

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONLU OTOMATALARIN MATEMATİKSEL MODELLERİNİN
ANALİZİ

Muhammet CANDAN

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: 20/06/2011

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Yakup HACI

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

MUHAMMET CANDAN tarafından **PROF. DR. YAKUP HACI** yönetiminde hazırlanan “**SONLU OTOMATALARIN MATEMATİKSEL MODELLERİNİN ANALİZİ**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yakup HACI

Danışman

Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Oktay YILMAZ

Jüri Üyesi

Sıra No :

Tez Savunma Tarihi: 20/06/2011

Prof. Dr. İsmet KAYA

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Muhammet CANDAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleŐtirilmesinde, çalıŐmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Yakup HACI ‘ ya sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Muhammet CANDAN

ÖZET

SONLU OTOMATALARIN MATEMATİKSEL MODELLERİNİN ANALİZİ

Muhammet CANDAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Yakup HACI

20/06/2011, 69

Bilim ve mühendislikteki bazı uygulamalı problemler sonlu otomataların matematiksel modelleri yardımıyla çözülebilir. Sonlu otomataların matematiksel modelleri , elektronik bilgisayarların tasarımında , farklı dillerin sentez analizinde , psikolojide ve insan sinir hareketleri gibi birçok alanda önemli rol oynadığından bu problemlerin daha derinden araştırılmasını gerektirir

Tez konusunun amacı sonlu otomataların bazı matematiksel modellerini oluşturarak analiz etmektir. İlk olarak graf teorisinin temel kavramları üzerinde durulmuş, sonra temel modelin önemli özellikleri incelenmiştir. Bazı durumlar için uygun matematiksel modeller araştırılarak uygulama amaçlı sonuçların bulunması yönünde çalışmalar yapılmıştır. Durumlar ve alt otomataların tasnifi verilerek bu konuda önemli algoritmalar araştırılmıştır. Daha sonra geçiş ve yüksek mertebeden geçiş matrisleri yardımıyla minimal yolların bulunması için gerekli yöntemler verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Sonlu otomata , Graf, Geçiş matrisi, Minimal yol

ABSTRACT

ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS OF FINITE STATE MACHINES

Muhammet CANDAN

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School

Mathematics Thesis, Master of Science

Advisor : Prof. Dr. Yakup HACI

20/06/2011, 69

Most applied problems encountered in scientific and engineering investigations can be solved with the help of mathematical models of finite state machines. Since mathematical models of finite state machine played an important role in many areas such as , design of electronic computers, analysis of language syntax, psychology and human nervous activity, these problems require a deeper investigations.

The aim of this thesis is to analyze by constructing some mathematical models of finite state machines. Firstly, the basic concepts of graph theory were focused on, and then some properties of basic model were investigated. In some cases the appropriate mathematical models have been carried out for application of results. Algorithms concerning classification of state and submachines, have been constituted. Then the necessary methods have been given to find minimal paths in via transition matrix and high order transition matrices.

Keywords: Finite automata, Graph, Transition matrix, Minimal path.

İÇERİK	Sayfa
TEZ SINAVI SONUÇ FORMU	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI.....	iii
TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
BÖLÜM 1 – GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 - GRAF TEORİSİNİN TEMEL TERİMLERİ	10
2.1. Giriş	10
2.2. Tek Hamlede Çizilebilen Graflar	19
2.3. Euler Döngüsü	20
2.4. Hamilton Döngüsü	22
2.5. Eş Yapılı (İzomorfik) Graflar	23
2.6. Komşuluk ve Incidence Matrisleri	24
BÖLÜM 3 - TEMEL MODEL.....	28
3.1. Giriş	28
3.2. İç Yapıdan Durum Kümesinin Belirlenmesi	31
3.3. Alternatif Model	34
BÖLÜM 4 – GEÇİŞ TABLOLARI VE GEÇİŞ GRAFLARI	36
4.1. Giriş	36
4.2. Geçiş Tablosu	36
4.3. Geçiş Tablolarının Sayısının Belirlenmesi	37
4.4. Geçiş Grafi	39
BÖLÜM 5 – BAZI ÖNEMLİ ALGORİTMALAR.....	41
5.1. Durum ve Alt Otomatların Sınıflandırılması	41
5.2. $G_k(S_i)$ Kümesi	43

5.3. $H_k(S_i)$	45
BÖLÜM 6 – GEÇİŞ MATRİSLERİ.....	47
6.1. Birinci Mertebeden Geçiş Matrisleri.....	47
6.2. Yüksek Mertebeden Geçiş Matrisleri.....	49
6.3. Geçiş İskelet Matrisi.....	53
6.4. Sade Yollar	55
6.5. Minimal Yolların Belirlenmesi	57
6.6. Matrislerinin Kısmi Yapısı İle Belirlenen Yollar	60
BÖLÜM 7 – UYGULAMALAR.....	62

BÖLÜM 1**GİRİŞ**

Tezin 2. bölümünde, sonlu dinamik sistemler teorisine yardımcı konu olarak Graf Teorisi Temel Terimleri incelenmiştir. İlk olarak terimlerin tanımları şu şekilde verilmiştir: Noktalar ve bunları birbirine bağlayan kenar adı verdiğimiz eğri parçalarından oluşan şekle graf (çizge) denmektedir. Matematiksel anlamda bir graf V kümesiyle V 'nin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesinden meydana gelmektedir. Eğer grafın bütün kenarları yöne sahipse grafa yönlü graf, aksi halde yönü olmayan graf denir. Eğer bir grafta hem yönlü hem de yönü olmayan kenarlar varsa grafa karışık graf denir. İki nokta arasında en az bir kenar varsa bunlara komşu noktalar denir. Bir noktayı kendisine bağlayan kenara şeklinden dolayı ilmek adını alır. İlmeği ve iki noktası arasında en çok bir kenarı bulunan graflara basit graflar denir. İki noktası arasında birden çok kenar bulunan graflara, multigraf (çoklu çizge) denir. Bir grafta her bir kenara bir reel sayı atanmışsa bu grafa ağırlıklı graf veya ağ denir. Hem ilmek, hem de çoklu kenarlara sahip yönü olmayan grafa pseudo graf denir. Bir noktadaki kenarların sayısına (yerel) derece denir. Bütün noktaların dereceleri aynı olan graflara düzgün (regüler) graflar denir. Bir grafta tek başına kalmış noktalar bulunabilir. Böyle noktalara izole noktalar denir. Bütün noktalan izole olan bir grafa boş graf veya sıfır grafi denir. Her noktaya tam iki kenar değen tek parça n noktalı graflara döngü denir. Düğüm kümesi, tüm kenarların V_1 'in bir düğümünü V_2 'nin bir düğümüne bağlandığı $\{V_1, V_2\}$ şeklinde bir bölmelemeye sahip olan grafa iki parçalı(bipartite) graf denir. Noktaları n ve m elemanlı olmak üzere iki A ve B kümesine ayrılmış, A 'daki her noktanın B 'deki her noktaya bağlandığı başka da kenarı olmayan graflara iki parça ya da iki kümeli tam graf denir. $V^l \subseteq V$ (düğümler kümesi), $E^l \subseteq E$ (kenarlar kümesi) ve $\delta_G^l(e) = \delta_G(e)$ ise $G^l = (V^l, E^l)$ grafına $G = (V, E)$ grafının alt grafi denir ve $G^l \leq G$ şeklinde gösterilir.

2. bölümün 2. başlığı altında tek hamlede çizilebilen graflar anlatılmıştır. 3. başlıkta ise Euler Döngüsü'ne değinilmiştir. Her kenardan tam bir kez geçen başladığı noktaya geri dönen yolculuklara Euler döngüsü denir. 4. başlıkta Hamilton Döngüsü verilmiştir. Bir G grafi verildiğinde her noktadan yalnız bir kez geçmek şartı ile kapalı bir yol oluşturabilen graflara Hamilton Grafi denir. İzomorfik graflar 5. başlıkta incelenmiştir. İki Graf verildiğinde bu iki grafta kenarlar ve konumlar arasındaki ilişki aynı olabilir. Bu durumda benzer özellikte iki farklı geometrik şekiller ortaya çıkabilir. Aynı durumu yansıtan, başka bir deyişle aynı yapıya sahip graflara eş yapılı graflar denir. Başka bir deyişle bunlara izomorfik graflar denir. İki grafın eş yapılı olabilmesi için;

- Kenar sayıları aynı olmalıdır.
- Nokta sayıları aynı olmalıdır.
- Nokta dereceleri aynı olmalıdır.
- Noktalar arasındaki ilişkiyi gösteren matrisler aynı olmalıdır.

2.bölümün son başlığında ise, komşuluk ve incidence matrisleri anlatılarak örnekler verilmektedir.

Tezin 3. bölümünün giriş kısmında sonlu dinamik sistem veya sonlu otomata olarak adlandırdığımız temel model kavramı verilmektedir:

Tanım 3.1. $X = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_p\}$ sonlu giriş alfabeti , $Z = \{\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_q\}$ sonlu çıkış alfabeti ve $S = \{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n\}$ sonlu durum alfabeti (kümesi) olmak üzere,

$$s_{v+1} = f_s(x_v, s_v)$$

$$z_v = f_z(x_v, s_v)$$

şeklindeki karakteristik fonksiyonlu bir sisteme “sonlu dinamik sistem “ veya “sonlu otomata” denir. $x_v, s_v, z_v; t_v$ anındaki sırasıyla giriş, durum ve çıkış sembollerini göstermektedir.

Yukarıda verilen karakteristik fonksiyonlara dikkat edecek olursak, aşağıdaki açıklamayı yapabiliriz.:

Sonlu X giriş alfabeti, sonlu Z çıkış alfabeti ve sonlu S durum kümesi olan bir sistemin herhangi t_v anında (x_v) girişi ve (s_v) durumu verildiğinde bir sonraki durumu ve aynı andaki (z_v) çıkışı belirlenebilirse böyle dinamik sisteme sonlu otomata denir.

Otomataların tepkilerinin belirlenmesinin otomatanın başlangıç durumuna bağlı olduğunu belirten teorem verilmektedir:

Teorem 3.1. Aşık olmayan M sonlu otomatası verilmiş olsun. Eğer sonlu otomatanın f_z ve f_s karakteristik fonksiyonları belirli ise istenilen giriş dizisine uygun çıkış dizisi tek değerli olarak belirlenemez.

Eğer karakteristik fonksiyonların dışında σ_{i_0} başlangıç durumu da verilmiş ise istenilen giriş dizisine uygun çıkış dizisi tek değerli olarak belirlenebilir.

Bu bölümün 2. alt kısmında sonlu dinamik sistemi oluşturan durum kümelerinin nasıl belirlendiği gösterilmektedir.

3. bölümün son kısmında temel modelle verilen sonlu otomata için alternatif bir model oluşturulabileceği gözlenmektedir.

Tanım 3.1 ile gösterilen temel modele karşılık gelen her sonlu durum otomatası , şimdiki çıkış sembolünün sadece şimdiki durumun fonksiyonu olduğubir otomataya dönüştürülebilir. (x_v, s_v) sıralı çiftine eşit olan bir s_v' değişkeni tanımlanarak bu dönüşüm tamamlanabilir. Bu yüzden s' nin içinde bulunduğu bir S' alfabeti

$$S' = X \otimes S \quad (3.9)$$

ile verilir.

Tanım 3.1. deki karakteristik fonksiyonları kullanarak z_v ;

$$z_v = f'_z(s'_v) \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tezin 4. bölümünde giriş alfabeti , çıkış alfabeti ve durum kümesi ile verilen bir sonlu otomatalar sisteminin geçiş tablosu ve geçiş graf yardımıyla formülize edilebileceği gösterilmektedir. Bu bölümün 2. kısmında geçiş tablosunun nasıl kurulacağı belirtilmektedir. Geçiş tablosu tüm yazılması mümkün (x_v, s_v) sıralı çifti için f_z ve f_s fonksiyonlarının değerlerini gösterir. Giriş alfabeti $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p\}$, çıkış alfabeti $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q\}$ ve durum kümesi $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ olan bir otomatanın geçiş tablosu aşağıda verilmiştir. Bu tablo, sırasıyla f_z ve f_s fonksiyonları olmak üzere z_v, s_{v+1} fonksiyonlarını gösteren, birbirine bağlı iki alt tablodan oluşur. Tablonun solunda satırları tüm durumları, sütunları tüm giriş sembollerini gösterecek şekilde bir hücre vardır. σ_i ve ξ_i girişleriyle z_v alt tablosunda f_z fonksiyonu bulunur σ_i ve ξ_i girişleriyle s_{v+1} alt tablosunda f_s fonksiyonu bulunur. Bu koşullar altında f_z ve f_s fonksiyonları belirli, sınırlı olmayan otomatanın karakteristik fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar tanımlanan her (x_v, s_v) sıralı çifti için tek olmak zorundadır. Bu yüzden her satır ve sütunun kesişiminde z_v alt tablosu Z nin sadece bir elemanını, s_{v+1} alt tablosu da S nin sadece bir elemanını içermelidir.

3. alt kısımda geçiş tablolarının önemli bir uygulaması olan sonlu durum otomatalarının bazı önemli sınıf elemanlarının sayısı belirlenmektedir.

(n, p, q) Otomatalar Sınıfı

Özel olarak giriş alfabesi $X = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_p\}$, çıkış alfabesi

$Z = \{\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_q\}$ ve durum kümesi $S = \{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n\}$ olan bir otomatanın (n, p, q) otomata sayısı:

$$N_{n,p,q} = (qn)^{pn} \quad (4.1)$$

dir.

Basit Minimal (n, p, q) Otomatalar Sınıfı

$\forall i, j$ için $i \neq j$ ve $f_z(\xi_k, \sigma_i) \neq f_z(\xi_k, \sigma_j)$ olacak şekilde en az bir k varsa (n, p, q) otomatasına basit minimal otomata denir. z_v alt tablosunda tüm satırları farklı olan bir geçiş tablosu basit minimal otomatayı karakterize eder. Böyle otomataların sayısı ;

$$N'_{n,p,q} = n^{pn} \prod_{r=0}^{n-1} (q^p - r) \quad (4.2)$$

dır

$N'_{n,p,q}$ nin negatif değerleri sıfır olarak yorumlanır..

Basit Sadeleştirilebilir (n, p, q) Otomatalar Sınıfı

Aşağıdaki şartlar (n, p, q) otomatasının geçiş tablosunda varsa (n, p, q) otomatasına basit sadeleştirilebilirdir denir.

z_v ve s_{v+1} alt tabloları boyunca özdeş olan ya da her σ_i, σ_j ile yer değiştirildiğinde en az bir σ_i, σ_j satır çifti vardır. Eğer bir otomata basit sadeleştirilemez ise tüm satırları (hem z_v yi hem de s_{v+1} yi üreten satırlar) farklı olan bir geçiş tablosuna sahip olmalıdır.

Basit sadeleştirilemeyen $N''_{n,p,q}$ otomatalarının sayısı ;

$$N''_{n,p,q} \leq \prod_{r=0}^{n-1} [(qn)^p - r] \quad (4.3)$$

dir. Buna göre buradan basit sadeleştirilebilir (n, p, q) otomatalarının $N'''_{n,p,q}$ sayısının üst sınırı;

$$N'''_{n,p,q} \geq (qn)^{pn} - \prod_{r=0}^{n-1} [(qn)^p - r] \quad (4.4)$$

ile belirlenir.

Bölüm 4' ün son kısmında geçiş grafi adını verdiğimiz grafin sonlu dinamik sistemler için nasıl yorumlandığı üzerinde durulmaktadır.

Geçiş grafi, sonlu sistemin durumlarını belirleyen köşeler ile bu köşeleri belirli bir kuralla birleştiren yönü olan kenarlar topluluğu olarak düşüneceğiz.

Giriş alfabeti $X = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_p\}$, çıkış alfabeti $Z = \{\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_q\}$ ve durum kümesi $S = \{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n\}$ olan

$$s_{v+1} = f_s(x_v, s_v)$$

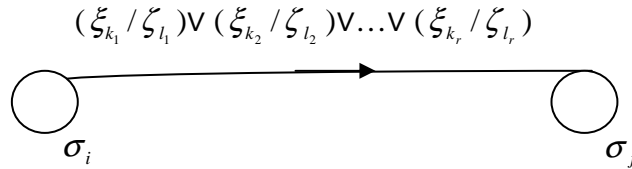
$$z_v = f_z(x_v, s_v)$$

karakteristik fonksiyonlu sonlu otomata sisteminin verildiğini farz edelim.

$f_s(x_v, \sigma_i) = \sigma_j$ özelliğine sahip x_v değerler kümesini x_{ij} ile gösterelim. Ayrıca ,

$f_z(\xi_{k_h}, \sigma_i) = \zeta_{l_h}$ olduğunu düşünelim.

$h = 0.1.2 \dots r$ olsun.



Şekil 4.1. Geçiş grafi

Bu gösterim şu şekilde yorumlanır.

Eğer sistem σ_i durumunda ise girişe ξ_{k_1} sembolü verildiğinde çıkışta ζ_{l_1} sembolü bulunur ve sistem σ_j durumuna geçiş yapar. ξ_{k_2} sembolü verildiğinde ζ_{l_2} çıkışı elde edilir ve sistem tekrar σ_j durumuna geçiş yapar. Bu şekilde devam edersek ξ_{k_r} sembolü verildiğinde ζ_{l_r} çıkışı elde edilir.

Tezin 5. bölümünde ilk kısımda bir sonlu dinamik sistem içerisindeki durumların nasıl sınıflandığı açıklanmaktadır.

1) Geçiş Durumu. Yakınsak kenarları olmayan fakat en az bir iraksak kenarı olan durumdur. Böyle bir durum en az bir diğer duruma neden olur. Fakat bir kez terk edildiğinde (vazgeçildiğinde) ulaşılamaz.

2) Kalıcı Durum. Iraksayan kenarları olmayan fakat en az bir yakınsayan kenarı olan durumdur. Böyle bir duruma en az bir diğer durumdan ulaşılır. Fakat bir kez ulaşıldığında terk edilemez (vazgeçilemez)

3) Ayrık (Ayrılmış) Durum. Yakınsak ve ıraksak kenarları olmayan bir durumdur. Böyle bir durum başka durumlara neden olmaz ve herhangi diğer durumlardan elde edilemez.

Ayrıca bir otomatanın durum kümesinin iki ya da daha fazla alt kümeye bölünmesiyle oluşan alt otomata kavramı üzerinde durulmaktadır.

Bölüm 5' in 2. kısmında $G_k(S_i)$ kümesi tanımlanıp, bu kümeyi bulmak için bir algoritma geliştirilmektedir:

$G_k(S_i)$; k ya da daha az uzunluklu giriş dizisi ile

$S_i = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \sigma_{i_3} \dots \sigma_{i_r}\}$ durumlarından ulaşılabilen M otomatasının tüm durumlar kümesini gösterebilir. Özellikle $G_0(S_i) = S_i$. $G_1(S_i)$, S_i ile M nin geçiş tablosunun $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \sigma_{i_3} \dots \sigma_{i_r}$ satırlarındaki tüm s_{v+1} girişlerinin birleşimidir. Bunun yanında $G_1(S_i)$ M geçiş grafının kontrol edilmesiyle düzenlenebilir. $k \geq 1$ için $G_{k-1}(S_i)$ verilsin. $G_k(S_i)$;

$$G_k(S_i) = G_1(G_{k-1}(S_i))$$

arasındaki ilişki ile belirlenebilir.

Algoritma 5.1. S_i verilsin. $G(S_i)$ i bulmak için

(1) $G_0(S_i) = S_i$ olsun. $k = 1$ olsun

(2) $G_k(S_i) = G_1(G_{k-1}(S_i))$ olarak belirle.

(3) a) Eğer $G_k(S_i) \neq G_{k-1}(S_i)$ ise k yı bir arttır ve (2) ye dön.

b) Eğer $G_k(S_i) = G_{k-1}(S_i)$ ise $G_k(S_i) = G(S_i)$

Bölüm 4' ün son kısmında ise $H_k(S_i)$ kümesi tanımlanmaktadır. Ayrıca $H_k(S_i)$ kümesinin bulunmasını sağlayan matematiksel model incelenmektedir:

$H_k(S_i)$; kenarların yönlerinin önemsiz olduğu k ya da daha az uzunluklu kenarlar yoluyla $S_i = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_r}\}$ deki durumlara bağlanan M otomatasının durumlar kümesi olsun. Özellikle $H_0(S_i) = S_i$. $H_1(S_i)$, S_i lerin birleşimidir; yani M geçiş tablosunun $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_r}$ satırlarındaki s_{v+1} durumları ile bu durumları içerisinde bulunduran alt satırların birleşimidir. Buna ek olarak , $H_1(S_i)$, M geçiş grafının kontrol edilmesiyle oluşturulabilir.

$H_{k-1}(S_i)$ verilsin , $k \geq 1$, $H_k(S_i)$ aşağıdaki ilişki ile belirlenebilir.

$$H_k(S_i) = H_1(H_{k-1}(S_i))$$

Algoritma 5.2. S_i kümesi verilsin. $H(S_i)$ yi bulmak için

(1) $H_0(S_i) = S_i$ ve $k = 1$ olsun.

- (2) $H_k(S_i) = H_1(H_{k-1}(S_i))$ belirle.
- (3) (a) Eğer $H_k(S_i) \neq H_{k-1}(S_i)$ ise $k = k + 1$ (k yı bir artır) ve (2) ye dön
 (b) $H_k(S_i) = H_{k-1}(S_i)$ ise $H_k(S_i) = H(S_i)$ dir.

Bölüm 6'nın 1.kısımında birinci mertebeden geçiş matrisi yapısının kurulmasından bahsedilmektedir:

Geçiş matrisi, geçiş grafında görsel olarak uygulanan işlemlerin matematiksel olarak yorumlanmasıdır. Bu yüzden işlemlerin bir gözlemci tarafından ve görsel olarak uygulanmadığı yerlerde ya da görsel yaklaşım gereksiz olduğunda geçiş matrisi daha elverişlidir.

Bir n-durum otomatası için n satır ve sütundan oluşan geçiş matrisi $[M]$ ile gösterilsin. Bu matris 1. mertebeden geçiş matrisidir. $\{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n\}$, M' nin durum kümesi ve b_{ij} , M nin geçiş grafında σ_i den σ_j durumuna giden giriş-çıkış sembolüne sahip kenar olsun. $[M]$ nin (i, j) . girişi e_{ij} ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$e_{ij} = \begin{cases} b_{ij} \text{ sayısı, } b_{ij} \text{ varsa} \\ 0, & b_{ij} \text{ yoksa} \end{cases} \quad (6.1)$$

Matristeki σ_k durumu sırasıyla σ_k satırına ve σ_k sütununa karşılık gelir.

Bu bölümün 2. kısmında, yüksek mertebeden geçiş matrislerinin nasıl oluşturulduğu açıklanmaktadır. Bunun için ilk olarak yol kavramı ve yolların meydana getirdiği küme üzerinde durulmaktadır. Daha sonra yüksek mertebeden geçiş matrislerini bulmamızda bize kolaylık sağlayacak lemma ve teorem verilmektedir:

Geçiş grafında bir durumdan bir diğer duruma geçen k kenardan oluşan bir diziye yol denir. Burada k yolun uzunluğu olarak alınır. $P_{ij}^{(k)}$, σ_i durumundan σ_j durumuna geçen k uzunluklu tüm yolların kümesi olsun. $P_{ij}^{(1)}$; σ_i yi σ_j ye bağlayan 1 uzunluklu kenar olup π_{ij} olarak yazılır. Eğer π_{ij} boş ise yani σ_i yi σ_j ye bağlayan bir tek kenar yoksa π_{ij} nin sayısal değeri sıfırdır. σ_i durumundan σ_j durumuna geçen k uzunluklu bir yol π_{i_1} kenarından başlayarak $\pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{k-1} j}$ kenarlarının eklenmesiyle devam ederek $\pi_{i_1} \pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{k-1} j}$ sıralı çarpımıyla gösterilir.

$$P_{ij}^{(k)} = \sum_{l_1=1}^n \sum_{l_2=1}^n \dots \sum_{l_{k-1}=1}^n \pi_{i l_1} \pi_{l_1 l_2} \dots \pi_{l_{k-1} j} \quad (6.5)$$

Lemma 6.1.

$$P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{u=1}^n \pi_{iu} P_{uj}^{(k)} \quad (6.6)$$

Teorem 6.1 $[\bar{M}]^{(k)}$ nin (i,j). girdisi; M otomasında σ_i durumundan σ_j durumuna geçen k uzunluklu tüm yolların kümesidir

Yüksek mertebeden geçiş matrislerinin çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

Eğer $[\bar{A}]$ matrisinin (i ,j). girdisi a_{ij} , $[\bar{B}]$ matrisinin (i ,j). girdisi b_{ij} ve $[\bar{C}] = [\bar{A}] .[\bar{B}]$ nin (i ,j). girdisi c_{ij} ve bu matrislerin her biri $n \times n$ lik yüksek mertebeden geçiş matrisleri ise

$$c_{ij} = \sum_{u=1}^n a_{iu} b_{uj} \quad (6.11)$$

Bölüm 6' nın 3. kısmında geçiş iskelet matrisi tanımlanarak geçiş matrisi arasındaki farklar belirtilmektedir:

Yüksek mertebeden geçiş matrislerinin detaylı girişleri gerekli değildir ve çözümler daha basit giriş özellikleri olan skeleton (iskelet) matris olarak adlandırılan matrisin kuvvetleri düşünülerek elde edilir.n durumlu M otoması için skeleton matris n satır ve sütundan oluşur ve [M] matrisi gibi oluşturulup $[\tilde{M}]$ ile gösterilir. Bir $[\tilde{M}]$ matrisinde (i ,j). elemanı \tilde{e}_{ij} ile gösterilir. Eğer b_{ij} ; M otomasında σ_i durumundan σ_j durumuna giden kenarı gösteriyorsa ,

$$\tilde{e}_{ij} = \begin{cases} 1, & b_{ij} \text{ varsa} \\ 0, & b_{ij} \text{ yoksa} \end{cases} \quad (6.20)$$

dir.

Daha sonra 4. kısımda sade yollar tanımlanmakta ve bir durumdan başka bir duruma geçen herhangi uzunluklu sade yolları içeren geçiş matrisi oluşturulmaktadır. Aynı zamanda sade yolları belirlememizi sağlayacak algoritma şu şekilde verilmektedir:

Algoritma 6.1 $[\bar{M}]$ verilsin. $l > 1$ iken $[\bar{M}']^{(1)}$, yi oluşturmak için ,

(1) $[\bar{M}']$ deki tüm köşegen terimleri 0 ile yer değiştirerek $[\bar{M}']^{(1)}$, yi oluştur. $k = 1$ olsun.

(2) $[\bar{M}'][\bar{M}']^{(k)}$ 'yi oluştur. Çarpım matrisinde tüm fazla yolları 0 ile yer değiştir.

Sonuçta matris $[\bar{M}']^{(k+1)}$ olsun.

- (3) (a) $k + 1 < l$ ise k 'yı 1 arttır ve (2)' ye dön
 (b) $k + 1 = l$ ise , $[\bar{M}']^{(k+1)} = [\bar{M}']^{(l)}$ dir.

Bölüm 6' nın 5. alt kısmında minimal yolların belirlenmesi problemi üzerinde durulmuştur. İki durum arasındaki en kısa yolu ya da minimal yolu belirlemek önem arz etmektedir. Minimal yol ile sade yol arasında nasıl bir ilişki olduğunu gösteren bir lemma verilmektedir:

Lemma 6.5. σ_i durumundan σ_j durumuna minimal yol varsa basit yol olmalıdır.

Ayrıca bir sonlu otomatanın herhangi iki durumu arasındaki minimal yolların belirlenmesini sağlayan model incelenmektedir.

Algoritma 6.2. Bir M otomatasının σ_i durumundan σ_j durumuna minimal yollarını belirlemek için

- (1) $k = 1$ olsun .
 (2) $[\bar{M}']^{(k)}$ yı oluştur.
 (3) (a) Eğer (i, j) . girdi sıfır ve $k < n - 1$ ise k yı 1 arttır ve (2) ye dön.
 (b) Eğer (i, j) . girdi sıfır ve $k = n - 1$ ise yol yoktur.
 (c) Eğer (i, j) . girdi sıfırdan farklı ise istenen yolları gösterir.

Daha sonra bir n durum otomatasında tam döngünün nasıl oluştuğu verilen örenkle açıklanmıştır.

Bu bölümün 6. kısmında matrislerin kısmi yapısı ile belirlenen yollar üzerinde durulmaktadır.

Bir sonlu n durum otomatasında herhangi iki durum arasındaki yolları belirlemek amacıyla

$n \times n$ 'lik geçiş matrisi oluşturmak yerine ve uzun matrisleriyle işlem yapmamak için matrislerin kısmi yapısı olarak adlandırılan bir metot geliştirilmiştir:

Lemma 6.7. $[\bar{M}]_i^k$; $[\bar{M}]^k$ nın i . satırından oluşturulan satır matrisini gösterebilir. O halde

$$[\bar{M}]_i^{k+1} = [\bar{M}]_i^k [\bar{M}] \quad (6.37)$$

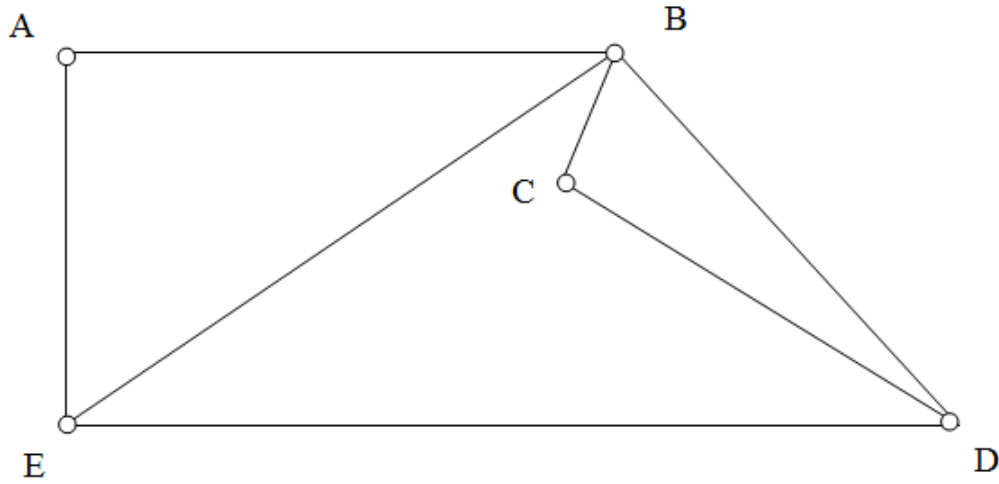
BÖLÜM 2

GRAF TEORİSİNİN TEMEL TERİMLERİ

2.1. Giriş

Noktalar ve bunları birbirine bağlayan kenar adı verdiğimiz eğri parçalarından oluşan kümeye **graf (çizge)** denir.

Daha geniş olarak matematiksel tanımını şu şekilde yapabiliriz. Öncelikle G adını verdiğimiz grafımız şu şekilde olsun:



Şekil 2.1. Graf

Bu şekildeki grafa A, B, C, D, E noktalarına **grafın noktaları ve ya düğümleri** denir. G grafının noktalar kümesi $V(G)$ olarak gösterilir. Yani:

$$V(G) = \{A, B, C, D, E\} \text{ olarak gösterilir.}$$

İki nokta arasındaki çizgilere **kenar** denir. Her kenarı bu çizgeye göre iki noktalı bir küme olarak gösterebiliriz. Örneğimiz olan G grafının kenarları şunlardır:

$$E(G) = \{ \{A, B\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{D, E\} \}$$

G' nin kenarlar kümesi $E(G)$ şeklinde gösterilir.

NOT Bir graf bir diyagram aracılığıyla temsil edilebilir. Fakat graf ile onu temsil eden diyagram aynı değildir. Şekil 2.1. kendi başına bir graf değildir, sadece bir grafın gösterimidir. Çünkü graf bir fonksiyon ile birlikte iki kümeden oluşur.

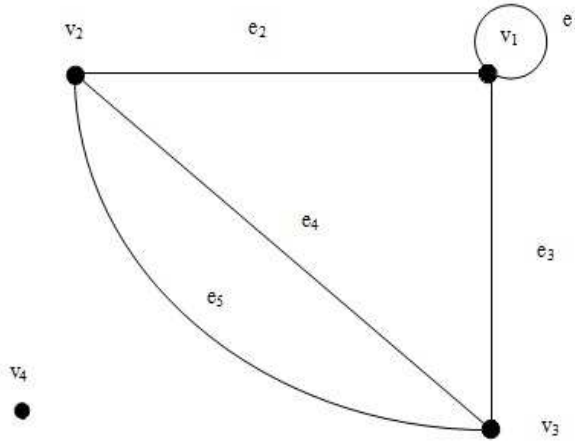
Tanım 2.1. Eğer grafın bütün kenarları yöne sahipse grafa **yönlü graf**, aksi halde **yönü olmayan graf** denir. Eğer bir grafta hem yönlü hem de yönü olmayan kenarlar varsa grafa **karışık graf** denir.

Bir kenar her iki ucunda da bir düğüm olacak şekilde tanımlandığından graftaki tüm kenarların uç noktalarını bir düğüm ile ilişkilendirmek gerekir. Bu nedenle her bir e kenarı için $\{V_1, V_2\}$ kümesi tanımlarız. Bunun anlamı e kenarının V_1 ve V_2 düğümlerini bağlandığıdır. $V_1=V_2$ olabilir.

$\{V_1, V_2\}$ kümesi $\delta(e)$ ile gösterir ve düğümler kümesinin bir alt kümesidir.

Bir yönü olmayan G grafı:

- (i) Boş olmayan sonlu V düğümler kümesi,
- (ii) Sonlu E kenarlar kümesi,
- (iii) Her bir e kenarı için $\delta(e)$, V nin bir veya iki elemanlı alt kümesi olan $\delta : E \rightarrow P(V)$ fonksiyonundan oluşur.



Şekil 2.2. Graf

G grafının düğüm kümesi $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$

G grafının kenar kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$\delta : E \rightarrow P(V)$

$e_1 \rightarrow \{V_1\}$

$e_2 \rightarrow \{V_1, V_2\}$

$e_3 \rightarrow \{V_1, V_3\}$

$e_4 \rightarrow \{V_2, V_3\}$

$$e_5 \rightarrow \{V_2, V_3\}$$

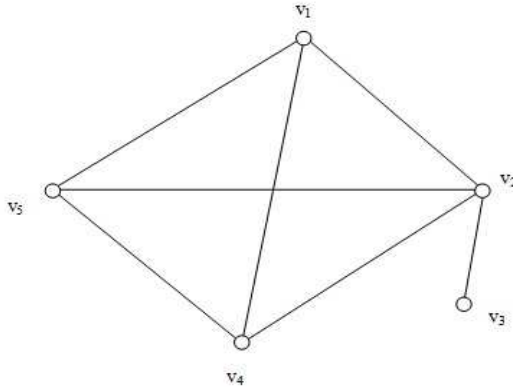
Tanım 2.2. Matematiksel anlamda bir graf V kümesiyle V 'nin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesinden meydana gelir.

V ile bütün kenarlardan oluşan E kümesinin ayrı ayrı sonlu veya sonsuz olmasına izin verilebilir. Buradaki çalışmada her iki kümenin sonlu olduğunu kabul edip bunun üzerinde işlem yapacağız.

Bir grafa V kümesinin boş olması çok anlamsızdır (Çünkü Tanım 2.1'den V nin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesi vardır). Buna karşılık E kümesi boş olabilir. İki nokta arasında en az bir kenar varsa bunlara **komşu noktalar** denir.

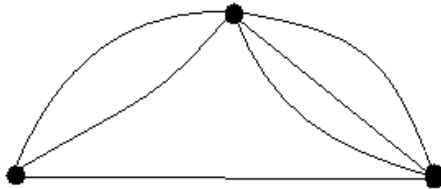
Eğer bir noktayı kendisine bağlayan kenar varsa bu nokta kendisiyle komşu olur. Ama genel olarak her nokta kendisine komşudur diyemeyiz. Bir noktayı kendisine bağlayan kenara şekilden dolayı **ilmek** (döngü) adını alır.

İlmeği (döngüsü) olmayan ve iki noktası arasında en çok bir kenarı bulunan grafa **basit graf** denir.



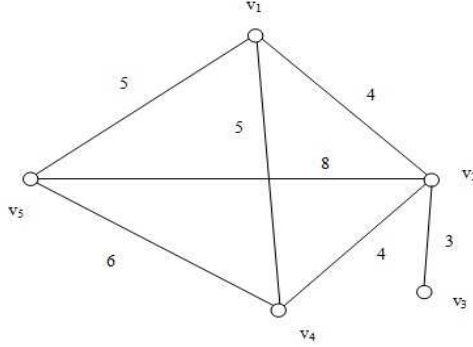
Şekil 2.3. Basit graf

İki noktası arasında birden çok kenar bulunan graflara, **multigraf (çoklu çizge)** denir.



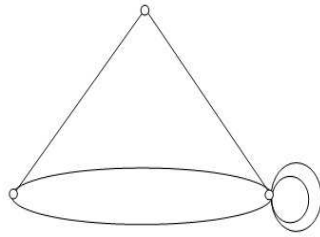
Şekil 2.4 Multigraf

Bir grafta her bir kenara bir reel sayı atanmışsa bu grafa **ağırlıklı graf veya ağ** denir.



Şekil 2.5. Ağırlıklı graf

Hem ilmek (döngü), hem de çoklu kenarlara sahip yönlü olmayan grafa **pseudo graf** denir.



Şekil 2.6. Pseudo graf

Bir noktaya bağlanan kenarların sayısına o noktanın (yerel-lokal) **derecesi** denir. Eğer V , bir G grafın bir noktası ise V deki derece $L(v)$ ile gösterilir. L_{\max} ve L_{\min} ile bir G grafın derecelerinin içinde en büyüğü ve en küçüğü gösterilir.

İki noktası arasında birden çok kenarı bulunan graflarda noktaları saymak kolaydır. Ancak kenarları tek tek saymak zor olabilir. Bu durumda şu uygulamayı yapabiliriz. Her kenarın iki ucu vardır ve bu uçların her biri bir noktaya bağlanmıştır. Buna göre her noktadaki kenar sayısını toplarsak bütün kenarları ikişer kez saymış oluruz. Yani bütün noktalardaki derecelerin toplamı, kenar sayısının iki katına eşittir. Bunu şöyle ifade edebiliriz. Bir G çizgesinde n nokta ve e kenar bulunsun.

n noktalar kümesi,

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ise

$$2e = \sum_{i=1}^n L(v_i)$$

olur.

(2.1)

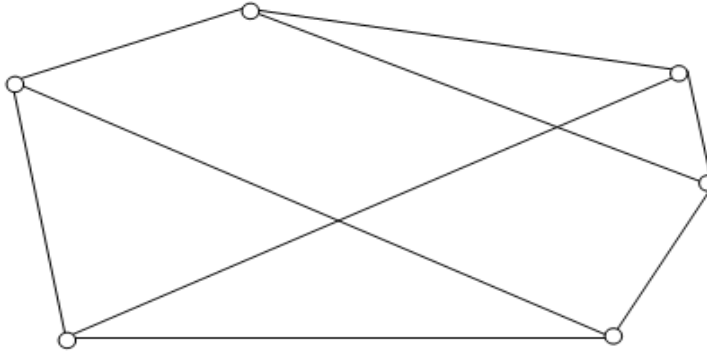
Bütün noktaların dereceleri aynı olan graflara **düzgün (regüler) graflar** denir. Lokal dereceleri hep r ise r -li düzgün graf denir. $|V| = n$ olan bir r -li düzgün grafta;

$$|E| = e = \frac{1}{2}nr$$

(2.2)

olacağı açıktır.

Bir örnek vermemiz gerekirse:



Şekil 2.7. 3-lü düzgün graf.

Bu grafta:

$$V = 6, r = 3 \quad e = \frac{1}{2}nr \Rightarrow e = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \Rightarrow e = 9$$

(1.3)

olur.

Bir grafta derecelerin toplamının kenarların sayısının iki katı olduğunu söylemiştik. O halde $L(v_1) + L(v_2) + \dots + L(v_n)$ toplamı her zaman çift bir sayıdır. Tek sayıda tek sayının toplamı yine tek sayı olduğundan yukarıdaki toplamda yer alan tek sayıların çift sayıda olması gerektiği anlaşılır. Yani bir çizgede derecesi tek olan noktaların sayısı çift olmak zorundadır. Bunu teorem olarak da yazabiliriz.

Teorem 2.1. Her grafta derecesi tek olan noktaların sayısı çifttir.

İspat: Sonlu bir $G = (V, E)$ grafında A grafın noktasını, $L(A)$ o noktanın derecesini gösterebiliriz. Bu durumda:

$$\sum_{A \in V} L(A) = 2|E|$$

(2.4)

eşitliği geçerlidir.

V_0 , derecesi çift olan V_1 , derecesi tek olan noktalar kümesi olsun. Biraz önce bahsettiğimiz eşitlikten;

$$\sum_{A \in V_0} L(A) + \sum_{A \in V_1} L(A) = 2|E|$$

dir. O halde:

(2.4a)

$$\sum_{A \in V_0} L(A) + \sum_{A \in V_1} L(A)$$

çift bir sayıdır.

(2.4b)

Sol taraftaki toplamda $L(A)$ sayılarının her biri çift ve toplamın sonucu da çift olduğundan,

$\sum_{A \in V_1} L(A)$ sayısı da çift olmalıdır. Ama buradaki $L(A)$ ların her biri tek sayıdadır .

Dolayısıyla $L(A)$ ların toplamının çift olması için çift sayıda $L(A)$ toplamalıyız. O halde V_1 çift sayı olmalıdır. Yani derecesi tek olan noktaların sayısı çifttir.

Bir grafa tek başına kalmış noktalar bulunabilir. Böyle noktalara **izole noktalar (ayrık noktalar)** denir.

Bütün noktaları izole olan bir grafa **boş graf veya sıfır grafı** denir. Yani bir grafın boş olması kenarlar kümesi E ' nin boş olması anlamına gelir.

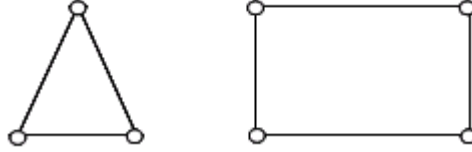
Herhangi iki noktası arasında en fazla bir kenar bulunan ve hiç ilmeği olmayan graflara tam graf denilmektedir. Nokta sayısı n olan bir tam graf K_n ile gösterilir.



Şekil 2.8. K_n tam grafi.

K_n grafi doğal olarak $(n-1)$ -li düzgün graftır. $\frac{1}{2} n(n-1)$ kenara sahiptir.

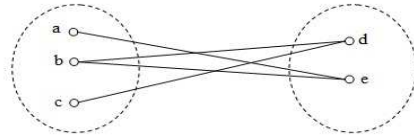
C_n grafi, her noktaya tam iki kenar değen tek parça n noktalı graflardır. Bunlara **döngü** denir. (Tüm noktaların derecesi iki olan bağlı grafa cycle graf denir.)



Şekil 2.9. C_n grafi.

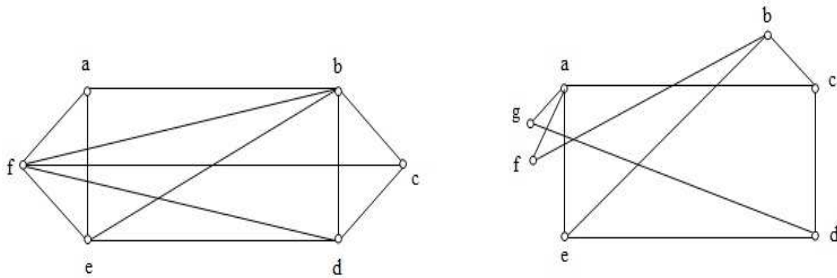
Düğüm kümesi, tüm kenarların V_1 'in bir düğümünü V_2 'nin bir düğümüne bağlandığı $\{V_1, V_2\}$ şeklinde bir bölmelemeye sahip olan grafa **iki parçalı(bipartite) graf** denir.

G İki parçalı graf ise,



Şekil 2.10. İki parçalı graf

Mevcut küme içerisindeki düğümler birbirlerine herhangi bir kenar ile bağlanmamalıdır.

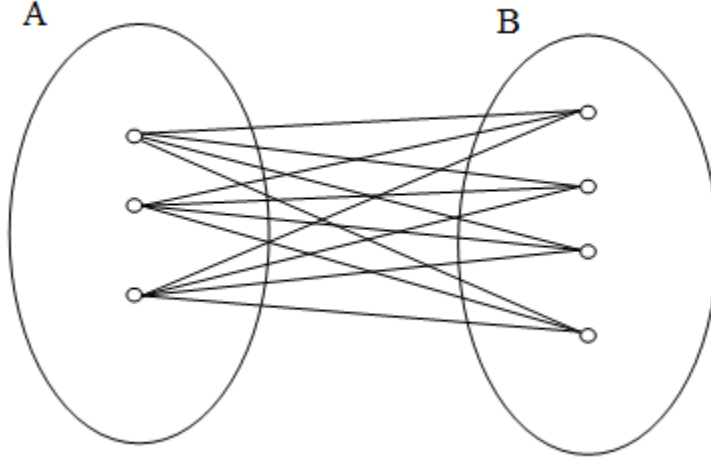


İki parçalı graf değil

İki parçalı graf

Şekil 2.11. Graflar

$K_{n,m}$ grafi, noktaların n ve m elemanlı olmak üzere iki A ve B kümesine ayrılmış, A 'daki her noktanın B 'deki her noktaya bağlandığı başka da kenarı olmayan graflardır. $K_{n,m}$ 'ye **iki parça ya da iki kümeli tam graf** denir. Bu graflarda nokta sayısı $n+m$. Kenar sayısı nm 'dir.



Şekil 2.12. İki parçalı tam graf

Tanım 2.3. $V' \subseteq V$ (düğümler kümesi), $E' \subseteq E$ (kenarlar kümesi) ve $\delta_{G'}(e) = \delta_G(e)$ ise $G' = (V', E')$ grafına $G = (V, E)$ grafının **alt grafi** denir ve $G' \leq G$ şeklinde gösterilir.

G' grafının tüm e kenarları için $\delta_{G'}(e) = \delta_G(e)$ durumu G' alt grafının kenarlarının G de olduğu gibi aynı düğümleri bağlaması gerektiği anlamına gelir.

Bir G grafından bir V_i düğümü çıkartıldığında V_i hariç G 'nin tüm düğümleri ve V_i ile bağlı olmayan tüm kenarlarından oluşan $G - V_i$ alt grafi elde edilir.

$G - V_i$, G 'nin V_i düğümünü içermeyen maksimal alt grafidir. Öte yandan G den bir x_j kenarı çıkartıldığında G 'nin x_j haricindeki tüm kenarını içeren bir $G - x_j$ alt grafi elde edilir.

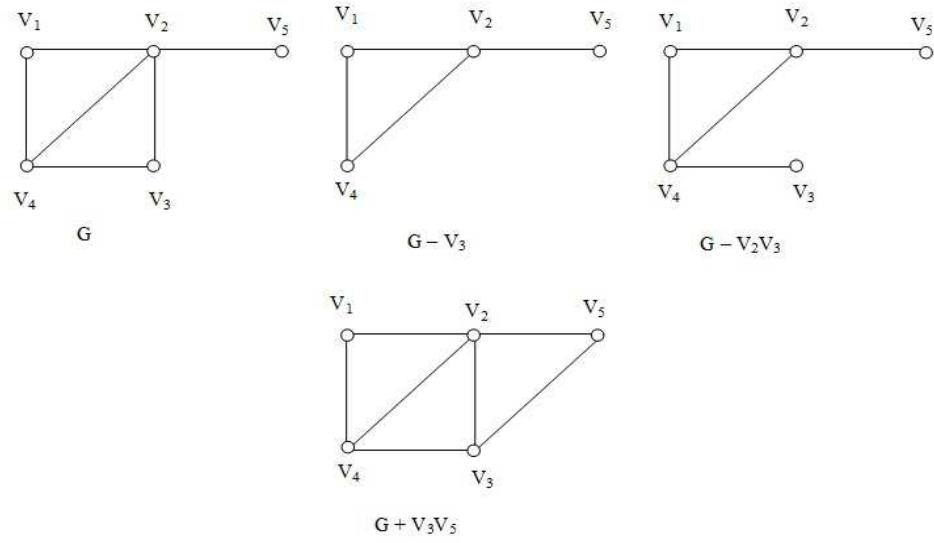
$G - x_j$, G nin x_j kenarını içermeyen maksimal alt grafidir.

G_1 , G grafının bir alt grafi ise G ye G_1 grafının süper grafi denir.

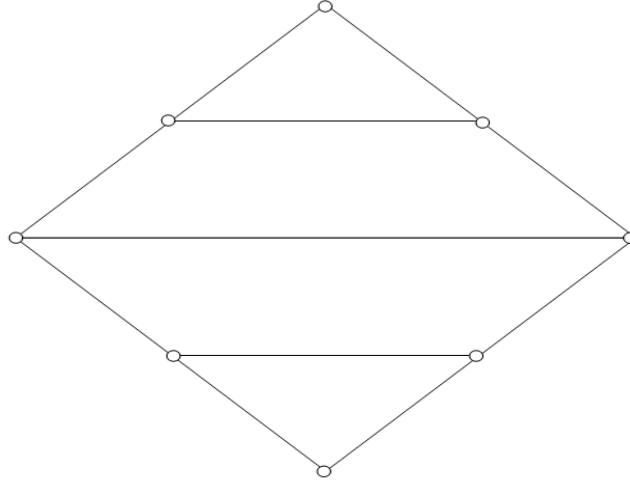
Eğer V_i ve V_j G de komşu değilse $V_i V_j$ kenarının eklenmesi $V_i V_j$ kenarını içeren G 'nin en küçük süper grafi olması ile sonuçlanır.

Yani, bu durumda G grafi, $G + V_i V_j$ grafının alt grafi olacaktır.

Bu durumlar aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 2.13.

1.2. Tek Hamlede Çizilebilen Graflar

Şekil 2.14. Tek dereceli graf.

Bu şekildeki bir grafı elimizi en fazla iki kez kaldırarak yani en fazla üç çizimde çizebilir miyiz?

Öncelikle çizimde her noktaya 3 kenar geliyor. Yani her noktanın derecesi 3 tür. Şimdi çizimin ortasında olduğumuzu düşünelim. Bir noktaya doğru ilerliyoruz. O noktaya ulaştık. Ve o noktadan çıkıyoruz; demek ki çizimin ortasından geçtiğimiz her noktaya 2 derece kazandırırız: o noktaya ulaştığımızda ve o noktadan uzaklaştığımızda. Öte yandan çizime başladığımız ve çizimi bitirdiğimiz noktalara yalnızca 1 derece kazandırırız.

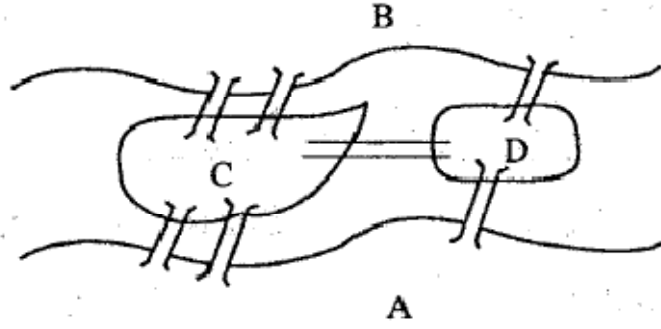
O halde hiç elimizi kaldırmazsak, elde ettiğimiz çizimin noktalarının en fazla ikisi dışında hepsinin derecesi çift olmak zorundadır.

Örneğimize dönersek en fazla 3 çizim olduğundan en fazla 6 noktasının derecesi tek olabilir. Oysa çizimimizde 8 tane noktanın derecesi tek olduğundan bu imkansızdır. Yani bu graf en fazla 3 hamlede çizilemez.

Aslında tek çizimde, elimizi kaldırmadan çizebileceğimiz grafların tek dereceli noktası ya hiç olmaz ya da sadece iki tane olabilir; eğer çizimi başladığımız yerde bitiriyorsak her nokta çift dereceli olmalı, eğer çizimi başladığımız yerde bitirmiyorsak sadece iki noktanın derecesi tek olabilir; çizime başladığımız ve çizimi bitirdiğimiz nokta.

2.3. Euler Döngüsü

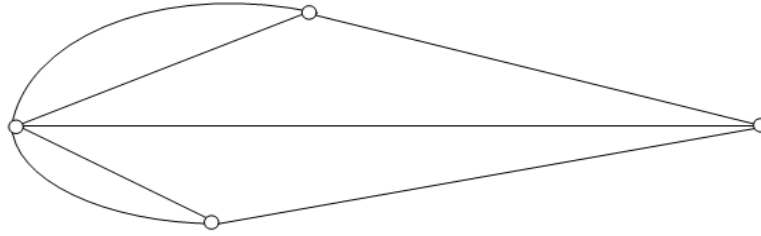
Graf kuramının bilinen en eski sorusu "Königsberg köprü problemidir. Burada Königsberg'deki Pregel nehrinin ve karalar arasında geçişi sağlayan 7 köprünün planını görüyorsunuz. Bu 7 köprünün her birinden sadece bir kez geçecek yolculuk mümkün müdür?



Pregel Nehri

Şekil 2.15. Königsberg Köprüsü

Euler 1736’ da bunun mümkün olmadığını göstermiştir. Bunu şu şekilde açıklayabiliriz. Nehrin iki yakasını ve adacıkları dört noktayla, 7 köprüyü de bu noktalar arasına koyacağımız kenarlarla gösterelim:

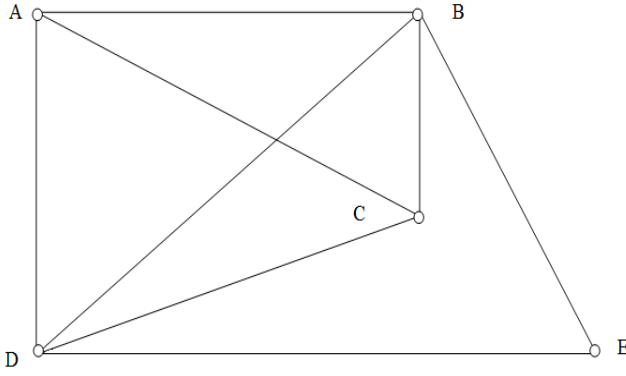


Şekil 2.16 . Köprünün grafla gösterimi.

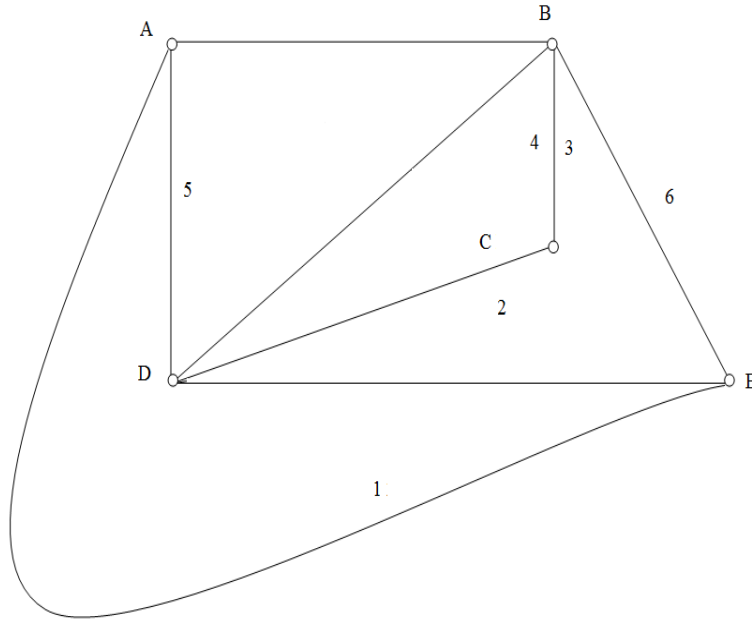
Tanım 2.4. Her kenardan tam bir kez geçen başladığı noktaya geri dönen yolculuklara Euler döngüsü denir. Euler döngüsü olan grafların tek parça ve her noktasının çift dereceli olması gerekir.

Teorem 2.2. Bir G grafının Euler grafi olması için gerek ve yeter koşul G grafındaki tüm noktaların derecesinin çift olmasıdır.

Bu teoremden yararlanılarak Şekil 2.16.’ ya baktığımızda bu grafın Euler grafi olmadığı açıktır.



1. Graf



2. Graf

Şekil 2.17. Düzlemsel graf.

Kenarların sadece grafın noktalarında kesişecek biçimde düzleme çizilebilen graflara düzlemsel graf denir. Örneğin 1. graf düzlemsel değildir. Çünkü AC ve BE kenar çizgileri kesişmiştir. 2. graf düzlemseldir. Yani bir düzleme kenarları kesişmeyecek şekilde çizilmiştir. 2. grafta görüldüğü şekilde düzlemsel graf düzlemi bölgelere ayırır. Bu grafta düzlemi 6 parçaya ayırmıştır(grafın dışında kalan parçayı da sayıyoruz).

Teorem 2.3. (Euler Formülü) Tek parça düzlemsel bir grafın bölge sayısı b , kenar sayısı k , nokta sayısı n ise $b-k+n=2$ eşitliği geçerlidir.

İspat: İspatı b üzerine tümevarımla yapacağız.

Eğer $b=1$ ise, o zaman grafta hiçbir döngü yok demektir, yani graf bir ağaçtır. Buradan $k=n-1$ dir. Bunu yerine koyarsak:

$$b-k+n = 1-(n-1) + n = 2 \quad (2.5)$$

olur ve eşitlik doğrudur.

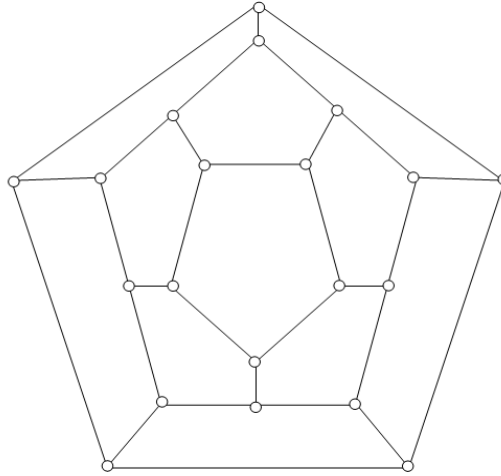
Şimdi $b>1$ olsun. Grafa G adım verelim. AB de grafın bir döngüsünün bir kenarı olsun. AB kenarını kaldıralım. Geriye kalan grafa G_1 adını verelim. G_1 grafının bölge, kenar ve nokta sayılan sırasıyla b_1, k_1, n_1 olsun. AB kenarı G nin iki bölgesine de ortaktır. Dolayısıyla AB kenarını kaldırdığımızda $b_1=b-1, k_1=k-1$ ve $n_1 = n$ eşitlikleri geçerlidir. M dolayısıyla tümevarım varsayımına göre Euler formülü G_1 grafi için doğrudur. Yani;

$$b_1-k_1 + n_1=2 \text{ dir.}$$

$$b-k + n = (b_1+1) - (k_1+1) + n_1 = b_1-k_1 + n_1 = 2 \text{ bulunur. O halde } b-k+n =2 \text{ doğrudur.}$$

2.4. Hamilton Döngüsü

Bir G grafi verildiğinde her noktadan yalnız bir kez geçmek şartı ile kapalı bir yol oluşturabilen graflara Hamilton grafi denir. Aşağıdaki graf Hamilton grafidir.



Şekil 2.18. Hamilton grafi

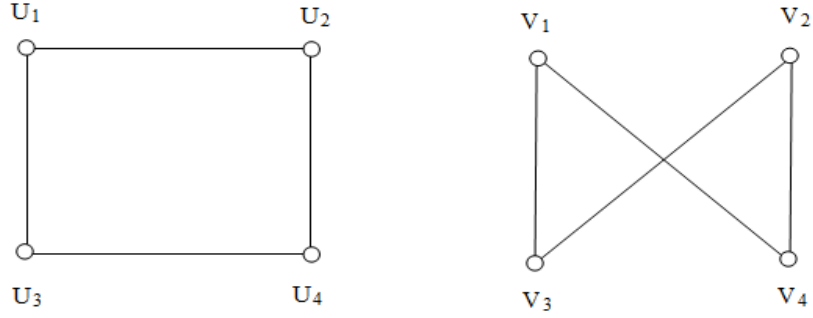
2.5. Eş Yapılı (İzomorfik) Graflar

İki Graf verildiğinde bu iki graf ta kenarlar ve konumlar arasındaki ilişki aynı olabilir. Bu durumda benzer özellikte iki farklı geometrik şekiller ortaya çıkabilir. Aynı durumu yansıtan, başka bir deyişle aynı yapıya sahip graflara eş yapılı graflar denir. Başka bir deyişle bunlara izomorfik graflar denir.

İki grafın eş yapılı olabilmesi için;

- Kenar sayıları aynı olmalıdır.

- Nokta sayıları aynı olmalıdır.
- Nokta dereceleri aynı olmalıdır
- Noktalar arasındaki ilişkiyi gösteren matrisler aynı olmalıdır. Bu matrislerdeki benzerlik satır ve sütunlardaki yer değişikliği ile de sağlanabilir.



Şekil 2.19. İzomorfik graflar.

Yukarıda görülen bu iki graf izomorfiktir. Kenar sayıları, nokta sayıları, nokta dereceleri aynıdır. Noktalar arasındaki ilişkiyi gösteren matrislerde aynıdır. Şöyle ki Çizelge 2.1 Şekil 2.19'daki grafların matrisi

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	0	1	1	0
u_2	1	0	0	1
u_3	1	0	0	1
u_4	0	1	1	0

	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	0	1	1
V_2	0	0	1	1
V_3	1	1	0	0
V_4	1	1	0	0

Matrislerinde u_2 ve u_4 satır ve sütunları yer değiştirdiğinde elde edilen matrisle ikinci matrisle eşit olur. Böylece iki grafın izomorfik olduğu kolayca görülür.

2.6. Komşuluk ve Incidence Matrisleri

Tanım 1.5. G , düğüm kümesi $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ olan bir graf olsun. G nin komşuluk matrisi; a_{ij} , V_i ve V_j yi bağlayan ayrı kenarların sayısı olmak üzere $n \times n$ lik $A=(a_{ij})$ matrisidir.

Komşu matrisi, V_i ve V_j yi bağlayan kenarların sayısı V_j ve V_i yi bağlayan kenarın sayısı ile aynı olduğundan simetrik olmalıdır.

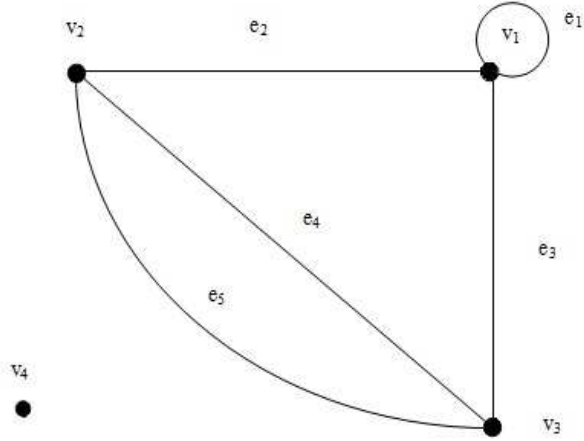
V_i düğümünün derecesi komşuluk matrisinden belirlenebilir.

V_i de bir döngü yoksa bu düğümün derecesi matrisin j . sütunundaki (ya da i . satırdaki)

değerlerin toplamıdır.

Her bir döngü dereceyi iki kez etkilediğinden i. sütunundaki değerleri toplarken a_{ii} diyagonal elemanının iki katı alınır.

Örnek:



Şekil 2.20. G Grafi

G grafının komşuluk matrisi:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Grafın iki özelliği matrise bakılarak hemen görülebilir. Köşegene bakıldığında bir tek döngünün var olduğu görülür. (v_1 den v_1 e)

İkincisi ise son satır veya sütundaki 0'lar v_4 'un izole edilmişliğini gösterir.

Düğümün dereceleri matristen hesaplanabilir.

$$p(v_1) = 2 \cdot 1 + 1 + 1 = 4$$

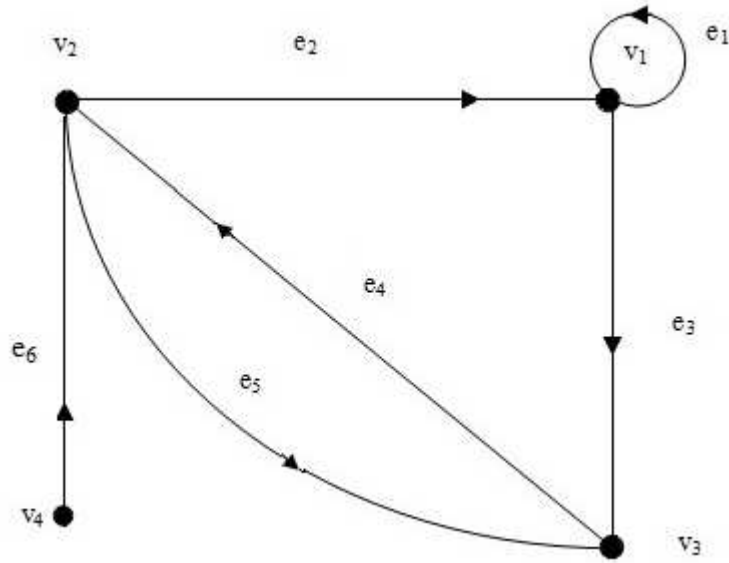
$$p(v_2) = 1 + 2 = 3$$

$$p(v_3) = 1 + 2 = 3$$

$$p(v_4) = 0$$

n kenar bir yönlü grafın komşuluk matrisi de $n \times n$ lik bir matristir.

Eğer i . düğümden j . düğüme bir kenar varsa $a_{ij} = 1$ aksi halde $a_{ij} = 0$ dir.



Şekil 2. 21. Graf

$$A = \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Hem yönlü hem de yönü olmayan graflar için diğer önemli matris incidence matrisidir.

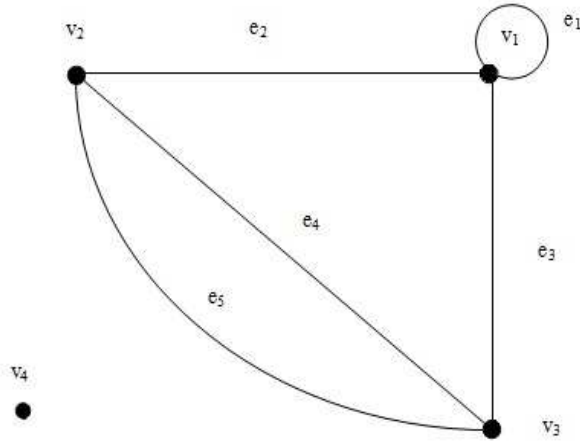
Komşuluk matrisinin tersine incidence matrisinde çoklu kenarlar gösterilebilir.

$V = \{ 1, 2, \dots, n \}$ ve $E = \{ e_1, e_2, \dots, e_m \}$ olmak üzere $G = (V, E)$ grafi verilsin.

G grafının incidence matrisi, $n \times m$ boyutlu olan ve her bir satırın bir düğüme ve her bir sütunun bir kenara karşılık geldiği bir $B = (b_{ik})$ matrisidir öyle ki eğer e_k , i ve j . düğümler arasındaki bir kenar ise k . sütunun elemanlarından $b_{ik} = b_{jk} = 1$, diğeri 0 dır.

Döngü olan kenarın sütununda sadece bir tek 1 vardır.

Örnek:



Şekil 2.22. Graf

Yukarıda verilen grafın incidence matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{c}
 e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

e_1 , 1.düğüm kendisine bağlamıştır. Dolayısıyla 1.sütunun elemanlarından $b_{11} = 1$ diğerleri 0'dır.

e_2 , 1. düğüm ile 2. düğüm arasındaki kenardır. Dolayısıyla 2. sütunun elemanlarından $b_{12} = b_{22} = 1$, diğeri 0'dır.

e_3 , 1. düğüm ile 3. düğüm arasındaki kenardır. 0'dır. Dolayısıyla 3. sütunun elemanlarından $b_{13} = b_{33} = 1$, diğeri 0'dır.

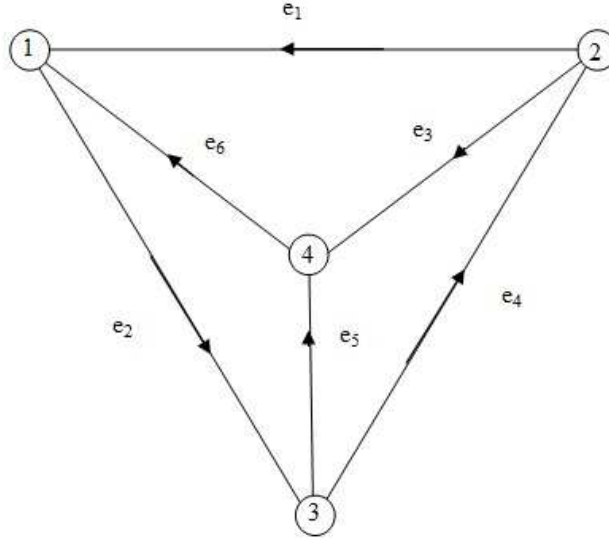
e_4 , 2. düğüm ile 3. düğüm arasındaki kenardır. Dolayısıyla 4. sütunun elemanlarından $b_{24} = b_{34} = 1$, diğeri 0'dır.

e_5 , 2. ile 3. düğüm arasındaki kenardır. Dolayısıyla 5. sütunun elemanlarından $b_{25} = b_{35} = 1$, diğerleri 0'dır.

Son olarak e_6 , 2. ile 4. düğüm arasındaki kenardır. Dolayısıyla 6. sütunun elemanlarından $b_{26} = b_{46} = 1$, diğerleri 0'dır.

Eğer G yönlü bir graf ve e_k , i . düğümünden J . düğüme bir kenar ise, k . sütununda $b_{ik} = -1$ ve $b_{jk} = 1$ diğer birleşenler 0'dır

Örnek:



Şekil 2.23. Yönlü graf

Yönlü grafının incidence matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

e_1 , 2'den 1'e bir kenardır. 1. sütundan $b_{11} = -1$, $b_{21} = 1$ diğerleri 0.

e_2 , 1'den 3'e bir kenardır. 2. sütundan $b_{12} = -1$, $b_{32} = 1$ diğerleri 0.

e_3 , 2'den 4'e bir kenardır. 3. sütundan $b_{23} = -1$, $b_{43} = 1$ diğerleri 0.

e_4 , 3'ten 2'ye bir kenardır. 4. sütundan $b_{34} = -1$, $b_{24} = 1$ diğerleri 0.

e_5 , 3'ten 4'e bir kenardır. 5. sütundan $b_{35} = -1$, $b_{45} = 1$ diğerleri 0.

e_6 , 4'ten 1'e bir kenardır. 6. sütundan $b_{46} = -1$, $b_{16} = 1$ diğerleri 0.

BÖLÜM 3**TEMEL MODEL****3.1.Giriş**

Bilim ve mühendislikteki bazı uygulamalı problemler sonlu otomataların matematiksel modelleri yardımıyla çözülebilir. Sonlu otomataların matematiksel modelleri, elektronik bilgisayarların tasarımında, farklı dillerin sentez analizinde, psikolojide ve insan sinir hareketleri gibi birçok alanda önemli rol oynadığından bu problemlerin daha derinden araştırılmasını gerektirir

İnceleyeceğimiz otomata genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

Tanım 3.1. $X = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_p\}$ sonlu giriş alfabeti, $Z = \{\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_q\}$ sonlu çıkış alfabeti ve $S = \{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n\}$ sonlu durum alfabeti (kümesi) olmak üzere,

$$s_{v+1} = f_s(x_v, s_v)$$

$$z_v = f_z(x_v, s_v)$$

şeklindeki karakteristik fonksiyonlu bir sisteme “sonlu dinamik sistem “ veya “sonlu otomata” denir. $x_v, s_v, z_v; t_v$ anındaki sırasıyla giriş, durum ve çıkış sembollerini göstermektedir.

Yukarıda verilen karakteristik fonksiyonlara dikkat edecek olursak, aşağıdaki açıklamayı yapabiliriz.:

Sonlu X giriş alfabeti, sonlu Z çıkış alfabeti ve sonlu S durum kümesi olan bir sistemin herhangi t_v anında (x_v) girişi ve (s_v) durumu verildiğinde bir sonraki durumu ve aynı andaki (z_v) çıkışı belirlenebilirse böyle dinamik sisteme sonlu otomata denir.

Sonlu otomataların karakteristik fonksiyonlarından da görüldüğü gibi, bu sistemler tek parametreye bağlı lineer olmayan sonlu dinamik sistemlerdir.

Örnek 1. Bir canlı organizma iki farklı şekilde etkileniyor. Birincisi negatif etki, ikincisi pozitif etkidir. Bu organizma negatif etkiye karşı tepki göstermiyor fakat pozitif etkiye karşı bir tepki gösteriyor, bir tepki göstermiyor. Göz önüne alınan böyle bir örnek için sonlu otomata modelinin uygun olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm. $X = \{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}\} = \{ \text{pozitif etki, negatif etki} \}$

$$Z = \{\zeta_{j_1}, \zeta_{j_2}\} = \{ \text{tepki var, tepki yok} \}$$

$S = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}\} = \{ \text{sonuncu pozitif etkiye karşı tepki var, sonuncu pozitif etkiye karşı tepki yok} \}$

Verilen bilgiler doğrultusunda bu sistemi yorumlarsak; eğer başlangıç durumu “Sonuncu pozitif etkiye tepki var “ ve giriş “pozitif etki “ olursa çıkış “teпки yok “ bulunur. Aynı giriş ve durum altında bir sonraki durum “sonuncu pozitif etkiye tepki yok” olur. Girişimiz pozitif etki ise sistemde “teпки var “ dır. Eğer girişler negatif etki iseduruma bakılmaksızın çıkış “teпки yok “ olur. Diğer durumlar da öncekilerin aynısıdır.

Şimdi verilen problemi karakteristik fonksiyonlar yardımıyla ifade edersek,

$$f_z(\xi_{i_1}, \sigma_{i_1}) = \zeta_{j_2}$$

$$f_z(\xi_{i_2}, \sigma_{i_1}) = \zeta_{j_2}$$

$$f_s(\xi_{i_1}, \sigma_{i_1}) = \sigma_{i_2}$$

$$f_s(\xi_{i_2}, \sigma_{i_1}) = \sigma_{i_1}$$

$$f_z(\xi_{i_1}, \sigma_{i_2}) = \zeta_{j_1}$$

$$f_z(\xi_{i_2}, \sigma_{i_2}) = \zeta_{j_2}$$

$$f_s(\xi_{i_1}, \sigma_{i_2}) = \sigma_{i_1}$$

$$f_s(\xi_{i_2}, \sigma_{i_2}) = \sigma_{i_2}$$

elde edilir.

Örnekte de görüldüğü gibi bir dinamik sistem incelendiğinde başlangıç durumunun verilmesi şarttır. Gerçekten de elde edilen karakteristik fonksiyon yardımıyla her bir giriş sembolüne uygun çıkış sembolü ancak ve ancak durum verildiğinde tek değerli olarak belirlenebilir.

Bu nedenle bu tür özel dinamik sistemler için mümkün başlangıç durumlar kümesi verildiğinde onlardan hangisinin başlangıç durumu olduğunu belirleyen yöntemler mevcuttur.

Örnek 2. Verilen: Hareket yönü iki pozisyonlu düğme tarafından kontrol edilen bir motor tekerleği, sağ ve sol pozisyonlar sırasıyla tekerleğin saat yönü ve saat yönünün tersine dönmesine yol açıyor. Tekerlek yönünü değiştirdiği an gösterge yanıyor.

$$X = \{\text{sağ, sol}\}$$

$$Z = \{\text{lamba açık, lamba kapalı}\}$$

$$S = \{\text{saat yönü, saat yönünün tersi}\}$$

Eğer o anki durum saat yönü ve girdi sağ veya o anki durum saat yönünün tersi ve girdi sol ise durum değişmez ve çıktı ise lamba kapalıdır. Eğer o anki durum saat yönü ve girdi sol ya da o anki durum saat yönünün tersi ve girdi sağ ise durum değişir ve çıktı da lamba açık olur.

Not. Eğer $f_z(x_v, s_v) = f_z(x_v)$ ise böyle sistemlere aşikar sistem denir.

Genel olarak aşikar olmayan sistemleri göz önüne alacağız.

Başlangıç durumuna bağlı olan her sonlu sistemin istenilen giriş dizisine uygun tepkisi (çıkış dizisi) belirlenemez. Eğer başlangıç durumu önceden verilmiş ise veya gerekli işlemlerden sonra başlangıç durumu belirlenebiliyor ise, o zaman her giriş dizisine uygun çıkış dizisi yani sistemin tepkisi belirlenebilir. Bu nedenle sonlu sisteme bağlı birçok uygulamalı problemde başlangıç durumunun belirlenmesi şarttır. Bununla ilgili aşağıdaki teoremi inceleyelim.

Teorem 3.1. Aşikar olmayan M sonlu otomatası verilmiş olsun. Eğer sonlu otomatanın f_z ve f_s karakteristik fonksiyonları belirli ise istenilen giriş dizisine uygun çıkış dizisi tek değerli olarak belirlenemez.

Eğer karakteristik fonksiyonların dışında σ_{i_0} başlangıç durumu da verilmiş ise istenilen giriş dizisine uygun çıkış dizisi tek değerli olarak belirlenebilir.

İspat. f_z ve f_s fonksiyonları verilmiş olsun. M aşikar olmayan dinamik sistem olduğundan en az öyle σ_u , σ_r durumu ve en az öyle bir ξ_h sembolü vardır ki sistem σ_u durumunda olduğunda ξ_h ' a tepkisi σ_r durumunda ξ_h ' a olan tepkisinden farklı olacaktır.

$$f_z(\xi_h, \sigma_u) \neq f_z(\xi_h, \sigma_r)$$

olur. O halde $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_l}$ dizisine uygun tepkiler σ_u ve σ_r durumlarında farklı olacaktır. Görüldüğü gibi başlangıç durumu belli olmayan bir sistemde bir giriş dizisi bulunabilir. Fakat bu diziye uygun çıkış dizisi tek değerli olarak belirlenmez.

Farz edelim ki, karakteristik fonksiyonların verilmesiyle birlikte σ_{i_0} (başlangıç) durumu da verilmiş olsun. O halde istenilen $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_l}$ giriş dizisinin etkisiyle M sisteminin son durumu belirlenebilir. Gerçekten de tümevarımla bunu gösterirsek;

$k = 0$ için σ_{i_0} vardır. Çünkü σ_{i_0} başlangıç değeri olarak verildi. k için σ_{i_k} durumunun belirlenmiş olduğunu kabul edelim. Buna göre,

$$\sigma_{i_{k+1}} = f_s(\xi_{j_l}, \sigma_{i_k})$$

dır Böylece her k için $\sigma_{i_{k+1}}$ durumu da belirlenmiş olur. Diğer yandan f_z karakteristik fonksiyonu da verildiği için,

$$\zeta_{j_k} = f_z(\xi_{j_k}, \sigma_{i_k})$$

eşitliğinden her k ($k = 1, 2, \dots, l$) değeri için yukarıdaki eşitliklerden teorem ispatlanmış olur.

Eğer karakteristik fonksiyonların dışında σ_{i_0} başlangıç durumu da verilmiş ise istenilen giriş dizisine uygun çıkış dizisi tek değerli olarak belirlenebilir.

3.2. İç Yapıdan Durum Kümesinin Belirlenmesi

Bu konuda orta veya tepki değişkenlerini oluşturan değişkenlere bağımlı değişkenler diyeceğiz. Sistem davranışını belirleyen tüm değişkenleri kurmak için yeterli bilgi, verilen sistemin iç yapısında mevcuttur. Ayrıca örnek zamandaki giriş değişkenlerinin değerleri ve bir önceki örnek zamandaki bağımlı değişkenlerin değerleri bilinirse herhangi bir örnek zamandaki tüm bağımlı değişkenlerin değerlerini tahmin etmek mümkündür. Böyle durumlarda sistem için bir durum kümesinin derlenmesini metodik olarak aşağıdaki gibi gerçekleştirebiliriz.

Verilen bir sistemin giriş değişkenleri $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(u)}$, çıkış değişkenleri $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(w)}$, ve bağımlı değişkenleri de $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(r)}$ olsun. (Tüm bağımlı değişkenler çıkış değişkenlerini bulundurur.) Farz edelim ki; her bağımlı değişken $y^{(k)}$ için sistemin yapısı aşağıdaki denklemi sağlasın.

$$y_v^{(k)} = g_k(x_v^{(1)}, x_v^{(2)}, \dots, x_v^{(u)}, y_{v-1}^{(1)}, y_{v-1}^{(2)}, \dots, y_{v-1}^{(r)}) \quad (3.1)$$

Aşağıdaki prosedürde giriş değişkenleri X alfabeti ile ifade edilir.

$$X = X^{(1)} \otimes X^{(2)} \otimes \dots \otimes X^{(u)}$$

Burada $X^{(i)}, i = 1, 2, \dots, u$ $x^{(i)}$ alfabetidir. Çıkış değişkenleri tek bir z değişkeni tarafından Z alfabeti ile gösterilebilir.

$$Z = Z^{(1)} \otimes Z^{(2)} \otimes \dots \otimes Z^{(w)}$$

Burada $Z^{(j)}, j = 1, 2, \dots, w$, $z^{(j)}$ alfabetidir. Benzer şekilde bağımlı değişken tek bir y tarafından Y alfabeti ile gösterilebilir.

$$Y = Y^{(1)} \otimes Y^{(2)} \otimes \dots \otimes Y^{(r)}$$

Burada $Y^{(k)}, k = 1, 2, \dots, r$, $y^{(k)}$ alfabetidir. O halde (1.1.) denklemi

$$y_v = g_y(x_v, y_{v-1}) \quad (3.2)$$

şeklinde olur. Her çıkış değişkeni aynı zamanda bağımlı değişken olduğundan

$$z_v = g_z(x_v, y_{v-1}) \quad (3.3)$$

dir.

Yukarıdaki formülleri sonlu bir sistemin standart karakteristik formüllerine dönüştürmek için s değişkeni şu şekilde tanımlanır.

$$s_v = y_{v-1} \quad (3.4)$$

O zaman S alfabeti

$$S=Y \quad (3.5)$$

ile verilir.

(3.2) ve (3.3) denklemleri şu şekilde yazılabilir.

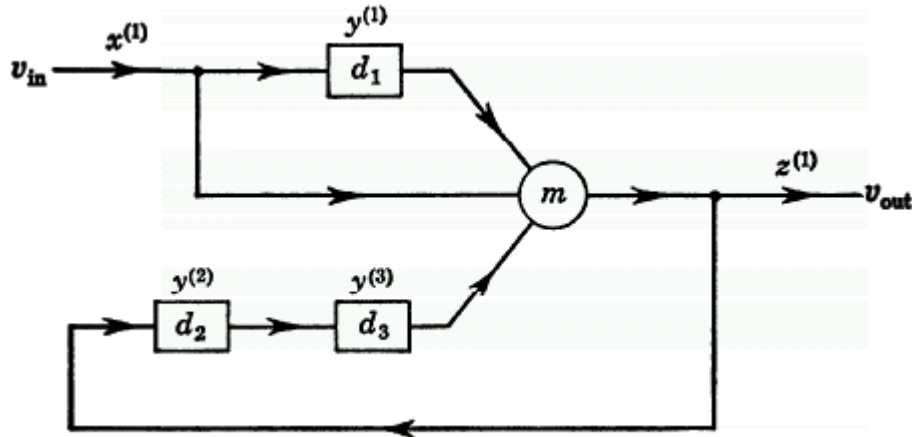
$$y_v = f_s(x_v, s_v) \quad (3.6)$$

$$z_v = f_z(x_v, s_v) \quad (3.7)$$

(3.4) ve (3.6) ' den

$$s_{v+1} = f_s(x_v, s_v) \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) denklemlerinin istenen karakteristik fonksiyonlar olduğu görülür. Sonuç olarak S alfabeti, verilen sistemin tanımlanmasında yeterli bir küme oluşturur.



Şekil 3.1. Ağ örneği

Örnek olarak Şekil 3.1 teki ağı düşünelim. v_{in} kablosu her T saniyede bir nabız oranında 0 ve 1 değerli nabız oluşturan bir kaynağa bağlıdır. Örnek zaman t_v nabızların oluştuğu anlar olarak alınır. d_1, d_2, d_3 elemanları T saniye için gelen nabızları depolar ve daha sonra bir sonraki elemana bunları iletir. M elementi 0 ya da 1 nabızlarını üreten önemli bir organdır. Aynı zamanda m sırasıyla gelen nabzın 0 ya da 1 olup olmamasına bağlıdır.

Önemli olan v_{out} kablosunda görünen nabız değeridir. t_v zamanında v_{in} üzerinde

görünen nabzın değeri, $x^{(1)}$ giriş değişkeni olarak alınır, t_v zamanında v_{out} üzerinde görünen nabzın değeri, $z^{(1)}$ çıkış değişkeni olarak alınır; t_v zamanında d_1, d_2, d_3 de depolanan nabızların değerleri sırasıyla $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ bağımlı değişkenleri olarak alınır.

$$X = \{0,1\}$$

$$Z = \{0,1\}$$

$$S = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

Ağ tasarımından $y_v^{(1)} = x_v^{(1)}$, $y_v^{(2)} = z_v^{(1)}$, $y_v^{(3)} = y_{v-1}^{(2)}$ eşitlikleri görülür. $z_v^{(1)}$; $y_{v-1}^{(1)}$, $x_v^{(1)}$ ve $y_{v-1}^{(3)}$ şeklindeki değerlerin büyüklüğü olarak farz edilir. Bu bağıntıları kullanarak

$y_v^{(1)} = g_1(x_v^{(1)}, y_{v-1}^{(1)}, y_{v-1}^{(2)}, y_{v-1}^{(3)})$, $y_v^{(2)} = g_2(x_v^{(1)}, y_{v-1}^{(1)}, y_{v-1}^{(2)}, y_{v-1}^{(3)})$ ve $y_v^{(3)} = g_3(x_v^{(1)}, y_{v-1}^{(1)}, y_{v-1}^{(2)}, y_{v-1}^{(3)})$ fonksiyonları Tablo 3.1 de gösterildiği gibi hesaplanabilir.

s' nin tanımından $y_{v-1}^{(1)}$, $y_{v-1}^{(2)}$ ve $y_{v-1}^{(3)}$ sütunlarından oluşan alt tablodaki her satır s_v durumunu gösterir. Alt tabloda $y_v^{(1)}$, $y_v^{(2)}$, ve $y_v^{(3)}$ sütunlarından oluşan her satır s_{v+1} durumunu gösterir.

Çizelge 3.1. Şekil 3.1 sistemi için g_k fonksiyonlar

$x_v^{(1)}$	S_v			S_{v+1}		
	$y_{v-1}^{(1)}$	$y_{v-1}^{(2)}$	$y_{v-1}^{(3)}$	$y_v^{(1)}$	$y_v^{(2)}$	$y_v^{(3)}$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

3.3. Alternatif Bir Model

Tanım 1.1 ile gösterilen esas modele karşılık gelen her sonlu durum otomatası , şimdiki çıkış sembolünün sadece şimdiki durumun fonksiyonu olduğubir otomataya dönüştürülebilir. (x_v, s_v) sıralı çiftine eşit olan bir s_v' değişkeni tanımlanarak bu dönüşüm tamamlanabilir. Bu yüzden s' nin içinde bulunduğu bir S' alfabeti

$$S' = X \otimes S \tag{3.9}$$

ile verilir.

Tanım 3.1. deki karakteristik fonksiyonları kullanarak z_v ;

$$z_v = f'_z(s'_v) \tag{3.10}$$

şeklinde ifade edilebilir.

s' tanımından ve Tanım 3.1. den

$$s'_{v+1} = (x_{v+1}, s_{v+1}) = (x_{v+1}, f_s(x_v, s_v)) \quad (3.11)$$

$$s'_{v+1} = f'_s(x_{v+1}, s'_v) \quad (3.12)$$

Denklem (3.10) ve (3.12) ; durumun yalnızca çıkışı belirlediği , bir sonlu durum otomatası için alternatif bir model tanımlar. Eğer gösterilen sistemin giriş alfabesinin büyüklüğü p ve S durum kümesinin büyüklüğü n ise S' nin büyüklüğünün np olacağı görülür.

(3.10) ve (3.12) denklemlerinde alternatif bir modelle bir sistem her zaman

Tanım 3.1. deki karakteristik fonksiyonlarla ifade edilebilir. O halde $s_v = s'_{v-1}$ yazılarak (3.10) denklemi

$$\begin{aligned} z_v &= f'_z(s'_v) = f'_z(f'_s(x_v, s_{v-1}')) \\ &= f_z(x_v, s_v) \end{aligned} \quad (3.13)$$

s_v nin tanımından ve (3.12) den

$$\begin{aligned} s_{v+1} &= s'_v = f'_s(x_v, s_{v-1}) \\ &= f_s(x_v, s_v) \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.12) ve (3.13) esas modelin karakteristik fonksiyonu gibi tanımlanabilir.

Bir model tarafından ifade edilen her sistem diğer modeller tarafından da ifade edilebilir. Alternatif model için gerekli durum kümesi, genellikle esas model için gerekli durum kümesinden daha geniştir. Fakat matematiksel olarak bakıldığında çözüm yönteminin farklı olmasından dolayı kullanılabilirliği vardır.

BÖLÜM 4**GEÇİŞ TABLOLARI VE GEÇİŞ GRAFLARI****4.1. Giriş**

Giriş alfabetesi , çıkış alfabetesi ve durum kümesi ile verilen bir sonlu otomatarlar sistemi tablo, graf ve matris yardımıyla formülüze edilebilirler. Bunlar verilen sistemin karakteristik fonksiyonunu gerçekleyen birer göstergedir.

4.2 Geçiş Tablosu

Geçiş tablosu tüm yazılması mümkün (x_v, s_v) sıralı çifti için f_z ve f_s fonksiyonlarının değerlerini gösterir. Giriş alfabetesi $X = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_p\}$, çıkış alfabetesi $Z = \{\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_q\}$ ve durum kümesi $S = \{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n\}$ olan bir otomatanın geçiş tablosu aşağıda verilmiştir. Bu tablo, sırasıyla f_z ve f_s fonksiyonları olmak üzere z_v, s_{v+1} fonksiyonlarını gösteren, birbirine bağlı iki alt tablodan oluşur. Tablonun solunda satırları tüm durumları, sütunları tüm giriş sembollerini gösterecek şekilde bir hücre vardır. σ_i ve ξ_i girişleriyle z_v alt tablosunda f_z fonksiyonu bulunur σ_i ve ξ_i girişleriyle s_{v+1} alt tablosunda f_s fonksiyonu bulunur. Bu koşullar altında f_z ve f_s fonksiyonları belirli, sınırlı olmayan otomatanın karakteristik fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar tanımlanan her (x_v, s_v) sıralı çifti için tek olmak zorundadır. Bu yüzden her satır ve sütunun kesişiminde z_v alt tablosu Z nin sadece bir elemanını, s_{v+1} alt tablosu da S nin sadece bir elemanını içermelidir.

Çizelge 4.1. Geçiş tablosu

		z_v					s_{v+1}				
x_v	s_v	ξ_1	ξ_2	ξ_p	ξ_1	ξ_2	...		ξ_p
σ_1	$\{ \zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_q \}$ seçilen çıkışlar	den					$\{ \sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n \}$ seçilen durumlar				
σ_2											
·											
σ_n											

Şimdi yukarıdaki örnekte analiz ettiğimiz problemin karakteristik fonksiyonlarından yararlanarak bu fonksiyonlara karşılık gelen geçiş tablosunu oluşturalım.

Çizelge 4.2. Geçiş tablosu örneği

		z_v		s_{v+1}	
x_v	s_v	ξ_{i_1}	ξ_{i_2}	ξ_{i_1}	ξ_{i_2}
σ_{i_1}		ζ_{j_2}	ζ_{j_2}	σ_{i_2}	σ_{i_1}
σ_{i_2}		ζ_{j_1}	ζ_{j_2}	σ_{i_1}	σ_{i_2}

4.3. Geçiş Tablolarının Sayısının Belirlenmesi

Geçiş tablolarının önemli bir uygulaması sonlu durum otomatalarının bazı sınıf elemanlarının sayılmasıdır.. Bir otomata sınıfı, geçiş tablosunda durum ve çıkış sembollerini etkileyen kısıtlamalar sınıfı gibi tanımlanabilir. Bu kısıtlamaları sağlayan tüm olası tabloların kurulmasıyla özel sınıf sayılabilir. (numaralandırılabilir) Bu uygulama daha

sonraki bölümlerde bazı otomata sınıflarının büyüklüğü hesaplanarak gösterilecektir.

(n,p,q) Otomatalar sınıfı

Özel olarak giriş alfabetesi $X = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_p\}$, çıkış alfabetesi

$Z = \{\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_q\}$ ve durum kümesi $S = \{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n\}$ olan bir otomatanın (n,p,q) otomata sayısı:

$$N_{n,p,q} = (qn)^{pn} \quad (4.1)$$

dir.

Basit Minimal (n,p,q) Otomatalar sınıfı

$\forall i, j$ için $i \neq j$ ve $f_z(\xi_k, \sigma_i) \neq f_z(\xi_k, \sigma_j)$ olacak şekilde en az bir k varsa (n,p,q) otomatasına basit minimal otomata denir. z_v alt tablosunda tüm satırları farklı olan bir geçiş tablosu basit minimal otomata'yı karakterize eder. Böyle otomataların sayısı ;

$$N'_{n,p,q} = n^{pn} \prod_{r=0}^{n-1} (q^p - r) \quad (4.2)$$

dır

$N'_{n,p,q}$ nin negatif değerleri sıfır olarak yorumlanır..

Basit Sadeleştirilebilir Otomatalar Sınıfı

Aşağıdaki şartlar (n,p,q) otomatasının geçiş tablosunda varsa (n,p,q) otomatasına basit sadeleştirilebilirdir denir.

z_v ve s_{v+1} alt tabloları boyunca özdeş olan ya da her σ_i, σ_j ile yer değiştirildiğinde en az bir σ_i, σ_j satır çifti vardır. Eğer bir otomata basit sadeleştirilemez ise tüm satırları (hem z_v yi hem de s_{v+1} yi üreten satırlar) farklı olan bir geçiş tablosuna sahip olmalıdır.

Basit sadeleştirilemeyen $N''_{n,p,q}$ otomatalarının sayısı ;

$$N''_{n,p,q} \leq \prod_{r=0}^{n-1} [(qn)^p - r] \quad (4.3)$$

dir. Buna göre buradan basit sadeleştirilebilir (n,p,q) otomatalarının $N'''_{n,p,q}$ sayısının üst sınırı;

$$N'''_{n,p,q} \geq (qn)^{pn} - \prod_{r=0}^{n-1} [(qn)^p - r] \quad (4.4)$$

ile belirlenir.

4.4. Geçiş Grafi

Sonlu otomata sistemlerinin ifade ediliş yöntemlerinden bir tanesi de graf yöntemidir. Geçiş grafi adını verdiğimiz bu grafi, sonlu sistemin durumlarını belirleyen köşeler ile bu köşeleri belirli bir kuralla birleştiren yönü olan kenarlar topluluğu olarak düşüneceğiz.

Giriş alfabeti $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p\}$, çıkış alfabeti $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q\}$ ve durum kümesi $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ olan

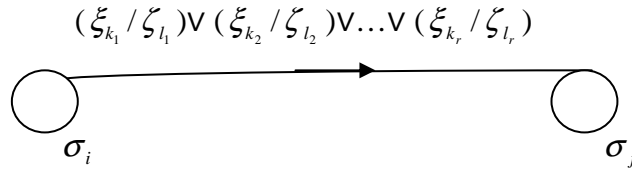
$$s_{v+1} = f_s(x_v, s_v) \quad (4.5)$$

$$z_v = f_z(x_v, s_v) \quad (4.6)$$

karakteristik fonksiyonlu sonlu otomata sisteminin verildiğini farz edelim.

$f_s(x_v, \sigma_i) = \sigma_j$ özelliğine sahip x_v değerler kümesini x_{ij} ile gösterelim. Ayrıca,

$f_z(\xi_{k_h}, \sigma_i) = \zeta_{l_h}$ olduğunu düşünelim. $h = 0.1.2...r$ olsun.



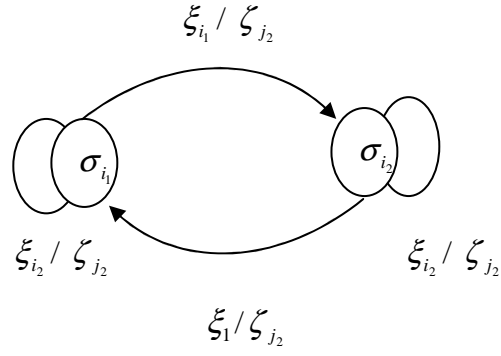
Şekil 4.1. Geçiş grafi

Bu gösterim aşağıdaki gibi okunur.

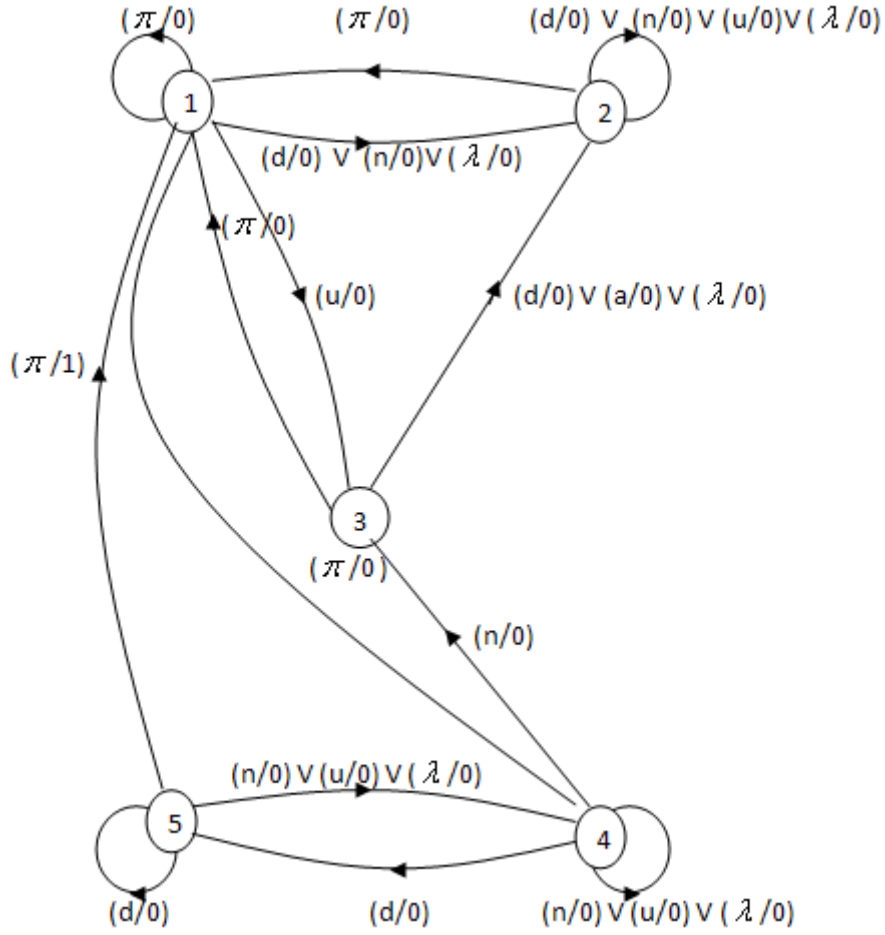
Eğer sistem σ_i durumunda ise girişe ξ_{k_1} sembolü verildiğinde çıkışta ζ_{l_1} sembolü bulunur ve sistem σ_j durumuna geçiş yapar. ξ_{k_2} sembolü verildiğinde ζ_{l_2} çıkışı elde edilir ve sistem tekrar σ_j durumuna geçiş yapar. Bu şekilde devam edersek ξ_{k_r} sembolü verildiğinde ζ_{l_r} çıkışı elde edilir.

Görüldüğü gibi sonlu sistemlerin X, Z, S kümeleri ve karakteristik fonksiyonları verildiğinde uygun geçiş tabloları yazılabildiği gibi yukarıdaki özelliğe sahip yönlendirilmiş kenarları yazmakla geçiş grafları oluşturulabilir.

Buradan yukarıdaki örnekteki modelin geçiş grafi aşağıdaki şekilde elde edilir.



Şekil 4.2. Geçiş grafi örneği



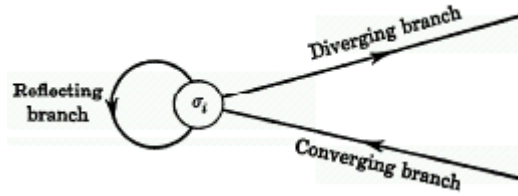
Şekil 4.3. A1 otomatası için geçiş grafi

BÖLÜM 5

BAZI ÖNEMLİ ALGORİTMALAR

5.1. Durum ve Alt Otomataların Sınıflandırılması

σ_i verilen herhangi bir durum olsun. σ_i durumuna değen (dokunan) bir kenar, eğer bir başka durumdan σ_i durumuna doğru yaklaşıyorsa σ_i nin yakınsayan (converging) bir kenarı, veya σ_i durumundan başka bir duruma doğru gidiyorsa σ_i nin ıraksayan (diverging) bir kenarı ya da σ_i durumu etrafında dönüyorsa σ_i nin yansıyan (reflecting) bir kenarıdır denir.



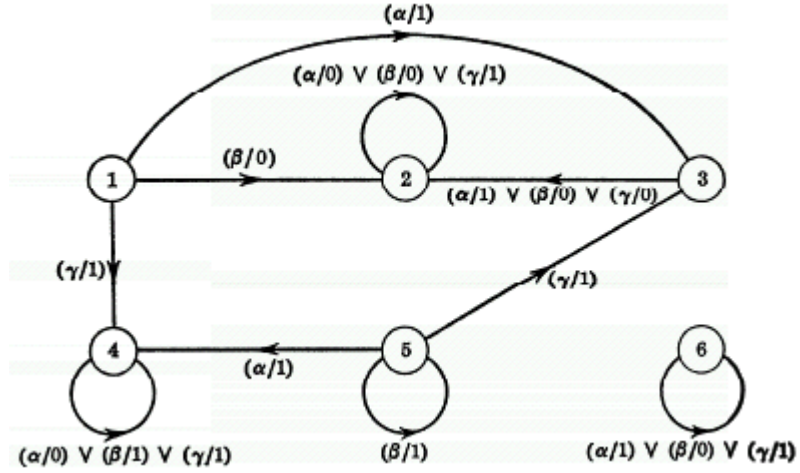
Şekil 5.1. Özel kenarlar

Yakınsak ya da ıraksak kenarları olmayan bir durum aşağıdaki durumlardan biri olabilir.

1) Geçiş Durumu. Yakınsak kenarları olmayan fakat en az bir ıraksak kenarı olan durumdur. Böyle bir durum en az bir diğer duruma neden olur. Fakat bir kez terk edildiğinde (vazgeçildiğinde) ulaşamaz.

2) Kalıcı Durum. ıraksayan kenarları olmayan fakat en az bir yakınsayan kenarı olan durumdur. Böyle bir duruma en az bir diğer durumdan ulaşılır. Fakat bir kez ulaşıldığında terk edilemez (vazgeçilemez)

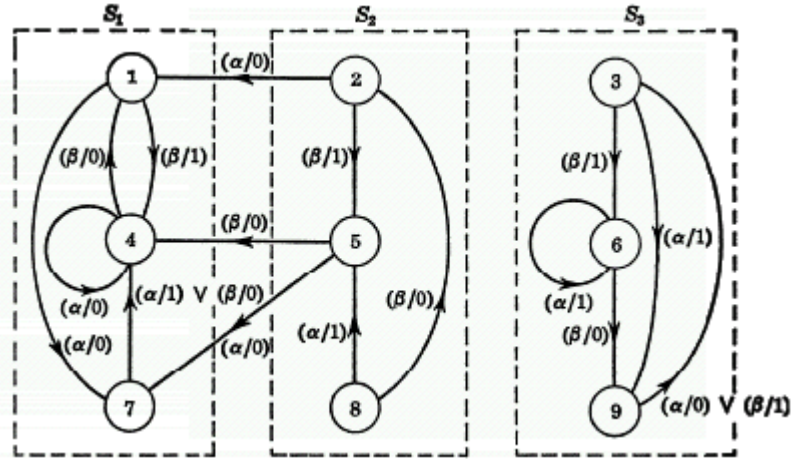
3) Ayrık (Ayrılmış) Durum. Yakınsak ve ıraksak kenarları olmayan bir durumdur. Böyle bir durum başka durumlara neden olmaz ve herhangi diğer durumlardan elde edilemez.



Şekil 5.2. Otomata A2

Şekil 5.2’ den 1 ve 5 durumlarının geçici, 2 ve 4 durumlarının kalıcı ve 6 durumunun ayrık durum olduğu görülür.

Bir otomatanın durum kümesinin iki ya da daha fazla alt kümeye bölünmesi açıkça her bir alt kümenin Şekil 5.2.’de gösterildiği gibi sınırlanmasıyla gerçekleşir. Kutu içerisinde gösterilen otomataların her birine alt otomata denir.



Şekil 5.3. Otomata A3

Çizelge 5.1. Otomata A3

		s_p		s_{p+1}	
		α	β	α	β
s_p	x_p				
1		0	1	7	4
2		0	1	1	5
3		1	1	9	6
4		0	0	4	1
5		0	0	7	4
6		1	0	6	9
7		1	0	4	4
8		1	0	5	2
9		0	1	3	3

Şekil 5.3. ve Çizelge 5.1 durum kümesi $S = \{1,2 \dots 9\}$ kümesinin $S_1 = \{1,4,7\}$, $S_2 = \{2,5,8\}$, $S_3 = \{3,6,9\}$ olarak üç alt kümeye ayrıldığını gösterir.

Her bir alt otomatayla ilgili geçici, kalıcı ve ayrık alt otomata geçici, kalıcı, ayrık durumlar gibi durum ile otomatanın isimlerinin yer değiştirilmesiyle aynı şekilde tanımlanır. Geçiş diagramı, durum kümelerinin bazı özel alt kümelerinden geçiş , kalıcı veya ayrık alt otomata belirlememiz açısından bizlere olanak sağlar. Şekil 5.3 ten ; S_1 'nin kalıcı alt otomata S_2 nin geçici alt otomata, S_3 nin ayrık alt otomata olduğu çıkarılabilir.

5.2. $G_k(S_i)$ Kümesi

$G_k(S_i)$; k ya da daha az uzunluklu giriş dizisi ile

$S_i = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \sigma_{i_3} \dots \sigma_{i_r}\}$ durumlarından ulaşılabilen M otomatasının tüm durumlar kümesini gösterebilir. Özellikle $G_0(S_i) = S_i$. $G_1(S_i)$, S_i ile M nin geçiş tablosunun $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \sigma_{i_3} \dots \sigma_{i_r}$ satırlarındaki tüm s_{p+1} girişlerinin birleşimidir. Bunun yanında $G_1(S_i)$ M geçiş grafının kontrol edilmesiyle düzenlenebilir. $k \geq 1$ için $G_{k-1}(S_i)$ verilsin. $G_k(S_i)$;

$$G_k(S_i) = G_1(G_{k-1}(S_i)) \quad (5.1)$$

arasındaki ilişki ile belirlenebilir.

$$G_k(S_i) = G_{k-1}(S_i)$$

olduğunda negatif olmayan tüm u tamsayıları için

$$G_{k+u}(S_i) = G_{k-1}(S_i) \quad (5.2)$$

dir. Gerçekten $k = k + 1$ için

$$G_{k+1}(S_i) = G_k(S_i) = G_{k-1}(S_i)$$

dir. Bu şekilde devan edersek tümevarımdan (5.2) eşitliği elde edilir. Bu yüzden $G_k(S_i)$, herhangi sayıda giriş dizisi ile S_i nin durum kümelerinden oluşur. $G(S_i)$ ile gösterilen bu küme aşağıdaki algoritma ile belirlenebilir.

Algoritma 5.1. S_i verilsin. $G(S_i)$ i bulmak için

(1) $G_0(S_i) = S_i$ olsun. $k = 1$ olsun

(2) $G_k(S_i) = G_1(G_{k-1}(S_i))$ olarak belirle.

(3) a) Eğer $G_k(S_i) \neq G_{k-1}(S_i)$ ise $k = k + 1$ (k yı bir arttır demek) ve (2) ye dön.

b) Eğer $G_k(S_i) = G_{k-1}$ ise $G_k(S_i) = G(S_i)$

Eğer $G_k(S_i) \neq G_{k-1}(S_i)$ ise $G_k(S_i); G_{k-1}(S_i)$ den en az bir fazla eleman içermelidir. $G_k(S_i)$ nin sayısı (büyüklüğü) M nin toplam n durum sayısını aşmadığı (geçmediği) için, $k \leq n - r + 1$ için $G_k(S_i) = G_{k-1}(S_i)$ dir. r, S_i nin büyüklüğüdür. Böylece

$$G(S_i) = G_{n-r}(S_i) \quad (5.3)$$

Algoritma 5.1. bu yüzden step 2 nin en fazla $n - r$ iterasyonunu gerektirir. Şekil 5.3. A3 otomatası için $S_i = \{5,6\}$ $G(5,6) = \{1,3,4,5,6,7,9\}$ ile aşağıdaki algoritmayı gösterir.

Çizelge 5.2. Algoritma 5.1. A3 ve $S_i = \{5,6\}$

k	$G_k(S_i) = G_1(G_{k-1}(S_i))$
0	5, 6
1	4, 5, 6, 7, 9
2	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9
3	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9

S_i tek bir σ_i durumundan oluşuyorsa $G(\sigma_i)$ ye σ_i -ulaşılabilir küme denir ve $G(\sigma_i)$, σ_i den ulaşılabilen tüm durumlar kümesini meydana getirir.

Teorem 5.1. σ_i ve σ_j bir n durum otomatasında iki durum olsun. Eğer σ_j e σ_i den ulaşılabiliyorsa, uzunluğu en fazla $n - 1$ olan bir giriş dizisi uygulanarak ulaşılabilir.

İspat. $S_i = \{\sigma_i\}$ olduğunda S_i nin sayısı olan $r, 1$ dir. Denklem (5.3)

$$G(\sigma_i) = G_{n-1}(\sigma_i) \quad (5.4)$$

olur. Bu ; σ_i ulaşılabilir kümesinin uzunluğu n-1 ya da daha az olan giriş dizilerinin uygulanmasıyla σ_i den ulaşılabilen tüm durumların kümesi olduğu anlamına gelir.

Eğer boş olmayan S_i kümesine ait, kalıcı ya da ayrık bir alt otomata oluşturan bir M otomatasının başlangıç durumu bilinirse; M otomatası S_i ye ait olmayan tüm durumlar ile

bu durumlardan oluşan kenarların elenmesiyle (yok edilmesiyle) basitleştirilebilir. (sadeleştirilebilir)

Basitleştirilmiş otomata her zaman orijinal sistemi yeterince ifade etmemesine karşın otomatanın sonraki davranışlarını ilgilendirdiğinden yeterlidir. Elenen durumlara hiçbir zaman ulaşılamadığından ve bu yüzden ifadenin bir parçası olarak onların içeriği gereksiz olduğundan böyle devam eder. Örneğin A3 otomatasının başlangıç durumunun 1 olduğu bilirse, durumların 2, 3, 5, 6, 8 ve 9 olduğu zaman A3 ün sonraki davranış analizi yapılabilir ve bu durumlardan çıkan dallar geçiş diyagramından elenir.

5.3. $H_k(S_i)$ kümesi

$H_k(S_i)$; kenarların yönlerinin önemsiz olduğu k ya da daha az uzunluklu kenarlar yoluyla $S_i = \{\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \dots \sigma_{ir}\}$ deki durumlara bağlanan M otomatasının durumlar kümesi olsun. Özellikle $H_0(S_i) = S_i$. $H_1(S_i)$, S_i lerin birleşimidir; yani M geçiş tablosunun $\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \dots \sigma_{ir}$ satırlarındaki s_{v+1} durumları ile bu durumları içerisinde bulunduran alt satırların birleşimidir. Buna ek olarak, $H_1(S_i)$, M geçiş grafının kontrol edilmesiyle oluşturulabilir.

$H_{k-1}(S_i)$ verilsin, $k \geq 1$, $H_k(S_i)$ aşağıdaki ilişki ile belirlenebilir.

$$H_k(S_i) = H_1(H_{k-1}(S_i))$$

$H_k(S_i) = H_{k-1}(S_i)$ olduğunda negatif olmayan tüm u tam sayıları için

$$H_{k+u}(S_i) = H_{k-1}(S_i) \quad (5.5)$$

dir.

Bu yüzden $H_k(S_i)$, yönü ihmal edilen herhangi uzunluktaki kenarların bir zinciri yoluyla S_i e bağlanan tüm durumlar kümesini oluşturur. $H(S_i)$ ile gösterilen bu kümenin belirlenmesi aşağıdaki algoritma ile verilmiştir.

Algoritma 5.2. S_i kümesi verilsin. $H(S_i)$ yi bulmak için

(4) $H_0(S_i) = S_i$ ve $k = 1$ olsun.

(5) $H_k(S_i) = H_1(H_{k-1}(S_i))$ belirle.

(6) (a) Eğer $H_k(S_i) \neq H_{k-1}(S_i)$ ise $k = k + 1$ (k yi bir artır)ve (2) ye dön

(b) $H_k(S_i) = H_{k-1}(S_i)$ ise $H_k(S_i) = H(S_i)$ dir.

Algoritma 5.1 gibi, Algoritma 5.2 de 2. basamak en fazla $n - r$ iterasyon gerektirir. Burada n , S durum kümesinin sayısı ve r , S_i nin sayısıdır.

Tablo 5.3. deki A3 otomatası için $S_i = \{1,4\}$ $H(1.4) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ olduğu

algoritmayı gösterir.

Çizelge 5.3. Algoritma 5.2. A_3 ve $S_i = \{1,4\}$

k	$H_k(S_i) = H_1(H_{k-1}(S_i))$
0	1,4
1	1,2,4,5,7
2	1,2,4,5,7,8
3	1,2,4,5,7,8

BÖLÜM 6

GEÇİŞ MATRİSLERİ

6.1. Birinci Mertebeden Geçiş Matrisleri

Geçiş matrisi, geçiş grafında görsel olarak uygulanan işlemlerin matematiksel olarak yorumlanmasıdır. Bu yüzden işlemlerin bir gözlemci tarafından ve görsel olarak uygulanmadığı yerlerde ya da görsel yaklaşım gereksiz olduğunda geçiş matrisi daha elverişlidir.

Bir n-durum otomatası için n satır ve sütundan oluşan geçiş matrisi $[M]$ ile gösterilsin. $\{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n\}$, M nin durum kümesi ve b_{ij} , M nin geçiş grafında σ_i den σ_j durumuna giden giriş-çıkış sembolüne sahip kenar olsun. $[M]$ nin (i, j) . girişi e_{ij} ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$e_{ij} = \begin{cases} b_{ij} \text{ sayısı, } b_{ij} \text{ varsa} \\ 0, & b_{ij} \text{ yoksa} \end{cases} \quad (6.1)$$

Matristeki σ_k durumu sırasıyla σ_k satırına ve σ_k sütununa karşılık gelir. (6.2) matrisi, A1 otomatasının geçiş matrisini gösterir.

$$|A1| = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (\pi/0) & (d/0) \vee (n/0) \vee (\lambda/0) & (u/0) & 0 & 0 \\ (\pi/0) & (d/0) \vee (n/0) \vee (u/0) \vee (\lambda/0) & 0 & 0 & 0 \\ (\pi/0) & (d/0) \vee (u/0) \vee (\lambda/0) & 0 & (n/0) & 0 \\ (\pi/0) & 0 & 0 & (n/0) \vee (u/0) \vee (\lambda/0) & (d/0) \\ (\pi/1) & 0 & 0 & d/0) \vee (u/0) \vee (\lambda/0) & (d/0) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.2)$$

p , M nin giriş alfabesinin sayısı ise $[M]$ deki her satır tam p tane giriş çıkış çifti içermeli ve her bir çift farklı giriş sembollerini göstermelidir. σ_k durumunun yakınsak bir dalı σ_k sütununda köşegen olmayan bir eleman tarafından ifade edilir. σ_k durumunun iraksak bir dalı σ_k satırında köşegen olmayan bir eleman tarafından ifade edilir. σ_k durumunun yansıyan bir dalı ise σ_k sütunu ya da satırında köşegen bir eleman tarafından ifade edilir. Bu yüzden σ_k geçici ise σ_k sütunundaki tüm köşegen olmayan elemanlar sıfırdır (σ_k satırındakiler hariç) Eğer σ_k kalıcı ise σ_k satırındaki tüm köşegen olmayan elemanlar sıfırdır. (σ_k sütunundakiler hariç) Eğer σ_k ayırık ise σ_k satır ve sütunundaki köşegen olmayan tüm elemanlar sıfırdır.

Eğer $S_i = \{\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \dots \sigma_{ir}\}$ ise $G_1(S_i)$ kümesi; $\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \dots \sigma_{ir}$ satırlarının sıfırdan farklı olduğu sütunlar ile S_i nin birleşimiyle oluşturulur. $H_1(S_i)$ kümesi $\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \dots \sigma_{ir}$ satırlarının sıfırdan farklı olduğu sütunlar ile $\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \dots \sigma_{ir}$ sütunlarının sıfırdan farklı

olduğu satırların birleşimi ile ifade edilir.

Örneğin A1 otomatası için $[A1]$; $G_1(1,2) = \{1,2,3\}$ $H_1(4,5) = \{1,3,4,5\}$ ile belirlenebilir. Bu yüzden geçiş matrisinin 5.1. ve 5.2. algoritmalarını yorumlayan uygun bir araç olduğu görülmektedir. $S_i = \{\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \dots \sigma_{ir}\}$ nin M nin bir geçiş , kalıcı ve ayırık otomatasını oluşturup oluşturmadığını belirlemek için sırasıyla birinci satır ve sütundan başlayarak $\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \dots \sigma_{ir}$ satır ve sütunlarının bağlı durumda göstermek amacıyla $[M]$ nin satır ve sütunları sıralanabilir. (6.3) te gösterildiği gibi bu sıralama (permütasyon) $[M]$ yi dört alt matrise böler : $[M_{11}], [M_{12}], [M_{21}], [M_{22}]$

$[M_{11}]$ nin satır ve sütunları $\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \dots \sigma_{ir}$ dir. Tüm girişleri sıfır olan matris $[0]$ biçiminde gösterilir. Eğer $[M_{21}] = [0]$ ve $[M_{12}] \neq [0]$ ise S_i nin geçici alt otomata, eğer $[M_{12}] = [0]$ ve $[M_{21}] \neq [0]$ ise kalıcı bir alt otomata , eğer $[M_{12}] = [M_{21}] = [0]$ ise ayırık bir alt otomata oluşturduğu sonucuna varılabilir. Geçiş alt otomatanın $\{2,5,8\}$, kalıcı alt otomatanın $\{1,4,7\}$ ve ayırık alt otomatanın $\{3,6,9\}$ olduğu ve bu satır ve sütunlarla sıralandığı A3 otomatasının geçiş matrisi Şekil (6.4) te verilmiştir.

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & \vdots & [M_{12}] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [M_{21}] & \vdots & [M_{22}] \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$[A3] = \begin{matrix} & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ \dots \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ \dots \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & (\beta/1) & (\alpha/0) & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (\beta/0) & (\alpha/0) & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha/0) & 0 & 0 & \vdots & 0 & (\beta/1) & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta/0) & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & (\beta/0) & (\alpha/1) & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & (\beta/1) & (\alpha/1) \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & (\alpha/1) & (\beta/0) \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & (\alpha/0) \vee (\beta/1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.4)$$

S_i ; kalıcı ya da ayırık alt otomata oluşturduğunda $[M_{12}] = [0]$ dir ve bu yüzden $[M_{11}]$ deki her satır tüm p giriş-çıkış çiftini içerir. Buradaki ; giriş alfabetinin sayısıdır. $[M]$ den $[M_{12}]$, $[M_{21}]$ ve $[M_{22}]$ nin silinmesiyle M ile aynı giriş alfabetine sahip, bağımsız r -durum otomatası olarak bilinen $r \times r$ lik bir $[M_{11}]$ matrisi elde edilir.

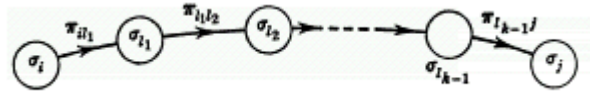
Böylece başlangıçtaki matrise ulaşılır. Yani, eğer bir otomata kalıcı ya da ayırık alt otomataya ait bir durumda ise bu alt otomatalara ait olmayan tüm durumlar ile bu durumlardan çıkan tüm dallar elenebilir. Örneğin 1 durumunu ele alalım. S_1 alt

otomatasına ait 1 durumundan S_2 ve S_3 alt otomatalarına ait hiçbir duruma geçilemez.

O halde 1 durumundan 4 veya 7 durumlarına geçerek bir sonuç almak istiyorsak S_2 ve S_3 alt otomatalarındaki durumların hiçbir katkısı yoktur. Bu durumlar o zaman fazlalıktır. Bunu teşhis problemine benzetebiliriz. Burada önemli olan geçerli olan tedavi yöntemini kullanmaktır.

6.2. Yüksek Mertebeden Geçiş Matrisleri

Geçiş grafında bir durumdan bir diğer duruma geçen k kenardan oluşan bir diziye yol denir. Burada k yolun uzunluğu olarak alınır. $P_{ij}^{(k)}$, σ_i durumundan σ_j durumuna geçen k uzunluklu tüm yolların kümesi olsun. $P_{ij}^{(1)}$; σ_i yi σ_j ye bağlayan 1 uzunluklu kenar olup π_{ij} olarak yazılır. Eğer π_{ij} boş ise yani σ_i yi σ_j ye bağlayan bir tek kenar yoksa π_{ij} nin sayısal değeri sıfırdır.



Şekil 6.1. $\pi_{i i_1} \pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{k-1} j}$ yolu

σ_i durumundan σ_j durumuna geçen k uzunluklu bir yol $\pi_{i i_1}$ kenarından başlayarak $\pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{k-1} j}$ kenarlarının eklenmesiyle devam ederek $\pi_{i i_1} \pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{k-1} j}$ sıralı çarpımıyla gösterilir. Eğer gösterimde böyle bir kenar yoksa tüm çarpım sıfır olur. Yolların kümesi sıralı olmayan çarpımların toplamı olarak yazılır. Her bir çarpım kümenin bir elemanını gösterir. Bu yüzden

$$P_{ij}^{(k)} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n \pi_{i i_1} \pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{k-1} j} \tag{6.5}$$

dir. Burada sıfır bileşenler olmayan yollar olarak yorumlanır.

Lemma 6.1.

$$P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{u=1}^n \pi_{iu} P_{uj}^{(k)} \tag{6.6}$$

dır.

İspat: (6.5) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n \pi_{iu} P_{uj}^{(k)} &= \sum_{u=1}^n \pi_{iu} \left\{ \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n \pi_{u i_1} \pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{k-1} j} \right\} \\ &= \sum_{u=1}^n \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n \pi_{iu} \pi_{u i_1} \pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{k-1} j} \end{aligned} \tag{6.7}$$

u indisinin l_1 ile , l_h indisinin ($h = 1.2 \dots k - 1$) l_{h+1} ile yer değiştirilmesiyle

$$\sum_{u=1}^n \pi_{iu} P_{uj}^{(k)} = \sum_{l_1=1}^n \sum_{l_2=1}^n \dots \sum_{l_k=1}^n \pi_{il_1} \pi_{l_1 l_2} \dots \pi_{l_{k-1} l_k} = P_{ij}^{(k+1)} \quad (6.8)$$

n durum otomatası için k . mertebeden geçiş matrisi $[\bar{M}]^{(k)}$ ile gösterilir. n satır ve n sütundan oluşan $[\bar{M}]^{(k)}$ matrisi $[M]$ matrisi gibi oluşturulur. $[\bar{M}]^{(k)}$ matrisinin (i,j). elemanı $e_{ij}^{(k)}$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır.

$$e_{ij}^{(k)} = P_{ij}^{(k)} \quad (6.9)$$

ile tanımlanır. $k = 1$ için

$$e_{ij}^{(1)} = P_{ij}^{(1)} = \pi_{ij} \quad (6.10)$$

dir.

$[\bar{M}]^{(1)}$, $[\bar{M}]$ olarak yazılır ve $[M]$ deki sıfırdan farklı her (i,j) girdilerinin π_{ij} ile yer değiştirilmesiyle elde edilir.

Yüksek mertebeden geçiş matrislerinin çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

Eğer $[\bar{A}]$ matrisinin (i ,j). girdisi a_{ij} , $[\bar{B}]$ matrisinin (i ,j). girdisi b_{ij} ve $[\bar{C}] = [\bar{A}] .[\bar{B}]$ nin (i ,j). girdisi c_{ij} ve bu matrislerin her biri $n \times n$ lik yüksek mertebeden geçiş matrisleri ise

$$c_{ij} = \sum_{u=1}^n a_{iu} b_{uj} \quad (6.11)$$

dir. a_{iu} ve b_{uj} girdilerinin çarpımının (genelde her biri çarpımların toplamıdır.) toplamaya göre birleşme ve dağılma özellikleri olup değişme özelliği yoktur.bu yüzden yüksek mertebeden geçiş matrislerinin , her bir çarpımda $a_{iu} b_{uj}$ çarpımının sırasının korunması dışında sıradan matrislerin çarpımıyla aynıdır. Çünkü $a_{iu} b_{uj} \neq b_{uj} a_{iu}$ dir.

Lemma 6.2.

$$[\bar{M}]^{(k+1)} = [\bar{M}][\bar{M}]^{(k)} \quad (6.12)$$

dir.

İspat. $[\bar{M}]$ matrisinin (i,j). elemanı $e_{ij}^{(1)} = \pi_{ij}$ dir. $[\bar{M}]^{(k)}$ matrisinin (i,j). elemanı $e_{ij}^{(k)} = P_{ij}^{(k)}$ olsun. $[\bar{M}][\bar{M}]^{(k)}$ matrisinin (i,j). elemanı

$$\sum_{u=1}^n \pi_{iu} P_{uj}^{(k)} = P_{ij}^{(k+1)} = e_{ij}^{(k+1)} \quad (6.13)$$

olur.Bu da $[\bar{M}]^{(k+1)}$ matrisinin (i,j). elemanıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.1 $[\bar{M}]^{(k)}$ nin (i,j). girdisi; M otomatasında σ_i durumundan σ_j durumuna geçen k uzunluklu tüm yolların kümesidir.

İspat. $[\bar{M}]^{(k)}$ ile $[\bar{M}]^k$ ifadeleri birbirine denktir. $k = 1$ için eşitlik geçerlidir. Eğer

eşitlik $k=h$ için geçerli ise (6.12) ile

$$[\bar{M}]^{(h+1)} = [\bar{M}][\bar{M}]^{(h)} = [\bar{M}][\bar{M}]^h = [\bar{M}]^{h+1} \quad (6.14)$$

$k \geq 1$ için tümevarımla eşitlik sağlanır.

Teorem 6.1, bir durumdan diğer bir duruma geçen k uzunluğundaki yolların kümesinin $[\bar{M}]$ 'yi k . kuvvetine yükselterek sistematik bir şekilde bulunabildiğini gösterir. Matriste gösterildiği gibi her yolla ilişkilendirilen alt indisler, yolu oluşturan dalları tanımlar. Geçiş grafını veya matrisini göz önüne alarak bu dalların işaretleri ve yolla ilişkilendirilen giriş-çıkış dizileri tanımlanabilir.

Örneğin $A1$ otomatası için $[\bar{A1}]$ ve $[\bar{A1}]^2$ matrisleri sırasıyla birinci mertebeden geçiş matrisi ve ikinci mertebeden geçiş matrisleridir. $[\bar{A1}]^2$ den açıktır ki durum 3'ten durum 2' ye yol alan 2 uzunluğunda 2 yol vardır. Bunlar $\pi_{31}\pi_{12}$ ve $\pi_{32}\pi_{22}$ dir ve durum 2 den durum 4 veya 5 e giden 2 uzunluğunda hiçbir yol yoktur.

Bununla beraber $[\bar{A1}]^2$ ve $[A]$ matrislerine bakıldığında; durum 2' ye πd veya πn veya $\pi \lambda$ giriş dizilerini uygulayarak durum 5 ' ten ulaşılabilirdiğini çıkarabiliriz. Çünkü $[\bar{A1}]^2$ matrisinin (5,2). elemanı $\pi_{51}\pi_{12}$ dir. π_{51} , $A1$ otomatasında ($\pi/1$) giriş çıkış çiftine karşılık gelirken π_{12} ise ($d/0$) \vee ($n/0$) \vee ($\lambda/0$) giriş-çıkış çiftine karşılık gelmektedir

$$[\bar{A1}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} & 0 \\ \pi_{41} & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} \\ \pi_{51} & 0 & 0 & \pi_{54} & \pi_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.15)$$

$$[\bar{A1}]^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi_{11}\pi_{11} + \pi_{11}\pi_{12} + \pi_{13}\pi_{31} & \pi_{11}\pi_{12} + \pi_{12}\pi_{22} + \pi_{13}\pi_{32} & \pi_{11}\pi_{13} & \pi_{13}\pi_{34} & 0 \\ \pi_{11}\pi_{21} + \pi_{22}\pi_{21} & \pi_{12}\pi_{21} + \pi_{22}\pi_{22} & \pi_{21}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{31}\pi_{11} + \pi_{32}\pi_{21} + \pi_{34}\pi_{41} & \pi_{31}\pi_{12} + \pi_{32}\pi_{22} & \pi_{31}\pi_{13} & \pi_{34}\pi_{44} & \pi_{34}\pi_{45} \\ \pi_{41}\pi_{11} + \pi_{44}\pi_{41} + \pi_{45}\pi_{51} & \pi_{41}\pi_{12} & \pi_{41}\pi_{13} & \pi_{44}\pi_{44} + \pi_{45}\pi_{54} & \pi_{44}\pi_{45} + \pi_{45}\pi_{55} \\ \pi_{51}\pi_{11} + \pi_{54}\pi_{41} + \pi_{55}\pi_{51} & \pi_{51}\pi_{12} & \pi_{51}\pi_{13} & \pi_{54}\pi_{44} + \pi_{55}\pi_{54} & \pi_{54}\pi_{45} + \pi_{55}\pi_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.16)$$

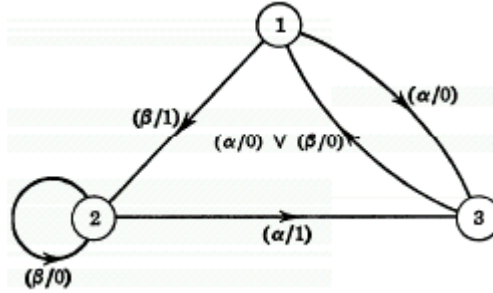
Ayrıca yukarıdaki iki matristen de görüldüğü gibi $[\bar{A1}]$ matrisinde 1 durumundan 4 durumuna giden 1 uzunluklu yol yok iken $[\bar{A1}]^2$ matrisinde 1 durumundan 4 durumuna giden 2 uzunluklu bir yol vardır. Verilen herhangi bir otomata için eğer bir durumdan diğer bir duruma giden herhangi uzunluklu yol yoksa bir sonraki adımda aynı durumdan yine diğer duruma giden yol olabilir.

$[\bar{A1}]^2$ matrisinde 2 durumundan 4 duruma giden yol yoktur. Aynı şekilde $[\bar{A1}]$

matrisinde 2 durumundan 4 durumuna giden yol yoktur. Bir otomatın geçiş matrisinde bir durumdan diğer duruma giden herhangi uzunluklu yol olmaması aynı durumlar arasında daha kısa uzunluklu yollar olmayacak anlamına gelmez. Bu örnek incelenen sistemin yapısından kaynaklanmaktadır. Örneğin A4 otomatası için otomatasının bu özelliği sağlamadığını görebiliriz.

Çizelge 6.1. A4 otomatası

$s_p \backslash z_p$	z_p		s_{p+1}	
	α	β	α	β
1	0	1	3	2
2	1	0	3	2
3	0	0	1	1



Şekil 6.2. A4 otomatası için geçiş grafi

Çizelge 6.1. ve Şekil 6.2' e göre A4 otomatasının geçiş matrisini inceleyelim.

$$[A4] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & (\beta/1) & (\alpha/0) \\ 0 & (\beta/0) & (\alpha/1) \\ (\alpha/0) \vee (\beta/0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.17)$$

$$[\overline{A4}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} \\ 0 & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.18)$$

$$[\overline{A4}]^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi_{13}\pi_{31} & \pi_{12}\pi_{22} & \pi_{12}\pi_{23} \\ \pi_{23}\pi_{31} & \pi_{22}\pi_{22} & \pi_{22}\pi_{23} \\ 0 & \pi_{31}\pi_{12} & \pi_{31}\pi_{13} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.19)$$

$[\overline{A4}]^2$ matrisinde 3 durumundan 1 durumuna geçen yol yokken $[\overline{A4}]$ matrisinde π_{31} yolu vardır.

6.3. Geçiş İskelet Matrisi

Çoğu problemde yüksek mertebeden geçiş matrislerinin detaylı girişleri gerekli değildir ve çözümler daha basit giriş özellikleri olan skeleton (iskelet) matris olarak adlandırılan matrisin kuvvetleri düşünülerek elde edilir. n durumlu M otomatası için skeleton matris n satır ve sütundan oluşur ve $[M]$ matrisi gibi oluşturulup $[\tilde{M}]$ ile gösterilir. Bir $[\tilde{M}]$ matrisinde (i, j) . elemanı \tilde{e}_{ij} ile gösterilir. Eğer b_{ij} ; M otomatasında σ_i durumundan σ_j durumuna giden kenarı gösteriyorsa ,

$$\tilde{e}_{ij} = \begin{cases} 1, & b_{ij} \text{ varsa} \\ 0, & b_{ij} \text{ yoksa} \end{cases} \quad (6.20)$$

dir.

$[\tilde{M}]$ matrisi , $[M]$ ve $[\bar{M}]$ matrislerindeki sıfırdan farklı her bir elemana 1 değeri verilerek oluşturulur. Yani; $[\tilde{M}]$ matrisi M otomatasında σ_i durumundan σ_j durumuna geçen kenar sayılarının toplamıdır.

Teorem 6.2. $[\tilde{M}]^k$ matrisinin (i, j) . elemanı ; M otomatasında σ_i durumundan σ_j durumuna geçen k uzunluklu yolların sayısına eşittir. ($k = 1, 2, \dots$)

İspat. $k = 1$ için teorem , matrisin yapısı itibariyle doğrudur. Farzedelim ki teorem k için doğru olsun. $[\tilde{M}]^k$ nın (u, j) . girdisi $\tilde{e}_{uj}^{(k)}$ ile gösterilen σ_u durumundan σ_j durumuna geçen k uzunluklu yolların sayısıdır.

$[\tilde{M}][\tilde{M}]^k = [\tilde{M}]^{k+1}$ matrisinin (i, j) . girdisi

$$\tilde{e}_{ij}^{(k+1)} = \sum_{u=1}^n \tilde{e}_{iu} \tilde{e}_{uj}^{(k)} \quad (6.21)$$

ile verilir. σ_u ‘ a tek bir dal yardımıyla σ_i den ulaşırsa $\tilde{e}_{uj}^{(k)}$, 1 ile çarpılır , aksi takdirde sıfırdır . Bu yüzden $\tilde{e}_{ij}^{(k+1)}$ σ_i durumundan σ_j durumuna geçen $k + 1$ uzunluklu yolların sayısına eşittir . Tümevarımdan her $k > 0$ için teorem doğrudur.

Soruda özelleşmiş durumlar ile dallar arasındaki yolların varlığının ve sayısının ilgili olmadığı problemlerde iskelet matrisinin kısa sayısal formu kullanılabilir . $k < n - 1$ ‘ in ardışık değerleri için $[\tilde{M}]^k$ ‘ yı kullanarak σ_i den σ_j ‘ ye yol alan minimal yolların sayısı belirlenebilir . Eğer $[\tilde{M}]^{k-1}$ matrisinde (i, j) . girdi sıfır , $[\tilde{M}]^k$ deki ise sıfırdan farklı ise bu giriş (k uzunluklu) minimal yolların sayısıdır . Eğer $[\tilde{M}]^{n-1}$ matrisinde (i, j) . girdi sıfır ise yol yoktur.

(6.22)-(6.23) matrisleri Şekil 4.3 A1 otomatası için iskelet matrisinin yapısını ve bu matrisin 2. ve 3. kuvvetlerinin yapısını gösterir . Örneğin $[\widetilde{A1}]^3$; uzunluğu 4 ten az olan herhangi bir yol ile 2 durumundan 5 durumuna ulaşamayacağını ve 3 uzunluklu 9 farklı yol ile 4 durumundan 1 durumuna ulaşabileceğini gösterir

$$[\widetilde{A1}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.22)$$

$$[\widetilde{A1}]^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.23)$$

$$[\widetilde{A1}]^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 5 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.24)$$

Bir kenar birden fazla giriş-çıkış çiftine karşılık gelebildiği için $[\widetilde{M}]$ deki sıfırdan farklı bir (i,j) elemanın σ_i den σ_j ' ye giden k uzunluklu giriş dizilerinin sayısı olması gerekmediği fark edilebilir. $[\widetilde{M}]$ matrisi, yol sayısından çok giriş dizilerinin sayısı ile ilgili ise $[\widetilde{M}']$ ile gösterilen ve (i,j). elemanı \tilde{e}'_{ij} olan değiştirilmiş iskelet matrisi tanımlanabilir.

$$\tilde{e}'_{ij} = \begin{cases} b_{ij} \text{ ile işaretlenmiş giriş çıkış çifti sayısı} \\ 0, b_{ij} \text{ yok ise} \end{cases} \quad (6.25)$$

$[\widetilde{M}']$, $[M]$ deki sıfırdan farklı her eleman ile bu eleman tarafından içerilen giriş çıkış çifti sayısı ile yer değiştirilerek $[M]$ den elde edilebilir. $[\widetilde{M}']$ matrisi h tane giriş-çıkış ile işaretlenen her kenarın h tane paralel kenar ile ayrık olduğu ve her birinin tek bir giriş-çıkış çifti işaretlendiği M iskelet matrisi olarak kabul edilebilir. Ayırma operasyonu herhangi bir yolda içerilen kenarların sayısını, yollarla ifade edilen giriş-çıkış sayısının eşitliğine zorladığı için $[\widetilde{M}']^k$ matrisinin (i,j). girişi σ_i den σ_j ' ye giden k uzunluklu giriş dizilerinin toplam sayısı ile bir olmak zorundadır.

(6.26) ve (6.27) matrisleri A1 otomatası için değiştirilmiş iskelet matris yapısını ve bu matrisin ikinci dereceden yapısını göstermektedir. Örneğin; $[\widetilde{A1}']^2$ matrisi 4 durumundan 2 durumuna giden en kısa 3 tane giriş dizisinin olduğunu ve 5 durumundan 4 durumuna giden 2 uzunluklu 12 giriş dizisinin var olduğunu gösterir.

$$[\widetilde{A1}'] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.26)$$

$$[\widetilde{A1}']^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 18 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 19 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 12 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 12 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.27)$$

6.4. Sade Yollar

Eğer $i, l_1, l_2 \dots l_{k-1}, j$ alt indisleri birbirinden farklı ise σ_i durumundan σ_j durumuna giden $\pi_{il_1} \pi_{l_1 l_2} \dots, \pi_{l_{k-1} j}$ yoluna k uzunluklu sade (proper) yol denir. $i, l_1, l_2 \dots l_{k-1}, j$ alt indisleri farklı ve $i = j$ ise bu yola k uzunluğunda sade döngü (proper cycle) denir. Bu yüzden birden fazla hiçbir durumu birbirine değmeyen sade yol ve sade döngü sırasıyla açık yol ve kapalı yollardır. Buna göre aşağıdaki lemma verilebilir

Lemma 6.3. Bir n -durum otomatasında sade bir yolun uzunluğu $n - 1$ geçmez ve sade bir döngünün uzunluğu n 'yi geçmez.

Sade olmayan yola fazla yol denir. Aşağıdaki kısımda sadece sade yollarla ilgili bazı problemleri tanıttacağız. $i, l_1, l_2 \dots l_{k-1}, j$ alt indisleri birbirinden farklı olmadığı durumda $\pi_{il_1} \pi_{l_1 l_2} \dots, \pi_{l_{k-1} j}$ terimleri k . mertebeden $[\overline{M}]^k$ geçiş matrisinden çıkarılabilir. (elenebilir) ve bu işlem sonunda değişim matrisi $[\overline{M}']^k$ ile ifade edilir. $[\overline{M}']^{(k)}$ nin (i, j) . girdisi M otomatasında σ_i durumundan σ_j durumuna geçen k uzunluklu tüm sade yolların kümesidir $[\overline{M}']$ olarak yazılan $[\overline{M}']^{(1)}$ matrisi ; tüm köşegen girişlerinin elenmesiyle (sıfır ile yer değiştirilmesiyle) elde edilen $[\overline{M}]$ matrisidir.

Lemma 6.4. $[\overline{M}'][\overline{M}']^{(k)}$, $[\overline{M}]^{k+1}$ de bulunan tüm sade yolları içerir.

İspat. $[\overline{M}]$ yi $[\overline{M}]^k$ ile çarpma işlemi $[\overline{M}]$ de gösterilen tek dalların $[\overline{M}]^k$ nin

sonuna bağlanarak bu yolda gösterilen her yolun uzunluğunun k dan $k + 1$ e genişletilmesi işlemidir.

Sonuçta $[\bar{M}]$ den 1 uzunluğundaki tüm fazla yolların silinmesiyle oluşan $[\bar{M}']$ ve $[\bar{M}]^{(k)}$ den k uzunluğundaki tüm fazla yolların silinmesiyle oluşan $[\bar{M}']^{(k)}$ nın çarpımı $[\bar{M}'][\bar{M}']^{(k)}$; $[\bar{M}][\bar{M}]^k$ daki tüm basit yolları içerir. $[\bar{M}][\bar{M}]^k = [\bar{M}]^{k+1}$ olduğundan Lemma 6.4 gerçekleşir.

$[\bar{M}]$ den $[\bar{M}]^{k+1}$ kurma işleminde tüm fazla yollar, sade yolların sayımını etkilemeksizin herhangi bir orta matrisinde görüldüğü an elenebilir. Bu sonuç $[\bar{M}']^{(k)}$ yı oluşturmanın $[\bar{M}]^k$ yı ilk kez oluşturmaktan daha az yorucu olduğunu söyler ve $[\bar{M}]^k$ dan tüm fazla yolları eleyerek şu ortaya çıkar:

Algoritma 6.1 $[\bar{M}]$ verilsin. $l > 1$ iken $[\bar{M}']^{(l)}$ yi oluşturmak için ,

(1) $[\bar{M}']$ deki tüm köşegen terimleri 0 ile yer değiştirerek $[\bar{M}']^{(1)}$ yi oluştur.

$k = 1$ olsun.

(2) $[\bar{M}'][\bar{M}']^{(k)}$ 'yi oluştur. Çarpım matrisinde tüm fazla yolları 0 ile yer değiştir.

Sonuçta matris $[\bar{M}']^{(k+1)}$ olsun.

(3) (a) $k + 1 < l$ ise k ' yi 1 arttır ve (2)' ye dön

(b) $k + 1 = l$ ise , $[\bar{M}']^{(k+1)} = [\bar{M}']^{(l)}$ dir.

(6.28) den (6.31) a kadar tüm matrisler Algoritma 6.1 in ve $[\bar{A1}']$, $[\bar{A1}']^{(2)}$, $[\bar{A1}']^{(3)}$ ve $[\bar{A1}']^{(4)}$ matrislerinin $[\bar{A1}]$ matrisinden nasıl oluştuğunu gösteriyor.

$$[\bar{A1}'] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} & 0 \\ \pi_{41} & 0 & 0 & 0 & \pi_{45} \\ \pi_{51} & 0 & 0 & \pi_{54} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.28)$$

$$[\overline{A1}']^{(2)} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \pi_{13}\pi_{32} & 0 & \pi_{13}\pi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{32}\pi_{21} + \pi_{34}\pi_{41} & \pi_{32}\pi_{31} & 0 & 0 & \pi_{34}\pi_{45} \\ \pi_{45}\pi_{51} & \pi_{41}\pi_{12} & \pi_{41}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{51} & \pi_{51}\pi_{12} & \pi_{51}\pi_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.29)$$

$$[\overline{A1}']^{(3)} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{13}\pi_{34}\pi_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13}\pi_{34} & 0 \\ \pi_{34}\pi_{45}\pi_{51} & \pi_{34}\pi_{41}\pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{41}\pi_{13}\pi_{32} + \pi_{45}\pi_{51}\pi_{12} & \pi_{45}\pi_{51}\pi_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{51}\pi_{13}\pi_{32} + \pi_{54}\pi_{41}\pi_{12} & \pi_{54}\pi_{41}\pi_{13} & \pi_{51}\pi_{13}\pi_{34} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.30)$$

$$[\overline{A1}']^{(4)} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13}\pi_{34}\pi_{45} \\ 0 & \pi_{34}\pi_{45}\pi_{51}\pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{45}\pi_{51}\pi_{13}\pi_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{54}\pi_{41}\pi_{13}\pi_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.31)$$

6.5. Minimal Yolların Belirlenmesi

Sonlu dinamik sistemlerde iki durum arasındaki en kısa yola minimal yol denir. Bu yüzden bir durumdan başka duruma geçiş, farklı uzunluklu yollarla mümkün olduğundan en kısa yolların bulunması önem taşımaktadır. Minimal yol ile sade yol arasında şu ilişkiyi çıkarabiliriz.

Lemma 6.5. σ_i durumundan σ_j durumuna minimal yol eğer varsa basit yol olmalıdır.

İspat: $\pi_{i l_1} \pi_{l_1 l_2} \dots \pi_{l_{k-1} j}$ k uzunluklu minimal yol olsun. Eğer bu yol gereksiz (fazla) ise $i, l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, j$ alt indislerinin ikisi eşit olmalıdır. Farzedelim $l_g = l_h$ ve $h > g$ olsun. Minimal yol aşağıdaki çarpımla gösterilir :

$$\pi_{i l_1} \pi_{l_1 l_2} \dots \pi_{l_{g-1} l_g} \pi_{l_g l_{g+1}} \dots \pi_{l_{h-1} l_h} \pi_{l_h l_{h+1}} \dots \pi_{l_{k-1} j} = \pi_{i l_1} \pi_{l_1 l_2} \dots \pi_{l_{g-1} l_g} \pi_{l_g l_{g+1}} \dots \pi_{l_{h-1} l_g} \pi_{l_g l_{h+1}} \dots \pi_{l_{k-1} j} \quad (6.32)$$

Eğer bu yol varsa yukarıdaki çarpımda sıfır yapan çarpan yoktur. Sonuçta $\pi_{i l_1} \pi_{l_1 l_2} \dots \pi_{l_{h-1} l_g} \pi_{l_g l_{h+1}} \dots \pi_{l_{k-1} j}$ yolunda hiçbir çarpan sıfır değilse bu demektir ki bu yol mevcuttur. Bir sonraki yol bir öncekinden kısa olduğundan önceki gibi σ_i durumundan σ_j

durumuna minimal yol olamaz . Çelişki ile minimal yol fazla olamaz.

Şimdi Lemma 6.3 ve Lemma 6.5'i aşağıdaki teoremle birleştirebiliriz.

Teorem 6.3. Bir n durumlu M otomasında σ_i durumundan σ_j durumuna bir yol varsa böyle yolların en kıyası $[\bar{M}']^{(k)}$ matrislerinin birinde (i, j) . girdi olarak gösterilir. Burada $1 \leq k \leq n - 1$ dir.

Teorem 6.3.'ten minimal yolları belirlemek için aşağıdaki algoritmayı çıkarabiliriz.

Algoritma 6.2. Bir M otomasının σ_i durumundan σ_j durumuna minimal yollarını belirlemek için

- (1) $k = 1$ olsun .
- (2) $[\bar{M}']^{(k)}$ yı oluştur.
- (3) (a) Eğer (i, j) . girdi sıfır ve $k < n - 1$ ise k yı 1 arttır ve (2) ye dön.
 (b) Eğer (i, j) . girdi sıfır ve $k = n - 1$ ise yol yoktur.
 (c) Eğer (i, j) . girdi sıfırdan farklı ise istenen yolları gösterir.

Örneğin $A1$ otoması için 1 durumundan 5 durumuna minimal yolu bulmak için $k = 1, 2, \dots$ için ilk olarak 1. Satır ve 5. sütuna karşılık gelen her girdi sıfırdan farklı olana kadar ya da $k = 4$ e kadar $[\bar{A1}']^{(k)}$ oluşturulur. (6.28) - (6.31) matrisleri $[\bar{A1}']^{(3)}$ otomasında 1. Satır ve 5. sütuna karşılık gelen sıfırdan farklı ilk girdinin $\pi_{13}\pi_{34}\pi_{45}$ olduğunu gösterir. Şekil 4.3 ya da (6.2) geçiş matrisine bakıldığında “ *und* “ giriş dizisi uygulayarak minimal yolun değişebileceğini çıkarabiliriz.

Bir n durum otomasında tam döngü n uzunluklu herhangi basit döngüdür. Tam döngü , otomatada her duruma tam bir kez degen kapalı bir yoldur. Basit döngüleri belirleme problemi , her bir girdi sembolünün sabit bir değere sahip olmasından doğar. Otomatada başlangıç durumundan diğer tüm durumlara ve tekrar başlangıç durumuna en az masrafla geçme işi önemlidir.

Lemma 6.6. $[\bar{M}'][\bar{M}']^{(n-1)}$ matrisinin diagonallik prensibi M otoması için bütün tam döngüleri bulundurur.

İspat : Tam döngü basit döngü olduğundan ; n uzunluklu tam bir döngüde herhangi $(n - 1)$ ardışık dallar basit bir yol oluşturur . 1 uzunluklu basit yolların $(n - 1)$ uzunluklu basit yolların sonuna eklenmesiyle oluşturulan tüm yollar kümesi , bu yüzden n uzunluklu bütün tam döngüleri oluşturur. $[\bar{M}'][\bar{M}']^{(n-1)}$ matrisi bu kümeyi içerdiğinden ve tam döngüler bir durumdan tekrar aynı duruma dönen yollar olduğundan Lemma aşağıda gerçekleşir.

Açıkça M otomatasının herhangi durumu , tam bir döngüde başlangıç durumu olarak bilinir. Bu yüzden eğer $[\bar{M}'][\bar{M}']^{(n-1)}$ matrisinde bir köşegen girdisi sıfır ise bu durumda M de ne zaman bir tam döngü olmazsa bu matristeki tüm köşegen girdileri sıfır olmalıdır. $[\bar{M}'][\bar{M}']^{(n-1)}$ matrisindeki sıfırdan farklı herhangi (i, i) . köşegen girdisi M matrisindeki olabilecek tüm döngüleri gösterir. (j, j) . köşegen girdisi $(i \neq j)$, (i, i) . girdide bulunan sembollerin dairesel permutasyonlarını bulundurur.

Örneğin , $[\bar{A1}'][\bar{A1}']^{(4)}$ matrisinde tüm girdilerin sıfır olması A1 otomatasının tam döngü bulundurmaması anlamına gelir. Şekil 6.2 ve (6.33) matrisi içerisinde tam döngü olan A4 otomatasını gösterir. (6.34) ve (6.35) matrisleri bu döngüyü örnekler. A4 otomatasında tüm durumların sayısı 3 olduğundan (6.36) de gösterilen $[\bar{A4}'][\bar{A4}']^{(2)}$ matrisi esas köşegen üzerinde bulunan bütün tam döngüleri bulundurmalıdır. İstenen tam döngü $\pi_{12}\pi_{23}\pi_{31}$ dir veya bunun dairesel permutasyonudur. Şekil (6.2) ya da (6.33) matrisine bakıldığında eğer A4 otomatasının başlangıç durumu 1 ise tam döngü , ya $\beta\alpha\alpha$ ya da $\beta\alpha\beta$ uygulanarak değiştirilebilir.

$$[A4] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & (\beta/1) & (\alpha/0) \\ 0 & (\beta/0) & (\alpha/1) \\ (\alpha/0) \vee (\beta/0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.33)$$

$$[\bar{A4}'] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} \\ 0 & 0 & \pi_{23} \\ \pi_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.34)$$

$$[\bar{A4}']^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi_{12}\pi_{23} \\ \pi_{23}\pi_{31} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{31}\pi_{12} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.35)$$

$$[\bar{A4}'][\bar{A4}']^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi_{12}\pi_{23}\pi_{31} & \pi_{13}\pi_{31}\pi_{12} & 0 \\ 0 & \pi_{23}\pi_{31}\pi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{31}\pi_{12}\pi_{23} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.36)$$

6.6. Matrislerin Kısmi Yapısı İle Belirlenen Yollar

Önceki bölümlerde tartışılan matrisler karesel olduğundan karakterize edilebilirler. Bu yüzden onlar sadece özel durum çiftleri arasındaki yollarla ilgili bilgileri değil aynı zamanda herhangi durum çiftleri arasındaki bilgileri de sağlar. Otomatada kompleksliğin durum sayısının karesiyle yaklaşık olarak arttığı bu özellik dikkate değerdir.ve yorucu matris işlemlerinden elde edilir. Sadece bazı özel başlangıç durumlarında oluşan bu yollarla ilgili durumlarda matrislerin kısmi yapısından kaçınılır.

Lemma 6.7. $[\bar{M}]_i^k$; $[\bar{M}]^k$ nın i . satırından oluşturulan satır matrisini göstereyin. O halde

$$[\bar{M}]_i^{k+1} = [\bar{M}]_i^k [\bar{M}] \quad (6.37)$$

dır.

İspat. $P_{ij}^{(k)}$ nın tanımından ve (6.8) de gösterilen analoginin geliştirilmesinden

$$P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{u=1}^n \pi_{iu} P_{uj}^{(k)} = \sum_{u=1}^n P_{iu}^{(k)} \pi_{uj}$$

elde edilmiştir. Sabit bir i için $P_{ij}^{(k+1)}$ kümeleri $[\bar{M}]^{k+1}$ matrisinin i . satır elemanlarını oluşturur. Bununla birlikte sabitlenmiş bir i için $\sum_{u=1}^n P_{iu}^{(k)} \pi_{uj}$ kümeleri, $[\bar{M}]_i^k$ yı $[\bar{M}]$ ile çarpılarak elde edilen satır matrisinin elemanlarını oluşturur.

Lemma 6.7' den $[\bar{M}]_i^k$ matrisi, $[\bar{M}]$ matrisinin bir kare matristen başka bir satır matrisiyle ardı ardına çarpılarak oluşturulabilir. Sadece σ_i durumundan giden yollar için $[\bar{M}]^k$ tam matrisindeki bilgiler $[\bar{M}]_i^k$ matrisinde de bulunduğundan bu kısmi matris yapısı yeterlidir. Sonuç olarak yapısal işlemler $[\bar{M}]$ matrisindeki satır sayısı ile yaklaşık olarak orantılı olan bir faktörle basitleştirilebilir. Algoritma 6.1 de gösterildiği gibi kısmi yapı şemasının $[\bar{M}']^{(k)}$ matrisinin yapısına doğrudan uygulanabileceği görülür.(6.38)-(6.41) matrisleri A1 otomasının 1 durumunda 1, 2, 3, ve 4 uzunluklu tüm basit yolların kısmi yapı şemasını göstermektedir.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ [\bar{A1}']_1 & = [0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0] \end{array} \quad (6.38)$$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ [\bar{A1}']_1^{(2)} & = [0 & \pi_{13}\pi_{32} & 0 & \pi_{13}\pi_{34} & 0] \end{array} \quad (6.39)$$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ [\overline{A1'}]_1^{(3)} & = & [0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{13}\pi_{34}\pi_{45}] \end{array} \quad (6.40)$$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ [\overline{A1'}]_1^{(4)} & = & [0 & 0 & 0 & 0 & 0] \end{array} \quad (6.41)$$

Lemma 6.7.'nin, $[\overline{M}]$ matrisinin $[\tilde{M}]$ ya da $[\tilde{M}']$ ile yer değiştirildiğinde de anlamlı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu yüzden matrislerin kısmi yapısı, iskelet matrisleri ve modifiye edilmiş iskelet matrislerinin kuvvetlerindeki seçilen satırları belirlemek amacıyla uygulanabilir.

BÖLÜM 7
UYGULAMALAR

1) σ_i , M otomasında S durum kümesinin bir elemanı olsun. $G(S_i)$, σ_i ulaşılabilir küme olsun. $G'(S_i)$, $G(S_i)$ de bulunmayan S durum kümesinin elemanlarından oluşsun.

a) Eğer $G'(S_i) \neq \emptyset$ ve $G(S_i) \cap G(G'(S_i)) = \emptyset$ ise $G(S_i)$ ve $G'(S_i)$ nin M nin iki ayrık alt otomata olduğunu gösteriniz.

b) Eğer $G'(S_i) \neq \emptyset$ ve $G(S_i) \cap G(G'(S_i)) \neq \emptyset$ ise $G(S_i)$ ve $G'(S_i)$ nin sırasıyla kalıcı ve geçici alt otomata olduklarını gösteriniz.

c) Eğer $G'(S_i) = \emptyset$ ise M nin ayrık alt otomata bulundurmadığını gösteriniz.

Çizelge 7.1. Geçiş Tablosu

		z_p		s_{p+1}	
		α	β	α	β
s_p	x_p				
1		0	1	3	2
2		0	0	2	1
3		1	0	2	2
4		0	1	1	5
5		0	0	3	2
6		1	0	5	4
7		1	1	9	8
8		1	0	8	9
9		0	1	7	7

2) Yukarıda verilen Çizelge 7.1.'e göre A otomasını temsil etmektedir.

a) A otoması için $G(5,9)$ ' u bulunuz.

b) Problem 1 ' deki sonuçları kullanarak $G(6)$ nin ayrık alt otomata ve $G(2)$ nin kalıcı alt otomata olduğunu gösteriniz

3) $F_k(S_i)$; k ya da daha az uzunluktaki giriş dizilerini uygulayarak S_i kümesindeki durumlara ulaşılabilen M otomasının tüm durumlar kümesi olsun.

a) Herhangi uzunluklu giriş dizileriyle S_i ' ye ulaşılabilen durum kümelerini gösteren $F(S_i)$ ' nin algoritmasını oluşturunuz.

b) Problem 2 ' ye algoritmayı uygulayınız.

c) $G(S_i) \cup F(S_i) = H(S_i)$ olduğunu gösteriniz.

4) A otoması $[A]$ geçiş matrisiyle verilmiştir.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$(\alpha/1) \vee (\beta/0)$	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$(\alpha/0)$	0	$(\beta/1)$	0	0	0	0
3	0	0	$(\alpha/1) \vee (\beta/1)$	0	0	0	0	0
4	0	0	$(\alpha/1)$	0	$(\beta/0)$	0	0	0
5	0	0	$(\alpha/0)$	0	0	0	0	$(\beta/1)$
6	0	0	0	0	0	$(\alpha/1) \vee (\beta/0)$	0	0
7	0	0	0	0	$(\beta/0)$	0	0	$(\alpha/1)$
8	0	0	0	0	0	$(\alpha/0) \vee (\beta/1)$	0	0

a) A 'nın geçici, kalıcı ve ayrık durumlarını belirleyiniz.

b) $G_1(5,7)$ ve $H_1(2,3)$ ' i belirleyiniz.

c) A matrisindeki satır ve sütunları tekrar düzenleyerek $\{1,2,4,7\}$ ve $\{3,5,6,8\}$ durum kümelerinin geçici, kalıcı ve ayrık alt otomata çifti oluşturup oluşturmadığını belirleyiniz.

5) a) $[\bar{M}]$ matrisinin i . satırındaki sıfırdan farklı tek eleman $e_{ii}^{(1)}$ ise $[\bar{M}]^k$ matrisinin de i . satırındaki sıfırdan farklı tek elemanın $e_{ii}^{(k)}$ olduğunu gösteriniz. ($k \geq 1$)

b) Eğer $[\bar{M}]$ matrisinin j . sütunundaki sıfırdan farklı tek eleman $e_{jj}^{(1)}$ ise $[\bar{M}]^k$ matrisinin de j . sütunundaki sıfırdan farklı tek elemanın $e_{jj}^{(k)}$ olduğunu gösteriniz. ($k \geq 1$)

6) M makinesinin geçiş grafi ; $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ durumları ve $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ kenarlarından oluşmaktadır. $n \times m$ ' lik $[M_a]$ matrisinin (i, j) . elemanı olan a_{ij} şu şekilde tanımlanmaktadır.

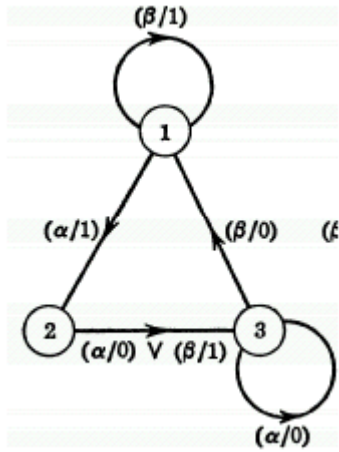
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \beta_j, \sigma_i \text{nin iraksak ya da yansıyan kenarı ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$n \times m$ ' lik $[M_b]$ matrisinin (i, j) . elemanı olan b_{ij} şu şekilde tanımlanır.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \beta_j, \sigma_i \text{nin yakınsak ya da yansıyan kenarı ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$[\tilde{M}] = [M_a][M_b]_T$$

olduğunu aşağıdaki grafi göz önüne alarak gösteriniz.(Burada $[M_b]_T$; $[M_b]$ matrisinin transpozudur.)



Şekil 7.1. Geçiş grafi

7) Kısmi yapıyı kullanarak aşağıda verilen çizelgeye göre için aşağıdakileri cevaplayınız.

a) Durum 3 ' ten durum 1 ' e geçen en kısa giriş dizisi nedir ?

b) Durum 3' ten başlayarak tekrar kendisine geçen 4 ya da daha az uzunluklu giriş dizileri nelerdir ?

c) Makine tam döngüye sahip midir ? Eğer varsa ; durum 3 ile başlayan bir tam döngüye karşılık gelen bir giriş dizisi oluşturunuz.

Çizelge 7.2. Geçiş tablosu

		z_p		s_{p+1}	
		α	β	α	β
s_p	x_p				
1	1	1	0	2	3
2	1	1	1	4	1
3	0	0	1	3	2
4	0	0	0	1	3

ÇÖZÜMLER

- 1) a) Eğer $G'(S_i) \neq 0$ ve $G(S_i) \cap G(G'(S_i)) = 0$ ise $G(S_i) = 0$ ve $G(G'(S_i)) = 0$ olur. $G'(S_i)$, $G(S_i)$ de bulunmayan S durum kümesinin elemanlarından oluştuğundan $G(S_i)$ ve $G'(S_i)$, M nin iki ayrık alt otomatasıdır.
- b) Eğer $G'(S_i) \neq 0$ ve $G(S_i) \cap G(G'(S_i)) \neq 0$ ise $G(S_i) \neq 0$ ve $G(G'(S_i)) \neq 0$ dır. Bu ise $G'(S_i)$ kümesinin en az bir elemanı S_i kümesinin elemanlarından farklıdır. Aynı zamanda $G'(S_i)$, $G(S_i)$ de bulunmayan S durum kümesinin elemanlarından oluştuğundan $G(S_i)$ ve $G'(S_i)$ sırasıyla kalıcı ve geçici alt otomatalardır.
- c) Eğer $G'(S_i) = 0$ ise yani $G'(S_i)$ nin $G(S_i)$ de bulunmayan S durum kümesinin elemanlarından oluşan hiçbir elemanı yoksa M nin ayrık alt otomata bulundurmadığı aşıkardır.

- 2) a) k $G(5,9)$
 0 $G_0(5,9) = \{5,9\}$
 1 $G_1(5,9) = \{2,3,5,7,9\}$
 2 $G_2(5,9) = \{1,2,3,5,7,8,9\}$
 3 $G_3(5,9) = \{1,2,3,5,7,8,9\} = G(5,9)$
- b) k $G(6)$
 0 $G_0(6) = \{6\}$
 1 $G_1(6) = \{4,5,6\}$
 2 $G_2(6) = \{1,2,3,4,5,6\}$
 3 $G_3(6) = \{1,2,3,4,5,6\} = G(6)$

bulunur. Aynı şekilde

$$G'(6) = \{7,8,9\}$$

bulunur. Problem 1 'e göre

$$G(6) \cap G(G'(6)) = 0$$

olduğundan $G(6)$ ayrık alt otomatadır.

Yukarıdaki algoritma ve Problem 1 deki özellikten yararlanılarak

$$G(2) = \{1,2,3\}$$

kümesinin kalıcı alt otomata olduğu görülür.

- 3) a) Herhangi uzunluklu giriş dizileriyle S_i ' ye ulaşılabilen durum kümelerini gösteren $F(S_i)$ ' nin algoritmasını oluşturalım.

S_i verilsin. $F(S_i)$ ' yi bulmak için ;

- i) $F_0(S_i) = S_i$ ve $k=1$ olsun.

ii) $F_k(S_i) = F_1(F_{k-1}(S_i))$ olarak belirlensin.

iii) a) Eğer $F_k(S_i) \neq F_{k-1}(S_i)$ ise k yı 1 arttır ve (ii) ye dön.

b) Eğer $F_k(S_i) = F_{k-1}(S_i)$ ise $F_k(S_i) = F(S_i)$

olur.

b) Oluşturduğumuz algoritmayı Problem 2 ye uyguladığımızda ;

k	$F(S_i)$
0	$F_0(S_i) = \{3\}$
1	$F_1(S_i) = \{1,3,5\}$
2	$F_2(S_i) = \{1,2,3,4,5,6\}$
3	$F_3(S_i) = \{1,2,3,4,5,6\}$

c) Benzer şekilde $G(3) = \{1,2,3\}$ ve $H(3) = \{1,2,3,4,5,6\}$ bulunur. Buna göre aşağıdaki ilişki gösterilmiş olur.

$$G(S_i) \cup F(S_i) = H(S_i)$$

4) a) A otomatası $[A]$ geçiş matrisine göre 2 ve 7 durumları geçici, 3 ve 6 durumları kalıcı, 1 durumu da ayrık durumlardır. 4, 5, ve 8 durumları geçici, kalıcı ve ayrık durum özelliklerinden hiçbirini göstermez.

$$b) G_1(5,7) = \{3,5,7,8\}$$

$$H_1(2,3) = \{2,3,4,5\}$$

bulunur.

c) A matrisindeki satır ve sütunları tekrar düzenlendiğinde $\{1,2,4,7\}$ kümesinin geçici alt otomata oluşturduğu, $\{3,5,6,8\}$ durum kümesinin ise kalıcı alt otomata oluşturduğu görülmektedir.

5) a) $[\bar{M}]$ matrisinin i . satırındaki sıfırdan farklı tek eleman $e_{ii}^{(1)}$ ise, o halde σ_i durumundan σ_i durumuna yol alan sadece bir durum vardır. Ayrıca

$$e_{ii}^{(1)} = P_{ii}^{(1)} = \pi_{ii}$$

olduğu bilinmektedir.

$$P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{u=1}^n \pi_{iu} P_{uj}^{(k)} = \sum_{u=1}^n P_{iu}^{(k)} \pi_{uj}$$

dir. Sabit için $P_{ij}^{(k+1)}$, $[\bar{M}]^{k+1}$ matrisinin i . satır elemanlarını oluşturur. Bununla beraber

sabit i için $\sum_{u=1}^n P_{iu}^{(k)} \pi_{uj}$ kümesi ; $[\bar{M}]_i^k$ matrisinin $[\bar{M}]$ matrisiyle çarpılmasıyla elde edilen satır matrislerini oluşturur.

b) Sabit bir j için (a) geçerlidir. Yani, eğer sütunda sıfırdan farklı sadece bir eleman varsa yukarıdaki tanım gereği k uzunluklu matrisin sütununda da sıfırdan farklı sadece bir eleman bulunmak zorundadır.

6) Verilen eşitliğin graf için sağlandığını gösterelim.

Graf incelendiğinde birbirinden farklı üç durumun ve beş kenarın olduğu görülmektedir. Keyfi olarak ; durum 1 'deki döngüye β_1 , durum 1 den durum 2 ' ye yol alan kenara β_2 , durum 2' den durum 3! e yol alan kenara β_3 , durum 3 'teki döngüye β_4 ve durum 3 ' ten durum 1'e yol alan kenara β_5 olarak adlandırılırsa satırları sırasıyla durum 1 , 2 ve 3 ; sütunları ise $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ve β_5 ' ten oluşan 3×5 lik bir matris elde edilir.

$$[M_a] = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$[M_a]$ matrisi iraksak kenarlardan oluşturulmuş bir matristir.

$$[M_b] = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$[M_a]$ matrisi ise yakınsak kenarlardan oluşturulmuş bir matristir.

$[M_a]$ matrisi ile $[M_b]$ matrisinin transpozisyonu çarpıldığında ;

$$[M_a][M_b]_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Gerçekten de bulunan bu matris yukarıdaki grafla verilen sonlu otomatının skeleton matrisinin kendisidir. Yani ;

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7) a) Verilen tabloya göre durum 3 ' ten durum 1' e giden 1 uzunluklu yol yoktur. İlk olarak verilen sonlu otomataya ait geçiş matrisi $[\bar{M}]$ geçiş matrisini kuralım.

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 \\ \pi_{21} & 0 & 0 & \pi_{24} \\ 0 & \pi_{32} & \pi_{33} & 0 \\ \pi_{41} & 0 & \pi_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matristen yararlanarak sonlu otomataya ait tüm basit yolların kümesini veren değiştirilmiş geçiş matrisini oluşturalım.

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 \\ \pi_{21} & 0 & 0 & \pi_{24} \\ 0 & \pi_{32} & 0 & 0 \\ \pi_{41} & 0 & \pi_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Şimdi kısmi yapı kullanılarak durum 3 ' e ait 2 uzunluklu kısmi matris oluşturalım. Aradığımız matris $[\bar{M}]_3^2$ dir. Bunun için

$$[\bar{M}]_i^k = [\bar{M}]_i^{k-1}[\bar{M}]$$

eşitliğinden yararlanalım. Buna göre

$$[\bar{M}]_3^2 = [\bar{M}]_3^1[\bar{M}]$$

yazılabilir. Burada

$$[\bar{M}]_3^1 = [0 \quad \pi_{32} \quad 0 \quad 0]$$

dir ve $[\bar{M}]$ matrisinin 3. satır elemanlarıdır.

$$\begin{aligned} [\bar{M}]_3^2 &= [\bar{M}]_3^1[\bar{M}] = [0 \quad \pi_{32} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 \\ \pi_{21} & 0 & 0 & \pi_{24} \\ 0 & \pi_{32} & \pi_{33} & 0 \\ \pi_{41} & 0 & \pi_{43} & 0 \end{bmatrix} \\ &= [\pi_{32}\pi_{21} \quad 0 \quad 0 \quad \pi_{32}\pi_{24}] \end{aligned}$$

bulunur. Gerçekten de elde edilen son matris $[\bar{M}]^2$ matrisinin 3. satırındaki elemanlardır. Buna göre durum 3'ten durum 1' e giden basit yolun en kısa giriş dizisi $\pi_{32}\pi_{21}$ elemanlarının oluşturduğu $\{\beta, \beta\}$ girişidir.

b) Durum 3'ten başlayarak tekrar kendisine dönen giriş dizilerini uzunlukları sırasıyla 1, 2, 3, ve 4 olan geçiş matrisleri oluşturarak incelediğimizde ; 1 uzunluklu giriş dizisi $\{\alpha\}$, 2 uzunluklu giriş dizisi $\{\alpha\alpha\}$, 3 uzunluklu giriş dizisi $\{\beta\beta\beta\} \vee \{\beta\alpha\beta\} \vee \{\alpha\alpha\alpha\}$ ve 4 uzunluklu giriş dizileri $\{\alpha\alpha\alpha\alpha\} \vee \{\alpha\beta\alpha\beta\} \vee \{\alpha\beta\beta\beta\}$ dir.

c) Verilen otomata tam döngüye sahiptir. Eğer durum 3' ten tekrar kendisine dönen 4 uzunluklu değiştirilmiş geçiş matrisi oluşturulduğunda $\{\beta\alpha\alpha\beta\}$ giriş dizili bir tam döngü elde edilir.

KAYNAKLAR

- Gill A., 1962. *Introduction to The Theory of Finite-State Machines*. McGraw-Hill Company, London. 6-17, 19-44.
- Anderson A. J. , 2006. *Automata Theory with Modern Applications*. Cambridge University Press.
- Çapkın A., 2009. Sonlu Sistemlerde Deneme Problemleri (Yüksek Lisans Tezi) Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi. Çanakkale
- Rosen H. K., 1995. *Discrete Mathematics and Its Applications* (3 rd. Ed). Mc Graw-Hill, 611-622 p.
- Yablonsky S. V., 1989. *Introduction to Discrete Mathematics*. Translated from Russian Mr. Publishers Moscow. 44-49.
- Harary F., 1969. *Graph Theory*. University of Michigan. Cambridge, Massachusetts (4th chap.). 32-40.
- Anderson A. J., 2004. *Discrete Mathematics with Combinatorics*. New Jersey. (2 nd ed.). 9-38 .
- Hacı Y. ve Candan M., 2010. Sonlu Otomaların Bazı Matematiksel Modelleri. 5. *Ankara Matematik Günleri* , Bildiri Özetleri Kitabı. 183.
- Hacı Y. ve Candan M., 2011. Sonlu Dinamik Sistemlerde Özel Durumları ve Minimal Yolları Belirleme Yöntemleri. 6. *Ankara Matematik Günleri* , Bildiri Özetleri Kitabı. 102.
- Wilson, R. J., 1996. *Introduction to Graph Theory*. Addison Wesley Longman Limited, Fourth Edition.
- Aksoy Y., 1996. *Boole Cebiri ve Lojik Devre Sentezi*. YTÜ İstanbul. 219-272.
- Weisstein E. W. (February 12, 2006.) *Dynamical Systems*. Retrived February 13, 2006, from <http://mathworld.wolfram.com/DynamicalSystem.html>.
- Burden R. L. ve Faires J. D., 2001. *Numerical Analysis (7th ed.)*. Brooks/Cole, Pacific Grove, Australia. 498–516, 611–613 .

ÇİZELGELER

	Sayfa No
Çizelge 2.1 Şekil 2.19 'daki grafların matrisi.....	23
Çizelge 3.1 Şekil 3.1 sistemi için g_k fonksiyonlar	34
Çizelge 4.1 Geçiş tablosu.....	37
Çizelge 4.2 Geçiş tablosu örneği.....	37
Çizelge 5.1 Otomata A3	43
Çizelge 5.2 Algoritma 5.1 'nin gösterimi	44
Çizelge 5.3 Algoritma 5.1 'nin gösterimi.....	46
Çizelge 6.1 A4 otomatası.....	52
Çizelge 7.1. Geçiş tablosu.....	62
Çizelge 7.2. Geçiş tablosu	64

ŞEKİLLER

Sayfa

Şekil 2.1 : Graf.....	10
Şekil 2.2. Graf	11
Şekil 2.3 Basit graf	12
Şekil2.4 Multigraf	13
Şekil 2.5 Ağırlıklı graf.....	13
Şekil 2.6 Pseudo graf.....	13
Şekil 2.7. 3-lü düzgün graf	14
Şekil 2.8. K_n tam grafi	16
Şekil 2.9. C_n grafi.....	16
Şekil 2.10. İki parçalı graf.....	17
Şekil2.11. Graflar.....	17
Şekil 2.12. İki parçalı tam graf.....	17
Şekil 2.13 Alt graf.....	18
Şekil 2.14. Tek dereceli graf	19
Şekil 2.15. Könisberg Köprüsü	20
Şekil 2.16. Köprünün grafla gösterimi	20
Şekil 2.17. Düzlemsel graf	21
Şekil 2.18. Hamilton grafi	22
Şekil 2.19. İzomorfik graflar	23
Şekil 2.20. G Grafi	24
Şekil 2. 21. Graf	25
Şekil 2.22.Graf	26
Şekil 2.23.Yönlü graf	27
Şekil 3.1 Ağ örneği	32
Şekil 4.1 Geçiş grafi.....	39
Şekil 4.2 Şekil 4.3.Geçiş grafi örneği ve A1 otomatası için geçiş grafi	40
Şekil 5.1 Özel kenarlar.....	41
Şekil 5.2 Şekil 5.3.Otomata A2 ve otomata A3.....	42
Şekil 6.1 $\pi_{i_1} \pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{k-1} j}$ yolu.....	49
Şekil 6.2. A4 otomatası için geçiş grafi	52
Şekil 7.1. Geçiş grafi.....	64

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Muhammet CANDAN

Doğum Yeri: İzmir

Doğum Tarihi: 10/10/1985

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edeb. Fak. Matematik Bölümü.2008

Yüksek Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi. 2011

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLER

5. Ankara Matematik Günleri Bildirili Katılım 2010, TOBB, Ankara

6. Ankara Matematik Günleri Bildirili Katılım 2011, Hacettepe Üni. Ankara

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi (Araştırma Görevlisi)

2009 – ...

İLETİŞİM

E-Posta Adresi: mcandan@comu.edu.tr