(σ, τ) −TÜREVLİ ASAL HALKALAR İLE İLGİLİ BAZI GENELLEŞTİRMELER

SEDA OĞUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$(\sigma,\tau)-$TÜREVLİ ASAL HALKALAR İLE İLGİLİ BAZI GENELLEŞTİRMELER

SEDA OĞUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMETİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ÖZNUR GÖLBAŞI

2010

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

Üye : Doç. Dr. Öznur GÖLBAŞI

Üye : Doç. Dr. Metin AKDAĞ

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

/ /2010

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Sezai ELAGÖZ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosunun 05.01.1984 tarihli toplantısında kabul edilen ve daha sonra 30.12.1993 tarihinde C.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünce hazırlanan ve yayınlanan "Yüksek Lisans ve Doktora tez yazım Kılavuzu" adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

(σ, τ) −TÜREVLİ ASAL HALKALAR İLE İLGİLİ BAZI GENELLEŞTİRMELER

Seda OĞUZ

Cumhuriyet Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Öznur GÖLBAŞI

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusuyla ilgili genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tez konusuyla ilgili yapılmış olan çalışmalar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde ise Posner'ın Herstein'in ve Daif-Bell'in teoremleri [Asraf 2002], [Aydın-Kaya 1992] ve [Aydın 2008] çalışmaları esas alınarak, R asal halkasının sıfırdan farklı ve her $u \in U$ için $u^2 \in U$ şartını sağlayan bir Lie ideali ve (σ, τ) −türevi için ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Türev, Lie ideal, $(\sigma, \tau) - türev$, merkezil dönüşüm.

SUMMARY

MSc Thesis

SOME GENERALIZATIONS IN PRIME RINGS WITH

(σ, τ) −DERIVATION

Seda OĞUZ

Cumhuriyet University

Graduate School of Natural and Applied

Science of Department of Mathematics

Supervisor: Asoc. Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

The thesis can be divided into three sections.

In Section I, a descriptive introduction was provided on the general terminology of the subject.

In Section II, some important research articles relevant to the subject were discussed.

The final section describes the work performed on the subject. It was based on Posner's, Herstein's and Daif-Bell's and tried to prove that every $u \in U$ for $u^2 \in U$, where U is not equal to zero of R prime ring satisfies the condition for Lie ideal and $(\sigma, \tau) - derivation$.

Key Words: Derivation, Lie ideal, $(\sigma, \tau) - derivation$, centralizing map.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Öznur GÖLBAŞI'na içten teşekkürlerimi sunarım.

.

GİRİŞ

R bir halka, $d: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

koşulu sağlanıyor ise d ye R halkasının bir türevi denir.

Asal halkaların türevleri üzerine ilk çalışma 1957 yılında E.C. Posner tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Posner, asal halkaların değişmeliliğini türev yardımıyla incelemiştir. Son 50 yıldır türevler ve halka yapısı arasındaki ilişkiyi inceleyen pek çok çalışma yapılmıştır. Teorinin gelişimiyle beraber daha sonraki yıllarda farklı türev kavramları tanımlanmış, asal halkalarda bu türevlerin sağladığı özellikler incelenmiştir. Bu türev kavramları içinde genelleştirilmiş türevler ve $(\sigma, \tau) -$ türevler yer almaktadır.

R bir halka, $f: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y)$$

koşulunu sağlayan bir $d: R \to R$ türevi varsa f ye R halkasının d ile belirlenmiş genelleştirilmiş türevi denir. Bu tanım 1989 yılında Bresar tarafından verilmiştir. Hvala 1998 de asal halkaların genelleştirilmiş türevlerinin cebirsel özelliklerini incelemiştir. Daha önce adi türevli asal halkalar için elde edilmiş bazı sonuçlar genelleştirilmiş türevler için araştırılarak önemli bulgular elde edilmiştir. Bu çalışmalar zamanla asal halkalardan, halkanın ideali ve Lie idealleri üzerinde incelenmeye başlanmıştır. Bir taraftan da türev yerine $(\sigma, \tau) - türev$ alınarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

R bir halka, $d: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. $\sigma, \tau: R \to R$ iki fonksiyon olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$$

koşulu sağlanıyorsa d ye R halkasının bir $(\sigma, \tau) - türevi$ denir.

Bir R halkasında $x, y \in R$ için $xy - yx$ elemanı komütatör çarpım olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir. $\{z \in R | zx = xz, \forall x \in R\}$ kümesine ise R halkasının merkezi denir ve Z ile gösterilir.

X ve Y, R halkasının iki alt kümesi olsun. $[X, Y]$ ile $xy - yx$, $x \in X, y \in Y$ elemanları tarafından üretilen toplamsal alt grup gösterilir. Buna göre, U, R halkasının bir toplamsal alt grubu olmak üzere eğer $[U, R] \subseteq U$ oluyorsa U ya R halkasının bir Lie ideali denir.

Bu tanımlar ışığında $\sigma, \tau: R \to R$ iki fonksiyon olmak üzere her $x, y \in R$ için
$x\sigma(y) - \tau(y)x$ elemanı ile $[x, y]_{\sigma,\tau}$ ile gösterilir ve $(\sigma, \tau) -$komütatör çarpım olarak adlandırılır.

$C_{\sigma,\tau} = \{c \in R | c\sigma(x) = \sigma\tau(x)c, \forall x \in R\}$ kümesine ise R halkasının (σ, τ) −merkezi denir. 1 birim dönüşüm olmak üzere R halkasının $(1,1)$ −merkezinin Z olduğu açıktır.

S, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi $F: R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere eğer her $x \in R$ için $[F(x), x] = 0$ oluyorsa F ye R halkasının bir kommuting (commuting) dönüşümü denir. Benzer şekilde her $x \in R$ için $[F(x), x] \in Z$ sağlanıyorsa F ye R halkasının merkezil dönüşümü denir.

1957 yılında E. C. Posner merkezil türeve sahip olan bir asal halkanın değişmeli olduğunu ispatlamıştır. Bu teorem Posner'ın II. Teoremi olarak da adlandırılır. Posner dan sonra pek çok yazar bu konuyla ilgili halkanın uygun bir alt kümesini alarak genelleştirmeler yapmıştır. 1973 de R. Awtar Lie idealler üzerinde merkezil olan türevleri incelemiştir. Aynı teorem P.H. Lee ve T.K. Lee tarafından U, R asal halkasının bir Lie ideali ve her $u \in U$ için $[d(u), u] \in Z$ koşulu altında $U \subset Z$ olduğu gösterilerek ispatlanmıştır. Bu teorem 2006 yılında N. Argaç ve E. Albaş tarafından asal halkada genelleştirilmiş türev alınarak incelenmiştir. 2009 yılında Ö. Gölbaşı ise aynı teoremi R yarıasal halka, f, R nin genelleştirilmiş türevi için ispatlamıştır. Öte yandan kommuting (commuting) veya merkezil dönüşümler bir halkanın T otomorfizması ve hatta T toplamsal dönüşümü için de incelenmiştir. Bu konuyla ilgili çeşitli çalışmalar vardır.

Posner'ın bu teoremi d türevi yerine (σ, τ) −türev alınarak da araştırılmıştır. Y. Hirano ve H. Tominaga bir R asal halkasının sıfırdan farklı U Lie ideali ve d, (σ, τ) −türev olmak üzere her $u \in U$ için $[d(u), u] = 0$ sağlanıyorsa R nin değişmeli halka olduğunu ispatlamışlardır. Daha sonra bu teorem N. Argaç, A. Kaya ve A. Kısır tarafından $d, (\sigma, \tau) - türev$ ve $U \neq 0$ sağ ideal olmak üzere her $u \in U$ için $[d(u), u]_{\sigma,\tau} = 0$ sağlanıyor ise R değişmelidir veya $\sigma = \tau$ dur sonucuna genelleştirilmiştir. 1988 yılında K. Kaya ise bu sonucu "her $u \in U$ için $[d(u), u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$, ise R değişmelidir" biçiminde araştırmıştır. Aynı teoremler 2002 yılında M. Asraf ve N.Rehman tarafından ele alınmıştır.

1979 yılında I. N. Herstein, R, karakteristiği ikiden farklı asal olan bir halka için $[a, d(R)] = 0$ koşulunu sağlayan a elemanının halkanın merkezinde olduğunu ispatlamıştır. Herstein'ın bu teoremi $[a, d(R)] \subset Z$ koşulu altında P. H. Lee ve T. K. Lee tarafından, U, R halkasının merkezi tarafından kapsanılmayan bir Lie ideali olmak üzere $[a, d(U)] = 0$ koşulu altında ise J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından genelleştirilmiştir. Daha sonra P. H. Lee ve T. K. Lee, U, R halkasının bir Lie ideali ve $[a, d(U)] \subset Z$ iken $a \in Z$ olduğunu kanıtladılar. N.Argaç ve E. Albaş, bu koşulu 2004 yılında R asal halkası üzerinde genelleştirilmiş türev için, Ö. Gölbaşı ve K. Kaya ise, U, R halkasının Lie ideali ve (f, d), genelleştirilmiş türevi için incelediler. Aynı teorem N. Aydın ve K. Kaya tarafından ise R asal halkasının bir d $(\sigma, \tau) - türevi$ için $[d(R), a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ biçiminde genelleştirildi.

Öte yandan 1992 yılında Daif ve Bell tarafından “d, R yarı-asal halkasının sıfırdan farklı türevi ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olmak üzere aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa I, R halkasının merkezindedir;

i. $d([x,y]) = \mp[x,y]$, $\forall x, y \in I$,

ii. $x, y \in I$ için $d([x,y]) = [x,y]$ veya $d([x,y]) = -[x,y]$.”

teoremi ispatlandı. Bu sonuç 2006 yılında N. Argaç tarafından incelendi. Ö. Gölbaşı aynı sonucu bir yarı-asal halkada (f, d) genelleştirilmiş türevi için, Ö. Gölbaşı ve E. Koç ise bir asal halkanın Lie ideali için genelleştirdi.

Bu çalışmanın amacı Posner’ın, Herstein’in, Daif-Bell’in yukardaki teoremlerini R asal halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ şartını sağlayan bir U Lie ideali ve $d, (\sigma, \tau)$ −türevi için ispatlamaktır.

I. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

Tanım 1.1: R, boş olmayan bir küme ve R üzerinde toplama ve çarpma ikili işlemleri tanımlı olsun. Buna göre aşağıdaki koşulları sağlarsa R ye bir halka denir ve $(R,+,.)$ ile gösterilir.

i. $(R,+)$ değişmeli grup,

ii. $\forall a,b,c \in R$ için $a(bc)=(ab)c$,

iii. $\forall a,b,c \in R$ için $a(b+c)=ab+ac$ ve $(a+b)c=ac+bc$.

Ayrıca

iv. $\forall a,b \in R$ için $ab=ba$ ise R halkasına değişmeli (komütatif) halka denir.

v. $\forall a \in R$ için $a.1_R=1_R.a$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa R halkasına birimli halka denir.

Tanım 1.2: R bir halka ve S, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer S kümesi R deki toplama ve çarpma işlemleri altında bir halka ise S ye R nin alt halkası denir.

Tanım 1.3: R bir halka ve I, R nin bir alt halkası olsun.

i. Her $r \in R$, $a \in I$ için $ra \in I$ ise I ya R halkasının sol ideali,

ii. Her $r \in R$, $a \in I$ için $ar \in I$ ise I ya R halkasının sağ ideali denir.

I, R nin hem sol, hem de sağ ideali ise I ya R halkasının bir ideali denir.

Tanım 1.4: R bir halka ve A, B ve P, R nin idealleri olsun. $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının asal ideali denir.

Teorem 1.5: R bir halka ve P, R nin bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) P asal idealdir.

(2) $\forall a,b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) $\forall a,b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(4) U,V R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya

$V \subseteq P$ dir.

(5) U,V R halkasının iki sol ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): P asal ideal olsun. $\forall a,b \in R$ için $aRb \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $RaRbR \subseteq P$ olur. Buradan $RaRRbR \subseteq P$ olur. P asal ideal olduğu için $RaR \subseteq P$ veya

$RbR \subseteq P$ bulunur. $(a) = A$ olsun. $A^3 \subseteq RaR \subseteq P$ ve yine P asal ideal olduğundan $A^2 \subseteq P$ veya $A \subseteq P$ olur. Böylece $A = (a) \subseteq P$ elde edilir. Buradan $a \in P$ bulunur. Benzer şekilde $b \in P$ gösterilir.

(2) ⇒(3): $\forall a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. Kabul edelim ki $(a)(b) \subseteq P$ olsun. Bu durumda; $aRb \subseteq (a)(b) \subseteq P$ olduğundan $aRb \subseteq P$ olur. Hipotezden, $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) ⇒(4): $\forall a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. U, V R halkasının iki sol ideali ve $UV \subseteq P$ olsun. Bu durumda $U \not\subset P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u \in U$ ve $u \notin P$ olacak biçimde bir u elemanı vardır. Keyfi bir $v \in V$ alalım. $(u)(v) \subseteq UV + UVR \subseteq P$ dir. Bu durumda hipotezden $u \in P$ veya $v \in P$ olur.

(3) ⇒(5): Benzer şekilde gösterilir.

(4) ⇒(1) : Tanımdan (4) ⇒(1) ve (5) ⇒(1) olduğu açıktır.

Tanım 1.6: (0) ideali asal ideal olan halkaya asal halka denir.

Önerme 1.7: R bir halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(1) R asal halkadır.

(2) Eğer $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ ise bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

(3) R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.

(4) R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.

İspat: : (1) ⇒ (2): R asal halka olsun. Bu durumda (0) ideali asal idealdir. $\forall a, b \in R$ için $aRb = (0)$ olduğunu kabul edelim. Teorem 1.5 (2) den $a \in (0)$ veya $b \in (0)$ dır. Bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ olur.

(2) ⇒(3): I, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. R halkasının sağ idealinin sağ sıfırlayanı kümesi $A = \{a \in R | xa = 0, \forall x \in I\}$ ile tanımlansın. Bu durumda I sağ ideal olduğundan $IRA \subseteq IA = \{0\}$ olur. Hipotezden $I = \{0\}$ veya $A = \{0\}$ dır. $I \neq \{0\}$ olduğundan $A = \{0\}$ elde edilir.

(2) ⇒(4): Benzer şekilde gösterilir.

(4) ⇒(1): Tanımdan açıktır.

Tanım 1.8: R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. $I^n = (0)$ olacak biçimde $\exists n \in Z^+$ varsa I ya R nin nilpotent ideali denir.

Tanım 1.9: R bir halka, A ve Q, R halkasının iki ideali olsun. $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ise Q idealine R halkasının yarı-asal ideali denir.

Teorem 1.10: R bir halka ve Q, R halkasının bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

i. Q yarı-asal idealdir

ii. $a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$

iii. $a \in R$ için $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$

iv. U, R halkasının bir sağ ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$

v. U, R halkasının bir sol ideali ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$

İspat: İspat Teorem 1.5 e benzer şekilde yapılır.

Tanım 1.11: R bir halka olsun.

i. $a \in R$ için, $a^n = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise a elemanına halkanın nilpotent elemanı denir. $a^n = 0$ fakat $a^{n-1} \neq 0$ ise n pozitif tamsayısına a elemanının nilpotentlik indeksi denir.

ii. A, R halkasının bir ideali olsun. A nın keyfi olarak alınan $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanları için, $a_1.a_2 \dots a_n = 0$ ise A idealine R halkasının nilpotent ideali denir.

Tanım 1.12: Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya yarı-asal halka denir.

Tanım 1.13: R bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $na = 0$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı var ise böyle n lerin en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir ve $charR = n$ ile gösterilir.

Tanım 1.14: R bir halka ve $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. Her $x \in R$ için $mx = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa R halkasına m- torsion free halka denir.

Tanım 1.15: X, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

$C_R(X) = \{a \in R | xa = ax, \forall x \in X\}$ kümesine X in R deki merkezleştiricisi denir.

Tanım 1.16: R bir halka olsun. $Z = \{z \in R | xz = zx, \forall x \in R\}$ kümesine R halkasının merkezi denir. Z, R nin bir alt halkasıdır.

Önerme 1.17: R bir asal halka olsun. Eğer $ab, b \in Z$ ise bu durumda $b = 0$ veya $a \in Z$ dir.

İspat: $ab, b \in Z$ olsun. $\forall x \in R$ için $xab = abx = axb$ olur. Buradan

$$(ax - xa)b = 0, \forall x \in R \qquad (1.1)$$

elde edilir. (1.1) de x yerine $xy, y \in R$ alınırsa;

$$0 = (axy - xya)b = axyb - xyab$$

$$= axyb - xayb + xayb - xyab$$

$$= (ax - xa)yb + x(ay - ya)b$$

olur. Bu ifadenin ikinci terimi (1.1) den dolayı sıfırdır. Böylece

$$(ax - xa)Rb = (0), \forall x \in R \tag{1.2}$$

olduğu görülür. R asal halka olduğu için (1.2) den;

$b = 0$ veya $a \in Z$

bulunur.

Önerme 1.18: R bir yarı-asal halka olsun. a elemanı R halkasının sıfırdan farklı bir sağ idealini merkezlesin. Bu durumda $a \in Z$ dir.

İspat: I, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. $aI = Ia$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall x \in I$ için $xa = ax$ ve I sağ ideal olduğundan $\forall r \in R$ için $xra = axr$ dir. Yani $0 = [xr, a]$=$x[r, a] + [x, a]r$ dir. Bu durumda $x[r, a] = 0$, yani $I[R, a] = 0$ elde edilir. $I \neq \{0\}$ olduğundan $a \in Z$ bulunur.

Önerme 1.19: R bir yarı-asal halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $a(ax - xa) = 0$ oluyorsa bu durumda $a \in Z$ dir.

İspat: $x, r \in R$ için hipotezden;

$$a(a(xr) - (xr)a) = 0 \tag{1.3}$$

olur. $a(xr) - (xr)a = (ax - xa)r + x(ar - ra)$ olduğu (1.3) de yerine yazılır ve yine (1.3) eşitliği kullanılırsa;

$$ax(ar - ra) = 0, \ \forall x, r \in R$$

elde edilir. Bu ise

$$(ar - ra)R(ar - ra) = (0), \forall r \in R$$

olduğunu verir. R yarı-asal halka olduğundan $\forall r \in R$ için $ar = ra$ elde edilir. Böylece $a \in Z$ bulunur.

Önerme 1.20: Bir asal halkanın merkezinde sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur.

İspat: R bir asal halka ve Z, R nin merkezi olsun.

Kabul edelim ki $0 \neq a \in Z$ için $a^2 = 0$ olsun. $a \in Z$ olduğundan $\forall x \in R$ için $ax = xa$ dır. Eşitliğin her iki tarafı soldan a ile çarpılırsa;

$$a^2x = axa,$$

elde edilir. Bu durumda

$$0 = axa$$

olur. Yani;

$$aRa = 0$$

bulunur. R asal halka olduğundan $a = 0$ elde edilir. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde asal halkanın merkezinde nilpotent eleman yoktur.

Tanım 1.21: R bir halka olsun. $0 \neq a \in R$ elemanı için $ab = 0$ (veya $ba = 0$) olacak şekilde en az bir $0 \neq b \in R$ bulunabilirse a ya halkanın bir sol sıfır böleni (veya sağ sıfır böleni) denir.

Tanım 1.22: $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesi komütatör çarpımı olarak adlandırılır ve $[x, y]$ ile gösterilir.

Özellikler: $\forall x, y, z \in R$ için

i. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$

ii. $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$

iii. $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca,

iv. $\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0$

eşitliğine Jacobi özdeşliği denir.

Tanım 1.23: R bir halka ve A, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. $\forall a, b \in A$ için $ab - ba \in A$ $(aob = ab + ba \in A)$ oluyorsa A ya R nin Lie (Jordan) alt halkası denir.

Tanım 1.24: A, R halkasının bir Lie (Jordan) alt halkası ve $U \subset A$ toplamsal alt grubu olsun. $\forall u \in U$ ve $\forall a \in A$ için $ua - au \in U$ $(ua + au \in U)$ oluyorsa, U ya A nın Lie (Jordan) ideali denir.

Örnek1.25: $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in I_2 \right\}$

halkasının $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in I_2 \right\}$ alt kümesini ele alalım. U, R nin bir Lie idealidir.

Çözüm: $u \in U, r \in R$ için

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \ a, b, c \in I_2 \ \text{ve} \ r = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \ e, f, g, h \in I_2 \ \text{olsun.}$$

$$[u, r] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + ag & cf + ah \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ae + cf & be + af \\ ga + hc & gb + ah \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + bg - ae - cf & af + bh - be - af \\ ce + ag - ga - hc & cf + ah - gb - ah \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bg-cf & bh-be \\ ce-hc & cf-gb \end{pmatrix} \in U$$

elde edilir. Bu durumda Tanım 1.24 den U, R nin Lie idealidir.

Tanım 1.26: R bir halka ve $\sigma,\tau: R\to R$ iki fonksiyon olsun. $x,y\in R$ için $[x,y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y)-\tau(y)x$ ifadesine (σ,τ)**-** komütatör çarpımı denir.

Özellikler: $\forall x,y,z\in R$ için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

i. $[xy,z]_{\sigma,\tau} = x[y,z]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(z)]y$

ii. $[xy,z]_{\sigma,\tau} = x[y,\sigma(z)] + [x,z]_{\sigma,\tau}y$

iii. $[x,yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$

iv. $\big[[x,y]_{\sigma,\tau},z\big]_{\sigma,\tau} = \big[x,[y,z]\big]_{\sigma,\tau} + \big[[x,z]_{\sigma,\tau},y\big]_{\sigma,\tau}$(Jacobi özdeşliği)

Tanım 1.27: $C_{\sigma,\tau} = \{c\in R | c\sigma(x) = \tau(x)c\}$ kümesine R halkasının (σ,τ)- merkezi denir.

Tanım 1.28: R bir halka, $d: R\to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in R$ için

$d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulunu sağlıyor ise d ye R halkasında bir türevdir denir.

Tanım 1.29: R bir halka ve $d: R\to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in R$ için; $\sigma,\tau: R\to R$ iki fonksiyon olmak üzere

$d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$

ise d ye bir (σ,τ)- *türev* denir.

Tanım 1.30: R bir halka, $f: R\to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun.
Eğer $\forall x,y\in R$ için

$f(xy) = f(x)y + xd(y)$

koşulunu sağlayan bir $d: R\to R$ türevi varsa f ye R halkasında d ile belirlenmiş genelleştirilmiş türev denir.

Örnek 1.31:

1) Her türev bir genelleştirilmiş türevdir.

2) $f(x) = ax + xb,\ a,b\in R$ dönüşümü bir genelleştirilmiş türevdir.

Çözüm:

1) d bir türev olsun. $d: R\to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere

$\forall x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

dir. Eğer $f = d$ seçersek Tanım 1.30 dan d genelleştirilmiş türevdir.

2) $\forall x, y \in R$ için

$$f(x + y) = a(x + y) + (x + y)b = ax + ay + xb + yb$$
$$= ax + xb + ay + yb$$
$$= f(x) + f(y)$$

olduğundan $f: R \to R$ toplamsal bir dönüşümdür. Diğer taraftan $\forall x, y \in R$ için

$d(y) = yb - by$ şeklinde bir türev alınırsa;

$$f(xy) = axy + xyb$$
$$= axy + xby - xby + xyb$$
$$= (ax + xb)y + x(yb - by)$$
$$= f(x)y + xd(y)$$

elde edilir. O halde Tanım 1.30 dan f, genelleştirilmiş bir türevdir.

Önerme 1.32 (Brauer's Trick): Bir G toplamsal grubu iki öz alt grubunun bileşimi olarak yazılamaz.

İspat: A ve B, G nin iki öz alt grubu olmak üzere $G = A \cup B$ olsun. Kabul edelim ki $G \neq A$ olsun. Bu durumda $G = B$ olduğunu görmeliyiz. $G \neq A$ olduğundan $x \in G$ ve $x \notin A$ olacak biçimde en az bir x elemanı vardır. Öte yandan $G = A \cup B$ olduğundan $x \in B$ dir. İddiamız $G \subset B$ dir. Eğer $G \not\subset B$ olsaydı bu durumda $y \in G$ ve $y \notin B$ olacak biçimde en az bir y elemanı var olurdu. $G = A \cup B$ olduğundan $y \in A$ olur.

$x + y \in B$ dir. Gerçekten; $x + y \notin B$ olsaydı $G = A \cup B$ olduğundan $x + y \in A$ olurdu. $y \in A$ ve A toplamsal alt grup olduğundan $x \in A$ olurdu ki bu $x \notin A$ alınışıyla çelişir. O halde $x + y \in B$ dir. $x \in B$ ve B toplamsal olduğundan $y \in B$ olur ki bu da $y \notin B$ oluşuyla çelişir. O halde $G \not\subset B$ olamaz. Yani $G \subset B$ dir. Böylece $G = B$ olur.

II. BÖLÜM

Bu bölümde konuyla ilgili bazı makaleler ispatsız olarak verilecektir.

2.1. Türevli Halkalar

Posner, E. C, 1957

Tanım 2.1.1: R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $xay = 0$ iken $x = 0$ veya $y = 0$ oluyorsa R halkasına asal halka denir.

Lemma 2.1.2: d bir R asal halkasının türevi ve $a \in R$ olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $ad(x) = 0$ ise bu durumda ya $a = 0$ dır ya da $d = 0$ dır.

Lemma 2.1.3: R bir asal halka, $d: R \to R$ bir türevi ve $a \in R$ olsun. Eğer her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ (veya $d(x)a = 0$) oluyorsa bu durumda $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 2.1.4: R bir asal halka, $p, q, r \in R$ için $paqar = 0, \forall a \in R$ olsun. Bu durumda p, q, r lerden en az biri sıfırdır.

Teorem 2.1.5: R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, d_1, d_2 R halkasının iki türevi olmak üzere $d_1 d_2$ de bir türev ise bu durumda $d_1$ve d_2 nin en az biri sıfırdır.

Lemma 2.1.6: R bir asal halka, $d: R \to R$ bir türev olsun. Eğer her $a \in R$ için

$ad(a) - d(a)a = 0$ oluyorsa bu durumda $d = 0$ veya R halkası değişmelidir.

Lemma 2.1.7: A bir Lie halka , I, A Lie halkasının bir ideali olsun. Eğer $d \in A$ ve her $x \in I$ için $dx.x = 0$ oluyorsa bu durumda her $a \in R$ ve her $x \in I$ için $(da.x)x = 0$ olur. (Her $x \in I$ için $dx.x = 0$ koşulunu sağlayan $d \in R$ elemanlarının kümesi A nın bir idealidir.)

Teorem 2.1.8: R bir asal halka, $d: R \to R$ bir türev olsun. Eğer her $a \in R$ için

$ad(a) - d(a)a \in Z$ oluyorsa bu durumda $d = 0$ veya R halkası değişmelidir.

Awtar, R., 1973

Lemma 2.1.9: R bir asal halka ve $d: R \to R$ bir türev olmak üzere $\forall x \in R$ için $ad(x) = 0$ sağlansın. Bu durumda eğer $d \neq 0$ ise $a = 0$ dır.

Teorem 2.1.10: R bir asal halka ve $d: R \to R$ bir türev olsun. Eğer her $a \in R$ için

$ad(a) - d(a)a \in Z$ ve d sıfırdan farklı bir türev ise R değişmelidir.

Herstein, I.N., 1978

Teorem 2.1.11: R bir halka, $d: R \to R$ bir türev ve $d^3 \neq 0$ olsun. O zaman her $r \in R$ için $d(r)$ elemanları tarafından üretilen A alt halkası R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 2.1.12: R bir asal halka, $d: R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Her $x, y \in R$ için $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ ise bu durumda,

i. Eğer R karakteristiği ikiden farklı halka ise bu durumda R halkası değişmeli tamlık bölgesidir.

ii. Eğer R karakteristiği iki olan halka ise bu durumda R halkası değişmeli veya R halkası merkezi üzerinde 4-boyutlu basit cebirdir.

Herstein, I.N., 1979

Teorem 2.1.13: R bir asal halka, $d: R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. $a \in R$ ve her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ ise bu durumda,

i. Eğer R karakteristiği ikiden farklı halka ise $a \in Z$ dir.

ii. Eğer R karakteristiği iki olan halka ise $a^2 \in Z$ dir. Üstelik, $a \notin Z$ ise $\lambda \in C$ (R halkasının genişletilmiş merkezi) olmak üzere her $x \in R$ için $d(x) = (\lambda a)x - x(\lambda a)$ dır.

Lee, P.H. ve Lee, T.K., 1981

Teorem 2.1.14: R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0 \neq d: R \to R$ bir türev ve $a \in R$ olsun. Eğer $[a, d(R)] \subseteq Z$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

Teorem 2.1.15: R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0 \neq d: R \to R$ bir türev olsun. Eğer $[d(R), d(R)] \subset Z$ ise bu durumda R halkası değişmelidir.

Teorem 2.1.16: R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $0 \neq d: R \to R$ bir türev olsun. Eğer $d^2(R) \subseteq Z$ ise bu durumda R halkası değişmelidir.

Bresar, M., 1989

Tanım 2.1.17: A bir cebir olsun. Her $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

özelliği sağlanıyorsa A ya normlu cebir, denir.

Tanım 2.1.18: A kompleks normlu cebir olsun.

$\|M_{a,b}\| \geq c\|a\|\|b\|, \ \forall a,b \in A$

olacak biçimde $c > 0$ sabiti varsa A ya ultra asal denir.

Tanım 2.1.19: A kompleks normlu cebir olsun.

$\|M_{a,a}\| \geq c\|a\|^2, \ \forall a \in A$

olacak biçimde $c > 0$ sabiti varsa A ya ultra yarı-asal denir.

Tanım 2.1.20: A bir halka, $\delta: A \to A$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$\delta(xy) = \delta(x)y + xh(y)$

koşulunu sağlayan bir $h: A \to A$ türevi varsa δ ya A halkasında h ile belirlenmiş genelleştirilmiş türevi denir.

A herhangi halka , d_1, d_2 A da türevler, $\Delta(A)$, A nın genelleştirilmiş türevlerinin kümesi, $D(A)$, A daki bütün türevlerin kümesi olsun. A normlu cebir iken $\Delta_b(A) = \{\delta \in \Delta(A) | \delta: A \to A$ sınırlı lineer operatör $\}$, $D_b(A)$, bütün sınırlı türevlerin kümesidir. $dist(d_1d_2, \Delta_b(A)) = \inf\{\|d_1d_2 - \delta\|, \delta \in \Delta_b(A)\}$ olarak alınacaktır.

Teorem 2.1.21: A ultra asal normlu cebir, $d_1, d_2 \in D_b(A)$ ve $a, b \in A$ için $M_{a,b}: A \to A$, $x \to axb$ şeklinde tanımlı dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için $\|M_{a,b}\| \geq c\|a\|\|b\|$, olacak biçimde $c > 0$ varsa bu durumda

$dist(d_1d_2, \Delta_b(A)) \geq \frac{c^2}{6}\|d_1\|\|d_2\|$ dir.

Teorem 2.1.22: A ultra yarı-asal normlu cebir ve $d \in D_b(A)$ olsun. Eğer $a \in A$ için $\|M_{a,a}\| \geq c\|a\|^2$ olacak biçimde $c > 0$ varsa bu durumda

$dist(d^2, \Delta_b(A)) \geq \frac{c}{2}\|d\|^2$ dir.

Teorem 2.1.23: A, Neumann cebiri olsun. Eğer $d_1, d_2 \in D(A)$ ise

$dist(d_1d_2, \Delta(A)) \leq \frac{1}{2}\|d_1\|\|d_2\|$ dir. Her $d \in D(A)$ için $dist(d^2, \Delta_b(A)) \geq \frac{1}{2}\|d\|^2$ dir.

Daif, M.N. ve Bell, H.E., 1992

Lemma 2.1.24: R bir yarıasal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $z \in R$ elemanı $[I, I]$ kümesini merkezlerse bu durumda z, I idealini de merkezler.

Lemma 2.1.25:

(***a***) R sıfırdan farklı bir merkezil ideali olan bir asal halka ise bu durumda R değişmelidir.

(***b***) R bir yarıasal halka ise bu durumda R nin sıfırdan farklı bir idealinin merkezi, R nin merkezi tarafından kapsanır.

Teorem 2.1.26: R bir asal halka, $d: R \to R$ bir türev ve K, R nin sıfırdan farklı " $xy + d(xy) = yx + d(yx),\ \forall x, y \in K$ veya $xy - d(xy) = yx - d(yx),\ \forall x, y \in K$ " koşulunu sağlayan bir ideali olsun. Bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.1.27: R bir yarı-asal halka R nin d türevi $xy + d(xy) = yx + d(yx),\ \forall x, y \in R$ veya $xy - d(xy) = yx - d(yx),\ \forall x, y \in R$ koşullarından birini sağlarsa bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.1.28: R bir yarı-asal halka, $d: R \to R$ bir türev ve K, R nin sıfırdan farklı "$xy + d(xy) = yx + d(yx),\ \forall x, y \in K$ veya $xy - d(xy) = yx - d(yx),\ \forall x, y \in K$ " koşulunu sağlayan bir ideali olsun. Bu durumda K bir merkezi idealdir.

Hvala, B., 1998

Bu makalede R karakteristiği ikiden farklı asal halka, $Q_r(R)$ ve $Q_s(R)$ sırasıyla sağ ve sol simetrik Martindale kesirler halkası (quotient halkası), C genişletilmiş merkezi, $R_C = RC$ merkezi kapanışı olarak alınmıştır.

Önerme 2.1.29: $f_j: R \to A$ ve $h_i: R \to R_C$ herhangi dönüşümler ve $a_j, c_i \in R$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z) x a_j + \sum_{i=1}^{k} c_i z h_i(x) = 0,\ \forall x, z \in R$$

olsun. Eğer $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ ve $\{c_1, c_2, \dots c_k\}$ kümeleri C-bağımsız ise

$$f_j(z) = -\sum_{i=1}^{k} c_i z q_{ij}\ , h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x a_j,\ \forall x, z \in R\ , i = 1,2,\dots,k\ ,\ j = 1,2,\dots,n$$

olacak biçimde $q_{ij} \in Q_r(R_C),\ i = 1,2,\dots,k,\ j = 1,2,\dots n$ vardır.

Lemma 2.1.30: $f: R \to R_C$ toplamsal dönüşüm ve her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak biçimde $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Lemma 2.1.31: R değişmeli olmayan halka ve $F: R \to C$ genelleştirilmiş türev olsun. Bu durumda $F = 0$ dır.

Lemma 2.1.32: $a, b \in A$ ve $f: R \to A,\ f(x) = axb$ şeklinde bir dönüşüm olsun. Eğer f genelleştirilmiş türev ise bu durumda $a \in C$ veya $b \in C$ dir.

Rehman, N.U., 2002

Lemma 2.1.33: R, 2-torsion free bir asal halka ve U, R nin bir Lie ideali olsun. Eğer U, R nin bir değişmeli Lie ideali ise bu durumda $U \subseteq Z(R)$ dir.

Teorem 2.1.34: R, 2-torsion free bir asal halka, U, R nin her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali, $F: R \to R$ sıfırdan farklı d türevi ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $u \in U$ için $[F(u), u] = 0$ ise bu durumda $U \subseteq Z(R)$ dir.

Sonuç 2.1.35: R bir asal halka olsun. Eğer R halkası, $\forall x \in R$ için $[F(x), x] = 0$ ve $d \neq 0$ olacak şekilde d ile belirlenmiş bir F genelleştirilmiş türevine sahip ise bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.1.36: R, 2-torsion free bir asal halka ve U, R nin $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali olsun. Eğer R halkası, $\forall u, v \in U$ için $F([u, v]) = [u, v]$ olacak şekilde, d türevi ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş F türevine sahip ve $d \neq 0$ ise bu durumda $U \subseteq Z(R)$ veya $F = 0$ dır.

Teorem 2.1.37: R, 2-torsion free bir asal halka ve U, R nin $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali olsun. Eğer R halkası, her $u, v \in U$ için $F([u, v]) + [u, v] = 0$ olacak şekilde, d türevi ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş F türevine sahip ve $d \neq 0$ ise bu durumda $U \subseteq Z(R)$ veya $F = 0$ dır.

Sonuç 2.1.38: R, 2-torsion free bir asal halka ve U, R nin $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali olsun. Eğer R halkası, her $u, v \in U$ için $F(uv) = uv$ olacak şekilde, d türevi ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş F türevine sahip ve $d \neq 0$ ise bu durumda $F = 0$ veya $U \subseteq Z(R)$ dir.

Sonuç 2.1.39: R, 2-torsion free bir asal halka ve U, R nin $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali olsun. Eğer R halkası, her $u, v \in U$ için $F(uv) = vu$ olacak şekilde, d türevi ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş F türevine sahip ve $d \neq 0$ ise bu durumda $F = 0$ veya $U \subseteq Z(R)$ dir.

Teorem 2.1.40: R, 2-torsion free bir asal halka ve U, R nin $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali olsun. Eğer R halkası, her $u, v \in U$ için $F(uov) = uov$ olacak şekilde, d türevi ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş F türevine sahip ve $d \neq 0$ ise bu durumda $F = 0$ veya $U \subseteq Z(R)$ dir.

Teorem 2.1.41: R, 2-torsion free bir asal halka ve U, R nin $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali olsun. Eğer R halkası, her $u, v \in U$ için $F(uov) + uov = 0$ olacak şekilde, d türevi ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş F türevine sahip ve $d \neq 0$ ise bu durumda $F = 0$ veya $U \subseteq Z(R)$ dir.

Teorem 2.1.42: R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve F, d ile belirlenmiş R nin bir türevi olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $F(xoy) = xoy$ ve $d \neq 0$ ise bu durumda R değişmelidir veya $F = 0$ dır.

Teorem 2.1.43: R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve F, d ile belirlenmiş R nin bir türevi olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $F(xoy) + xoy = 0$ ve $d \neq 0$ ise bu durumda R değişmelidir veya $F = 0$ dır.

Argaç, N., 2006

Teorem 2.1.44: R bir yarı-asal halka, d ve g, R de en az biri sıfırdan farklı türevler olsun. Eğer her $x \in R$ için $d(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı bir merkezi ideal kapsar.

Sonuç 2.1.45: R bir asal halka, d ve g, R de en az biri sıfırdan farklı türevler olsun. Eğer her $x \in R$ için $d(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R değişmelidir.

Sonuç 2.1.46: R bir asal halka ve d, R de bir türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $[x, d(x)] = 0$ ise bu durumda R değişmelidir..

Teorem 2.1.47: R bir yarı-asal halka, I, R nin sıfırdan farklı ideali ve d, R de bir türev olsun. Eğer d aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda d, I üzerinde kommutingdir (commuting) .

Üstelik, $d(I) \neq 0$ ise R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x, y \in I$ için$d([x, y]) = [x, y]$.

ii. Her $x, y \in I$ için $d([x, y]) = -[x, y]$.

iii. Her $x, y \in I$ için $d([x, y]) = [x, y]$ veya $d([x, y]) = -[x, y]$ dir.

Sonuç 2.1.48: R bir asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa bu durumda d, I üzerinde kommutingdir (commuting) veya R değişmelidir.

i. Her $x, y \in I$ için $d(xy) = xy$.

ii. Her $x, y \in I$ için $d(xy) = yx$.

iii. Her $x, y \in I$ için $d(xy) = xy$ veya $d(xy) = yx$ dir.

Teorem 2.1.49: R bir yarı-asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa bu durumda d, I üzerinde kommutingdir (commuting).

Üstelik, eğer $d(I) \neq 0$ ise bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x, y \in I$ için $d(xoy) = xoy$.

ii. Her $x, y \in I$ için $d(xoy) = -xoy$.

iii. Her $x, y \in I$ için $d(xoy) = xoy$ veya $d(xoy) = -xoy$ dir.

Sonuç 2.1.50: R bir asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa bu durumda R değişmelidir.

i. Her $x \in I$ için $d(x^2) = x^2$.

ii. Her $x \in I$ için $d(x^2) = x^2$.

Teorem 2.1.51: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa bu durumda d, I üzerinde kommutingdir (commuting).

Üstelik, eğer $d(I) \neq 0$ ise R sıfırdan farklı merkezi ideal kapsar.

i. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([x, y])$.

ii. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([y, x])$.

iii. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([x, y])$ veya $[d(x), d(y)] = d([y, x])$.

Sonuç 2.1.52: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, d sıfırdan farklı R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa bu durumda R değişmelidir.

i. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([x, y])$.

ii. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([y, x])$.

iii. Her $x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = d([x, y])$ veya $[d(x), d(y)] = d([y, x])$ dir.

Teorem 2.1.53: R bir asal halka, d, R de bir türev ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $d([x, y]) \in Z$ ise bu durumda $d^2(I) \subset Z$ veya R değişmelidir. Üstelik, R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d sıfırdan farklı türev ise R değişmelidir.

Sonuç 2.1.54: R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı ideali ve d, R de bir türev olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $d(xy) \in Z$ ise bu durumda $d^2(I) \subset Z$ veya R değişmelidir. Üstelik, R karakteristiği ikiden farklı asal halka ve d sıfırdan farklı bir türev ise R değişmelidir.

Gölbaşı, Ö., 2009

Teorem 2.1.55: R bir yarı-asal halka, (f, d) ve (g, h), R de iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $f(x)y = xg(y)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

Sonuç 2.1.56: R bir asal halka, (f,d) ve (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x,y \in R$ için $f(x)y = xg(y)$ ise bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.1.57: R bir yarı-asal halka, (f,d) ve (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $f(x)x = xg(x)$

Sonuç 2.1.58: R bir asal halka, (f,d) ve (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $f(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.1.59: R bir yarı-asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x,y \in R$ için $f([x,y]) = [x,y]$.

ii. Her $x,y \in R$ için $f([x,y]) = -[x,y]$.

iii. Her $x,y \in R$ için $f([x,y]) = [x,y]$ veya $f([x,y]) = -[x,y]$ dir.

Sonuç 2.1.60: R bir yarı-asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x,y \in R$ için$f(xy) = xy$.

ii. Her $x,y \in R$ için$f(xy) = yx$.

iii. Her $x,y \in R$ için $f(xy) = xy$ veya $f(xy) = yx$ dir.

Sonuç 2.1.61: R bir asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda R değişmelidir.

i. Her $x,y \in R$ için $f(xy) = xy$.

ii. Her $x,y \in R$ için $f(xy) = yx$.

iii. Her $x,y \in R$ için $f(xy) = xy$ veya $f(xy) = yx$ dir.

Teorem 2.1.62: R bir yarı-asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x,y \in R$ için $f(xoy) = xoy$.

ii. Her $x,y \in R$ için $f(xoy) = -xoy$.

iii. Her $x,y \in R$ için $f(xoy) = xoy$ veya $f(xoy) = -xoy$ dir.

Sonuç 2.1.63: R bir yarı-asal halka, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa R değişmelidir veya R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x \in R$ için $f(x^2) = x^2$.

ii. Her $x \in R$ için $f(x^2) = -x^2$.

Teorem 2.1.64: R bir yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d) ve (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev ve $h(U) \neq 0$ olsun. Eğer her $x,y \in U$ için $f(x)y = xg(y)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

Sonuç 2.1.65: R bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d) ve (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev ve $h(U) \neq 0$ olsun. Eğer her $x,y \in U$ için $f(x)y = xg(y)$ ise bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.1.66: R bir yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d) ve (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev ve $h(U) \neq 0$ olsun. Eğer her $x,y \in U$ için $f(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

Sonuç 2.1.67: R bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d) ve (g,h), R de iki genelleştirilmiş türev ve $h(U) \neq 0$ olsun. Eğer her $x,y \in U$ için $f(x)x = xg(x)$ ise bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.1.68: R bir yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d) R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x,y \in U$ için $f([x,y]) = [x,y]$.

ii. Her $x,y \in U$ için $f([x,y]) = -[x,y]$.

iii. Her $x,y \in U$ için $f([x,y]) = [x,y]$ veya $f([x,y]) = -[x,y]$ dir.

Sonuç 2.1.69: R bir yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d), R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x,y \in U$ için $f(xy) = xy$.

ii. Her $x,y \in U$ için $f(xy) = yx$.

iii. Her $x,y \in U$ için $f(xy) = xy$ veya $f(xy) = yx$ dir.

Sonuç 2.1.70: R bir asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali, (f,d) R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda R değişmelidir.

Her $x,y \in U$ için $f(xy) = xy$.

i. Her $x,y \in U$ için $f(xy) = yx$.

ii. Her $x,y \in U$ için $f(xy) = xy$ veya $f(xy) = yx$ dir.

Teorem 2.1.71: R bir yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali ve (f,d) R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa bu durumda R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x,y \in U$ için $f(xoy) = xoy$.

ii. Her $x,y \in U$ için $f(xoy) = -xoy$.

iii. Her $x,y \in U$ için $f(xoy) = xoy$ veya $f(xoy) = -xoy$ dir.

Sonuç 2.1.72: R bir yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı ideali ve (f,d) R de genelleştirilmiş türev olsun. Eğer (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa R değişmelidir veya R sıfırdan farklı merkezi bir ideal kapsar.

i. Her $x \in U$ için $f(x^2) = x$.

ii. Her $x \in U$ için $f(x^2) = -x$.

2.2. Türev ve Lie İdealler

Herstein, I.N., 1970

Lemma 2.2.1: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka ve T, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $[T,T] \subset Z$ ise bu durumda $T \subseteq Z$ olur.

Lemma 2.2.2: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. $t \in R$ elemanı $[U,U]$ nun her elemanı ile yer değiştirirse bu durumda t, U Lie idealinin her elemanı ile yer değiştirir.

Lemma 2.2.3: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Buna gore $t \in R$ elemanı her $u \in U$ için, $tu - ut$ elemanlarıyla yer değiştirirse, t, U Lie idealinin tüm elemanlarıyla yer değiştirir.

Awtar, R., 1973

Lemma 2.2.4: R, karakterisitiği ikiden farklı olan bir asal halka, $d: R \to R$ sıfırdan farklı türev ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ve $u^2 \in U$ ise bu durumda her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ dır.

Lemma 2.2.5: R bir asal halka, U, R halkasının Lie ideali ve $d: R \to R$ sıfırdan farklı türev olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda her $u \in U$ ve $r \in R$ için $\big[[d(r), u], u\big] \in Z$ olur. Üstelik, her $u \in U$ için $[u, d(u)] = 0$ ise bu durumda her $r \in R$ için $\big[[d(r), u], u\big] = 0$ olur.

Lemma 2.2.6: R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, $d: R \to R$ sıfırdan farklı türev ve U, R halkasının bir Jordan ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $ud(u) = d(u)u = 0$ ise bu durumda $U = (0)$ dır.

Teorem 2.2.7: R karakteristiği iki ve üçden farklı olan asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R nin Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.8: R karakteristiği üç olan asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R nin Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ve $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.9: R karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R nin Jordan ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.10: R karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi, U, R halkasının bir alt halkası ve Lie (Jordan) ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Bergen, J., Herstein, I.N. ve Kerr, J.W., 1981

Bu makale boyunca R, karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve Z, R halkasının merkezi olarak alınmıştır.

Lemma 2.2.11: Eğer U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ise bu durumda R halkasının $[M, R] \subset U$ fakat $[M, R] \not\subset Z$ olacak biçimde bir M ideali vardır.

Lemma 2.2.12: Eğer U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ise bu durumda $C_R(U) = Z$ dir.

Lemma 2.2.13: $C_R([U, U]) = C_R(U)$ dur.

Lemma 2.2.14: U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $aUb = 0$ ise bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Lemma 2.2.15: U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.16: U, R nin bir Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.17: U, Z tarafından kapsanmayan R nin bir Lie ideali, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $t \in R$ için $td(U) = 0$ (veya $d(U)t = 0$) ise bu durumda $t = 0$ dır.

Teorem 2.2.18: U, karakteristiği ikiden farklı olan R asal halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Sonuç 2.2.19: R, 2- torsion free olan bir yarı-asal halka ve U, R nin bir Lie ideali olsun. Eğer $a \in R$ için $\big[a, [a, U]\big] = 0$ ise bu durumda $[a, U] = 0$ dır.

Teorem 2.2.20: U, Z tarafından kapsanmayan R asal halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Bu durumda

$C_R\big(d(U)\big) = Z$ dir.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında $d: R \to R$ sıfırdan farklı türev, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali, $\overline{d(U)}$, $d(U)$ tarafından üretilen alt halka, $V = [U, U]$ ve $W = [V, V]$ olarak alınmıştır.

Lemma 2.2.21: Eğer $d^3 \neq 0$ ve $\overline{d(V)}$, R halkasının sıfırdan farklı sol λ ve sıfırdan farklı sağ δ idealini kapsarsa bu durumda $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Lemma 2.2.22: I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı sağ ve sıfırdan farklı sol idealini kapsamıyor ise bu durumda, $[c, I] \subset \overline{d(U)}$ olduğunda $c \in Z$ dir.

Lemma 2.2.23: Eğer $d^2(U)^2 = 0$ ise bu durumda $d^3(W) = 0$ dır.

Lemma 2.2.24: Eğer $d^3(U) = 0$ ise bu durumda $d^3 = 0$ dır.

Teorem 2.2.25: R karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, $d: R \to R$ sıfırdan farklı türev ve $d^3 \neq 0$, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali olsun. Bu durumda $\overline{d(U)}$, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 2.2.26: R karakteristiği ikiden farklı olan asal halka, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ve, δ, d, R halkasının iki türevi olsun. Eğer $\delta d(U) = 0$ ise bu durumda $\delta = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lee, P.H. ve Lee, T.K., 1983

Bu makale boyunca R, karakteristiği ikiden farklı olan asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olarak alınmıştır.

Lemma 2.2.27: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi, $d(Z) \neq 0$ ve $a \in R$ olsun. Eğer $[a, d(U)] \subseteq Z$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.28: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d^2(U) \subseteq Z$ ise bu durumda $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.29: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ olsun. Eğer
$[a, d(U)] \subseteq Z$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.30: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $[d(U), d(U)] \subseteq Z$ ise bu durumda $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.31: δ, d, R halkasının sıfırdan farklı türevleri olsun. Eğer $a\delta(U) \subseteq Z$ ise bu durumda $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.32: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(U)] \in Z$ ise bu durumda $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 2.2.33: d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ olsun. Eğer $ad(U) \subseteq Z$ ise bu durumda $a = 0$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Awtar, R., 1984

Teorem 2.2.34: R, karakteristiği ikiden farklı asal bir halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi, U, R halkasının bir Lie ideali ve $a \in R$ için $d(a) = 0$ olsun. Eğer $d^2(U) \subseteq Z$ ve $[a, d(U)] \subset Z$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.35: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $\big[a, [a, u]\big] \in Z$ ise bu durumda $[a, U] = 0$ dır. Üstelik, $U \not\subset Z$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

Teorem 2.2.36: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve $a \in R$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $\big[a, [a, u]\big] \in Z$ ise bu durumda $[a, U] = 0$ dır.

Teorem 2.2.37: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $a \in R$ elemanı, her $u \in U$ için $[a, d(u)] \in Z$ ise bu durumda $d = 0$ veya $a \in Z$ olur.

Teorem 2.2.38: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.39: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali ve δ, d, R halkasının türevleri olsun. Eğer $\delta d(U) \subseteq Z$ ise bu durumda $\delta = 0$ veya $d = 0$ dır.

Teorem 2.2.40: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, Z tarafından kapsanmayan R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(U)] \in Z$ ise $U \subset Z$ dir.

Carini, L., 1985

Bu makalede R, 2- torsion free bir yarı-asal halka, U, R halkasının bir Lie ideali ve d, R halkasının $d^2(U) = 0$ ve $d(U) \subset U$ olan bir türevi olarak alınmıştır.

Lemma 2.2.41: $d([U, R]) = 0$ dır.

Lemma 2.2.42: $d(R)[U, R] = 0$dır.

Teorem 2.2.43: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka, d, R halkasının bir türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise bu durumda $d(U) \subset Z$ dir.

Sonuç 2.2.44: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka, d, R halkasının bir iç türevi ve I, R halkasının ideali olsun. Eğer $d^2(I) = 0$ ise bu durumda $d(I) = 0$ dır.

Sonuç 2.2.45: R, 2- torsion free bir yarı-asal halka, d, R halkasının bir iç türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise bu durumda $d(U) = 0$ dır.

Gölbaşı, Ö., Kaya, K., 2006

Bu makalede R, karakteristiği ikiden farklı asal halka, d, sıfırdan farklı olmak üzere (f, d), R de iki yanlı genelleştirilmiş türev, U, R halkasının sıfırdan farklı Lie ideali olarak alınmıştır.

Lemma 2.2.46: Eğer $f(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.47: Eğer $f(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.48: $a \in R$ için

i. Eğer $af(U) = 0$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

ii. Eğer $f(U)a = 0$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.49: $a \in R$ ve $d(Z) \neq 0$ olsun. Eğer $[a, f(U)] = 0$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.2.50: Eğer $a \in R$ için $[a, f(U)] = 0$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $d(a) = 0$ veya $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.51: Eğer $f^2(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.52: Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $f(uv) = f(u)f(v)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.53: Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $f(uv) = f(v)f(u)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.54: Her $u \in U$ için $u^2 \in U$ olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $f(uv) = f(vu)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Gölbaşı, Ö. ve Koç, E. 2009

Bu makale boyuca R, karakteristiği ikiden farklı asal bir halka, U, R halkasının bir Lie ideali, Z, R halkasının bir merkezi ve (f, d) R nin iki yanlı genelleştirilmiş türevi olarak alınmıştır.

Teorem 2.2.55: Eğer $\forall u \in U$ için $[u, f(u)] \in Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.2.56: (f, d) ve (g, d) R nin iki genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer $\forall u, v \in U$ için $f(u)v = ug(v)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Sonuç 2.2.57: (f,d) ve (g,d) R nin iki genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer $\forall u \in U$ için $f(u)u = ug(u)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.58: (f,d), R nin bir genelleştirilmiş türevi olmak üzere (f,d) aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa $U \subset Z$ dir.

i. $\forall u, v \in U$ için $f([u,v]) = [u,v]$.

ii. $\forall u, v \in U$ için $f([u,v]) = -[u,v]$.

iii. $\forall u, v \in U$ için $f([u,v]) = [u,v]$ ya da $f([u,v]) = -[u,v]$.

2.3. Otomorfizmli Halkalar

Mayne, J.H., 1976

Bu makale boyunca R bir asal halka ve Z, R nin bir merkezi olarak alınmıştır.

Tanım 2.3.1: $L: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $x(xL) - (xL)x$, R nin merkezinde ise bu durumda L ye merkezil otomorfizm denir.

Lemma 2.3.2: T, R nin triviyal olmayan bir otomorfizmi olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $[x, x^T] = 0$ ise bu durumda R değişmelidir.

Lemma 2.3.3: Eğer $xy = 0$ ve $0 \neq x \in Z$ ise bu durumda $y = 0$ dır.

Teorem 2.3.4: R bir asal halka, T, R nin triviyal olmayan merkezil otomorfizmi ise bu durumda R bir değişmeli integral bölgesidir.

Mayne, J.H., 1982

Bu makale boyunca R bir asal halka olarak alınmıştır.

Lemma 2.3.5: Eğer $b[a, r] = 0,\ \forall r \in R$ ise bu durumda $b = 0$ veya $a \in Z$ dir.

Lemma 2.3.6:U, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olmak üzere eğer $\forall u \in U$ için $u^D = 0$ olacak şekilde R nin bir D türevi varsa bu durumda $\forall r \in R$için $r^D = 0$ dır.

Lemma 2.3.7: U, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olmak üzere eğer $\forall u \in U$ için $u^T = 0$ olacak şekilde R nin bir T homomorfizmi varsa bu durumda $\forall r \in R$ için $r^T = 0$ dır.

Lemma 2.3.8: Eğer R sıfırdan farklı değişmeli bir U sağ idealini kapsarsa bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.3.9: U, R nin sıfırdan farklı bir ideali, $T: R \to R$ triviyal olmayan bir otomorfizm veya türev olsun. Eğer her $u \in U$ için $uu^T - u^T u \in Z$ ve $u^T \in U$ ise bu durumda R değişmelidir.

Sonuç 2.3.10: Eğer U, karakteristiği 2 den farklı olan bir R asal halkasının sıfırdan farklı bir Jordan ideali ve R, U üzerinde invaryant ve merkezil olan triviyal olmayan T otomorfizmine veya T türevine sahipse bu durumda R değişmelidir.

Bell, H.E., Martindale, W.S., 1987

Merkezil Endomorfizmler Üzerine Sonuçlar

Lemma 2.3.11: T, R asal halkasının bir endomorfizmi ve U, R nin bir sol ideali olsun. Bu durumda

i. Eğer $\forall u \in U\ için\ u^T = u$ ise T, R üzerinde birim dönüşümdür.

ii. Eğer T, U üzerinde birim dönüşüm ise R üzerinde de birim dönüşümdür.

Lemma 2.3.12: R bir yarı-asal halka, U, R nin sıfırdan farklı sol ideali olsun. Eğer T, R nin U üzerinde merkezil bir endomorfizmi ise bu durumda T, U üzerinde kommutingdir (commuting).

Teorem 2.3.13: R bir yarı asal halka, U, R nin sıfırdan farklı sol ideali olsun. T, U üzerinde merkezil ve U üzerinde endomorfizm olsun. Eğer$Q = U \cap T^{-1}(U) \cap T^{-2}(U) \cap T^{-3}(U)$ R nin sıfırdan farklı sol ideali ise ve T, Q üzerinde birim dönüşüm değilse bu durumda R sıfırdan farklı merkezi ideale sahiptir.

Sonuç 2.3.14: R bir yarı asal halka, U, R nin sıfırdan farklı sol ideali, T, R nin Uüzerinde birim olmayan bir dönüşümü olsun. Eğer $U^T \subseteq U$ ve her $x \in U$ için $[x, x^T] \in Z$ ise bu durumda R sıfırdan farklı bir merkezi ideale sahiptir.

Sonuç 2.3.15: R bir asal halka, U, R nin triviyal olmayan bir sol ideali ve $T: R \to R$ birim olmayan endomorfizm olsun. Eğer T, U üzerinde birebir, $\forall x \in U$için $[x, x^T] \in Z$ ve U, T ile belirlenen sıfırdan farklı bir eleman içeriyor ise bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.3.16: R bir asal halka ve U, R nin triviyal olmayan bir sol ideali ve $T: R \to R$ birim olmayan endomorfizm olsun. Eğer T, U üzerinde birebir ve $\forall x \in U$ için $[x, x^T] \in Z$ ise bu durumda R değişmelidir.

Merkezil Türevler

Lemma 2.3.17: U, R asal halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. Eğer D, R nin sıfırdan farklı bir türevi ise bu durumda D, U üzerinde sıfırdan farklıdır.

Lemma 2.3.18: R bir yarı-asal halka ve U, R nin sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. Eğer D, R nin $\forall x \in U$ için $[x, x^D] \in Z$ koşulunu sağlayan bir türevi ise bu durumda $\forall x \in U$ için

$[x, x^D] = 0$ dır.

Teorem 2.3.19: R bir yarı-asal halka ve U, R nin sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. Eğer R, U üzerinde sıfırdan farklı ve U üzerinde merkezil olan bir D türevine sahip ise bu durumda R, sıfırdan farklı bir merkezi ideal içerir.

Mayne, J.H., 1992

Bu makale boyunca R bir asal halka ve U, R nin bir Lie ideali olarak alınmıştır.

Lemma 2.3.20: Eğer T, R nin U üzerinde merkezleyen bir otomorfizmi ise bu durumda $\forall x \in U$ için $[x, x^T] = 0$ dır.

Lemma 2.3.21: $\forall x \in U, r \in R$ için $(x - x^T)\big[x^T, [x,r]\big] = 0$ dır.

Lemma 2.3.22: $\forall x \in U, r \in R$ için

$(x - x^T)[x,r](x - x^T) = 0$ ve $(x - x^T)[x^T,r](x - x^T) = 0$ dır.

Lemma 2.3.23: Eğer $x \in U$ ve $(x - x^T)^2 \neq 0$ ise $x \in Z$ dir.

Teorem 2.3.24: Eğer R, karakteristiği 2 den farklı olan asal halka ve T, R nin U Lie ideali üzerinde merkezil ve triviyal olmayan otomorfizmi olsun. Bu durumda U, R nin merkezi tarafından kapsanır.

2.4 (σ,τ) Türevli Halkalar

Tanım: $d: R \to R$ bir dönüşüm ve $\sigma,\tau: R \to R$ iki fonksiyon olsun.

Eğer her $x, y \in R$ için

$$d(x+y) = d(x) + d(y)$$

$$d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$$

ise d ye bir $(\sigma,\tau) - türev$ denir.

Hirano,Y. ve Tominaga H., 1984

Bu makalede

$d: R \to R, x \to x'$ bir $(\sigma,\tau) - türev$, $C_{\sigma,\tau} = \{c \in R | c\sigma(x) = \sigma\tau(x)c, \forall x \in R\}$, $[x,y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) + \tau(y)x$ olarak alınmıştır. Burada σ ve τ, R nin iki otomorfizmidir.

Önerme 2.4.1: R bir asal halka $0 \neq d: R \to R$ bir $(\sigma, 1) - türev$ ve $U \neq (0)$, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $[u', u] = 0, \forall u \in U$ olması için gerekli ve yeterli koşul R nin değişmeli olmasıdır.

Önerme 2.4.2: R bir asal halka $0 \neq d: R \to R$ bir $(\sigma,\tau) - türev$ ve $U \neq (0)$, R nin bir ideali olsun. $\forall u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda R değişmelidir ve $\sigma = \tau$ dır.

Teorem2.4.3: R bir asal halka, $charR \neq 2, 0 \neq d: R \to R$ bir $(\sigma,\tau) - türev$ ve $U \neq 0$ R nin bir ideali olsun. Bu durumda $[u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}, \forall u \in U$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall u \in U$ için $[u', u]_{\sigma,\tau} = 0$ olmasıdır.

Argaç, N., Kaya, A. ve Kısır, A., 1987

Bu makale boyunca R bir asal halka, $I \neq 0$, onun bir sağ ideali ve σ , τ R nin iki otomorfizmi olarak alınmıştır.

$[U]_{\sigma,\tau} = \{u \in U | [u', u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}\}$ ve $(U)_{\sigma,\tau} = \{u \in U | (u', u)_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}\}$ biçminde tanımlanmıştır.

Aşağıdaki koşulları ele alalım.

$a)$ R değişmelidir ve $\sigma = \tau$ dır.

$a^*)$ R değişmeli, $charR = 2$ ve $\sigma = \tau$ dır.

$b)$ $\forall a \in I\ için, [a', a]_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

$c)\ \forall a \in I\ için\ (a', a)_{\sigma,\tau} = 0$ dır.

$d)\ I = [I]_{\sigma,\tau}$, yani $\forall a \in I\ için\ [a', a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dır.

$e)\ I = (I)_{\sigma,\tau}$, yani $\forall a \in I\ için\ (a', a)_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dır.

$f)\ I = [I]_{\sigma,\tau} \cup (I)_{\sigma,\tau}$

Teorem 2.4.4: R bir asal halka, $0 \neq d: R \to R$ bir $(\sigma,\tau) - türev$ ve I, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Bu durumda $a)$ ile $b)$ ve $a^*)$ ile $c)$ koşulları denktirler.

Önerme 2.4.5: $0 \neq d: R \to R$ bir $(1,\tau) - türev$ olmak üzere

1) $a, b \in [I]_\tau$ $(a, b \in (I)_\tau)$ olsun. Buna göre $a + b \in [I]_\tau$ $(a + b \in (I)_\tau)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $a - b \in [I]_\tau$ $(a - b \in (I)_\tau)$ dır.

2) Eğer $b \in [I]_\tau$ ise bu durumda $[b', b^2]_\tau = 0$ dır.

3) $a, b \in [I]_\tau$ olsun. Eğer $f)$ koşulu gerçekleniyor ve $charR \neq 3$ ise bu durumda ya $a + b \in [I]_\tau$ ya da $a, b, a + b \in (I)_\tau$ dır. Özel olarak, $a \in I - (I)_\tau$ ve $b \in [I]_\tau$ ise bu durumda $a + b \in [I]_\tau$ dır.

4) Eğer $I \neq [I]_\tau$ ise bu durumda $\forall b \in I - [I]_\tau$ için $b^n = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı yoktur.

Önerme 2.4.6: $0 \neq d: R \to R$ bir $(1,\tau) - türev$, $charR \neq 2$ ve $f)$ koşulu sağlansın. Buna göre;

1) Eğer $b \in I - [I]_\tau$ ise bu durumda $(b^2)' = \tau(b^2)b' = b'b^2 = 0$ ve

$b^2 \neq 0$ dır.

2) Eğer $Z \cap I \neq (0)$ ise bu durumda $d)$ koşulu sağlanır.

3) $b \in I - [I]_\tau$ ve $x \in R, x' = 0$ olsun. Bu durumda $\tau(b)b'xb = 0$ dır.

Teorem 2.4.7: R bir asal halka $charR \neq 2$, $0 \neq d: R \to R$ bir $(\sigma,\tau) - türev$ ve I, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Buna göre $a)$, $b)$, $d)$ ve $e)$ koşulları denktirler.

Önerme 2.4.8: $d: R \to R$ bir $(1,\tau) - türev$, $charR \neq 3$ ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu durumda $a)$, $b)$, $d)$, $e)$ ve $f)$ koşulları denktirler.

Teorem 2.4.9: R bir asal halka $charR \neq 2$, $0 \neq d: R \to R$ $(\sigma,\tau) - türev$ ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Buna göre $a)$, $b)$, $d)$, $e)$ ve $f)$ koşulları denktirler.

Kaya, K., 1988

Bu makale boyunca σ ve τ dönüşümleri R halkasının otomorfizmleri olarak alınmıştır.

Önerme 2.4.10: R bir asal halka, $0 \neq d: R \rightarrow R, d(x) = x'$ ile tanımlanmış bir $(\sigma,\tau) - türev$ ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer $\forall u \in U$ için $(u',u)_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda R değişmelidir.

Önerme 2.4.11: R bir asal halka, $0 \neq d: R \rightarrow R$ $(\sigma,\tau) - türev$ ve $U,$ R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer $\forall u \in U$ için

(1) $[u',u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda R değişmelidir.

(2) $[u',u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda R değişmelidir. Üstelik $\sigma = \tau$ dur.

Önerme 2.4.12: R bir asal halka ve $a, b \in R$ olsun. $b, ab \in C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $a \in Z$ veya $b = 0$ dır.

Önerme 2.4.13: R bir asal halka, $d: x \rightarrow x'$ bir $(\sigma,\tau) - türev$, $charR \neq 2$ ve U, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u',u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $[u',u] = 0$ dır.

Teorem 2.4.14: R bir asal halka, $charR \neq 2$ ve $d: x \rightarrow x'$, R nin sıfırdan farklı bir $(\sigma,\tau) - türevi$ olsun. Eğer U, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali ve her $u \in U$ için $[u',u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda R değişmelidir.

Aydın, N., Kaya, K., 1992

Bu makale boyunca R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, Z, R nin merkezi ve $d: R \rightarrow R$ bir $(\sigma,\tau) - türevi$ olarak alınmış ve ayrıca aşağıdaki bağıntılar kullanılmıştır.

$$[x, yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z),$$

$$[xy, z]_{\sigma,\tau} = x[y,z]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(z)]y,$$

ve

$$[x,[y,z]]_{\sigma,\tau} + [[x,z]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau} - [[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau} = 0$$

Lemma 2.4.15: U, R nin bir sağ ideali ve $d(U) = 0$ ise bu durumda $d = 0$ dır.

Lemma 2.4.16: d, R nin sıfırdan farklı bir $(\sigma,\tau) - türevi$ ve U, R nin bir sağ ideali olsun. Eğer $d(U) \subseteq Z$ ise bu durumda R değişmelidir.

Lemma 2.4.17: U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a \in R$ olsun. Eğer $ad(U) = 0$ (veya $d(U)a = 0$) ise bu durumda $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 2.4.18: $d_1: R \to R$ bir $(\sigma, \tau) - türev$ ve $d_2: R \to R$ bir türev olsun. Eğer $d_1 d_2(R) = 0$ ise bu durumda $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Teorem 2.4.19: $d,$ sıfırdan farklı bir $(\sigma, \tau) - türev$ olsun. U, R nin bir ideali ve $a \in R$ olmak üzere eğer $[d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

Teorem 2.4.20: d, R nin sıfırdan farklı bir $(\sigma, \tau) - türevi$ ve U, R nin bir ideali olsun. Eğer $[d(U), d(U)]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda R değişmelidir.

Lemma 2.4.21: d, R nin sıfırdan farklı bir $(\sigma, \tau) - türevi$ ve U, R nin bir ideali olsun. Eğer $a \in R$ ve $ad(U) \subseteq C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $a = 0$ veya R değişmelidir.

Lemma 2.4.22: R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve d, R nin sıfırdan farklı bir $(\sigma, \tau) -$ türevi ve $a \in R$ olsun. Eğer $[d(R), a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $a \in Z(R)$ dir.

Teorem 2.4.23: d, R nin sıfırdan farklı bir $(\sigma, \tau) - türevi$ olsun. Eğer $[d(R), d(R)]_{\sigma,\tau} \subseteq C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda R değişmelidir.

Kandamar, H. ve Kaya, K., 1992

Bu makale boyunca R, Z merkezi ile birlikte karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U, R nin bir ideali, d, R nin bir $(\sigma, \tau) - türevi$ ve Z, R nin merkezi olarak alınmıştır.

Lemma 2.4.24: Eğer $d(U) = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.4.25: Eğer $U \not\subset Z$ ve $t \in R$ için $td(u) = (0)$ (veya $d(U)t = (0)$) ise bu durumda $t = 0$ dır.

Lemma 2.4.26: Eğer $d(U) \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Teorem 2.4.27: d, R de $\sigma d = d\sigma, \tau d = d\tau$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $(\sigma, \tau) - türev$ ve U, R nin sıfırdan farklı bir Lie ideali olsun. Eğer $d(U) \subset U$ ve $d^2(U) = (0)$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Lemma 2.4.28: Eğer $a \in R, U \not\subset Z$ için $[U, a] \subset Z$ ise bu durumda $a \in Z$ dir.

Lemma 2.4.29: Eğer $[U, d(U)] \subset Z$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

Ashraf, M. ve Rehman, N.U., 2002

Bu makale boyunca R, $Z(R)$ merkezi ile bir birleşmeli halka olarak alınmıştır.

Lemma 2.4.30: R, 2-torsion free bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve d bir $(\sigma,\tau)-$ türevi olsun. Eğer $a \in R$ için $ad(I) = (0)$ (veya $d(I)a = 0$) ise bu durumda $d = 0$ veya $a = 0$ dır.

Lemma 2.4.31: R, 2-torsion free bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve d, $\sigma d = d\sigma, \tau d = d\tau$ koşlunu sağlayan bir $(\sigma,\tau)-$ türevi olsun. Eğer $d^2(I) = (0)$ ise bu durumda $d = 0$ dır.

Teorem 2.4.32: R, 2-torsion free bir asal halka olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $[d(x), x]_{\sigma,\tau} = 0$ koşulunu sağlayan $d: R \to R$ $(\sigma,\tau)-$ türevi varsa bu durumda $d = 0$ veya R değişmelidir.

Teorem 2.4.33: R, 2-torsion free bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $d, \sigma d = d\sigma, \tau d = d\tau$ koşulunu sağlayan bir $(\sigma,\tau)-$ türevi olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = 0$ ise bu durumda $d = 0$ veya R değişmelidir.

Teorem 2.4.34: R, 2-torsion free bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $d, \tau d = d\tau, \sigma d = d\sigma$ koşulunu sağlayan bir $(\sigma,\tau)-$ türevi olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ için $[d(x), d(y)] = 0$ ise bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.4.35: R, 2-torsion free bir asal halka ve d_1, d_2, R halkasının $d_1\sigma = \sigma d_1$, $d_1\tau = \tau d_1$, $d_2\sigma = \sigma d_2$ ve $d_2\tau = \tau d_2$ koşulunu sağlayan $(\sigma,\tau)-$ türevleri olsun. Eğer $d_1 d_2(R) = 0$ ise bu durumda $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Aydın, N., 2008

Lemma 2.4.36 (Lemma 2.4.22): R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, d, R nin sıfırdan farklı bir $(\sigma,\tau)-$ türevi ve $a \in R$ olsun. Eğer $[d(R), a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $a \in Z(R)$ dir.

Lemma 2.4.37 (Teorem 2.1.16): R, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve $d: R \to R$ sıfırdan farklı bir türev olsun. Eğer $d^2(R) \subset Z$ ise bu durumda R değişmelidir.

Lemma 2.4.38 (Lemma 2.4.16): d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir $(\sigma,\tau)-$ türevi ve U, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer $d(U) \subset Z(R)$ ise bu durumda R değişmelidir.

Lemma 2.4.39: R, 2-torsion free bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a \in R$ olsun. Eğer R nin $ad(I) = 0$ (veya $d(I)a = 0$) koşulunu sağlayan bir $d, (\sigma,\tau)-$ türevi varsa bu durumda $d = 0$ veya $a = 0$ dır.

Teorem 2.4.40: R, 2-torsion free bir asal halka olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $[d(x), x]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ koşulunu sağlayan $d: R \to R, (\sigma,\tau)-$ türevi varsa bu durumda $d = 0$ veya R değişmelidir.

Teorem 2.4.41: R bir 2-torsion free bir asal halka ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer R nin $\forall x, y \in U$ için $d(xy) = d(yx)$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $d, (\sigma, \tau) -$ türevi varsa bu durumda R değişmelidir.

III. BÖLÜM

LİE İDEALLER VE $(\sigma, \tau) -$ TÜREVLİ ASAL HALKALAR İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve her $a \in R$ için $[a, d(a)] = 0$ iken R halkasının komütatif olduğu Posner tarafından 1957 yılında gösterilmiştir. Daha sonra Awtar tarafından yukarıdaki teorem, R halkası yerine Lie ve Jordan idealleri alınarak genelleştirilmiştir. P. H. Lee ve T. K. Lee ise aynı sonucu karakteristiği ikiden farklı asal halka için ispatlamışlardır. 1991 yılında Bresar tarafından genelleştirilmiş türev tanımı yapılmış ve böylece bu sonuçlar genelleştirilmiş türev için incelenmeye başlanmıştır. Bu teorem 2004 yılında Argaç ve Albaş tarafından R halkasının genelleştirilmiş türevi için ispatlanmıştır. 2009 yılında ise Ö. Gölbaşı teoremi yarı-asal halkalara genelleştirmiştir. Posner'ın bu teoremi Y. Hirano ve H. Tominaga tarafından $(\sigma, 1) -$türev için incelenmiştir. Daha sonra 1988 yılında K. Kaya, 2002 yılında M. Asraf ve N. Rehman, 2008 yılında ise N. Aydın bir R asal halkasının $(\sigma, \tau) -$türevi için $[d(u), u]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $[d(u), u]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ koşullarını araştırmışlardır.

Öte yandan Daif ve Bell, 1992 yılında,

"d, R yarı-asal halkasının sıfırdan farklı türevi ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olmak üzere

i. $d([x, y]) = [x, y],\ \forall x, y \in I$,

ii. $d([x, y]) = -[x, y],\ \forall x, y \in I$,

iii. Her $x, y \in I$ için $d([x, y]) = [x, y]$ veya $d([x, y]) = -[x, y]$

koşullarından biri sağlanırsa I, R halkasının merkezindedir."

teoremini ispatlamışlardır. Bu sonuç 2006 yılında Argaç tarafından incelenmiştir. Gölbaşı ise aynı sonucu bir yarı-asal halkada genelleştirilmiş türev için ispatlamıştır. Ayrıca Ö. Gölbaşı ve E. Koç, Daif ve Bell'in bu teoremini bir Lie ideal için araştırmışlardır.

Bu bölümde Posner'ın, Herstein'in ve Daif-Bell'in teoremleri [Asraf 2002], [Aydın-Kaya 1992] ve [Aydın 2008]'in çalışmaları esas alınarak, R asal halkasının sıfırdan farklı ve her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali ve $d, (\sigma, \tau) -$türevi için ispatlanacaktır.

Not 1: U bir Lie ideal olmak üzere $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ iken $2uv \in U$ olur.

İspat: Gerçekten; $\forall u, v \in U$ için U toplamsal alt grup olduğundan $u + v \in U$ dur ve $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ olduğundan $(u + v)^2 \in U$ olur. Dolayısıyla

$$(u + v)^2 = (u + v)(u + v) = u^2 + uv + vu + v^2 \in U$$

olur. Böylece

$$uv + vu \in U,\ \forall u, v \in U$$

elde edilir. Öte yandan U Lie ideal olduğundan

$uv - vu \in U, \ \forall u, v \in U$

olur. Bu iki ifadeden $\forall u, v \in U$ için $2uv \in U$ elde edilir.

Not 2: R bir halka U, R nin bir Lie ideali olsun, $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulu, U nun R halkasının bir ideali olması kabulüne yakın gözükse bile, bu özelliği sağlayan ve R halkasının ideali olmayan Lie idealler bulunabilir.

Örnek: $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in Z \right\}$ halkası olsun. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Z \right\}$ kümesi R halkasının $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie idealidir. Fakat U, R nin bir ideali değildir.

Gerçekten; $\forall u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U$, için $u^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab + ba \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \in U$ olur. Aynı zamanda

$\forall u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U$ ve $\forall r = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R$ için

$$[u, r] = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & af \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} da & db + ea \\ 0 & fa \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad - da & bf - db \\ 0 & af - fa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bf - db \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$$

olur. Bu durumda U Lie idealdir. Fakat

$\forall u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U$ ve $\forall r = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R$ için

$$ur = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & af \end{pmatrix} \notin U,$$

$$ru = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da & db + ea \\ 0 & fa \end{pmatrix} \notin U$$

olur. Dolayısıyla U, R halkasının bir ideali değildir.

Teorem 3.1: R, 2-torsion free bir asal halka, U, R nin her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali, $d: R \to R$ sıfırdan farklı $(\sigma, \tau) - türev$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $[d(u), u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda $U \subset Z$ dir.

İspat: Hipotezden

$$[d(u), u]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall u \in U \tag{3.1}$$

olur. (3.1) ifadesi lineerize edilirse;

$$0 = [d(u + v), u + v]_{\sigma,\tau}$$

$$= [d(u), u]_{\sigma,\tau} + [d(u), v]_{\sigma,\tau} + [d(v), u]_{\sigma,\tau} + [d(v), v]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Burada hipotez kullanılırsa;

$$[d(u), v]_{\sigma,\tau} + [d(v), u]_{\sigma,\tau} = 0, \ \forall u, v \in U \tag{3.2}$$

bulunur. (3.2) eşitliğinde v yerine $2vu \in U$ yazılırsa;

$$0 = [d(u), 2vu]_{\sigma,\tau} + [d(2vu), u]_{\sigma,\tau}$$

$$= 2[d(u), vu]_{\sigma,\tau} + 2[d(v)\sigma(u) + \tau(v)d(u), u]_{\sigma,\tau}$$

$$= 2\tau(v)[d(u), u]_{\sigma,\tau} + 2[d(u), v]_{\sigma,\tau}\sigma(u) + 2[d(v), u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)$$

$$+2d(v)[\sigma(u), \sigma(u)] + 2\tau(v)[d(u), u]_{\sigma,\tau} + 2[\tau(v), \tau(u)]d(u)$$

elde edilir. Bu eşitlikte hipotez ve (3.2) eşitliği kullanılırsa;

$$0 = 2\big([d(u), v]_{\sigma,\tau} + [d(v), u]_{\sigma,\tau}\big)\sigma(u) + 2\tau([v, u])d(u)$$

olur. R 2-torsion free halka olduğundan;

$$\tau([v, u])d(u) = 0, \ \forall u, v \in U \tag{3.3}$$

bulunur. (3.3) eşitliğinde v yerine $2vw$ yazılırsa,

$$0 = \tau([2vw, u])d(u) = 2\tau([v, u])\tau(w)d(u) + 2\tau(v)\tau([w, u])d(u)$$

Yine (3.3) eşitliği ve R nin 2-torsion free olduğu kullanılarak

$$\tau([v, u])\tau(w)d(u) = 0, \ \forall u, v, w \in U$$

elde edilir. Bu ise τ otomorfizma olduğundan

$$[v, u]w\tau^{-1}\big(d(u)\big) = 0, \ \forall u, v, w \in U$$

demektir. Yani;

$$[v, u]U\tau^{-1}\big(d(u)\big) = 0, \ \forall u, v \in U$$

bulunur. Lemma 2.2.14 den

$$[v, u] = 0 \text{ veya } d(u) = 0, \ \forall u, v \in U$$

elde edilir.

Şimdi $K = \{u \in U | d(u) = 0\}$ ve $L = \{u \in U | [v, u] = 0\}$ kümeleri tanımlansın. K ve L kümeleri U toplamsal grubunun alt gruplarıdır. Üstelik $U = K \cup L$ dir. Halbuki bir grup iki özalt grubunun birleşimi olarak yazılamıyacağı için $U = K$ veya $U = L$ olmalıdır.

Eğer $U = K$ ise bu durumda $d(U) = 0$ olur. Bu ise Lemma 2.4.24 den $d \neq 0$ olduğundan $U \subset Z$ demektir. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer $U = L$ ise bu durumda $[U, U] = 0$ olur ki yine Lemma 2.2.1 den $U \subseteq Z$ elde edilir. O halde her iki durumda da $U \subseteq Z$ bulunur.

Teorem 3.2: R, 2-torsion free bir asal halka, U, R nin her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali, $d: R \to R$ sıfırdan farklı (σ,τ) −türev olsun. Eğer her $u \in U$ için $[d(u),u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $U \subseteq Z$ dir.

İspat: Hipotezden

$$[d(u),u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall u \in U \tag{3.4}$$

olur. Bu ifadede u yerine $u+v$ yazılırsa ve yine (3.4) eşitliği kullanılırsa;

$$[d(u)+d(v),u+v]_{\sigma,\tau}$$

$$= [d(u),u]_{\sigma,\tau} + [d(u),v]_{\sigma,\tau} + [d(v),u]_{\sigma,\tau} + [d(v),v]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Yani;

$$[d(u),v]_{\sigma,\tau} + [d(v),u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall u,v \in U \tag{3.5}$$

elde edilir.

Öte yandan Jacobi eşitliğinden

$$\big[d(u),[v,u]\big]_{\sigma,\tau} = \big[[d(u),v]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau} - \big[[d(u),u]_{\sigma,\tau},v\big]_{\sigma,\tau}$$

olur. Bu eşitlikte hipotez kullanılırsa;

$$\big[d(u),[v,u]\big]_{\sigma,\tau} = \big[[d(u),v]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau},\ \forall u,v \in U \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinde v yerine $[v,u]$ yazılırsa;

$$\big[d(u),[v,u]\big]_{\sigma,\tau} + [d([v,u]),u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall u,v \in U \tag{3.7}$$

elde edilir. Öte yandan

$$[d([v,u]),u]_{\sigma,\tau} = \big[[d(v),u]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau} - \big[[d(u),v]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau}, \forall u,v \in U \tag{3.8}$$

dir. (3.7) eşitliğinde (3.6) ve (3.8) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\big[[d(u),v]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau} + \big[[d(v),u]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau} - \big[[d(u),v]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

olur. Yani;

$$\big[[d(v),u]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall u,v \in U \tag{3.9}$$

bulunur. (3.5) eşitliği $u \in U$ ile kommute (commute) edilirse;

$$0 = \big[[d(u),v]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau} + \big[[d(v),u]_{\sigma,\tau},u\big]_{\sigma,\tau}$$

bulunur. Bu eşitlikte (3.9) eşitliği kullanılırsa;

$$\left[[d(u),v]_{\sigma,\tau},u\right]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall u,v \in U \tag{3.10}$$

bulunur.

Öte yandan Jacobi özdeşiliğinden

$$\left[[d(u),v]_{\sigma,\tau},u\right]_{\sigma,\tau} = \left[d(u),[v,u]\right]_{\sigma,\tau} + [[d(u),u]_{\sigma,\tau},v]_{\sigma,\tau}$$

dır. Bu ifadede hipotez kullanılırsa;

$$\left[d(u),[v,u]\right]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau},\ \forall u,v \in U \tag{3.11}$$

bulunur. Bu eşitlikte v yerine $2vu$ yazılırsa;

$$\left[d(u),[2vu,u]\right]_{\sigma,\tau} = 2[d(u),[v,u]u]_{\sigma,\tau}$$

$$= 2\left\{\tau([v,u])[d(u),u]_{\sigma,\tau} + \left[d(u),[v,u]\right]_{\sigma,\tau}\sigma(u)\right\}$$

elde edillir. Bu ifade $u \in U$ ile kommute (commute) edilirse;

$$0 = \left[\tau([v,u])[d(u),u]_{\sigma,\tau} + \left[d(u),[v,u]\right]_{\sigma,\tau}\sigma(u),u\right]_{\sigma,\tau}$$

$$= \tau([v,u])\left[[d(u),u]_{\sigma,\tau},u\right]_{\sigma,\tau} + [\tau([v,u]),\tau(u)][d(u),u]_{\sigma,\tau}$$

$$+ \left[\left[d(u),[v,u]\right]_{\sigma,\tau},u\right]_{\sigma,\tau}\sigma(u) + \left[d(u),[v,u]\right]_{\sigma,\tau}[\sigma(u),\sigma(u)]$$

Böylece bu son eşitlikten

$$\tau\left(\left[[v,u],u\right]\right)[d(u),u]_{\sigma,\tau} = 0,\ \forall u,v \in U \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.12) eşitliği sağdan $\sigma(w)$ ile çarpılırsa;

$$\tau\left(\left[[v,u],u\right]\right)[d(u),u]_{\sigma,\tau}\sigma(w) = 0$$

olur. Hipotezden $[d(u),u]_{\sigma,\tau}\sigma(w) = \tau(w)[d(u),u]_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa;

$$\tau\left(\left[[v,u],u\right]\right)\tau(w)[d(u),u]_{\sigma,\tau} = 0$$

bulunur. τ otomorfizma olduğu için bu ifadeden

$$\left[[v,u],u\right]U\tau^{-1}\left([d(u),u]_{\sigma,\tau}\right) = 0$$

elde edilir. Böylece Lemma 2.2.14 den her $u \in U$ için

$$\left[[v,u],u\right] = 0 \text{ veya } [d(u),u]_{\sigma,\tau} = 0.$$

Eğer $[d(u),u]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda Teorem 3.1 den $U \subseteq Z$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi $\big[[v,u],u\big]=0,\ \forall v\in U$ olduğunu kabul edelim.

$I_u: R\to R,\ \ I_u(x)=[x,u]$ dönüşümünü tanımlayalım. I_u nun $u\in U$ ile belirlenen iç türev olduğu açıktır. Böylece yukardaki son eşitlikten ${I_u}^2(U)=0$ bulunur. Bu ise Teorem 2.2.18 den $U\subseteq Z$ sonucunu verir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3 : $R,$ 2-torsion free bir asal halka, U,R nin her $u\in U$ için $u^2\in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali, $d: R\to R$ sıfırdan farklı (σ,τ) $-$türev olsun. Eğer $a\in R$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau}=0$ ise bu durumda $a\in Z$ veya $U\subseteq Z$ dir.

İspat: Hipotezden

$$[d(u),a]_{\sigma,\tau}=0,\ \forall u\in U \tag{3.13}$$

dir. (3.13) eşitliğinde u yerine $2uv$ yazılırsa;

$$0=[d(2uv),a]_{\sigma,\tau}=2[d(u)\sigma(v)+\tau(u)d(v),a]_{\sigma,\tau}$$

$$=2[d(u),a]_{\sigma,\tau}\sigma(v)+2d(u)[\sigma(v),\sigma(a)]+2\tau(u)[d(v),a]_{\sigma,\tau}$$

$$+2[\tau(u),\tau(a)]d(v)$$

olur. Bu ifadede hipotez ve R nin 2-torsion free olduğu kullanılırsa;

$$d(u)\sigma([v,a])+\tau([u,a])d(v)=0$$

bulunur. Yani;

$$d(u)\sigma([v,a])=\tau([a,u])d(v),\ \forall u,v\in U \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) eşitliğinde v yerine $2vw$ yazılırsa;

$$d(u)\sigma([v,a])\sigma(w)+d(u)\sigma(v)\sigma([w,a])$$

$$=\tau([a,u])d(v)\sigma(w)+\tau([a,u])\tau(v)d(w)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.14) eşitliği kullanılırsa;

$$d(u)\sigma(v)\sigma([w,a])=\tau([a,u])\tau(v)d(w),\ \forall u,v,w\in U \tag{3.15}$$

bulunur. (3.15) eşitliğinde v yerine $[v,a]$ yazılırsa;

$$d(u)\sigma([v,a])\sigma([w,a])=\tau([a,u])\tau([v,a])d(w)$$

bulunur. Tekrar (3.14) eşitliği kullanılırsa;

$$d(u)\tau([a,u])d(v)\sigma([w,a])=\tau([a,u])\tau([v,a])d(w)$$

elde edilir. Burada (3.14) eşitliği kullanılarak $d(v)\sigma([w,a])=\tau([a,v])d(w)$ yazılırsa;

$$\tau([a,u])\tau([a,v])d(w)=\tau([a,u])\tau([v,a])d(w)$$

$$= -\tau([a,u])\tau([a,v])d(w)$$

olur. Yani;

$$2\tau([a,u])\tau([a,v])d(w) = 0$$

bulunur. R 2-torsion free asal halka olduğu için

$$\tau([a,u])\tau([a,v])d(w) = 0, \ \forall u,v,w \in U$$

olur. Lemma 2.4.25 den

$\tau([a,u])\tau([a,v]) = 0$ veya $U \subseteq Z$

olur. Dolayısıyla τ otomorfizma olduğu da kullanılarak

$$[a,u][a,v] = 0, \ \forall u,v \in U \qquad (3.16)$$

bulunur. (3.16) eşitliğinde v yerine $2vw$ yazılırsa;

$$0 = 2[a,u][a,v]w + 2[a,u]v[a,w]$$

olur. Yani;

$$[a,u]U[a,w] = 0, \ \forall u,w \in U$$

elde edilir. Lemma 2.2.14 den

$[a,u] = 0$ veya $[a,w] = 0$

olur. Özel olarak $[a,u] = 0, \ \forall u \in U$ bulunur. Lemma 2.2.1 den $a \in Z$ elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 3.4: R, 2-torsion free bir asal halka, U, R nin her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali, $d: R \to R$ sıfırdan farklı (σ,τ) −türev olsun. Eğer her $u,v \in U$ için $d([u,v]) = 0$ ise bu durumda $U \subseteq Z$ dir.

İspat: Hipotezden;

$$d([u,v]) = 0, \ \forall u,v \in U \qquad (3.17)$$

dir. (3.17) eşitliğinde v yerine $2vu$ yazılırsa ve R nin 2-torsion free olduğu ve (3.17) eşitliği kullanılırsa;

$$0 = d([u,2vu]) = 2d([u,v]u)$$

$$= 2d([u,v])\sigma(v) + 2\tau([u,v])d(u)$$

bulunur. Yani;

$$\tau([u,v])d(u) = 0 \ , \ \forall u,v \in U \qquad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) eşitliğinde v yerine $2vw$ yazılırsa;

$$0 = \tau([u, 2vw])d(u)$$

$$= 2\tau([u, v])\tau(w)d(u) + 2\tau(v)\tau([u, w])d(u)$$

olur. Bu eşitlikte R nin 2-torsion free olduğu ve (3.18) eşitliği kullanılırsa;

$$\tau([u, v])\tau(w)d(u) = 0, \ \forall u, v, w \in U$$

bulunur. τ otomorfizma olduğu için

$$[u, v]U\tau^{-1}(d(u)) = 0$$

elde edilir. Lemma 2.2.14 den

$$[u, v] = 0 \text{ veya } d(u) = 0$$

elde edilir.

Şimdi $K = \{u \in U | [u, v] = 0\}$ ve $L = \{u \in U | d(u) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L kümeleri U toplamsal grubunun iki özalt grubu olup, $U = K \cup L$ dir. Böylece Brauer's Trick'ten $U = K$ veya $U = L$ olmalıdır.

Eğer $U = K$ ise $[U, U] = 0$ olur. Bu Lemma 2.2.1 den $U \subseteq Z$ demektir. İspat biter.

Eğer $U = L$ ise $d(U) = 0$ olur. Bu ise Lemma 2.4.24 den $U \subseteq Z$dir. Yine ispat tamamlanır.

Teorem 3.5: R, 2-torsion free bir asal halka, U, R nin her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir Lie ideali, $d: R \to R$ sıfırdan farklı (σ, τ) −türev olsun. Eğer her $u, v \in U$ için $d([u, v]) = \pm[u, v]_{\sigma,\tau}$ ise bu durumda $U \subseteq Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki

$$d([u, v]) = [u, v]_{\sigma,\tau}, \ \forall u, v \in U \tag{3.19}$$

olsun. Bu ifadede v yerine $2vu$ yazılırsa;

$$d([u, 2vu]) = [u, 2vu]_{\sigma,\tau}$$

$$2d([u, v]u) = 2\tau(v)[u, u]_{\sigma,\tau} + 2[u, v]_{\sigma,\tau}\sigma(u)$$

$$2d([u, v])\sigma(u) + 2\tau([u, v])d(u) = 2\tau(v)[u, u]_{\sigma,\tau} + 2[u, v]_{\sigma,\tau}\sigma(u)$$

olur. Bu eşitlikte hipotez ve R halkasının 2-torsion free olduğu kullanılırsa;

$$\tau([u, v])d(u) = \tau(v)[u, u]_{\sigma,\tau}, \ \forall u, v \in U \tag{3.20}$$

bulunur. (3.20) eşitliğinde v yerine $2wv$ yazılırsa;

$$\tau([u, 2wv])d(u) = \tau(2wv)[u, u]_{\sigma,\tau}$$

$$2\tau([u, w])\tau(v)d(u) + 2\tau(w)\tau([u, v])d(u) = 2\tau(w)\tau(v)[u, u]_{\sigma,\tau}$$

olur. (3.20) eşitliği ve R halkasının 2-torsion free olduğu kullanılırsa;

$$\tau([u,w])\tau(v)d(u) = 0, \ \forall u,v,w \in U \tag{3.21}$$

bulunur. τ otomorfizma olduğu için

$$[u,w]U\tau^{-1}\big(d(u)\big) = 0, \ \forall u,w \in U$$

elde edilir. Lemma 2.2.14 den

$$[u,w] = 0 \text{ veya } \ d(u) = 0$$

dır. Teorem 3.4 de uygulanılan yöntemle $U \subseteq Z$ elde edilir.

Şimdi $d([u,v]) = -[u,v]_{\sigma,\tau}, \ \forall u,v \in U$ olsun. Benzer tekniklerle bu durum için de $U \subseteq Z$ olduğu ispatlanır.

KAYNAKLAR

Argaç, N., Kaya, A., Kısır, A., 1987. (σ,τ) −derivation in prime rings: Math. J. Okayama Univ. Vol 29, 173-177.

Argaç, N., 2006. On prime and semiprime rings with derivations: Algebra Coll., 13 (3), 371-380.

Ashraf, M., Rehman, N.U., 2002. On (σ,τ) −derivations in prime rings: Archivum Mathematicum, Tomus 38, 259-264.

Awtar, R., 1973. On a theorem of Posner: Proc. Camb. Phil. Soc., 73, 25-27.

Awtar, R., 1973. Lie and Jordan structure in prime rings with derivations: Proc. Amer. Math. Soc., 41 (1), 67-74.

Awtar, R., 1984. Lie structure in prime rings with derivations: Publ. Math. Debrecen C. 31, s.209-215.

Aydın, N., Kaya, K., 1992. Some derivations in prime rings with (σ,τ) −derivation: Doğa-Tr. J. of Mathematics, 16, 169-176.

Aydın, N., 2008. A note on (σ,τ) −derivations in prime rings: Indian Journal of Pure and Appl. Math., 39(4), 1-6.

Bell, H. E., Martindale, W. S., 1987. Centralizing mappings of semiprime rings: Canad. Math. Bull., 30(1), 92-101.

Bergen, J., Herstein, I. N., Kerr J. W. , 1981. Lie ideals and derivation of prime rings: J. of Algebra, 71, 259-267.

Bresar, M., 1989. On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivation: Glasgow Math. J., 33, 89-93.

Carini, L., 1985. Derivations on Lie ideals in semiprime rings: Rend. Del. Circolo. Mat. Di Polermo Serie II, Tomo, XXXIV, 122-126.

Daif, M. N., Bell, H. E., 1992. Remarks on derivations on semiprime rings: Internat J. Math. and Math. Sci., 15(1), 205-206.

Gölbaşı, Ö., Kaya, K., 2006. On Lie ideals with generalized derivations: Siberian Math. J., 47 (5), 862-866.

Gölbaşı, Ö., 2009. On commutativity of semiprime rings with generalized derivations: Indian Journal of Pure and Appl. Math., 40(3), 191-199.

Gölbaşı, Ö., Koç, E., 2009. Generalized derivations on Lie ideals in prime rings: Turk J. Math., 33, 1-6.

Herstein, I. N., 1970. On the Lie structure of assosiative rings: J. of Algebra, 14, 561-571.

Herstein, I. N., 1978. A note on derivations: Canad. Math. Bull., 21(3), 369-370.

Herstein, I. N., 1979. A note on derivations II: Canad. Math. Bull., 22(4), 509-511.

Hirano, Y., Tomminaga, H., 1984. Some commutativity theorems for prime rings with derivations and differentially semi prime rings: Math. J. Okayama 26, 101-108 .

Hvala, B., 1998. Generalized derivations in rings: Comm.Algebra, 26 (4), 1147-1166.

Kandamar, H. ve Kaya, K., 1992. Lie ideals and $(\sigma, \tau) - derivation$ in prime rings: Hacettepe Bull., Natural Sci. and Engineering, 21, 29-33.

Kaya, K., 1988. Prime rings with α −derivations: Doğa. T. U. Math. D. C. 12, s.2, 46-51.

Lee, P. H. and Lee T. K., 1981. On derivations of prime rings: Chines J. Math., 9 (2), 107-110.

Lee, P. H. and Lee, T. K., 1983. Lie ideals of prime rings with derivations: Bull. Inst. of Math. Academia Sinica II, 75-79.

Mayne, J. H., 1976. Centralizing automorphisms of prime rings: Canad. Math. Bull., 19(1), 113-115.

Mayne, J. H., 1982. Ideals and centralizing mappings in prime rings: Proc. Amer. Math. Soc., 86(2), 211-212.

Mayne, J. H., 1992. Centralizing automorphisms of Lie ideals in prime rings: Canad. Math. Soc., 23(1), 510-514.

Posner, E. C., 1957. Derivations in prime rings: Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1093-1100.

Rehman, N. U., 2002. On commutativity of rings with generalized derivations: Math. J. Okayama Univ., 44, 43-49.

ÖZGEÇMİŞ

Seda OĞUZ, 1984 yılında İskenderun'da doğdu. İlk öğrenimini Sivas'ta, orta ve lise öğrenimini Balıkesir'de tamamladı. 2003 yılında İstanbul Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünü kazandı ve 2007 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2009 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen buradaki görevine devam etmektedir.