SÜREKSİZ KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS SPEKTRAL PROBLEMLER

A. Sinan ÖZKAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

SÜREKSİZ KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS SPEKTRAL PROBLEMLER

A. Sinan ÖZKAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ÇEVEN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2009

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Sezai ELAGÖZ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

ÖZET

SÜREKSİZ KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS SPEKTRAL PROBLEMLER

Doktora Tezi

A. Sinan ÖZKAN
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

Bu çalışmada, katsayıları reel değerli, süreksiz fonksiyonlar olan Sturm-Liouville diferansiyel denklemi, spektral parametreye bağlı sınır koşulları ve süreksizlik koşulları tarafından üretilen sınır değer problemi incelenmektedir.

Birinci bölümde, çalışmada kullanılan bazı temel kavramlardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, öncelikle ele alınan problemin teorik operatör yorumu incelenmiş ve operatörün bazı önemli özellikleri öğrenilmiştir. Ayrıca bu bölümde, problemin özdeğerlerinin önemli özelliklerini ve asimptotik ifadelerini içeren, düz spektral problemin temel teoremi ispatlanmıştır.

Üçüncü bölüm ters probleme ayrılmıştır. Öncelikle Prüfer açısı ve Weyl fonksiyonu kavramları tanıtılarak bunların bazı kullanışlı özellikleri verilmiş ve bu fonksiyonlara göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır. İki spektruma göre ters problem yine bu bölümde incelenmiştir. Yani, problemin özdeğer dizisinin yanısıra bir sınır koşulunun değiştirilmesiyle elde edilen yeni problemin özdeğer dizisi de verildiğinde, problemin katsayılarının tek olarak belirlenebileceği ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Süreksiz katsayılı Sturm-Liouville denklemi, süreksizlik koşulları, parametreye bağlı sınır koşulları, ters problem.

ABSTRACT

DIRECT AND INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

Ph. D. Thesis

A. Sinan ÖZKAN
Cumhuriyet University
Graduate School of Natural and Applied
Science of Department of Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Rauf AMİROV

In this study, the boundary value problem which is generated by Sturm-Liouville equation with discontinuous coefficient, boundary conditions depent on spectral parameter and discontinuous conditions is considered

In the first section, we recall some basic consept.

In the second section, an operator theoreric formulation of the problem is studied. Moreover, the basic properties of the solutions and the asymptotic behaviour of eigenvalues are investigated.

The last section consist of the inverse problems. The Prüfer's angle and the Weyl's function are explained; the uniqueness theorems of inverse problems according to these functions and two different eigenvalues sets are proved.

Key Words: Sturm- Liouville equation with discontinuous coefficient, discontinuous condition, eigenvalue dependent boundary condition, inverse problem.

Araştırmalarımın başından sonuna kadar tüm safhalarında yardımını esirgemeyip, değerli fikir ve tecrübeleriyle bana büyük destek sağlayan değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Rauf AMİROV'a teşekkür ederim.

A. Sinan ÖZKAN

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Bir takım uygulamalı bilimlerde özellikle de bazı fizik problemlerinde önemli bir yere sahip olan, diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, düz spektral problemler ve ters spektral problemler olarak iki ana kola ayrılır.

Düz spektral problemler, verilen operatörün spektrumunun ve özfonksiyonlarının aranması ve verilen bir fonksiyonun operatörün özfonksiyonlarına göre ayrışımının incelenmesinden ibarettir. Spektral analizin ters problemleri ise verilen belirli dizilere göre, spektral karakteristikleri bu diziler olan operatörün inşaası ile ilgilenmektedir. Bu konudaki bazı çalışmalarda, verilen spektral karakteristiklerin operatörü tek şekilde belirlediğini gösteren, ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri verilmiş; bazılarında ise verilen spektral karakteristiklere göre operatörün nasıl elde edilebileceği araştırılmış, yani algoritması verilmiştir.

Fizik, mekanik, jeofizik, elektronik ve metalurji gibi farklı bilim dallarında bir çok kez ters problemlerle karşılaşılmaktadır. Homojen olmayan telin, onun öz titreşimlerine göre yoğunluğunun hesaplanması; parçacıklar arasındaki etkileşim kuvvetlerinin, bu parçacıkların enerji seviyelerine göre belirlenmesi; kuantum fiziğinde saçılma verilerine göre alan potansiyellerinin bulunması; jeofizikte yeraltı madenlerinin yeraltındaki elementlerin dağılım karakteristiklerine göre belirlenmesi problemlerinin herbiri spektral analizin ters problemlerine örnek teşkil eder.

Literatürde, ikinci mertebeden

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=\lambda w(x)y \tag{0.1}$$

diferansiyel denklemine Sturm-Liouville denklemi; bu denklem veya bu denklem ve farklı bir takım sınır koşulları tarafından üretilen operatörlere Sturm-Liouville operatörleri; bu operatörler için konulan spektral problemlere ise Sturm-Liouville problemleri denir. Diferansiyel operatörlerin düz ve ters spektral problemlerinde bu operatörler sınıfı önemli bir yere sahiptir. Zira, Sturm-Liouville problemleri daha fazla somut uygulama alanına sahiptir.

Örneğin, kuantum mekaniğindeki Schrödinger dalga denklemi,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + V(x)u(x,t) = 0$$

şeklindedir. Burada $u(x,t)$ parçacığın dalga fonksiyonu, $V(x)$ potansiyel alan, m parçacığın kütlesi ve $\hbar$ Planck sabitidir. E, u'nun konumuna karşılık gelen enerji seviyesi olmak üzere yukarıdaki denklemde

$$u(x,t) = e^{it\sqrt{E}}y(x)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$-y'' + \frac{2m}{\hbar}V(x)y = \frac{2m}{\hbar}Ey$$

denklemi elde edilir ki bu, Sturm Liouville tipinde bir denklemdir.

Klasik fizikten bir başka örnek de telin titreşim denklemidir. $p(x)$ telin x noktasındaki gerilimini; $w(x)$ yoğunluğunu; $q(x)$ ise geri çağırıcı kuvvet katsayısını belirtmek üzere bu denklem aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) - q(x)u(x,t) = w(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Telin normal salınım yaptığı kabul edilerek, bu denklemin çözümü,

$$u(x,t) = y(x)\sin\sqrt{\lambda}t$$

şeklinde aranırsa, yeni aranan $y(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki klasik Sturm Liouville denklemini sağlayacağı kolayca görülür:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda w(x)y$$

Sturm Liouville operatörlerinin spektral teorisi ile ilgili ilk sonuçlar Bernoulli, D'Alembert, Euler, Liouville ve Sturm'a aittir. 1830'larda Sturm (1836) ve Liouville(1836), belirli koşullar altında (0.1) denklemini ve belli sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı $y(x)$ fonksiyonlarının varlığına olanak veren λ sayılarının, yani özdeğerlerin, ayrık bir küme oluşturduğunu ispatlamışlardır.

20. yuzyılda farklı operatör sınıfları için spektral teori daha hızlı bir biçimde gelişmiştir. Bu dönemde, Birkhoff, Weyl, Hilbert, Neumann ve diğer birçok matematikçi önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Sonlu aralıkta ikinci mertebeden diferansiyel ifadeler ve regüler sınır koşulları ile üretilen operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda, lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerden faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı kavramları kurulmuştur. Soyut H Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H'da lineer selfadjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. 19. ve 20. yüzyıllarda yaşamış birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normalleştirici sayılar, vs. spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller elde edilmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer bazı matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm selfadjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından ele alınmıştır.

Diferansiyel operatörler için ters spektral problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V.A. Ambartsumyan'a aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 0.1(Ambartsumyan, 1929): *$q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ sayıları*

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \tag{0.2}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{0.3}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V.A. Ambartsumyan'ın bu çalışması ilk bakışta, özdeğerlerin $q(x)$ fonksiyonunu tek şekilde belirleyebileceğini akla getirse de bunun genelde doğru olmadığı G. Borg' un 1945 yılındaki çalışmasında gösterilmiştir. Bu nedenle de, V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisnai bir durum olarak düşünülmektedir. Borg, bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin verilen operatörün farklı spektrumları olduğunu farz ederek operatörü bu dizilerin yardımıyla belirlemektedir. Bu sonuç, aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 0.2(Borg, 1945): *h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılar olmak üzere, $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (0.2) diferansiyel denklemi ve*

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{0.4}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{0.5}$$

sınır koşulları ile verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$ ler ise (0.2) denklemi, (0.5) ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \qquad (h \neq h_1) \tag{0.6}$$

sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirler.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü belirlediğini N. Levinson(1949) ispatlamıştır. Ayrıca, N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli tek olarak belirlediğini de göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte(1938), J. Lions(1957) ve B. M. Levitan(1964) tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner(1948) kendi çalışmalarında incelemiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko tarafından kaydedilmiştir. 1950 yılında V.A. Marchenko ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (0.2) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1, \qquad \varphi'(0,\lambda)=h, \tag{0.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n=\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{0.8}$$

sayıları verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V.A. Marchenko, G. Borg' un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir(V.A. Marchenko, 1950). Ayrıca bu çalışmada, $\rho(\lambda)$ fonksiyonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşulu verilmiştir. V. A. Marchenko' nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M.G. Krein(1951, 1954), Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirlemek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil; bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V.A. Marchenko' nun çalışması yayınlanmadan önce A.N. Tikhonov (1949) tarafından V. A. Marchenko' nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A.N. Tikhonov çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 0.3(Tikhonov, 1949): *$\rho(x)$ parçalı analitik bir fonksiyon ve $\rho(x)\geq\rho_0>0$ olmak üzere,*

$$U''+\lambda\rho^2(x)U=0, \qquad x>0, \quad U(\infty)=0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Eğer $\lambda<0$ ise $R(\lambda):=\dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirlenir.

I. M. Gelfand ve B. M. Levitan (1951) çalışmasında, $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Diğer taraftan bu çalışmada klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin klasik Sturm-Liouville probleminin, sırasıyla, spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Bu koşullar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \cdots + \frac{a_{\left\|\frac{m}{2}\right\|}}{n^{2\left\|\frac{m}{2}\right\|+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\left\|\frac{m}{2}\right\|+1}}, \\
\alpha_n &= \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \cdots + \frac{b_{\left\|\frac{m}{2}\right\|}}{n^{2\left\|\frac{m}{2}\right\|+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\left\|\frac{m+1}{2}\right\|}}
\end{aligned}$$

Burada $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} q(t)dt\right]$, m çift ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\dfrac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$; m tek ise $\sum \left(\dfrac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat bu çalışmalarda ters problemin iki spektrumuna göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G. Gasimov' un (1964) çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{0.9}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n$ çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.9) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (0.9) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve Levitan(1951) çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralıdır, yani $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$ dır.

2) λ_n ve μ_n'ler

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ \sqrt{\mu_n} &= n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3) $a_0 \neq a_0'$ dır.

Son yıllarda, operatörü belirlemeye olanak veren bazı farklı veriler daha sık kullanılmaya başlamıştır. Bunların içerisinde belki de en önemli olanları Weyl fonksiyonu ve Prüfer açısıdır.

Weyl, kendi adıyla anılan m-fonksiyonunu ilk olarak 1910'da bazı singüler problemler üzerine çalışırken kurmuştur(Weyl, 1910). Fakat daha sonra bu fonksiyon, klasik sınır koşullu Sturm -Liouville ters problemlerinin çözümünde kullanımıştır.(Freiling, G. and Yurko, V.A. 2001)

Prüfer açısı ise ilk olarak Sturm-Liouville osilasyon teorisi çalışılırken kullanılan Riccati denklemlerine bir alternatif olarak tanımlanmıştır(Prüfer, 1926). Yakın zamanın P. Binding, P. J. Browne, K. Seddighi(1993), B. A. Watson(2000, 2001 ve 2004), C. Tretter ve H. Schmid(2002) gibi bazı matematikçileri, Prüfer açısını Sturm-Liouville ters problemlerinde kullanmışlardır.

Aralığın iç noktasında süreksizlik koşullarına sahip Sturm-Liouville operatörleri genel olarak aşağıdaki eşitlikler ve bunlara eklenen çeşitli sınır koşulları ile üretilir:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad x \in (0,d) \cup (d,\pi) \tag{0.10}$$

$$\begin{cases} y(d+0) = \alpha y(d-0) \\ y'(d+0) = \alpha^{-1} y'(d-0) + \beta y(d-0) \end{cases} \tag{0.11}$$

Burada $\alpha > 0$, $|\alpha - 1|^2 + \beta^2 \neq 0$, $d \in (0,\pi)$'dır.

Bu tür operatörlerle ilgili ilk çalışma H. Hald'a aittir (Hald, O., 1984). Bu çalışmada Hald, klasik sınır koşulları altında düz ve ters spektral problemi incelemiş ve operatörün bir özdeğer dizisinin ve aralığın ilk yarısında $q(x)$ fonksiyonunun bilinmesi halinde operatörün tek olarak belirlenebileceğini göstermiştir.

R. Kh. Amirov (2006) çalışmasında benzer bir problemi ele almış ve verilen operatörün belli başlangıç ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri için integral gösterim elde etmiştir. Ayrıca bu çalışmada operatörün spektral özellikleri ile bu spektral özelliklere göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır. Diğer yandan R. Kh. Amirov 'un (2004, 2009) çalışmaları, farklı tipten süreksiz Sturm-Liouville ve Dirac operatörleri için düz ve ters spektral problemleri içermektedir. Bu çalışmalardaki ters problemler, Weyl fonksiyonuna göre, özdeğer ve normalleşirici sayı dizilerine göre ve iki spektruma göre ayrı ayrı ele alınmış ve teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Süreksiz katsayılı Sturm-Liouville operatörleri son yıllarda yaygın bir şekilde çalışılmaktadır. Özellikle klasik fizikte, jeofizikte ve elektronikte doğrudan uygulamaya sahip olması uygulamalı matematikçileri bu konulara yöneltmiştir. Bu tür operatörler genellikle,

$$-y'' + q(x)y = \lambda\rho(x)y \tag{0.12}$$

denklemi ile üretilir. Bazı çalışmalarda, ayrıca aralıkta süreksizlik koşulları da olabilmektedir. Her iki durumun da fiziksel uygulamaları vardır.

Örneğin, $\rho(x)$ parçalı tanımlı bir fonksiyon iken,

$$\begin{aligned} \rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + q(x)u(x,t), \quad x \in (0,d) \cup (d,\pi) \\ u(d+0,t) &= \alpha u(d-0,t) \\ u'(d+0,t) &= \alpha^{-1}u'(d-0,t) + \beta u(d-0,t) \end{aligned} \tag{0.13}$$

problemi klasik Fourier metodu uygulanarak, aşağıdaki gibi bir süreksiz katsayılı Sturm-Liouville problemine dönüşür.

$$-y'' + q(x)y = \lambda\rho(x)y \quad x \in (0,d) \cup (d,\pi) \tag{0.14}$$
$$\begin{cases} y(d+0) = \alpha y(d-0) \\ y'(d+0) = \alpha^{-1}y'(d-0) + \beta y(d-0) \end{cases}$$

(0.13) problemi aslında iki farklı materyalin uç noktalarından birleştirilmesiyle oluşturulan katı cismin titreşim problemidir.

Benzer şekilde iki farklı materyalin birleştirilmesiyle oluşan cisimler için ısı ya da elektrik iletimi problemleri de süreksiz katsayılı ya da aralıkta süreksizliğe sahip Sturm-Liouville problemlerine dönüştürülebilir.

R. Carlson(1994), L-E. Andersson(1988), C. F. Coleman ve J. R. Maclaughlin(1993), A. McNabb, R. Anderssen ve E. Lapwood(1976) çalışmaları süreksiz katsayılı Sturm-Liouville spektral problemlerine örnektir. Bu çalışmalarda çeşitli ters problemler ele alınmış ve bazılarında tam çözümü yapılmış; bazılarında ise bunun yanısıra, verilen spektral verilerin operatöre ait veriler olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar araştırılmıştır. Özellikle L-E. Andersson(1988), çalışmasında hem problemin fiziksel yorumunu vermiş hem de ters problemi tam olarak çözebilmiştir.

Spektral parametreye bağlı sınır koşulları Sturm ve Liouville'in zamanından çok önce S. D. Poisson(1820) tarafından incelenmiştir. M. A. Naimark, "Linear Differential Operators"(1968) kitabında sınır koşullarının parametreye bağlı olduğu özdeğer problemlerini tanımlamış ve bu tür problemleri genelleştirilmiş özdeğer problemi olarak adlandırmıştır. Bu tip problemler genelde (0.4) ve (0.5) sınır koşullarının birinin veya her ikisinin katsayılarını λ parametesine bağlı seçmekle elde edilir. Örneğin, $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere, (0.5) koşulu

$$a(\lambda)y(\pi) + b(\lambda)y'(\pi) = 0 \tag{0.15}$$

şeklinde yazılırsa parametreye bağlı bir sınır koşulu elde edilir. Eğer $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonları λ'nın lineer (doğrusal) fonksiyonları ise sınır koşulu parametreye lineer şekilde bağlıdır denir. Böyle sınır koşullu Sturm-Liouville operatörü için spektral problem ilk olarak C. T. Fulton(1977, 1980) tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada Fulton, probleme karşılık gelen teorik operatörü tanımlayarak bu operatör yardımıyla, problemin özdeğerlerinin bazı önemli özelliklerini (örneğin reel ve cebirsel olarak basit olması gibi) elde etmiştir. N. J. Guliyev, (2005) çalışmasında bir sınır koşulu parametreye lineer şekilde bağlı Sturm-Liouville ters problemi için Gelfand-Levitan-Marchenko tipinde esas denklem elde ederek bu problemin tam çözümünü vermiştir. Ayrıca, O. Sh. Mukhtarov(1994), R. Kh. Amirov, B. Keskin ve A. S. Özkan(2009) ve benzeri bir takım çalışma, lineer koşullarla ilgili düz ve ters spektral problemleri içermektedir. Bu çalışmaların bazılarında parametreye bağlı sınır koşullarının yanısıra aralıkta süreksizlik koşulları da bulunmaktadır.

Son zamanlarda daha çok $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonlarının λ'ya daha genel şekilde (polinom veya tam fonksiyon şeklinde) bağlı olduğu durum ele alınmaktadır. $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$'nın keyfi birer polinom olduğu durum ilk olarak E. M. Russakovskii(1975) tarafından ele alınmıştır. Bu durumda problemin teorik operatör ifadesi ve özdeğerlerinin bazı önemli özellikleri bu çalışmada araştırılmıştır. Bu tür operatörler için düz problemler yaygın bir şekilde çalışılmış olmasına rağmen ters problemler ancak son yıllarda ilgi görmeye başlamıştır. P. A. Binding, P, J. Browne ve B. A. Watson, (2004) çalışmalarında,

$$\begin{aligned} &-y'' + q(x)y = \lambda y \\ &y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0 \\ &a(\lambda)y(1) + b(\lambda)y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{0.16}$$

problemini ele almış ve bu problem için, özdeğerlerin asimptotik ifadeleri, özfonksiyonların salınımı gibi bazı spektral özellikleri inceleyip, farklı bazı verilere göre ters problemin çözümü için teklik teoremlerini ispatlamışlardır.

$a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonlarının çeşitli durumlarına göre düz veya ters spektral problemler diğer bazı matematikçiler tarafından da çok yaygın bir şekilde çalışılmıştır. Zh. Ben Amara, A. M. Savchuk(1999), A. A. Shkalikov(1986), N.

Yu. Kapustin(1999), N. B. Kerimov(2003), P. Binding, P. J. Browne, K. Seddighi(1993), ve P. Binding, P. J. Browne, B. A. Watson(2000, 2001) bunların en önde gelenleridir.

Bu tezde, yukarıda bahsedilen problemlerin tümünü kapsayacak bir problem ortaya atılmış ve yukarıda adı geçen bazı çalışmalardaki (Örneğin R. Kh. Amirov, 2006, 2009; O. Sh. Mukhtarov, 1994; N. J. Gulijev, 2005 ve P. A. Binding, 2004 gibi) sonuçlar ele alınan probleme genelleştirilmeye çalışılmıştır.

$p(x)$, $p^{-1}(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları, $L_2(0,\pi)$ sınıfından, reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, bu çalışmada aşağıdaki sınır değer problemi incelenmiştir.

$$-p(x)\left[p(x)y'\right]' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,d) \cup (d,\pi) \tag{0.17}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \tag{0.18}$$

$$a(\lambda)y(\pi) + b(\lambda)p(\pi)y'(\pi) = 0 \tag{0.19}$$

$$\begin{cases} y(d+0) = \beta y(d-0) \\ \left[p(x)y'(x)\right]_{x=d+0} = \beta^{-1}\left[p(x)y'(x)\right]_{x=d-0} \end{cases} \tag{0.20}$$

Burada $\alpha \in [0,\pi)$, $d \in (0,\pi)$, $\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, ortak sıfıra sahip olmayan, reel katsayılı polinomlar ve λ kompleks parametredir

Dikkat edilirse $p(x)$ parçalı sabit bir fonksiyon alınırsa, (0.17) denklemi (0.12) ile belirtilen süreksiz katsayılı Sturm - Liouville denklemine dönüşür. Şöyle ki, örneğin $p(x)$ fonksiyonu

$$p(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < d_1 \\ p_1 & d_1 < x < d_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & d_n < x \le \pi \end{cases}, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,...,n.$$

şeklinde alınırsa, (0.17) denklemi

$$-y'' + q_1(x)y = \lambda\rho(x)y,$$

denklemine dönüşür. Burada

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < d_1 \\ p_1^{-2} & d_1 < x < d_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_n^{-2} & d_n < x \leq \pi \end{cases}, \quad q_1(x) = \rho(x)q(x)$$

şeklindedir. Ayrıca burada $\rho(x)$ parçalı sabit ve pozitif değerli olduğundan, yeni denklemde $q(x)$ fonksiyonunun sınıfı değişmeyecektir. Dolayısıyla (0.17), (0.12)'den daha geneldir. Ayrıca, (0.19) sınır koşulunun λ'ya polinomlar yardımıyla bağlanmış olması ve (0.20) süreksizlik koşulları, ele alınan problemin öncekilerden daha genel olduğunu gösterir.

Bu tezin birinci bölümünde, çalışmada kullanılan bazı temel kavramlardan bahsedilmiştir. Bu bölüm hazırlanırken Tichmarsh(1932), Freiling ve Yurko(2001), Levitan ve Sargsyan(1988) ve M. A. Naimark(1968) kaynakları esas alınmıştır.

İkinci bölümde, öncelikle ele alınan problemin teorik operatör yorumu incelenmiş, yani, spektrumu bu problemin spektrumuyla çakışan bir operatör kurularak bu operatörün bazı önemli özellikleri öğrenilmiştir. Ayrıca bu bölümde, (0.17) denkleminin belli başlangıç ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri araştırılarak bu çözümlerin asimptotik ifadeleri elde edilmiştir. Daha sonra bu asimptotik formüller kullanılarak, problemin karakteristik fonksiyonu ve onun özellikleri öğrenilmiştir. İkinci bölümün sonunda problemin özdeğerlerinin önemli özelliklerini (reel ya da kompleks olması, basit ya da katlı olması gibi) ve asimptotik ifadelerini içeren, düz spektral problemin temel teoremi ispatlanmıştır. Bu teoremin ifadesi aşağıdaki gibidir:

Teorem 0.4(Teorem2.4.2): *a) L sınır değer problemi, mutlak değerlerine göre sıralandığında sınırsız şekilde büyüyen, sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir.*

b) Bu özdeğerlerin en fazla sonlu tanesi kompleks ya da katlı (cebirsel) olabilir; diğerleri reel ve basittir.

c) Özdeğerler reel eksene göre simetrik olarak yerleşir.

d) Özdeğerler dizisini $\{\lambda_n\}$ *ile gösterirsek, n'nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik ifade geçerlidir:*

$$\sqrt{\lambda_n} = \begin{cases} \sqrt{\lambda^0_{n-m}} + O\left(\dfrac{1}{n}\right), & \alpha \neq 0,\ derb(\lambda) \geq dera(\lambda) \\ \sqrt{\lambda^0_{n-m+1}} + O\left(\dfrac{1}{n}\right), & diğer\ durumlarda \end{cases}.$$

Burada, $\sqrt{\lambda^0_n}$, $\Delta_0(\lambda)$*'nın sıfırlarını gösterir ve ayrıca* $\sqrt{\lambda^0_n} = \dfrac{n\pi}{\gamma(\pi)} + h_n$, $\sup_n |h_n| < \infty$ *ifadesi doğrudur.*

Üçüncü bölüm ters probleme ayrılmıştır. Öncelikle Prüfer açısı ve Weyl fonksiyonu kavramları tanıtılarak bunların bazı kullanışlı özellikleri verilmiş ve bu fonksiyonlara göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır. İki spektruma göre ters problem yine bu bölümde, incelenmiştir. Yani, problemin özdeğer dizisinin yanısıra (0.18) sınır koşulunun değiştirilmesiyle elde edilen yeni problemin özdeğer dizisi de verildiğinde, problemin katsayılarının tek olarak belirlenebileceği ispatlanmıştır. Bu bölümün temel sonucu şu şekildedir:

Teorem 0.5(Sonuç3.3.3):

Aşağıdaki verilerin her biri (0.17)-(0.20) sınır değer problemini tek olarak belirler:

1) $M(\lambda)$ *Weyl fonksiyonu,*

2) $\Phi(0,\lambda)$ *Prüfer açısı ve* α *açısı,*

3) $\{\lambda_n\}$ *ve* $\{\eta_n\}$ *özdeğer dizileri.*

I. BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Analitik Fonksiyonların Bazı Temel Özellikleri:

Tanım 1.1.1: Kompleks düzlemde bir z_0 noktası ve bu noktanın en az bir $\delta > 0$ komşuluğunda tanımlı olan bir $f(z)$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{1.1}$$

limiti mevcut ve sonlu ise $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limitin değeri de $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi olarak adlandırılır, $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir W alt kümesindeki tüm noktalarda analitik ise $f(z)$'ye W'de analitik fonksiyon denir.

Tanım 1.1.3: Kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik olan fonksiyona tam fonksiyon adı verilir.

Tanım 1.1.4: $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $f(z)$'ye W'da sınırlı fonksiyon denir.

Teorem 1.1.5(Liouville): *Komleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.*

Tanım 1.1.6: $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$'nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir. Eğer $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 1.1.7: $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0'da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0'a $f(z)$'nin ayrık singüler (aykırı) noktası denir.

Tanım 1.1.8: z_0, bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun.

i) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii)

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \tag{1.2}$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası (kutup yeri) denir.

iii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse z_0 noktasına $f(z)$'nin esas aykırı noktası denir.

Teorem 1.1.9(Rouché): *f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar ve γ, B bölgesinde bulunan ve f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ eşitsizliği gerçekleniyorsa, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ eşitliği geçerlidir. Burada, Z_f ve Z_g, $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki sıfırlarının sayısını; P_f ve P_g ise $f(z)$ ve $g(z)$'nin γ'nın sınırlandırdığı bölge içindeki kutuplarının sayısını göstermektedir. Eğer f ve g, B içinde analitik fonksiyonlarsa $Z_f = Z_g$ olur.*

Tanım 1.1.10: $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \tag{1.3}$$

olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu}) \tag{1.4}$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir.

Tanım 1.1.11: $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho}) \tag{1.5}$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir. (1.4) eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir. ve σ ile gösterilir.

Teorem 1.1.12(Hadamard): *Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu*

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \tag{1.6}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$'nin orijindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$'nin 0'dan *farklı tüm sıfırlarının kümesidir.*

Teorem 1.1.13: *f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde analitik fonksiyonlar ve $\{z_n\} \subset B$*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$

ii) $z_0 \in B$

iii) $\forall n$ *için,* $f(z_n) = g(z_n)$

koşullarını sağlayan bir dizi ise $\forall z \in B$ için $f(z) = g(z)$ *eşitliği geçerlidir.*

Sonuç 1.1.14: *f ve g birer tam fonksiyon ve $\{z_n\}$,* her n *için* $f(z_n) = g(z_n)$ *koşulunu sağlayan, kompleks düzlemde en az bir limit noktasına sahip bir dizi ise $f(z) \equiv g(z)$'dır.*

Teorem 1.1.15(Zhdanovich, 1960): *$i = \overline{1,p}$ olmak üzere α_i'ler, $\alpha_0 > \alpha_1 > ... > \alpha_{p-1} > 0$ eşitsizliğini sağlayan gerçel sayılar, β_i'ler ise herhangi kompleks sayılar olsun. Bu durumda $\beta_p \neq 0$ ise,*

$$e^{\alpha_0 \lambda} + \beta_1 e^{\alpha_1 \lambda} + \ldots + \beta_{p-1} e^{\alpha_{p-1} \lambda} + \beta_p = 0$$

denkleminin kökleri

$$\lambda_n = \frac{2\pi n i}{\alpha_0} + \Psi(n) \quad (n = 0, \pm 1, \ldots)$$

şeklindedir. Burada $\Psi(n)$ sınırlı kompleks değerli fonksiyondur.

1.2. Hilbert Uzayında Lineer Operatörler:

Tanım 1.2.1: H, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olmak üzere, $\forall x, y, z \in H$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $(.,.) : H \times H \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna H'da bir iç çarpım; H'a da bir iç çarpım uzayı denir.

i) $(x,x) \geq 0$; $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

iii) $(\lambda x, y) = \lambda (x,y)$

iv) $(x+z,y) = (x,y) + (z,y)$.

$\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ ifadesi x'in normu diye adlandırılır.

Tanım 1.2.2: H bir iç çarpım uzayı, $(x_n) \subset H$ ve $x_0 \in H$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N$ doğal sayısı, $\forall n > N$ için $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde mevcut ise (x_n) dizisine H uzayında x_0' a yakınsaktır denir. x_0 elemanına ise (x_n) dizisinin limiti adı verilir ve

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

ile gösterilir.

Tanım 1.2.3: H bir iç çarpım uzayı, $(x_n) \subset H$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N$ doğal sayısı, $\forall n, m > N$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde mevcut ise (x_n) dizisine H uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.2.4: Bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi uzay içinde bir limite sahipse bu uzaya tam iç çarpım uzayı veya Hilbert uzayı adı verilir. Örneğin,

$$L_2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b |x(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

uzayı,

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2.5: M ve N bir vektör uzayının iki alt uzayı olmak üzere, $M \cap N = \{0\}$ ise

$$M \oplus N := \{x : x = m + n,\ m \in M,\ n \in N\ \} \tag{1.7}$$

uzayına bu iki uzayın direkt toplamı denir. $M \oplus N$'de $x = m + n$ yazılışı tek türlüdür ve bu nedenle bu uzayın elemanlarını (m, n) sıralı ikilileri ile belirtmek mümkündür.

Tanım 1.2.6: H_1, H_2 birer Hilbert uzayı ve L, $D(L) \subset H_1$ alt uzayından H_2'ye tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in D(L)$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$L\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha L(x) + \beta L(y) \tag{1.8}$$

eşitliği geçerli ise L'ye H_1'den H_2'ye lineer operatör adı verilir. $D(L)$ alt uzayı L'nin tanım uzayı olarak adlandırılır. Ayrıca $R(L) = \{y : y = Lx,\ x \in D(L)\}$ kümesine L'nin görüntü kümesi ve $N(L) = \{x \in D(L) : Lx = 0\}$ kümesine L'nin çekirdeği denir.

Tanım 1.2.7: Aynı H uzayında tanımlı L_1 ve L_2 operatörleri verilsin. Eğer $D(L_1) \subset D(L_2)$ ve $\forall x \in D(L_1)$ için $L_1 x = L_2 x$ ise L_2 operatörüne L_1 operatörünün genişlemesi denir, $L_1 \subset L_2$ ile gösterilir. Eğer $D(L_1) = D(L_2)$ ve $\forall x \in D(L_1)$ için $L_1 x = L_2 x$ ise bu operatörler eşittir ve $L_1 = L_2$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.8: Bir H Hilbert uzayında tanımlı L lineer operatörü verilsin. Eğer her $x \in D(L)$ için $\|Lx\| \leq m\,\|x\|$ olacak şekilde $m > 0$ sayısı varsa L'ye sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 1.2.9: L, H Hilbert uzayında tanımlı bir lineer operatör ve $(x_n) \subset D(L)$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dizi olsun.

$i)$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

$ii)$ $\lim\limits_{n\to\infty} Lx_n = y$

Bu durumda, $x \in D(L)$ ve $y = Lx$ özellikleri gerçekleniyorsa L'ye kapalı lineer operatör denir.

Tanım 1.2.10: H bir Hilbert uzayı ve M onun altuzayı olsun. Her bir $x \in H$ için, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ olacak şekilde en az bir $(x_n) \subset M$ dizisi varsa M'ye

H'da yoğun alt uzay adı verilir. $\overline{M} = H$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.11: *$\overline{M} = H$ olması için gerek ve yeter koşul $M^{\perp} = \{0\}$ olmasıdır. Burada $M^{\perp} := \{x : \forall m \in M \text{ için } (x, m) = 0\}$ dır.*

Tanım 1.2.12: L, H Hilbert uzayından kendi üzerine tanımlı bir lineer operatör ve $\overline{D(L)} = H$ olsun.

$$M := \{y \in H : \forall x \in D(L) \text{ için } (Lx, y) = (x, z) \text{ olacak şekilde } z \in H \text{ mevcut}\}$$

kümesi üzerinde $y \in M$ için $L^{*}y = z$ şeklinde tanımlı operatöre L'nin eşlenik(adjoint) operatörü denir.

Tanım 1.2.13: Bir L lineer operatörü için $L \subset L^{*}$ ise L'ye simetrik operatör; $L = L^{*}$ ise L'ye özeşlenik (selfadjoint) operatör adı verilir.

Tanım 1.2.14: L bir lineer operatör olmak üzere $Lx = \lambda x$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı $x \in D(L)$ varsa λ sayısına L operatörünün bir özdeğeri, x elemanına da λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir. L'nin tüm özdeğerlerinin kümesi $\sigma_p(L)$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.15: *L bir selfadjoint operatör olsun. Bu durumda,*

a) L'nin tüm özdeğerleri reel sayılardır, yani $\sigma_p(L) \subset \mathbb{R}$'dır.

b) Farklı özdeğerlere karşılık gelen y_1, y_2 özfonksiyonları ortogonaldir, yani $(y_1, y_2) = 0$'dır.

1.3. Lineer Diferansiyel Operatörler:

Tanım 1.3.1: n. mertebeden bir lineer diferansiyel ifade

$$\ell(y) = p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları denir.

Tanım 1.3.2: a ve b sonlu sayılar olmak üzere $\frac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilirse (Lebesgue anlamında) (1.9) diferansiyel ifadesine regüler diferansiyel ifade; aksi halde, yani a veya b sonsuz veya $\frac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ fonksiyonlarından en az biri $[a, b]$ aralığında integrallenebilir değilse (1.9) diferansiyel ifadesine singüler diferansiyel ifade denir.

$C^n(a, b)$, (a, b) aralığında n. mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonların uzayı olmak üzere bir $y \in C^n(a, b)$ fonksiyonunun ve $(n-1)$. mertebeye kadar olan türevlerinin belli bir lineer birleşimini $U(y)$ ile gösterelim:

$$U(y) = a_0 y(a) + a_1 y'(a) + ... + a_{n-1} y^{(n-1)}(a) + b_0 y(b) + b_1 y'(b) + ... + b_{n-1} y^{(n-1)}(b)$$

Belli ki $U(y)$ ifadesi a_i, b_i katsayılarına bağlıdır. Buna göre bu katsayılar değiştirilerek farklı şekillerde $U_v(y)$, $v = 1, 2, ..., m$ ifadeleri elde etmek mümkündür.

Tanım 1.3.3:

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., m \tag{1.10}$$

eşitliklerine $y \in C^n(a, b)$ fonksiyonu için konulan sınır koşulları adı verilir.

Tanım 1.3.4: $D = \{y \in C^n(a, b) : \; U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., m\}$ kümesi üzerinde $Ly = \ell(y)$ eşitliği ile bir lineer operatör tanımlanır. Bu operatöre $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (1.10) sınır koşulları tarafından üretilen diferansiyel operatör denir.

Bu tanımdan anlaşıldığı gibi aynı diferansiyel ifade ile, sınır koşulları değiştirilerek, farklı operatörler tanımlamak mümkündür. Ayrıca (1.10) koşulları verilmeksizin de operatör tanımlanabilir ki bu, $C^n(a,b)$ üzerinde $\ell(y)$ ile üretilen tüm operatörlerin genişlemesi olur.

Teorem 1.3.5(Lagrange Formülü): *$C^n(a,b)$ uzayındaki herhangi y ve z fonksiyonları için,*

$$\int_a^b \ell(y)\,\overline{z}dx = P(\xi,\eta) + \int_a^b y\overline{\ell^*(z)}dx \tag{1.11}$$

eşitliği geçerlidir. Burada, $\ell^*(z) = (-1)^n(\overline{p_0}z)^{(n)} + (-1)^{n-1}(\overline{p_1}z)^{(n-1)} + (-1)^{n-2}(\overline{p_2}z)^{(n-2)} + \ldots + \overline{p_n}z$ *ve* $P(\xi,\eta)$,

$$\begin{aligned}\xi &= \left(y(a), y'(a), ..., y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), ..., y^{(n-1)}(b)\right),\\ \eta &= \left(z(a), z'(a), ..., z^{(n-1)}(a), z(b), z'(b), ..., z^{(n-1)}(b)\right)\end{aligned}$$

değişkenlerinin belirli bir lineer formudur.

Tanım 1.3.6: ℓ^* ifadesi ℓ'nin adjoint diferansiyel ifadesi olarak adlandırılır. Eğer $\ell^* = \ell$ eşitliği gerçeklenirse ℓ'ye selfadjoint (özeşlenik) diferansiyel ifade denir.

Teorem 1.3.7: *Reel katsayılı herhangi bir selfadjoint diferansiyel ifade çift mertebelidir ve aşağıdaki şekildedir:*

$$\ell(y) = \left(p_0 y^{(n)}\right)^{(n)} + \left(p_1 y^{(n-1)}\right)^{(n-1)} + ... + p_n y \tag{1.12}$$

Teorem 1.3.8: $\dfrac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ *ve* $f(x)$ *fonksiyonları* (a,b) *aralığında ölçülebilir ve onun her bir* $[\alpha,\beta]$ *alt aralığında integrallenebilir ise, herhangi bir* $x_0 \in (a,b)$ *noktası ve* $y_1, y_2, ...y_{2n-1}$ *keyfi sabitleri için,*

$$\left(p_0 y^{(n)}\right)^{(n)} + \left(p_1 y^{(n-1)}\right)^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

denkleminin

$$y^{[k]}(x_0) = y_k, \quad k = \overline{0, 2n-1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir tek $y(x)$ *çözümü vardır. Burada,* $y^{[k]}(x)$

ifadesi $y(x)$ fonksiyonunun k.mertebeden quasi-türevini gösterir ve

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k=\overline{1,n-1} \\ y^{[n]} &= p_0 \frac{d^n y}{dx^n}, \\ y^{[n+k]} &= p_k \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx}\left(y^{[n+k-1]}\right), \quad k=\overline{1,n} \end{aligned}$$

seklinde tanımlanır.(Naimark, 1968)

Tanım 1.3.9: λ bir kompleks parametre olmak üzere,

$$\begin{cases} \ell(y) = \lambda y \\ U_v(y) = 0, \ v = \overline{1,m} \end{cases} \tag{1.13}$$

sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir $y(x)$ çözümü varsa λ'ya bu sınır değer probleminin bir özdeğeri; $y(x)$'e de λ'ya karşılık gelen özfonksiyonu denir. (1.13) sınır değer problemi çoğunlukla $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (1.10) sınır koşulları tarafından üretilen özdeğer problemi olarak adlandırılır. (1.9) ve (1.10) tarafından üretilen operatör L ile gösterilirse bu tanımın Tanım1.2.14 ile uyumlu olduğu görülür.

Tanım 1.3.10: Tanım 1.3.9'da $n=m$ olsun. $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), ..., y_n(x,\lambda)$ fonksiyonları,

$$\ell(y) = \lambda y$$

denkleminin

$$y_i^{(j-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ise} \\ 1, & i = j \text{ ise} \end{cases}, \quad i,j = \overline{1,n}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & ... & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & ... & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

determinantına (1.13) probleminin veya ona karşılık gelen diferansiyel operatörün karakteristik fonksiyonu denir.

Teorem 1.3.11: *(1.13) probleminin özdeğerleri ile $\Delta(\lambda)$'nın sıfırları çakışır.*

Tanım 1.3.12: Herhangi bir λ özdeğeri $\Delta(\lambda)$'nın k-katlı sıfırı ise k'ya λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir; eğer özel olarak $k = 1$ ise λ'ya cebirsel olarak basit özdeğer adı verilir.

Uyarı 1.3.13: (1.13) probleminde $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ya da $U_v(y) = 0$ sınır koşullarının katsayıları λ parametresine bağlı seçilebilir. Bu durumda daha genel bir özdeğer problemi elde edilir.(Naimark ,1968)

1.4. Sturm-Liouville Operatörleri:

Tanım 1.4.1: ρ bir kompleks parametre olmak üzere,

$$\ell(y) = -\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right) + Q(t)u = \rho w(t)u, \quad t \in (a,b) \tag{1.15}$$

diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases} A_1 u(a) + B_1 u'(a) = 0 \\ A_2 u(b) + B_2 u'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine Sturm-Liouville sınır değer problemi denir. Burada A_1, B_1, A_2, B_2 reel sabitler olup $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$ koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca $p(t)$, $q(t)$ ve $w(t)$ reel değerli fonksiyonlardır.

Şimdi $p(t) > 0$, $w(t) > 0$ ve $\dfrac{dp(t)}{dt}$ ve $\dfrac{d^2}{dt^2}(p(t)w(t))$ fonksiyonlarının (a,b)'de sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$M = \int_a^b \sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}ds, \quad f(t) = \sqrt[4]{p(t)w(t)}$$

olmak üzere

$$x = \frac{1}{M}\int_a^t \sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}ds, \quad y = uf(t) \tag{1.17}$$

dönüşümü yapılırsa, (1.15) denklemi,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1) \tag{1.18}$$

denklemine; (1.16) sınır koşulları ise

$$\begin{cases} y'(0) + hy(0) = 0 \\ y'(1) + Hy(1) = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

koşullarına dönüşür. Burada, $q(x) = \dfrac{f''(x)}{f(x)} + M^2\dfrac{Q(x)}{w(x)}$, $\lambda = M^2\rho$ ve $h, H \in \mathbb{R}$ dir. (1.18)-(1.19) problemine Sturm-Liouville probleminin kanonik hali adı verilir.

$L_2(0,1)$ üzerinde, tanım kümesi

$D(L) = \{y(x) : y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları $(0,1)$ aralıklarında mutlak sürekli, $\ell y \in L_2(0,1),\ y'(0) + hy(0) = 0,\ \ y'(1) + Hy(1) = 0\}$

olan L operatörü şu şekilde tanımlansın:

$$Ly = -y'' + q(x)\,y \tag{1.20}$$

L operatörü bir lineer diferansiyel operatördür. Ayrıca kolayca görülür ki, (1.18)-(1.19) problemini L operatörü için özdeğer probleminden başka bir şey değildir. Bu şekilde tanımlı operatöre Sturm-Liouville operatörü denir. Sturm-Liouville operatörlerinin sahip olduğu en temel özellikler aşağıdaki teoremde sıralanmıştır.

Teorem 1.4.2: *a) L, $D(L)$ üzerinde kapalı, selfadjoint bir operatördür.*

b) L sınır değer problemi, mutlak değerlerine göre sıralandığında sınırsız şekilde büyüyen, sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir.

c) L'nin özdeğerleri reel sayılardır ve herhangi farklı iki özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldir, yani $\lambda_1 \neq \lambda_2$ özdeğerler ve $y(x,\lambda_1)$, $z(x,\lambda_2)$ onlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise,

$$\int_0^1 y(x,\lambda_1)\overline{z(x,\lambda_2)}dx = 0 \tag{1.21}$$

eşitliği geçerlidir.

d) Özdeğerler dizisini $\{\lambda_n\}$ ile gösterirsek, n'nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik ifade geçerlidir:

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \frac{c}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.22}$$

Burada, $c = h + H + \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)dx$ dir.

e) $u(x,\lambda)$ ve $v(x,\lambda)$ fonksiyonları (1.18) denkleminin, sırasıyla,

$$\begin{aligned} u(0,\lambda) &= 1, \quad u'(0,\lambda) = -h \\ v(1,\lambda) &= 1, \quad v'(1,\lambda) = -H \end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere, herhangi bir $f(x) \in L_2(0,1)$ *fonksiyonu için*

$$-y'' + \{q(x) - \lambda\}\, y = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{1.23}$$

denkleminin çözümü

$$y(x,\lambda) = \int_0^1 G(x,t,\lambda) f(t) dt \tag{1.24}$$

eşitliği ile verilebilir. Burada $G(x,t,\lambda)$, *Green fonksiyonudur ve*

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{cases} u(x,\lambda)v(t,\lambda), & x \leq t \\ u(t,\lambda)v(x,\lambda), & t \leq x \end{cases}$$

şeklindedir. (1.24) ile tanımlanan operatöre L'nin resolvent operatörü adı verilir ve bu operatör L'nin özdeğerleri dışında tanımlıdır.

II. BÖLÜM
DÜZ SPEKTRAL PROBLEM

2.1. Problemin Konumu ve Özellikleri:

Aşağıdaki sınır değer problemi L ile gösterilsin.

$$\ell y := -p(x)\left[p(x)y'\right]' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,d) \cup (d,\pi) \tag{2.1}$$

$$U(y) := y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \tag{2.2}$$

$$V(y) := a(\lambda)y(\pi) + b(\lambda)p(\pi)y'(\pi) = 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} y(d+0) = \beta y(d-0) \\ \left[p(x)y'(x)\right]_{x=d+0} = \beta^{-1}\left[p(x)y'(x)\right]_{x=d-0} \end{cases} \tag{2.4}$$

Burada $\alpha \in [0,\pi)$, $d \in (0,\pi)$, $\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $p(x)$, $q(x)$ fonksiyonları, $L_2(0,\pi)$ sınıfından, reel değerli fonksiyonlar ve λ kompleks parametredir. Ayrıca $\forall x \in [0,\pi]$ için $p(x) > 0$, $p(0) = 1$ ve $p^{-1}(x) \in L_2(0,\pi)$ kabul edilir. $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ ise ortak sıfıra sahip olmayan, reel katsayılı polinomlardır.

$f(\lambda) := -\dfrac{a(\lambda)}{b(\lambda)}$ yazılırsa L problemini belirleyen parametreler $p(x)$, $q(x)$ ve $f(\lambda)$ fonksiyonları ile α, d, ve β sayılarıdır. Bu açıklamanın ışığı altında L problemi, $L = L(p,q,f,\alpha,d,\beta)$ şeklinde yazılabilir. Bundan böyle, L sınır değer problemi denildiğinde (2.1)-(2.4) problemi anlaşılacaktır.

Tanım 1.3.2 ve Uyarı 1.3.13 göz önünde bulundurulursa, L'nin, sınır koşulu parametreye bağlı regüler bir sınır değer problemi olduğu görülür.

Şimdi öyle bir operatör tanımlayalım ki, onun özdeğerleri ile L sınır değer probleminin özdeğerleri çakışsın. Böylece L probleminin farklı bazı spektral özelliklerini incelemek mümkün olacaktır. $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ polinomlarını

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_m\lambda^m \\ b(\lambda) &= b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots + b_m\lambda^m \end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Aslında bu polinomların dereceleri aynı olmak zorunda değildir. Yani, a_m, b_m katsayılarının bazıları sıfır olabilir. Genelliği bozmadan, derecesi büyük olan polinomun başkatsayısı 1 alınacaktır.

$\mathcal{H}:= L_2(0,\pi)\oplus\mathbb{C}^m$ uzayını ele alalım. Bu uzay üzerinde $\|.\|_{\mathcal{H}}$ normu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\|Y\|^2_{\mathcal{H}} \quad : \quad = [\int\limits_0^d + \int\limits_d^\pi]\frac{1}{p(x)}\left|y(x)\right|^2 dx + \left|Y_1\right|^2 + \left|Y_2\right|^2 + \cdots + \left|Y_m\right|^2 \quad (2.5)$$

Burada, $Y = (y(x), Y_1, Y_2, \cdots, Y_m) \in \mathcal{H}$ dır. Açıktır ki bu norm $\mathcal{H}$ uzayında,

$$< Y, Z > := [\int\limits_0^d + \int\limits_d^\pi]\frac{1}{p(x)}y(x)\overline{z(x)}dx + Y_1\overline{Z_1} + Y_2\overline{Z_2} + \cdots + Y_m\overline{Z_m} \qquad (2.6)$$

iç çarpımından elde edilen normdur ve $\mathcal{H}$, bu norma göre bir Hilbert uzayıdır.

$\mathcal{H}$ uzayı üzerinde, tanım kümesi

$D(T) = \{Y \in \mathcal{H} : Y = (y(x), Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)\,,\ y(x)$ ve $p(x)y'(x)$ fonksiyonları $(0,d)$ ve (d,π) aralıklarının her birinde mutlak sürekli, $\ell y \in L_2(0,\pi)$,

$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, $Y_1 = a_m y(\pi) + b_m p(\pi)y'(\pi)$, $y(d+0) = \beta y(d-0)$, $\left[p(x)y'(x)\right]_{x=d+0} = \beta^{-1}\left[p(x)y'(x)\right]_{x=d-0}\}$

olan T operatörü şu şekilde tanımlansın: $T\,(Y) = Z = (z(x), Z_1, Z_2, \cdots, Z_m)\,,$ burada $z(x) = \ell y(x)$, $Z_i = Y_{i+1} - a_{m-i}y(\pi) + b_{m-i}p(\pi)y'(\pi)$ $\left(i = \overline{1, m-1}\right)$ ve $Z_m = -a_0 y(\pi) - b_0 p(\pi)y'(\pi)$ dır.

Teorem 2.1.1: *T operatörünün özdeğerleri ile (2.1)-(2.4) (veya L) sınır değer probleminin özdeğerleri katlılıkları ile birlikte çakışır. Yani, L'nin özdeğerleri kümesi $\sigma_p(L)$ ile gösterilirse, $\sigma_p(L) = \sigma_p(T)$ eşitliği geçerlidir.*

İspat: Kabul edelim ki λ, T operatörünün bir özdeğeri ve

$$Y = (y(x), Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$$

ise ona karşılık gelen özvektörüdür. Buna göre $Y \in D(T)$ olduğundan, $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$ ve $y(d+0) = \beta y(d-0)$, $\left[p(x)y'(x)\right]_{x=d+0} = \beta^{-1}\left[p(x)y'(x)\right]_{x=d-0}$

koşulları sağlanır. Ayrıca, $TY = \lambda Y$ eşitliğinden $\ell y(x) = \lambda y(x)$ olduğu çıkar. Dolayısıyla, T operatörünün bu λ özdeğeri ve ona karşılık gelen Y özfonksiyonunun $y(x)$ bileşeni için (2.1), (2.2) ve (2.4) koşulları gerçeklenir. (2.3) koşulunun sağlandığı da, yani, $a(\lambda)y(\pi) + b(\lambda)p(\pi)y'(\pi) = 0$ eşitliğinin doğruluğu da gösterilebilirse, λ sayısının (2.1)-(2.4) sınır değer probleminin de bir özdeğeri olduğu ispatlanmış olur. Bunun için yine $TY = \lambda Y$ eşitliğini kullanalım. T operatörünün tanımından aşağıdaki eşitlikler sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\lambda Y_1 &= Y_2 - a_{m-1}y(\pi) - b_{m-1}p(\pi)y'(\pi) \\
\lambda Y_2 &= Y_3 - a_{m-2}y(\pi) - b_{m-2}p(\pi)y'(\pi) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\lambda Y_{m-1} &= Y_m - a_1 y(\pi) - b_1 p(\pi)y'(\pi) \\
\lambda Y_m &= -a_0 y(\pi) - b_0 p(\pi)y'(\pi)
\end{aligned}$$

Bu eşitliklerdeki Y_i, $i = 2, 3, ..., m$ ifadeleri yukardan aşağı doğru sırayla yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\lambda^m Y_1 + \left(a_{m-1}\lambda^{m-1} + a_{m-2}\lambda^{m-2} + ... + a_1\lambda + a_0\right) y(\pi) + \\
&+ \left(b_{m-1}\lambda^{m-1} + b_{m-2}\lambda^{m-2} + ... + b_1\lambda + b_0\right) p(\pi)y'(\pi) = 0 \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan $D(T)$'nin tanımında ki,

$$Y_1 = a_m y(\pi) + b_m p(\pi)y'(\pi)$$

bağıntısı (2.7) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$a(\lambda)y(\pi) + b(\lambda)p(\pi)y'(\pi) = 0$$

elde edilir. Böylece, λ sayısının (2.1)-(2.4) (veya L) sınır değer probleminin de bir özdeğeri olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi de, L sınır değer probleminin her bir özdeğerinin T operatörünün de bir özdeğeri olduğunu gösterelim. Eğer bir λ sayısı L'nin bir özdeğeri ve $y(x)$ ona karşılık gelen özfonksiyon ise (2.1)-(2.4) eşitlikleri sağlanacaktır. Buna göre, $Y_1 = a_m y(\pi) + b_m p(\pi) y'(\pi)$ olmak üzere $Y = (y(x), Y_1, Y_2, \cdots, Y_m) \in \mathcal{H}$ elemanını göz önüne alırsak $Y \in D(T)$ ve $T(Y) = \lambda Y$ olduğunu kolayca görebiliriz. Dolayısıyla λ, T'nin de bir özdeğeri olur.

2.2. Çözümlerin Asimptotik İfadeleri:

Aşağıdaki koşulları sağlayan $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna (2.1) denkleminin (2.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü adı verilmektedir.

i) $y(x,\lambda)$ ve $p(x)y'(x,\lambda)$ fonksiyonları $(0,d)$ ve (d,π) aralıklarının her birinde mutlak sürekli,

ii) $\ell(y) \in L_2(0,\pi)$,

iii) $y(x,\lambda)$, $(0,d)$ ve (d,π) aralıklarında (2.1) denklemini ve $x=d$ noktasında (2.4) koşullarını gerçekler.

Şimdi, $\varphi(x,\lambda)$ ile (2.1) denkleminin

$$\begin{pmatrix} \varphi(0,\lambda) \\ \varphi'(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

başlangıç koşullarını ve (2.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümünü işaret edelim.

Lemma 2.2.1: *$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu ile aşağıdaki integral denklemlerin çözümleri çakışır:*

$x<d$ için,

$$\varphi(x,\lambda) = \sin\alpha\cos\rho\gamma(x) - \cos\alpha\frac{\sin\rho\gamma(x)}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)}{\rho} p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt \tag{2.9}$$

$x>d$ için,

$$\begin{aligned}
\varphi(x,\lambda) &= \beta^{+}\left[\sin\alpha\cos\rho\gamma(x) - \cos\alpha\frac{\sin\rho\gamma(x)}{\rho}\right] + \\
&+\beta^{-}\left[\sin\alpha\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right) - \cos\alpha\frac{\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)}{\rho}\right] + \\
&+\frac{1}{\rho}\int_0^d \beta^{+}\sin\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt + \\
&+\frac{1}{\rho}\int_0^d \beta^{-}\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt + \\
&+\frac{1}{\rho}\int_d^x \sin\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Burada, $\gamma(x) = \int_0^x p^{-1}(t)dt, \ \ \rho = \sqrt{\lambda}, \ \ \beta^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\beta \pm \beta^{-1}\right)$ *dır.*

İspat: Öncelikle $\varphi(x,\lambda)$ çözümünün varlığını ve tekliğini gösterelim. (2.1) denklemini şu şekilde yeniden yazalım:

$$-\left[p(x)y'\right]' + \frac{q(x)}{p(x)}y = \frac{1}{p(x)}\lambda y$$

$p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarına konulan koşullar göz önüne alınırsa, Teorem 1.3.8'e göre bu denklemin (2.8) başlangıç koşullarını sağlayan bir tek $\varphi(x,\lambda)$ çözümü vardır.

Şimdi, $(0,d)$ aralığında (2.1) denkleminin çözümünü bulalım. Açıktır ki, $y_1(x,\lambda) = \exp\left[i\rho\gamma(x)\right]$ ve $y_2(x,\lambda) = \exp\left[-i\rho\gamma(x)\right]$ fonksiyonları,

$$-p(x)\left[p(x)y'\right]' = \lambda y \tag{2.11}$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. O halde bu denklemin genel çözümü,

$$y(x,\lambda) = C_1 \exp\left[i\rho\gamma(x)\right] + C_2 \exp\left[-i\rho\gamma(x)\right]$$

şeklindedir. (2.1) denkleminin çözümünü bulmak için bu çözüme Lagrange'ın sabitlerin değişimi metodu uygulanır ve elde edilen

$$\begin{aligned} C_1'(x)\exp\left[i\rho\gamma(x)\right] + C_2'(x)\exp\left[-i\rho\gamma(x)\right] &= 0 \\ C_1'(x)\exp\left[i\rho\gamma(x)\right] - C_2'(x)\exp\left[-i\rho\gamma(x)\right] &= \frac{p^{-1}(x)q(x)y(x,\lambda)}{i\rho} \end{aligned}$$

sistemi çözülerek yerine yazılırsa,

$$y(x,\lambda) = C_1 e^{i\rho\gamma(x)} + C_2 e^{-i\rho\gamma(x)} + \frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho\left(\gamma(x) - \gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)y(t,\lambda)dt \tag{2.12}$$

integral denklemi elde edilir. (2.8) başlangıç koşulları ve $p(0) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}\left(\sin\alpha - \frac{1}{i\rho}\cos\alpha\right) \\ C_2 &= \frac{1}{2}\left(\sin\alpha + \frac{1}{i\rho}\cos\alpha\right) \end{aligned}$$

bulunur. C_1, C_2 katsayılarının (2.12)'de yerine yazılmasıyla

$$\varphi(x,\lambda)=\sin\alpha\cos\rho\gamma(x)-\cos\alpha\frac{\sin\rho\gamma(x)}{\rho}+\frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt$$

denklemi elde edilir. Böylece (2.9) ispatlanır.

(2.10) eşitliğini ispatlamak için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunu (d,π) aralığına (2.4) sıçrama koşullarını da sağlayacak şekilde devam ettirmek gerekir. Bunun için $\varphi(x,\lambda)$, (d,π) aralığında aşağıdaki şekilde aransın:

$$\varphi(x,\lambda)=\widehat{C}_1\cos\rho\gamma(x)+\widehat{C}_2\frac{\sin\rho\gamma(x)}{\rho}+\frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt \tag{2.13}$$

(2.9) ve (2.13) eşitliklerini kullanarak,
$x<d$ için,

$$\begin{aligned} p(x)\varphi'(x,\lambda) &= -\rho\sin\alpha\sin\rho\gamma(x)-\cos\alpha\cos\rho\gamma(x)+\\ &+\int_0^x \cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt \end{aligned}$$

ve $x>d$ için,

$$\begin{aligned} p(x)\varphi'(x,\lambda) &= -\widehat{C}_1\rho\sin\rho\gamma(x)+\widehat{C}_2\cos\rho\gamma(x)+\\ &+\int_0^x \cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (2.4) eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \widehat{C}_1\cos\rho\gamma(d)+\widehat{C}_2\frac{\sin\rho\gamma(d)}{\rho} &= -\frac{1}{\rho}\int_0^d \sin\rho\left(\gamma(d)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt+\\ &+\beta\left\{\sin\alpha\cos\rho\gamma(d)-\cos\alpha\frac{\sin\rho\gamma(d)}{\rho}\right\}+\\ &+\frac{\beta}{\rho}\int_0^d \sin\rho\left(\gamma(d)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt\\ \widehat{C}_1\rho\sin\rho\gamma(d)-\widehat{C}_2\cos\rho\gamma(d) &= \int_0^d \cos\rho\left(\gamma(d)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt+\\ &+\beta^{-1}\left\{\rho\sin\alpha\sin\rho\gamma(d)+\cos\alpha\cos\rho\gamma(d)\right\}-\\ &-\beta\int_0^d \cos\rho\left(\gamma(d)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt \end{aligned}$$

denklem sistemi ortaya çıkar. Bu sistemin $\widehat{C}_1$ ve $\widehat{C}_2$ bilinmeyenlerine göre çözülmesi ve bulunan ifadelerin (2.13)' de yerine yazılmasıyla (2.10) eşitliği elde edilir. Böylece ispatın birinci bölümü tamamlanır. Yani, (2.1) denkleminin (2.8) başlangıç koşullarını ve (2.4) süreksizlik koşullarını sağlayan her bir çözümü, (2.9), (2.10) integral denklemlerinin bir çözümüdür.

Şimdi de, $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (2.9), (2.10) integral denklemlerinin bir çözümü olarak verilsin. $\varphi(x,\lambda)$'nın (2.1), (2.4) ve (2.8) eşitliklerini sağladığı gösterilmelidir. $x<d$ için (2.9) ile verilen $\varphi(x,\lambda)$'nın (2.1) ve (2.9)'u sağladığı açıktır. $\widehat{C}_1$ ve $\widehat{C}_2$ katsayılarının bulunuş yöntemine bakılırsa, (2.4) sıçrama koşulunun da sağlanacağı kolayca görülür. Dolayısıyla, (2.10)'da verilen $\varphi(x,\lambda)$'nın (2.1)'i sağladığı gösterilirse ispat tamamlanır. (2.10)'un her iki yanı türevlenirse,

$$\begin{aligned}
&p(x)\varphi'(x,\lambda)=\beta^{+}\left[-\rho\sin\alpha\sin\rho\gamma(x)-\cos\alpha\cos\rho\gamma(x)\right]+\\
&+\beta^{-}\left[\rho\sin\alpha\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)+\cos\alpha\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)\right]+\\
&+\int_0^d\beta^{+}\cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt-\\
&-\int_0^d\beta^{-}\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt+\\
&+\int_d^x\cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten tekrar türev alınırsa,

$$\begin{aligned}
&p(x)\left(p(x)\varphi'(x,\lambda)\right)'=\beta^{+}\left[-\rho^2\sin\alpha\cos\rho\gamma(x)+\rho\cos\alpha\sin\rho\gamma(x)\right]+\\
&+\beta^{-}\left[-\rho^2\sin\alpha\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)+\rho\cos\alpha\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)\right]-\\
&-\rho\int_0^d\beta^{+}\sin\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt-\\
&-\rho\int_0^d\beta^{-}\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt-\\
&-\rho\int_d^x\sin\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt+q(x)\varphi(x,\lambda)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da,

$$-p(x)\left(p(x)\varphi'(x,\lambda)\right)'+q(x)\varphi(x,\lambda)=\rho^2\varphi(x,\lambda)$$

eşitliğinin doğru olduğu görülür. Böylece, (2.9), (2.10) integral denklemlerinin çözümü, (2.1) denkleminin (2.8) başlangıç koşullarını ve (2.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü ile çakışır.

Şimdi de $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun, $|\rho|$'nın yeterince büyük değerlerindeki davranışını öğrenelim.

Lemma 2.2.2: *$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu için, $|\rho| \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir:*

$x < d$ ise

$$\varphi(x,\lambda) = \sin\alpha\cos\rho\gamma(x) - \cos\alpha\frac{\sin\rho\gamma(x)}{\rho} + O\left(\frac{\exp\tau\gamma(x)}{\rho}\right) \tag{2.14}$$

ve

$$p(x)\varphi'(x,\lambda) = -\rho\sin\alpha\sin\rho\gamma(x) - \cos\alpha\cos\rho\gamma(x) + O\left(\exp\tau\gamma(x)\right) \tag{2.15}$$

$x > d$ ise

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda) &= \beta^{+}\left[\sin\alpha\cos\rho\gamma(x) - \cos\alpha\frac{\sin\rho\gamma(x)}{\rho}\right] \\ &\quad +\beta^{-}\left[\sin\alpha\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right) - \cos\alpha\frac{\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)}{\rho}\right] \\ &\quad +O\left(\frac{\exp\tau\gamma(x)}{\rho}\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

ve

$$\begin{aligned}p(x)\varphi'(x,\lambda) &= -\beta^{+}\left[\rho\sin\alpha\sin\rho\gamma(x) + \cos\alpha\cos\rho\gamma(x)\right] + \\ &\quad +\beta^{-}\left[\rho\sin\alpha\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right) + \cos\alpha\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)\right] \\ &\quad + O\left(\exp\tau\gamma(x)\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Burada, $\tau = |\operatorname{Im}\rho|$ dır.

İspat: $x < d$ olsun. Herhangi z kompleks sayısı için $|\sin z| \le \exp|\operatorname{Im} z|$ ve $|\cos z| \le \exp|\operatorname{Im} z|$ eşitsizlikleri geçerli olduğundan, (2.9) integral denkleminden yararlanarak, $\forall x \in (0,d)$ için

$$\exp\left(-\tau\gamma(x)\right)|\varphi(x,\lambda)| \le 1 + \frac{1}{|\rho|} + \frac{1}{|\rho|}\int_0^x \exp\left(-\tau\gamma(t)\right)|\varphi(t,\lambda)|\,|q(t)|\left|p^{-1}(t)\right|dt$$

değerlendirmesi yapılabilir.

$$h(\lambda) := \sup\left\{\exp\left(-\tau\gamma(x)\right)|\varphi(x,\lambda)| : x \in (0,d)\right\}$$

alınırsa

$$h(\lambda) \leq 1 + \frac{1}{|\rho|} + \frac{C}{|\rho|} h(\lambda)$$

olur. Burada C sabittir. Son eşitsizlik düzenlenirse $h(\lambda) = O(1)$ olduğu kolayca görülür. O halde $\forall t \in (0, d)$ ve her λ için

$$|\varphi(t, \lambda)| \leq C \exp \tau\gamma(t) \tag{2.18}$$

geçerlidir. (2.18) eşitsizliği (2.9)'da kullanılırsa (2.14) ispatlanır.

$x > d$ olsun. (2.10) integral denkleminden yararlanarak, $\forall x \in (d, \pi)$ için

$$\begin{aligned} |\varphi(x, \lambda)| \leq & \left(1 + \frac{1}{|\rho|}\right) \left(\beta^+ + \left|\beta^-\right| \exp \tau \left|2\gamma(d) - \gamma(x)\right|\right) + \\ & + \frac{\beta^+}{|\rho|} \int_0^d \exp \tau \left(\gamma(x) - \gamma(t)\right) |\varphi(t, \lambda)| \, |q(t)| \left|p^{-1}(t)\right| dt + \\ & + \frac{\left|\beta^-\right|}{|\rho|} \int_0^d \exp \tau \left|2\gamma(d) - \gamma(x) - \gamma(t)\right| |\varphi(t, \lambda)| \, |q(t)| \left|p^{-1}(t)\right| dt \\ & \frac{1}{|\rho|} \int_d^x \exp \tau \left(\gamma(x) - \gamma(t)\right) |\varphi(t, \lambda)| \, |q(t)| \left|p^{-1}(t)\right| dt \end{aligned}$$

yazılabilir. $\gamma(x)$ artan fonksiyon olduğundan $|2\gamma(d) - \gamma(x)| < \gamma(x)$ eşitsizliği doğrudur. Ayrıca $\forall x \in (0, d)$ için $\exp\left(-\tau\gamma(t)\right) |\varphi(x, \lambda)| \leq C$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \exp\left(-\tau\gamma(x)\right) |\varphi(x, \lambda)| \leq & \left(\beta^+ + \left|\beta^-\right|\right) \left(1 + \frac{1}{|\rho|} + \frac{C}{|\rho|} \int_0^d |q(t)| \left|p^{-1}(t)\right| dt\right) + \\ & + \frac{1}{|\rho|} \int_d^x \exp\left(-\tau\gamma(t)\right) |\varphi(t, \lambda)| \, |q(t)| \left|p^{-1}(t)\right| dt \end{aligned}$$

elde edilir. $x < d$ durumunda yapıldığı gibi

$$h(\lambda) := \sup \left\{\exp\left(-\tau\gamma(x)\right) |\varphi(x, \lambda)| : x \in (d, \pi)\right\}$$

alınırsa,

$$h(\lambda) \leq \left(\beta^+ + \left|\beta^-\right|\right) \left(1 + \frac{C_1}{|\rho|}\right) + \frac{C_1}{|\rho|} h(\lambda)$$

olur. Burada $C_1 = 1 + C \displaystyle\int_0^\pi |q(t)| \left|p^{-1}(t)\right| dt$ dir. Son eşitsizliğin düzenlenmesiyle $|\rho|$'nın büyük değerlerinde $h(\lambda) = O(1)$ elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in (d, \pi)$ ve her λ için

$$\varphi(t, \lambda) = O(\exp \tau\gamma(t)) \tag{2.19}$$

olur. (2.19) bağıntısı (2.10)'da kullanılırsa (2.16) ispatlanır. (2.15) ve (2.17) eşitliklerinin de doğruluğunu göstermek için aşağıdaki integral denklemlere başvuralım:

$x < d$ için,

$$\begin{aligned} p(x)\varphi'(x,\lambda) &= -\rho\sin\alpha\sin\rho\gamma(x) - \cos\alpha\cos\rho\gamma(x) + \\ &+ \int_0^x \cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt \end{aligned}$$

$x > d$ için,

$$\begin{aligned} &p(x)\varphi'(x,\lambda) = \beta^+\left[-\rho\sin\alpha\sin\rho\gamma(x) - \cos\alpha\cos\rho\gamma(x)\right] + \\ &+\beta^-\left[\rho\sin\alpha\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right) + \cos\alpha\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)\right] + \\ &+\int_0^d \beta^+\cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt - \\ &-\int_0^d \beta^-\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt + \\ &+\int_d^x \cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt \end{aligned}$$

Bu denklemlerin sağ tarafındaki integralli terimlerde (2.18) ve (2.19) eşitsizlikleri kullanılırsa;

$x < d$ için,

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x \cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt\right| &\leq \int_0^x \left|\cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)\right|dt \\ &\leq \int_0^x \left|e^{\tau[\gamma(x)-\gamma(t)]}p^{-1}(t)q(t)e^{\tau\gamma(t)}\right|dt \\ &\leq e^{\tau\gamma(x)}\int_0^\pi \left|p^{-1}(t)q(t)\right|dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\int_0^x \cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt = O\left(\exp\tau\gamma(x)\right)$$

olduğunu gösterir. $x > d$ için de benzer şekilde,

$$\begin{aligned} &\int_0^d \beta^+\cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt - \\ &-\int_0^d \beta^-\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt + \\ &+\int_d^x \cos\rho\left(\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\varphi(t,\lambda)dt = O\left(\exp\tau\gamma(x)\right) \end{aligned}$$

olacağı açıktır. Dolayısıyla, (2.15) ve (2.17) eşitliklerinin de doğruluğu gösterilmiş olur. Böylece lemmanın ispatı tamamlanır.

2.3. Karakteristik Fonksiyon ve Özellikleri:

Bu bölümde, sıfırları (2.1)-(2.4) sınır değer probleminin özdeğerleri olan bir fonksiyon tanımlanarak bu fonksiyonun bazı özellikleri incelenecektir. Açıktır ki, bu özellikler problemi belirleyen parametrelere bağlıdır. Özellikle $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ polinomlarının yapısı bu fonksiyonun özelliklerinin belirlenmesinde önemli rol oynar. Öncelikle, lineer diferansiyel denklemlerin genel teorisinde de verilen ve burada da kullanılacak olan Wronskian determinantı kavramından bahsedelim.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (2.1) denkleminin herhangi iki çözümü olmak üzere,

$$W[\varphi,\psi] := \begin{vmatrix} \varphi(x,\lambda) & \psi(x,\lambda) \\ p(x)\varphi'(x,\lambda) & p(x)\psi'(x,\lambda) \end{vmatrix} \tag{2.20}$$
$$= p(x)\left\{\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\right\}$$

eşitliği ile tanımlanan $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonuna $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının Wronskian determinantı adı verilir. (2.1) tipinde bir diferansiyel denklemin çözümleri için yazılan Wronskian determinantı bazı önemli özelliklere sahiptir. Önce bunlardan bahsedilmelidir.

Lemma 2.3.1: *$W[\varphi,\psi]$ fonksiyonu $[0,\pi]\setminus\{d\}$ kümesinde x'e bağlı değil; sadece λ parametresine bağlıdır.*

İspat: (2.20) eşitliğinin her iki yanı $[0,d)$ ve $(d,\pi]$ aralıklarında x'e göre türevlenirse,

$$\frac{d}{dx}W[\varphi,\psi] = \varphi(x,\lambda)\left[p(x)\psi'(x,\lambda)\right]' - \psi(x,\lambda)\left[p(x)\varphi'(x,\lambda)\right]' \tag{2.21}$$

elde edilir. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (2.1) denkleminin çözümleri olduğundan, son eşitlikten, $\forall x \in [0,d)\cup(d,\pi]$ için,

$$\frac{d}{dx}W[\varphi,\psi] = \frac{\varphi(x,\lambda)}{p(x)}\left\{q(x)-\lambda\right\}\psi(x,\lambda) - \frac{\psi(x,\lambda)}{p(x)}\left\{q(x)-\lambda\right\}\varphi(x,\lambda) \equiv 0$$

olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonu, $[0,d)$ ve $(d,\pi]$ aralıklarında x değişkenine göre sabit fonksiyondur. Başka bir deyimle, $W[\varphi,\psi]$,

$[0, \pi]$ aralığında, x'e göre parçalı sabit bir fonksiyondur. Diğer yandan, (2.4) sıçrama koşullarına göre

$$\begin{aligned}
&\varphi(d+0,\lambda)p(d+0)\psi'(d+0,\lambda) - \psi(d+0,\lambda)p(d+0)\varphi'(d+0,\lambda) \\
&= \beta\varphi(d-0,\lambda)\beta^{-1}p(d-0)\psi'(d-0,\lambda) - \beta^{-1}p(d-0)\varphi'(d-0,\lambda)\beta\psi(d-0,\lambda) \\
&= \varphi(d-0,\lambda)p(d-0)\psi'(d-0,\lambda) - p(d-0)\varphi'(d-0,\lambda)\psi(d-0,\lambda)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$W\left[\varphi,\psi\right]\big|_{d+0} = W\left[\varphi,\psi\right]\big|_{d-0}$$

eşitliği doğrudur. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarını daha özel olarak seçelim. Şöyle ki, bu fonksiyonlar, (2.1) denkleminin, sırasıyla, (2.8) ve

$$\begin{pmatrix} \psi(\pi,\lambda) \\ p(\pi)\psi'(\pi,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b(\lambda) \\ a(\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

başlangıç koşullarını ve (2.4) sıçrama koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonuna L probleminin karakteristik fonksiyonu adı verilir ve bu fonksiyon sadece λ'ya bağlı olduğundan, $\Delta(\lambda)$ ile gösterilebilir.

Lemma2.3.1'in ışığı altında,

$$\Delta(\lambda) = W\left[\varphi,\psi\right]\big|_{x=\pi} = a(\lambda)\varphi(\pi,\lambda) + b(\lambda)p(\pi)\varphi'(\pi,\lambda) \tag{2.23}$$

veya

$$\Delta(\lambda) = W\left[\varphi,\psi\right]\big|_{x=0} = \psi(0,\lambda)\cos\alpha + \psi'(0,\lambda)\sin\alpha \tag{2.24}$$

yazılabilir.

Lemma 2.3.2: $\Delta(\lambda)$ *fonksiyonu* $\frac{1}{2}$*.mertebeden bir tam fonksiyondur.*

İspat: $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir tam fonksiyon olması (2.23) veya (2.24) eşitliklerinden açıktır. Zira, $\varphi(\pi,\lambda)$ ve $\varphi'(\pi,\lambda)$ birer tam fonksiyon, $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ ise birer polinomdur.

Diğer yandan, Lemma 2.2.2'deki (2.16) ve (2.17) eşitlikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned}
|\varphi(\pi,\lambda)| &\le C\exp\tau\gamma(\pi) \\
&\le C\exp|\rho|\,\gamma(\pi)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |p(\pi)\varphi'(\pi,\lambda)| &\leq C\,|\rho|\exp\tau\gamma(\pi) \\ &\leq C\,|\rho|\exp|\rho|\,\gamma(\pi) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler (2.23)'de değerlendirilir ve $\rho = \sqrt{\lambda}$ olduğu göz önüne alınırsa $\Delta(\lambda)$'nın $\frac{1}{2}$.mertebeden tam fonksiyon olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.3: $\Delta(\lambda)$ *fonksiyonunun sıfırları ile L sınır değer probleminin özdeğerleri çakışır.*

İspat: Kabul edelim ki λ_0, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırıdır. Bu durumda $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu, (2.1)-(2.4) koşullarını sağlayacağından, L'nin bir özfonksiyonu olur. Dolayısıyla λ_0, L'nin bir özdeğeridir.

Tersine, λ_0, L'nin bir özdeğeri, $y(x,\lambda_0)$ da ona karşılık gelen özfonksiyon olsun. $y(x,\lambda_0)$ ve $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonlarının Wronskian determinantını yazalım:

$$W[\varphi,y] \equiv W\,[\varphi,y]|_{x=0} = y(0,\lambda_0)\cos\alpha + y'(0,\lambda_0)\sin\alpha \tag{2.25}$$

$y(x,\lambda_0)$, bir özfonksiyon oldduğundan,(2.25) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşittir. Bu da $W[\varphi,y]$'nın sıfıra özdeş olduğunu gösterir. Buna göre,

$$W\,[\varphi,y]|_{x=\pi} = \varphi(\pi,\lambda_0)p(\pi)y'(\pi,\lambda_0) - y(\pi,\lambda_0)p(\pi)\varphi'(\pi,\lambda_0) = 0 \tag{2.26}$$

olur. $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ polinomları ortak sıfıra sahip olmadıklarından $a(\lambda_0)$ ve $b(\lambda_0)$ aynı anda sıfır olamaz. $b(\lambda_0) \neq 0$ olsun. ($a(\lambda_0) \neq 0$ olduğunda da benzer işlem yapılabilir) (2.26) düzenlenir ve $y(x,\lambda_0)$'ın (2.3) sınır koşulunu sağladığı hatırlanırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= -\varphi(\pi,\lambda_0)\frac{a(\lambda_0)}{b(\lambda_0)}y(\pi,\lambda_0) - y(\pi,\lambda_0)p(\pi)\varphi'(\pi,\lambda_0) \\ &= y(\pi,\lambda_0)\left\{-\varphi(\pi,\lambda_0)\frac{a(\lambda_0)}{b(\lambda_0)} - p(\pi)\varphi'(\pi,\lambda_0)\right\} \\ &= -\frac{y(\pi,\lambda_0)}{b(\lambda_0)}\left\{a(\lambda_0)\varphi(\pi,\lambda_0) + b(\lambda_0)p(\pi)\varphi'(\pi,\lambda_0)\right\} \end{aligned} \tag{2.27}$$

elde edilir. $b(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan $y(\pi,\lambda_0) = 0$ olamaz. Çünkü bu durumda (2.3) sınır koşulundan $p(\pi)y'(\pi,\lambda_0) = 0$ olur. Bu ise (2.1) denkleminin çözümünün tekliğinden dolayı $y(x,\lambda_0)\equiv 0$ olması demektir. Oysa ki $y(x,\lambda_0)$ bir özfonksiyondur. Dolayısıyla (2.27)'den,

$$a(\lambda_0)\varphi(\pi,\lambda_0)+b(\lambda_0)p(\pi)\varphi'(\pi,\lambda_0)=0$$

bulunur. Bu ise λ_0'ın $\Delta(\lambda)$'nın bir sıfırı olduğunu gösterir.

Lemma2.3.3 gösterir ki, L probleminin özdeğerlerini $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarında aramak gerekir. Böylece L'nin özdeğerlerinin bulunması problemi $\Delta(\lambda)$'nın sıfırlarının bulunması problemine indirgenmiş olur.

Lemma2.2.2'yi ve (2.23) eşitliğini kullanarak $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun $|\lambda|$'nın büyük değerlerindeki davranışını öğrenebiliriz. Şöyle ki, (2.16) ve (2.17) eşitliklerini (2.23)'de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)=\beta^{+}\{a(\lambda)&\left(\sin\alpha\cos\rho\gamma(\pi)-\cos\alpha\frac{\sin\rho\gamma(\pi)}{\rho}\right)\\ &-b(\lambda)\left[\rho\sin\alpha\sin\rho\gamma(\pi)+\cos\alpha\cos\rho\gamma(\pi)\right]\}\\ &+\beta^{-}\{a(\lambda)\left(\sin\alpha\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)-\cos\alpha\frac{\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)}{\rho}\right)\\ &+b(\lambda)\left[\rho\sin\alpha\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)+\cos\alpha\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)\right]\}\\ &+a(\lambda)O\left(\frac{\exp\tau\gamma(\pi)}{\rho}\right)+b(\lambda)O\left(\exp\tau\gamma(\pi)\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitlik düzenlenirse aşağıdaki ifadenin doğru olduğu kolayca görülür:

$$\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+R(\lambda) \tag{2.28}$$

Burada, $\alpha\neq 0$ iken,

$$\frac{\Delta_0(\lambda)}{\sin\alpha}=\begin{cases}\lambda^{m+1}\left(-\beta^{+}\frac{\sin\rho\gamma(\pi)}{\rho}+\beta^{-}\frac{\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)}{\rho}\right), & derb(\lambda)\geq dera(\lambda)\\ \lambda^{m}\left[\beta^{+}\cos\rho\gamma(\pi)+\beta^{-}\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)\right], & dera(\lambda)>derb(\lambda)\end{cases} \tag{2.29}$$

ve $\alpha=0$ iken,

$$\Delta_0(\lambda)=\begin{cases}\lambda^{m}\left[-\beta^{+}\cos\rho\gamma(\pi)+\beta^{-}\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)\right], & derb(\lambda)\geq dera(\lambda)\\ \lambda^{m}\left(-\beta^{+}\frac{\sin\rho\gamma(\pi)}{\rho})-\beta^{-}\frac{\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)}{\rho}\right), & dera(\lambda)>derb(\lambda)\end{cases} \tag{2.29'}$$

$$R(\lambda)=\begin{cases} O(\lambda^{m}\exp\tau\gamma(\pi)), & \alpha\neq 0,\ derb(\lambda)\geq dera(\lambda)\\ O(\lambda^{m-\frac{1}{2}}\exp\tau\gamma(\pi)), & \alpha\neq 0,\ dera(\lambda)>derb(\lambda)\\ O(\lambda^{m-\frac{1}{2}}\exp\tau\gamma(\pi)), & \alpha=0,\ derb(\lambda)\geq dera(\lambda)\\ O(\lambda^{m-1}\exp\tau\gamma(\pi)),, & \alpha=0,\ dera(\lambda)>derb(\lambda)\end{cases} \tag{2.30}$$

ve $m=\max\{derb(\lambda),dera(\lambda)\}$ dır.

2.4. Özdeğerler ve Özfonksiyonlar:

Düz spektral problemin çözümünde temel amaç, verilen sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bulunmasıdır. II.Bölümün son kısmı olan bu bölümde, (2.1)-(2.4) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bazı temel özellikleri araştırılacaktır. Buraya kadar olan tüm çalışmanın nihayi amacı, bu bölümün temel teoremi olan Teorem2.4.2'yi ispatlayabilmektir.

Öncelikle, $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ polinomlarının bazı özel durumlarında daha iyi sonuçlar alındığını aşağıdaki teoremle gösterelim:

Teorem 2.4.1: $m = \max\{dera(\lambda), derb(\lambda)\} \leq 1$ *ise*

a) L sınır değer problemi bir selfadjoint operatör üretir.

b) L'nin tüm özdeğerleri reeldir ve ayrıca λ_1*,* λ_2 *gibi herhangi farklı iki özdeğere karşılık gelen* $y(x,\lambda_1)$, $y(x,\lambda_2)$ *özfonksiyonları*

$$[\int_0^d + \int_d^\pi]\frac{1}{p(x)}y(x,\lambda_1)\overline{y(x,\lambda_2)}dx + \frac{Y_1\overline{Y_2}}{a_0b_1 - a_1b_0} = 0 \tag{2.31}$$

eşitliğini sağlarlar. Burada, $Y_1 = a_1y(\pi,\lambda_1) + b_1p(\pi)y'(\pi,\lambda_1)$ *ve* $Y_2 = a_1y(\pi,\lambda_2) + b_1p(\pi)y'(\pi,\lambda_2)$*'dır.*

c) Her bir λ_n *özdeğeri için* $\Delta'(\lambda_n) \neq 0$ *dır. Yani, özdeğerler cebirsel olarak basittir.*

İspat: $p(x) = 1$ olduğunda, yani klasik Sturm-Liouville diferansiyel denklemi için, bu teoremin ispatı, $m = 0$ iken R. Amirov(2006) tarafından; $m = 1$ iken de R. Amirov, A. S. Özkan ve B. Keskin(2009) tarafından verilmiştir. Burada da, benzer yöntemler kullanılarak $m = 1$ için ayrıntılı ispat verilecektir.

$a(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, $b(\lambda) = b_0 + b_1\lambda$ alalım.

$a)$ 2.1.'de yaptığımız gibi, $\mathcal{H} = L_2(0,\pi) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayını ve bu uzay

üzerindeki,

$$\langle Y, Z\rangle := [\int_0^d + \int_d^\pi]\frac{1}{p(x)}y(x)\overline{z(x)}dx + \frac{Y_1\overline{Z_1}}{a_0b_1 - a_1b_0} \tag{2.32}$$

iççarpımı göz önüne alalım. Burada $Y = (y(x), Y_1)$, $Z = (z(x), Z_1) \in \mathcal{H}$ ve $a_0b_1 - a_1b_0 > 0$ dır. $\mathcal{H}$ üzerinde T operatörünü, $D(T) = \{Y \in \mathcal{H}$: $y(x)$ ve $p(x)y'(x)$, $[0,d)$ ve $(d,\pi]$ aralıklarında mutlak sürekli, $\ell y \in L_2(0,\pi)$, $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, $Y_1 = a_1y(\pi) + b_1p(\pi)y'(\pi)$, $y(d+0) = \beta y(d-0)$, $[p(x)y'(x)]_{x=d+0} = \beta^{-1}[p(x)y'(x)]_{x=d-0}\}$ tanım kümesi üzerinde,

$$T(Y) := \begin{pmatrix} \ell y(x) \\ -a_0y(\pi) - b_0p(\pi)y'(\pi) \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlayalım. Kısmi integrasyon formülü uygulanarak, $y(x), z(x) \in D(T)$ için,

$$\begin{aligned}
[\int_0^d + \int_d^\pi] (p(x)y'(x))' \overline{z(x)} dx &= (p(x)y'(x)) \overline{z(x)}\Big|_0^d + (p(x)y'(x)) \overline{z(x)}\Big|_d^\pi - \\
&\quad -[\int_0^d + \int_d^\pi] \left(p(x)y'\overline{z'(x)}\right) dx \\
&= (p(x)y'(x)) \overline{z(x)}\Big|_0^d + (p(x)y'(x)) \overline{z(x)}\Big|_d^\pi - \\
&\quad - \left(p(x)\overline{z'(x)}\right) y(x)\Big|_0^d - \left(p(x)\overline{z'(x)}\right) y(x)\Big|_d^\pi \\
&\quad +[\int_0^d + \int_d^\pi] y(x) \left(p(x)\overline{z'(x)}\right)' dx
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
P(y,z) \ :&= (p(x)y'(x)) \overline{z(x)}\Big|_0^d + (p(x)y'(x)) \overline{z(x)}\Big|_d^\pi - \\
&\quad - \left(p(x)\overline{z'(x)}\right) y(x)\Big|_0^d - \left(p(x)\overline{z'(x)}\right) y(x)\Big|_d^\pi
\end{aligned}$$

işaretlemesi göz önüne alınırsa bu eşitlik,

$$[\int_0^d + \int_d^\pi] (p(x)y'(x))' \overline{z(x)} dx = P(y,z) + [\int_0^d + \int_d^\pi] y(x) \left(p(x)\overline{z'(x)}\right)' dx \tag{2.34}$$

şeklinde yazılabilir. T'nin tanım kümesindeki koşullar göz önüne alınırsa, $P(y,z) = 0$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Diğer yandan, yine $D(T)$'nin ifadesinden ve Wronskian determinantının x'den bağımsız olmasından,

$$\begin{aligned}
T\left(Y_1\right)\overline{Z_1} - Y_1 T\left(\overline{Z_1}\right) &= \left[-a_0 y(\pi) - b_0 p(\pi) y'(\pi)\right]\left[a_1 \overline{z(\pi)} + b_1 p(\pi)\overline{z'(\pi)}\right] - \\
&\quad - \left[-a_1 y(\pi) - b_1 p(\pi) y'(\pi)\right]\left[a_0 \overline{z(\pi)} + b_0 p(\pi)\overline{z'(\pi)}\right] \\
&= \left(y(\pi) p(\pi)\overline{z'(\pi)} - \overline{z(\pi)} p(\pi) y'(\pi)\right)\left(a_0 b_1 - a_1 b_0\right) \\
&= \left(a_0 b_1 - a_1 b_0\right) W\left[y, z\right]\big|_{x=\pi} = \left(a_0 b_1 - a_1 b_0\right) W\left[y, z\right]\big|_{x=0} = 0
\end{aligned}$$

eşitliğini alırız. Buna göre (2.32) ve (2.34) kullanılırsa, $y(x), z(x) \in D(T)$ için,

$$\left\langle T\left(Y\right), Z\right\rangle - \left\langle Y, T\left(Z\right)\right\rangle = 0 \tag{2.35}$$

olur. Dolayısıyla T bir simetrik operatördür. Ayrıca, $P(y, z)$'nin yapısı göz önüne alınarak gösterilebilir ki, $Y \in D(T)$ için (2.35) eşitliğini geçerli kılan $Z = (z(x), Z_1)$'lerin en geniş kümesi yine $D(T)$'dir. Bu ise T'nin selfadjoint operatör olduğunu gösterir.

b) T, selfadjoint operatör olduğundan tüm özdeğerleri reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldir(Teorem1.2.15). Teorem2.1.1'de olduğu gibi burada da $\sigma_p(L) = \sigma_p(T)$ olduğundan $\sigma_p(L) \subset \mathbb{R}$'dir, yani, L'nin de tüm özdeğerleri reel sayılardır. Ayrıca, özfonksiyonların ortogonal olduğu göz önüne alınırsa (2.32) eşitliğinden (2.31) elde edilir.

c) λ_n, L'nin bir özdeğeri; $\varphi(x, \lambda_n)$, bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon, ve $\psi(x, \lambda)$, (2.22)'deki başlangıç koşullarının özel şekli olan,

$$\begin{pmatrix} \psi(\pi, \lambda) \\ p(\pi)\psi'(\pi, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_0 - b_1\lambda \\ a_0 + a_1\lambda \end{pmatrix}$$

koşullarını ve (2.4) sıçrama koşullarını sağlayan çözüm olsun. Açıktır ki, bu çözümler için,

$$\varphi(x, \lambda_n) = k_n \psi(x, \lambda_n) \tag{2.36}$$

bağıntısı doğrudur. Burada k_n, sıfırdan farklı bir sabittir.

(2.1) denklemini bu çözümler için birer kez daha yazarsak,

$$\begin{aligned} -\left[p(x)\varphi'(x,\lambda_n)\right]' + \frac{q(x)}{p(x)}\varphi(x,\lambda_n) &= \frac{\lambda_n}{p(x)}\varphi(x,\lambda_n) \\ -\left[p(x)\psi'(x,\lambda)\right]' + \frac{q(x)}{p(x)}\psi(x,\lambda) &= \frac{\lambda}{p(x)}\psi(x,\lambda) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitliklerin ilkini $\psi(x,\lambda)$ ile; ikincisini de $\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkaralım:

$$\begin{aligned} &\varphi(x,\lambda_n)\left[p(x)\psi'(x,\lambda)\right]' - \psi(x,\lambda)\left[p(x)\varphi'(x,\lambda_n)\right]' \\ &\qquad = \frac{(\lambda_n-\lambda)}{p(x)}\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Son eşitliğin her iki yanı x'e göre $(0,\pi)$ aralığında integrallenirse;

$$\begin{aligned} &p(x)\left[\varphi(x,\lambda_n)\psi'(x,\lambda) - \psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda_n)\right]\Big|_0^{d-0} + \Big|_{d+0}^{\pi} \\ &\qquad = (\lambda_n-\lambda)\int_0^{\pi}\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\frac{dx}{p(x)} \end{aligned} \tag{2.38}$$

elde edilir. (2.4) sıçrama koşullarından dolayı,

$$p(x)\left[\varphi(x,\lambda_n)\psi'(x,\lambda) - \psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda_n)\right]\Big|_{d-0}^{d+0} = 0 \tag{2.39}$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca $\varphi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonu (2.2) ve (2.3) sınır koşullarını sağlayacağından, (2.38) eşitliği düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda-\lambda_n)}{a_0b_1-a_1b_0}\left[a_1\varphi(\pi,\lambda_n)+b_1p(\pi)\varphi'(\pi,\lambda_n)\right]\left[a_1\psi(\pi,\lambda)+b_1p(\pi)\psi'(\pi,\lambda)\right] - \Delta(\lambda) \\ &\qquad = (\lambda_n-\lambda)\int_0^{\pi}\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\frac{dx}{p(x)} \end{aligned} \tag{2.40}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafını $(\lambda-\lambda_n)$'e bölüp $\lambda\to\lambda_n$ iken limit alırsak ve (2.6) eşitliğini kullanırsak,

$$\Delta'(\lambda_n) = k_n\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{p(x)}\varphi^2(x,\lambda_n)dx + \frac{\left[a_1\varphi(\pi,\lambda_n)+b_1p(\pi)\varphi'(\pi,\lambda_n)\right]^2}{a_0b_1-a_1b_0}\right] \tag{2.41}$$

olduğunu alırız. $\varphi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonu reel değerli (özdeğerler reel olduğundan) ve $k_n\neq 0$ olduğundan $\Delta'(\lambda_n)\neq 0$ olur. Bu ise $m=1$ iken her bir λ_n özdeğerinin cebirsel olarak basit olduğunu gösterir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanır. Teorem2.4.1, sınır koşulu, özdeğer parametresine lineer şekilde bağlı olması halinde spektral özellikleri karakterize eden önemli bir sonuçtur.

Şimdi asıl amacımıza dönelim ve $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ polinomlarını herhangi reel katsayılı polinomlar olarak seçelim. Yine $m = \max\{dera(\lambda), derb(\lambda)\}$ olduğunu ve derecesi büyük olan polinomun başkatsayısının 1 alınacağını hatırlayalım.

Teorem 2.4.2: *a) L sınır değer problemi, mutlak değerlerine göre sıralandığında sınırsız şekilde büyüyen, sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir.*

b) Bu özdeğerlerin en fazla sonlu tanesi kompleks ya da katlı (cebirsel) olabilir; diğerleri reel ve basittir.

c) Özdeğerler reel eksene göre simetrik olarak yerleşir.

d) Özdeğerler dizisini $\{\lambda_n\}$ ile gösterirsek, n'nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik ifade geçerlidir:

$$\sqrt{\lambda_n} = \begin{cases} \sqrt{\lambda_{n-m}^0} + O\left(\dfrac{1}{n}\right), & \alpha \neq 0,\ derb(\lambda) \geq dera(\lambda) \\ \sqrt{\lambda_{n-m+1}^0} + O\left(\dfrac{1}{n}\right), & \text{diğer durumlarda} \end{cases} . \tag{2.42}$$

Burada, $\sqrt{\lambda_n^0}$, $\Delta_0(\lambda)$'nın sıfırlarını gösterir ve ayrıca $\sqrt{\lambda_n^0} = \dfrac{n\pi}{\gamma(\pi)} + h_n$, $\sup_n |h_n| < \infty$ ifadesi doğrudur.

İspat: $a)$ $\Delta(\lambda)$'nın sonsuz sayıda sıfırı oduğu açıktır. Eğer bu sıfırlar sayılamayan çoklukta olsa, analitik fonksiyonların teklik (birebirlik) teoremi gereği, $\Delta(\lambda) \equiv 0$ olur. O halde $\Delta(\lambda)$'nın sıfırları ve dolayısıyla L'nin özdeğerleri sayılabilir sayıdadır. Diğer taraftan, $\{\lambda_n\}$, L'nin özdeğerlerinin dizisi olmak üzere, $\forall n$ için $|\lambda_n| < M$ olacak şekilde M sayısı var olsa, Bolzano Weierstrass Teoremi gereği bu dizinin en az bir limit noktası olmalıdır. Bu ise yine analitik fonksiyonların teklik (birebirlik) teoremi gereği, $\Delta(\lambda) \equiv 0$ olması demektir. Böylece $a)$ şıkkının ispatı tamamlanır.

$b)$ Bu iddianın ispatı Russakovskii(1975) tarafından yapılmıştır.

$c)$ λ_n, L'nin herhangi bir özdeğeri, $y(x, \lambda_n)$ ise ona karşılık gelen özfonksiyon olsun. Bu durumda, ℓy'nin katsayıları olan $p(x)$ ve $q(x)$, reel değerli fonksiyonlar; α, β, d sayıları ve $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ polinomlarının katsayıları da reel sayılar olduğundan, $\overline{\lambda_n}$ de L'nin bir özdeğeri ve $\overline{y(x,\lambda_n)}$ de ona karşılık gelen özfonksiyon olur. Dolayısıyla, özdeğerler x-eksenine göre simetrik olarak yerleşir.

d) $\alpha \neq 0$, $derb(\lambda) \geq dera(\lambda)$ olduğunu kabul edelim. Diğer durumlarda benzer ispat yapılır. $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere,

$$G_n := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \rho^2, |\rho| < \left|\rho_n^0\right| - \varepsilon\}, \tag{2.43}$$

bölgelerini oluşturalım. Burada ε yeterince küçük pozitif reel sayı ve $\rho_n^0 = \sqrt{\lambda_n^0}$'dır. Her bir $\lambda \in \partial G_n$ için

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C\,|\lambda|^{m+\frac{1}{2}} \exp \tau\gamma\,(\pi) \tag{2.44}$$

$$\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = O\left(\lambda^m \exp \tau\gamma\,(\pi)\right) \tag{2.45}$$

olduğundan, bu fonksiyonlara G_n bölgelerinde Rouche teoremini uygulanabilir. Şöyle ki, (2.45) eşitliğinden,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)} \exp\left[-\tau\gamma\,(\pi)\right]\left[\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right] = 0$$

bulunur. Bu ise $\forall\lambda \in \partial G_n$, $\forall C > 0$ ve yeterince büyük n'ler için,

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| < C\,|\lambda|^{m+\frac{1}{2}} \exp \tau\gamma\,(\pi) \tag{2.46}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu garanti eder. Dolayısıyla, $\forall\lambda \in \partial G_n$ için,

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| < |\Delta_0(\lambda)| \tag{2.47}$$

geçerli olur. Böylece Rouche teoreminden (Teorem1.1.9) $\Delta_0(\lambda)$ ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonlarının her bir n için G_n içinde aynı sayıda sıfıra sahip olduğunu görebiliriz. Buna göre, G_n ve G_{n+1} arasında kalan bölgelerin her birinde$\Delta(\lambda)$, tam olarak bir tek pozitif sıfıra sahiptir. Bu sıfırı τ_n^2 ile gösterirsek, her bir pozitif λ_n özdeğerinin, $\lambda_{n+m} = \tau_n^2$ eşitliğini sağladığını söyleyebiliriz. Ayrıca $n \geq 1$ için $\tau_n = \sqrt{\lambda_n^0} + \varepsilon_n$, ($\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$) eşitliği geçerli olduğundan, $\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_{n-m}^0} + o(1)$ yazılabilir. $\varepsilon_n \to 0$ iken,

$$\Delta_0(\lambda_n^0 + \varepsilon_n) = \varepsilon_n\left[\Delta_0'(\lambda_n^0) + o(1)\right] \tag{2.48}$$

olduğunu kullanarak $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{n-m}^0}}\right)$ eşitliğini gösterebiliriz. Teorem 1.1.15'den yararlanarak $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun orijinden farklı sıfırları için,

$$\sqrt{\lambda_n^0} = \frac{n\pi}{\gamma(\pi)} + h_n, \quad \sup_n |h_n| < \infty$$

bağıntısının doğruluğu ispatlanabilir. Buna göre $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ eşitliği doğru olur. Böylece (2.42) eşitliği ispatlanmış olur.

III. BÖLÜM
TERS PROBLEMLER

3.1. Prüfer Açısı ve Weyl Fonksiyonu:

$$\Phi(x,\lambda) := \begin{cases} \operatorname{arccot} \dfrac{p(x)\psi'(x,\lambda)}{\psi(x,\lambda)} & \psi(x,\lambda) \neq 0 \text{ ise}, \\ \arctan \dfrac{\psi(x,\lambda)}{p(x)\psi'(x,\lambda)} & \psi'(x,\lambda) \neq 0 \text{ ise}, \end{cases} \tag{3.1}$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada, $\psi(x,\lambda)$, (2.1) denkleminin (2.22) başlangıç koşullarını ve (2.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümüdür. $\psi(x,\lambda)$ ve $p(x)\psi'(x,\lambda)$ fonksiyonları $(0,d)$ (d,π) aralıklarında mutlak sürekli olduğundan $\Phi(x,\lambda)$ da öyledir. Ayrıca $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonu, $(0,d)\cup(d,\pi)$ kümesinde aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar.

$$p(x)\Phi' = \{\lambda - q(x)\}\sin^2\Phi + \cos^2\Phi \tag{3.2}$$

Gerçekten de,

$$p(x)\psi'(x,\lambda)\tan\Phi = \psi(x,\lambda) \tag{3.3}$$

eşitliğinin her iki yanı diferansiyellenirse,

$$(p(x)\psi'(x,\lambda))'\tan\Phi + p(x)\psi'(x,\lambda)\frac{\Phi'}{\cos^2\Phi} = \psi'(x,\lambda) \tag{3.4}$$

elde edilir. $\psi(x,\lambda)$, (2.1) denklemini sağlayacağına göre, (3.4),

$$\{q(x)-\lambda\}\psi(x,\lambda)\tan\Phi + p^2(x)\psi'(x,\lambda)\frac{\Phi'}{\cos^2\Phi} = p(x)\psi'(x,\lambda) \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. Yeniden (3.3) kullanılırsa,

$$\{q(x)-\lambda\}p(x)\psi'(x,\lambda)\tan^2\Phi + p^2(x)\psi'(x,\lambda)\frac{\Phi'}{\cos^2\Phi} = p(x)\psi'(x,\lambda)$$

eşitliği ve buradan da,

$$\{q(x)-\lambda\}\sin^2\Phi + p(x)\Phi' = \cos^2\Phi$$

eşitliği elde edilir. Bu ise (3.2)'nin doğruluğunu gösterir.

Ayrıca (2.22) başlangıç koşulları ve (2.4) sıçrama koşulları dikkate alınırsa, $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonunun, aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümü olduğu ortaya çıkar.

$$\begin{cases} p(x)\Phi' = \{\lambda - q(x)\}\sin^2\Phi + \cos^2\Phi, \quad x \in (0,d)\cup(d,\pi) \\ \cot\Phi(\pi,\lambda) = f(\lambda) \\ \beta^2\Phi(d+0) = \Phi(d-0) \end{cases} \tag{3.6}$$

$\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonuna L sınır değer probleminin *Prüfer açısı* adı verilir.

Şimdi de, Weyl fonksiyonunu tanımlayalım. Bunun için önce (2.1) denkleminin özel bir çözümünü belirleyelim. $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonu, (2.1) denkleminin,

$$\begin{pmatrix} \chi(0,\lambda) \\ \chi'(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

başlangıç koşullarını ve (2.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Lemma 3.1.1: *L'nin özdeğeri olmayan her λ sayısı için,*

$$\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \chi(x,\lambda) - M(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.8}$$

eşitliği geçelidir. Burada,

$$M(\lambda) := \frac{\psi'(0,\lambda)\cos\alpha - \psi(0,\lambda)\sin\alpha}{\Delta(\lambda)} \tag{3.9}$$

dır.

İspat:

$$W[\varphi,\chi] = p(x)\left\{\varphi(x,\lambda)\chi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\chi(x,\lambda)\right\}\big|_{x=0} = 1$$

olduğundan, $\varphi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Buna göre her bir λ sayısı için $\psi(x,\lambda)$'yı bu iki fonksiyonun lineer bileşimi şeklinde yazmak mümkündür. O halde,

$$\psi(x,\lambda) = A(\lambda)\varphi(x,\lambda) + B(\lambda)\chi(x,\lambda) \tag{3.10}$$

eşitliğini gerçekleyen $A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ fonksiyonları bulunabilir. (3.10) eşitliğinde x yerine 0 yazılırsa,

$$\psi(0,\lambda) = A(\lambda)\sin\alpha + B(\lambda)\cos\alpha \tag{3.11}$$

bulunur. Ayrıca (3.10) eşitliğinden x' göre türev alıp, x yerine 0 yazılırsa,

$$\psi'(0,\lambda) = -A(\lambda)\cos\alpha + B(\lambda)\sin\alpha \tag{3.12}$$

olur. (3.11) ve (3.12) eşitlikleri $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ bilinmeyenlerine göre çözülürse,

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \psi(0,\lambda)\sin\alpha - \psi'(0,\lambda)\cos\alpha \\ B(\lambda) &= \psi(0,\lambda)\cos\alpha + \psi'(0,\lambda)\sin\alpha = \Delta(\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.10) eşitliğinin,

$$\psi(x,\lambda) = [\psi(0,\lambda)\sin\alpha - \psi'(0,\lambda)\cos\alpha]\,\varphi(x,\lambda) + \Delta(\lambda)\chi(x,\lambda)$$

şeklinde olduğu görülür. (3.9) işaretlemesi göz önüne alınarak ispat tamalanır.

$M(\lambda)$ fonksiyonuna L sınır değer probleminin *Weyl fonksiyonu* denir. Açıktır ki, bu fonksiyon, $\mathbb{C}\setminus\sigma_p(L)$ kümesinde analitik ve her bir özdeğer bir kutup noktası olan, meromorfik bir fonksiyondur. Bu kutuplardan sonlu tanesi katlı olabilir; diğerleri basit kutuplardır.

Teorem 3.1.2: *$\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma_p(L)$ için,*

$$M(\lambda) = \cot(\Phi(0,\lambda)+\alpha) \tag{3.13}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (3.9) eşitliği,

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \frac{\psi'(0,\lambda)\cos\alpha - \psi(0,\lambda)\sin\alpha}{\Delta(\lambda)} \\ &= \frac{\psi'(0,\lambda)\cos\alpha - \psi(0,\lambda)\sin\alpha}{\psi'(0,\lambda)\sin\alpha + \psi(0,\lambda)\cos\alpha} \\ &= \frac{\dfrac{\psi'(0,\lambda)}{\psi(0,\lambda)}\cos\alpha - \sin\alpha}{\dfrac{\psi'(0,\lambda)}{\psi(0,\lambda)}\sin\alpha + \cos\alpha} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\psi(0,\lambda)\neq 0$ kabul edildi. $\psi'(0,\lambda)\neq 0$ olduğu durumda da, $\dfrac{\psi(0,\lambda)}{\psi'(0,\lambda)}$ terimi ele alınır. Ayrıca, $\dfrac{\psi'(0,\lambda)}{\psi(0,\lambda)} = \cot\Phi(0,\lambda)$ olduğundan,

$$M(\lambda) = \frac{\cot\Phi(0,\lambda)\cos\alpha - \sin\alpha}{\cot\Phi(0,\lambda)\sin\alpha + \cos\alpha} \tag{3.14}$$

eşitliği doğrudur. Son eşitlikten, $\alpha = 0$ ise $M(\lambda) = \cot \Phi\,(0, \lambda)$;. $\alpha \neq 0$ ise $M(\lambda) = \dfrac{\cot \Phi\,(0, \lambda) \cot \alpha - 1}{\cot \Phi\,(0, \lambda) + \cot \alpha} = \cot\left(\Phi(0, \lambda) + \alpha\right)$ elde edilir. Her iki durumda da (3.13) geçerli olur.

Sonuç 3.1.3: $M(\lambda)$ fonksiyonu α ve $\Phi(0, \lambda)$ tarafından tek şekilde belirlenir.

3.2. Weyl Fonksiyonuna Göre Ters Problem:

$\widetilde{L}$ ile aşağıdaki sınır değer problemi belirtiliyor.

$$
\begin{aligned}
& -p(x)\left[p(x)y'\right]' + \widetilde{q}(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,\widetilde{d}) \cup (\widetilde{d},\pi) \\
& y(0)\cos\widetilde{\alpha} + y'(0)\sin\widetilde{\alpha} = 0 \\
& \widetilde{a}(\lambda)y(\pi) + \widetilde{b}(\lambda)p(\pi)y'(\pi) = 0 \\
& \begin{cases} y(\widetilde{d}+0) = \widetilde{\beta}y(\widetilde{d}-0) \\ \left[p(x)y'(x)\right]_{x=\widetilde{d}+0} = \widetilde{\beta}^{-1}\left[p(x)y'(x)\right]_{x=\widetilde{d}-0} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Burada, $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{a}(\lambda)$, $\widetilde{b}(\lambda)$, $\widetilde{d}$ ve $\widetilde{\beta}$ parametrelerinin (2.1)-(2.4)'deki koşulları sağladıkları kabul ediliyor. Başka bir deyişle, L problemini belirleyen (q, f, α, d, β) parametrelerinin yerine, aynı sınıftan, farklı $\left(\widetilde{q}, \widetilde{f}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{d}, \widetilde{\beta}\right)$ parametreleri alınarak, $\widetilde{L}$ problemi oluşturuluyor.

Bu bölümün amacı, Weyl fonksiyonu yardımıyla L probleminin tek şekilde belirlenebildiğini; yani, L ve $\widetilde{L}$ problemleri, aynı Weyl fonksiyonuna sahip ise, $L = \widetilde{L}$ olduğunu ispatlamaktır. Öncelikle bazı yardımcı sonuçlar verilmelidir.

Lemma 3.2.1:*$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları, $|\rho|$'nın yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki davranışlara sahiptirler:.*

$$
\varphi(x,\lambda) = C\exp\left[-i\rho\gamma(x)\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad (\varepsilon < \arg\rho < \pi - \varepsilon) \tag{3.16}
$$

$$
\psi(x,\lambda) = \begin{cases} O\left(\lambda^{m}\exp\tau\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]\right), & der b(\lambda) \geq der a(\lambda) \\ O\left(\lambda^{m-\frac{1}{2}}\exp\tau\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]\right), & der a(\lambda) > der b(\lambda) \end{cases} \tag{3.17}
$$

$$
p(x)\psi'(x,\lambda) = \begin{cases} O\left(\lambda^{m+\frac{1}{2}}\exp\tau\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]\right), & der b(\lambda) \geq der a(\lambda) \\ O\left(\lambda^{m}\exp\tau\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]\right), & der a(\lambda) > der b(\lambda) \end{cases} \tag{3.18}
$$

Burada, ε herhangi bir pozitif sayı ve $C = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{2}, & x < d \\ \dfrac{\beta^{+}}{2}\sin\alpha, & x > d \end{cases}$ *dır.*

İspat: (2.14) ve (2.16) eşitliklerini aşağıdaki şekilde birleştirelim:

$$\frac{\varphi(x,\lambda)}{\sin\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\exp i\rho\gamma(x)+\exp\left[-i\rho\gamma(x)\right]}{2}+O\left(\dfrac{\exp\tau\gamma(x)}{\rho}\right), & x<d\\ \beta^{+}\left\{\dfrac{\exp i\rho\gamma(x)+\exp\left[-i\rho\gamma(x)\right]}{2}\right\} & \\ \quad+\beta^{-}\left\{\dfrac{\exp i\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)+\exp\left[-i\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)\right)\right]}{2}\right\} & \\ \quad+O\left(\dfrac{\exp\tau\gamma(x)}{\rho}\right), & x>d\end{cases}\tag{3.19}$$

Bu eşitliğin her iki yanını $\exp i\rho\gamma(x)$ ile çarparsak

$$\exp i\rho\gamma(x)\frac{\varphi(x,\lambda)}{\sin\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\exp 2i\rho\gamma(x)+1}{2}+\exp i\rho\gamma(x)O\left(\dfrac{\exp\tau\gamma(x)}{\rho}\right), & x<d\\ \beta^{+}\left\{\dfrac{\exp 2i\rho\gamma(x)+1}{2}\right\} & \\ \quad+\beta^{-}\left\{\dfrac{\exp 2i\rho\gamma(d)+\exp 2i\rho\left[\gamma\left(x\right)-\gamma(d)\right]}{2}\right\} & \\ \quad+\exp i\rho\gamma(x)O\left(\dfrac{\exp\tau\gamma(x)}{\rho}\right), & x>d\end{cases}\tag{3.20}$$

buluruz. Buradan da,

$$\exp i\rho\gamma(x)\frac{\varphi(x,\lambda)}{\sin\alpha}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{\exp 2i\rho\gamma(x)}{2}+\exp i\rho\gamma(x)O\left(\dfrac{\exp\tau\gamma(x)}{\rho}\right), & x<d\\ \dfrac{\beta^{+}}{2}+\dfrac{\beta^{+}\exp 2i\rho\gamma(x)}{2} & \\ \quad+\beta^{-}\left\{\dfrac{\exp 2i\rho\gamma(d)+\exp 2i\rho\left[\gamma\left(x\right)-\gamma(d)\right]}{2}\right\} & \\ \quad+\exp i\rho\gamma(x)O\left(\dfrac{\exp\tau\gamma(x)}{\rho}\right), & x>d\end{cases}\tag{3.21}$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafındaki ilk terimlerden sonraki terimler, $\varepsilon<\arg\rho<\pi-\varepsilon$ bölgesinde üstten değerlendirilirse, $|\rho|\to\infty$ iken,

$$\exp i\rho\gamma(x)O\left(\frac{\exp\tau\gamma(x)}{\rho}\right)=O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

olduğu ve,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\exp 2i\rho\gamma(x)}{2}\right| &= \left|\frac{\exp\left[-2\tau\gamma(x)\right]}{2}\right| \leq \frac{c}{|\rho|}\\ \left|\frac{\exp 2i\rho\left[\gamma(x)-\gamma\left(d\right)\right]}{2}\right| &= \left|\frac{\exp 2\tau\left[\gamma\left(d\right)-\gamma(x)\right]}{2}\right| \leq \frac{c}{|\rho|}\end{aligned}$$

eşitsizliklerini gerçekleyen c_1, c_2 sabitlerinin var olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$\exp i\rho\gamma(x)\frac{\varphi(x,\lambda)}{\sin\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}+O\left(\dfrac{1}{\rho}\right), & x<d \\ \dfrac{\beta^{+}}{2}+O\left(\dfrac{1}{\rho}\right), & x>d \end{cases} \tag{3.22}$$

olur. Bu ise (3.16)'nın ispatını tamamlar.

(3.17) ve (3.18)'i ispatlamak için

$$\begin{gathered}\ell\psi(x,\lambda)=\lambda\psi(x,\lambda), \quad x\in(0,d)\cup(d,\pi)\\ \psi(\pi,\lambda)=-b(\lambda), \quad p(\pi)\psi'(\pi,\lambda)=a(\lambda)\\ \psi(d+0)=\beta\psi(d-0)\\ \left[p(x)\psi'(x,\lambda)\right]_{x=d+0}=\beta^{-1}\left[p(x)\psi'(x,\lambda)\right]_{x=d-0}\end{gathered}$$

başlangıç değer problemini çözmek gerekir. Lemma2.2.1'dekine benzer olarak, bu problemin çözümü, aşağıdaki integral denklemin çözümü ile çakışır.

$x>d$ için,

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda) &= -b(\lambda)\cos\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]-a(\lambda)\frac{\sin\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]}{\rho}\\ &\quad+\int_x^{\pi}\frac{\sin\rho\left(\gamma(t)-\gamma(x)\right)}{\rho}p^{-1}(t)q(t)\psi(t,\lambda)dt\end{aligned} \tag{3.23}$$

$x < d$ için,

$$\psi(x,\lambda) = -\beta^{+}\left[b(\lambda)\cos\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]+a(\lambda)\frac{\sin\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]}{\rho}\right]$$
$$+\beta^{-}\left[b(\lambda)\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(\pi)\right)+a(\lambda)\frac{\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(\pi)\right)}{\rho}\right]$$
$$+\frac{1}{\rho}\int_{d}^{\pi}\beta^{+}\sin\rho\left(\gamma(t)-\gamma(x)\right)p^{-1}(t)q(t)\psi(t,\lambda)dt \tag{3.24}$$
$$-\frac{1}{\rho}\int_{d}^{\pi}\beta^{-}\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\psi(t,\lambda)dt$$
$$+\frac{1}{\rho}\int_{x}^{d}\sin\rho\left(\gamma(t)-\gamma(x)\right)p^{-1}(t)q(t)\psi(t,\lambda)dt$$

Şimdi, $x > d$ için, $m = derb(\lambda) \geq dera(\lambda)$ durumunda, (3.17)'yi ispatlayalım. Diğer durumlarda tamamen benzer şekilde ispat yapılabilir.

(3.23)'ün her iki tarafını $\lambda^{m}\exp\tau\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned}\left|\cos\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]\right| &\leq \exp\tau\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]\\ \left|\sin\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]\right| &\leq \exp\tau\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\left|\lambda^{-m}\exp\tau\left[\gamma(x)-\gamma(\pi)\right]\psi(x,\lambda)\right| \leq |\lambda|^{-m}|b(\lambda)|+|\lambda|^{-m-\frac{1}{2}}|a(\lambda)|$$
$$+|\lambda|^{-\frac{1}{2}}\int_{x}^{\pi}\left|p^{-1}(t)q(t)\right|\left|\lambda^{-m}\exp\rho\left(\gamma(t)-\gamma(\pi)\right)\psi(t,\lambda)\right|dt \tag{3.25}$$

elde ederiz. $m = derb(\lambda) \geq dera(\lambda)$ olduğundan

$$|\lambda|^{-m}|b(\lambda)|+|\lambda|^{-m-\frac{1}{2}}|a(\lambda)| = 1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right),\quad |\lambda|\to\infty$$

yazılabilir. Buna göre

$$h(\lambda) := \max\left\{\left|\lambda^{-m}\exp\tau\left[\gamma(x)-\gamma(\pi)\right]\psi(x,\lambda)\right| : x\in(d,\pi)\right\}$$

olmak üzere, $|\lambda|$'nın büyük değerleri için,

$$h(\lambda) \leq c_1 + c_2 h(\lambda)$$

eşitsizliğini sağlayan c_1, c_2 sabitleri vardır. Bu ise $h(\lambda) = O(1)$ olması demektir ve $x > d$ için (3.17)'yi ispatlar. (3.18) eşitliğini ispatlamak için, (3.23) ve

(3.24)'den formal olarak türev alırsak,

$$\begin{aligned} p(x)\psi'(x,\lambda) &= -\rho b(\lambda)\sin\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]+ \\ &\quad +a(\lambda)\cos\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]- \\ &\quad -\int_x^{\pi}\cos\rho\left(\gamma(t)-\gamma(x)\right)p^{-1}(t)q(t)\psi(t,\lambda)dt, \quad x>d, \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} &p(x)\psi'(x,\lambda) = -\beta^{+}\left[\rho b(\lambda)\sin\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]-a(\lambda)\cos\rho\left[\gamma(\pi)-\gamma(x)\right]\right] \\ &+\beta^{-}\left[\rho b(\lambda)\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(\pi)\right)-a(\lambda)\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(\pi)\right)\right] \\ &-\int_d^{\pi}\beta^{+}\cos\rho\left(\gamma(t)-\gamma(x)\right)p^{-1}(t)q(t)\psi(t,\lambda)dt \\ &+\int_d^{\pi}\beta^{-}\cos\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(x)-\gamma(t)\right)p^{-1}(t)q(t)\psi(t,\lambda)dt \\ &-\int_x^{d}\cos\rho\left(\gamma(t)-\gamma(x)\right)p^{-1}(t)q(t)\psi(t,\lambda)dt, \quad x<d \end{aligned} \tag{3.27}$$

eşitlikleri elde ederiz. (3.17), (3.26) ve (3.27) eşitliklerini kullanarak (3.18) kolayca ispatlanır.

Lemma3.2.2: $\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma_p(L)$ *için,* $|\rho|\to\infty$ iken

$$M(\lambda)=\begin{cases}\cot\alpha+O\left(\dfrac{1}{\rho}\right), & \alpha\neq 0\\ \rho+O\left(1\right), & \alpha=0\end{cases} \tag{3.28}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (3.9) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$M(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\psi'(0,\lambda)}{\psi(0,\lambda)} & \alpha=0 \text{ ise}\\ -\dfrac{\psi(0,\lambda)}{\psi'(0,\lambda)} & \alpha=\dfrac{\pi}{2} \text{ ise}\\ \cot\alpha-\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)\cos\alpha} & \alpha\neq 0 \text{ ve } \alpha\neq\dfrac{\pi}{2} \text{ ise}\end{cases} \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.17) ve (3.18)'den çıkan,

$$\psi(0,\lambda) = \begin{cases} O\left(\lambda^{m}\exp\tau\gamma(\pi)\right), & derb(\lambda)\geq dera(\lambda) \\ O\left(\lambda^{m-\frac{1}{2}}\exp\tau\gamma(\pi)\right), & dera(\lambda) > derb(\lambda) \end{cases}$$

$$\psi'(0,\lambda) = \begin{cases} O\left(\lambda^{m+\frac{1}{2}}\exp\tau\gamma(\pi)\right), & derb(\lambda)\geq dera(\lambda) \\ O\left(\lambda^{m}\exp\tau\gamma(\pi)\right), & dera(\lambda) > derb(\lambda) \end{cases} \tag{3.30}$$

eşitlikleri ve $B_\delta := \underset{\lambda_n\in\sigma_p(L)}{\cup}\{\lambda : |\lambda-\lambda_n|>\delta\}$ olmak üzere, $\forall\lambda\in B_\delta$ için geçerli olan,

$$|\psi(0,\lambda)| \geq \begin{cases} C_\delta\,|\lambda|^{m}\exp\tau\gamma\left(\pi\right) & derb(\lambda)\geq dera(\lambda) \\ C_\delta\,|\lambda|^{m-\frac{1}{2}}\exp\tau\gamma\left(\pi\right) & dera(\lambda) > derb(\lambda) \end{cases}$$

$$\psi'(0,\lambda) \geq \begin{cases} C_\delta\,|\lambda|^{m+\frac{1}{2}}\exp\tau\gamma(\pi), & derb(\lambda)\geq dera(\lambda) \\ C_\delta\,|\lambda|^{m}\exp\tau\gamma(\pi), & dera(\lambda) > derb(\lambda) \end{cases} \tag{3.31}$$

eşitsizlikleri birlikte düşünülürse, $\dfrac{\psi'(0,\lambda)}{\psi(0,\lambda)} = \rho + O\left(1\right)$, $\dfrac{\psi(0,\lambda)}{\psi'(0,\lambda)} = O\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$, $|\rho|\to\infty$, olduğu görülür. Dolayısıyla, (3.29)'daki üç durumda da (3.28) bağıntısı geçerli olur.

Lemma 3.2.3: *$M(\lambda)$ fonksiyonu α sayısını tek şekilde belirler, yani, $M(\lambda)\equiv\widetilde{M}(\lambda)$ ise $\alpha=\widetilde{\alpha}$'dır.*

İspat: $M(\lambda)\equiv\widetilde{M}(\lambda)$ ise (3.28)'e göre, α ve $\widetilde{\alpha}$, aynı anda sıfırdır veya aynı anda sıfırdan farklıdır. Çünkü, aksi halde, $|\lambda|\to\infty$ iken $M(\lambda)\equiv\widetilde{M}(\lambda)$ doğru olamaz. .α ve $\widetilde{\alpha}$ sıfır ise ispat biter. $\alpha\neq 0$, $\widetilde{\alpha}\neq 0$ olsun. $M(\lambda)\equiv\widetilde{M}(\lambda)$ olduğundan (3.28)'e göre,

$$\cot\alpha-\cot\widetilde{\alpha} = O\left(\frac{1}{\rho}\right),\quad |\rho|\to\infty \tag{3.32}$$

eşitliği yazılabilir. $|\rho| \to \infty$ iken limit alınırsa, eşitliğin sol tarafı ρ'ya bağlı olmadığından, $\cot\alpha = \cot\widetilde{\alpha}$, $(\alpha,\ \widetilde{\alpha} \in (0,\pi))$ bulunur. Bu ise $\alpha = \widetilde{\alpha}$ demektir.

Şimdi bu bölümün temel teoremini verelim. Sıradaki teorem, Weyl fonksiyonu yardımıyla L probleminin tek şekilde belirlenebildiğini; yani, L ve $\widetilde{L}$ problemleri, aynı Weyl fonksiyonuna sahip ise, $L = \widetilde{L}$ olduğu sonucunu verir.

Teorem 3.2.4: *$M(\lambda)$ fonksiyonu L'yi tek şekilde belirler, yani, $M(\lambda) \equiv \widetilde{M}(\lambda)$ ise, $(0,\pi)$'de hemen hemen her yerde $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $f(\lambda) \equiv \widetilde{f}(\lambda)$, $(\alpha, d, \beta) = \left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{d}, \widetilde{\beta}\right)$'dır.*

İspat: $M(\lambda) \equiv \widetilde{M}(\lambda)$ olsun. Lemma3.2.3'e göre $\alpha = \widetilde{\alpha}$'dır.

$$\Psi(x,\lambda) := \begin{pmatrix} \varphi(x,\lambda) & \dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ p(x)\varphi'(x,\lambda) & \dfrac{p(x)\psi'(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\Psi}(x,\lambda) := \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(x,\lambda) & \dfrac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} \\ p(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) & \dfrac{p(x)\widetilde{\psi}'(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$P(x,\lambda) := \Psi(x,\lambda)\,\widetilde{\Psi}^{-1}(x,\lambda) \tag{3.33}$$

matrisi ele alınsın. $P(x,\lambda) = [P_{ij}(x,\lambda)]_{i,j=1,2}$ ile gösterilirse, (3.33) eşitliğinden,

$$\begin{cases} P_{11}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)\dfrac{p(x)\widetilde{\psi}'(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} - p(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ P_{12}(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \varphi(x,\lambda)\dfrac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} \\ P_{21}(x,\lambda) = p(x)\varphi'(x,\lambda)\dfrac{p(x)\widetilde{\psi}'(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} - p(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\dfrac{p(x)\psi'(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ P_{22}(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\dfrac{p(x)\psi'(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} - p(x)\varphi'(x,\lambda)\dfrac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} \end{cases} \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.8) eşitliğini (3.34)'te yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= \varphi(x,\lambda)\left[p(x)\widetilde{\chi}'(x,\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)p(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\right]- \\ &\quad -p(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\left[\chi(x,\lambda)-M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right] \\ &= p(x)\left\{\varphi(x,\lambda)\widetilde{\chi}'(x,\lambda)-\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\chi(x,\lambda)\right\}+ \\ &\quad +\left[M(\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)\right]p(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{12}(x,\lambda) &= \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\left[\chi(x,\lambda)-M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right]- \\ &\quad -\varphi(x,\lambda)\left[\widetilde{\chi}(x,\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\right] \\ &= \tilde{\varphi}(x,\lambda)\chi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\widetilde{\chi}(x,\lambda)- \\ &\quad -\left[M(\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)\right]\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{21}(x,\lambda) &= p(x)\varphi'(x,\lambda)\left[p(x)\widetilde{\chi}'(x,\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)p(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\right]- \\ &\quad -p(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\left[p(x)\chi'(x,\lambda)-M(\lambda)p(x)\varphi'(x,\lambda)\right] \\ &= p(x)\varphi'(x,\lambda)p(x)\widetilde{\chi}'(x,\lambda)-p(x)\tilde{\varphi}'(x,\lambda)p(x)\chi'(x,\lambda)+ \\ &\quad +\left[M(\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)\right]p(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)p(x)\varphi'(x,\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{22}(x,\lambda) &= \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\left[p(x)\chi'(x,\lambda)-M(\lambda)p(x)\varphi'(x,\lambda)\right]- \\ &\quad -p(x)\varphi'(x,\lambda)\left[\widetilde{\chi}(x,\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\right] \\ &= p(x)\left\{\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\chi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\widetilde{\chi}(x,\lambda)\right\}- \\ &\quad -\left[M(\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)\right]\widetilde{\varphi}(x,\lambda)p(x)\varphi'(x,\lambda) \end{aligned}$$

eşitliklerini alırız. $M(\lambda)=\widetilde{M}(\lambda)$ olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= p(x)\left\{\varphi(x,\lambda)\widetilde{\chi}'(x,\lambda)-\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\chi(x,\lambda)\right\} \\ P_{12}(x,\lambda) &= \tilde{\varphi}(x,\lambda)\chi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\widetilde{\chi}(x,\lambda) \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} P_{21}(x,\lambda) &= p^2(x)\left\{\varphi'(x,\lambda)\widetilde{\chi}'(x,\lambda)-\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\chi'(x,\lambda)\right\} \\ P_{22}(x,\lambda) &= p(x)\left\{\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\chi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\widetilde{\chi}(x,\lambda)\right\} \end{aligned} \tag{3.36}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu ise gösterir ki, $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ iken $P_{ij}(x, \lambda)$ fonksiyonları λ'nın tam fonksiyonlarıdır. Diğer yandan, (2.14) eşitliğinden, $|\rho| \to \infty$ iken,

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= O\left(\exp \tau\gamma\left(x\right)\right) && (3.37) \\ p(x)\varphi'(x,\lambda) &= O\left(\rho \exp \tau\gamma\left(x\right)\right) && (3.38) \end{aligned}$$

davranışlarının doğruluğu kolayca gösterilebilir. Bunları, (3.17) ve (3.18) eşitliklerini ve

$$|\Delta(\lambda)| \geq \begin{cases} C_\delta \left|\lambda\right|^{m+\frac{1}{2}} \exp \tau\gamma(\pi), & m = derb(\lambda) \geq dera(\lambda) \\ C_\delta \left|\lambda\right|^{m} \exp \tau\gamma(\pi), & m = dera(\lambda) > derb(\lambda) \end{cases}, \ \lambda \in B_\delta \quad (3.39)$$

eşitsizliğini (3.34)'de kullanarak $\forall x = [0, \pi] \setminus \left\{d, \widetilde{d}\right\}$için,

$$\begin{aligned} |P_{11}(x,\lambda)| &\leq C_1(x) \\ |P_{12}(x,\lambda)| &\leq \frac{C_2(x)}{\rho} \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ fonksiyonlarının var olduğunu gösterebiliriz. Bu fonksiyonlar sadece x'e bağlı olduğundan,$P_{11}(x, \lambda)$ ve $P_{12}(x, \lambda)$ fonksiyonları λ'ya göre tüm düzlemde sınırlıdır. Bu ise, Liouville Teoremi (Teorem1.1.5) gereği bu fonksiyonların λ'ya bağlı olmadığını gösterir. O halde, $P_{11}(x, \lambda) = C(x)$, $P_{12}(x, \lambda) = D(x)$ yazılabilir. Ayrıca $\lim\limits_{|\rho| \to \infty} |P_{12}(x, \lambda)| = 0$ eşitliği $\forall x = [0, \pi] \setminus \left\{d, \widetilde{d}\right\}$ için geçerli olduğundan, $P_{12}(x, \lambda) \equiv 0$ olur. Böylece $\forall x = [0, \pi] \setminus \left\{d, \widetilde{d}\right\}$,

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= C(x) && (3.40) \\ P_{12}(x,\lambda) &\equiv 0 \end{aligned}$$

eşitliklerini alırız. Bunları (3.34)'de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda)\frac{p(x)\widetilde{\psi}'(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}-p(x)\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} &= C(x)\\ \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\varphi(x,\lambda)\frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} &= 0\end{aligned} \tag{3.41}$$

sistemini elde ederiz. Bu sistemin çözülmesiyle,

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda) &= C(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\\ \frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} &= C(x)\frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}\end{aligned} \tag{3.42}$$

bulunur. Diğer taraftan, $W\left[\varphi(x,\lambda),\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]$ ve $W\left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\dfrac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]$ Wronskian determinantları hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}W\left[\varphi(x,\lambda),\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right] &= \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\varphi(x,\lambda)p(x)\psi'(x,\lambda)-p(x)\varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\right]\\ &= \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\varphi(0,\lambda)\psi'(0,\lambda)-\varphi'(0,\lambda)\psi(0,\lambda)\right]=1\end{aligned}$$

ve benzer şekilde, $W\left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\dfrac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]=1$ bulunur. (3.42)'den yararlanarak,

$$\begin{aligned}1 &= W\left[\varphi(x,\lambda),\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]\\ &= W\left[C(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda),C(x)\frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]\\ &= C(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)C'(x)\frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}+C^2(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\frac{\widetilde{\psi}'(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\\ &\quad -C(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)C'(x)\frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-C^2(x)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\\ &= C^2(x)W\left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]=C^2(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, (3.42)'yi geçekleyen $C(x)$ fonksiyonu için $C^2(x)\equiv 1$ geçerlidir.

Şimdi Lemma3.2.1'e dönerek, (3.16) eşitliğini $\varphi(x,\lambda)$ ve $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ için yeniden yazalım.

$$\begin{aligned}
\varphi(x,\lambda) &= C\exp\left[-i\rho\gamma(x)\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) && (3.43)\\
\varphi(x,\lambda) &= \widetilde{C}\exp\left[-i\rho\gamma(x)\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) && (3.44)
\end{aligned}$$

Burada, $C=\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha}{2}, & x<d\\ \dfrac{\beta^{+}}{2}\sin\alpha, & x>d\end{cases}$ ve $\widetilde{C}=\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha}{2}, & x<\widetilde{d}\\ \dfrac{\widetilde{\beta^{+}}}{2}\sin\alpha, & x>\widetilde{d}\end{cases}$'dır. Genelliği bozmadan $d<\widetilde{d}$ kabul edilebilir. Aksi halde de değişen bir durum olmayacaktır. (3.43), (3.44) eşitliklerini (3.42)'de kullanarak aşağıdaki durumlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
x &\in [0,d) \text{ ise } C(x)\equiv 1\\
x &\in \left(d,\widetilde{d}\right) \text{ ise } C(x)\equiv \beta^{+}\\
x &\in \left(\widetilde{d},\pi\right] \text{ ise } C(x)\equiv \frac{\beta^{+}}{\widetilde{\beta^{+}}}
\end{aligned}$$

Bu durumlar incelenirse, $C^2(x)\equiv 1$ ve $\beta^{+}\neq 1$ olduğu da düşünülerek, $d=\widetilde{d}$, $C(x)\equiv 1$ ve $\beta^{+}=\widetilde{\beta^{+}}$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\varphi(x,\lambda) &\equiv \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\\
\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} &\equiv \frac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}
\end{aligned}$$

ve $(\alpha,d,\beta)=\left(\widetilde{\alpha},\widetilde{d},\widetilde{\beta}\right)$ olur. $\varphi(x,\lambda)\equiv\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ eşitliğinin (2.1)'de yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
-p(x)\left[p(x)\varphi'\right]'+q(x)\varphi &= \lambda\varphi\\
-p(x)\left[p(x)\varphi'\right]'+\widetilde{q}(x)\varphi &= \lambda\varphi
\end{aligned}$$

ve buradan da, $q(x)=\widetilde{q}(x)$, (h.h.h.y.) elde edilir. Diğer yandan, $\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\equiv\dfrac{\widetilde{\psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}$ eşitliğinin (3.1) ve (3.6) ile birlikte düşünülmesiyle de, $f(\lambda)\equiv\widetilde{f}(\lambda)$ olduğu ispatlanır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır, yani, $M(\lambda)$ fonksiyonu $L(q,f,\alpha,d,\beta)$'yi tek şekilde belirler.

Sonuç 3.2.5: $(\alpha, \Phi(0,\lambda))$ *ikilisi* L *sınır değer problemini tek şekilde belirler, yani,* $\Phi(0,\lambda) = \widetilde{\Phi}(0,\lambda)$ *ve* $\alpha = \widetilde{\alpha}$ *ise* $(0,\pi)$*'de hemen hemen her yerde* $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $f(\lambda) \equiv \widetilde{f}(\lambda)$, $(d,\beta) = \left(\widetilde{d}, \widetilde{\beta}\right)$*'dır.*

İspat: Sonuç3.1.3'e göre, $\Phi(0,\lambda) = \widetilde{\Phi}(0,\lambda)$ ve $\alpha = \widetilde{\alpha}$ ise $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$'dır. Dolayısıyla, Teorem3.2.5'e göre, $L = \widetilde{L}$ olur.

3.3. İki Spektruma Göre Ters Problem:

Bu bölümde, (2.1)-(2.4) probleminin $\{\lambda_n\}$ özdeğer dizisi ile birlikte, (2.2) sınır koşulu değiştirilerek elde edilen yeni problemin $\{\eta_n\}$ özdeğer dizisi verildiğinde, bu diziler yardımıyla problemin tek şekilde belirlenebileceğini göreceğiz. L_1 ile aşağıdaki sınır değer problemini belirtelim.

$$\begin{aligned}
&-p(x)\left[p(x)y'\right]' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,d) \cup (d,\pi) \\
&y(0)\sin\alpha - y'(0)\cos\alpha = 0 \\
&a(\lambda)y(\pi) + b(\lambda)p(\pi)y'(\pi) = 0 \\
&\begin{cases} y(d+0) = \beta y(d-0) \\ \left[p(x)y'(x)\right]_{x=d+0} = \beta^{-1}\left[p(x)y'(x)\right]_{x=d-0} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Dikkat edilirse bu problem, L'de (2.2) sınır koşulu değiştirilerek elde edilmiştir.

$\{\eta_n\}$'in L_1 probleminin özdeğer dizisi olduğunu kabul edelim. Açıktır ki, η_n sayıları,

$$\Delta_1(\lambda) := W\left[\varphi,\psi\right]\big|_{x=0} = \psi(0,\lambda)\sin\alpha - \psi'(0,\lambda)\cos\alpha \tag{3.46}$$

karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıdır ve $\{\eta_n\}$ dizisi, Teorem2.4.2'de $\{\lambda_n\}$ dizisi için verilen özelliklerin tümünü sağlamaktadır. Amacımız $\{\lambda_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ dizilerinin L (ve dolaylı olarak L_1) problemerini tek şekilde belirleyeceğini ispatlamaktır.

$\widetilde{L} = L\left(\widetilde{q},\alpha,\widetilde{f},\widetilde{d},\widetilde{\beta}\right)$ ve $\widetilde{L_1} = L_1\left(\widetilde{q},\alpha,\widetilde{f},\widetilde{d},\widetilde{\beta}\right)$ işaretlemelerini göz önüne alalım. Burada, $der\widetilde{a}\left(\lambda\right) = dera\left(\lambda\right)$, $der\widetilde{b}\left(\lambda\right) = derb\left(\lambda\right)$ olmak üzere $\widetilde{f}\left(\lambda\right) = -\dfrac{\widetilde{a}\left(\lambda\right)}{\widetilde{b}\left(\lambda\right)}$ ve ayrıca d ve $\widetilde{d}$ için $2\gamma\left(d\right) \neq \gamma\left(\pi\right)$ ve $2\gamma\left(\widetilde{d}\right) \neq \gamma\left(\pi\right)$ olduğunu kabul edeceğiz.

Lemma 3.3.1: *$\{\lambda_n\}$ dizisi (d,β) ikilisini tek olarak belirler, yani, $\forall n$ için $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ise $d = \widetilde{d}$ ve $\beta = \widetilde{\beta}$ eşitlikleri geçerlidir.*

İspat: $\alpha \neq 0$, $der\widetilde{a}\left(\lambda\right) = dera\left(\lambda\right) \leq der\widetilde{b}\left(\lambda\right) = derb\left(\lambda\right) = m$ durumunu ele alalım. Diğer durumlarda tamamen benzer yöntemlerle ispat yapılabilir.

(2.28)-(2.30) eşitliklerinden,

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= \Delta_0(\lambda) + O(\lambda^m \exp \tau\gamma(\pi)) \\
\widetilde{\Delta}(\lambda) &= \widetilde{\Delta}_0(\lambda) + O(\lambda^m \exp \tau\gamma(\pi))
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

yazılabilir. Burada,

$$
\begin{aligned}
\Delta_0(\lambda) &= \lambda^{m+\frac{1}{2}} \sin\alpha \left[-\beta^+ \sin\rho\gamma(\pi) + \beta^- \sin\rho\left(2\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) \right] \\
\widetilde{\Delta}_0(\lambda) &= \lambda^{m+\frac{1}{2}} \sin\alpha \left[-\widetilde{\beta}^+ \sin\rho\gamma(\pi) + \widetilde{\beta}^- \sin\rho\left(2\gamma(\widetilde{d}) - \gamma(\pi)\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

dır. Lemma2.3.2'de $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$.mertebeden bir tam fonksiyon olduğu ispatlandı. Buna göre, Hadamart teoreminden (Teorem1.1.12)

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= C_1 \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \\
\widetilde{\Delta}(\lambda) &= C_2 \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\widetilde{\lambda}_n}\right)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $\forall n$ için $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ olduğundan,

$$
\Delta(\lambda) \equiv C\widetilde{\Delta}(\lambda) \tag{3.49}
$$

özdeşliği geçerlidir. (3.49) eşitliğinden $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$
\Delta_0(\lambda) - C\widetilde{\Delta}_0(\lambda) = C\left[\widetilde{\Delta}(\lambda) - \widetilde{\Delta}_0(\lambda)\right] - \left[\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right] \tag{3.50}
$$

yazılabilir. (3.48)'deki $\Delta_0(\lambda)$ ve $\widetilde{\Delta}_0(\lambda)$ ifadelerini (3.50)'de yerine yazarsak,

$$
\begin{aligned}
& C\left[\widetilde{\Delta}(\lambda) - \widetilde{\Delta}_0(\lambda)\right] - \left[\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right] \\
&= \lambda^{m+\frac{1}{2}} \sin\alpha \left[-\beta^+ \sin\rho\gamma(\pi) + \beta^- \sin\rho\left(2\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) \right] \\
&\quad - C\lambda^{m+\frac{1}{2}} \sin\alpha \left[-\widetilde{\beta}^+ \sin\rho\gamma(\pi) + \widetilde{\beta}^- \sin\rho\left(2\gamma(\widetilde{d}) - \gamma(\pi)\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

elde ederiz. (3.51) eşitliğinin her iki yanını $\sin\rho\gamma(\pi)$ ile çarparak, T herhangi bir pozitif reel sayısı olmak üzere, $(0,T)$ aralığında ρ'ya göre integralleyelim:

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{\sin\alpha}\int_0^T \left\{C\left[\widetilde{\Delta}(\lambda)-\widetilde{\Delta}_0(\lambda)\right]-\left[\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right]\right\}\sin\rho\gamma(\pi)d\rho \\
&=\int_0^T \lambda^{m+\frac{1}{2}}\left[-\beta^+\sin\rho\gamma(\pi)+\beta^-\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)\right]\sin\rho\gamma(\pi)d\rho \qquad (3.52)\\
&-C\int_0^T \lambda^{m+\frac{1}{2}}\left[-\widetilde{\beta}^+\sin\rho\gamma(\pi)+\widetilde{\beta}^-\sin\rho\left(2\gamma(\widetilde{d})-\gamma(\pi)\right)\right]\sin\rho\gamma(\pi)d\rho
\end{aligned}$$

$\lambda=\rho^2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{\sin\alpha}\int_0^T \left\{C\left[\widetilde{\Delta}(\lambda)-\widetilde{\Delta}_0(\lambda)\right]-\left[\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right]\right\}\sin\rho\gamma(\pi)d\rho \\
&=\int_0^T \rho^{2m+1}\left[-\beta^+\sin\rho\gamma(\pi)+\beta^-\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)\right]\sin\rho\gamma(\pi)d\rho \qquad (3.53)\\
&-C\int_0^T \rho^{2m+1}\left[-\widetilde{\beta}^+\sin\rho\gamma(\pi)+\widetilde{\beta}^-\sin\rho\left(2\gamma(\widetilde{d})-\gamma(\pi)\right)\right]\sin\rho\gamma(\pi)d\rho
\end{aligned}$$

ve buradan da,

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{\sin\alpha}\int_0^T \frac{C\left[\widetilde{\Delta}(\lambda)-\widetilde{\Delta}_0(\lambda)\right]-\left[\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right]}{\rho^{2m}}\sin\rho\gamma(\pi)d\rho \\
&=\int_0^T \rho\left[-\beta^+\sin\rho\gamma(\pi)+\beta^-\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)\right]\sin\rho\gamma(\pi)d\rho \qquad (3.54)\\
&-C\int_0^T \rho\left[-\widetilde{\beta}^+\sin\rho\gamma(\pi)+\widetilde{\beta}^-\sin\rho\left(2\gamma(\widetilde{d})-\gamma(\pi)\right)\right]\sin\rho\gamma(\pi)d\rho
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \frac{C}{\sin\alpha}\int_0^T \frac{C\left[\widetilde{\Delta}(\lambda)-\widetilde{\Delta}_0(\lambda)\right]-\left[\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right]}{\rho^{2m}}\sin\rho\gamma(\pi)d\rho \\
I_2 &:= \int_0^T \rho\left[-\beta^+\sin\rho\gamma(\pi)+\beta^-\sin\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)\right]\sin\rho\gamma(\pi)d\rho \qquad (3.55)\\
I_3 &:= C\int_0^T \rho\left[-\widetilde{\beta}^+\sin\rho\gamma(\pi)+\widetilde{\beta}^-\sin\rho\left(2\gamma(\widetilde{d})-\gamma(\pi)\right)\right]\sin\rho\gamma(\pi)d\rho
\end{aligned}$$

şeklinde işaretlemeleri kabul ederek bu integralleri değerlendirelim:

(3.47)'ye göre reel ρ'lar için $\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)=O(\rho^{2m})$ ve $\widetilde{\Delta}(\lambda)-\widetilde{\Delta}_0(\lambda)=O(\rho^{2m})$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \frac{C}{|\sin\alpha|}\int_0^T |\sin\rho\gamma(\pi)|\,d\rho \\
&\leq \frac{CT}{|\sin\alpha|}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise $I_1 = O(T)$ demektir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^T \rho\left[-\beta^+ \sin\rho\gamma(\pi) + \beta^- \sin\rho\left(2\gamma(d) - \gamma(\pi)\right)\right] \sin\rho\gamma(\pi) d\rho \\
&= -\beta^+ \int_0^T \rho \sin^2\rho\gamma(\pi) d\rho + \beta^- \int_0^T \rho \sin\rho\left(2\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) \sin\rho\gamma(\pi) d\rho \\
&= -\frac{\beta^+}{2} \int_0^T \rho\left[1 - \cos 2\rho\gamma(\pi)\right] d\rho \\
&\quad + \frac{\beta^-}{2} \int_0^T \rho\left[\cos 2\rho\left(\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) - \cos 2\rho\gamma(d)\right] d\rho \\
&= -\frac{\beta^+}{4} T^2 + \int_0^T \rho \cos 2\rho\gamma(\pi) d\rho \\
&\quad + \frac{\beta^-}{2} \int_0^T \rho\left[\cos 2\rho\left(\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) - \cos 2\rho\gamma(d)\right] d\rho \\
&= -\frac{\beta^+}{4} T^2 + \frac{\beta^+}{4\gamma(\pi)} \left\{T \sin 2T\gamma(\pi) + \frac{\cos 2T\gamma(\pi) - 1}{2\gamma(\pi)}\right\} \\
&\quad + \frac{\beta^-}{4\left(\gamma(d) - \gamma(\pi)\right)} \left\{T \sin 2T\left(\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) - \frac{\cos 2T\left(\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) - 1}{2\left(\gamma(d) - \gamma(\pi)\right)}\right\} \\
&\quad - \frac{\beta^-}{4\gamma(d)} \sin 2T\gamma(d) \\
&= \frac{-\beta^+}{4} T^2 + O(T)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$I_3 = -C\frac{\widetilde{\beta}^+}{4} T^2 + O(T)$$

olduğundan, (3.54) eşitliğinden,

$$\frac{C\widetilde{\beta}^+ - \beta^+}{4} T^2 = O(T)$$

veya,

$$\frac{C\widetilde{\beta}^+ - \beta^+}{4} = O(T^{-1})$$

elde edilir. Buradan, $T \to \infty$ iken limit alınırsa,

$$\beta^+ = C\widetilde{\beta}^+ \tag{3.56}$$

bulunur.

Öncelikle $d = \widetilde{d}$ kabul ederek $\beta = \widetilde{\beta}$ olduğunu gösterelim. Daha sonra $d \neq \widetilde{d}$ olmasının imkansız olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

$d = \widetilde{d}$ olsun. (3.51) eşitliğinin her iki yanını $\sin\rho\left(2\gamma\left(d\right) - \gamma(\pi)\right)$ ile çarparak, $(0, T)$ aralığında ρ'ya göre integralleyelim:

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{\sin\alpha}\int_0^T \frac{C\left[\widetilde{\Delta}(\lambda) - \widetilde{\Delta}_0(\lambda)\right] - \left[\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right]}{\rho^{2m}} \sin\rho\left(2\gamma\left(d\right) - \gamma(\pi)\right) d\rho \\
&\quad = -\beta^+ \int_0^T \rho \sin\rho\gamma(\pi) \sin\rho\left(2\gamma\left(d\right) - \gamma(\pi)\right) d\rho \\
&\quad\quad +\beta^- \int_0^T \rho \sin^2\rho\left(2\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) d\rho \\
&\quad\quad +C\widetilde{\beta}^+ \int_0^T \rho \sin\rho\gamma(\pi) \sin\rho\left(2\gamma\left(d\right) - \gamma(\pi)\right) d\rho \\
&\quad\quad -C\widetilde{\beta}^- \int_0^T \rho \sin^2\rho\left(2\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) d\rho
\end{aligned} \tag{3.57}$$

eşitliğinde yine,

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \frac{C}{\sin\alpha}\int_0^T \frac{C\left[\widetilde{\Delta}(\lambda) - \widetilde{\Delta}_0(\lambda)\right] - \left[\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right]}{\rho^{2m}} \sin\rho\left(2\gamma\left(d\right) - \gamma(\pi)\right) d\rho \\
I_2 &:= -\beta^+ \int_0^T \rho \sin\rho\gamma(\pi) \sin\rho\left(2\gamma\left(d\right) - \gamma(\pi)\right) d\rho \\
&\quad +\beta^- \int_0^T \rho \sin^2\rho\left(2\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) d\rho \\
I_3 &:= C\widetilde{\beta}^+ \int_0^T \rho \sin\rho\gamma(\pi) \sin\rho\left(2\gamma\left(d\right) - \gamma(\pi)\right) d\rho \\
&\quad -C\widetilde{\beta}^- \int_0^T \rho \sin^2\rho\left(2\gamma(d) - \gamma(\pi)\right) d\rho
\end{aligned} \tag{3.58}$$

işaretlemelerini göz önüne alalım. (3.56)'yı ispatlarken yapıldığı gibi yine bu integraller değrlendirilirse,

$$\begin{aligned}
I_1 &= O(T) \\
I_2 &= C\frac{\widetilde{\beta}^-}{4}T^2 + O(T)
\end{aligned}$$

$$I_3 = C\frac{\widetilde{\beta}^-}{4}T^2 + O(T)$$

bulunur. (3.54) eşitliğine göre,

$$\frac{C\widetilde{\beta}^{-}-\beta^{-}}{4}T^{2}=O(T)$$

veya,

$$\frac{C\widetilde{\beta}^{-}-\beta^{-}}{4}=O(T^{-1})$$

olduğundan, $T\to\infty$ iken limit alınırsa,

$$\beta^{-}=C\widetilde{\beta}^{-} \tag{3.59}$$

elde edilir. (3.56) ve (3.59) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, $\beta=C\widetilde{\beta}$; taraf tarafa çıkarılırsa, $\beta^{-1}=C\widetilde{\beta}^{-1}$ bulunur. Bu ise $C=1$, yani $\beta=\widetilde{\beta}$ demektir. Böylece $d=\widetilde{d}$ iken $\beta=\widetilde{\beta}$ olduğu gösterildi. Şimdi de $d\neq\widetilde{d}$ olmasının imkansız olduğunu gösterelim.

$d\neq\widetilde{d}$ olsun. Yeniden, (3.51) eşitliğinin her iki yanını $\sin\rho\left(2\gamma\left(d\right)-\gamma(\pi)\right)$ ile çarparak, $(0,T)$ aralığında ρ'ya göre integrallersek:

$$\begin{aligned}
\frac{C}{\sin\alpha}\int_0^T &\frac{C\left[\widetilde{\Delta}(\lambda)-\widetilde{\Delta}_0(\lambda)\right]-\left[\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right]}{\rho^{2m}}\sin\rho\left(2\gamma\left(d\right)-\gamma(\pi)\right)d\rho\\
&=-\beta^{+}\int_0^T\rho\sin\rho\gamma(\pi)\sin\rho\left(2\gamma\left(d\right)-\gamma(\pi)\right)d\rho\\
&\quad+\beta^{-}\int_0^T\rho\sin^2\rho\left(2\gamma(d)-\gamma(\pi)\right)d\rho\\
&\quad+C\widetilde{\beta}^{+}\int_0^T\rho\sin\rho\gamma(\pi)\sin\rho\left(2\gamma\left(d\right)-\gamma(\pi)\right)d\rho\\
&\quad-C\int_0^T\rho\widetilde{\beta}^{-}\sin\rho\left(2\gamma(\widetilde{d})-\gamma(\pi)\right)\sin\rho\left(2\gamma\left(d\right)-\gamma(\pi)\right)d\rho
\end{aligned} \tag{3.60}$$

elde ederiz. Eşitliğin her iki tarafındaki integrallerin değerlendirilmesiyle, benzer şekilde,

$$O(T)=\frac{\beta^{-}}{4}T^{2}$$

veya

$$\frac{\beta^{-}}{4}=O(T^{-1}) \tag{3.61}$$

bulunur. Buradan da, $T\to\infty$ iken limit alınırsa, $\beta^{-}=0$ çıkar ki bu imkansızdır. Çünkü, $\beta^{-}=0$ ise $\beta=\beta^{-1}$ ve dolayısıyla $\beta=1$ olur. Oysa ki başlangıçta $\beta \neq 1$ kabul edilmiştir. Böylece $d \neq \widetilde{d}$ olamayacağını göstermiş olduk. Dolayısıyla, $\{\lambda_n\} = \left\{\widetilde{\lambda}_n\right\}$ olduğunda, $d = \widetilde{d}$ ve $\beta = \widetilde{\beta}$ eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 3.3.2: $\{\lambda_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ *dizileri* L'yi *tek şekilde belirler, yani,* $\forall n$ *için* $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ *ve* $\eta_n = \widetilde{\eta}_n$ *ise,* $(0, \pi)$*'de hemen hemen her yerde* $q(x) = \widetilde{q}(x)$*,* $f(\lambda) \equiv \widetilde{f}(\lambda)$*,* $(d, \beta) = \left(\widetilde{d}, \widetilde{\beta}\right)$*'dır.*

İspat: Lemma3.3.1'de $(d, \beta) = \left(\widetilde{d}, \widetilde{\beta}\right)$ olduğu gösterildi. Ayrıca yine bu lemmanın ispatnda

$$\Delta(\lambda) \equiv C\widetilde{\Delta}(\lambda)$$

eşitliğindeki C sabitinin 1'e eşit olduğu da gösterildi. Buna göre, $\{\lambda_n\} = \left\{\widetilde{\lambda}_n\right\}$ iken $\Delta(\lambda) \equiv \widetilde{\Delta}(\lambda)$ eşitliği geçerlidir. Yani sıfırları, karakteristik fonksiyonu tek olarak belirler. Dolayısıyla, $\{\eta_n\} = \{\widetilde{\eta}_n\}$ iken $\Delta_1(\lambda) \equiv \widetilde{\Delta}_1(\lambda)$ olur. Bu durumda, (3.9) ve (3.46) eşitlikleri birlikte düşünülürse, $M(\lambda) \equiv \widetilde{M}(\lambda)$ olduğu kolayca görülür. Bu ise, Teorem3.2.4'den dolayı, $L = \widetilde{L}$ demektir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.3:

Aşağıdaki verilerin her biri (2.1)-(2.4) sınır değer problemini tek olarak belirler:

1) $M(\lambda)$ *Weyl fonksiyonu,*

2) $\Phi(0, \lambda)$ *Prüfer açısı ve* α *açısı,*

3) $\{\lambda_n\}$ *ve* $\{\eta_n\}$ *özdeğer dizileri.*

KAYNAKLAR

Ambartsumyan, V. A.(1929). Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53, 690-695.

Amirov, R. Kh.(2005). On a System of Dirac Differential Equations with Discontinuity Conditions Inside an Interval, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 57, No.5. 712-726.

Amirov, R. Kh.(2006). On Sturm-Liouville Operators with Discontinuity Conditions Inside an Interval J. Math. Anal. Appl. 317, 163-176.

Amirov, R. Kh., Ozkan, A. S., Keskin, B.(2009). Inverse Problems for Impulsive Sturm-Liouville Operator with Spectral Parameter Linearly Contained in Boundary Conditions, Integral Transforms and Special Functions, Vol. 20, No. 8, 607–618.

Andersson, L-E.(1988). Inverse eigenvalue problems with discontiuous coefficients, Inverse Problems, 4, 353-397.

Andersson, L-E.(1988). Inverse Eigenvalue Problems for a Sturm-Liouville Equation in Impedance Form, Inverse Problems 4, 929-971.

Ben Amara, Zh.(1996). Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem with a small parameter and a spectral parameter in the boundary condition Math. Notes 60 456–8.

Ben Amara, Zh. and Shkalikov, A. A.(1999). The Sturm-Liouville problem with physical and spectral parameters in the boundary condition Math. Notes 66 127–34.

Bennewitz, C.(2001). A proof of the local Borg-Marchenko theorem, Comm. Math. Phys. 218 131-132.

Binding, P. A., Browne, P. J., Seddighi, K.(1993). Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 37 57-72.

Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A.(2000). Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions, J. London Math. Soc. 62 161-182.

Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A.(2001). Transformations between Sturm-Liouville problems with eigenvalue dependent and independent boundary conditions Bull. London Math. Soc. 33 749-57.

Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A.(2004). Equivalence of inverse Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter, J. Math. Anal. Appl. 291 246-261.

Borg, G.(1945). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78, 1-96.

Carlson, R.(1994). An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with discontiuous coefficients, Proceed. Amer. Math. Soc. Volume: 120, No:2 475-484.

Coleman, C. F. and McLaughlin, J. R.(1993). Solution of inverse spectral problems for an impedance with integrable derivative, I, II, Comm. Pure and Appl. Math. 46, 145-184, 185-212.

Delsarte, J.(1938). Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.

Delsarte, J. and Lions, J.(1957). Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.

Freiling, G. and Yurko, V. A.(2001). Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications, Nova Science, New York.

Fulton, C. T.(1977). Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A77, 293-308.

Fulton, C. T.(1980). Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A87, 1-34.

Gasimov, M. G. and Levitan, B. M.(1964). About Sturm-Liouville Differential. Operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3.

Gasymov, M. G. and Levitan, B. M.(1966). The Inverse Problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

Gasymov, M. G. and Dzhabiev, T. T.(1975). On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator, Baku/ELM., 46-71.

Gelfand, I. M. and Levitan, B. M.(1951). On Determination of a Differential Equation by its Spectral Function Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 15, 309-60 (in Russian).

Guliyev, N. J.(2005). Inverse eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions, Inverse Problems, 21, 1315-1330.

Hald, O. H.(1984). Discontinuous Inverse Eigenvalue Problem Commun. Pure Appl. Math. 37 539-77.

Kapustin, N. Yu.(1999). Oscillation properties of solutions to a nonselfadjoint spectral problem with spectral parameter in the boundary condition Differ. Eqns. 35 1031-4.

Kapustin, N. Yu. and Moiseev, E. I.(1997). Spectral problems with the spectral parameter in the boundary condition Differ. Eqns 33 116-20.

Kapustin, N. Yu. and Moiseev, E. I.(2001). A remark on the convergence problem for spectral expansions corresponding to a classical problem with spectral parameter in the boundary condition Differ. Eqns 37. 1677-83.

Kerimov, N. B. and Mamedov, Kh. K.(1999). On a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions, Sibirsk. Math. Zh. 40(2), 325–335. English translation: Siberian Math. J. 40(2) (1999), 281–290.

Kerimov, N. B. and Mirzoev, V. S.(2003). On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition Siberian Math. J. 44 813-6.

Krein, M. G. and Levin, B. Ya.(1948). On Entire Almost Periodic Functions of Exponential Type, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 64,No.3, 285-287.

Krein, M. G.(1951). Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76, 21-24.

Krein, M. G.(1951). Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem Dokl. Akad. Nauk SSSR 76, 21-4 (in Russian).

Krein, M. G.(1954). On a Method of the Effective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95, 767-770.

Levin, B. Ya.(1971). Entire Functions, Moscow University, Moscow.

Levinson, N.(1949). The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B., 25-30.

Levinson, N.(1949). Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators, Casopis. Pest. Mat. Fys. 74 17-20.

Levitan, B. M.(1964). Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.

Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S.(1970). Introduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.

Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S.(1988). Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.

Liouville, J.(1836). Memoire sur le developpment des fonctions ou parites de fonctions en series dont les divers terms sont assujettis a satisfaire a une meme equation differentielles du second ordre contenant un parametre variable, J. de Mathematique, 1, 253-265.

Marchenko, V.A.(1950). Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72, 457-560.

Marchenko, V. A.(1977). Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev.

McLaughlin, J. R.(1986). Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, SIAM Rev. 28 53-72.

McNabb, A., Anderssen, R. and Lapwood, E.(1976). Asymptotic behaviour of the eigenvalues of a Sturm–Liouville system with discontiuous coefficients, J. Math. Anal. Appl. 54 741-751.

Mennicken, R., Schmid, H. and Shkalikov, A. A.(1998). On the eigenvalue accumulation of Sturm-Liouville problems depending nonlinearly on the spectral parameter, Math. Nachr. 189, 157-170.

Meschanov, V. P. and Feldstein, A. L.(1980). Automatic Design of Directional Couplers, Sviaz, Moscow.

Mukhtarov, O. Sh.(1994). Discontinuous boundary-value problem with spectral parameter in boundary conditions, Turkish J. Math. 18, 183-192.

Naimark, M. A.(1968). Linear differential operators. Part I, II: Linear differential operators in Hilbert space. Frederick Ungar Publishing Co.

Poisson, S. D.(1820). Memoire sur la maniere d'exprimer les functions par des series periodiques, J. Ecole Polytechnique 18 417-489.

Povzner, A. V.(1948). On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb., 23.

Pöschel, J. and Trubowitz, E.(1987). Inverse Spectral Theory, Pure Appl. Math. Vol 130, Orlando, FL:Academic.

Prüfer, H.(1926). Neue Herleitung der Sturm Liouvilleschen Reihenentwicklung Stetiger Funktionen, Math. Ann. 95 409-518.

Russakovskii, E. M.(1975). Operator treatment of boundary problems with spectral parameters entering via polynomials in the boundary conditions, Funct. Anal. Appl. 9 358-359.

Schmid, H. and Tretter, C.(2002). Singular Dirac Systems and Sturm–Liouville Problems Nonlinear in the Spectral Parameter, Journal of Differential Equations, Volume 181, Issue 2, Pages 511-542.

Shkalikov, A. A.(1986). Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions. English transl. J. Soviet Math. (6) 33, 1311-1342.

Simon, B.(1999). A new approach to inverse spectral theory, I. Fundamental formalism, Ann. of Math. 150 1029-1057.

Sturm, J. C.(1836). Sur les equations differentielle lineares du second ordre, J. de Mathematique, 1, 106-186.

Tikhonov, A. N.(1949). Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 797-800.

Titchmarsh, E. C.(1932). The Theory of Functions, Oxford at the clarendon press, London.

Weyl, H.(1910). Über gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Ann. 68 220-269.

Zhdanovich, V. F.(1960). Formulas for the Zeros of Dirichlet Polynomials and Quasipolynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 135, No.8, 1046-1049.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	A. Sinan ÖZKAN
Doğum Yeri ve Tarihi	Sivas, 12/04/1981
Medeni Hali	Evli
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 58140-Sivas
E-posta Adresi	sozkan@cumhuriyet.edu.tr

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	H. M. Sabancı Lisesi, 1998
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2002
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2005

İş Tecrübesi

Cumhuriyet Üniversitesi	Araştırma görevlisi, 2003-