Potansiyelli Schrödinger denklemi için konulan ters problemin öğrenilmesi ve ters problemlerin yerel(lokal) çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili teoremlerin ispatlanmasıdır. Bu amaçla tezin giriş bölümünde, önceden yapılan çalışmalar özetlenmiştir. Birinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde sonlu aralıkta Coulumb potansiyele sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörü, birinci mertebeden denklem sistemine indirgenmiş, ve bu sistemin çözümünün bir gösterimi elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, verilen operatörün spektrumunun özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde genel hali ile verilen Sturm-Liouville sınır değer problemi için ters problem kurulmuş ve yerel çözümlerden bahsedilmiştir. Beşinci bölümde ise verilen diferansiyel denklem ve sınır koşullarının ürettiği operatör için ters problem kurulmuş ve yerel(lokal) çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

ABSTRACT

THEOREMS ON THE EXISTENCE AND THE UNIQUENESS
OF THE LOCAL SOLUTIONS OF INVERSE PROBLEMS
FOR STURM-LİOUVİLLE PROBLEMS

ÖMER KİŞİ

Master of Science Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. RAUF AMİROV
2010, 90 pages

The aim of the present study is to prove the theorems on the learning of the inverse problem for one dimensional Coulumb Potential Schrödinger equation which is an important equation of Quantum Physics and the existence and the uniqueness of the local solutions for inverse problems. For this reason, the previous studies are summarized in the introduction part of the present thesis. In the first part, the basic definitions and theorems used in the thesis are given. In the second part, the Sturm-Liouville differential operators with Coulumb potential at finite interval is reduced to a first degree equation system and a display of the solution of this system is obtained. In the third part, the features of the spectrum of the given operator are analyzed. In the fourth part, a test problem is established for the Sturm-Liouville limit value problem given in its general state and local solutions are discussed. In the fifth part, an inverse problem is established for the differential equation and the operator produced by limit conditions, and the theorems on the existence and the uniqueness of local solutions are proved.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Spektral analizin bir dalı olan inverse (ters) problemler yani, spektral karakteristiklere göre operatörlerin kurulması problemi, fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin mekanikte, verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesinde, Kuantum mekaniğinde, verilen enerji seviyelerine veya saçılma verilerine göre, parçacıklar arasında etkileşiminin öğrenilmesinde, jeofizikte yeraltı madenlerinin aranmasında karşımıza çıkmaktadır.

Bu yüzden verilen sistemin enerji seviyelerinin ve dalga boylarının bulunması en önemli problemlerden biridir. Söz konusu problemlerin çözümü, farklı potansiyelli Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinin özdeğer, özfonksiyon ve normalleştirici sayılarının bulunmasına indirgenmektedir.

Ayrıca, Kuantum teorisinin önemli problemlerinden birisi de sistemin enerji seviyeleri belli iken sistemin bulunduğu potansiyel alanı bulmaktır. Bu tip problemler, singülariteye sahip Sturm-Liouville operatörler için inverse (ters) problemler yardımıyla çözülmektedir. Bu yüzden de söz konusu operatörler, n spektral karakteristiklere göre belirlenmesi probleminin çözülmesi önem taşımaktadır.

Tanım 01: Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları toplanabilir fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan diferansiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Riestz, Neumann, Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tara-fından bir süre sonra yapılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q\left(x\right)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q\left(x\right)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar, 1949 yılında Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular Courant, Carleman, Birman, Salamyak, Maslov, Keldish vs. matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Tanım 0.2: L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerinin bulunması problemine düz problem, spektral karaktristikleri verildiğinde bu Sturm-Liouville tipinde hangi L diferansiyel operatörün spektral karakteristikleri olduğu problemine ise ters problem denir.

Ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörlerin spektral analizinde önemli bir yere sahiptir ve de fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma Ambartsumyan'a (1929) aittir. 1929 yılında Ambartsumyan tarafından Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır:

Teorem 0.3: $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ 'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad 0 < x < \pi, \tag{0.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \tag{0.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$, $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

Ambartsumyan'm bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi Borg' a aittir ve elde ettiği sonuç, aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 0.4: $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ 'ler (0.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{0.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n, ...$ 'ler ise (0.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \tag{0.5}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.6}$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri, $q(x)$ fonksiyonu ve h,h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. ($h \neq h_1$ ve $h, h_{1,} H$ sonlu gerçel sayılardır)

Borg' un (1945) çalışmasında, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilir ve operatör bu dizilerin yardımıyla belirlenir. Yani bu tip operatörün varlığı önceden kabul edilir. Borg aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, Ambartsumyan' ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektruma göre Sturm-Liouville operatörünün belirlenebileceği Levinson' un (1949) çalışmalarında ispatlanmıştır. Ayrıca Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan çevirme operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde Delsarte, Lions (1938), (1956) ve Levitan, Gasimov (1964) tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak Povzner (1948) kendi çalışmalarında incelemiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi Marchenko (1950) tarafından kaydedilmiştir. Marchenko bu çalışmasında ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (0.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \tag{0.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise (0.1) diferansiyel denklemi ve ayrık sınır koşullarının ürettiği operatörün özfonksyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)\, dx \tag{0.8}$$

sayıları verilen operatörün normalleştirici sayıları;

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere Marchenko, Borg'un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşulu verilmiştir. Marchenko' nun çalışmalarıyla hemen hemen aynı zamanda Krein (1951) ve (1954) çalışmalarında Sturm-Liouville tipinde diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve$\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında Marchenko' nun çalışması yayınlanmadan önce Tikhonov (1949) tarafından Marchenko' nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. Tikhonov' un (1949) çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 0.5: $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda\rho^2(x)\,U = 0, \quad x > 0, \quad U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ dır. $R(\lambda) = \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

Gelfand ve Levitan' ın (1951) çalışmalarında, $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $(\alpha_n > 0)$ dizilerine göre belirlenmesi, için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimptotik eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\alpha_0}{n} + ... + \frac{\alpha\left\|\frac{m}{2}\right\|}{n^2\left\|\frac{m}{2}\right\| + 1} + \frac{\gamma_n}{n^2\left\|\frac{m}{2}\right\| + 1},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + ... + \frac{b\left\|\frac{m}{2}\right\|}{n^2\left\|\frac{m}{2}\right\| + 1} + \frac{\tau_n}{n^2\left\|\frac{m}{2}\right\| + 1}$$

Burada $\alpha_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi q(t)\,dt\right]$ dir. Eğer çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve

$\sum \left(\frac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek ise $\sum \left(\frac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektrumuna göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville opertörünün belirlenmesi Levitan ve Gasimov'un (1964) çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n$. çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.9) formülü iki spetruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de eğer, dizileri $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{\alpha_0}{n} + \frac{\alpha_1}{n^3} + 0\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ \sqrt{\mu_n} &= n + \frac{\alpha_0'}{n} + \frac{\alpha_1'}{n^3} + 0\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned} \tag{0.9}$$

şeklindeki klasik asimptotik formülleri sağlarsa, (0.9) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadeleri bulunur. Buradan $q(x)$ sürekli fonksiyon olduğu durumda $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin (0.1) formundaki denklemin iki spektrumu olması için gerek ve yeter koşullar alınır. Bu koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralıdır, yani $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < ...$ şeklindedir.

2) λ_n ve μ_n 'ler $(0.9')$ asimptotik formüllerine sahiptir.

3) $\alpha_0 \neq \alpha_0'$

Şimdi ise, singüler Sturm-Liouville operatörleriyle ilgili bazı sonuçlardan kısaca bahsedilecektir.

Gasimov' un (1965) çalışmasında,

$$-y'' + \left\{\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x)\right\} y = \lambda_y \tag{0.10}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0, \tag{0.11}$$

$$y'(\pi) - H_1 y(\pi) = 0, \tag{0.12}$$

$$y'(\pi) - H_2 y(\pi) = 0, \tag{0.12'}$$

sınır koşullan ile verilen diferansiyel operatörü incelenmiş ve bu diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü verilmiştir.

Teorem 0.6: l pozitif tamsayı, $q(x) \in L_2[0,\pi]$ olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, ...$ ve $\mu_0, \mu_1, ...$ dizileri sırasıyla $(0.10), (0.11), (0.12)$ ve $(0.10), (0.11), (0.12')$ tipindeki diferansiyel operatörlerin özdeğerleri olması için:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) $\lambda_n = \left(n + \dfrac{l}{2}\right) + \alpha + a_n,$

$\mu_n = \left(n + \dfrac{l}{2}\right) + b + b_n,$

asimptotik formülleri sağlansın, burada $a \neq b$ ve $\{a_n\}, \{b_n\}$ dizileri öyle ki $\sum |a_n|^2, \sum |b_n|^2$ serileri yakınsaktır,

3) $\sum |A_n|^2$ serisi yakınsak olmak üzere $\mu_n - \lambda_n = b - a + \dfrac{A_n}{n}$ koşullarının sağlanması gerekli ve yeterli şarttır.

Gasimov ve Amirov'un (1985) çalışmasında,

$$+y'' + \left\{\frac{A}{x} + q(x)\right\} y = \lambda_y$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \tag{0.13}$$

$$y'(\pi) - h_1 y(\pi) = 0 \tag{0.14}$$

$$y'(\pi) - h_2 y(\pi) = 0 \tag{0.14'}$$

sınır koşulları ile verilen diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü ile ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 0.7: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) $\lambda_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2A_0 + a_n$

$\mu_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi}\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2A_0' + a_n'$

asimptotik formülleri sağlansın, burada $A_0 \neq A_0'$ ve $\{a_n\}, \{a_n'\}$ dizileri öyle ki $\sum |a_n|^2, \sum |a_n'|^2$ serileri yakınsaktır,

O halde bir $q(x)$ sürekli fonksiyonu ve h_1, h_2 gerçel sayıları vardır ki, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, $(0.13), (0.14), (0.15)$ operatörünün $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ ise $(0.13), (0.14), (0.15')$ operatörünün spektrumlarıdır ve

$$h_1 - h_2 = \pi\left(A_0' - A_0\right)$$

eşitliği sağlanır.

Diğer taraftan $W_2^{-1}(0,1)$ uzayında singüler reel değerli potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatör sınıfı için ters spektral problem Hryniv ve Mkytyuk (2003) çalışmasında incelenmiştir.

Bu çalışmada $q \in W_2^{-1}(0,1)$ reel değerli dağılım (distrubition) fonksiyonu olmak üzere $H := L_2(0,1)$ Hilbert uzayonda

$$l := -\frac{d^2}{dx^2} + q$$

diferansiyel ifadesine karşılık gelen T Sturm-Liouville operatörü tanımlanmış ve Savchuk ve Shkalikov'un (1999) çalışmasına göre, regülarizasyon yöntemi ile Dirichlet sınır koşullarından bahsedilmiştir.

Distrubition anlamında $\sigma' = q$ olacak şekilde reel değerli $\sigma \in H$ alınmış ve

$$D(T_\sigma) = \left\{u \in W_1^1(0,1) \middle|\, u' - \sigma u \in W_1^1(0,1),\ l_\sigma(u) \in H,\ u(0) = u(1) = 0\right.$$

kümesinde tanımlı

$$Tu = T_\sigma u = l_0(u) := -\left(u' - \sigma u\right)' - \sigma u'$$

operatörü yazılmıştır.

Burada, distribution anlamında bütün $u \in D(T_\sigma)$ için $l_0(u) = -u'' + qu$ ifadesi incelendiğinde özellikle T_σ operatörü regüler potansiyeller için ilkel

σ nın özel seçimine bağlı değildir, ve (0.16) ya karşılık gelen standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörü ile çakışır. Ayrıca T_σ , ilkel $\sigma \in H'$ ye düzgün rezolvent anlamında sürekli olarak bağlıdır, ve böylece T_σ , herhangi bir $q = \sigma' \in W_2^{-1}$ $(0,1)$ için (0.16) ya ait standart Dirichlet Sturm-Liouville operatörüdür. Ele alınan potansiyeller sınıfı Dirac $\delta-$ tipli ve $\frac{1}{x}-$ Coloumb tipli potansiyelleri içerir ve matematiksel fizik ve kuantum mekaniğinde geniş olarak kullanılır (Albeverio, Gesztesy, 1988) ve (Albeverio ve Kurasov, 2000)

Savchuk ve Shkalikov'un (1999) çalışmasından iyi bilinir ki, her reel değerli $\sigma \in H$ için yukarda tanımlanan T_σ operatörü, diskret basit $\left(\lambda_k^2\right)$, $k \in N$ spektrumlu self-adjoint operatördür ve $\lambda_1, \lambda_2 = \pi k + \mu k$ ($\mu k \in l_2$ olan dizi) şeklinde asimptotiğe sahiptir. (Savchuk ve Shkalikov,1999, Savchuk,2001, ve Hryniv, 2003). Regüler q potansiyelleri için yukarıdaki asimptotikler $\mu k = 0\left(\frac{1}{k}\right)$olacak şekilde yazılır.

Bu çalışmada " reel ikişerli farklı sayılardan oluşan ve yukarıda ifade edilen asimptotiklere sahip hangi $\left(\lambda_k^2\right)$ dizileri , $W_2^{-1}(0,1)$ den olan singüler potansiyelli Sturm-Liouville operatörlerinin spektrumudur " sorusunun cevabı araştırılmıştır. Bu soru , ele alınan potansiyeller için ters spektral probleme götürür. Yani bu durum, karşılık gelen spektral parametreye dayanan q potansiyelinin kurulmasıdır.

Regüler durumda, yukarıda bahsedilen problemin çözümü sadece $\left(\lambda_k^2\right)$ spektrumunun yetersiz olduğu bilinmektedir. Aynı Dirichlet spektrumlu Sturm-Liouville operatörlerinin ürettiği bir çok farklı q potansiyelleri (isospectral) vardır. Pöschel ve Trubowitz(1987), verilen $\left(\lambda_k^2\right)$ spektrumlu (reel, basit ve $\lambda_k = \pi k + 0\left(\frac{1}{k}\right)$ asimptotiğine ait) H Hilbert uzayındaki bütün potansiyellerin kümesinin, analitik olarak $\omega_n = n$ ağırlıkları ile $l_2(\omega_n)$ ağırlıklı uzaya difeomorfik olduğunu göstermişlerdir.

q potansiyelini yeniden tek olarak elde etmek için spektrumun yanında bazı ek bilgiler verilmelidir. Bu bilgiler, $(0,1)$ aralığının yarısı üzerindeki potansiyelin bilinmesi veya farklı sınır koşullar olan aynı diferansiyel ifade ile verilen

Sturm-Liouville operatörünün spektrumu veya biri bütün aralık için diğerleri aralığın eşit iki yarısı için olan üç spektrum olabilir.

Çevirme operatörlerine dayanan regüler Sturm-Liouville operatörünün spektral verisinden , q potansiyelini yeniden elde etmenin algoritması Marchenko (1950) ve Gelfand (1951) tarafından geliştirilen Gelfand-Levitan-Marchenko denklemi olarak adlandırılır. İki spektrum ile q potansiyelinin kurulumu için bir alternatif metod, Krein (1951) tarafından geliştirildi. Daha sonra H Hilbert uzayından potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için Trubowitz ve Pöschel (1987) tarafından farklı bir yaklaşım önerildi. Yazarlar spektral veriyi ve H ‘ deki potansiyeller arasındaki dönüşümü ayrıntılı olarak çalışmışlar ve ters spektral problemin çözülebilirliğini ispatlamışlardır. Özellikle spektral veriyi tam olarak karakterize etmişlerdir.

Hryniv ve Mkytyuk ‘ un (2003) çalışmasında Gelfand,Levitan ve Marchenko-’ya göre, klasik yaklaşım genelleştirilmiş ve W_2^{-1} den singüler potansiyellere sahip Sturm-Liouville operatörler sınıfı için ters spektral problem tam olarak çözülmüş-tür. Şöyle ki spektral veriler kümesinin açık bir şekli verilmiş ve bu kümenin keyfi bir elemanından q ’nun yeniden nasıl elde edildiği açıklanmıştır.

Diğer singülarite tiplerine göre (örneğin Sturm-Liouville operatörler sınıfı için α süreksizlik noktası $\frac{1}{x^{\gamma}}$ ‘ ya benzer potansiyeller vs.) , Hald (1984), Andersson (1988), Carlson (1994), Hald ve McLaughlin (1988), Yurko (200) ve Freiling (2002), Amirov ve Yurko (2001) bakmışlardır.

Aralığın iç noktasında singülariteye ve süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler, Amirov ve Yurko (2001) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $\pi = 0$ noktasında singülariteye sahip self-adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralığın iç noktasında çözümün süreksizliğe sahip olduğu durumu incelenmiştir ve verilen operatörün spektral özellikleri ve bu spektral özelliklere göre ters problemin konumu ve çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Benzer şekilde Amirov (2002) çalışmasında self-adjoint olmayan, Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahip olduğu durum incelenmiştir. Burada verilen diferansiyel operatörü üreten diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışları , operatörün spektral özellikleri , spektrumu basit olduğu durumda yani yalnızca özdeğerlerden oluştuğu durumda , özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon ve koşulmuş fonksiyonlara göre operatörün ayrılışımı, spektral parametrelere göre ters problemin konumu ve bu ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Amirov ‘ un (2006) çalışmasında, sonlu aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörler sınıfı için çevirme operatörü, çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri, spektral karakteristiklerinin bazı özellikleri ve ters problem için teklik teoremleri öğrenilmiştir.

Sonlu aralıkta Coloumb potansiyeline sahip Sturm- Liouville operatörleri için ters problemlerin araştırıldığı bu tezde aşağıdaki yol izlenmiştir :

1. Bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2. Bölümde sonlu aralıkta Coloumb potansiyele sahip Sturm-Liouville diferansiyel denklemi, birinci mertebeden denklem sistemine indirgenmiş ve bu sistemin çözümünün bir gösterilimi elde edilmiştir.

2.1 alt bölümünde ,

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = u(x)\, y_1 \\ y_2' - k^2 y_1 = -u(x)\, y_2 - u^2(x)\, y_1 + q(x)\, y_1 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

$$y_1(0) = 0,\ y_1(\pi) = 0 \tag{2.1.4}$$

olmak üzere (2.1.3)-(2.1.4) probleminin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$ başlangıç koşulunu sağlayan $y(x,k) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x,k)$ çözümünün

$$
\begin{cases}
y_1 = e^{ikx} + \int\limits_{-x}^{x} K_{11}(x,t)\, e^{ikt} dt \\
y_2 = ike^{ikx} + b(x)\ e^{ikx} + \int\limits_{-x}^{x} K_{21}(x,t)\, e^{ikt} dt + ik \int\limits_{-x}^{x} K_{22}(x,t)\, e^{ikt} dt
\end{cases}
\tag{2.1.7}
$$

şeklinde bir gösterilime sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca farklı bölgelerde $K_{ij}(x,t), (i,j = 1.2)$ fonksiyonları için integral denklemleri sistemi elde edilmiştir.

3. bölümde, verilen operatörün spektrumunun özellikleri, incelenmiştir.

3.1 alt bölümünde , $A = 0, q(x) \equiv 0$ durumuna karşılık gelen L_0 problemi-nin

$$
\Delta_0(k) = \sin k\pi
$$

karakteristik fonksiyonunun özellikleri ve L probleminin özdeğerlerinin özellikleri incelenmiştir.

3.2 alt bölümünde , L probleminin spektral karakteristiklerinin n ' nin yeterince büyük değerlerinde davranışları öğrenilmiştir.

3.3 alt bölümde L Sturm-Liouville sınır değer probleminin özfonksiyonlar sisteminin tam olduğu ve $L_2(0,\pi)$ de ortogonal bir taban oluşturduğu ispatlanacaktır.

4.bölümde,

$$
\begin{cases}
ly = -y'' + q(x)\, y = \lambda y \quad , \qquad \lambda = k^2 \quad , \quad 0 \le x \le \pi \\
y'(0) - hy(0) = 0 \\
y'(\pi) + Hy(\pi) = 0
\end{cases}
$$

sınır değer problemi için inverse problem kurulacaktır.

5.bölümde,

$y(x)$ aranan fonksiyon, A gerçel sabit; λ spektral parametre $q(x) \in L_2(0,\pi)$

gerçel değerli sınırlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$-y'' + \left\{ \frac{A}{x} + q(x) \right\} y(x) = \lambda y \quad , \quad 0 < x < \pi$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

sınır koşullarının ürettiği operatör için konulan ters problemin öğrenilmesi ve ters problemlerin yerel (lokal) çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili teoremler ispatlanacaktır.

1. BÖLÜM

Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1 : $\alpha \leq t \leq b$ olmak üzere $L_2[a,b]$ uzayı,

$$L_2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 \, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \, \overline{g(x)} \, dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $g(x) = \overline{g(x)}$).

Tanım 1.2 : l_2 uzayı

$$l_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \mid, \sum_{n=1} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3: L, $D(L)$ tanım kümesinde sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$L_y \equiv By' + Q(x)\, y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 1.4 : $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \left\{ y_1^2(x,\lambda_n) + y_2^2(x,\lambda_n) \right\} dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Tanım 1.5 : $L - \lambda I$ operatörünün sınırlı $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ ‘ lar kümesine L operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(L)$ ile gösterilir.

$$\sigma(L) = \{\lambda : Ly = \lambda y,\ y \in D(L)\}$$

Tanım (Adjoint Operatör) 1.6 : H_1 ile H_2 iki Hilbert uzayları ve $L : H_1 \longrightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \longrightarrow H_1$ operatörü $(Lx, y) = (x, L^*y)$ şartlarını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin adjointi denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne self adjoint operatör denir.

Tanım (Çevirme Operatörü) 1.7 : E lineer topolojik uzay, A ve B de $A : E \longrightarrow E,\ B : E \longrightarrow E$ şeklinde tanımı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır.

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatör çifti için çevirme operatörü denir.

Tanım 1.8 : $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse , $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 1.9 : $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ‘ ye tam fonksiyon denir.

Teorem (Rouché Teoremi) 1.10 : f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar olsunlar. Eğer γ, f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen , B içinde bulunan basit kapalı bir eğri ve de γ üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ ise bu durumda $f(z)$ ve $f(z)+g(z)$ fonksiyonlarının γ içindeki sıfırların sayısı katlılığı ile birlikte aynıdır.

Teorem (Cauchy İntegral Teoremi) 1.11 : $f(z)$ bağlantılı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon γ ise G ' de bulunan keyfi düzlendirilebilir kapalı eğri olacak biçimde $f(z)$ ' nin γ eğrisi üzerinden integrali sıfıra eşittir :

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

Teorem (Cauchy İntegral Teoremi) 1.12 : B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer α, γ içinde bir nokta ve $f(z)$ de analitik ise,

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

dir.

Tanım 1.13 : Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası z_0 olsun. Eğer,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası denir.

Teorem (Rezidü Teoremi) 1.14 : D bölgesinde ($f(z)$ nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, ..., z_n,$ noktaları hariç) ve D nin Γ sınırında analitik $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z=z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]$$

z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z=z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]$$

dir.$f(z)$ tam fonksiyon olmak üzere

$$R = \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt{|a_k|} \right)^{-1}$$

formülü ile tanımlı R sayısı

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_k z_k$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı ve $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ olsun.

Tanım 1.15 : $r > R$ için

$$M(r) < \exp(r^{\mu})$$

olacak şekilde $\mu > 0$ varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir ve yukarıda verilen eşitsizliği sağlayan μ sayılar kümesinin

$$p = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{l_n l_n M(r)}{l_n r}$$

formülü ile tanımlı p alt sınırına $f(z)$ nin mertebesi denir.

Tanım 1.16 : $f(z)$ tam fonksiyonunun mertebesi sonlu $p\,(0 < p < \infty)$ olmak üzere $r > R$ için

$$M(r) < \exp(ar^{p})$$

olacak şekilde $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir.

(1.1.1) eşitsizliğini sağlayan $\sigma = \inf\{a\}$ sayısına $f(z)$ fonksiyonun tipi denir ve

$$\sigma = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{p}}$$

formülüyle hesaplanır.

Tanım 1.17 : $\sigma = 0, 0 < \sigma < \infty$ olmak üzere $p\,(0 < p < \infty)$ mertebeli $f(z)$ tam fonksiyonu sırasıyla minimal, normal, maksimal tipe sahiptir denir.

Tanım(Mittag-Leffler Açılımı) 1.18: Bir $f(z)$ fonksiyonunun düzlemdeki aykırılıkları mutlak değer büyüklüğüne göre sıralanmış , basit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ kutup yerleri ve bu noktalardaki rezidüleri sırasıyla $b_1, b_2, b_3, ...$ olsun. Eğer A_N

hiçbir kutup yerinden geçmeyen , üzerinde $|f(z)| < M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği R_N yarıçaplı çember ise ve $N \longrightarrow \infty$ oluyorsa

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z - \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \right]$$

yazılır.

2. BÖLÜM
ÇÖZÜMÜN İNTEGRAL GÖSTERİMİ VE ÖZELLİKLERİ

2.1 İntegral Denkleminin Oluşturulması

$$l(y) := -y'' + \frac{A}{x}y + q(x)y$$

diferansiyel ifadesini ele alalım. Tanım 0.1 gereği bu ifade singüler diferansiyel ifadedir. Bu durumda $-y'' + \frac{A}{x}y + q(x)y = \lambda y$ veya başka bir gösterimle $l(y) = \lambda y$ diferansiyel denklemi bir singüler diferansiyel denklemdir. Ayrıca $y'(0)$ değeri mevcut değildir. Dolayısıyla öncelikle verilen diferansiyel operatörün bu ifadelere benzer değerleride tanımlı olacak şekilde yeni bir operatör tanımlamak gerekir. Bu operatörse , verilen operatörün self-adjoint genişlemesi olarak alınabilir.

$$l(y) = -y'' + \frac{A}{x}y + q(x)y = \lambda y,\ \lambda = k^2,\ 0 < x < \pi \tag{2.1.1}$$

diferansiyel denklemi

$$y(0) = 0,\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2.1.2}$$

sınır koşullarının ürettiği L problemini ele alalım. Burada λ spektral parametre, $q(x)$ gerçek değerli, sınırlı bir fonksiyon ve $q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir.

(2.1.1) diferansiyel denkleminde $u(x) = A\ln x \in L_2(0,\pi)$ olmak üzere $(\Gamma y)(x) = y' - u(x)y$ alınırsa,

$$\begin{aligned} l(y) &= -y'' + u'(x)y + q(x)y = -(y' - u(x)y)' - u(x)y' + q(x)y = k^2y \\ l(y) &= -[(\Gamma y)(x)]' - u(x)(\Gamma y)(x) - u^2(x)y + q(x)y = k^2y \end{aligned}$$

$$U(y) := y_1(0) = 0, \quad V(y) := (\Gamma y_2)(\pi) + Hy_1(\pi) = 0$$

elde edilir. Şimdi $y_1 = y$, $y_2(x) = y' - u(x)y = (\Gamma y)(x)$ denilirse,

$$\begin{cases} y_1' - u(x)y_1 = y_2 = \Gamma y_1 \\ y_2' + k^2y_1 = -u(x)y_2 - u^2(x)y_1 + q(x)y_1 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

$$y_1(0)=0,\ \left(\Gamma y_2\right)(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{2.1.4}$$

problemi elde edilir.

(2.1.3) sisteminin matris gösterilimi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -k^2-u^2+q(x) & -u(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

veya $A=\begin{pmatrix} u(x) & 1 \\ -k^2-u^2+q(x) & -u(x) \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y'=Ay$ matrisinin elemanları integrallenebilir olduklarından Naimark ' ın (1967) çalışmasında $y'=Ay+f,\ f\in L_1(0,\pi)$ sistemleri için başlangıç-değer probleminin çözümünün varlığı ile ilgili teorem gereği her $\zeta\in[0,\pi]$, $v=(v_1,v_2)^T\in A^2$ için (2.1.3) sisteminin $y_1(\zeta)=v_1$ $y_2(\zeta)=v_2$ başlangıç koşullarını sağlayan sadece bir tek çözümü vardır. Özel olarak $y_1(0)=1$, $y_2(0)=ik$ alınabilir.

Tanım 2.1.1 : (2.1.3) diferansiyel denklemler sisteminin $y_1(\zeta)=v_1, y_2(\zeta)=(\Gamma y)(\zeta)=v_2$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün birinci bileşenine ,(2.1.1) denkleminin aynı koşullarını sağlayan çözümü denir.

Şimdi (2.1.3) diferansiyel denklemler sisteminde $A=0$ ve $q(x)\equiv 0$ alınırsa

$$\begin{cases} y_1'-y_2=0 \\ y_2'+k^2y_1=0 \end{cases}$$

lineer homojen diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0)$ $=\begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}e^{ikx}$ dir. Lineer homojen sisteminin bir diğer çözümü de $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ -ik \end{pmatrix}e^{-ikx}$ dir. O halde lineer homojen sisteminin genel çözümü de

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix} c_1e^{ikx}+c_2e^{ikx} \\ ikc_1e^{ikx}-ikc_2e^{-ikx} \end{pmatrix}$ dir. Şimdi

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = u(x)\, y_1 \\ y_2' + k^2 y_1 = -u(x)\, y_2 - u^2(x)\, y_1 + q(x)\, y_1 \end{cases}$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulmak için,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x)\, e^{ikx} + c_2(x)\, e^{-ikx} \\ ikc_1(x)\, e^{ikx} - ikc_2(x)\, e^{-ikx} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} c_1'(x)\, e^{ikx} + c_2'(x)\, e^{-ikx} + ikc_1(x)\, e^{ikx} - ikc_2(x)\, e^{-ikx} \\ ikc_1'(x)\, e^{ikx} - ikc_2'(x)\, e^{-ikx} - k^2 c_1(x)\, e^{ikx} - k^2 c_2(x)\, e^{-ikx} \end{pmatrix}$$

alınır ve (2.1.4) sisteminde yerine yazılıp , parametrelerin değişimi metodu uygulanırsa;

$$\begin{cases} c_1(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \left[u(t)\, y_1 - \dfrac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right) e^{-ikt}\right] dt + c_1^0 \\ c_2(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \left[u(t)\, y_1 + \dfrac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\right] e^{ikt} dt + c_2^0 \end{cases}$$

elde edilir. $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ ifadeleri denklemde yerine yazılırsa;

$$\begin{cases} y_1(x,k) = c_1^0 e^{ikx} + c_2^0 e^{ikx} \\ +\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \left[u(t)\, y_1 - \dfrac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\right] e^{ik(x-t)} dt \\ +\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \left[u(t)\, y_1 + \dfrac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\right] e^{-ik(x-t)} dt \\ y_2(x,k) = ikc_1^0 e^{ikx} - ikc_2^0 e^{-ikx} \\ +\dfrac{ik}{2}\displaystyle\int_0^x \left[u(t)\, y_1 - \dfrac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\right] e^{ik(x-t)} dt \\ -\dfrac{ik}{2}\displaystyle\int_0^x \left[u(t)\, y_1 + \dfrac{1}{ik}\left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1\right)\right] e^{-ik(x-t)} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x,k) & = c_1^0 e^{ikx} + c_2^0 e^{-ikx} \\ & \quad + \int\limits_0^x \left[u(t)\, y_1 \cos\ k(x-t) \right. \\ & \quad \left. -\frac{1}{k} \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \sin\ k(x-t) \right] dt \\ y_2(x,k) & = ikc_1^0 e^{ikx} - ikc_2^0 e^{-ikx} \\ & \quad + \int\limits_0^x \left[-ku(t)\, y_1 \sin\ k(x-t) \right. \\ & \quad \left. - \left(u(t)\, y_2 + u^2(t)\, y_1 - q(t)\, y_1 \right) \cos\ k(x-t) \right] dt \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Dolayısıyla (2.1.3) sisteminin

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü;

$$\begin{cases} y_1(x,k) = & e^{ikx} + \int\limits_0^x [u(t)\, y_1(t) \cos k(x-t) - \frac{1}{k} \big(u(t)\, y_2(t) + u^2(t)\, y_1(t) \\ & - q(t)\, y_1(t) \big) \sin k(x-t)] dt \\ y_2(x,k) = & ike^{ikx} - \int\limits_0^x [ku(t)\, y_1(t) \sin k(x-t) + \big(u(t)\, y_2(t) + u^2(t)\, y_1(t) \\ & - q(t)\, y_1(t) \big) \cos k(x-t)] dt \end{cases}$$

olarak elde edilir Amirov'un [1] çalışmasında,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan her çözümünün

$$\begin{cases} y_1 = & e^{ikx} + \int\limits_{-x}^x K_{11}(x,t)\, e^{ikt} dt \\ y_2 = & ike^{ikx} + b(x)\, e^{ikx} + \int\limits_{-x}^x K_{21}(x,t)\, e^{ikt} dt + ik \int\limits_{-x}^x K_{22}(x,t)\, e^{ikt} dt \end{cases} \tag{2.1.6}$$

şeklinde bir integral gösterilimine sahip olduğu ispatlanmıştır. Burada $K_{ij}\left(x,t\right)$, $i,j=1,2$ ve $b\left(x\right)$ reel değerli fonksiyonlardır.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem (2.2.1): L probleminin

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için şu gösterim mevcuttur.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{ikx}+\int\limits_{-x}^{x}K_{11}\left(x,t\right)e^{ikt}dt \\ y_2 &= ike^{ikx}+b\left(x\right)e^{ikx}+\int\limits_{-x}^{x}K_{21}\left(x,t\right)e^{ikt}dt+ik\int\limits_{-x}^{x}K_{22}\left(x,t\right)e^{ikt}dt \end{aligned}$$

Burada $b\left(x\right)=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\left[u^2\left(s\right)-q\left(s\right)\right]e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{x}u\left(t\right)dt}ds$ ve

$$K\left(x,t\right)=\begin{pmatrix} K_{11}\left(x,t\right) & 0 \\ K_{21}\left(x,t\right) & K_{22}\left(x,t\right) \end{pmatrix}$$

$$K_{11}\left(x,x\right)=\frac{1}{2}u\left(x\right)$$

$$K_{21}\left(x,x\right)=\frac{1}{2}b'\left(x\right)-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}u^2\left(s\right)K_{11}\left(s,s\right)ds-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}u\left(s\right)K_{21}\left(s,s\right)ds$$

ve

$$K_{22}\left(x,x\right)=-\frac{1}{2}u\left(x\right)-b\left(x\right)$$

1

3. BÖLÜM

3.1 Karakteristik Fonksiyon ve Özellikleri

Bu bölümde L operatörünün spektrumunun özellikleri araştırılacaktır. $A = 0$ ve $q(x) \equiv 0$ olması durumunda L operatörü L_0 ile gösterilsin.

$$\varphi(x,k) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,k) \\ \varphi_2(x,k) \end{pmatrix}$$

fonksiyonu $\varphi(0,k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ başlangıç koşulunu sağlayan çözüm olsun $A = 0$ ve $q(x) \equiv 0$ olması durumunda bu çözüm $\varphi_0(x,k)$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \varphi_{01}(x,k) &= \frac{y_{01}(x,k) - \overline{y_{01}(x,k)}}{2i} = \sin kx \\ \varphi_{02}(x,k) &= \frac{y_{02}(x,k) - \overline{y_{02}(x,k)}}{2i} = k\cos kx \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\Delta_0(k)$ ile L_0 probleminin karakteristik fonksiyonu gösterilirse;

$$\varphi_{01}(\pi,k) = \Delta_0(k) = \sin k\pi = 0$$

olduğu açıktır. $\Delta_0(k)$ denkleminin $n \in IN$ için k_n^0 kökleri L_0 probleminin özdeğerleridir.

Tanım 3.1.1: $y(x,\lambda)$, $z(x,\mu) \in D(L)$ fonksiyonları

$$\int_0^\pi y(x,\lambda)\overline{z(x,\mu)}dx = 0$$

koşulunu sağlarsa; $y(x,\lambda)$, $z(x,\mu)$ fonksiyonları ortagonaldir denir.

Tanım 3.1.2: $y(x,\lambda) \in D(L)$ için α_n normalleştirici sayıları;

$$\alpha_n = \int_0^\pi y^2(x,\lambda_n)\,dx$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.1.3 (Lagrange Formülü) : $f, g \in D(L_0^*)$ olsun. Bu durumda;

$$(L_0^* f, g) = \int_0^\pi l(f)\,\overline{g}dx = (f, L_0^* g) + (f, \overline{g})\,|_0^\pi$$

eşitliği sağlanır.

Burada;

$$[f, \overline{g}]\Big|_0^\pi = \left[(\Gamma\overline{g})(x) f(x) - (\Gamma f)(x)\overline{g(x)}\right]\Big|_0^\pi$$

İspat:

$$\begin{aligned}(L_0^* f, g) &= -\int_0^\pi (f' - uf)'\,\overline{g}dx - \int_0^\pi u(f' - uf)\,\overline{g}dx - \int_0^\pi \left(u^2 - q(x)\right) f\overline{g}dx \\ &= \int_0^\pi (f' - uf)(\overline{g}' - u\overline{g})\,dx - \int_0^\pi \left(u^2 - q(x)\right) f\overline{g}dx - (\Gamma f)(x)\overline{g(x)}\,|_0^\pi \\ &= \int_0^\pi f l(\overline{g})\,dx + [f, \overline{g}]\,|_0^\pi = (f, L_0^* g) + (f, \overline{g})\,|_0^\pi\end{aligned}$$

Lemma 3.1.4:

$$\inf_{n \neq m} \left|k_n^0 - k_m^0\right| = q > 0$$

Yani $\Delta_0(k)$ karakteristik denkleminin kökleri ayrıktır.

İspat: Kabul edelim ki $\{k_n^0\}$ dizisinin $\{k_{np}^0\}$ ve $\left\{\widetilde{k}_{np}^0\right\}$ alt dizileri vardır; öyleki $k_{np}^0 \neq \widetilde{k}_{np}^0$ ve $p \to \infty$ iken

$$\lim_{p \to \infty} \left|k_{np}^0 - \widetilde{k}_{np}^0\right| = 0$$

dir. Yani $L_2(0, \pi)$ uzayında L_0 probleminin $\varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)$ ve $\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}^0\right)$ öz fonksiyonlarının ortagonallik koşulundan yararlanılırsa;

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^\pi \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)\overline{\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}^0\right)}dx \\ &= \int_0^\pi \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)\overline{\varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)}dx \\ &+ \int_0^\pi \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)\left[\overline{\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}\right) - \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)}\right]dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \left\| \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right) \right\|^2 dx + \int_0^\pi \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right) \left[\overline{\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)} \right] dx \\
&\geq \int_0^x \left\| \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right) \right\|^2 dx + \int_0^\pi \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right) \left[\overline{\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)} \right] dx \\
&= \int_0^x \sin^2\left(k_{np}^0 x\right) dx + \int_0^\pi \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right) \left[\overline{\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)} \right] dx \\
&= \int_0^x \left(\frac{1 - \cos\left(2k_{np}^0 x\right)}{2} \right) dx + \int_0^\pi \varphi_0\left(x. k_{np}^0\right) \left[\overline{\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)} \right] dx \\
&= \frac{x}{2} - \frac{\sin\left(2k_{np}^0 x\right)}{4k_{np}^0\,(x)} + \int_0^\pi \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right) \left[\overline{\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)} \right] dx \\
&= \frac{x}{2} + \int_0^\pi \varphi_0\left(x. k_{np}^0\right) \left[\overline{\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}\right) - \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right)} \right] dx
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Ayrıca;

$$
\begin{aligned}
\varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{np}^0\right) &= \sin\left(\widetilde{k}_{np}^0 x\right) - \sin\left(k_{np}^0 x\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{\widetilde{k}_{np}^0 - k_{np}^0}{2}\right) x \cos\left(\frac{\widetilde{k}_{np}^0 - k_{np}^0}{2}\right) x
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinden ve hipotezden,

$$
\lim_{p \to \infty} \left| \varphi_0\left(x, \widetilde{k}_{np}^0\right) - \varphi_0\left(x, k_{np}\right) \right| = 0
$$

yazılabileceğinden $p \to \infty$ iken limite geçersek $0 \geq \frac{x}{2}$ olur. Bu ise $0 < x < \pi$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki ile lemma ispatlanır.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Delta}(k) &= <\omega(x,k), \varphi(x,k)>, <y(x), z(x)> \\
: &= y(x)(\Gamma z)(x) - (\Gamma y)(x) z(x)
\end{aligned}
$$

olarak tanımlansın. $\varphi(x,k)$ fonksiyonu $\varphi(0,k) = 1 \;\; (\Gamma\varphi)(0,k) = h$ başlangıç koşullarını; $\omega(\pi,k) = 1$, $(\Gamma\omega)(\pi,k) = -H$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Açıktır ki $< \omega(x,k), \ \varphi(x,k) >$ ifadesi x değişkenine bağlı değildir. Gerçekten;

$$W[\varphi,\omega] = \begin{vmatrix} \varphi(x,k) & \omega(x,k) \\ (\Gamma\varphi)(x,k) & (\Gamma w)(x,k) \end{vmatrix} = \varphi(x,k)(\Gamma w)(x,k) - (\Gamma\varphi)(x,k)\,\omega(x,k)$$

$$\frac{dW}{dx} = \varphi(x,k)\,\omega''(x,k) - \varphi''(x,k)\,\omega(x,k)$$

Aynı zamanda $\varphi(x,k)$ ve $\omega(x,k)$ 2.1.1 denklemimizin bir çözümü olsunlar.

$$-\varphi''(x,k) + \frac{A}{x}\varphi(x,k) + q(x)\,\varphi(x,k) = \lambda\varphi(x,k)$$
$$-\omega''(x,k) + \frac{A}{x}\omega(x,k) + q(x)\,\omega(x,k) = \lambda\omega(x,k)$$

birinci denklemi $\omega(x,k)$, ikinci denklemi $\varphi(x,k)$ ile çarpıp, taraf tarafa çıkarıldığında;

$$\begin{aligned} \varphi(x,k)\,\omega''(x,k) - \varphi''(x,k)\,\omega(x,k) &= 0 \\ \frac{dW}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

olması açıktır. Yani $< \omega(x,k), \varphi(x,k) >$ ifadesi x değişkenine bağlı değildir ve

$$\Delta(k) = V(\varphi) = -U(\omega)$$

$x = 0$ için

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \omega(0,k)(\Gamma\varphi)(0,k) - \varphi(0,k)(\Gamma w)(0,k) \\ &= -\left((\Gamma w)(0,k) + h\omega(0,k)\right) = -U(\omega) \end{aligned}$$

$x = \pi$

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \omega(\pi,k)(\Gamma\varphi)(\pi,k) - \varphi(\pi,k)(\Gamma\omega)(\pi,k) \\ &= (\Gamma\varphi)(\pi,k) + H\varphi(\pi,k) \\ &= V(\varphi) \end{aligned}$$

yani $\Delta(k)$ fonksiyonu k 'ya göre tamdır ve onun sayılabilir sayıda olan sıfırları L probleminin özdeğerleridir.

Lemma 3.1.5: L probleminin özdeğerleri basittir. Yani $\dot{\Delta}(k_n) \neq 0$ dır.

İspat: $\omega(x,k)$ denklemimizin $\omega(\pi,k) = 1$, $\omega'(\pi,k) = -H$ koşulları altında çözümleri olsun.

$$-\omega''(x,k) + \left[\frac{A}{x} + q(x)\right]\omega(x,k) = k\omega(x,k)$$

$$-\varphi''(x,k_n) + \left[\frac{A}{x} + q(x)\right]\varphi(x,k_n) = k_n\varphi(x,k_n)$$

ilk denklem $\varphi(x,k_n)$ ile ikinci denklem $\omega(x,k)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkardıktan sonra

$$\frac{d}{dx} < \omega(x,k), \varphi(x,k_n) >= (k-k_n)\,\omega(x,k)\,\varphi(x,k_n)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı x 'e göre $[0,\pi]$ de integrallenirse;

$$(k-k_n)\int_0^\pi \omega(x,k)\,\varphi(x,k_n)\,dx =< \omega(x,k), \varphi(x,k_n) > |_0^\pi$$

$$(k-k_n)\int_0^\pi \omega(x,k)\,\varphi(x,k_n)\,dx = ((\Gamma\varphi)(x,k_n)\,\omega(x,k) - (\Gamma\omega)(x,k)\,\varphi(x,k_n))\,|_0^\pi$$

$$\begin{aligned}(k-k_n)\int_0^\pi \omega(x,k)\,\varphi(x,k_n)\,dx &= \omega(\pi,k)(\Gamma\varphi)(\pi,k_n) - (\Gamma\omega)(\pi,k)\,\varphi(\pi,k_n) \\ &\quad -\omega(0,k)(\Gamma\varphi)(0,k_n) + (\Gamma\omega)(0,k)\,\varphi(0,k_n) \\ &= (\Gamma\varphi)(\pi,k_n) + H\varphi(\pi,k_n) + (\Gamma\omega)(0,k) \\ &\quad -h\omega(0,k) = \Delta(k_n) - \Delta(k)\end{aligned}$$

elde edilir. $k \to k_n$ iken limite geçersek

$$\int_0^\pi \omega(x,k_n)\,\varphi(x,k_n)\,dx = -\dot{\Delta}(k_n)$$

$[0,\pi]$ aralığında $\omega(x,k_n) = \beta_n\varphi_n(x,k_n)$ eşitliğini sağlayan $0 \neq \beta_n$ 'ler için $\alpha_n\beta_n = -\dot{\Delta}(k_n)$ elde edilir ki bu $\dot{\Delta}(k_n) \neq 0$ anlamına gelir.

Lemma 3.1.6: L ve $\widetilde{L}$ sınır değer probleminin özdeğerleri sıralıdır.

$$\begin{aligned} &E\breve{g}er\ \widetilde{H} > H \text{ ise } \quad \lambda_n < \eta_n < \lambda_{n+1} \\ &E\breve{g}er\ \widetilde{H} < H \text{ ise } \quad \eta_n < \lambda_n < \eta_{n+1} \end{aligned}$$

3.2. Özdeğer ve Normalleştirici Sayıların Asimptotik İfadeleri

Bu bölümde L probleminin özdeğerleri ve normalleştirici sayıları için n 'nin yeterince büyük değerlerinde asimptotik ifadeler elde edilecektir.

Lemma 3.2.1: L probleminin özdeğerleri aşağıdaki asimptotik davranışa sahiptir:

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n - \frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n} + \frac{w}{\pi n} + \frac{k_n}{n}, \quad \{k_n\} \in l_2 \tag{3.2.1}$$

$$\varphi_1(x, \lambda_n) = \cos nx + \frac{\xi_{1n}(x)}{n}\int_0^\pi u(t)\sin 2nt dt + \frac{\xi_{2n}(x)}{n}, \quad |\xi_{1n}(x)|, |\xi_{2n}(x)| \leq C \tag{3.2.2}$$

Burada,

$$w = H + h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt - \frac{A^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi - 2\ln\pi + 2\right) + A\left(\frac{\sin 2}{4} - \frac{\ln\pi}{2} - \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t}dt\right)$$

İspat: $[0,\pi]$ aralığında; $|\rho| \to \infty$ iken $x \in [0,\pi]$ için aşağıdaki asimptotik ifadeler mevcuttur.

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,\lambda) &= \cos\rho x + O\left(\frac{1}{\rho}e^{(|\tau|x)}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{\rho}e^{(|\tau|x)}\right) \\
(\Gamma\varphi_1)(x,\lambda) &= \varphi_2(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + O\left(\frac{1}{\rho}e^{(|\tau|x)}\right) \\
&= O\left(|\rho|\, e^{(|\tau|x)}\right)
\end{aligned}$$

Burada; $\lambda = \rho^2$, $\tau = \operatorname{Im}\rho$ ve $(\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda))$ (2.1.3) sisteminin $\varphi_1(0,\lambda) = 1$, $\varphi_2(0,\lambda) = h$ koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar. $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ asimptotik ifadelerini

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\lambda) & = \cos\rho x + \dfrac{h}{\rho}\sin\rho x + \displaystyle\int_0^x \{u(t)\,\varphi_1(t,\lambda)\cos\rho(x-t) \\ & \quad + \left[(q(t) - u^2(t)\,\varphi_1(t,\lambda) - u(t)\,\varphi_2(t,\lambda))\right]\dfrac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\Big\}\,dt \\ \varphi_2(x,\lambda) & = -\rho\sin\rho x + h\cos\rho x + \displaystyle\int_0^x \{-\rho u(t)\,\varphi_1(t,\lambda)\sin\rho(x-t) \\ & \quad + \left[(q(t) - u^2(t)\,\varphi_1(t,\lambda) - u(t)\,\varphi_2(t,\lambda))\right]\cos\rho(x-t)\,dt \end{cases}$$

integral denklemler sisteminin sağ tarafında yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,\lambda) &= \cos\rho x + \int_0^x u(t)\cos\rho(x-2t)\,dt - h\int_0^x u(t)\,\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}dt \\ &- \int_0^x u^2(t)\,\frac{\sin\rho(x-2t)}{2\rho}dt \\ &+ \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)\,dt\right)\frac{\sin\rho x}{\rho} \\ &+ \int_0^x q(t)\,\frac{\sin\rho(x-2t)}{2\rho}dt + O\left(\frac{e^{(|\tau|x)}}{|\rho|}\right) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned} \Gamma\varphi_1(x,\lambda) &= -\rho\sin\rho x - \rho\int_0^x u(t)\sin\rho(x-t)\,dt - h\int_0^x u(t)\cos\rho(x-2t)\,dt \\ &-\frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)\cos\rho(x-2t)\,dt \\ &+ \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)\,dt\right)\cos\rho x \\ &+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\cos\rho(x-2t)\,dt + O\left(e^{(|\tau|x)}\right) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

elde edilir.

$\Delta(\lambda) = (\Gamma\varphi)(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda)$ olduğundan

$$\Delta(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi - \rho\int_0^\pi u(t)\sin\rho(\pi-2t)\,dt + w\cos\rho\pi + k(\rho) \tag{3.2.5}$$

olur. Burada

$$w = H + h + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(q(t) - u^2(t)\right)dt$$

$$\begin{aligned} k(\rho) &= (H-h)\int_0^\pi u(t)\cos\rho(\pi-2t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x u^2(t)\cos\rho(\pi-2t)\,dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\cos\rho(\pi-2t)\,dt + O\left(\frac{e^{(|\tau|x)}}{\rho}\right) \end{aligned}$$

$G_\delta := \{\rho : |\rho - k| \geq \delta \quad , \rho \geq 0,\ k = 0, \mp1, \mp2, ...\}$ alalım. Yeterince büyük $\rho^* > 0$ için

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\rho| e^{(|\tau|\pi)} \quad \rho \in G_\delta,\ \rho \geq \rho^* \tag{3.2.6}$$

mevcuttur.

Şimdi $\Gamma_n = \left\{\lambda : |\lambda| = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right\}$ alınsın. Rouche teoremi kullanılarak $\Delta(\lambda)$ 'ın Γ_n bölgesinde $(n+1)$ tane sıfıra sahip olduğu elde edilir, çünkü $\gamma_n(\delta) = \{\rho : |\rho - n| \leq \delta\}$ çemberi içinde n'nin yeterince büyük değerlerinde sadece bir tane sıfırı vardır. Keyfi $\delta > 0$ için

$$\rho_n = n + \varepsilon_n,\ \varepsilon_n = o(1), n \to \infty \tag{3.2.7}$$

mevcuttur. Eğer 3.2.7 ifadesi 3.2.5'te yerine konulduğunda,

$$0 = \Delta\left(\rho_n^2\right) = -\left(n+\varepsilon_n\right)\sin\left(n+\varepsilon_n\right)\pi - \left(n+\varepsilon_n\right)$$
$$\int_0^\pi u\left(t\right)\sin\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)dt + w\cos\left(n+\varepsilon_n\right)\pi + k_n \tag{3.2.8}$$

elde edilir.

$u\left(t\right) = A\ln t$ olduğu zaman $\int_0^\pi u\left(t\right)\sin\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)dt$, $\left(\varepsilon_n \to 0, n \to \infty\right)$ integralinin yakınsak olduğu gösterilsin.

Verilen $\varepsilon > 0$ için verilen integral,

$$\int_0^\pi u\left(t\right)\sin\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)dt = \int_0^\varepsilon u\left(t\right)\sin\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)dt$$
$$+\int_\varepsilon^\pi u\left(t\right)\sin\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)dt = I_\varepsilon + I_\pi$$

şeklinde yazılabilir.

$f\left(t\right) = A\ln t\sin\left[\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)\right]$ fonksiyon $[\varepsilon, t]$ üzerinde sürekli olduğundan I_π 'nün Riemann anlamında integrali mevcuttur.

Diğer taraftan aşağıdaki eşitsizlikten verilen integralin mutlak yakınsak olduğu ve bu yüzden yakınsak olduğu sonucuna varılır.

$$|A|\int_0^\varepsilon |\ln t|\sin\left[\left(n+\varepsilon_n\right)\left(\pi-2t\right)\right]dt \leq -|A|\int_0^\varepsilon |\ln t|\,dt$$

Çünkü $\int_0^\varepsilon |\ln t|\,dt$ integrali yakınsaktır. Aynı zamanda iki integral de n'ye göre düzgün yakınsaktır.

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u\left(t\right)\sin 2nt dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

3.2.8 tekrar kullanılırsa,

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(t) \sin 2ntdt + \frac{w}{\pi n} + \frac{k_n}{n}$$

Sonuç olarak,

$$\rho_n = n - \frac{A}{2\pi} \frac{\ln n}{n} + \frac{w}{\pi n} + \frac{k_n}{n}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} k(\rho_n) &= (H-h) \int_0^\pi u(t) \cos \rho_n (\pi - 2t)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^x u^2(t) \cos \rho_n (\pi - 2t)\, dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \cos \rho_n (\pi - 2t)\, dt + O\left(\frac{e^{(|\tau| x)}}{\rho_n} \right) \\ &= (H-h) \int_0^\pi u(t) \cos \left[(n + \varepsilon_n)(\pi - 2t) \right] dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \cos \cos \left[(n + \varepsilon_n)(\pi - 2t) \right] dt + O\left(\frac{e^{(|\tau| x)}}{(n + \varepsilon_n)} \right) \end{aligned}$$

$u(t)$, $u^2(t)$, $q(t) \in L_2[0,\pi]$ olduğundan $k_n \in l_2$ 'dir. Çünkü $k_n = k(\rho_n)$ ifadesinin sağ tarafındaki elemanlar l_2 'nin elemanlarıdır. Böylece 3.2.1 ispatlandı.

Şimdi 3.2.1 ifadesi 3.2.3'de yerine konulduğunda 3.2.2'ye ulaşılır. Burada;

$$\begin{aligned} \xi_{1n}(x) &= -x \sin nx + 2 \int_0^x tu(t) \sin n(x - 2t)\, dt \\ &+ \frac{2x}{\pi} \int_0^\pi u(t) \sin 2ntdt \int_0^x tu(t) \cos n(x - 2t)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{2n}(x) &= \left(h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^x u^2(t)\, dt - x\frac{w}{\pi} - xk_n \right) \sin nx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\pi u(t) \sin n(x - 2t)\, dt + O\left(\frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Böylece $i = 1, 2$ için $|\xi_{in}(x)| \leq C$ 'dir.

3.3.Tamlık ve Ayrışım Teoremleri

Bu alt bölümde L sınır değer probleminin özfonksiyonlar sisteminin tam olduğu ve $L_2(0,\pi)$ de ortogonal bir taban oluşturduğunu ispatlanacaktır. Bu teorem ilk olarak 19. yüzyıl sonunda Steklav tarafından ispatlandı. $[0,\pi]$ aralığında düzgün yakınsak özfonksiyonlar için Fourier serisinin sağlandığı koşullarda ispatlanmıştır. Tamlık ve ayrışım teoremleri Fourier metodu aracılığıyla metamatiksel fizikte çeşitli problemlerin çözümü için ve spektral teori için önemlidir.

Teorem 3.3.1:

1) L sınır değer probleminin $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$'de tamdır.

2) $f(x)$, $x\in[0,\pi]$ 'de sürekli fonksiyon olsun. O halde

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi(x,\lambda_n),\ a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt \qquad (3.3.1)$$

ve bu seri $[0,\pi]$ 'de düzgün yakınsaktır.

3) $f(x)\in L_2(0,\pi)$ için 3.3.1 serisi $L_2(0,\pi)$ 'de yakınsaktır ve

$$\int_0^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n|a_n|^2$$

(Persavel eşitliği) geçerlidir.

İspat:

1) $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonlar sistemi $x\in[a,b]$, $L_2[a,b]$ 'de tamdır.

Yani $\forall n\in IN$ için,

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx=0 \quad\Longleftrightarrow\quad f(x)\equiv 0$$

dır.

L probleminin λ_n özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonu $\varphi(x,\lambda_n)$ olsun.

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,\lambda), \quad \varphi(0,\lambda)=1, \qquad (\Gamma\varphi)(0,\lambda)=h \\
&\omega(x,\lambda), \quad \omega(\pi,\lambda)=1, \quad (\Gamma\omega)(\pi,\lambda)=-H
\end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlasın

$$G(x,t,\lambda)=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\varphi(x,\lambda)\,\omega(t,\lambda) & ,x\le t \\ \varphi(t,\lambda)\,\omega(x,\lambda) & ,x\ge t\end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
y(x,\lambda) &= \int_0^\pi G(x,t,\lambda)\,f(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(\omega(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)\,f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \omega(t,\lambda)\,f(t)\,dt\right)
\end{aligned}$$

fonksiyonu düşünelim $y(x,\lambda)$, L sınır değer probleminin çözümüdür.

$\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}$ sıfırları ile L sınır değer probleminin özdeğerleri çakışmaktadır. $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\omega(x,\lambda_n)$ özfonksiyonlardır ve

$$\omega(x,\lambda_n)=\beta_n\varphi(x,\lambda_n) \quad , \quad \beta_n\neq 0$$

olan $\{\beta_n\}$ dizisi vardır, ayrıca L 'nin $\{\lambda_n\}$ özdeğerleri ve $\varphi(x,\lambda_n)$, $\omega(x,\lambda_n)$ özfonksiyonları reeldir. $\Delta(\lambda)$ 'nin tüm sıfırları basittir. $\dot{\Delta}(\lambda_n)\neq 0$ dir.

Bu teoremi kullanarak,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} sY(x,\lambda)=-\frac{1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\left(\omega(x,\lambda_n)\int_0^x \varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda_n)\int_x^\pi \omega(t,\lambda)\,f(t)\,dt\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta_n}{\alpha_n\beta_n}\left(\int_0^x \varphi(x,\lambda_n)\,\varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\,dt+\int_x^\pi \varphi(x,\lambda_n)\,\varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\,\varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\,dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

2) $f(x) \in L_2(0,\pi)$ için,

$$\int_0^\pi f(t)\,\varphi(t,\lambda_n)\,dt = 0$$

olsun.

$(n \geq 0)$ kaldırılabilir singülariteye sahip herbir noktanın diferansiyellenebilir olmasından,

$$\operatorname*{Re\,s}_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda) = 0$$

olur. Dolayısıyla $[0,\pi]$ aralığındaki her x noktası için $y(x,\lambda)$, λ 'nın tam fonksiyonudur.

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= O\left(e^{|\operatorname{Im}\rho| x}\right), \qquad |\rho| \to \infty \\ \omega(x,\lambda) &= O\left(e^{|\operatorname{Im}\rho|(\pi - x)}\right), \qquad |\rho| \to \infty \end{aligned}$$

dur. $|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\rho| e^{|\operatorname{Im} g|\pi}$, $\rho \in G_\delta$, $|\rho| \geq \rho^*$ olduğunu kullanarak,

$$|y(x,\lambda)| \leq \frac{C_\delta}{|\rho|}$$

olduğu gösterilirse

$$|y(x,\lambda)| \leq \frac{1}{|\Delta(\lambda)|}\left\{ |\omega(x,\lambda)| \int_0^x |\varphi(t,\lambda)|\,|f(t)|\,dt + |\varphi(x,\lambda)| \int_x^\pi |\omega(t,\lambda)|\,|f(t)|\,dt \right\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{|\Delta(\lambda)|}\left\{ C_2 e^{|\operatorname{Im}\rho|(\pi-x)} \int_0^x C_1 e^{|\operatorname{Im}\rho| t}\,|f(t)|\,dt \right. \\ &\quad \left. + C_1 e^{|\operatorname{Im}\rho| x} \int_x^\pi C_2 e^{|\operatorname{Im}\rho|(\pi-t)}\,|f(t)|\,dt \right\} \\ &\leq \frac{C}{|\Delta(\lambda)|}\left\{ \int_0^x e^{|\operatorname{Im}\rho|(\pi-x+t)}\,|f(t)|\,dt + \int_x^\pi e^{|\operatorname{Im}\rho|(x-t+\pi)}\,|f(t)|\,dt \right\} \\ &= \frac{C}{|\Delta(\lambda)|} e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi} \int_0^\pi |f(t)|\,dt \leq \frac{C e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}}{C_\delta |\rho|\, e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}} \int_0^\pi |f(t)|\,dt \\ &\leq \frac{C_\delta}{|\rho|} \end{aligned}$$

$$|y(x,\lambda)| \leq \frac{C_\delta}{|\rho|} \quad , \quad \rho \in G_\delta \quad , \quad |\rho| \geq \rho^*$$

Maksimum prensibi ve Liouville teoremi gereği $y(x,\lambda) \equiv 0$ olduğunu açıktır. Gerçekten $\operatorname{Re} sy(x,\lambda) = 0$ olduğundan analitik ve sabit fonksiyondur. Ayrıca $|\rho| \to \infty$ için $y(x,\lambda) \to 0$ olduğundan $y(x,\lambda) \equiv 0$ dır.

$ly - \lambda y + f(x) = 0$ olduğunda $f(x) \equiv 0$ olur.

3) $f \in AC[0,\pi]$ $\omega(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)$ verilne denklemin çözümü olduğundan

$$\begin{aligned} y(x,\lambda) &= -\frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)} \left\{ \omega(x,\lambda) \int_0^x \left[-\varphi''(t,\lambda) + \frac{A}{t}\varphi(t,\lambda) + q(t)\varphi(t,\lambda) \right] f(t)\,dt \right. \\ &\quad \left. \varphi(x,\lambda) \int_x^\pi \left[-\omega''(t,\lambda) + \frac{A}{t}\omega(t,\lambda) + q(t)\omega(t,\lambda) \right] f(t)\,dt \right\} \end{aligned}$$

Burada;

$$\begin{aligned} -\int_0^x \varphi''(t,\lambda) f(t)\,dt &= -(\Gamma\varphi)(t,\lambda) f(t)\,|_0^x + \int_0^x (\Gamma\varphi)(t,\lambda) f'(t)\,dt \\ &= (\Gamma\varphi)(0,\lambda) f(0) - (\Gamma\varphi)(x,\lambda) f(x) + \int_0^x g(t)(\Gamma\varphi)(t,\lambda)\,dt \end{aligned}$$

ve

$$-\int_x^\pi \omega''(t,\lambda) f(t)\,dt = -(\Gamma\omega)(t,\lambda) f(t)\,|_x^\pi + \int_x^\pi (\Gamma\omega)(t,\lambda) f'(t)\,dt$$

Bu durumda;

$$\begin{aligned} y(x,\lambda) &= -\frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)} \{ h\omega(x,\lambda) f(0) - \omega(x,\lambda)(\Gamma\varphi)(x,\lambda) f(x) \\ &\quad + \omega(x,\lambda) \int_0^x g(t)(\Gamma\varphi)(t,\lambda)\,dt + \omega(x,\lambda) \int_0^x q(t)\varphi(t,\lambda) f(t)\,dt \\ &\quad + H\varphi(x,\lambda) f(\pi) + \varphi(x,\lambda)(\Gamma\omega)(x,\lambda) f(x) \\ &\quad + \varphi(x,\lambda) \int_x^\pi g(t)(\Gamma\omega)(t,\lambda)\,dt + \varphi(x,\lambda) \int_x^\pi q(t)\omega(t,\lambda) f(t)\,dt \end{aligned}$$

bulunur.

$$Z_1(x,\lambda) \; : \; = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\omega(x,t)\int_0^x g(t)(\Gamma\varphi)(t,\lambda)\,dt + \varphi(x,\lambda)\int_x^\pi g(t)(\Gamma\omega)(t,\lambda)\,dt\right]$$

$$\begin{aligned} Z_2(x,\lambda) \; : \; &= \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[hf(0)\,\omega(x,\lambda) + Hf(\pi)\,\varphi(x,\lambda)\right. \\ &\left. +\omega(x,\lambda)\int_0^x q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,f(t)\,dt + \varphi(x,\lambda)\int_x^\pi q(t)\,\omega(t,\lambda)\,f(t)\,dt\right] \end{aligned}$$

denirse;

$$y(x,\lambda) = \frac{f(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left[z_1(x,\lambda) + z_2(x,\lambda)\right]$$

olur. $\delta > 0$ ve yeterince büyük $\rho^* > 0$ için

$$\max_{0\le x\le\pi} |z_2(x,\lambda)| \le \frac{C}{|\rho|} \quad , \quad \rho \in G_\delta \quad , \quad |\rho| \ge \rho^*$$

dir. Çünkü,

$$|\Delta(\lambda)| \ge C_\delta\,|\rho|\,e^{|\operatorname{Im}\rho|x}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= O\left(e^{|\operatorname{Im}\rho|x}\right) \\ \omega(x,\lambda) &= O\left(e^{|\operatorname{Im}\rho|(\pi-x)}\right) \end{aligned} \quad |\rho| \to \infty$$

kullanılırsa;

$$\begin{aligned} |z_2(x,\lambda)| \;&\le\; \frac{1}{|\Delta(\lambda)|}\left\{|h|\,|f(0)|\,|\omega(x,\lambda)| + |H|\,|f(\pi)|\,|\varphi(x,\lambda)| + \right. \\ &\left. |\omega(x,\lambda)|\int_0^x |q(t)|\,|\varphi(t,\lambda)|\,|f(t)|\,dt + |\varphi(x,\lambda)|\int_x^\pi |q(t)|\,|\omega(t,\lambda)|\,|f(t)|\,dt\right\} \\ &\le\; \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{C_1 e^{|\operatorname{Im}\rho|(\pi-x)} + C_2 e^{|\operatorname{Im}\rho|x} + e^{|\operatorname{Im}\rho|(\pi-x)}\right. \\ &\left. \int_0^x |q(t)|\,|f(t)|\,e^{|\operatorname{Im}\rho|x}dt + e^{|\operatorname{Im}\rho|x}\int_x^\pi |q(t)|\,e^{|\operatorname{Im}\rho|(\pi-x)}\,|f(t)|\,dt\right\} \\ &\le\; \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{C_1 e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi} + C_2 e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi} + e^{|\operatorname{Im}\rho|\pi}\int_0^\pi |q(t)|\,|f(t)|\,dt\right\} \\ &\le\; \frac{C'}{C_\delta\,|\rho|} = \frac{C}{|\rho|} \end{aligned}$$

$\forall x \in [0, \pi]$ için sağlandığından,

$$\max_{0 \le x \le \pi} |z_2(x, \lambda)| \le \frac{C}{|\rho|} \quad , \quad \rho \in G_\delta \ , \ \rho \ge \rho^*$$

elde edelir. Şimdi ise

$$\lim_{|\rho| \to \infty} \max |z_1(x, \lambda)| = 0$$

olduğu gösterilsin. $g \in AC[0, \pi]$ olsun.

$$Z_1(x, \lambda) := \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[\omega(x, t) \int_0^x g(t) (\Gamma\varphi)(t, \lambda) \, dt + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi g(t) (\Gamma\omega)(t, \lambda) \, dt \right]$$

Benzer şekilde; $\max_{0 \le x \le \pi} |z_1(x, \lambda)| < \frac{C}{|\rho|} \ \rho \in G_\rho \ , \ |\rho| > \rho^*$ geçerlidir.
$g \in AC[0, \pi]$ ve $g \in L(0, \pi)$ olmasından,

$$\int_0^\pi |g(t) - g_\varepsilon(t)| \, dt < \frac{\varepsilon}{2C^*}$$

olacak biçimde $g_\varepsilon(t)$ sürekli fonksiyonu vardır. Burada;

$$C^* = \max_{0 \le x \le \pi} \sup_{g \in G_\delta} \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left(|\omega(x, \lambda)| \int_0^x |(\Gamma\varphi)(x, \lambda)| \, dt + |\varphi(x, t)| \int |(\Gamma\omega)(t, \lambda)| \, dt \right)$$

$$\begin{aligned} z_1(x, \lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \omega(x, \lambda) \int_0 |g(t) - g_\varepsilon(t)| (\Gamma\varphi)(t, \lambda) \, dt \right. \\ &\quad + \omega(x, \lambda) \int_0^x g_\varepsilon(t) (\Gamma\varphi)(t, \lambda) \, dt + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi |g(t) - g_\varepsilon(t)| (\Gamma\omega)(t, \lambda) \, dt \\ &\quad + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi g_\varepsilon(t) (\Gamma\omega)(x, \lambda) \, dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{0 \le x \le \pi} |z_1(x, \lambda)| &\le \max_{0 \le x \le \pi} |z_1(x, \lambda; g_\varepsilon)| + \max_{0 \le x \le \pi} |z_1(x, \lambda; g - g_\varepsilon)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C(\varepsilon)}{|\rho|}, \end{aligned}$$

$|\rho| > \rho^0$ için $\max\limits_{0\leq x\leq\pi} |z_1(x,\lambda)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\rho^0 > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan;

$$\lim_{|\rho|\to\infty} \max_{0\leq x\leq\pi} |z_1(x,\lambda)| = 0$$

elde edilir.

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N} y(x,\lambda)\,dx$$

integralini alalım. Burada $\Gamma_N = \left\{\lambda \mid |\lambda| = \left(N+\frac{1}{2}\right)^2\right\}$

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N}\left[\frac{f(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left(z_1(x,\lambda)+z_2(x,\lambda)\right)\right]$$

olmasından

$$I_N(x) = f(x) + \varepsilon_N(x) \quad , \quad \lim_{N\to\infty}\max_{0\leq x\leq\pi}|\varepsilon_N(x)| = 0$$

olur.

Rezidü teoremi gereği eğer f , bir B bölgesi ve sınırında sonlu tane $z_1, z_2, ..., z_n \in B$ ayrık aykırı noktasına sahip olsun. Bu durumda

$$\int\limits_{B} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s\,(f, z_k)\,.$$

dir. Rezidü teoremi yardımıyla;

$$I_N(x) = \sum_{n=0}^{N}\operatorname{Re}s\,Y(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{N} a_n\varphi(x,\lambda_n) \quad , \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int\limits_0^{\pi} f(t)\,\varphi(t,\lambda_n)\,dt.$$

elde edilir.

$I_N(x) = f(x) + \varepsilon_N(x)$ ve $\lim\limits_{N\to\infty}\max\limits_{0\leq x\leq\pi}|\varepsilon_N(x)| = 0$ olmasından dolayı

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi(x,\lambda_n) \quad , \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int\limits_0^{\pi} f(t)\,\varphi(t,\lambda_n)\,dt.$$

elde edilir. Burada seriler $[0,\pi]$ 'de düzgün yakınsaktır.

4) $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonları tam ve $L_2(0,\pi)$ 'de ortogonal olduğundan $L_2(0,\pi)$ 'de bir ortogonal taban oluştururlar ve Persaval eşitliği geçerlidir.

IV. BÖLÜM
TERS PROBLEMİN LOKAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde;

$$\begin{cases} ly = -y'' + q(x)\,y = \lambda y \quad , \qquad \lambda = k^2 \quad , \quad 0 \preceq x \preceq \pi \\ \qquad y'(0) - hy(0) = 0 \\ \qquad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemi için inverse problem kurulacak ve yerel çözümlerden bahsedilecektir. Öncelikle $ly := -y'' + q(x)\,y \;\;,\;\; x \in [a, b]$ sonlu, $q(x)$ bu aralıkta integrallenebilirse bu ifadeye regüler diferansiyel ifade; (a, b) sınırsız veya $q(x)$ sonlu aralıkta integrallenebilir değilse bu ifadeye singüler diferansiyel ifade denir.

Bu tanımlar ışığında biz regüler diferansiyel ifadenin ürettiği diferansiyel denklem ile sınır koşullarından oluşan sınır değer problemi için ters problemin konumunu ve yerel çözümü ilgilenecektir. Genelliği bozmadan $H = 0$ durumu alınacaktır.

Temel olarak bu bölümde ters problemin lokal çözümleri için bir metod geliştirilecektir. Bu metod yardımıyla ters problem, lokal çözülebilen lineer olmayan integral denkleme indirgenebilmektedir.

4.1 Borg Denkleminin Kuruluşu

$\lambda_{ni} := \rho_{ni}^2 \;,\;\; n \geq 0 \;\;,\;\; i = 1, 2 \;,\; L_i$ sınır değer probleminin özdeğerleri olmak üzere

$$ly := -y'' + q(x)\,y = \lambda y \tag{4.1.1}$$

$$(\Gamma y)(0) - hy(0) = 0 = y^{(i-1)}(\pi) = 0 \tag{4.1.2}$$

sınır değer problemini düşünülsün. Burada $q(x) \in L_2(0, \pi)$ gerçel değerli sınırlı bir fonksiyon ve h, reel bir sayıdır.

$$\rho_{n_1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{a}{n} + \frac{k_{n_1}}{n}, \quad \rho_{n_2} = n + \frac{a}{n} + \frac{k_{n_2}}{n} \tag{4.1.3}$$

$$\{k_{n_i}\} \in l_2,\ a = \frac{1}{\pi}\left(h + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt\right)$$

hesaplamaları mevcuttur.

$(4.1.1) - (4.1.2)$ sınır değer problemini bir defa daha düşünüldüğünde

$$\begin{cases} ly := -y'' + q(x)\,y = \lambda y \\ \Gamma(y) \quad (0) - hy(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ly = -y'' + q(x)\,y = \lambda y \\ \Gamma(y) \quad (0) - hy(0) = 0 \\ \Gamma(y) \quad (\pi) = 0 \end{cases}$$

L_i ve $\tilde{L}_i$, $i = 1, 2$ $\ a = \widetilde{a}$ yı sağlayan iki sınır değer problemi olsunlar. Açıktır ki bu sınır değer problemlerinin özdeğerlerinin asimptotik davranışlarından; $\widetilde{\rho}_{n_i} - \rho_{n_i} = \dfrac{\widetilde{k}_{n_i} - k_{ni}}{n} \in l_2$ olduğu açıktır.

$$\Lambda := \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\lambda_{n_1} - \widetilde{\lambda}_{n_1}\right|^2 + \left|\lambda_{n_2} - \widetilde{\lambda}_{n_2}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$\Lambda \in I_2$ olan reel değerli bir sayı tanımlansın.

Çünkü;

$$\left|\lambda_{n1} - \widetilde{\lambda}_{n1}\right|^2 = \left|\rho_{n1}^2 - \widetilde{\rho}_{n1}^2\right|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left(\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{a}{n} + \frac{k_{n1}}{n} \right)^2 - \left(\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{a}{n} + \frac{\widetilde{k}_{n1}}{n} \right)^2 \right| \\
&= \left| \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{n^2} + \frac{k_{n1}^2}{n^2} + 2\left(\frac{a}{n}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{k_{n1}}{n}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{ak_{n1}}{n^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{n^2} - \frac{\widetilde{k}_{n1}^2}{n^2} - 2\left(\frac{a}{n}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\widetilde{k}_{n1}}{n}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{a\widetilde{k}_{n1}}{n^2} \right) \right|^2 \\
&= \left| \frac{k_{n1}^2 - \widetilde{k}_{n1}^2}{n^2} + \frac{2}{n}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(k_{n1} - \widetilde{k}_{n1}\right) + \frac{a}{n^2}\left(k_{n1} - \widetilde{k}_{n1}\right) \right| \\
&= \left| k_{n1} - \widetilde{k}_{n1} \right| \left| \frac{k_{n1} + \widetilde{k}_{n1}}{n^2} + \frac{4(2n+1)}{n} + \frac{a}{n^2} \right| \in I_2
\end{aligned}$$

Aynı şekilde $\left|\lambda_{n2} - \widetilde{\lambda}_{n2}\right|^2 \in l_2$

Sonuç olarak $\Lambda \in l_2$ 'dir.

$$\begin{aligned}
y_{ni}(x) &= \varphi\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) \quad , \quad \widetilde{y}_{ni}(x) = \widetilde{\varphi}\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) \\
s_{ni}(x) &= S\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) \quad , \quad \widetilde{s}_{ni}(x) = \widetilde{S}\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right)
\end{aligned}$$

olarak alındığında (4.1.1) ve (4.1.2) sınır değer problemi için

$$G_{ni}(x,t) = \begin{cases} S\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) C\left(t, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) - S\left(t, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) C\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right), & 0 \le x \le t \le \pi \\ 0 & 0 \le x \le t \le \pi \end{cases}$$

fonksiyonu green teoreminden verilen sınır değer probleminin bir green fonksiyondur.

$\varphi(x,\lambda), C(x,\lambda), S(x,\lambda)$; $(4.1.1)-(4.1.2)$ sınır değer problemi için $C(0,\lambda) = \varphi(0,\lambda) = (\Gamma S)(0,\lambda) = 1$, $(\Gamma C)(0,\lambda) = S(0,\lambda) = 0$ $(\Gamma\varphi)(0,\lambda) = h$ koşulları altında çözümleridir.

$ly_{ni}(x) = \widetilde{\lambda}_{ni} y_{ni}(x)$, $\widetilde{l}\widetilde{y}_{ni}(x) = \widetilde{\lambda}_{ni}\widetilde{y}_{ni}(x)$ denklemlerinde birinci denklemi $\widetilde{y}_{ni}(x)$, ikinci denklemi $y_{ni}(x)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarıldığında ve $r = \widetilde{q} - q$ olarak ifade edildiğinde;

$$\begin{aligned}
-y''_{ni}(x) + q(x)\, y_{ni}(x) &= \widetilde{\lambda}_{ni} y_{ni}(x), \\
-\widetilde{y}''_{ni}(x) + \widetilde{q}(x)\, \widetilde{y}_{ni}(x) &= \widetilde{\lambda}_{ni} \widetilde{y}_{ni}(x),
\end{aligned}$$

$$-\widetilde{y}''_{ni}(x)\,y_{ni}(x)-y''_{ni}(x)+(\widetilde{q}(x)-q(x))\,\widetilde{y}_{ni}(x)\,y_{ni}(x)=0,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi r(x)\,\widetilde{y}_{ni}(x)\,y_{ni}(x)\,dx &= \int_0^\pi \left(\widetilde{y}''_{ni}(x)\,y_{ni}(x)-y''_{ni}(x)\,\widetilde{y}_{ni}(x)\right)dx, \qquad (4.1.4)\\
\int_0^\pi r(x)\,\widetilde{y}_{ni}(x)\,y_{ni}(x)\,dx &= \left((\Gamma\widetilde{y}_{ni})(x)\,y_{ni}(x)-\widetilde{y}_{ni}(x)\,(\Gamma y_{ni})(x)\right)\big|_0^\pi\\
&= (\Gamma\widetilde{y}_{ni})(\pi)\,y_{ni}(\pi)-(\Gamma y_{ni})(\pi)\,\widetilde{y}_{ni}(\pi)-\widetilde{h}+h\\
&= (\Gamma\widetilde{y}_{ni})(\pi)\,y_{ni}(\pi)-(\Gamma y_{ni})(\pi)\,\widetilde{y}_{ni}(\pi)-p.
\end{aligned}$$

Yani

$$\int_0^\pi r(x)\,\widetilde{y}_{ni}(x)\,y_{ni}(x)\,dx=(\Gamma\widetilde{y}_{ni})(\pi)\,y_{ni}(\pi)-(\Gamma y_{ni})(\pi)\,\widetilde{y}_{ni}(\pi)-p.$$

olur. Burada $p=\widetilde{h}-h$ olur.

Aynı zamanda; $a=\widetilde{a}$ olmasından

$$a=\frac{1}{\pi}\left(h+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right),\quad \widetilde{a}=\frac{1}{\pi}\left(\widetilde{h}+\frac{1}{2}\int_0^\pi \widetilde{q}(t)\,dt\right),$$

$$h-\widetilde{h}=\frac{1}{2}\int_0^\pi(\widetilde{q}(t)-q(t))\,dt,$$

$$p=-\frac{1}{2}\int_0^\pi r(t)\,dt \qquad (4.1.5)$$

bulunur.

$\widetilde{y}_{ni}(x)$, $\widetilde{L}_i$ sınır değer problemin özfonksiyonları olmak üzere sınır koşullarından

$$\widetilde{y}_{n1}(\pi)=0,\quad (\Gamma\widetilde{y}_{n2})(\pi)=0,\ n\geq 0 \qquad (4.1.6)$$

olduğu açıktır.

Sınır değer probleminin green fonksiyonunun bir çözümü olan $\widetilde{y}_{ni}(x)$ fonksiyonu için;

$$\widetilde{y}_{ni}(x)=y_{ni}(x)+ps_{ni}(x)+\int_0^\pi G_{ni}(x,t)\,r(t)\,\widetilde{y}_{ni}(t)\,dt\ ,\quad n\geq 0\ ,\ i=1,2 \qquad (4.1.7)$$

geçerlidir. Bu denklemi;

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_{ni}^{(0)}(x) &= y_{ni}^{(0)}(x)+ps_{ni}^{(0)}(x)\\ \widetilde{y}_{ni}^{(k)}(x) &= \int_0^{\pi} G_{ni}(x,t)\,r(t)\,\widetilde{y}_{ni}^{(k-1)}(t)\,dt\ , \qquad n\geq 0,\quad i=1,2\end{aligned}$$

olmak üzere ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanırsa;

$$\widetilde{y}_{ni}(x)=y_{ni}(x)+ps_{ni}(x)+\varphi_{ni}(x)\ , \qquad n\geq 0,\ i=1,2 \tag{4.1.8}$$

denklemine dönüşür. Burada

$$\varphi_{ni}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^{\pi}...\int_0^{\pi}}_{j\ \text{tane}} G_{ni}(x,t_1)\,G_{ni}(t_1,t_2)\,...G_{ni}(t_{j-1},t_j)\,x$$

$$r(t_1)\,...r(t_j)\,(y_{ni}(t_j)+ps_{ni}(t_j))\,dt_1...dt_j, \tag{4.1.9}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} r(x)\,y_{ni}(x)\,\widetilde{y}_{ni}(x)\,dx &= \int_0^{\pi} r(x)\,y_{ni}(x)\,(y_{ni}(x)+ps_{ni}(x)+\varphi_{ni}(x))\,dx\\ &= (\Gamma\widetilde{y}_{ni})(\pi)\,y_{ni}(\pi)-(\Gamma y_{ni})(\pi)\,\widetilde{y}_{ni}(\pi)+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r(x)\,dx.\end{aligned}$$

Buradan;

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} r(x)\left(y_{ni}^2(x)-\frac{1}{2}\right)dx &= y_{ni}(\pi)\,(\Gamma\widetilde{y}_{ni})(\pi)-(\Gamma y_{ni})(\pi)\,\widetilde{y}_{ni}(\pi)\\ &\quad -p\int_0^{\pi} r(x)\,y_{ni}(x)\,s_{ni}(x)\,dx-\int_0^{\pi} r(x)\,y_{ni}(x)\,\varphi_{ni}(x)\,dx\end{aligned}$$

$\xi_{ni}=y_{ni}^2(x)-\frac{1}{2}$ ve,

$$\begin{aligned}\omega_{n1} &= y_{n1}(\pi)\,((\Gamma y_{n1})(\pi)+p\,(\Gamma s_{n1})(\pi)+(\Gamma\varphi_{n1})(\pi))-\int_0^{\pi} pr(x)\,s_{n1}(x)\,y_{n1}(x)\,dx\\ &\quad -\int_0^{\pi} r(x)\,y_{n1}(x)\,\varphi_{n1}(x)\,dx,\end{aligned}$$

$$\omega_{n2} = -\left(\Gamma y_{n2}\right)(\pi)\left(y_{n2}(\pi) + p s_{n2}(\pi) + \varphi_{n2}(\pi)\right) - \int_0^{\pi} p r(x)\, s_{n2}(x)\, y_{n2}(x)\, dx$$
$$- \int_0^{\pi} r(x)\, y_{n2}(x)\, \varphi_{n2}(x)\, dx,$$

olmak üzere

$$\int_0^{\pi} r(x)\, \xi_{ni}(x)\, dx = \omega_{ni}(x)\,. \quad n \geq 0, \ i = 1, 2 \qquad (4.1.10)$$

$$\varphi(x,\lambda)\, \widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos 2\rho x + \int_0^x V(x,t) \cos 2\rho\tau d\tau\right) \qquad (\circledast)$$

dönüşüm operatöründen, $V_1(x,t)$ sürekli fonksiyon iken;

$$\xi_{ni}(x) = \frac{1}{2}\left(\cos 2\widetilde{\rho}_{ni}(x) + \int_0^x V_1(x,t) \cos 2\widetilde{\rho}_{ni} t dt\right)$$

$\circledast$ dönüşüm operatörü şu şekilde elde edilir.$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + \int_0^x G(x,t) \cos\rho t dt$ dönüşüm operatörünü kullanarak $\varphi(x,\lambda)\, \varphi(x,\lambda) - \frac{1}{2}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi yeniden yazılırsa ,

$$\varphi(x,\lambda)\, \widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \frac{1}{2}$$
$$= \left(\cos\rho x + \int_0^x G(x,t) \cos\rho t dt\right)\left(\cos\rho x + \int_0^x \widetilde{G}(x,t) \cos\rho t dt - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \cos^2 \rho x + \int_0^x \widetilde{G}(x,t) \cos\rho x \cos\rho t dt$$
$$+ \int_0^x G(x,t) \cos\rho x \cos\rho t dt + \int_0^x \int_0^x G(x,t)\, \widetilde{G}(x,s) \cos\rho t \cos\rho s dt ds - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \cos 2\rho x + \int_0^x \left(G(x,t) + \widetilde{G}(x,t)\right) \cos\rho x \cos\rho t dt$$

$$+\int_0^x\int_0^x G(x,t)\,\widetilde{G}(x,s)\cos\rho t\cos\rho s dtds$$
$$=\frac{1}{2}\cos 2\rho x+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(G(x,t)+\widetilde{G}(x,t)\right)\cos\rho(x-t)\,dt$$
$$+\frac{1}{4}\int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x}\dot{G}(x,t)\,\widetilde{G}(x,t)\cos\rho(t-s)\,dtds$$

dir. Burada $G(x,-t)=G(x,t)$, $\widetilde{G}(x,-t)=\widetilde{G}(x,t)$ dir. Sırasıyla;

$$\tau=\frac{x-t}{2} \quad , \quad \tau=\frac{s-t}{2}$$
$$t=x-2\tau \quad , \quad t=s-2\tau$$

değişken değişimi yapalırsa,

$$\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos 2\rho x+2\int_0^x\left[G(x,x-2\tau)+\widetilde{G}(x,x-2\tau)\right]\right.$$
$$\left.+\int_{-x}^{x}\widetilde{G}(x,s)\right]\left(\int_{\frac{s-x}{2}}^{\frac{s+x}{2}}G(x,s-2\tau)\cos 2\rho\tau d\tau\right)ds$$

ve dolayısıyla

$$\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos 2\rho x+\int_0^x V(x,\tau)\cos 2\rho\tau d\tau\right).$$

Burada;

$$V(x,\tau) = 2\left(G(x,x-2\tau)+\widetilde{G}(x,x-2\tau)\right)+\int_{2\tau-x}^{x}\widetilde{G}(x,s)\,G(x,s-2\tau)\,ds$$
$$+\int_{-x}^{x+2\tau}\widetilde{G}(x,s)\,G(x,s+2\tau)\,ds$$

$$\mu_{2n}(x)=\xi_{n2}(x) \quad , \quad \mu_{2n+1}(x)=\xi_{n1}(x) \quad , \quad z_{2n}=2\widetilde{\rho}_{n2} \quad , \quad z_{2n+1}=2\widetilde{\rho}_{n1}$$

olacak biçimde $\{\mu_n(x)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonları ve $\{z_n\}_{n\geq 0}$ sayılarını tanımlansın.

$$z_n=n+\frac{a}{n}+\frac{k_n}{n} \quad , \quad \{k_n\}\in I_2$$

için

$$\mu_n(x) = \frac{1}{2}(\cos z_n x) + \int_0^x V_1(x,t)\cos z_n t dt$$

elde edilir. Ters problemlerin lokal çözümleri çalışılırken verilen fonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı oluşturmaktadır. $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı oluşturan her fonksiyonlar sistemi aynı zamanda tam olduğundan$\{\mu_n(x)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$ 'de tamdır.

$$\int_0^\pi r(x)\,\xi_{ni}(x)\,dx = \omega_{ni}(x) \quad , \quad n \geq 0 \ , \ i = 1,2$$

momentum problemine dönüldüğünde bu problemin tam olmasından;

$$r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{n2}\chi_{2n}(x) + \omega_{n1}\chi_{2n+1}(x)$$

ayrışımına sahiptir. Burada $\{\chi_j\}$ binormal bazdır.

ω_{n1} ve ω_{n2} ifadeleri ayrışım denkleminde yerine yazıldığında ve ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulandığında denklemimiz lokal çözülebilen integral denklemine dönüşür.

$$r(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^\pi \ldots \int_0^\pi}\, H_j(x, t_{1,\ldots} t_j)\, r(t_1) \ldots r(t_j)\, dt_1 \ldots dt_j \qquad (4.1.11)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-y_{n2}(\pi)\, y_{n2}(\pi)\, x_{2n}(x) + y'_{n1}(\pi)\, y_{n1}(\pi)\, x_{2n+1}(x)\right) \\
H_1(x,t_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-y'_{n2}(\pi)\left(G_{n2}(\pi,t_1)\, y_{n2}(t_1) - \frac{1}{2} s_{n2}(\pi)\right) x_{2n}(x)\right. \\
&\quad \left. + y_{n1}(\pi)\left(\frac{\partial G_{n1}(x,t_1)}{\partial x}_{|x=\pi}\, y_{n1}(t_1) - \frac{1}{2} s'_{n1}(\pi)\right) x_{2n+1}(x)\right) \\
H_j(x,t_1,\ldots,t_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\left(y_{n2}(t_1) + y'_{n2}(\pi)\, G_{n2}(x,t_1)\right) G_{n2}(t_1,t_2) \ldots\right. \\
&\quad G_{n2}(t_{j-2},t_{j-1})\, x \left(G_{n2}(t_{j-1},t_j)\, y_{n2}(t_j) - \frac{1}{2} s_{n2}(t_{j-1})\right) \\
&\quad x_{2n}(x) - \left(y_{n1}(t_1) - y_{n1}(\pi)\, \frac{\partial G_{n1}(x,t_1)}{\partial x}_{|x=\pi}\right) x
\end{aligned}$$

(4.1.11) denklemi Borg Denklemi olarak bilinmektedir.

Borg denklemini üretmek için $L_2(0,\pi)$ 'de fonksiyonlar sisteminin Riesz bazı oluşturması ve tamlığı kullanıldı. Genelliği bozmadan $H = 0$ durumunu incelendi.

Tanım: H, Hilbert uzayı olmak üzere $\{f_j\}_{j\geq 1}$ bazı, lineer, sınırlı ve terslenebilir operatör yardımıyla ortonormal bazdan elde ediliyorsa $\{f_j\}_{j\geq 1}$ bazı Riesz bazıdır.

Önerme 4.1.1: $\rho_n = n + \dfrac{a}{n} + \dfrac{k_n}{n}$, $\{k_n\} \in l_2$, $a \in \mathbb{C}$ olacak biçimde $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ ve $n \neq k$ için $\rho_n = \rho_k$ verilsin. Öyle ise $\{\cos \rho_n x\}_{n\geq 0}$, $L_2(0,\pi)$ bir Riesz bazıdır.

Bu önerme ışığında $\{\mu_n(x)\}$, $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazıdır, $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı olan fonksiyonlar sistemi aynı zamanda tam olmasından $\{\mu_n(x)\}$ tamdır.

Tanım: H Hilbert uzayının iki dizisi için

$$(f_j, \chi_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ise bu diziler binormal olarak tanımlanır.

Uyarı 4.1.1 :$\{\mu_n(x)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı oluşturması için çevirme operatörü kullanılır. Ama çoğu zaman çevirme operatörünün yetersiz olduğu noktada Borg metodu kullanılmalıdır. Borg'un temel ilkesi, öz fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı oluşturmasıdır.

5.BÖLÜM

Bu bölümde, $y(x)$ aranan fonksiyon, A gerçel sabit; λ spektral parametre $q(x) \in L_2(0,\pi)$ gerçel değerli sınırlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$-y'' + \left\{ \frac{A}{x} + q(x) \right\} y(x) = \lambda y \quad , \quad 0 < x < \pi$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \quad , \quad (\Gamma y)(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

sınır koşullarının ürettiği operatör için konulan ters problemin öğrenilmesi ve yerel (lokal) çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili teoremler ispatlanacaktır.

5.1 Borg Denkleminin Kuruluşu

$\lambda_{ni} = \rho_{ni}^2$, $n \geq 0$, $i = 1,2$ L_i sınır değer probleminin özdeğerleri olmak üzere;

$$ly := -y'' + \left\{ \frac{A}{x} + q(x) \right\} y(x) = \lambda y \tag{5.1.1}$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y^{(i-1)}(\pi) = 0 \tag{5.1.2}$$

sınır değer problemi ele alınsın. Burada $q(x) \in L_2(0,\pi)$ reel fonksiyondur. (5.1.1)-(5.1.2) sınır değer problemleri $i = 1$ için;

$$\begin{cases} ly := -y'' + \left\{ \frac{A}{x} + q(x) \right\} y(x) = \lambda y \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin $\{\rho_{n1}\}$ özdeğerleri,

$$\rho_{n1} = n - \frac{A}{2\pi} \frac{\ln n}{n} + \frac{w_1}{\pi n} + \frac{k_{n1}}{n}, \ \{k_{n1}\} \in l_2$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t)\,dt - \frac{A^2 \pi}{2} \left(\ln^2 \pi - 2\ln \pi + 2 \right)$$

$$+A\left(\frac{\sin 2}{4}-\frac{\ln\pi}{2}-\int\limits_0^1\frac{\sin^2(t)}{t}dt\right)$$

asimptotik ifadesine sahiptir.

(5.1.1)-(5.1.2) sınır değer problemleri $i=2$ için;

$$\begin{cases} ly:=-y''+\left\{\dfrac{A}{x}+q(x)\right\}y(x)=\lambda y \\ y(0)=0\ \ ,\ \ (\Gamma y)(\pi)=0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin $\{\rho_{n2}\}$ özdeğerleri,

$$\rho_{n2}=n+\frac{1}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{w_2}{\pi n}+\frac{k_{n2}}{n},\ \{k_{n2}\}\in l_2$$

$$w_2=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt-\frac{A^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi-2\ln\pi+2\right)$$

$$+\frac{A}{2}\left(\ln\pi-\ln 4+\frac{\sin 2}{2}-2\int\limits_0^1\frac{\sin^2(t)}{t}dt\right)$$

asimptotik ifadesine sahiptir. L_i ve $\widetilde{L}_i$, $i=1,2$ için $w_i=\tilde{w}_i$'yı sağlayan iki sınır değer problemi olsunlar.

$$\widetilde{L}_i:=\begin{cases} ly:=-y''+\left\{\dfrac{\tilde{A}}{x}+\tilde{q}(x)\right\}y(x)=\lambda y \\ y(0)=0 \\ y^{(i-1)}(\pi)=0 \end{cases}$$

$\widetilde{L}_i$ problemi $i=1$ için

$$\tilde{\rho}_{n1}=n-\frac{\tilde{A}}{2\pi}\frac{\ln n}{n}+\frac{\tilde{w}_1}{\pi n}+\frac{\tilde{k}_{n1}}{n},\left\{\tilde{k}_{n1}\right\}\in l_2$$

$$\tilde{w}_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\tilde{q}(t)\,dt-\frac{\tilde{A}^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi-2\ln\pi+2\right)$$

$$+\tilde{A}\left(\frac{\sin 2}{4}-\frac{\ln\pi}{2}-\int\limits_0^1\frac{\sin^2(t)}{t}dt\right)$$

$\widetilde{L}_i$ problemi $i=2$ için

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{n2} &= n+\frac{1}{2}+\frac{\tilde{A}}{2\pi}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{\tilde{w}_2}{\pi n}+\frac{\tilde{k}_{n2}}{n},\left\{\tilde{k}_{n2}\right\}\in l_2 \\
\tilde{w}_2 &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\tilde{q}\left(t\right)dt-\frac{\tilde{A}^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi-2\ln\pi+2\right) \\
&+\frac{\tilde{A}}{2}\left(\ln\pi-\ln 4+\frac{\sin 2}{2}-2\int\limits_0^{1}\frac{\sin^2\left(t\right)}{t}dt\right)
\end{aligned}
$$

L_i ve $\widetilde{L_i}$, $i=1,2$ sınır değer problemlerinin asimptotik davranışlarından $\widetilde{\rho_{ni}}-\rho_{ni}\in l_2$'dir. Gerçekten $i=1$ için

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{n1}-\rho_{n1} &= \frac{A-\tilde{A}}{2\pi}\frac{\ln n}{n}+\frac{w_1-\tilde{w}_1}{\pi n}+\frac{k_{n1}-\tilde{k}_{n1}}{n} \\
&= \frac{A-\tilde{A}}{2\pi}\frac{\ln n}{n}+\frac{k_{n1}-\tilde{k}_{n1}}{n}
\end{aligned}
$$

$\widetilde{\rho_{n1}}-\rho_{n1}\in l_2$ olduğu incelensin.

$a_n=\dfrac{A-\tilde{A}}{2\pi}\dfrac{\ln n}{n}+\dfrac{k_{n1}-\tilde{k}_{n1}}{n}$ olarak ifade edilirse $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2<\infty$ olduğu araştırılıcaktır.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(A-\tilde{A}\right)}{2\pi}\frac{\ln n}{n}+\frac{\left(k_{n1}-\tilde{k}_{n1}\right)}{n}\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A-\tilde{A}}{2\pi}\right)^2\frac{\ln^2 n}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A-\tilde{A}}{\pi}\frac{\left(k_{n1}-\tilde{k}_{n1}\right)\ln n}{n^2} \\
&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k_{n1}-\tilde{k}_{n1}}{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

Burada; $k_{n1},\tilde{k}_{n1}\in l_2$ olduğundan $k_{n1}-\tilde{k}_{n1}\in l_2$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A-\tilde{A}}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2<\infty,\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{k_{n1}-\tilde{k}_{n1}}{n}\right)^2<\infty
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(k_{n1}-\tilde{k}_{n1}\right)\ln n}{n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(k_{n1}-\tilde{k}_{n1}\right)}{n}\frac{\ln n}{n}\right\} \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(k_{n1}-\tilde{k}_{n1}\right)}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|^2<\infty$ olur. Benzer şekilde $\tilde{\rho}_{n2}-\rho_{n2}\in l_2$'dir.

$$\Lambda := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{\rho}_{n1} - \rho_{n1}|^2 + |\tilde{\rho}_{n2} - \rho_{n2}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$\Lambda \in l_2$ olan reel değerli bir sayısı tanımlansın.

$$\begin{aligned} y_{ni}(x) &= \varphi\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) \quad , \quad \widetilde{y}_{ni}(x) = \widetilde{\varphi}\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) \\ s_{ni}(x) &= S\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) \quad , \quad \widetilde{s_{ni}}(x) = \widetilde{S}\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) \end{aligned}$$

olarak alındığında (5.1.1) ve (5.1.2) sınır değer problemi için;

$$G_{ni}(x,t) = \begin{cases} S\left(x, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) C\left(t, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) - S\left(t, \widetilde{\lambda}_{ni}\right) C(x, \lambda_{ni}) & , \ 0 \le x \le t \le \pi \\ 0 & \ \ 0 \le t \le x \le \pi \end{cases}$$

fonksiyonu, sınır değer probleminin bir green fonksiyonudur.

$\varphi(x,\lambda)$, $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ (5.1.1) $-$ (5.1.2) sınır değer problemleri için $C(0,\lambda) = \varphi(0,\lambda) = (\Gamma S)(0) = 1$, $S(0,\lambda) = (\Gamma C)(0) = 0$, $(\Gamma\varphi)(0,\lambda) = h$ koşulları altında çözümleridir.

$$l y_{ni}(x) = \widetilde{\lambda}_{ni} y_{ni}(x) \quad , \quad \widetilde{l}\widetilde{y}_{ni}(x) = \widetilde{\lambda}_{ni}\widetilde{y}_{ni}(x)$$

$$\begin{aligned} -y''_{ni}(x) + \left\{ \frac{A}{x} + q(x) \right\} y_{ni}(x) &= \widetilde{\lambda} y_{ni}(x) \\ -\widetilde{y}''_{ni}(x) + + \left\{ \frac{\tilde{A}}{x} + \tilde{q}(x) \right\} \widetilde{y}_{ni}(x) &= \widetilde{\lambda}\widetilde{y}_{ni}(x) \end{aligned}$$

denklemlerinde birinci denklem $\widetilde{y}_{ni}(x)$, ikinci denklem $y_{ni}(x)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarılıp ve $r(x) = \left(\frac{A - \tilde{A}}{x} + \widetilde{q}(x) - q(x) \right)$, $p = \tilde{h} - h$ olarak ifade edildiğinde

$$\widetilde{y}''_{ni}(x) y_{ni}(x) - y''_{ni}(x) \widetilde{y}_{ni}(x) + \left(\frac{A - \tilde{A}}{x} + \widetilde{q}(x) - q(x) \right) \widetilde{y}_{ni}(x) y_{ni}(x) = 0$$

$$\int_0^{\pi} r(x) \widetilde{y}_{ni}(x) y_{ni}(x)\, dx = \int_0^{\pi} \left(\widetilde{y}''_{ni}(x) y_{ni}(x) - y''_{ni}(x) \widetilde{y}_{ni}(x) \right) dx$$

$$\int_0^\pi r(x)\widetilde{y}_{ni}(x)\,y_{ni}(x)\,dx = \left(\left(\Gamma\widetilde{y}_{ni}\right)(x)\,y_{ni}(x) - \widetilde{y}_{ni}(x)(x)\left(\Gamma y_{ni}\right)(x)\right)\Big|_0^\pi$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi r(x)\widetilde{y}_{ni}(x)\,y_{ni}(x)\,dx &= \{\left(\Gamma\widetilde{y}_{ni}\right)(\pi)\,y_{ni}(\pi) - \left(\Gamma y_{ni}\right)(\pi)\,\widetilde{y}_{ni}(\pi) \\ &\qquad \left(\Gamma\widetilde{y}_{ni}\right)(0)\,y_{ni}(0) - \left(\Gamma y_{ni}\right)(0)\,\widetilde{y}_{ni}(0)\}\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi r(x)\widetilde{y}_{ni}(x)\,y_{ni}(x)\,dx = \left(\Gamma\widetilde{y}_{ni}\right)(\pi)\,y_{ni}(\pi) - \left(\Gamma y_{ni}\right)(\pi)\,\widetilde{y}_{ni}(\pi) - p \tag{5.1.4}$$

$\widetilde{y}_{ni}(x)$, $\widetilde{L}_i$ sınır değer probleminin özfonksiyonları olmak üzere,

$$\widetilde{y}_{n1}(\pi) = 0 \quad , \quad \left(\Gamma\widetilde{y}_{n2}\right)(\pi) = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{5.1.5}$$

yazılabilir.

Sınır değer probleminin Green fonksiyonunun bir çözümü olan $\widetilde{y}_{ni}(x)$ fonksiyonu,

$$\widetilde{y}_{ni}(x) = y_{ni}(x) + \int_0^\pi G_{ni}(x,t)\,r(t)\,\widetilde{y}_{ni}(t)\,dt \qquad (n \geq 0 \;\; , \;\; i = 1,2) \tag{5.1.7}$$

geçerlidir.

Bu denkleme;

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_{ni}^{(0)}(x) &= y_{ni}^{(0)}(x) \\ \widetilde{y}_{ni}^{(k)}(x) &= \int_0^\pi G_{ni}(x,t)\,r(t)\,\widetilde{y}_{ni}^{(k-1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

olmak üzere ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanılırsa

$$\widetilde{y}_{ni}(x) = y_{ni}(x) + \varphi_{ni}(x) \quad (n \geq 0 \;\; , \;\; i = 1,2) \tag{5.1.8}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{ni}(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^\pi \ldots \int_0^\pi}_{j \text{ tane}} G_{ni}(x,t_1)\,G_{ni}(t_1,t_2)\ldots G_{ni}(t_{j-1},t_j)\,x \\ &\qquad r(t_1)\ldots r(t_j)\,y_{ni}(t_j)\,dt_1\ldots dt_j\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

$(5.1.8)-(5.1.9)$ denklemleri $(5.1.4)$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_0^\pi r(x)\, y_{ni}(x)\left(y_{ni}(x)+\varphi_{ni}(x)\right) dx$$
$$= \left(\Gamma\widetilde{y}_{ni}\right)(\pi)\, y_{ni}(\pi) - \left(\Gamma y_{ni}\right)(\pi)\, \underset{(n\geq 1\ ,\ i=1,2)}{\widetilde{y}_{ni}(\pi)} - p$$
$$\int_0^\pi r(x)\, y_{ni}^2(x)\, dx + \int_0^\pi r(x)\, y_{ni}(x)\, \varphi_{ni}(x)\, dx$$
$$= \left(\Gamma\widetilde{y}_{ni}\right)(\pi)\, y_{ni}(\pi) - \left(\Gamma y_{ni}\right)(\pi)\, \widetilde{y}_{ni}(\pi) - p$$

$$\begin{aligned} u_{ni}(x) &= y_{ni}^2(x) \\ \omega_{n1} &= \left(\tilde{y}_{n1}(\pi)+\tilde{\varphi}_{n1}(\pi)\right) y_{n1}(\pi) - p - \int_0^\pi r(x)\, y_{n1}(x)\, \varphi_{n1}(x)\, dx \\ \omega_{n2} &= -\tilde{y}_{n2}(\pi)\left(y_{n2}(\pi)+\varphi_{n2}(\pi)\right) - p - \int_0^\pi r(x)\, y_{n2}(x)\, \varphi_{n2}(x)\, dx \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

$$\int_0^\pi r(x)\, u_{ni}(x)\, dx = \omega_{ni} \quad , \quad n\geq 1\ ,\ i=1,2$$

denklemi elde edilir.

$\eta_{2n}(x) := u_{n2}(x)$, $\eta_{2n-1}(x) = u_{n1}(x)$ olacak biçimde $\{\eta_n(x)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi tanımlansın.

Ters problemlerin lokal çözümleri çalışılırken verilen fonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı oluşturması gerekmektedir. $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı oluşturan her fonksiyonlar sistemi aynı zamanda tam olduğundan$\{\mu_n(x)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$ 'de tamdır.

$$\int_0^\pi r(x)\, \eta_{ni}(x)\, dx = \omega_{ni}(x) \quad , \quad n\geq 0\ ,\ i=1,2$$

momentum problemine dönüldüğünde bu problemin tam olmasından;

$$r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{n2}\chi_{2n}(x) + \omega_{n1}\chi_{2n+1}(x)$$

ayrışımına sahiptir. Burada $\left\{\chi_j\right\}$ binormal bazdır.

ω_{n1} ve ω_{n2} ifadeleri ayrışım denkleminde yerine yazıldığında ve ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulandığında denklemimiz lokal çözülebilen integral denklemine dönüşür.

.

$$r(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi}} H_j(x, t_{1,\ldots} t_j)\, r(t_1) \ldots r(t_j)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_j \qquad (5.1.11)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\left(\Gamma y_{n2}\right)(\pi)\, y_{n2}(\pi)\, x_{2n}(x) + \left(\Gamma y_{n1}\right)(\pi)\, y_{n1}(\pi)\, x_{2n+1}(x)\right) \\ H_1(x, t_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\left(\Gamma y_{n2}\right)(\pi)\left(G_{n2}(\pi, t_1)\, y_{n2}(t_1)\right) x_{2n}(x)\right. \\ &\quad \left. + y_{n1}(\pi) \left(\frac{\partial G_{n1}(x, t_1)}{\partial x}_{|x=\pi}\, y_{n1}(t_1) \right) x_{2n+1}(x) \right) \end{aligned} \qquad (5.1.12)$$

$$\begin{aligned} H_j(x, t_1, \ldots, t_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\left(y_{n2}(t_1) + \left(\Gamma y_{n2}\right)(\pi)\, G_{n2}(x, t_1)\right) G_{n2}(t_1, t_2) \ldots\right. \\ &\quad G_{n2}(t_{j-2}, t_{j-1})\, x \left(G_{n2}(t_{j-1}, t_j)\, y_{n2}(t_j)\right) x_{2n}(x) \\ &\quad - \left(y_{n1}(t_1) - y_{n1}(\pi) \frac{\partial G_{n1}(x, t_1)}{\partial x}_{|x=\pi} \right) x \\ &\quad G_{n1}(t_1, t_2) \ldots G_{n1}(t_{j-2}, t_{j-1}) \left(G_{n1}(t_{j-1}, t_j)\right) x_{2n+1}(x) \quad j \geq 2 \end{aligned}$$

5.1.11 denklemi Borg Denklemi olarak bilinmektedir.

Borg denklemini elde etmek için $L_2(0, \pi)$ 'de verilerin tamlığı ve Riesz bazı oluşturmasını kullandık.

Tanım: H, Hilbert uzayı olmak üzere $\{f_j\}_{j\geq 1}$ bazı, lineer, sınırlı ve terslenebilir operatör yardımıyla ortonormal bazdan elde ediliyorsa $\{f_j\}_{j\geq 1}$ bazı Riesz bazıdır.

Tanım: H Hilbert uzayının iki dizisi için

$$(f_j, \chi_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

ise bu diziler binormal olarak tanımlanır.

Uyarı 5.1.1 :$\{\mu_n(x)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı oluşturması için çevirme operatörü kullanılır. Ama çoğu zaman çevirme operatörünün yetersiz olduğu noktada Borg metodu kullanılmalıdır. Borg'un temel ilkesi, özfonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı oluşturmasıdır.

Temel Teorem 5.2: (5.1.1) – (5.1.2) formunda verilen L_i sınır değer problemi için eğer $\left\{\widetilde{\lambda}_{ni}\right\}_{n\geq 0}$ $i=1,2$, yeterince küçük $\delta>0$ sayısı için $\Lambda<\delta$ koşulunu sağlarsa, $\widetilde{q}(x)\in L_2(0,\pi)$ reel değerli fonksiyonu ve $\widetilde{h}$ tek biçimde belirlenir, $\left\{\tilde{\lambda}_{ni}\right\}_{n\geq 0}$, $i=1,2$, $\widetilde{L}_i$ sınır değer probleminin özdeğerleridir. Ayrıca;

$$||q-\widetilde{q}||_{L_2(0,\pi)}<C\Lambda \ , \ \left\|h-\widetilde{h}\right\|_{L_2(0,\pi)}<C\Lambda \tag{5.1.13}$$

gerçekleşir. (Burada C, L_i 'ye bağlı olan pozitif sabitlerdir.)

İspat: Eğer $\delta_1>0$ için $\left\{\widetilde{\lambda}_{ni}\right\}_{n\geq 0}$, $i=1,2$, $\Lambda<\delta_1$ koşulunu sağlarsa $(n,i)\neq(k,j)$ için $\widetilde{\lambda}_{ni}\neq\widetilde{\lambda}_{kj}$ dir.

$$y_{n2}(\pi)\neq 0 \ \ , \ \ (\Gamma y_{n1})(\pi)\neq 0 \ \ , \ \ n\geq 0 \tag{5.1.14}$$

vardır. Çünkü $\varphi(x,\lambda_{n2})$, L_2 sınır değer probleminin özfonksiyonu ise; $\varphi(\pi,\lambda_{n2})\neq 0$, $(\Gamma\varphi)(\pi,\lambda_{n2})=0$ dir. Aksi takdirde $\varphi(x,\lambda_{n2})$, L_2 sınır değer probleminin özfonksiyonu olması ile çelişir.

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+0\left(\frac{1}{|\rho|}e^{|\tau|x}\right), \ \rho\to\infty$$

olmasından

$$\varphi(\pi,\lambda_{n2})=\cos n\pi+0\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^n+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

geçerlidir. Buradan

$$|\varphi(\pi,\lambda_{n2})|\geq C>0.$$

$$\varphi(x,\lambda_{n2})=\cos\rho_{n2}x+\int_0^x G(x,t)\cos\rho_{n2}t dt$$

gösterimi kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|\varphi\left(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2}\right)-\varphi\left(\pi,\lambda_{n2}\right)\right| &= \left(\cos\widetilde{\rho}_{n2}\pi-\cos\rho_{n2}\pi\right)\\ &\quad+\int\limits_0^\pi G\left(\pi,t\right)\left(\cos\widetilde{\rho}_{n2}t-\cos\rho_{n2}t\right)dt\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

özelliğinden

$$\begin{aligned}&\left|\varphi\left(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2}\right)-\varphi\left(\pi,\lambda_{n2}\right)\right|\\ &=\left|\left(\cos\widetilde{\rho}_{n2}\pi-\cos\rho_{n2}\pi\right)+\int\limits_0^\pi G\left(\pi,t\right)\left(\cos\widetilde{\rho}_{n2}t-\cos\rho_{n}t\right)dt\right|\\ &\leq\left|-2\sin\left(\frac{\widetilde{\rho}_{n2}\pi+\rho_{n2}\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\widetilde{\rho}_{n2}\pi-\rho_{n2}\pi}{2}\right)\right|\\ &+\int\limits_0^\pi\left|G\left(\pi,t\right)\right|\left|-2\sin\left(\frac{\widetilde{\rho}_{n2}\pi+\rho_{n2}\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\widetilde{\rho}_{n2}\pi-\rho_{n2}\pi}{2}\right)\right|\\ &\leq C\left|\widetilde{\rho}_{n2}-\rho_{n2}\right|\end{aligned}$$

Sonuç olarak;

$$\left|\varphi\left(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2}\right)-\varphi\left(\pi,\lambda_{n2}\right)\right|<C\left|\widetilde{\rho}_{n2}-\rho_{n2}\right|.$$

olması açıktır. Yeterince küçük Λ için

$$y_{n2}\left(\pi\right):=\varphi\left(\pi,\tilde{\lambda}_{n2}\right)\neq 0\qquad\left(n\geq 0\right).$$

$n\geq 0$, $i=0,1$, $0\leq x,t\leq\pi$ için

$$\left|y_{ni}\left(x\right)\right|<C\ ,\ \left|\left(\Gamma y_{n1}\right)\left(\pi\right)\right|\ <C\left(n+1\right)\ ,\ \left|\frac{\partial G_{ni}\left(x,t\right)}{dx}\right|<C$$

$$\left|G_{ni}\left(x,t\right)\right|<\frac{C}{n+1}\ ,\ \left|\left(\Gamma y_{n2}\right)\left(\pi\right)\right|<C\left|\widetilde{\rho}_{n2}-\rho_{n2}\right|$$

$$\left|y_{n1}\left(\pi\right)\right|<\frac{C}{n+1}\left|\widetilde{\rho}_{n1}-\rho_{n1}\right|\ ,\ \left|\left(\Gamma y_{n1}\right)\left(\pi\right)\right|<\frac{C}{n+1}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

$(\Gamma\varphi)(\pi,\lambda_{n2})=0$ olduğundan

$$(\Gamma y_{n2})(\pi)=(\Gamma\varphi)\left(\pi,\tilde{\lambda}_{n2}\right)-(\Gamma\varphi)(\pi,\lambda_{n2})$$

yazılabilir. $(\Gamma\varphi)(x,\lambda)=\varphi\prime(x,\lambda)-u(x)\varphi(x,\lambda)$ şeklinde tanımlanmıştı.

$$\varphi\prime(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+G(x,x)\cos\rho x+\int\limits_0^x\frac{\partial G(x,t)}{dx}\cos\rho t dt$$

$$\varphi(x,\lambda)\quad=\cos\rho x+\int\limits_0^x G(x,t)\cos\rho t dt$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma\varphi)(x,\lambda)\quad&=\varphi\prime(x,\lambda)-u(x)\varphi(x,\lambda)\\
&=-\rho\sin\rho x+G(x,x)\cos\rho x+\int\limits_0^x\frac{\partial G(x,t)}{dx}\cos\rho t dt\\
&-u(x)\cos\rho x-\int\limits_0^x u(x)G(x,t)\cos\rho t dt\\
|(\Gamma y_{n2})(\pi)|\quad&=\left|(\Gamma\varphi)\left(\pi,\tilde{\lambda}_{n2}\right)-(\Gamma\varphi)(\pi,\lambda_{n2})\right|\\
&=|-\widetilde{\rho}_{n2}\sin\widetilde{\rho}_{n2}\pi+[G(\pi,\pi)-u(\pi)]\cos\widetilde{\rho}_{n2}\pi\\
&+\int\limits_0^\pi(\Gamma G)_\pi(\pi,t)\cos\widetilde{\rho}_{n2}t dt+\rho_{n2}\sin\rho_{n2}\pi\\
&-[G(\pi,\pi)-u(\pi)]\cos\rho_{n2}\pi-\int\limits_0^\pi(\Gamma G)_\pi(\pi,t)\cos\rho_{n2}t dt\Bigg|\\
&=\left|-\widetilde{\rho}_{n2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n+\frac{\tilde{A}}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{\tilde{w}_2}{n}+\frac{\tilde{k}_{n2}\pi}{n}\right)\right.\\
&+[G(\pi,\pi)-u(\pi)]\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n+\frac{\tilde{A}}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{\tilde{w}_2}{n}+\frac{\tilde{k}_{n2}\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$+\int_0^{\pi}(\Gamma G)_{\pi}(\pi,t)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n+\frac{\tilde{A}}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{\tilde{w}_2}{n}+\frac{\tilde{k}_{n2}\pi}{n}\right)tdt$$

$$+\rho_{n2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n+\frac{A}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{w_2}{n}+\frac{k_{n2}\pi}{n}\right)$$

$$-\left[G(\pi,\pi)-u(\pi)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n+\frac{A}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{w_2}{n}+\frac{k_{n2}\pi}{n}\right)$$

$$\left.+\int_0^{\pi}(\Gamma G)_{\pi}(\pi,t)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n+\frac{A}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{w_2}{n}+\frac{k_{n2}\pi}{n}\right)tdt\right|$$

$$=\left|(-1)^n\tilde{\rho}_{n2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\tilde{A}}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{\tilde{w}_2}{n}+\frac{\tilde{k}_{n2}\pi}{n}\right)\right.$$

$$+\left[G(\pi,\pi)-u(\pi)\right](-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\tilde{A}}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{\tilde{w}_2}{n}+\frac{\tilde{k}_{n2}\pi}{n}\right)$$

$$+\int_0^{\pi}(\Gamma G)_{\pi}(\pi,t)(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\tilde{A}}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{\tilde{w}_2}{n}+\frac{\tilde{k}_{n2}\pi}{n}\right)tdt$$

$$+\rho_{n2}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{w_2}{n}+\frac{k_{n2}\pi}{n}\right)$$

$$-\left[G(\pi,\pi)-u(\pi)\right](-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{w_2}{n}+\frac{k_{n2}\pi}{n}\right)$$

$$\left.+\int_0^{\pi}(\Gamma G)_{\pi}(\pi,t)(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{w_2}{n}+\frac{k_{n2}\pi}{n}\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg| (-1)^n \tilde{\rho}_{n2} \cos\left(\frac{\tilde{A}}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{\tilde{w}_2}{n} + \frac{\tilde{k}_{n2}\pi}{n}\right) \\
&+ \left[G(\pi,\pi) - u(\pi)\right](-1)^n \sin\left(\frac{\tilde{A}}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{\tilde{w}_2}{n} + \frac{\tilde{k}_{n2}\pi}{n}\right) \\
&+ \int_0^\pi (\Gamma G)_\pi (\pi,t)(-1)^n \sin\left(\frac{\tilde{A}}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{\tilde{w}_2}{n} + \frac{\tilde{k}_{n2}\pi}{n}\right) tdt \\
&+ \rho_{n2} \cos\left(\frac{A}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{w_2}{n} + \frac{k_{n2}\pi}{n}\right) \\
&- \left[G(\pi,\pi) - u(\pi)\right] \sin\left(\frac{A}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{w_2}{n} + \frac{k_{n2}\pi}{n}\right) \\
&+ \int_0^\pi (\Gamma G)_\pi (\pi,t) \sin\left(\frac{A}{2}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{w_2}{n} + \frac{k_{n2}\pi}{n}\right) tdt \Bigg| \\
&\Bigg| \sim (-1)^n \tilde{\rho}_{n2} + \left[G(\pi,\pi) - u(\pi)\right](-1)^n + \int_0^\pi (\Gamma G)_\pi (\pi,t)(-1)^n tdt \\
&+ (-1)^n \rho_{n2} - \left[G(\pi,\pi) - u(\pi)\right]\Big| \quad (n \to \infty) \\
&< C\left|\tilde{\rho}_{n2} - \rho_{n2}\right|
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(5.1.11) − (5.1.12) kullanarak;

$\|f\| < C\Lambda$, $\|H_1\| < C\Lambda$, $\|H_j\| < C^j$ $(j \geq 2)$ hesaplanabilir.

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \kappa(x)
$$

dir. Burada;

$$
f_{2n} = -(\Gamma y_{n2})(\pi)\, y_{n2}(\pi) \;\; , \; f_{2n-1} = (\Gamma y_{n1})(\pi)\, y_{n1}(\pi)
$$

olarak aldığımızda

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \kappa_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_{2n}\kappa_{2n}(x) + f_{2n-1}\kappa_{2n-1}(x)\right) \\
|f_{2n}| &= |(\Gamma y_{n2})(\pi)\, y_{n2}(\pi)| < C\,|\widetilde{\rho}_{n2} - \rho_{n2}| \\
|f_{2n-1}| &= |(\Gamma y_{n1})(\pi)\, y_{n1}(\pi)| < C(n+1)\frac{C}{(n+1)}\,|\widetilde{\rho}_{n1} - \rho_{n1}| = C\,|\widetilde{\rho}_{n1} - \rho_{n1}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\|f\| < C\Lambda$ olduğunu gösterilsin;

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L_2(0,\pi)} &= \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}\chi_{2n}(x) + f_{2n-1}\kappa_{2n-1}(x)\right)^2 dx \\
&\leq 2\left(\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}\kappa_{2n}\right)^2 dx + \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{2n-1}\kappa_{2n-1}(x)\right)^2 dx\right) \\
&< C\Lambda
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\|H_1\| < C\Lambda$ ve $\|H_j\| < C^j \quad (j \geq 2)$ hesaplanabilir.

$L_2(0,\pi)$ 'de elde edinilen lineer olmayan denklemi tekrar yazıldığında,

$$\begin{aligned}
r &= f + Ar \\
Ar &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j r \\
(A_j r)(x) &= \underbrace{\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}}_{j \text{ tane}} H_j(x, t_1, t_2, ..., t_j)\, r(t_1) .. r(t_j)\, dt_1..dt_j
\end{aligned}$$

geçerlidir.

$$\|f\| < C\Lambda\ ,\ \|H_1\| < C\Lambda\ ,\ \|H_j\| < C^j \quad (j \geq 2)$$

olmaları göz önünde tutularak; fix edilmiş $C \geq \frac{1}{2}$ için

$$\left\{\begin{array}{c}
\|A_1 r\| \leq C\Lambda\,\|r\| \quad , \quad \|A_1 r - A_1\widetilde{r}\| < C\Lambda\,\|r - \widetilde{r}\| \\
\|A_j r\| \leq (C\,\|r\|)^j \quad , \quad \|A_j r - A_j\widetilde{r}\| \leq C\,\|r - \widetilde{r}\|\,(\Lambda + 2\max(\|r\|, \|\widetilde{r}\|))
\end{array}\right. \tag{5.1.15}$$

hesaplamaları mevcuttur.

Eğer $\|r\| \leq \dfrac{1}{2C}$, $\|\widetilde{r}\| \leq \dfrac{1}{2C}$ ise

$$\begin{aligned}
\|Ar\| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} A_j r\right| \leq \|A_1 r + A_2 r + ...\| \\
&\leq C\Lambda \|r\| + (C\|r\|)^2 + ... \\
&= C\Lambda \|r\| + C\|r\|^2 \frac{1}{1-\|r\|} \\
&\leq C\Lambda \|r\| + 2C^2 \|r\| \\
\|Ar\| &\leq C\Lambda \|r\| + 2C^2 \|r\|
\end{aligned}$$

geçerlidir. Benzer şekilde

$$\|A_j r - A_j \widetilde{r}\| \leq C\|r - \widetilde{r}\| (\Lambda + 2\max(\|r\|, \|\widetilde{r}\|))$$

geçerlidir. Üstelik eğer;

$$\Lambda \leq \frac{1}{4C} \quad , \quad \|r\| \leq \frac{1}{8C^2} \quad , \quad \|\widetilde{r}\| \leq \frac{1}{8C^2}$$

ise

$$\|Ar\| \leq \frac{1}{2}\|r\| \quad , \quad \|Ar - A\widetilde{r}\| \leq \frac{1}{2}\|r - \widetilde{r}\|$$

geçerlidir.

Sonuç olarak yeterince küçük $\delta_2 > 0$ için $\Lambda < \delta_2$ ise Borg denklemine ardışık yaklaşımlar yöntemini uygulandığında;

$$\begin{aligned}
ro &= f \quad , \quad r_{k+1} = f + Ar_k \quad , \quad k \geq 0 \\
r &= ro + \sum_{k=0}^{\infty} (r_{k+1} - r_k)
\end{aligned}$$

olur. $\delta_2 = \dfrac{1}{16C^2}$ alındığında eğer $\Lambda < \delta_2$ ise

$$\|f\| \leq \frac{1}{16C^2} \quad , \quad \Lambda \leq \frac{1}{4C}$$

$$\|Ar\| \leq \frac{1}{2}\|r\| \quad , \quad \|Ar - A\widetilde{r}\| \leq \frac{1}{2}\|r - \widetilde{r}\| . \tag{5.1.16}$$

eşitsizliklerinden;

$$\|r_k\| \leq 2\|f\| \quad , \quad \|r_{k+1} - r_k\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}\|f\| \quad , k \geq 0$$

elde edilir. Bununla birlikte $\|r\| \leq 2\|f\|$ dır.

$$\|r\| = \|f + Ar\| \leq \|f\| + \|Ar\| \leq \|f\| + \frac{1}{2}\|r\|.$$

Burada $\|r\| \leq 2\|f\|$ 'dir.

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ve $r(x)$ Borg denklemi olarak bilinen lineer olmayan integral denkleminin çözümüdür. $\widetilde{q}(x), \widetilde{h}'yi$ $\widetilde{q} = q + r$, $\widetilde{h} = h + p$ formülleriyle tanımlansın. Açıkca

$$\|\widetilde{q} - q\|_{L_2(0,\pi)} < C\Lambda \text{ ve } \left\|\widetilde{h} - h\right\|_{L_2(0,\pi)} < C\Lambda$$

geçerlidir. Çünkü,

$$\|\widetilde{q} - q\| = \|r\| \leq 2\|f\| < C\Lambda$$

$$\left\|\widetilde{h} - h\right\|_{L_2(0,\pi)} < C\Lambda$$

hesaplamaları mevcuttur.

Şimdi ise $\left\{\widetilde{\lambda}_{ni}\right\}_{n\geq 0}$ verilen $\widetilde{L}_i$ sınır değer probleminin özdeğerleri olduğunu göstermek kalıyor.$\left\{\widetilde{\lambda}_{ni}\right\}_{n\geq 0}$ $i = 1, 2$, $\Lambda < \delta_1$ koşulları sağlanıyorsa $\tilde{y}_{n2}(\pi) \neq 0$, $(\Gamma\tilde{y}_{n1})(\pi) \neq 0$ $(n \geq 0)$ mevcuttur. $\{\tilde{y}_{ni}(x)\}_{n\geq 0}$ $\widetilde{L}_i$ sınır değer probleminin özfonksiyonları olmak üzere (5.1.2) sınır koşullarından; $\tilde{y}_{n1} = 0$, $(\Gamma\tilde{y}_{n2})(\pi) = 0$ $n \geq 0$ olduğu açıktır. Bu durumda $\left\{\widetilde{y}_{ni}(x)\right\}_{n\geq 0}$ $\widetilde{L}_i$ sınır değer probleminin özfonksiyonlardır, ve aynı zamanda $\left\{\widetilde{\lambda}_{ni}\right\}_{n\geq 0}$ $i = 1, 2$ $\tilde{L}_i$ probleminin özdeğerleridir.

5.1.3. Dirichlet sınır koşulları durumu:

Benzer sonuçlar Dirichlet sınır koşulları durumunda da geçerlidir.

$\lambda_{ni} = \rho_{ni}^2$, $n \geq 0$, $i = 1, 2$ L_i sınır değer probleminin özdeğerleri olmak üzere;

$$ly := -y'' + \left\{\frac{A}{x} + q(x)\right\} y(x) = \lambda y \tag{5.1.17}$$

$$y(0) = 0 \;\; , \;\; y^{(i-1)}(\pi) = 0 \tag{5.1.18}$$

sınır değer problemi ele alınsın. Burada $q(x) \in L_2(0,\pi)$ gerçel değerli sınırlı bir fonksiyondur. (5.1.1)-(5.1.2) sınır değer problemleri $i=1$ için;

$$\begin{cases} ly := -y'' + \left\{ \dfrac{A}{x} + q(x) \right\} y(x) = \lambda y \\ y(0)=0 \;\;,\;\; y(\pi)=0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin $\{\rho_{n1}\}$ özdeğerleri,

$$\rho_{n1} = n - \frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n} + \frac{w_1}{\pi n} + \frac{k_n}{n},\ \{k_n\} \in l_2$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt - \frac{A^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi - 2\ln\pi + 2\right) + A\left(\frac{\sin 2}{4} - \frac{\ln\pi}{2} - \int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t}dt\right)$$

asimptotik ifadesine sahiptir.

(5.1.1)-(5.1.2) sınır değer problemleri $i=2$ için;

$$\begin{cases} ly := -y'' + \left\{ \dfrac{A}{x} + q(x) \right\} y(x) = \lambda y \\ y(0)=0 \;\;,\;\; (\Gamma y)(\pi)=0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin $\{\rho_{n2}\}$ özdeğerleri,

$$\rho_{n2} = n + \frac{1}{2} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{w_2}{\pi n} + \frac{k_n}{n},\ \{k_n\} \in l_2$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt - \frac{A^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi - 2\ln\pi + 2\right)$$
$$+\frac{A}{2}\left(\ln\pi - \ln 4 + \frac{\sin 2}{2} - 2\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t}dt\right)$$

asimptotik ifadesine sahiptir. L_i ve $\widetilde{L_i}$, $i=1,2$ için $w_i = \tilde{w}_i$'yı sağlayan iki sınır değer problemi olsunlar. Bu sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik davranışlarının,

$(5.1.1)-(5.1.2)$ sınır değer problemleri $i=1.2$ için

$$L_i=\begin{cases} -y''+\left\{\dfrac{A}{x}+q(x)\right\}y(x)=\lambda y \\ y(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$$

$$\widetilde{L}_i:=\begin{cases} ly:=-y''+\left\{\dfrac{\tilde{A}}{x}+\tilde{q}(x)\right\}y(x)=\lambda y \\ y(0)=0 \\ (\Gamma y)(\pi)=0 \end{cases}$$

$\widetilde{\rho_{ni}}-\rho_{ni}\in l_2$'dir.

$i=1,2$ için

$\lambda_{ni}=\rho_{ni}^2$, $n\geq 0$, $i=1,2$ için

$$\Lambda:=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\tilde{\rho}_{n1}-\rho_{n1}|^2+|\tilde{\rho}_{n2}-\rho_{n2}|^2\right)^{\dfrac{1}{2}}<\infty$$

$\Lambda\in l_2$ olan reel bir sayısı tanımlansın.

$$\begin{array}{ll} y_{ni}(x)=\varphi\left(x,\widetilde{\lambda}_{ni}\right) & , \quad \widetilde{y}_{ni}(x)=\widetilde{\varphi}\left(x,\widetilde{\lambda}_{ni}\right) \\ s_{ni}(x)=S\left(x,\widetilde{\lambda}_{ni}\right) & , \quad \tilde{s}_{ni}(x)=\widetilde{S}\left(x,\widetilde{\lambda}_{ni}\right) \end{array}$$

olarak alındığında (5.1.1) ve (5.1.2) sınır değer problemi için;

$$G_{ni}(x,t)=\begin{cases} S\left(x,\widetilde{\lambda}_{ni}\right)C\left(t,\widetilde{\lambda}_{ni}\right)-S\left(t,\widetilde{\lambda}_{ni}\right)C(x,\lambda_{ni}) & , \quad 0\leq x\leq t\leq\pi \\ 0 & \quad\quad 0\leq t\leq x\leq\pi \end{cases}$$

fonksiyonu, sınır değer probleminin bir green fonksiyonudur.

$\varphi(x,t), C(x,t), S(x,t)$ $\;(5.1.1)-(5.1.2)$ sınır değer problemleri için $C(0,\lambda)=\varphi(0,\lambda)=(\Gamma S)(0)=1$, $S(0,\lambda)=(\Gamma C)(0)=0$, $(\Gamma\varphi)(0,\lambda)=h$ koşulları altında çözümleridir.

$$ls_{ni}(x)=\widetilde{\lambda}_{ni}s_{ni}(x) \quad , \quad \widetilde{l}\widetilde{s}_{ni}(x)=\widetilde{\lambda}_{ni}\widetilde{s}_{ni}(x)$$

$$-s''_{ni}(x)+\left\{\frac{A}{x}+q(x)\right\}s_{ni}(x)=\lambda s_{ni}(x)$$
$$-\widetilde{s}''_{ni}(x)+\left\{\frac{\tilde{A}}{x}+\widetilde{q}(x)\right\}\widetilde{s}_{ni}(x)=\lambda\widetilde{s}_{ni}(x)$$

denklemlerinde birinci denklem $\widetilde{s}_{ni}(x)$, ikinci denklem $s_{ni}(x)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarılıp ve $r(x)=\left(\frac{A-\tilde{A}}{x}+\widetilde{q}(x)-q(x)\right)$, $p=\tilde{h}-h$ olarak ifade edinildiğinde

$$\widetilde{s}''_{ni}(x)\,s_{ni}(x)-s''_{ni}(x)\,\widetilde{s}_{ni}(x)+(\widetilde{q}(x)-q(x))\,\widetilde{s}_{ni}(x)\,s_{ni}(x)=0$$
$$\int_0^\pi r(x)\,\widetilde{s}_{ni}(x)\,s_{ni}(x)\,dx=\int_0^\pi\left(\widetilde{s}''_{ni}(x)\,s_{ni}(x)-s''_{ni}(x)\,\widetilde{s}_{ni}(x)\right)dx$$
$$\int_0^\pi r(x)\,\widetilde{s}_{ni}(x)\,s_{ni}(x)\,dx=\left((\Gamma\widetilde{s}_{ni})(x)\,s_{ni}(x)-\widetilde{s}_{ni}(x)(x)\,(\Gamma s_{ni})(x)\right)\Big|_0^\pi$$
$$\int_0^\pi r(x)\,\widetilde{s}_{ni}(x)\,s_{ni}(x)\,dx=(\Gamma\widetilde{s}_{ni})(\pi)\,s_{ni}(\pi)-(\Gamma s_{ni})(\pi)\,\widetilde{s}_{ni}(\pi) \qquad (5.1.19)$$

$\widetilde{s}_{ni}(x)$, $\widetilde{L}_i$ sınır değer probleminin öz fonksiyonları olmak üzere,

$$\widetilde{s}_{n1}(\pi)=0 \quad , \quad (\Gamma\widetilde{s}_{n2})(\pi)=0 \quad , \quad n\geq 1 \qquad (5.1.20)$$

yazılabilir.

L_i ve $\widetilde{L}_i$, $(i=1,2)$, $w=\widetilde{w}$ 'yı sağlayan iki sınır değer problemi olmak üzere

$$w=\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt-\frac{A^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi-2\ln\pi+2\right)+A\left(\frac{\sin 2}{4}-\frac{\ln\pi}{2}-\int_0^1\frac{\sin^2(t)}{t}dt\right)$$
$$\widetilde{w}=\frac{1}{2}\int_0^\pi \widetilde{q}(t)\,dt-\frac{\tilde{A}^2\pi}{2}\left(\ln^2\pi-2\ln\pi+2\right)+\tilde{A}\left(\frac{\sin 2}{4}-\frac{\ln\pi}{2}-\int_0^1\frac{\sin^2(t)}{t}dt\right)$$
$$w=\widetilde{w}\implies\int_0^\pi(\widetilde{q}(t)-q(t))\,dt+\frac{\left(\tilde{A}^2-A^2\right)\pi}{2}\left(\ln^2\pi-2\ln\pi+2\right)$$

$$+\left(\tilde{A}-A\right)\left(\frac{\sin 2}{4}-\frac{\ln\pi}{2}-\int\limits_0^1\frac{\sin^2(t)}{t}dt\right)=0$$

Sınır değer probleminin green fonksiyonunun bir çözümü olan $\widetilde{s}_{ni}(x)$ fonksiyonu,

$$\widetilde{s}_{ni}(x)=s_{ni}(x)+\int\limits_0^\pi G_{ni}(x,t)\,r(t)\,\widetilde{s}_{ni}(t)\,dt \qquad (n\geq 1\ \ ,\ \ i=1,2) \quad (5.1.21)$$

integral denkleminin bir çözümüdür.

Bu denkleme;

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_{ni}^{(0)}(x) &= s_{ni}^{(0)}(x)\\ \widetilde{s}_{ni}^{(k)}(x) &= \int\limits_0^\pi G_{ni}(x,t)\,r(t)\,\widetilde{s}_{ni}^{(k-1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

olmak üzere ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulandığında. Bu denkleme;

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_{ni}^{(0)}(x) &= s_{ni}^{(0)}(x)\\ \widetilde{s}_{ni}^{(k)}(x) &= \int\limits_0^\pi G_{ni}(x,t)\,r(t)\,\widetilde{s}_{ni}^{(k-1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

olmak üzere ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulandığında,

$$\widetilde{s}_{ni}(x)=s_{ni}(x)+\omega_{ni}(x) \quad (5.1.22)$$

denklemi elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}\omega_{ni}(x) &= \sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^\pi}_{j\text{ tane}} G_{ni}(x,t_1)\,G_{ni}(t_1,t_2)\ldots G_{ni}(t_{j-1},t_j)\,x \quad (5.1.23)\\ & \quad r(t_1)\ldots r(t_j)\,s_{ni}(t_j)\,dt_1\ldots dt_j\end{aligned}$$

$(5.1.8)-(5.1.9)$ denklemleri $(5.1.4)$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_0^\pi r(x)\, s_{ni}(x)\left(s_{ni}(x)+\omega_{ni}(x)\right)dx$$
$$= s_{ni}(\pi)\left(\Gamma\widetilde{s}_{ni}\right)(\pi)-\left(\Gamma s_{ni}\right)\underset{(n\geq 1\ \ ,\ \ i=1,2)}{(\pi)}\widetilde{s}_{ni}(\pi)$$
$$\int_0^\pi r(x)\, s_{ni}^2(x)\,dx+\int_0^\pi r(x)\, s_{ni}(x)\,\omega_{ni}(x)\,dx$$
$$= s_{ni}(\pi)\left(\Gamma\widetilde{s}_{ni}\right)(\pi)-\left(\Gamma s_{ni}\right)(\pi)\,\widetilde{s}_{ni}(\pi)$$

$$\begin{aligned}
u_{ni}(x) &= 2n^2 s_{ni}^2(x) \qquad (5.1.24)\\
\omega_{n1}(x) &= 2n^2\left(s_{n1}(\pi)\left(\Gamma s_{n1}\right)(\pi)+\left(\Gamma\omega_{n1}\right)(\pi)-\int_0^\pi r(x)\, s_{n1}(x)\,\omega_{n1}(x)\,dx\right)\\
\omega_{n2}(x) &= 2n^2\left(-\left(\Gamma s_{n2}\right)(\pi)\left(s_{n2}(\pi)+\omega_{n2}(\pi)\right)-\int_0^\pi r(x)\, s_{n2}(x)\,\omega_{n2}(x)\,dx\right)
\end{aligned}$$

olarak alındığında

$$\int_0^\pi r(x)\, u_{ni}(x)\,dx=\omega_{ni} \quad , \quad n\geq 1\ ,\ i=1,2 \qquad (5.1.25)$$

denklemi elde edilir.

$\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ fonksiyonları ve $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ sayıları

$$u_{2n}(x):=u_{n1}(x)\ \ ,\ u_{2n-1}(x)=u_{n2}(x)\ \ ,\ \omega_{2n}=\omega_{n1}\ ,\ \omega_{2n-1}=\omega_{n2},\ \omega=0$$

şeklinde ifade edildiğinde, (5.1.11) denklemi

$$\int_0^\pi r(x)\, u_n(x)\,dx=\omega_n\ ,\ n\geq 0 \qquad (5.1.26)$$

olur. $\omega_n=1-u_n(x)$ olarak tanımlandığında

$$\int_0^\pi r(x)\left(1-u_n(x)\right)dx=\underbrace{\int_0^\pi r(x)\,dx}_{0}-\int_0^\pi r(x)\,\omega_n(x)\,dx=-\omega_n.$$

Buradan
$$\int_0^\pi r(x)\, u_n(x)\, dx = -\omega_n \ , \ n \geq 0.$$

Lemma 5.1.1: $\{v_n(x)\}_{n\geq 1}$ ve $\{\omega_n(x)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazıdır.

İspat: $q(x) \in W_2^1$ ve y,
$$-y'' + \frac{A}{x} y + q(x)\, y = \lambda y$$
denkleminin $y(0) = 0$ koşulunu sağlayan bir çözümü olsun. Benzer şekilde $\widetilde{y}$ da,
$$-\widetilde{y}'' + \frac{\tilde{A}}{x}\widetilde{y} + \widetilde{q}(x)\, \widetilde{y} = \lambda \widetilde{y}$$
denkleminin $\widetilde{y}(0) = 0$ koşulunu sağlayan başka bir çözümü olsun. Burada $\widetilde{q}(x) \in W_2^1$'dir.
$$u = y\widetilde{y}$$
olarak ifade edilirse,
$$\begin{aligned} u' &= y\widetilde{y}' + y'\widetilde{y} \\ u'' &= -2\lambda u + (q + \widetilde{q})\, u + y'\widetilde{y}' \\ u''' + 4\lambda u' - (q + \widetilde{q})\, u' - (q' + \widetilde{q}')\, u &= 2\left(qy\widetilde{y}' + \widetilde{q}y'\widetilde{y}\right) \end{aligned}$$
hesaplanır.
$$\begin{aligned} 2\left(qy\widetilde{y}' + \widetilde{q}y'\widetilde{y}\right) &= (q + \widetilde{q})\left(y'\widetilde{y} + y\widetilde{y}'\right) + (q - \widetilde{q})\left(y\widetilde{y}' - y'\widetilde{y}\right) \\ &= (q + \widetilde{q})\, u' + (q - \widetilde{q})\left(y\widetilde{y}' - y'\widetilde{y}\right) \end{aligned}$$
$$y\widetilde{y}' - y'\widetilde{y} = \int_0^x \left(\widetilde{q}(s) - q(s)\right) u(s)\, ds$$
olması dikkate alınırsa;

$$u''' + 4\lambda u' - 2\left(q(x) + \widetilde{q}(x)\right)u' - \left(q'(x) + \widetilde{q}'(x)\right)u$$
$$= \left(q(x) - \widetilde{q}(x)\right)\int_0^x \left(\widetilde{q}(s) - q(s)\right)u(s)\,ds$$

denklemi elde edilir.

$v = u'$ olarak gösterilirse, $u(0) = (\Gamma u)(0) = 0$ olduğunda $v(0) = 0$, $u(x) = \int_0^x v(s)\,ds$ 'dir.

Sonuç olarak;

$$-v'' + 2\left(q(x) + \widetilde{q}(x)\right)v + \int_0^x N(x,s)\,v(s)\,ds = 4\lambda v \qquad (5.1.27)$$

olur. Burada;

$$N(x,s) = \left(q'(x) + \widetilde{q}'(x)\right) + \left(q(x) - \widetilde{q}(x)\right)\int_s^x \left(\tilde{q}(\xi) - q(\xi)\right)d\xi$$

Çünkü;

$q = \widetilde{q}$ için $\{v_n(x)\}_{n\geq 1}$ fonksiyonlar sistemi,

$$p(x) = 4q(x) \quad , \quad M(x,t) = 2q'(x)$$

olduğu zaman

$$\begin{cases} -v'' + p(x)\,v + \int_0^x M(x,s)\,v(s)\,ds = 4\lambda v \\ v(0) = 0 \quad , \quad v(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin özfonksiyonksiyonlarıdır..

$$v_n(x) = \cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad , \ n \to \infty$$

olmasından ve $\{\cos nx\}_{n\geq 0}$ $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazı olduğundan,$\{v_n(x)\}_{n\geq 1}$, $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazıdır. Şimdi ise $\{\omega_n(x)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sisteminin

$L_2(0,\pi)$ 'de tam olduğu gösterilsin.

$$\int_0^\pi f(x)\,\omega_n(x)\,dx = 0 \quad n \geq 0 \quad , \quad f(x) \in L_2(0,\pi).$$

olduğu kabul edilsin. Buradan,

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = 0.$$

olduğu araştırılacaktır. Sonuç olarak;

$$\int_0^\pi f(x)\,(1 - u_n(x))\,dx = \int_0^\pi f(x)\,dx - \int_0^\pi f(x)\,u_n(x)\,dx$$

olur. Yani,

$$\int_0^\pi f(x)\,u_n(x)\,dx = 0 \quad , \quad n \geq 1.$$

Kısmi integrasyonla ve $v_n(0) = v_n(\pi) = 0$ kullanılarak;

$$\int_0^\pi v_n(x)\,dx \int_x^\pi f(t)\,dt = 0 \quad , \quad n \geq 1.$$

elde edilir. Çünkü;

$$I = \int_0^\pi u_n(x)\,f(x)\,dx = 0 \quad , \quad n \geq 1.$$

$$u_n(x) = \mu \qquad\qquad f(x)\,dx = dv$$

$$u_n'(x)\,dx = v_n(x)\,dx = d\mu \qquad v = \int_x^\pi f(t)\,dt$$

Buradan görülür ki,

$$\int_0^\pi v_n(x) \int_x^\pi f(t)\,dt = 0 \quad , \quad n \geq 1$$

$\{v_n(x)\}_{n\geq1}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,\pi)$ 'de tamdır. Böylece $x \in [0,\pi]$ için $\int_x^\pi f(t)\,dt = 0$ 'dir. Böylece $f(x) \equiv 0$ 'dır. Sonuç olarak $\{w_n(x)\}_{n\geq0}$ $L_2(0,\pi)$

'de tamdır. Önerme 4.1.1 'den tam olan her fonksiyonun aynı zamanda Riesz bazı oluşturduğu bilindiğine göre $\{\omega_n(x)\}$ $L_2(0,\pi)$ 'de Riesz bazıdır.

$$\int_0^\pi r(x)\, u_n(x) = \omega_n \quad , \quad n > 1$$

momentum problemine dönüldüğünde, bu problemin tam olmasından

$$r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{n2}\kappa_{2n}(x) + \omega_{n1}\kappa_{2n+1}(x)$$

ayrışımına sahiptir. Burada $\{\kappa_j\}$ binormal bazdır. ω_{n1} ve ω_{n2} ifadeleri ayrışım denkleminde yerine yazıldığında ve ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulandığında denklem lokal çözülebilen;

$$r(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi H_j(x, t_1, t_2, ..t_j)\, r(t_1) \dots r(t_j)\, dt_1 \dots dt_j \qquad (5.1.28)$$

denklemine dönüşür.

$$f^0(x)$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \left((\Gamma s_{n1})(\pi)\, s_{n1}(\pi)\, v_{2n}(x) - (\Gamma s_{n2})(\pi)\, s_{n2}(\pi)\, v_{2n-1}(x) \right)$$
$$H_i^0(x, t_1)$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \left(s_{n1}(\pi) \frac{\partial G_{n1}(x, t_1)}{\partial x}_{|x=\pi} s_{n1}(t_1)\, v_{2n}(x) - (\Gamma s_{n2})(\pi)\, s_{n2}(\pi)\, v_{2n-1}(x) \right)$$
$$H_j^0(x, t_1, \dots, t_j)$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \left(s_{n1}(\pi) \frac{\partial G_{n1}(x, t_1)}{\partial x}_{|x=\pi} - s_{n1}(t_1)\, G_{n1}(t_1, t_2) \dots G_1(t_{j-1}, t_j) \right.$$
$$s_{n1}(t_J)\, v_{2n}^*(x) - \left((\Gamma s_{n2})(\pi)\, G_{n2}(\pi, t_1) + s_{n2}(t_1) \right)$$
$$\left. G_{n2}(t_1, t_2) \dots G_{n2}(t_{j-1}, t_j)\, s_{n2}(t_j)\, v_{2n-1}^*(x) \right)$$

$L_2(0,\pi)$ 'de $\{v_n(x)\}$ dizisi için $\{v_n^*(x)\}_{n\geq 1}$ bianormal dizisi mevcuttur ve $v_n^*(x)$ adjoint sınır değer probleminin öz fonksiyonlarıdır.

(5.1.15) denklemi,

$$\begin{cases} -y'' + \dfrac{A}{x} y + q(x)\, y = \lambda y \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ y(0) = 0 \quad , \quad (\Gamma y)(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklem ve sınır koşullarının ürettiği operatör için konulan ters problemlerin lokal çözümüdür. Bu denklem Borg denklemi olarak bilinmektedir. Borg denklemini elde etmek için $L_2(0,\pi)$ 'de özfonksiyonlar sisteminin Riesz bazı oluşturması ve tamlığı kullanıldı..

Teorem 5.1.1 : Eğer $\Lambda_1 < \delta$ koşulunu sağlayan $\delta > 0$ mevcutsa;

$$\max\left|q(x) - \widetilde{q}(x)\right| < C\Lambda_1 \quad , \quad \left|h - \widetilde{h}\right| < C\Lambda_1$$

geçerlidir. Burada C, L_i 'ye bağlı çeşitli pozitif sabitlerdir. İspata geçmeden önce bazı lemmalar ispatlanacaktır.

$$\alpha_{ni} = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_{ni})\,dx$$

L_i probleminin normalleştirici sayılarıdır.

Lemma 5.1.2: Eğer $\Lambda_1 < \delta_1$ koşulunu sağlayan $\delta_1 > 0$ mevcutsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\alpha_n - \widetilde{\alpha}_n\right| < C\Lambda_1 \tag{5.1.29}$$

geçerlidir.

İspat: $\dot{\Delta}_2(\lambda) = \dfrac{d}{d\lambda}\Delta_2(\lambda)$ olduğunda

$$\alpha_n = -\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2})\,\Delta_1(\lambda_{n2}) \tag{5.1.30}$$

vardır. Gerçekten;

$\Delta_1(\lambda_{n2}) := \varphi'(\pi,\lambda_{n2})$ olmak üzere;

$$\frac{d}{dx} < \varphi(x,\lambda_{n1}), \varphi(x,\lambda_{n2}) >= (\lambda_{n1} - \lambda_{n2})\,\varphi(x,\lambda_{n1})\,\varphi(x,\lambda_{n2})$$

$$\begin{aligned}(\lambda_{n1} - \lambda_{n2})\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_{n1})\,\varphi(x,\lambda_{n2})\,dx &=< \varphi(x,\lambda_{n1}), \varphi(x,\lambda_{n2}) > \big|_0^\pi \\ &= \varphi(\pi,\lambda_{n1})\,\varphi'(\pi,\lambda_{n2}) - \varphi'(\pi,\lambda_{n1})\,\varphi(\pi,\lambda_{n2}) \\ &= \Delta_2(\lambda_{n1})\,\Delta_1(\lambda_{n2}) - \Delta_1(\lambda_{n1})\,\Delta_2(\lambda_{n2})\end{aligned}$$

$\lambda_{n1} \to \lambda_{n2}$ için

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_{n2})\,dx = \underbrace{\dot{\Delta}_1(\lambda_{n2})\,\Delta_2(\lambda_{n2})}_{0} - \Delta_1(\lambda_{n2})\,\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2})$$

(λ_{n2} karakteristik denklemin bir kökü olduğundan $\Delta_2(\lambda_{n2}) = 0$ 'dır.) Sonuç olarak

$$\alpha_n = -\Delta_1(\lambda_{n2})\,\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2})$$

bulunur. $\Delta_i(\lambda)$, λ 'nın $\frac{1}{2}$ 'inci dereceden tam fonksiyonu olduğundan, Hadamard fakterizasyon teoreminden;

$$\Delta_i(\lambda) = B_i \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{ki}}\right) \tag{5.1.31}$$

yazılabilir.Hadamard fakterizasyon teoremi;

$f(z)$ $q \in (0,1)$ olmak üzere q uncu dereceden tam fonksiyonu ise

$$f(z) = cz^m \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$$

eşitliği geçerlidir. Burada m , $f(z)$ 'in $z = 0$ noktasındaki katlılığıdır, z_k lar $f(z)$ 'nin sıfırdan farklı sıfırlarıdır.

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\Delta}_i(\lambda)}{\Delta_i(\lambda)} &= \frac{\widetilde{B}_i \prod\limits_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\widetilde{\lambda}_{ki}}\right)}{B_i \prod\limits_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{ki}}\right)} \\ &= \frac{\widetilde{B}_i}{B_i} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{ki}}{\widetilde{\lambda}_{ki}} \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + \frac{\widetilde{\lambda}_{ki} - \lambda_{ki}}{\lambda_{ki} - \lambda}\right)\end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \frac{\widetilde{\Delta}_i(\lambda)}{\Delta_i(\lambda)} = 1 \quad , \quad \lim_{\lambda \to -\infty}\left(1 + \frac{\widetilde{\lambda}_{ki} - \lambda_{ki}}{\lambda_{ki} - \lambda}\right) = 1$$

olduğu zaman

$$\frac{\widetilde{B}_i}{B_i} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{ki}}{\widetilde{\lambda}_{ki}} = 1 \tag{5.1.32}$$

olduğu açıktır ve sonuç olarak

$$\frac{\widetilde{\Delta}_i(\lambda)}{\Delta_i(\lambda)} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\lambda}_{ki} - \lambda}{\lambda_{ki} - \lambda}.$$

$$\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2}) = -\frac{B_2}{\lambda_{n2}} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_{n2}}{\widetilde{\lambda}_{k2}}\right)$$

(5.1.18) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\widetilde{\Delta}}_2(\lambda_{n2})}{\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2})} &= \frac{\dfrac{-\widetilde{B}_2}{\widetilde{\lambda}_{n2}}\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\left(1-\dfrac{\widetilde{\lambda}_{n2}}{\widetilde{\lambda}_{k2}}\right)}{\dfrac{-B_2}{\lambda_{n2}}\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\left(1-\dfrac{\lambda_{n2}}{\lambda_{k2}}\right)} \\
&= \underbrace{\frac{\widetilde{B}_2}{B_2}\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\lambda_{k2}}{\widetilde{\lambda}_{k2}}}_{1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\widetilde{\lambda}_{k2}-\widetilde{\lambda}_{n2}}{\lambda_{k2}-\lambda_{n2}} \\
&= \prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\widetilde{\lambda}_{k2}-\widetilde{\lambda}_{n2}}{\lambda_{k2}-\lambda_{n2}}
\end{aligned}$$

Buradan

$$\frac{\dot{\widetilde{\Delta}}_2(\lambda_{n2})}{\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2})} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\widetilde{\lambda}_{k2}-\widetilde{\lambda}_{n2}}{\lambda_{k2}-\lambda_{n2}}$$

(5.1.16) gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n} &= \frac{-\dot{\widetilde{\Delta}}_2(\lambda_{n2})\,\widetilde{\Delta}_1(\lambda_{n2})}{-\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2})\,\widetilde{\Delta}_1(\lambda_{n2})} = \frac{\dot{\widetilde{\Delta}}_2(\lambda_{n2})}{\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2})}\frac{\widetilde{\Delta}_1(\lambda_{n2})}{\widetilde{\Delta}_1(\lambda_{n2})} \\
&= \prod_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\lambda}_{k1}-\widetilde{\lambda}_{n2}}{\lambda_{k1}-\lambda_{n2}}\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\widetilde{\lambda}_{k2}-\widetilde{\lambda}_{n2}}{\lambda_{k2}-\lambda_{n2}}
\end{aligned}$$

yada

$$\frac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n} = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-Q_{kn}^{(1)}\right)\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\left(1-Q_{kn}^{(2)}\right) \tag{5.1.33}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
Q_{kn}^{(i)} &= \frac{\lambda_{ki}-\widetilde{\lambda}_{ki}}{\lambda_{ki}-\lambda_{n2}} + \frac{\widetilde{\lambda}_{n2}-\lambda_{n2}}{\lambda_{ki}-\lambda_{n2}} \\
Q_n &= \sum_{k=0}^{\infty}\left|Q_{kn}^{(1)}\right| + \sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\left|Q_{kn}^{(2)}\right|
\end{aligned}$$

olduğu gösterilsin.

$$\rho_{k1}=k-\frac{A}{2\pi}\frac{\ln k}{k}+\frac{w_1}{k\pi}+\frac{k_{k1}}{k},\ \{k_{k1}\}\in l_2$$
$$\tilde{\rho}_{k1}=k-\frac{\tilde{A}}{2\pi}\frac{\ln k}{k}+\frac{\tilde{w}_1}{k\pi}+\frac{\tilde{k}_{k1}}{k},\ \left\{\tilde{k}_{k1}\right\}\in l_2$$
$$\frac{\left|\lambda_{k1}-\widetilde{\lambda}_{k1}\right|}{|\lambda_{k1}-\lambda_{n2}|}=\frac{\left|\rho_{k1}^2-\tilde{\rho}_{k1}^2\right|}{\left|\rho_{k1}^2-\rho_{n2}^2\right|}\quad,\ \lambda_{k1}=\rho_{k1}^2\ ,\ \tilde{\lambda}_{k1}=\tilde{\rho}_{k1}^2$$
$$\begin{aligned}\rho_{k1}^2-\tilde{\rho}_{k1}^2\ &=k^2-\frac{A}{\pi}\ln k+\frac{2w_1}{\pi}+2k_{k1}+\left(\frac{A^2}{4\pi^2}\frac{\ln^2 k}{k^2}-\frac{w_1^2}{k^2\pi^2}-\frac{k_{k1}^2}{k^2}\right)\\ &-k^2+\frac{\tilde{A}}{\pi}\ln k-\frac{2\tilde{w}_1}{\pi}-2\tilde{k}_{k1}-\left(\frac{\tilde{A}^2}{4\pi^2}\frac{\ln^2 k}{k^2}-\frac{\tilde{w}_1^2}{k^2\pi^2}-\frac{\tilde{k}_{k1}^2}{k^2}\right)\\ &=\frac{\left(A-\tilde{A}\right)\ln k}{\pi}+2k_{k1}-2\tilde{k}_{k1}\\ &+\left(\frac{A^2-\tilde{A}^2}{4\pi^2}\right)\frac{\ln^2 k}{k^2}+\frac{\tilde{w}_1^2-w_1^2}{k^2\pi^2}+\frac{\tilde{k}_{k1}^2-k_{k1}^2}{k^2}\end{aligned}$$
$$A_k\ =\frac{\left(A-\tilde{A}\right)\ln k}{\pi}+2k_{k1}-2\tilde{k}_{k1}+\left(\frac{A^2-\tilde{A}^2}{4\pi^2}\right)\frac{\ln^2 k}{k^2}+\frac{\tilde{w}_1^2-w_1^2}{k^2\pi^2}+\frac{\tilde{k}_{k1}^2-k_{k1}^2}{k^2}$$
olarak ifade edilsin.
$$\begin{aligned}\rho_{k1}^2-\rho_{n2}^2\ &=k^2-\frac{A}{\pi}\ln k+\frac{2w_1}{\pi}+2k_{k1}+\frac{A^2}{4\pi^2}\frac{\ln^2 k}{k^2}-\frac{w_1^2}{k^2\pi^2}-\frac{k_{k1}^2}{k^2}\\ &-n^2-\frac{A}{\pi}\ln n+\frac{2w_2}{\pi}+2k_{n2}+\frac{A^2}{4\pi^2}\frac{\ln^2 n}{n^2}-\frac{w_2^2}{k\pi}-\frac{k_{n2}^2}{n}\\ &=k^2\left(1-\frac{A}{\pi}\frac{\ln k}{k^2}+\frac{2w_1}{k^2\pi}+\frac{2k_{k1}}{k^2}+\frac{1}{k^2}\left(\frac{A^2}{4\pi^2}\frac{\ln^2 k}{k^2}-\frac{w_1^2}{k^2\pi^2}-\frac{k_{k1}^2}{k^2}\right)\right.\\ &\left.-\frac{n^2}{k^2}-\frac{A}{\pi}\frac{\ln n}{k^2}+\frac{2w_2}{k^2\pi}+\frac{2k_{n2}}{k^2}+\frac{1}{k^2}\left(\frac{A^2}{4\pi^2}\frac{\ln^2 n}{n^2}-\frac{w_2^2}{k\pi}-\frac{k_{n2}^2}{n}\right)\right)\\ &=k^2\left(1-O\left(\frac{1}{k^4}\right)\right)\end{aligned}$$
$$\frac{\left|\lambda_{k1}-\widetilde{\lambda}_{k1}\right|}{|\lambda_{k1}-\lambda_{n2}|}=\frac{\left|\rho_{k1}^2-\tilde{\rho}_{k1}^2\right|}{\left|\rho_{k1}^2-\rho_{n2}^2\right|}=\frac{C_k}{k^2}\left(1-O\left(\frac{1}{k^4}\right)\right)$$
$$=\frac{\left(A-\tilde{A}\right)\ln k}{\pi k^2}+\frac{2k_{k1}-2\tilde{k}_{k1}}{k^2}+O\left(\frac{1}{k^4}\right)$$
Dolayısıyla,
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda_{k1}-\widetilde{\lambda}_{k1}\right|}{|\lambda_{k1}-\lambda_{n2}|}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(A-\tilde{A}\right)\ln k}{\pi k^2}+\frac{2k_{k1}-2\tilde{k}_{k1}}{k^2}+O\left(\frac{1}{k^4}\right)<\infty\ \text{olur.}$$
Benzer şekilde $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\widetilde{\lambda}_{n_2}-\lambda_{n_2}\right|}{|\lambda_{k_1}-\lambda_{n_2}|}<\infty$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda_{k1}-\widetilde{\lambda}_{k_1}\right|}{|\lambda_{k2}-\lambda_{n2}|}<\infty$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\widetilde{\lambda}_{n2}-\lambda_{n2}\right|}{|\lambda_{k_2}-\lambda_{n2}|}<\infty$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \quad \leq \quad & \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left|\lambda_{k1}-\widetilde{\lambda}_{k1}\right|}{|\lambda_{k1}-\lambda_{n2}|}+\frac{\left|\widetilde{\lambda}_{n_2}-\lambda_{n_2}\right|}{|\lambda_{k_1}-\lambda_{n_2}|}\right) \\
& +\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left|\lambda_{k1}-\widetilde{\lambda}_{k_1}\right|}{|\lambda_{k2}-\lambda_{n2}|}+\frac{\left|\widetilde{\lambda}_{n2}-\lambda_{n2}\right|}{|\lambda_{k_2}-\lambda_{n2}|}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq \quad & \sum_{n=0}^{\infty}\left|\lambda_{n_2}-\widetilde{\lambda}_{n_2}\right|\left(2\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_{k2}-\lambda_{n2}|}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_{k1}-\lambda_{n2}|}\right) \qquad (5.1.34)\\
& +\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda_{n_1}-\widetilde{\lambda}_{n_1}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_{n1}-\lambda_{k2}|}
\end{aligned}
$$

özdeğerlerin asimptotik davranışlarından;

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|\lambda_{k2}-\lambda_{n2}|} & =\frac{1}{|\rho_{k2}^2-\rho_{n2}^2|} \\
& =\frac{1}{\left|\begin{array}{l} k^2-\dfrac{A}{\pi}\ln k+\dfrac{2w_2}{\pi}+2k_{k2}+\left(\dfrac{A^2}{4\pi^2}\dfrac{\ln^2 k}{k^2}-\dfrac{w_2^2}{k^2\pi^2}-\dfrac{k_{k2}^2}{k^2}\right)\\ -n^2-\dfrac{A}{\pi}\ln n+\dfrac{2w_2}{\pi}+2k_{n2}+\left(\dfrac{A^2}{4\pi^2}\dfrac{\ln^2 n}{n^2}-\dfrac{w_2^2}{n^2\pi^2}-\dfrac{k_{n2}^2}{n^2}\right)\end{array}\right|} \\
& <\frac{C}{k^2-n^2}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{|\lambda_{k2}-\lambda_{n2}|}<\frac{C}{|k^2-n^2|}. \quad , \quad k\neq n
$$

$$
\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{|k^2-n^2|} \leq 1 \quad , \quad n\geq 1
$$

olduğundan

$$
\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_{k2}-\lambda_{n2}|}<C
$$

sahip olunur. Benzer şekilde

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{|\lambda_{k1}-\lambda_{n2}|}+\frac{1}{|\lambda_{n1}-\lambda_{k2}|}\right)<C
$$

$$
\Lambda_1:=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left|\lambda_{n1}-\widetilde{\lambda}_{n1}\right|+\left|\lambda_{n2}-\widetilde{\lambda}_{n2}\right|\right)<\infty
$$

olarak tanımlanan büyüklük olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_n &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\lambda_{n2} - \widetilde{\lambda}_{n2}\right| \left(2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{k2} - \lambda_{n2}|} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{k1} - \lambda_{n1}|} \right) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\lambda_{n1} - \widetilde{\lambda}_{n1}\right| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n1} - \lambda_{k2}|} \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left|\lambda_{n_1} - \widetilde{\lambda}_{n_1}\right| + \left|\lambda_{n_2} - \widetilde{\lambda}_{n_2}\right| \right) = C\Lambda_1.
\end{aligned}$$

Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \leq C\Lambda_1$$

elde edilir. Eğer $\Lambda_1 < \delta_1$ koşulunu sağlayan $\delta_1 > 0$ varsa $Q_n < \frac{1}{4}$ 'dür. $|\xi| < \frac{1}{2}$

olduğu zaman

$$|\ln(1-\xi)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi|^k}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi|^k \leq 2|\xi|$$

(5.1.19) 'den

$$\begin{aligned}
\left| \ln \frac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n} \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \ln \left(1 - Q_{kn}^{(1)} \right) \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \left| \ln \left(1 - Q_{kn}^{(2)} \right) \right| \\
&< 2Q_n
\end{aligned}$$

ln fonksiyonunun özelliğinden $\left| \frac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n} - 1 \right| < 4Q_n$ yada $|\widetilde{\alpha}_n - \alpha_n| < CQ_n$ yazılır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n - \widetilde{\alpha}_n| < C \sum_{n=0}^{\infty} Q_n < C\Lambda_1$$

Gerçekten, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \geq q$ ise $\exists \delta > 0$ için $|x - a| < \delta$ iken $\forall x \in K_\delta(a)$ için $|f(x)| > q$ olduğu biliniyor.
$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1 > \dfrac{1}{2}$ olduğundan $\exists K_\delta(0) = (-\delta, \delta)$, $\forall t \in (-\delta, \delta)$ için $\left| \dfrac{\ln(1+t)}{t} \right| > \dfrac{1}{2}$.

Buradan $|t| < 2\left|\ln\left(1+t\right)\right|, t \in K_{\delta}\left(0\right)$ yazılabilir. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\widetilde{\alpha}_n - \alpha_n\right) = 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n}\right) = 0$, $t = 1-\dfrac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n} \in (-\delta,\delta)$ olarak ifade edilirse, $|t| = \left|\dfrac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n}-1\right| < 2\left|\ln\dfrac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n}\right| < 4Q_n$

Lemma 5.1.2: Eğer $\Lambda_1 < \delta_1$ koşulunu sağlayan $\delta_2 > 0$ varsa

$$\begin{aligned}
\left|G\left(x,t\right)-\widetilde{G}\left(x,t\right)\right| &< \left|\lambda_{n_1}-\widetilde{\lambda}_{n_1}\right| &\quad (5.1.35)\\
\left(\Gamma\varphi\right)\left(\pi,\lambda_{n_1}\right)\widetilde{\varphi}\left(\pi,\lambda_{n_1}\right) &< \left|\lambda_{n_1}-\widetilde{\lambda}_{n_1}\right| &\quad (5.1.36)\\
\left(\Gamma\varphi\right)\left(\pi,\widetilde{\lambda}_{n_2}\right)\widetilde{\varphi}\left(\pi,\widetilde{\lambda}_{n_2}\right) &< C\left|\lambda_{n_2}-\widetilde{\lambda}_{n_2}\right| &\quad (5.1.37)
\end{aligned}$$

geçerlidir.

Lemma 5.1.3 : $g\left(x\right)$, $\left[0,\pi\right]$ 'de sürekli bir fonksiyon, $\left\{z_n\right\}_{n\geq 0}$ sayıları

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|z_n - n\right| < \infty$$

koşulunu sağlayan sayılar olarak alınsın.

$$Q := \sum_{n=0}^{\infty}\left|\varepsilon_n\right| < \infty \qquad \varepsilon_n := \int_0^{\pi} g\left(x\right)\cos z_n x dx$$

ise, M sadece $\left\{z_n\right\}_{n\geq 0}$ kümesine bağlı olan sabit olmak üzere

$$\left|g\left(x\right)\right| < MQ$$

geçerlidir.

İspat: $\left\{\cos z_n\left(x\right)\right\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi, $L_2\left(0,\pi\right)$ 'de tam olduğundan ε_n 'ler $g\left(x\right)$ fonksiyonunu birebir olarak belirlemektedir. $g\left(x\right)$ $L_2\left(0,\pi\right)$ 'de sürekli bir fonksiyon ve $\left\{\cos nx\right\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi, $L_2\left(0,\pi\right)$ 'de tam olmasından;

$$g\left(x\right) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \qquad a_n = \dfrac{1}{a_n^0}\displaystyle\int_0^{\pi} g\left(x\right)\cos nx dx$$

yazılabilir.

$$\int_0^{\pi} g\left(x\right)\cos nx dx = \varepsilon_n + \int_0^{\pi} g\left(x\right)\left(\cos nx - \cos z_n x\right)dx$$

eşitliğinden

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\cos nx}{\alpha_n^0}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\cos nx\int\limits_0^{\pi}(\cos nt-\cos z_nt)\,g(t)\,dt$$

yazılabilir. Çünkü;

$$\begin{aligned}g(x) &=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n^0}\left(\int\limits_0^{\pi}g(x)\cos nxdx\right)\cos nx\\ &=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n^0}\left\{\varepsilon_n+\int\limits_0^{\pi}g(x)(\cos nt-\cos z_nt)\,dt\right\}\cos nx\\ &=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{a_n^0}\cos nx+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n^0}\cos nx\int\limits_0^{\pi}g(x)(\cos nt-\cos z_nt)\,dt\end{aligned}$$

Böylece $g(x)$ integral denkleminin çözümü olmak üzere

$$g(x)=\varepsilon(x)+\int\limits_0^{\pi}H(x,t)\,g(t)\,dt \qquad (5.1.38)$$

Burada

$$\varepsilon(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n^0}\cos nx\ ,\quad H(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\cos nx\,(\cos nt-\cos z_nt)$$

$$a_n^0=\textstyle\int_0^{\pi}\cos^2 nxdx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos z_nx}{2}dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos z_nxdx=\frac{\pi}{2}$$

şeklinde hesaplanır. Aynı zamanda;

$$|\varepsilon(x)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n^0}\cos nx\right|\leq\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}|\varepsilon_n|=\frac{2}{\pi}Q$$

ve

$$\cos nt-\cos z_nt=2\sin\left(\frac{(z_n-n)\,t}{2}\right)\sin\left(\frac{(z_n+n)\,t}{2}\right)$$

göz önüne alınırsa; $(0\leq x,t\leq\pi)$ *için*

$$\begin{aligned}|\cos nt-\cos z_nt|=2\left|\sin\left(\frac{(z_n-n)\,t}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{(z_n+n)\,t}{2}\right)\right| &\leq 2\left|\sin\left(\frac{(z_n-n)\,t}{2}\right)\right|\\ &\leq 2\frac{|z_n-n|\,t}{2}\\ &\leq\pi\,|z_n-n|\,.\end{aligned}$$

Bu durumda;

$$|H(x,t)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} |\cos nx| \, |\cos nt - \cos z_n t| \le \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \pi \, |z_n - n| \le C \sum_{n=0}^{\infty} |z_n - z|$$

şeklinde hesaplanır. Böylece;

$$\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n^0} \cos nx \ , \quad H(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0} \cos nx \left(\cos nt - \cos z_n t\right)$$

serilerinin mutlak ve düzgün yakınsak olmasından $0 \le x, t \le \pi$ için

$$|\varepsilon_x| < \frac{2}{\pi} Q \quad , \quad |H(x,t)| < C \sum_{n=0}^{\infty} |z_n - z| \, .$$

Şimdi

$$y(x) = \int_0^{\pi} H(x,t) \, y(t) \, dt \quad , \quad y(t) \in C[0,\pi] \, . \tag{5.1.39}$$

homojen denkleminin sadece trivial çözüme sahip olduğu gösterilirse, serinin düzgün yakınsak olmasından

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0} \cos nx \int_0^{\pi} \left(\cos nt - \cos z_n t\right) y(t) \, dt$$

yazılabilir. $\{\cos nt\}_{n \ge 0}$ $L_2(0,\pi)$ 'de tam ve $y(x)$ $L_2(0,\pi)$ 'de sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$\frac{1}{\alpha_n^0} \int_0^{\pi} \left(\cos nt - \cos z_n t\right) y(t) \, dt = a_n = \frac{1}{\alpha_n^0} \int_0^{\pi} y(t) \cos nt dt$$

$$\int_0^{\pi} y(t) \cos nt dt = \int_0^{\pi} \left(\cos nt - \cos z_n t\right) y(t) \, dt$$

Böylece;

$$\int_0^{\pi} y(t) \cos z_n t dt = 0$$

$\{\cos z_n x\}_{n \ge 0}$ fonksiyonlar sisteminin tam olmasından $y(x) = 0$ 'dır. Bu durumda

$$g(x) = \varepsilon(x) + \int_0^{\pi} H(x,t) \, g(t) \, dt$$

integral denklemi tek biçimde çözülebilir.

$$|g(x)| \leq |\varepsilon(x)| + \left| \int_0^\pi H(x,t)\, g(t)\, dt \right| \leq \frac{2}{\pi} Q + C \int_0^\pi |g(t)|\, dt$$

Gronoull's eşitsizliğinden; $|g(x)| < MQ$ 'dir.

Gronoull's eşitsizliği: $[a,b]$ aralığında $u(x) \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$, $\omega(t) \geq 0$ ve $u(x), \varphi(x), \omega(t) \in L(a,b)$ fonksiyonları olmak üzere

$$u(x) \leq \varphi(x) + \int_a^b \omega(t)\, u(t)\, dt$$

ise;

$$u(x) \leq \varphi(x) + \int_a^b \omega(t)\, \varphi(t)\, e^{\int_a^b \omega(t) dt}$$

eşitsizliği geçerlidir;Burada; $u(x) = |g(x)|$, $\varphi(x) = \dfrac{2Q}{\pi}$, $\omega = C > 0$ olarak düşünüldüğünde eşitsizlikten

$$|g(x)| \leq \frac{2Q}{\pi} + C \int_0^\pi \frac{2Q}{\pi} dt = \frac{2Q}{\pi} + 2CQ = Q\left(\frac{2}{\pi} + C\right) = MQ \quad \left(M = \frac{2}{\pi} + C\right)$$

elde edilir.

Teorem 5.1.1'in ispatı:

$$\begin{aligned} -\varphi''(x,\lambda) + \frac{A}{x} + q(x)\,\varphi(x,\lambda) &= \lambda\varphi(x,\lambda) \\ -\widetilde{\varphi}''(x,\lambda) + \frac{\tilde{A}}{x} + \widetilde{q}(x)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda) &= \lambda\widetilde{\varphi}(x,\lambda) \end{aligned}$$

kullanarak

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \widetilde{q}(x)\,\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\, dx &= (\Gamma\varphi)(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda) \\ &\quad -\varphi(\pi,\lambda)\,(\Gamma\widetilde{\varphi})(\pi,\lambda) + \widetilde{h} - h \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\widetilde{h} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \widetilde{q}(x)\, dx = 0$$

olduğu zaman

$$\int_0^{\pi} \widetilde{q}(x)\left(\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\frac{1}{2}\right)dx = (\Gamma\varphi)(\pi,\lambda)\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)(\Gamma\widetilde{\varphi})(\pi,\lambda) \tag{5.1.40}$$

elde edilir.

$$\varphi(x,\lambda_{ni})\widetilde{\varphi}(x,\lambda_{ni})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos 2\rho_{ni}x+\int_0^x V(x,t)\cos 2\rho_{ni}t\,dt$$

eşitliğini denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} q(x)\left(\frac{1}{2}\cos 2\rho_{ni}x+\int_0^x V(x,t)\cos 2\rho_{ni}t\,dt\right)\cos 2\rho_{ni}x\,dx \\ = \; & (\Gamma\varphi)(\pi,\lambda)\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)(\Gamma\widetilde{\varphi})(\pi,\lambda) \end{aligned}$$

$\lambda=\lambda_{n_1}$ ve $\lambda=\widetilde{\lambda}_{n_2}$ için

$$g(x)=2\left(\widetilde{q}(x)+\int_0^{\pi} V(x,t)\widetilde{q}(t)\,dt\right)$$

olduğunda

$$\int_0^{\pi} g(x)\cos 2\widetilde{\rho}_{n_2}x\,dx=(\Gamma\varphi)\left(\pi,\widetilde{\lambda}_{n_2}\right)\widetilde{\varphi}\left(\pi,\widetilde{\lambda}_{n_2}\right)$$

$$\begin{aligned} V(x,\tau) &= 2\left(G(x,x-2\tau)+\widetilde{G}(x,x-2\tau)\right) \\ &\quad+\int_{2\tau-x}^{x}\widetilde{G}(x,s)G(x,s-2\tau)\,ds+\int_{-x}^{x-2\tau}\widetilde{G}(x,s)G'(x,s+2\tau)\,ds \end{aligned}$$

$\Lambda_1<\rho_2$ için

$$|V(x,t)|<C$$

$\widetilde{q}(x)$ Volterra integral denkleminin çözümü olduğundan $|\widetilde{q}(x)|<C\Lambda_1$ ve böylece $\left|\widetilde{h}\right|<C\Lambda_1$ olur.

5.2. RIESZ BAZLARI

Bu alt başlıkta, Hilbert uzaylarda Riesz bazlarının bazı özellikler verileAektir. H, $<,>$ iç çarpımla birlikte bir Hilbert uzayı olsun

Tanım 1:$\{f_j\}_{j\geq 1}$, H Hilbert uzayının vektörlerinin bir dizisi olmak üzere , eğer $f \in H$ vektörü H uzayının nornuma göre yakınsak olan;

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} A_j f_j \tag{5.2.1}$$

serisiyle bir tek biçimde ifade edilebiliyorsa $\{f_j\}_{j\geq 1}$ vektörlerinin dizisi H 'da bir bazdır.

Tanım 2: Eğer $(f, \kappa_k) = \delta_{j,k}$ ($\delta_{j.,k}$ bir Kraneker delta) ise $\{f_j\}$ ve $\{\kappa_k\}$ dizileri H 'da bianormal olarak tanımlanır.
Eğer $\{f_j\}$ bir baz ise, $\{\kappa_j\}$ bianormal bazı mevcuttur. Aynı zamanda $\{\kappa_j\}$ H 'ın bir bazıdır. (5.2.1) deki A_j katsayıları

$$A_j = (f, \kappa_j) \tag{5.2.2}$$

formundadır.

Tanım 3: $\inf_j \|f_j\| > 0$ ve $\sup_j \|f_j\| < \infty$ ise $\{f_j\}_{j\geq 1}$ normalleşmiş olarak tanımlanmaktadır. Eğer $\{f_j\}_{j\geq 1}$ normalleşmiş baz ise $\{\kappa_j\}_{j\geq 1}$ bianormal bazıda normalleşmiş bazdır.

Tanım 4: Eğer $j \neq k$ için $(e_j, e_k) = 0$ ise $\{e_j\}$ dizisi ortogonal olarak tanımlanmaktadır. Eğer $(e_j, e_k) = \delta_{j,k}$ ise $\{e_j\}_{j\geq 1}$ ortonormal olarak tanımlanır.
$\{e_j\}_{j\geq 1}$, B 'de ortonormal ve tam ise aynı zamanda B 'nin bir bazıdır. (5.2.1) – (5.2.2) ilişkilendirilirse;

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, e_j)\, e_j \tag{5.2.3}$$

formunu alır.

Tanım 5: $\{e_j\}$, H Hilbert uzayının ortonormal bir baz, $A : B \to B$ sınırlı, lineer ters operatör alalım. Bu durumda A^{-1} de sınırlıdır ve $f \in B$ vektörü için

$$A^{-1}f = \sum_{j=1}^{\infty} \left(A^{-1}f, e_j\right) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f, A^{*^{-1}} e_j\right) e_j$$

Sonuç olarak

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \kappa_j)\, f_j$$

olur. Burada

$$f_j = Ae_j \quad , \quad \kappa_j = A^{*^{-1}} e_j \tag{5.2.4}$$

Açıktır ki $\{f_j\}_{j\geq 1}$ ve $\{\kappa_j\}_{j\geq 1}$; $(f_j, \kappa_j) = \delta_{jk}$ $(j, k \geq 1)$ olduğunda bianormaldirler, ve $A_j = \left(f_{\kappa_j}\right)$ tek bir biçimde belirlenir.

Böylece her sınırlı, lineer, ters operatör ortonormal bazı, H 'in bir diğer bazına dönüştürülür.

Tanım 6: H Hilbert uzayında, $\{f_j\}_{j\geq 1}$ bazı sınırlı, lineer, terslenebilir operatör yardımıyla ortonormal bazdan elde ediliyorsa, Riesz bazı olarak tanımlanır.

$\{f_j\}_{j\geq 1}$ $(f_j = Ae_j)$ Riesz bazı için B 'deki her f vektörü için

$$C_1 \sum_{j=1}^{\infty} |f, \kappa_j|^2 \leq \|f\|^2 \leq C_2 \sum_{j=1}^{\infty} |f, \kappa_j|^2 \tag{5.2.5}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Burada $\{\kappa_j\}_{j\geq 1}$ bazı $K_j = A^{*^{-1}} e_j$ sağlayan bianormal baz, C_1 ve C_2 sadece A operatörüne bağlı sabitlerdir.) Persavel eşitliğinden ve (5.2.4) 'den

$$\left\|A^{-1}f\right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(A^{-1}f, e_j\right)\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(f, \kappa_j)|^2$$

hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \|f\| &= \left\|AA^{-1}f\right\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}f\right\| \\ \left\|A^{-1}f\right\| &\leq \left\|A^{-1}f\right\| \|f\| \end{aligned}$$

olmasından

$$C_1 \left\|A^{-1}f\right\|^2 \leq \|f\|^2 \leq C_2 \left\|A^{-1}f\right\|^2$$

elde edilir. Burada $C_1 = \|A^{-1}\|^{-2}$, $C_2 \|A\|^2$ sonuç olarak (5.2.5) elde edilir.

Tanım 7: Bir $\{g_j\}_{j\geq 1}$ vektörler dizisi için

$$\sum_{J=1}^{\infty} A_j g_j = 0$$

denklemi sadece $A_j = 0$ $(j \geq 1)$ olması durumunda geçerli ise $\{g_j\}_{j\geq 1}$ dizisi w-lineer bağımsız olarak tanımlanır.

Teorem 5.2.1: (Bari teoremi) Eğer $\{g_j\}_{j\geq 1}$ w-lineer bağımsız ise $\{g_j\}_{j\geq 1}$ B'nin bir Riesz bazıdır.

İspat:

$$T\left(\sum_{J=1}^{\infty} A_j f_j\right) = \sum_{J=1}^{\infty} A_j (f_j - g_j)$$

olacak biçimde bir T operatörü tanımlansın. $(A - T) f = 0$ sadece trivial çözüme sahiptir. Gerçekten eğer $(A - T) f = 0$ ise buradan

$$(A - T) f = \sum_{J=1}^{\infty} (f - e_j) f_j - \sum_{J=1}^{\infty} (f - e_j)(f_j - g_j) = \sum_{J=1}^{\infty} (f - e_j) g_j$$

olur ki buradan $\sum_{J=1}^{\infty} (f - e_j) g_j = 0$ 'dir. Böylece $(f - e_j) = 0$ $j \geq 1$, $\{g_j\}_{j\geq 1}$ w-lineer bağımsızlığından $f = 0$ 'dır. Sonuç olarak $A - T$ lineer,sınırlı ve ters operatördür. $(A - T) e_j = g_j$ olduğunda $\{g_j\}_{j\geq 1}$ B'nin bir Riesz bazıdır.