T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VARYANS BİLEŞENLERİ İÇİN MİNİMUM KARESEL TAHMİN YÖNTEMLERİ

Ahmet MOLLAOĞULLARI

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **16/06/2011**

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

AHMET MOLLAOĞULLARI tarafından **PROF. DR. BİLGEHAN GÜVEN** yönetiminde hazırlanan "**VARYANS BİLEŞENLERİ İÇİN MİNİMUM KARESEL TAHMİN YÖNTEMLERİ"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN</u>

Danışman

<u>Prof. Dr. Yakup HACI</u>	<u>Yrd. Doç. Dr. Hasan DALGIN</u>
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Sıra No :

Tez Savunma Tarihi: 16/06/2011

<u>Prof. Dr. İsmet KAYA</u>

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Ahmet MOLLAOĞULLARI

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN'e, çalışma süresince ve hayatımın her döneminde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet MOLLAOĞULLARI

ÖZET

VARYANS BİLEŞENLERİ İÇİN MİNİMUM KARESEL TAHMİN YÖNTEMLERİ

Ahmet MOLLAOĞULLARI

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN

16/06/2011, 41

Bu çalışmada varyans bileşenleri açıklanıp, bu varyans bileşenlerin tahminine yönelik MINQUE yöntemi ve bu yöntemi modifiye ederek geliştirilen MINQE yöntemi incelenmiştir. Bu yöntemlerin teorisi, istatistikte sık kullanılan; genel ortalamalar modeli, tek yönlü varyans analizi modeli, iki-yönlü varyans analizi modeli ve regresyon analizi modelleri üzerinde verilip bu modeller için sayısal örneklerle de uygulamalar yapılmıştır.

Sayısal örnekler için SPSS, MİNİTAB ve MATLAB paket programları kullanılmıştır.

Anahtar sözcükler: MINQUE, MINQE, Varyans Bileşenleri

ABSTRACT

MINIMUM QUADRATIC UNBIASED ESTIMATON METHODS FOR VARIANCE COMPONENTS

Ahmet MOLLAOĞULLARI

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School

Mathematic Thesis, Master of Science

Advisor : Prof. Dr. Bilgehan GÜVEN

16/06/2011, 41

In this study, variance components are explained, Minimum Quadratic Unbiased Estimation (MINQUE) method and its modifyied method; Minimum Quadratic Estimation (MINQE) are derived. These two methods are applied to some common statistical linear models: The common mean model, the one-way analysis (ANOVA) model, the two-way ANOVA model and the simple linear resression model

For Numerical applications; SPSS, MINITAB and MATLAB package programs are used.

Keywords: MINQUE, MINQE, Variance Components

İÇERİK **Sayfa**

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU ………………………………………………………... ii

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI…………………………………………… iii

TEŞEKKÜR ……………………………………………………………………….. iv

ÖZET ……………………………………………………………………………… v

ABSTRACT ……………………………………………………………………….. vi

BÖLÜM 1 – GİRİŞ ………………………………………………………………….. 1

BÖLÜM 2-GENEL BİLGİLER……………………………………………………. 2

2.1. Genel Ortalama Modeli…………..…………………………………… 3

2.2. Basit Doğrusal Regresyon Modeli…………………………………… 4

2.3. Tek Yönlü Varyans Analizi Modeli…………………………………... 4

2.4. İki Yönlü Varyans Analizi Modeli…………………………………… 5

BÖLÜM 3-MINQUE METODU VE MODİFİYESİ……………………………… 7

3.1. MINQUE Metodu …………..……………………………………… 7

3.2. Önsel (Priori) Değerler ile MINQUE Metodu……………………….. 12

3.3. MINQE Metodu…………..………………………………………… 14

3.4. Önsel (Priori) Değerler ile MINQUE Metodu……………………….. 16

3.5. MINQUE Metodu ile Kovaryans Matrisinin Tahmini……………… 20

BÖLÜM 4-YÖNTEMLERİN UYGULANMASI………………………………….. 22

4.1. MINQUE Metodununun Bazı Modellere Uygulanması…………….. 22

4.2. MINQE Metodununun Bazı Modellere Uygulanması……………… 25

4.3 Önsel (Priori) Değerler ile MINQUE Metodunun Bazı Modellere Uygulanması………………………………………………………………………… 27

4.4. Yöntemler için Sayısal Örnekler…………………………………….. 31

KAYNAKLAR.. **39**

Çizelgeler.. **I**

Şekiller……………………………………………………………………….. **II**

Özgeçmiş………………………………………..……………………………........ **III**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Modern istatistiksel metotların geliştirilmesi yaklaşık 70 yılı aşkın süredir devam etmektedir. Bu metotların birçoğu, günlük hayatta karşımıza çıkan problemlerin çözülmesi, problemlere ilişkin istatistiksel analizlerinin en iyi şekilde yorumlanıp, en doğru kararı vermeye yöneliktir. Bu karar mekanizması için en önemli etmen, en etkin faktörlerden biri de incelenilen problem veya yapılan araştırmadaki hata veya varyasyonun kaynağının ne olduğu, varyasyonun ne kadarının hangi kaynaktan dolayı ortaya çıktığıdır. İstatistikte etkisi araştırılan faktörlerin seviyelerinin seçimine bağlı olarak; sabit etkili, rastgele etkili ve karışık etkili olmak üzere üç model söz konusudur. Sabit etkili modellerde muamele etkilerinin karşılaştırılması söz konusudur. Rastgele ve karışık modellerde ise esas olarak varyans bileşenlerinin tahmin edilmesi ile ilgilenilir (Mondal 2000; Sahai ve Ojeda, 2005; Searle ve ark., 2006; Rash and Masata, 2006). Varyans bileşenlerinin tahmin edilmesi, toplam varyasyon içerisinde her bir varyasyon kaynağının payının belirlenmesi bakımından oldukça önemlidir (Falconer, 1989). Bu amaçla En Küçük Kareler (ANOVA), En Yüksek Olabilirlik (ML), Kısıtlanmış En Yüksek Olabilirlik (REML), HENDERSON I, II, III metotları, Bayesian metodu ve Minimum Norm Karesel Yansız Tahmin (MINQUE) vb gibi pek çok metot geliştirilmiştir (Eisenhart, 1947; Crump, 1951; Henderson, 1983; Hartley ve Rao, 1967; Rao, 1970; Harville, 1977; Searle ve ark., 1992; Kelly and Mathew, 1993; Shai ve Ojeda, 2004 ve 2005).

Ancak söz konusu metotlar, her deneme koşulunda varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde güvenilir sonuçlar verememektedirler. Mesela ANOVA yöntemi her ne kadar varyans bileşenlerinin tahmin edilmesi amacıyla ilk kullanılan yöntem olsa da, bu yöntem birçok durumda varyans bileşenlerini negatif olarak tahmin etmektedir (Thompson, 1962; Searle, 1971). Halbuki varyans, tanımı gereğince negatif olamaz. Bundan dolayı varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde ANOVA yönteminin kullanılması pek tercih edilmemektedir. Bu tez çalışmasında MINQUE yöntemi ile birlikte, varyans bileşenlerinin negatif tahminlerinden kurtulmak amacıyla MINQUE yöntemine alternatif olarak geliştirilen MINQE yönteminin teorik temelleri üzerinde durulacak ve bunlara ilişkin bazı uygulamalar yapılacaktır.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Bütün lineer modeller için geçerli olan aşağıdaki modeli göz önüne alalım.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{2.1}$$

(2.1) denkleminde $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{U_1\xi_1} + \boldsymbol{U_2\xi_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k\xi_k}$ yazıldığında

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U_1\xi_1} + \boldsymbol{U_2\xi_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k\xi_k} \tag{2.2}$$

şekline dönüşür. Burada

$(\mathbf{Y})_{\mathbf{N\,x\,1}}$: Gözlemlerin vektörü

$(\boldsymbol{\beta})_{\mathbf{p\,x\,1}}$: Sabit etkiler vektörü

$(\mathbf{U_i})_{\mathbf{N\,x\,c_i}}$: ξ_i vektörleri için tasarım matrisi $\quad i = 1,2,\dots,k$

$(\boldsymbol{\xi_i})_{\boldsymbol{c_i\,x\,1}}$: Rassal etki vektörü $\quad i = 1,2,\dots,k$

dir. Daha sonra

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_1} \ \vdots\ \boldsymbol{U_2} \ \vdots \cdots \vdots\ \boldsymbol{U_k})$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_1} \vdots\ \boldsymbol{\xi_2}\ \vdots\ \dots\ \vdots \boldsymbol{\xi_k})'$$

olarak tanımlanırsa (1.2) denklemi

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U\xi} \tag{2.3}$$

şeklinde olur. $\boldsymbol{\xi_i}$ vektörleri rassal etki vektörleri olduğundan

$$\boldsymbol{\xi_i} \sim \left(0\,,\ \boldsymbol{\sigma_i}^2 \boldsymbol{I_{c_i\,x\,c_i}}\right) \ i = 1,2,3,\dots,k \ \text{ ve } \ Cov\left(\boldsymbol{\xi_i}\,,\ \boldsymbol{\xi_j}\right) = 0 \quad \forall\ i \neq j$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} E\,(\boldsymbol{Y}) &= E(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U\xi}) \\ &= \boldsymbol{X}\,E(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{U}E(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \boldsymbol{X\beta} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} Var\,(\boldsymbol{Y}) &= Var(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U\xi}) \\ &= Var\,(\boldsymbol{U_1\xi_1} + \boldsymbol{U_2\xi_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k\xi_k}) \\ &= \boldsymbol{U}_1 Var(\boldsymbol{\xi_1})\,\boldsymbol{U_1}' + \boldsymbol{U_2} Var(\boldsymbol{\xi_2})\,\boldsymbol{U_2}' + \cdots + \boldsymbol{U_k} Var(\boldsymbol{\xi_k})\,\boldsymbol{U_k}' \end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{U_1}\sigma_1{}^2\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{U_1}' + \boldsymbol{U_2}\sigma_2{}^2\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{U_2}' + \cdots + \boldsymbol{U_k}\sigma_k{}^2\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{U_k}'$$
$$= \sigma_1{}^2\,\boldsymbol{U_1}\boldsymbol{U_1}' + \sigma_2{}^2\,\boldsymbol{U_2}\boldsymbol{U_2}' + \cdots + \sigma_k{}^2\,\boldsymbol{U_k}\boldsymbol{U_k}' \qquad (2.5)$$

eşitlikleri elde edilir. Daha sonra (2.5) de $\boldsymbol{U_i}\boldsymbol{U_i}' = \boldsymbol{V_i} \quad i = 1,2,\dots,k$ yazarak

$$Var\,(\boldsymbol{Y}) = \sigma_1{}^2\,\boldsymbol{V_1} + \sigma_2{}^2\,\boldsymbol{V_2} + \cdots \sigma_k{}^2\,\boldsymbol{V_k} \qquad (2.6)$$

eşitliği elde edilir.

Not: Bu çalışmada sıklıkla kullanılan $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ ve $\boldsymbol{V_i}$ matrisleri aşağıdaki gibidir:

$\boldsymbol{V_i} = \boldsymbol{U_i}\boldsymbol{U_i}' \qquad i = 1,2,\dots,k$

$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_1} \vdots \boldsymbol{U_2} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{U_k})$

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'$

Tanım 1.1 : (2.6) eşitliğindeki $\sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, \dots, \sigma_k{}^2$ parametrelerine varyans bileşenleri denir.

Lineer modellere örnek olarak aşağıdaki modellere değineceğiz:

2.1 Genel Ortalama Modeli

Bu model

$$Y_{ij} = \beta + \mathcal{E}_{ij} \qquad i = 1,2,\dots,t \qquad j = 1,2,\dots,n_i \qquad (2.1.1)$$

şeklindedir. $\mathcal{E}_{ij}$ ortalaması 0 varyansı $\sigma_{\mathcal{E}}{}^2$ olarak varsayılan bağımsız normal değişkenler olarak varsayılmıştır. Y_{ij} i-ninci sınıftaki j-ninci gözlem, β gözlemlerin ortalamasını ifade eden bilinmeyen parameter ve $\mathcal{E}_{ij}$ i-ninci sınıftaki j-ninci hata terimini ifade eder.

Modelin matris gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \qquad (2.1.2)$$

Burada $\boldsymbol{Y} = \left(Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1}, \dots, Y_{tn_t}\right)'$ ve $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{1_N}$ şeklindedir. Hata vektörü olan $\boldsymbol{\mathcal{E}}$**,** gözlemler vektörü olan **Y** ye benzer şekilde tanımlanır.

2.2 Basit Doğrusal Regresyon Modeli

Bu model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \mathcal{E}_i \quad i = 1,2, \dots n \tag{2.2.1}$$

şeklindedir. $\mathcal{E}_i$ ortalaması 0 varyansı $\sigma_{\mathcal{E}}{}^2$ olan normal değişken olarak varsayılmıştır. Y_i i-ninci bağımlı değişken x_i i-ninci bağımsız değişken $\mathcal{E}_i$ i-ninci hata terimini β_0 ve β_1 ise bilinmeyen parametreleri ifade eder.

Modelin matris gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{2.2.2}$$

Burada $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{1_N} \ \ \boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0 \ \ \beta_1)'$ $\boldsymbol{U_1} = \boldsymbol{I_N}$ şeklindedir. Hata vektörü olan $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, gözlemler vektörü olan **Y** ye benzer şekilde tanımlanır.

2.3 Tek Yönlü Varyans Analizi Modeli

Bu model

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \mathcal{E}_{ij} \quad i = 1,2, \dots, t \quad j = 1,2, \dots, n_i \tag{2.3.1}$$

şeklindedir. α_i ortalaması 0 varyansı σ_α^2 olan normal değişken, $\mathcal{E}_{ij}$ ortalaması 0 varyansı $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ olan normal değişkenler ve $\forall \ i \neq j, i' \neq j'$ için $Cov(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, $Cov(\mathcal{E}_{ij}, \mathcal{E}_{i'j'}) = 0$ ve $Cov(\alpha_i, \mathcal{E}_{ij}) = 0$ varsayımları vardır. Y_{ij} i-ninci sınıftaki j-ninci gözlem, α_i i-ninci sınıfın etkisini ifade eden bilinmeyen parametre, μ gözlemlerin ortalamasını ifade eden bilinmeyen parametre ve $\mathcal{E}_{ij}$ i-ninci sınıftaki j-ninci hata terimini ifade eder.

Modelin matris gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{1}_N \mu + \boldsymbol{diag}\{\boldsymbol{1}_{n_i}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{\xi_1} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{2.3.2}$$

Burada $\boldsymbol{Y} = (Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1}, \dots, Y_{tn_t})'$ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{1_N}$ $\boldsymbol{\xi_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)'$

$\boldsymbol{U_1} = \boldsymbol{diag}\{\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_i}}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{t}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_t}} \end{bmatrix}$ ve hata vektörü olan $\boldsymbol{\mathcal{E}}$**,** gözlemler vektörü olan **Y** ye benzer şekilde tanımlanır.

2.4 İki-Yönlü Varyans Analizi Modeli

Bu model

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \mathcal{E}_{ijk} \quad i = 1,2,\dots,a \quad j = 1,2,\dots,b \quad k = 1,2,\dots,n_{ij} \tag{2.4.1}$$

şeklindedir. α_i, β_j, γ_{ij} ve $\mathcal{E}_{ijk}$ ortalamaları 0 varyansları sırasıyla σ_α^2, σ_β^2, σ_γ^2 ve $\sigma_\mathcal{E}^2$ olan normal değişkenler ve bu normal değişkenlerin hem birbirlerinden hem de kendi aralarında bağımsız olduğu varsayımları vardır.

Modelin matris gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{1_N}\mu + \boldsymbol{diag}\{\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{i+}}}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\xi_1} + \boldsymbol{r}\left\{\boldsymbol{diag}\left\{1_{n_{ij}}\right\}_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{b}}\right\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\xi_2} + \boldsymbol{diag}\left\{\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{ij}}}\right\}_{\boldsymbol{i,j=1}}^{\substack{\boldsymbol{i=a}\\ \boldsymbol{j=b}}}\boldsymbol{\xi_3} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{2.4.2}$$

Burada $\boldsymbol{Y} = \left(Y_{111}, Y_{112}, \dots, Y_{11n_{11}}, \dots, Y_{abn_{ab}}\right)'$ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{1_N}$ $\boldsymbol{\xi_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a)'$

$\boldsymbol{\xi_2} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b)'$ $\boldsymbol{\xi_3} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{ab})'$ şeklinde olup $\boldsymbol{U_1} = \boldsymbol{diag}\{\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{i+}}}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{a}}$

$\boldsymbol{U_3} = \boldsymbol{diag}\left\{\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{ij}}}\right\}_{\boldsymbol{i,j=1}}^{\substack{\boldsymbol{i=a}\\ \boldsymbol{j=b}}}$ matrisleri $\boldsymbol{diag}\{\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_i}}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{t}}$ matrislerine benzer şekilde tanımlanır ve

$$\boldsymbol{U_2} = \boldsymbol{r}\left\{\boldsymbol{diag}\left\{1_{n_{ij}}\right\}_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{b}}\right\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{12}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{1b}}} \\ \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{21}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{22}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{2b}}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{a1}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{a2}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n_{ab}}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca hata vektörü ε , gözlem vektörü olan Y ye benzer şekilde tanımlanır.

BÖLÜM 3

MINQUE METODU VE MODİFİYESİ

Bu bölümde lineer modellerdeki varyans bileşenlerini tahmin etmede kullanılan MINQUE metodu ve bu metodu modifiye ederek geliştirilen diğer metodların teorisi incelenecektir.

3.1 MINQUE Metodu

C. R. Rao (1970, 1971a, 1971b) , varyans bileşenlerinin

$$p_1\sigma_1{}^2 + p_2\sigma_2{}^2 + \cdots + p_k\sigma_k{}^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i\,\sigma_i{}^2 \qquad (3.1.1)$$

şeklindeki, lineer fonksiyonunun tahminini **Y** gözlem vektörünün $\boldsymbol{Y'AY}$ gibi bir kuadratik fonksiyonu ile hesaplanabileceğini göstermiştir. Bunu yapmak için de simetrik **A** matrisi için aşağıdaki şartları belirlemiştir:

i) β parametresinin dönüşmesi altında değişmezlik (Translation invariant)

β parametresi yerine $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta_0}$ şeklinde $\boldsymbol{\gamma}$ parametresini düşünelim. Bu durumda (2.3) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta_0} &= \boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{X\beta_0} + \boldsymbol{U\xi} \\ &= \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta_0}) + \boldsymbol{U\xi} \\ &= \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{U\xi} \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

şekline dönüşür. Görüldüğü gibi $\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta_0}$ formu **Y** nin farklı bir gösterimidir. O halde **Y** yerine $\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta_0}$ yazıldığında da

$$(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta_0})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta_0}) = \boldsymbol{Y'AY} \qquad (3.1.3)$$

sağlaması gerekir. Buradan;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y'AY} &= \left(\boldsymbol{Y'} - \boldsymbol{\beta_0}'\boldsymbol{X'}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta_0}) \\ &= \boldsymbol{Y'AY} - \boldsymbol{Y'AX\beta_0} - \boldsymbol{\beta_0}'\boldsymbol{X'AY} + \boldsymbol{\beta_0}'\boldsymbol{X'AX\beta_0}\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{Y'AY} - 2\boldsymbol{\beta_0}'\boldsymbol{X'AY} + \boldsymbol{\beta_0}'\boldsymbol{X'AX\beta_0} \qquad (3.1.4)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için ise

$$\boldsymbol{AX} = 0 \qquad (3.1.5)$$

olması gereklidir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y'AY} &= (\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U\xi})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U\xi}) \\
&= (\boldsymbol{\beta'X'} + \boldsymbol{\xi'U'})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U\xi}) \\
&= \boldsymbol{\beta'X'AX\beta} + \boldsymbol{\beta'X'AU\xi} + \boldsymbol{\xi'U'AX\beta} + \boldsymbol{\xi'U'AU\xi} \\
&= \boldsymbol{\beta'X'AX\beta} + 2\boldsymbol{\beta'X'AU\xi} + \boldsymbol{\xi'U'AU\xi} \\
&= \boldsymbol{\xi'U'AU\xi} \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

ii) Yansızlık (unbiasedness)

Bulacağımız tahmin edicinin yansız olması istenildiği için

$$E(\boldsymbol{Y'AY}) = \sum_{i=1}^{k} p_i\, \sigma_i^2 \qquad (3.1.7)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir.

Teorem 3.1.1: Rastgele bir ξ değişkeni için $\boldsymbol{\xi} \sim (\mu, \sigma^2\boldsymbol{I_N})$ ve $\boldsymbol{A_{NxN}}$ matrisi için

$E(\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{A\xi}) = E(\boldsymbol{\xi})'\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{\xi}) + tr[\boldsymbol{A}Var(\boldsymbol{\xi})]$ dir.

İspat :

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{A\xi}) &= E[tr(\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{A\xi})] = E[tr(\boldsymbol{A\xi\xi})] \\
&= tr[E(\boldsymbol{A\xi\xi}')] = tr[\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{\xi\xi}')] \\
&= tr\left[\boldsymbol{A}\,[Var(\boldsymbol{\xi}) + E(\boldsymbol{\xi})E(\boldsymbol{\xi})']\right] \\
&= tr[\boldsymbol{A}Var(\boldsymbol{\xi})] + tr[E(\boldsymbol{\xi})'\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{\xi})] \\
&= E(\boldsymbol{\xi})'\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{\xi}) + tr[\boldsymbol{A}Var(\boldsymbol{\xi})] \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

O halde (2.6) denklemi ve Teorem 3.1.1 den

$$E(\boldsymbol{Y'AY}) = \boldsymbol{\beta'X'AX\beta} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 tr[\boldsymbol{AV_i}] \qquad (3.1.8)$$

eşitliği vardır. $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ şartından dolayı (3.1.7) denklemi

$$E(\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{AY})=\sum_{i=1}^{k}{\sigma_i}^2 tr[\boldsymbol{AV_i}] \tag{3.1.9}$$

olur. (3.1.6)eşitliğinden dolayı $\sum_{i=1}^{k}{\sigma_i}^2 tr[\boldsymbol{AV_i}]=\sum_{i=1}^{k}p_i\,{\sigma_i}^2$ olmalıdır. Bu da

$$\mathrm{tr}[\boldsymbol{AV_i}]=p_i\,,\quad i=1,2,\dots,k \tag{3.1.10}$$

olmasını gerektirir.

iii) Minimum Norm

Eğer gözlemlenemeyen hipotezsel değişken olan $\boldsymbol{\xi}$ bilinirse $\sum_{i=1}^{k}p_i\,{\sigma_i}^2$ için doğal tahmin edici olarak

$$\frac{p_1}{c_1}\boldsymbol{\xi_1}'\boldsymbol{\xi_1}+\frac{p_2}{c_2}\boldsymbol{\xi_2}'\boldsymbol{\xi_2}+\cdots+\frac{p_k}{c_k}\boldsymbol{\xi_k}'\boldsymbol{\xi_k}=\boldsymbol{\xi}'\Delta\boldsymbol{\xi} \tag{3.1.11}$$

seçilebilir. Burada $\Delta=\boldsymbol{diag}\left(\frac{p_1}{c_1}\boldsymbol{I_{c_1}},\frac{p_2}{c_2}\boldsymbol{I_{c_2}},\dots,\frac{p_k}{c_k}\boldsymbol{I_{c_k}}\right)$ dir. Gerçekten

$$\begin{aligned}E\left(\frac{p_1}{c_1}\boldsymbol{\xi_1}'\boldsymbol{\xi_1}+\frac{p_2}{c_2}\boldsymbol{\xi_2}'\boldsymbol{\xi_2}+\cdots+\frac{p_k}{c_k}\boldsymbol{\xi_k}'\boldsymbol{\xi_k}\right)&=\frac{p_1}{c_1}E\left(\boldsymbol{\xi_1}'\boldsymbol{\xi_1}\right)+\frac{p_2}{c_2}E\left(\boldsymbol{\xi_2}'\boldsymbol{\xi_2}\right)+\cdots+\frac{p_k}{c_k}E\left(\boldsymbol{\xi_k}'\boldsymbol{\xi_k}\right)\\&=\frac{p_1}{c_1}\,c_1{\sigma_1}^2+\frac{p_2}{c_2}\,c_2{\sigma_2}^2+\cdots+\frac{p_k}{c_k}\,c_k{\sigma_1}^2\\&=p_1{\sigma_1}^2+p_2{\sigma_2}^2+\cdots+p_k{\sigma_k}^2\\&=\sum_{i=1}^{k}p_i\,{\sigma_i}^2\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

olduğundan $\boldsymbol{\xi}'\Delta\boldsymbol{\xi}$ yansız doğal tahmin edicidir**.** O halde $\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{U}'\boldsymbol{AU\xi}$ ile doğal tahmin edici arasındaki fark

$$\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{U}'\boldsymbol{AU\xi}-\boldsymbol{\xi}'\Delta\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}'(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{AU}-\Delta)\boldsymbol{\xi} \tag{3.1.13}$$

şeklinde olur. Şu durumda problem bu farkı minimum yapmaktır. Bunun için de $\left\|\boldsymbol{U}'\boldsymbol{AU}-\Delta\right\|$ normunu minimalize etmek gerekir. Bunun için de Euclidean Normunu K matrisi için

$$\|\boldsymbol{K}\| = \sqrt{tr(\boldsymbol{K}'\boldsymbol{K})}$$

şeklinde alırsak

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta\right\|^2 &= tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta)'(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta)\\ &= tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta)(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta)\\ &= tr[(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\Delta - \Delta\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} + \Delta\Delta]\\ &= tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \boldsymbol{2}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\Delta + \Delta\Delta) \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

elde edilir. Ayrıca $tr[\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{i}}] = p_i$ şartını da düşünülürse

$$\begin{aligned} tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\Delta) = tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\Delta\boldsymbol{U}') &= tr\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{c_i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}}{}' = \sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{c_i}tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{i}}) = \sum_{i=1}^{k}\frac{{p_i}^2}{c_i}\\ &= tr\Delta\Delta \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

buluruz.O halde (3.1.14) denklemi

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta\right\|^2 &= tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}) - tr(\Delta\Delta) = tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}') - tr(\Delta\Delta)\\ &= tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}) - tr(\Delta\Delta)\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

halini alır. $tr(\Delta\Delta)$ ifadesi bilindiği için, problem $tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V})$ ifadesini minimum yapan **A** matrisini bulmaya dönüşür.

Teorem 3.1.2 (C. R. Rao 1971) :

A matrisi simetrik bir matris, V matrisi de simetrik ve tersinir bir matris olsun. Bu durumda

$tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V})$ ifadesinin $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = 0$ ve $tr[\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{i}}] = p_i$ şartalrı altında minumum değeri

$$\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{R} \tag{3.1.17}$$

olduğunda elde edilir. Burada

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}}{}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}$

$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{v}}$

$\boldsymbol{P_v} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}$

dir. Ayrıca λ_j çarpanları $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)'$ $\boldsymbol{S} = tr(\boldsymbol{RV_iRV_j})$ $i, j = 1,2, \dots, k$

$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$ ile birlikte $\boldsymbol{S\lambda} = \boldsymbol{p}$ denklemi çözülerek bulunur. ■

O halde $\sum_{i=1}^{k} p_i\, \sigma_i^2$ nin MINQUE tahmin edicisini

$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$, $\boldsymbol{\hat{\sigma}^2} = (\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_k^2)'$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)'$,$u_i = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V_i}\boldsymbol{V}^{-1}$

$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Q_v Y}$ şeklindeki gösterimler yardımıyla;

$$\widehat{\sum_{\iota=1}^{k} p_\iota\, \sigma_\iota^2} = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{\hat{\sigma}^2} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{AY} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{RV_iR}'\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V_i}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Q_v Y}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{e}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V_i}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u} \tag{3.1.18}$$

olarak elde edilir. Bu denklem düzenlenerek;

$$\boldsymbol{\hat{\sigma}^2} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u} \tag{3.1.19}$$

eşitliği elde edilir.

MINQUE yöntemi ile bulunan tahmin ediciler

a) Yansızdır

b) En küçük normludur

$c)\ Var(Y'AY) = V\ (\xi'U'AU\xi)$

$$= \sum \sigma_i^4 \gamma_i\, tr(AV_iAV_i) + 2 \sum\sum \sigma_i^2 \sigma_j^2 tr(AV_iAV_j)$$

$$= \sum \sigma_i^4 \gamma_i\, tr(AV_iAV_i) + 2\, tr((A(\sigma_1^2 V_1 + \cdots \sigma_k^2 V_k))^2) \quad \text{dir.}$$

Burada

$$\gamma_i = \frac{E(\xi_i^4)}{\sigma^4} - 3$$

eşitliğiyle verilen ifadeye kurtosis (basıklık) denir. Eğer değişkenler normal dağılımdan gelirse

$$\frac{E\left({\xi_i}^4\right)}{\sigma^4} = 3$$

olduğundan $\gamma_i = 0$ olur. Bundan dolayı normal dağılımdan gelen değişkenler için MINQUE tahmin değerleri MIVQUE (Minimum variance quadratic unbiased estimation) tahmin değerlerine yaklaşır.

Bu çalışmada yapılan uygulamalarda elde edilen tahmin değerleri, normal dağılımdan gelen verilerden elde edildiği için bu tahmin ediciler MIVQUE olarak adlandırılacaktır.

3.2. Önsel (Priori) değerler ile MINQUE Metodu

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ değerleri $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ nın daha önceki çalışmalarda elde edilen önsel değerleri olsun. $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U_1\xi_1} + \boldsymbol{U_2\xi_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k\xi_k}$ denkleminde

$\boldsymbol{\xi_i} = \alpha_i \boldsymbol{\eta_i}$ $\quad i = 1,2,\dots,k$ yazılırsa

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\alpha_1 U_1 \eta_1} + \boldsymbol{\alpha_2 U_2 \eta_2} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_k U_k \eta_k} \tag{3.2.1}$$

elde edilir. Daha sonra $\alpha_i \boldsymbol{U_i} = \boldsymbol{W_i}$ $i = 1,2,\dots,k$ yazıp düzenlenirse

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{W_1\eta_1} + \boldsymbol{W_2\eta_2} + \cdots + \boldsymbol{W_k\eta_k} \tag{3.2.2}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} Var\,(\boldsymbol{Y}) &= Var(\boldsymbol{W_1\eta_1} + \boldsymbol{W_2\eta_2} + \cdots + \boldsymbol{W_k\eta_k}) \\ &= \boldsymbol{W_1} Var(\boldsymbol{\eta_1}) \boldsymbol{W_1}' + \boldsymbol{W_2} Var(\boldsymbol{\eta_2}) \boldsymbol{W_1}' + \cdots + \boldsymbol{W_k} Var(\boldsymbol{\eta_k}) \boldsymbol{W_k}' \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$Var(\boldsymbol{\eta_i}) = Var\left(\frac{\boldsymbol{\xi_i}}{\alpha_i}\right) = \frac{1}{{\alpha_i}^2} Var(\boldsymbol{\xi_i}) = \frac{{\sigma_i}^2}{{\alpha_i}^2} \boldsymbol{I_{c_i}}$ yazılarak

$$Var(\boldsymbol{Y}) = \frac{{\sigma_1}^2}{{\alpha_1}^2} \boldsymbol{W_1 W_1}' + \frac{{\sigma_2}^2}{{\alpha_2}^2} \boldsymbol{W_2 W_2}' + \cdots + \frac{{\sigma_k}^2}{{\alpha_k}^2} \boldsymbol{W_k W_k}' \tag{3.2.4}$$

elde edilir. Bu denklemi $\frac{{\sigma_i}^2}{{\alpha_i}^2} = {\gamma_i}^2$ ve $\boldsymbol{W_i}\boldsymbol{W_i}' = \boldsymbol{T_i}$ $\ i = 1,2,\dots,k$ ile düzenlersek

$$Var(\boldsymbol{Y}) = {\gamma_1}^2\boldsymbol{T_1} + {\gamma_2}^2\boldsymbol{T_2} + \cdots + {\gamma_k}^2\boldsymbol{T_k} \tag{3.2.5}$$

elde edilir. Bu modeldeki $({\gamma_1}^2, {\gamma_2}^2, \dots, {\gamma_k}^2)$ varyans bileşenlerinin $\sum q_i{\gamma_i}^2$ lineer fonksiyonunun MINQUE tahmin edicisi, $\mathbf{Y}$ gözlem fonksiyonunun $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ gibi bir karesel (quadratic) formuyla hesaplanabilir.

Modeli $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{W\eta}$ yazıp $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ ve $\mathrm{tr}(\mathbf{AT_i}) = q_i$ şartlarıyla birlikte düşünelim. Bu şartlar altında $\sum q_i\hat{\gamma}_i^2 = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{AY}$ olacak şekildeki önerilen tahmin edici $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{AY} = \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{W}'\boldsymbol{AW\eta}$ olur. Fakat doğal tahmin edici

$$\frac{q_1}{c_1}\boldsymbol{\eta_1}'\boldsymbol{\eta_1} + \frac{q_2}{c_2}\boldsymbol{\eta_2}'\boldsymbol{\eta_2} + \cdots + \frac{q_k}{c_k}\boldsymbol{\eta_k}'\boldsymbol{\eta_k} = \boldsymbol{\eta}'\Delta\boldsymbol{\eta} \tag{3.2.6}$$

şeklinde olduğundan önerilen tahmin edici ile arasındaki fark $\boldsymbol{\eta}'(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{AW} - \Delta)\boldsymbol{\eta}$ olur. $\boldsymbol{W}'\boldsymbol{AW} - \Delta$ ifadesini Euclidian Normunu kullanarak bu farkı minimalize eden A matrisini bulunabilir. $\left\|\boldsymbol{W}'\boldsymbol{AW} - \Delta\right\|^{\mathbf{2}} = tr\boldsymbol{ATAT} - tr\Delta\Delta$ olduğundan $tr\boldsymbol{ATAT}$ ifadesi için Teorem 3.1.2 den yararlanılarak aşağıdakiler yazılabilir:

$tr\boldsymbol{ATAT}$ ifadesinin $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ ve $\mathrm{tr}(\mathbf{AT_i}) = q_i$ şartları altında minimum değeri

$$\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\boldsymbol{RV_jR}$$

olduğunda elde edilir. Burada

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T^{-1}Q_T} = \boldsymbol{Q_T}'\boldsymbol{T^{-1}}$$

$$\boldsymbol{Q_T} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_T}$$

$$\boldsymbol{P_T} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T^{-1}X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T^{-1}}$$

dir. Ayrıca λ_j çarpanları $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)'$ $\ \boldsymbol{S} = \left(\boldsymbol{s_{ij}}\right) = tr\left(\boldsymbol{RT_iRT_j}\right)$ $\ i,j = 1,2,\dots,k$

$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k)'$ ile birlikte $\boldsymbol{S\lambda} = \boldsymbol{q}$ denklemi çözülerek bulunur.

O halde $\sum q_i{\gamma_i}^2$ nin MINQUE tahmin edicisini

$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k)'$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathbf{2}} = (\hat{\gamma}_i^2, \hat{\gamma}_2^2, \dots, \hat{\gamma}_k^2)'$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)'$, $u_i = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{T^{-1}T_iT^{-1}}$

$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Q_T Y}$ şeklindeki gösterimler yardımıyla;

$$\sum \widehat{q_\iota \gamma_\iota{}^2} = \boldsymbol{q}'\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{T_i}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_T}{}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V_i}\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q_T}\boldsymbol{Y}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{e}'\boldsymbol{T}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{T_i}\boldsymbol{T}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{q}'\boldsymbol{S}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{u} \qquad (3.2.7)$$

olarak elde ederiz. . Bu denklem düzenlenerek $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{S}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{u}$ eşitliği elde edilir. Bu durumda varyans bileşenlerini

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_k^2)' = (\alpha_1{}^2\hat{\gamma}_1^2, \alpha_2{}^2\hat{\gamma}_2^2, \dots, \alpha_k{}^2\hat{\gamma}_k^2)'$$

şeklinde elde ederiz.

3.3 MINQE Metodu

Bu yöntem, MINQUE yöntemindeki yansızlık şartının kaldırılarak modeldeki varyans bileşenlerinin hesaplamak için kullanılır. **A** simetrik matrisi ve yansızlık (Unbiasedness) şartı olan $tr(\boldsymbol{AV_i}) = p_i$ şartı düşünüldüğünde

$$\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta)\|^2 &= tr[(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta)'(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta)] \\
&= tr[(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta)(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \Delta)] \\
&= tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\Delta - \Delta\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} + \Delta) \\
&= tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}) - tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\Delta) - tr(\Delta\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}) + tr(\Delta\Delta) \\
&= tr(\boldsymbol{AVAV}) - 2tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\Delta) + tr(\Delta\Delta) \qquad (3.3.1)
\end{aligned}$$

olur. $tr(\Delta\Delta)$ ifadesi bilindiğinden bu ifadeyi minimum yapmak için $tr(\boldsymbol{AVAV}) - 2tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\Delta)$ ifadesini minimum yapmak gerekir.

Teorem (3.3.1):

A simetrik matris, **V** simetrik ve tersinir matrisleri için $tr(\boldsymbol{AVAV}) - 2tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\Delta)$ ifadesinin $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ şartı altında minimum değeri $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q_v}{}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{U}\Delta\boldsymbol{U}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q_v}$ eşitliği sağlandığında elde edilir.

İspat:

Lagrange çarpanları metodundan yararlanarak;

$\varphi = tr(\boldsymbol{AVAV}) - 2tr(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{AU}\Delta) - 2tr(\boldsymbol{MAX})$

fonksiyonunu ele alalım. Burada **M** matrisi Lagrange çarpanları matrsidir. Bu fonksiyonun **A** matrisine göre türevini alıp sıfıra eşitlersek;

$$\boldsymbol{VAV} = \boldsymbol{U}\Delta\boldsymbol{U}' + \frac{1}{2}(\boldsymbol{XM} + \boldsymbol{M}'\boldsymbol{X}') \qquad (3.3.2)$$

bulunur. Buradan **A** matrisi

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}\Delta\boldsymbol{U}'\boldsymbol{V}^{-1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{XM} + \boldsymbol{M}'\boldsymbol{X}')\boldsymbol{V}^{-1} \qquad (3.3.3)$$

şeklinde elde edilir. Dikkat edilirse $\boldsymbol{AX} = 0$ şartı altında $\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{AQ_v} = \boldsymbol{A}$ eşitliği elde edilir:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{AQ_v} &= [(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_v})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_v})] \\
&= [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}]'\boldsymbol{A}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}] \\
&= [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{A}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}] \\
&= \boldsymbol{A} - \underbrace{\boldsymbol{AX}}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1} - \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\underbrace{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{0}} \\
&\quad + \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\underbrace{\boldsymbol{AX}}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V} \\
&= \boldsymbol{A} \qquad (3.3.4)
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_v})'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} \\
&= [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}]'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} \\
&= [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} \\
&= \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}\underbrace{(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{I_N}} \\
&= \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X} \\
&= \boldsymbol{0} \qquad (3.3.5)
\end{aligned}$$

eşitliği vardır. (2.3.3) eşitliğini soldan $\boldsymbol{Q_v}'$ sağdan $\boldsymbol{Q_v}$ ile çarparsak

$$\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{Q_v}'\left[\boldsymbol{V^{-1}U}\Delta\boldsymbol{U'V^{-1}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{V^{-1}}(\boldsymbol{XM} + \boldsymbol{M'X'})\boldsymbol{V^{-1}}\right]\boldsymbol{Q_v}$$

$$= \boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V^{-1}U}\Delta\boldsymbol{U'V^{-1}Q_v} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V^{-1}}(\boldsymbol{XM} + \boldsymbol{M'X'})\boldsymbol{V^{-1}Q_v}$$

$$= \boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V^{-1}U}\Delta\boldsymbol{U'V^{-1}Q_v} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\underbrace{\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V^{-1}X}}_{\mathbf{0}}\boldsymbol{MV^{-1}Q_v} + \boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V^{-1}M'}\underbrace{\boldsymbol{X'V^{-1}Q_v}}_{\mathbf{0}}\right]$$

Buradan;

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V^{-1}U}\Delta\boldsymbol{U'V^{-1}Q_v} \tag{3.3.6}$$

elde edilir. Bu durumda ■

$$\widehat{\sum_{\iota=1}^{k} p_\iota\,\sigma_\iota^2} = \boldsymbol{p}'\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{Y'AY}$$

$$= \boldsymbol{Y'Q_v}'\boldsymbol{V^{-1}U}\Delta\boldsymbol{U'V^{-1}Q_vY}$$

$$= \boldsymbol{e'V^{-1}U}\Delta\boldsymbol{U'V^{-1}e}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{c_i}e'\boldsymbol{V^{-1}U_iU_i}'\boldsymbol{V^{-1}e}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{c_i}e'\boldsymbol{V^{-1}V_iV^{-1}e} \tag{3.3.7}$$

elde edilir. Burada

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Q_vY} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{P_vY}$$

dir. O halde σ_i^2 nin MINQE tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_i^2 = \sum_{\iota=1}^{k}\frac{1}{c_i}e'\boldsymbol{V^{-1}V_iV^{-1}e} \quad \text{dir.}$$

3.4 Önsel (Priori) değerler ile MINQE Metodu

$\alpha_1{}^2, \alpha_2{}^2, \dots, \alpha_k{}^2$ değerleri $\sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, \dots, \sigma_k{}^2$ varyans bileşenlerinin daha önceki gözlemlere dayanarak elde edilen önsel değerleri olsun. $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U_1\xi_1} + \boldsymbol{U_2\xi_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k\xi_k}$

denkleminde $\boldsymbol{\xi_i} = \alpha_i \boldsymbol{\eta_i}$ $i = 1,2,\dots,k$ yazılırsa

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\alpha_1 U_1 \eta_1} + \boldsymbol{\alpha_2 U_2 \eta_2} + \cdots \boldsymbol{\alpha_k U_k \eta_k} \tag{3.4.1}$$

elde edilir. Bu denklemde $\alpha_i \boldsymbol{U_i} = \boldsymbol{W_i}$ $i = 1,2,\dots,k$ yazarak düzenlenirse

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{W_1\eta_1} + \boldsymbol{W_2\eta_2} + \cdots + \boldsymbol{W_k\eta_k} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{W\eta} \tag{3.4.2}$$

elde edilir. Burada

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{W_1} \vdots \boldsymbol{W_2} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{W_k})$$

$$\boldsymbol{\eta}' = (\boldsymbol{\eta_1} \vdots \boldsymbol{\eta_2} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{\eta_k})'$$

dir. Bu modelin varyans matrisi

$$\begin{aligned} Var\,(\boldsymbol{Y}) &= Var(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{W\eta}) \\ &= Var(\boldsymbol{W_1\eta_1} + \boldsymbol{W_2\eta_2} + \cdots + \boldsymbol{W_k\eta_k}) \\ &= \boldsymbol{W_1} Var(\boldsymbol{\eta_1})\boldsymbol{W_1}' + \boldsymbol{W_2} Var(\boldsymbol{\eta_2})\boldsymbol{W_1}' + \cdots + \boldsymbol{W_k} Var(\boldsymbol{\eta_k})\boldsymbol{W_k}' \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

şeklinde bulunur. Bu eşitlikte

$$Var(\boldsymbol{\eta_i}) = Var\left(\frac{\boldsymbol{\xi_i}}{\alpha_i}\right) = \frac{1}{{\alpha_i}^2} Var(\boldsymbol{\xi_i}) = \frac{{\sigma_i}^2}{{\alpha_i}^2}\, \boldsymbol{I_{c_i}}$$

yazılarak

$$Var(\boldsymbol{Y}) = \frac{{\sigma_1}^2}{{\alpha_1}^2} \boldsymbol{W_1 W_1}' + \frac{{\sigma_2}^2}{{\alpha_2}^2} \boldsymbol{W_2 W_2}' + \cdots + \frac{{\sigma_k}^2}{{\alpha_k}^2} \boldsymbol{W_k W_k}' \tag{3.4.4}$$

elde edilir. Bu denklemi

$$\frac{{\sigma_i}^2}{{\alpha_i}^2} = {\gamma_i}^2 \text{ ve } \boldsymbol{W_i W_i}' = \boldsymbol{T_i} \quad i = 1,2,\dots,k$$

yazıp düzenlersek

$$Var(\boldsymbol{Y}) = {\gamma_1}^2 \boldsymbol{T_1} + {\gamma_2}^2 \boldsymbol{T_2} + \cdots + {\gamma_k}^2 \boldsymbol{T_k} \tag{3.4.5}$$

elde edilir. Bu modeldeki $({\gamma_1}^2, {\gamma_2}^2, \dots, {\gamma_k}^2)$ varyans bileşenlerinin $\sum q_i {\gamma_i}^2$ lineer fonksiyonunun MINQE tahmin edicisi, **Y** gözlem vektörünün $\boldsymbol{Y'AY}$ gibi bir karesel (quadratic) formuyla hesaplanabilir.

Yansızlık şartını kaldırarak, sadece $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin değişmesi altında değişmezlik şartını dikkate alalım. Bu durumda $\boldsymbol{\beta}$ parametresini değiştirerek $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta_0}$ şekline dönüştürürsek

$$\begin{aligned} Y &= \boldsymbol{X\theta} + \boldsymbol{W\eta} \\ &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta_0}) + \boldsymbol{W\eta} \\ &= X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{X\beta_0} + \boldsymbol{W\eta} \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

elde edilir. Buradan

$$\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta_0} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{W\eta} = \boldsymbol{Y}$$

olduğu görülür. O halde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y'AY} &= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta_0})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta_0}) \\ &= \boldsymbol{Y'AY} - 2\boldsymbol{\beta_0}'\boldsymbol{X'AY} + \boldsymbol{\beta_0}'\boldsymbol{X'AX\beta_0} \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

eşitliğinin sağlanması için $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ olması gerekir. Böylece

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y'AY} &= (\boldsymbol{X\theta} + \boldsymbol{W\eta})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X\theta} + \boldsymbol{W\eta}) \\ &= \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{X}' \underbrace{\boldsymbol{AX}}_{\boldsymbol{0}} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{W}'\boldsymbol{AW\eta} \\ &= \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{W}'\boldsymbol{AW\eta} \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca bu modeldeki doğal tahmin edici

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \frac{\boldsymbol{p_i}}{\boldsymbol{c_i}} \boldsymbol{\xi_i}'\boldsymbol{\xi_i} = \boldsymbol{\xi}'\Delta\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{1/2}}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{1/2}}\boldsymbol{\eta}$$

olur. Burada $\Delta = \boldsymbol{diag}\left(\frac{\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{c_1}}\boldsymbol{I_{c_1}}, \dots, \frac{\boldsymbol{p_k}}{\boldsymbol{c_k}}\boldsymbol{I_{c_k}}\right)$ ve $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{diag}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\alpha_1}^{\boldsymbol{2}}}\boldsymbol{I_{c_i}}, \dots, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\alpha_k}^{\boldsymbol{2}}}\boldsymbol{I_{c_k}}\right)$ dır.

O halde önerilen tahmin edici ile doğal tahmin edici arasındaki fark;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y'AY} - \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{W}'\boldsymbol{AW\eta} - \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{\eta} \\ &= \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{U'AU\alpha}^{1/2}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{\eta} \\ &= \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\alpha}^{1/2}(\boldsymbol{U'AU} - \Delta)\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{\eta} \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

eşitliğindeki gibidir. Bu ifadeyi minimum yapan A matrisini bulmamız gerekir. Bunun için de Euclidian normunu A matrisi için

$$||\boldsymbol{A}|| = \sqrt{\boldsymbol{trA'A}}$$

şeklinde seçip $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U\alpha}^{\boldsymbol{1/2}}$ ve $\boldsymbol{WW'} = \boldsymbol{V_*}$ yazarak

$$\left\|\boldsymbol{\alpha}^{1/2}(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}-\Delta)\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\right\|^2 = tr\left(\boldsymbol{\alpha}^{1/2}(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}-\Delta)\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\right)^2$$

$$= tr\left[\left(\boldsymbol{\alpha}^{1/2}(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}-\Delta)\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}^{1/2}(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}-\Delta)\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\right)\right]$$

$$= tr\left[\left(\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}-\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}-\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\right)\right]$$

$$= tr\left(\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{1/2} - \boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\right.$$
$$\left. - \boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{1/2} + \boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\right)$$

$$= tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}') - 2tr\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{W}'\right) + tr(\Delta\boldsymbol{\alpha}\Delta\boldsymbol{\alpha})$$

$$= tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_*A\boldsymbol{V}_*) - 2tr\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{W}'\right) + tr(\Delta\boldsymbol{\alpha}\Delta\boldsymbol{\alpha}) \qquad (3.4.10)$$

eşitliği elde edilir. $tr(\Delta\boldsymbol{\alpha}\Delta\boldsymbol{\alpha})$ ifadesi bilindiği için bu farkın normunu minimum yapmak için $tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_*A\boldsymbol{V}_*) - 2tr\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{W}'\right)$ ifadesini minimum yapmak yeterlidir. Bunun için de Teorem (2.3.1) den yararlanarak ifadeyi minimum yapan **A** matrisi; $\boldsymbol{V}_*^{-1} = \boldsymbol{H}$ matrisi için

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}} \qquad (3.4.11)$$

olduğunda elde edilir. Burada $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}$ şeklindedir. O halde modeldeki varyans bileşenlerinin önsel değerleriyle birlikte MINQE tahmin edicisi

$$\widehat{\sum_{\iota=1}^{k} p_\iota\,\sigma_\iota^2} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\Delta\boldsymbol{\alpha}^{1/2}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}}\right)\boldsymbol{Y}$$

$$= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}}'\boldsymbol{H}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\boldsymbol{p}_i}{\boldsymbol{c}_i}\boldsymbol{\alpha}_i^{-4}\boldsymbol{V}_i\right)\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\boldsymbol{p}_i}{\boldsymbol{c}_i}\boldsymbol{\alpha}_i^{-4}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Y}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\frac{\boldsymbol{p}_i}{\boldsymbol{c}_i}\boldsymbol{\alpha}_i^{-4}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{H}\boldsymbol{e} \qquad (3.4.12)$$

dir.

Burada $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Y}$ dir. O halde $i = 1,2,\dots,k$ için

$$\widehat{\sigma_\iota}^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{\boldsymbol{\alpha}_i^{-4}}{\boldsymbol{c}_i}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{H}\boldsymbol{e} \qquad (3.4.13)$$

olarak elde edilir.

3.5 MINQUE Metodu ile Kovaryans Matrisinin Tahmini

Bu bölümde daha önce varyans bileşenlerini bulmak için uyguladığımız MINQUE yöntemini kovaryans bileşenlerini bulmak için

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U_1\xi_1} + \boldsymbol{U_2\xi_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k\xi_k} \qquad (3.5.1)$$

şeklinde verilen kovaryans bileşenleri modeline uygulanışını vereceğiz. Burada $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta}$ daha önceki bölümlerde verildiği gibi $\boldsymbol{U_i}$ matrisleri $n \times q$ boyutlu ve ayrıca herbir $\boldsymbol{\xi_i}$ vektörü için $E(\boldsymbol{\xi_i}) = 0$ $E(\boldsymbol{\xi_i}\boldsymbol{\xi_i}') = \boldsymbol{\Sigma}$ ve $Cov(\boldsymbol{\xi_i}, \boldsymbol{\xi_j}) = 0, i \neq j$ varsayımları vardır. Bu model için problem $q(q+1)/2$ tane farklı bileşeni olan $\boldsymbol{\Sigma}$ kovaryans matrisini veya bu matrisin bileşenlerinin lineer bir fonksiyonunun tahmin edilmesidir. (3.5.1) ile verilen modelde varsayımlardan dolayı

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{Y}) &= D(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U_1\xi_1} + \boldsymbol{U_2\xi_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k\xi_k}) \\ &= \boldsymbol{U_1\Sigma U_1}' + \boldsymbol{U_2\Sigma U_2}' + \cdots + \boldsymbol{U_k\Sigma U_k}' \qquad (3.5.2) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisinin bileşenlerinin bir verilen bir $\mathbf{M}$ matrisi için lineer fonksiyonu olan $tr(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M})$ ifadesinin tahmini, $\boldsymbol{Y'AY}$ şeklinde gözlem fonksiyonunun karesel formu olsun . Ayrıca $\boldsymbol{Y'AY},$ $tr(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M})$ ifadesinin yansız tahmin edicisi olsun. O halde $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ şartı ile birlikte yansızlıktan dolayı $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y'AY}) = tr(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M})$ olmalı. Dikkat edilirse

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y'AY}) = \boldsymbol{E}[(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U\xi})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{U\xi})] = tr\left[\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{U_1}'\boldsymbol{AU_1} + \boldsymbol{U_2}'\boldsymbol{AU_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k}'\boldsymbol{AU_k})\right]$$

eşitliğinden dolayı $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y'AY}) = tr(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M})$ olması için

$$tr\left[\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{U_1}'\boldsymbol{AU_1} + \boldsymbol{U_2}'\boldsymbol{AU_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k}'\boldsymbol{AU_k})\right] = tr(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M}) \qquad (3.5.3)$$

olmalı. Buradan $\boldsymbol{U_1}'\boldsymbol{AU_1} + \boldsymbol{U_2}'\boldsymbol{AU_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k}'\boldsymbol{AU_k} = \boldsymbol{M}$ şartı sağlanmalıdır.

Daha once yukarıda da yapılana benzer olarak önerilen tahmin edici ile doğal tahmin ediciarasındaki farkı minimum yapmak istenildiğinde; problem, $tr\|\boldsymbol{U'AU}\|$ ifadesini minimum yapmaya dönüşür. Aşağıdaki lemmada bu ifadeyi minimum yapan A matrisi verilmiştir:

Lemma 3.5.1: $tr\|\boldsymbol{U'AU}\|^2$ ifadesinin minimum değeri $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ ve $\boldsymbol{U_1}'\boldsymbol{AU_1} + \boldsymbol{U_2}'\boldsymbol{AU_2} + \cdots + \boldsymbol{U_k}'\boldsymbol{AU_k} = \boldsymbol{M}$ şartları altında minimum değeri

$$\boldsymbol{A_*} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{U_1\lambda U_1}' + \boldsymbol{U_2\lambda U_2}' + \cdots \boldsymbol{U_k\lambda U_k}')\boldsymbol{R}$$

eşitliğiyle elde edilir. Burada

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Q}_v = \boldsymbol{Q}_v{}'\boldsymbol{V}^{-1}$

$\boldsymbol{Q}_v = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_v$

$\boldsymbol{P}_v = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}$

dir. Ayrıca λ matrisi

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{U}_i{}' \left(\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{U}_j \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{U}_j{}'\right)\boldsymbol{R} \right) \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{M}$$

denklemi çözülerek bulunur ■

O halde bu lemmaya göre $tr(\boldsymbol{\Sigma M})$ ifadesinin tahmini;

$\widehat{tr(\boldsymbol{\Sigma M})} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}_*\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U_1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{U_1}{}' + \boldsymbol{U_2}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{U_2}{}' + \cdots \boldsymbol{U_k}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{U_k}{}')\boldsymbol{R}\boldsymbol{Y}$

şeklinde elde edilir.

BÖLÜM 4

YÖNTEMLERİN UYGULANMASI

4.1 MINQUE Yönteminin Bazı Modellere Uygulanması

a) Genel Ortalama Modeline Uygulanması

(2.1.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin tek varyans bileşeni $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin MINQUE tahmini, bu model için

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{U_1}\boldsymbol{U_1}' = \boldsymbol{I_N}$ olduğundan;

$$\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V^{-1}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V^{-1}} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V^{-1}}\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}$$

$$\boldsymbol{S} = tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{V_1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{V_1}) = tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}) = tr\left[\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)\right] = N - 2$$

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta_1} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V^{-1}}\boldsymbol{V_1}\boldsymbol{V^{-1}}\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)\boldsymbol{Y}$$

hesaplandıktan sonra $\boldsymbol{S}\boldsymbol{\hat{\sigma}^2} = \boldsymbol{\delta}$ denklemi çözülerek bulunur. O halde

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{\hat{\sigma}^2} = \boldsymbol{\delta} \Rightarrow (N-2)\hat{\sigma}_e{}^2 = \boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)\boldsymbol{Y}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_e{}^2 = \frac{1}{N-2}\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)\boldsymbol{Y} = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\boldsymbol{Y_{ij}} - \boldsymbol{\bar{Y}}_{..}\right)^2 \qquad (4.1.1)$$

şeklinde elde edilir.

b) Basit Doğrusal Regresyon Modele uygulanması

(2.2.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin tek varyans bileşeni $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin MINQUE tahmini; bu model için $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{I_N}$ şeklinde olduğundan;

$$\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V^{-1}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V^{-1}} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$$

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v = \boldsymbol{Q}_v = \boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}'$

$\boldsymbol{S} = tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}) = tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}) = tr(\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{Q}_v) = tr(\boldsymbol{Q}_v) \;\; = tr(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}') = N-2$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q}_v{}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{Y}\\ &= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}')\end{aligned}$$

matrisleri hesaplandıktan sonra $\boldsymbol{S}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{\delta}$ denklemi çözülerek bulunur. Buradan

$$\hat{\sigma}_e{}^2 = \frac{1}{N-2}\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{Y} \tag{4.1.2}$$

şeklinde elde edilir.

c) Tek Yönlü Varyans Analizi Modeline Uygulanması

(2.3.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin varyans bileşenleri $\sigma_\alpha{}^2$ ve $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin MINQUE tahmini; bu model için $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{1}}{}' = \boldsymbol{d}\{\boldsymbol{J}_{n_i}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{t}}$ $\quad \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{2}}{}' = \boldsymbol{I}_N \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'$ şeklinde olduğundan

$\boldsymbol{Q}_v = \boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}$

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}) & tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}}) \\ tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}) & tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tr(\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}) & tr(\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v) \\ tr(\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}) & tr(\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{1}} \;\; \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{2}}\,)'$

$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q}_v{}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{Y} \quad i = 1{,}2$

hesaplandıktan sonra $\boldsymbol{S}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{\delta}$ denklemi çözülerek bulunur. O halde $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{2}}$ vektörü

$$\begin{bmatrix} tr(\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}) & tr(\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v) \\ tr(\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}) & tr(\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\alpha{}^2 \\ \hat{\sigma}_\varepsilon{}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q}_v{}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q}_v{}'\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \tag{4.1.3}$$

lineer denklem sisteminden çözülebilir.

d)İki-Yönlü Varyans Analizi Modeline Uygulanması

(2.4.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin varyans bileşenleri $\sigma_\alpha{}^2$,$\sigma_\beta{}^2$, $\sigma_\gamma{}^2$, ve $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin MINQUE tahmini; bu model için

$$\boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{U_1 U_1}' = \boldsymbol{d}\{\boldsymbol{J_{n_{i+}}}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{a}} \qquad \boldsymbol{V_2} = \boldsymbol{U_2 U_2}' = \boldsymbol{c}\left\{\boldsymbol{r}\left\{\boldsymbol{diag}\left\{J_{n_{ij}}\right\}_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{b}}\right\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{a}}\right\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{a}}$$

$\boldsymbol{V_3} = \boldsymbol{U_3 U_3}' = \boldsymbol{d}\left\{\boldsymbol{J_{n_{ij}}}\right\}_{\boldsymbol{i=j=1}}^{\boldsymbol{i=a}\ \boldsymbol{j=b}} \qquad \boldsymbol{V_4} = \boldsymbol{U_4 U_4}' = \boldsymbol{I_N} \qquad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{UU}'$ şeklinde olduğundan

$$\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Q_v}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} tr(\boldsymbol{RV_1RV_1}) & tr(\boldsymbol{RV_1RV_2}) & tr(\boldsymbol{RV_1RV_3}) & tr(\boldsymbol{RV_1RV_4}) \\ tr(\boldsymbol{RV_2RV_1}) & tr(\boldsymbol{RV_2RV_2}) & tr(\boldsymbol{RV_2RV_3}) & tr(\boldsymbol{RV_2RV_4}) \\ tr(\boldsymbol{RV_3RV_1}) & tr(\boldsymbol{RV_3RV_2}) & tr(\boldsymbol{RV_3RV_3}) & tr(\boldsymbol{RV_3RV_4}) \\ tr(\boldsymbol{RV_4RV_1}) & tr(\boldsymbol{RV_4RV_2}) & tr(\boldsymbol{RV_4RV_3}) & tr(\boldsymbol{RV_4RV_4}) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta_1}\ \ \boldsymbol{\delta_2}\ \boldsymbol{\delta_3}\ \ \boldsymbol{\delta_3})'$$

$$\boldsymbol{\delta_i} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V_i}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Q_v Y} \quad i = 1,2$$

hesaplandıktan sonra $\boldsymbol{S\hat{\sigma}^2} = \boldsymbol{\delta}$ denklemi çözülerek bulunur. O halde $\boldsymbol{\hat{\sigma}^2}$ vektörü

$$\begin{bmatrix} tr(\boldsymbol{RV_1RV_1}) & tr(\boldsymbol{RV_1RV_2}) & tr(\boldsymbol{RV_1RV_3}) & tr(\boldsymbol{RV_1RV_4}) \\ tr(\boldsymbol{RV_2RV_1}) & tr(\boldsymbol{RV_2RV_2}) & tr(\boldsymbol{RV_2RV_3}) & tr(\boldsymbol{RV_2RV_4}) \\ tr(\boldsymbol{RV_3RV_1}) & tr(\boldsymbol{RV_3RV_2}) & tr(\boldsymbol{RV_3RV_3}) & tr(\boldsymbol{RV_3RV_4}) \\ tr(\boldsymbol{RV_4RV_1}) & tr(\boldsymbol{RV_4RV_2}) & tr(\boldsymbol{RV_4RV_3}) & tr(\boldsymbol{RV_4RV_4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\alpha{}^2 \\ \hat{\sigma}_\beta{}^2 \\ \hat{\sigma}_\gamma{}^2 \\ \hat{\sigma}_\varepsilon{}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V_1}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Q_v Y} \\ \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V_2}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Q_v Y} \\ \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V_3}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Q_v Y} \\ \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V_4}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Q_v Y} \end{bmatrix} \qquad (4.1.4)$$

eşitliğinden elde edilir.

4.2 MINQE Yönteminin Bazı Modellere Uygulanması

a) Genel Ortalama Modeline Uygulanması

(2.1.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin ilişkin tek varyans bileşeni $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin MINQE tahmini; bu model için $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{I_N}$ şeklinde olduğundan

$$\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{I_N} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}}\ \boldsymbol{J_N}$$

$$\Delta = \frac{\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{c_1}}\boldsymbol{I}_{c_1} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}}\ \boldsymbol{I_N}$$

eşitlikleriyle birlikte

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2 &= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\\ &= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}\Delta\boldsymbol{U}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Q_v}\boldsymbol{Y}\\ &= \frac{1}{N}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_v}'\boldsymbol{Q_v}\boldsymbol{Y}\\ &= \frac{1}{N}\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\ \boldsymbol{J_N}\right)\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\ \boldsymbol{J_N}\right)Y\\ &= \frac{1}{N}\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\ \boldsymbol{J_N}\right)Y\\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\boldsymbol{Y_{ij}} - \overline{\boldsymbol{Y}}_{..}\right)^2 \qquad (4.2.1)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

b) Basit Doğrusal Regrsyon Modeline Uygulanması

(2.2.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin ilişkin tek varyans bileşeni $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin MINQE tahmini; bu model için $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{I_N}$ şeklinde olduğundan

$$\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$$

$$\Delta = \frac{\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{c_1}}\boldsymbol{I}_{c_1} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}}\ \boldsymbol{I_N}$$

eşitlikleriyle birlikte

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\varepsilon^{\,2} &= \boldsymbol{Y'AY}\\ &= \boldsymbol{Y'Q_v{}'V^{-1}U}\Delta\boldsymbol{U'V^{-1}Q_vY}\\ &= \frac{1}{N}\boldsymbol{Y'Q_v{}'Q_vY}\\ &= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{Y'}[\boldsymbol{I_N}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'}]'[\boldsymbol{I_N}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'}]\boldsymbol{Y}\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

şeklinde elde edilir.

c) Tek Yönlü Varyans Analizi Modeline Uygulanması

(2.3.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin ilişkin varyans bileşenleri; $\sigma_\alpha{}^2$ ve $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin MINQE tahmini bu model için

$\boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{U_1U_1{}'} = \boldsymbol{d}\{\boldsymbol{J_{n_i}}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{t}}$ $\boldsymbol{V_2} = \boldsymbol{U_2U_2{}'} = \boldsymbol{I_N}$ $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{UU'}$ şeklinde olduğundan

$\boldsymbol{Q_v} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'V^{-1}}$ hesaplandıktan sonra

$$\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_\alpha{}^2\\ \hat{\sigma}_\varepsilon{}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{c_1}}\boldsymbol{Y'Q_v{}'V^{-1}V_1V^{-1}Q_vY}\\ \dfrac{\boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{c_2}}\boldsymbol{Y'Q_v{}'V^{-1}V_2V^{-1}Q_vY}\end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında varyans bileşenleri tahmin denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$= \begin{pmatrix}\dfrac{1}{t}\boldsymbol{Y'}[\boldsymbol{I_N}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'V^{-1}}]'\boldsymbol{V^{-1}V_1V^{-1}}[\boldsymbol{I_N}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'V^{-1}}]\boldsymbol{Y}\\ \dfrac{1}{N}\boldsymbol{Y'}[\boldsymbol{I_N}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'V^{-1}}]'\boldsymbol{V^{-1}V^{-1}}[\boldsymbol{I_N}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'V^{-1}}]\boldsymbol{Y}\end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

d) İki-Yönlü Varyans Analizi Modeline Uygulanması

(2.4.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin varyans bileşenleri $\sigma_\alpha{}^2$,$\sigma_\beta{}^2$, $\sigma_\gamma{}^2$, ve $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin MINQUE tahmini; bu model için

$\boldsymbol{V_1 = U_1 U_1{}' = d\{J_{n_{i+}}\}_{i=1}^{a}}$ $\boldsymbol{V_2 = U_2 U_2{}' = c\left\{r\left\{diag\left\{J_{n_{ij}}\right\}_{j=1}^{b}\right\}_{i=1}^{a}\right\}_{i=1}^{a}}$

$\boldsymbol{V_3 = U_3 U_3{}' = d\left\{J_{n_{ij}}\right\}_{i=j=1}^{\substack{i=a\\j=b}}}$ $\boldsymbol{V_4 = U_4 U_4{}' = I_N}$ $\boldsymbol{V = UU'}$ şeklinde olduğundan

$\boldsymbol{Q_v = I_N - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}}$ hesaplandıktan sonra

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_\alpha{}^2 \\ \hat{\sigma}_\beta{}^2 \\ \sigma_\gamma{}^2 \\ \sigma_\varepsilon{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{p_1}{c_1} Y'Q_v{}'V^{-1}V_1V^{-1}Q_vY} \\ \boldsymbol{\frac{p_2}{c_2} Y'Q_v{}'V^{-1}V_2V^{-1}Q_vY} \\ \boldsymbol{\frac{p_3}{c_3} Y'Q_v{}'V^{-1}V_3V^{-1}Q_vY} \\ \boldsymbol{\frac{p_4}{c_4} Y'Q_v{}'V^{-1}V_3V^{-1}Q_vY} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında varyans bileşenleri tahmin denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a}\boldsymbol{Y'[I_N - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]'V^{-1}V_1V^{-1}[I_N - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]Y} \\ \frac{1}{b}\boldsymbol{Y'[I_N - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]'V^{-1}V_2V^{-1}[I_N - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]Y} \\ \frac{1}{a.b}\boldsymbol{Y'[I_N - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]'V^{-1}V_3V^{-1}[I_N - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]Y} \\ \frac{1}{N}\boldsymbol{Y'[I_N - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]'V^{-1}V_4V^{-1}[I_N - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]Y} \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

4.3 Önsel (priori) değerler ile MINQE Metodunun Bazı Modellere Uygulanması

a) Genel Ortalama Modeline Uygulanması

(2.1.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin ilişkin tek varyans bileşeni $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin α_1 önsel değeri ile MINQE tahmini

$\boldsymbol{\alpha = diag\left\{\frac{1}{\alpha_i{}^2} I_{c_i}\right\}_{i=1}^{k}}$ $\boldsymbol{H = \left(\alpha^{1/2}U'U\alpha^{1/2}\right)^{-1}}$ $\boldsymbol{Q_H = I_N - X(X'HX)^{-1}X'H}$

matrisleri bu model için

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{{\alpha_1}^2}\boldsymbol{I_{c_1}} = \frac{1}{{\alpha_1}^2}\boldsymbol{I_N} \qquad \boldsymbol{H} = {\alpha_1}^2\boldsymbol{I_N} \qquad \boldsymbol{Q_H} = \boldsymbol{I_N} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{J_N}$$

şeklinde olduğundan

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2 &= \frac{1}{N\boldsymbol{\alpha_1}^{\mathbf{4}}}\boldsymbol{Y'Q_H{}'HU_1U_1{}'HQ_HY} \\
&= \frac{1}{N{\alpha_1}^4}\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{J_N}\right)'\boldsymbol{HH}\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{J_N}\right)\boldsymbol{Y} \\
&= \frac{1}{N{\alpha_1}^4}\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)'\boldsymbol{\alpha_1}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{I_N}\boldsymbol{\alpha_1}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{I_N}\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)Y \\
&= \frac{1}{N}\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{I_N} - \frac{1}{N}\boldsymbol{J_N}\right)Y \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\boldsymbol{Y_{ij}} - \overline{\boldsymbol{Y}}_{..}\right)^2 \qquad (4.3.1)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır

b) Basit Doğrusal Regresyon Modeline Uygulanması

(2.2.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin ilişkin tek varyans bileşeni ${\sigma_\varepsilon}^2$ nin α_1 önsel değeri ile birlikte MINQE tahmini

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{diag}\left\{\frac{\mathbf{1}}{{\alpha_i}^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{I_{c_i}}\right\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \qquad \boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{1/2}}\boldsymbol{U'U\alpha}^{\mathbf{1/2}}\right)^{-\mathbf{1}} \qquad \boldsymbol{Q_H} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'HX})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'H}$$

matrisleri

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{{\alpha_1}^2}\boldsymbol{I_{c_1}} = \frac{1}{{\alpha_1}^2}\boldsymbol{I_N} \qquad \boldsymbol{H} = {\alpha_1}^2\boldsymbol{I_N} \qquad \boldsymbol{Q_H} = \boldsymbol{I_N} - {\alpha_1}^4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'}$$ şeklinde

hesaplanarak

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2 &= \frac{1}{N\boldsymbol{\alpha_1}^{\mathbf{4}}}\boldsymbol{Y'Q_H{}'HU_1U_1{}'HQ_HY} \\
&= \frac{1}{N\boldsymbol{\alpha_1}^{\mathbf{4}}}\boldsymbol{Y'Q_H{}'HV_1HQ_HY} \\
&= \frac{1}{N\boldsymbol{\alpha_1}^{\mathbf{4}}}\boldsymbol{Y'Q_H{}'HHQ_HY}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N\boldsymbol{\alpha_1}^{\mathbf{4}}}\boldsymbol{Y}'[\boldsymbol{I_N} - \alpha_1{}^4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}']'\ \alpha_1{}^2\boldsymbol{I_N}\alpha_1{}^2\boldsymbol{I_N}[\boldsymbol{I_N} - \alpha_1{}^4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{Y}$$

$$= \frac{1}{N}\boldsymbol{Y}'[\boldsymbol{I_N} - \alpha_1{}^4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}']'\ [\boldsymbol{I_N} - \alpha_1{}^4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{Y} \qquad (4.3.2)$$

olarak hesaplanır.

c) Tek Yönlü Varyans Analizi Modeline Uygulanması

(2.3.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin ilişkin varyans bileşenleri $\sigma_\alpha{}^2$ ve $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin sırasıyla α_1 ve α_2 önsel değerleri ile MINQE tahmini

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{diag}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha_i}^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{I_{c_i}}\right\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\mathbf{2}} \qquad \boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{1/2}}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{1/2}}\right)^{-\mathbf{1}} \qquad \boldsymbol{Q_H} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}$$

matrisleri hesaplanıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$= \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c_1\alpha_1}^{\mathbf{4}}}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_H}{}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{V_1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q_H}\boldsymbol{Y} \\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c_2\alpha_2}^{\mathbf{4}}}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_H}{}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{V_2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q_H}\boldsymbol{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t\alpha_1}^{\mathbf{4}}}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_H}{}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{V_1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q_H}\boldsymbol{Y} \\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N\alpha_2}^{\mathbf{4}}}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Q_H}{}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q_H}\boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \qquad (4.3.3)$$

şeklinde bulunur.

d) İki-Yönlü Varyans Analizi Modeline Uygulanması

(2.4.1) modeli (2.3) denkleminin özel durumudur. Dolayısıyla bu modele ilişkin ilişkin varyans bileşenleri $\sigma_\alpha{}^2$,$\sigma_\beta{}^2$, $\sigma_\gamma{}^2$, ve $\sigma_\varepsilon{}^2$ nin sırasıyla α_1, α_2, α_3 ve α_4 önsel değerleri ile MINQE tahmini

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{diag}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha_i}^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{I_{c_i}}\right\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\mathbf{2}} \qquad \boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{1/2}}\boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{1/2}}\right)^{-\mathbf{1}} \qquad \boldsymbol{Q_H} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{H}$$

matrisleri hesaplanıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1{\alpha_1}^4} Y'Q_H{}'HV_1HQ_HY \\ \frac{1}{c_2{\alpha_2}^4} Y'Q_H{}'HV_2HQ_HY \\ \frac{1}{c_1{\alpha_1}^4} Y'Q_H{}'HV_1HQ_HY \\ \frac{1}{c_1{\alpha_1}^4} Y'Q_H{}'HV_1HQ_HY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a\,{\alpha_1}^4} Y'Q_H{}'HV_1HQ_HY \\ \frac{1}{b\,{\alpha_2}^4} Y'Q_H{}'HV_2HQ_HY \\ \frac{1}{ab\,{\alpha_1}^4} Y'Q_H{}'HV_3HQ_HY \\ \frac{1}{N{\alpha_1}^4} Y'Q_H{}'HV_4HQ_HY \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

şeklinde bulunur.

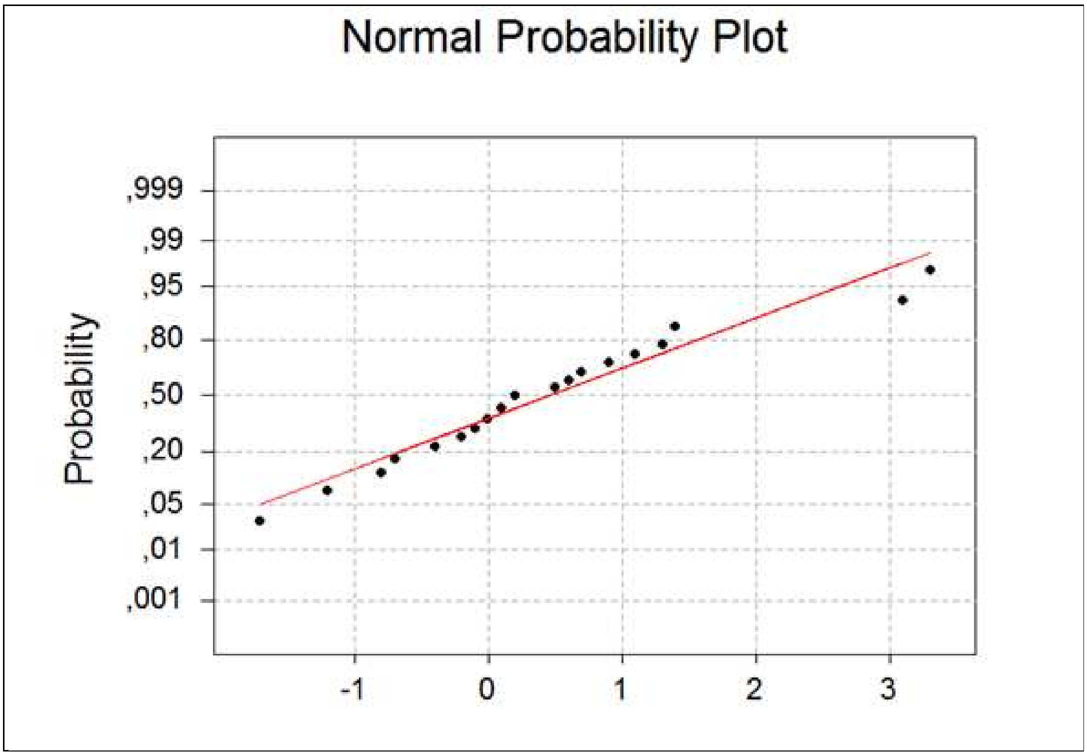
4.4 Yöntemler için Sayısal Örneklerler

4.4.1 Genel Ortalama Modeli için Veri Seti

Aşağıdaki tabloda, Kuzey Yarımkürede 21 farklı istasyondaki ölçümler sonucu üç farklı enlemde Ozon tabakasındaki incelme değişim yüzdeleri verilmiştir. (Poduri S.R.S. Rao, 1997)

Çizelge 1. Üç farklı enlemdeki Ozon tabakası incelme yüzdeleri

	Enlem ^{o}N	
19,5-39,3	**40,0-47,8**	**50,2-64,1**
0	3,1	1,1
-0,4	-0,7	-1,2
-0,1	0,1	0,1
0,2	1,3	-0,8
0,5	1,4	1,4
3,3	0,6	0,9
0,7	-0,2	-1,7



Şekil 1 Çizelge 1'deki veriler için normallik testi

Şekil-1 de görüldüğü gibi normal olasılık eğrisi düzgün doğrusal olduğundan gözlemlerin normal dağılımdan geldiğini söyleyebiliriz.

Yukarıdaki çizelgedeki veriler için $H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_t$ hipotezini test edince belirgin p-değeri 0,447 olduğu için hipotez reddedilemez. O halde veriler genel ortalama modele uygundur.

Çizelge 2 Çizelge 1'deki veriler için hipotez testi tablosu

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	2,617	2	1,309	,843	**0,447**
Within Groups	27,954	18	1,553		
Total	30,571	20			

Bu modele ilişkin tek varyans bileşeninin MIVQUE ve MINQE yöntemleri ile tahmin değerleri sırasıyla (4.1.1) ve (4.2.1) denklemlerinden elde edilerek aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Çizelge 3 Çizelge 1'deki veriler için varyans bileşenleri tahmin değerleri

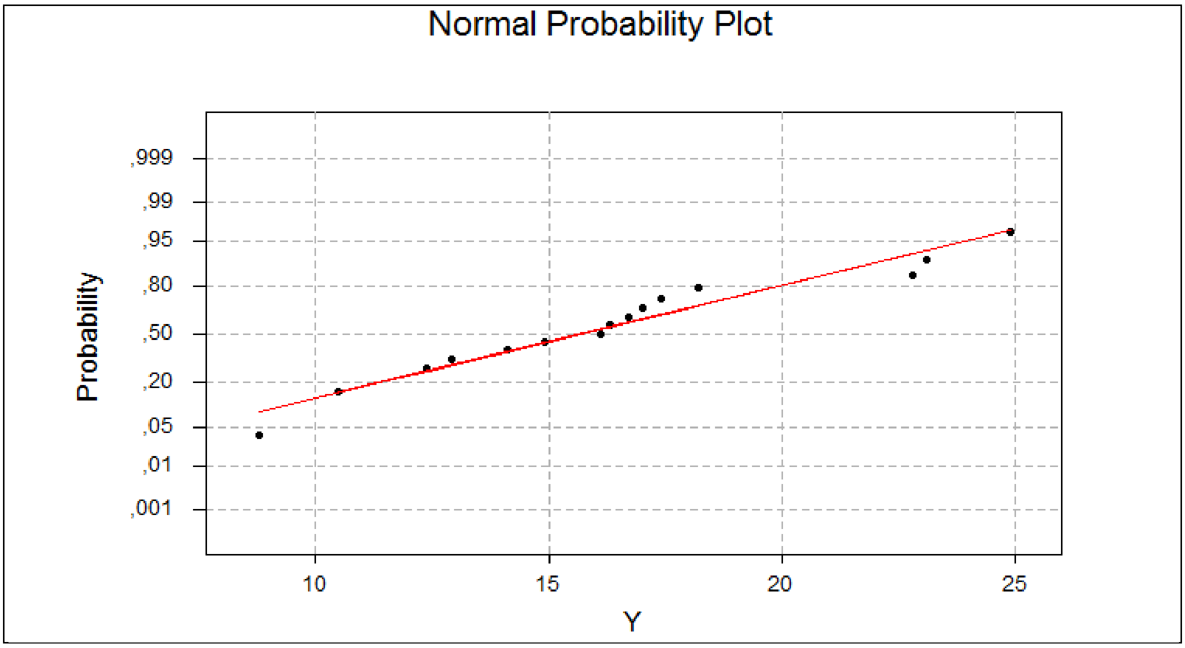
	$\hat{\sigma}_\varepsilon^{\ 2}$
MIVQUE	1,57
MINQE	1,42

4.4.2 Basit Doğrusal Regresyon Modeli için Veri Seti

Aşağıdaki tabloda 1919-1935 yıllarında, Amerika'nın Wyoming eyaletinde Snake Nehri'nin 1 Nisan günlerinde, kardaki su yüzdesi X ile, Nisan'dan Temmuz'a su seviyesinin inç cinsinden değişimi Y ile gösterilmiştir. (Sanford Weisberg, 2005)

Çizelge 4 1919-1935 yıllarında kardaki su yüzdesi ve Snake Nehrindeki suyun seviyesinin inç cinsinden değişimi

X	Y	X	Y
23,1	10,5	32,8	16,7
31,8	18,2	32	17
30,4	16,3	24	10,5
39,5	23,1	24,2	12,4
52,5	24,9	37,9	22,8
30,5	14,1	25,1	12,9
12,4	8,8	35,1	17,4
31,5	14,9	21,1	10,5
27,6	16,1		



Şekil 2 Çizelge 4'deki veriler için normallik testi

Şekil 2 de görüldüğü gibi normal olasılık eğrisi düzgün doğrusal olduğundan gözlemlerin normal dağılımdan geldiğini söyleyebiliriz.

Bu modele ilişkin tek varyans bileşeninin MIVQUE ve MINQE yöntemleri ile tahmin değerleri sırasıyla (4.1.2) ve (4.2.2) denklemlerinden elde edilerek aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Çizelge 5 Çizelge 2'deki verilere uygulanan modeldeki varyans bileşenleri tahmin değerleri

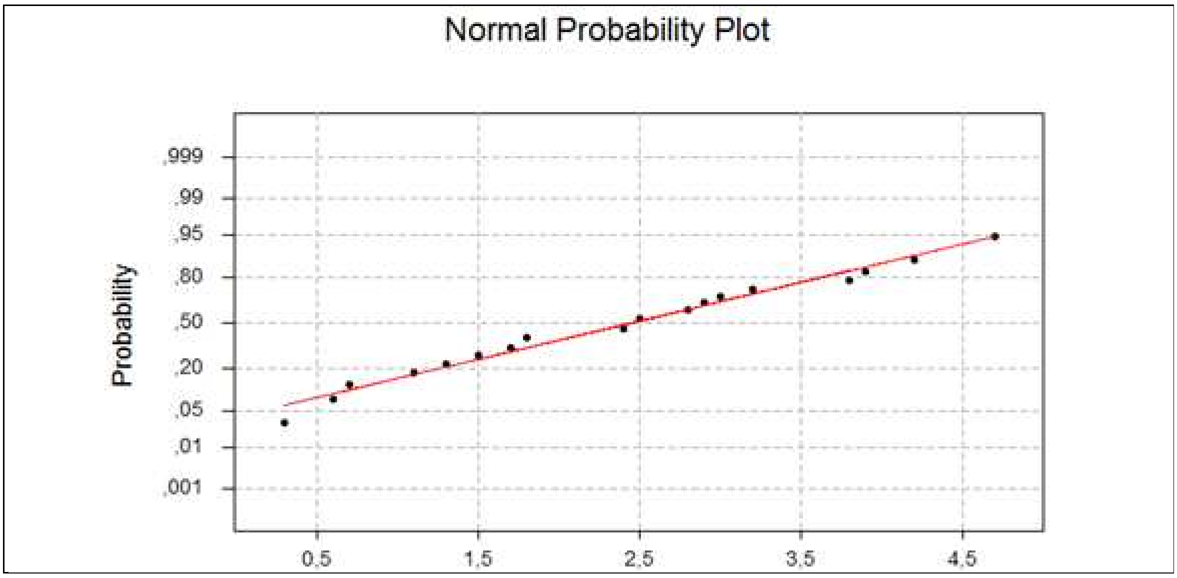
	$\hat{\sigma}_{\varepsilon}{}^{2}$
MIVQUE	3,03
MINQE	2,68

4.4.3 Tek Yönlü Varyans Analizi Modeli için Veri Seti

Aşağıdaki tabloda dört bölgede ölçümler sonucu Ozon tabakasındaki incelme değişim yüzdeleri verilmiştir. (Poduri S.R.S. Rao, 1997)

Çizelge 6 Dört farklı bölgedeki Ozon tabakası incelme değişim yüzdeleri

Bölge	ABD	Kanada	Avrupa	Asya
	2,80	4,20	2,50	0,60
	3,00	4,70	3,80	0,70
	3,90	2,40	3,20	1,10
	1,80	1,30	4,70	0,30
	1,70		1,80	
	1,50		2,90	
			2,50	



Şekil 3 Çizelge 6 daki veriler için normallik testi

Şekil 3 de görüldüğü gibi normal olasılık eğrisi düzgün doğrusal olduğundan gözlemlerin normal dağılımdan geldiğini söyleyebiliriz.

Bu modele ilişkin varyans bileşenlerinin MIVQUE ve MINQE yöntemleri ile tahmin değerleri sırasıyla (4.1.3) ve (4.2.3) denklemlerinden elde edilerek aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Çizelge 7 Çizelge 6'daki verilere uygulanan modeldeki varyans bileşenleri tahmin değerleri

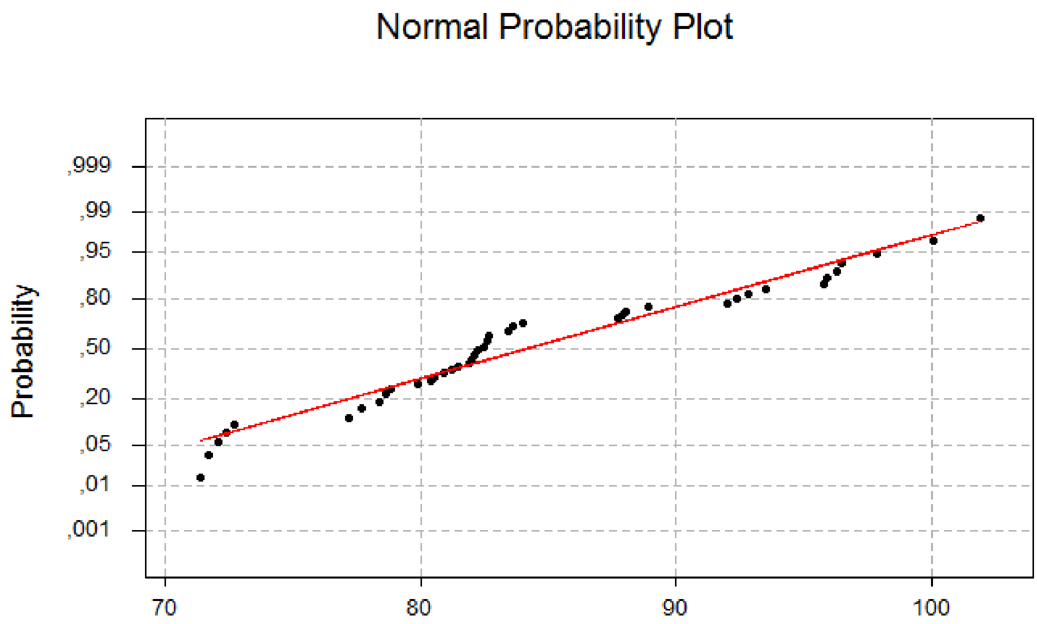
	$\hat{\sigma}_{\alpha}{}^{2}$	$\hat{\sigma}_{\varepsilon}{}^{2}$
MIVQUE	1,0373	1,0479
MINQE	0,6488	0,8732

4.4.4. İki Yönlü Varyans Analizi Modeli İçin Veri Seti

Aşağıdaki tabloda bir fabrikada çalışan dört farklı işçinin üç ayrı montaj bandındaki beş günlük performans skorları verilmiştir. (Milliken and Johnson,2009)

Çizelge 8 Bir fabrikada çalışan işçilerin performans skorları

Bant	**İşçi**			
	1	**2**	**3**	**4**
	82,6	96,5	87,9	83,6
1		100,1	93,5	82,7
		101,9	88,9	87,7
		97,9	92,8	88
		95,9		82,5
	72,7	71,7	78,4	82,1
2		72,1	80,4	79,9
		72,4	83,4	81,9
		71,4	77,7	82,6
			81,2	78,6
	82,5	80,9	96,3	77,7
3	82,1	84	92,4	78,6
	82	82,2	92	77,2
		83,4	95,8	78,8
		81,5		80,5



Şekil 4 Çizelge 8’deki veriler için normallik testi

Şekil 4 de görüldüğü gibi normal olasılık eğrisi düzgün doğrusal olduğundan gözlemlerin normal dağılımdan geldiğini söyleyebiliriz.

Bu modele ilişkin varyans bileşenlerinin MIVQUE ve MINQE yöntemleri ile tahmin değerleri sırasıyla (4.1.4) ve (4.2.4) denklemlerinden elde edilerek aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Çizelge 9 Çizelge 8’deki verilere uygulanan modeldeki varyans bileşenleri tahmin değerleri

	$\hat{\sigma}_\alpha{}^2$	$\hat{\sigma}_\beta{}^2$	$\hat{\sigma}_\gamma{}^2$	$\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2$
MIVQUE	0,4855	31,6907	39,8892	3,7174
MINQE	5,1374	15,9149	13,5149	3,8010

4.4.5. Kovaryans Bileşenleri Modeli İçin Veri Seti

Aşağıdaki veriler rastgele seçilmiş 14 tane ailedeki ebeveynlerin ve erkek evlatların kırmızı kan hücrelerindeki adenozin trifosfat (ATP) seviylerini (mol/gr) göstermektedir. (Wiorkowski ,1975)

Çizelge 10 On dört farklı ailedeki bireylerin ATP seviyeleri (mol/gr)

Aile	Baba	Anne	Erkek Evlatlar				
1	3,72	4,43	4,18	4,81	-	-	-
2	4,54	3,79	4,72	-	-	-	-
3	5,05	4,66	4,98	5,03	5,16	-	-
4	4,1	5,42	5,3	4,48	4,85	-	-
5	4,26	4,39	4,87	3,99	4,19	4,28	5,15
6	4,09	5,29	4,74	4,1	-	-	-
7	4,83	4,99	4,53	4,77	4,77	-	-
8	4,24	4,38	3,72	4,12	-	-	-
9	5,43	4,73	4,65	4,62	-	-	-
10	5,23	5,34	5,83	6,03	-	-	-
11	4,56	5,29	4,86	5,58	5,99	-	-
12	5,16	4,71	5,44	4,34	5,43	-	-
13	3,77	5,13	4,7	5	4,63	-	-
14	4,15	4,18	4,82	4,14	-	-	-

Wiorkowski yaptığı araştırmada ebeveynlerdeki ATP seviyesiyle erkek evlatların ATP seviyeleri arasında ilişkiyi araştırmak amacıyla

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2 \ldots ,14$$
$$j = 1,2, \ldots , n_i$$

şeklindeki regresyon analizi modelini ele almıştır. Burada Y_{ij} ile i-ninci ailedeki j-inci erkek evladın ATP seviyesi, x_{1i} ve x_{2i} ile i-ninci ailedeki sırasıyla babanın ve annenin ATP seviyesi gösterilmektedir. Ayrca bu model için

$$Cov\left(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}\right) = \begin{cases} \sigma^2, & i = i', j = j' \\ \sigma^2 \rho, & i = i', j \neq j' \\ 0, & diğer \end{cases}$$

varsaymıştır. Modeli $\boldsymbol{Y_i} = \boldsymbol{X_i\beta} + \boldsymbol{\varepsilon_i} \quad i = 1,2,\dots,14$ şeklinde yazınca varsayımlardan dolayı $D(\boldsymbol{\varepsilon_i}) = \boldsymbol{\Sigma_i} = \sigma^2\left[(1-\rho)\boldsymbol{I_{n_i}} + \rho\boldsymbol{J_{n_i}}\right]$ olur. Bundan dolayı $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ şeklinde yazılanbilen bu model için varyans-kovaryans matrisi

$$D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma_1} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma_2} & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma_{14}} \end{bmatrix} = \sigma^2\boldsymbol{T_1} + \sigma^2\rho\,\boldsymbol{T_2}$$

$$= \sigma^2\boldsymbol{I_N} + \sigma^2\rho\left[\boldsymbol{diag}\{\boldsymbol{J_{n_1}},\boldsymbol{J_{n_2}},\dots,\boldsymbol{J_{n_{14}}}\} - \boldsymbol{I_N}\right]$$

şeklinde olur. O halde $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ tahmin matrisi için $\hat{\sigma}^2$ ve $\hat{\sigma}^2\hat{\rho}$ tahmin değerleri bulunmalıdır. Bu kovaryans bileşenlerinin MIVQUE metoduyla tahmini

$\boldsymbol{S} = [s_{ij}] = tr(\boldsymbol{QT_iQT_j}) \quad i = 1,2 \quad j = 1,2$

$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ \sigma^2\rho \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y'Q'T_1QY} \\ \boldsymbol{Y'Q'T_2QY} \end{pmatrix}$

eşitlikleriyle birlikte $\boldsymbol{S\alpha} = \boldsymbol{u}$ denklemi çözülerek bulunur. Burada $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I_N} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}$ şeklindedir. Buradan; kovaryans bileşenlerinin MIVQUE tahmin değerleri aşağıda gibi elde edilir:

Çizelge 11 Çizelge 10'daki verilere uygulanan modeldeki kovaryans bileşenleri tahmin değerleri

	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}^2\hat{\rho}$
MIVQUE	0,2173	0,0297

KAYNAKLAR

A Ahrens, 1978. MINQUE and ANOVA estimator for one way classificaton- A risk comparison. *Biom. Zeit*. 20: 535-556

Brown, K.G, 1976. Asymptotic behaviour of MINQUE-type estimators of variance components. *Annals of Statistics* 4**:** 746-754

Chaubey, Y.P., 1980a. Application of the method of MINQUE for estimation in regression with interclass covariance matrix. *Sankhya.*, B42 (182): 28-32

Chaubey, Y.P., 1980b. Minimum Norm Quadratic Estimation of Variance Components. *Metrika.*,27 : 255-267

Corbeil R. R. ve Searle. S. R., 1976. Restricted Maximum Likelihood (REML) Estimation Variance Components in The Mixed Model. *Teknometrics*, 18: 31-38.

Crump, S.L., 1951. The Present Status of Variance Components Analysis. *Biometrics*, 7:1-16.

Einshart, C.,1947. The assumptions underlying the analysis of variance. *Biometrics*, 3:1-21.

Falconer, D. S., 1989. *Intoduction to Quantitative Genetics*, 3rd ed.John Wiley and Sons, New York.

Harvey W. R., 1970. Estimation of Variance and Covariance Components in The Mixed Model. *Biometrics*, 26: 485-502.

Harville, D.A., 1977. Maximum-likelihood approaches to variance component estimation and to related problems, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 72: 320–340.

Hartley, H. O. Rao, J. N. K., 1967. Maximum Likelihood estimation for the mixed model analysis of variance model. *Biometrica*, 54:93-98.

Henderson C. R., 1953. Estimation of Variance and Covariance Components. *Biometrics*, 9: 223–252.

Kaps, M., Lamberson, W., 2004. *Biostatistics for Animal Science*. CABI International, Wallingford, Oxforshire, London.

Kelly, R.J., Mathew, T., 1993. Improved estimators of variance components with smaller probability of negativity, *J. Roy. Statist. Soc. Ser.* B, 4: 897–911.

Kleffe, J., Parasad, N.G.N. and Rao, J.N.K., 1991. Optimal estimation based on MINQUE theory. *Journal of the American Statistical Association* 68**:** 728-730

Mondal, P. M., 2000. On the principle of MINQUE fort he estimation of variance and covariance components. Master thesis, Concordia University, Department of Mathematics and Statistics, Canada.

Orhan H., 1997. Varyans Unsurları Tahmin Yöntemlerinin Monte Carlo Çalışması ile Karşılaştırmalı Olarak İncelenmesi. Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi.

Poduri S.R.S. Rao, 1997. Variance Components Estimation,Chapman&Hall, USA

Prosanta Kumar Mondal, 2000. On the principle of MINQUE fort he estimation of Variance and Covariance Components, A thesis in the department of Mathematics and Statistics

Rasch, D., Masata, O., 2006. Methods of variance component estimation. *Czech J. Anim. Sci.*, 51 (6): 227-235.

Rao, C.R., 1970. Estimation of heteroscedastic variances in linear models. *JASA*, 65(329): 161-172.

Rao, C.R., 1971a. Estimation of variance and covariance components. *Journal of Multivariate Analysis*, 1: 257-275

Rao, C.R., 1971b. Minimum Variance quadratic unbiased estimation of variance components. *Journal of Multivariate Analysis*, 1: 445-456

Rao, C.R., 1972. Estimation of variance and covariance components in linear models. *Journal of American Statistical Association*, 67: 112-115

Rao, P. S. R. S., 2001. Nonnegative estimators for the one-way random effects model, *Comm. Statist.* A *Theory Methods*, 30: 1605–1613.

Sanford Weisberg, 2005, Applied Linear Regression, Wiley Publications

Sarhai H., Ojeda M.M., 2004. *Analysis of Variance for Random Models, Volume I: Balanced Data*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin

Sarhai H., Ojeda M.M., 2005. *Analysis of Variance for Random Models, Volume II: Unbalanced Data.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.

Searle, S.R., 1971. *Linear Models*. John Wiley & Sons, New York.

Searle, S. R., Casella, G., McCulloch C. E., 1992. *Varince Components*. A Wiley-Interscience Publication, USA.

Searle, S. R., Casella, G., McCulloch C. E., 2006. *Varince Components*. A Wiley-Interscience, A John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA.

Smith, E. J., Savage, T. F., 1992. A comparison of four methods of variance component estimation for heritability of embryonic mortality in turkeys. *Poultry science*, 71:229-234.

Swallow, W. H., Monahan J. F., 1984. Monte Carlo Comparison of ANOVA, MIVQUE, REML, and ML Estimators of Variance Components. *Tecnometrics*, 26 (1): 47–57.

Thompson, W.A., Jr., 1962. The problems of Negative Estimates of Variance Components. *Annals of Mathematical Statistics*, 33: 273-289.

Verdooren L.R., 1982. How large is the probability for the estimate of a variance component to be negative?, *Biometrical Journal*, 24: 339–360.

Yang, C.C., Su, CM, 2005. A simulation study on estimators for G-coefficient of generaliziability theory. *Journal of Education and Psychology*, 28 (4): 773-797.

ÇİZELGELER **Sayfa No**

Çizelge 1. Üç farklı enlemdeki Ozon tabakası incelme yüzdeleri......................... 31

Çizelge 2 Çizelge 1'deki veriler için hipotez testi tablosu.................................. 32

Çizelge 3 Çizelge 1'deki veriler için varyans bileşenleri tahmin değerleri 32

Çizelge 4 1919-1935 yıllarında kardaki su yüzdesi ve Snake Nehrindeki suyun seviyesinin inç cinsinden değişimi... 33

Çizelge 5 Çizelge 2'deki verilere uygulanan modeldeki varyans bileşenleri tahmin değerleri.. 34

Çizelge 7 Çizelge 6'daki verilere uygulanan modeldeki varyans bileşenleri tahmin değerleri.. 35

Çizelge 8 Bir fabrikada çalışan işçilerin performans skorları.............................. 35

Çizelge 9 Çizelge 8'deki verilere uygulanan modeldeki varyans bileşenleri tahmin değerleri.. 36

Çizelge 10 On dört farklı ailedeki bireylerin ATP seviyeleri (mol/gr)................. 37

Çizelge 11 Çizelge 10'daki verilere uygulanan modeldeki kovaryans bileşenleri tahmin değerleri.. 38

ŞEKİLLER **Sayfa No**

Şekil 1 Çizelge 1’deki veriler için normallik testi... 31

Şekil 2 Çizelge 2’deki veriler için normallik testi.. 33

Şekil 3 Çizelge 6 daki veriler için normallik testi... 34

Şekil 4 Çizelge 8’deki veriler için normallik testi.. 36

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER:

Adı Soyadı : Ahmet MOLLAOĞULLARI

Doğum Yeri : Kartal/İstanbul

Doğum Yılı : 1986

EĞİTİM DURUMU:

Lisans Öğrenimi : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

İŞ DENEYİMİ:

1. Araştırma Görevlisi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü 2009-...

İLETİŞİM:

e-posta: ahmet_m@comu.edu.tr