CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY, ROUGH VE SOFT KÜMELER İLE TOPOLOJİLERİ ÜZERİNE

SERKAN ATMACA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. İDRİS ZORLUTUNA

SİVAS
2010

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

Üye : Doç. Dr. Metin AKDAĞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. İdris ZORLUTUNA

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2010

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof. Dr. Sezai ELAGÖZ

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 24.09.2008 tarihli ve 7 sayılı toplantısında kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu adlı yönergeye göre hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÖZET

FUZZY, ROUGH VE SOFT KÜMELER İLE TOPOLOJİLERİ ÜZERİNE

Serkan ATMACA
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. İdris ZORLUTUNA
2010, 62 sayfa

Fuzzy küme, rough küme ve soft küme teorileri ile topolojik özelliklerini incelemeyi amaçlayan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ilk olarak fuzzy küme teorinin temel kavramları verilmiştir. Fuzzy kümeler üzerindeki işlemlerin tanımları verilerek fuzzy topolojik uzaylardaki temel kavramların bazıları incelenmiştir.

İkinci bölümde, rough küme tanımı ve örnekleri verilmiş, topolojik uzaylarda rough küme teorisi üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde, soft küme teorisi incelenmiştir. Bu amaçla ilk olarak soft küme tanımlanarak, soft kümeler üzerindeki çeşitli araştırmacılar tarafından verilen kesişim, birleşim ve tümleyen işlemlerinin tanım ve özellikleri listelenmiştir.

Tezin son bölümünde ise soft kümeler yardımıyla kurulan topolojik yapıların özelliklerini daha etkili inceleyebilmek için, üçüncü bölümde verilen kesişim, birleşim ve tümleyen işlemlerinin tanımları amaca uygun biçimde modifiye edilerek soft topoloji tanımlanmıştır. Daha sonra soft topolojik uzaylarda iç, kapanış, komşuluk, süreklilik, yakınsaklık ve kompaktlık gibi temel kavramlar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy küme, Fuzzy topoloji, Rough Küme, Soft Küme, Soft Topoloji

ABSTRACT

ON THE FUZZY, ROUGH, SOFT SETS AND TOPOLOGIES OF THEM

Serkan ATMACA

Master of Science Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. İdris ZORLUTUNA

2010, 62 pages

This study which purpose is to examine the fuzzy set, rough set, soft set theories and topological properties of these is composed four main parts.

In the first part, firstly fundamental notions of fuzzy set theory have been given. Operations on fuzzy set have been defined. After that some of fundamental notions on topological spaces have analyzed.

In the second part, definition of rough set and some examples of it have been given. After that rough set theory on topological spaces have been investigated.

In the third part, soft set theory have been analyzed. For this purpose, firstly definition of set has been given. After that definitions and properties of intersection, union and complement operations which given by various researchers on soft set have been listed.

In the last part, in order to efficiently discuss the topological structures which construct by soft set, we made some modifications on definitions of intersection, union and complement operations which given before. After then, some fundamental notions such as interior, closure, neighbourhood, continuity, convergence and compactness in soft topological spaces have been investigated.

Keywords: Fuzzy set, Fuzzy topology, Rough set, Soft set, Soft topology

TEŞEKKÜR

Araştırmalarımın başından sonuna kadar tüm safhalarında yardımını esirgemeyip, değerli fikir ve tecrübeleriyle bana büyük destek sağlayan değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. İdris ZORLUTUNA'ya teşekkür ederim.

Serkan ATMACA

GIRIŞ

Mühendislik, tıp, ekonomi ve sosyoloji gibi bir çok bilimde araştırmacılar kesin olmayan verilerin modellenmesinin karmaşıklığı ile uğraşmaktadırlar. Ancak bu alanlarda ortaya çıkan belirsizlikler çok çeşitli tiplerde olabileceğinden klasik metotlar modellemede yetersiz kalmaktadır. Belirsizliği tanımlama ve modellemenin önemini ünlü fizikçi Einstein şu şekilde ifade etmiştir: "Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değildirler". Belirsizlik problemleri üzerinde matematikçiler, mantıkçılar ve filozoflar uzun süredir uğraşmaktadırlar. Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesinin öneminden dolayı araştırmacılar her geçen gün yeni teoriler sunmaktadır

1930 larda ünlü filozof Max Black tarafından belirsizliği açıklayıcı öncü kavramlar geliştirilmiş olsa bile, bugün 1965 te Zadeh (1965) tarafından yayınlanan fuzzy teorinin sunulduğu makale modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir nokta olarak kabul edilir. Daha sonra araştırmacılar belirsizliklere yaklaşım için çeşitli teoriler ortaya atmıştır. Bunlardan bazıları rough kümeler (Pawlak, 1982), sezgisel fuzzy kümeler (Atasanov, 1986), vague kümeler (Gau ve Buehrer, 1993) ve soft kümeler (Molodtsov, 1999) dir. Bu tezde bu teorilerden fuzzy küme teorisi, rough küme teorisi ve soft küme teorisi üzerinde durulacaktır.

Fuzzy küme teori, klasik olasılık teorinin bir alternatifidir ve bu teori ile gerçek dünyada var olan belirsizlik kavramı matematiksel olarak denenmeye başlanmış ve görüntü işleme, robotik, denetim mühendisliği, bilgisayar mühendisliği, bilgi-işlem, vb. gibi günlük hayatımıza kadar giren konularda yararlı uygulamalar bulmuştur.

Rough küme teorisi ise bir evrenin altkümelerinin, evrenin bir parçalanışının denklik sınıfları yardımıyla ifade edilmesi ihtiyacından ortaya çıkmıştır. Bu teori klasik küme teorisinin bir genişlemesidir ve kümenin tek olarak elemanları ile tanımlandığı ve kümenin elemanları hakkında ilave hiçbir bilginin bulunmadığı klasik küme kuramının aksine, bir kümenin tanımlanması için başlangıçta evrenin elemanları hakkında bazı bilgilere gereksinim olduğu varsayımına dayanan yaklaşımdır. Ancak Molodtsov mevcut bu teorilerin parametrizasyon eksikliğinden dolayı bazı sıkıntıların var olduğunu belirterek belirsizlikler için yeni bir matematiksel yaklaşım olarak soft küme teoriyi ortaya attı. Bu teoride üyelik fonksiyonu kurma problemi olmaması, teoriyi pratikte kolay uygulanabilir kılmaktadır.

Bu çalışmada fuzzy küme, rough küme ve soft küme teorilerine ait temel kavramlar verilecek ve bu teoriler arasındaki ilişkiler incelenerek özellikle bu kümelerle oluşturulan topolojik uzaylar üzerinde durulacaktır.

1 FUZZY KÜME TEORI

1.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde, fuzzy küme teori ve fuzzy topoloji; bugüne kadar yapılan çalışmalardan derlenen bilgiler ile tanıtılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla öncelikle fuzzy küme kavramı ve fuzzy kümeler üzerinde işlemler örnekler yardımıyla anlatılmıştır. Ayrıca fuzzy topolojik uzaylardaki temel kavramlar sunulmuştur.

Tanım 1.1.1 (Zadeh, 1965) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $I = [0,1]$ kapalı aralık olsun. X den I ya tanımlı bütün dönüşümlerin kümesi I^X olmak üzere, I^X in her bir elemanına, X de bir fuzzy küme denir. Fuzzy kümeleri A,B,F,... gibi latin harfleriyle göstereceğiz.

Her $x \in X$ için, $A(x)$ değerine A nın bir x elemanının üyelik derecesi denir. X e A fuzzy kümesinin taşıyıcısı adı verilir. Eğer A sadece 0 ve 1 değerlerini alıyorsa A ya nonfuzzy (crips) denir. Sıfır değerine sahip üyelik dereceleri genellikle yazılmaz.

X deki bir A fuzzy kümesi $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ sıralı ikililerin kümesi biçiminde de yazılabilir. Burada $\mu_A(x)$ e üyelik fonksiyonu denir. X in bir A fuzzy altkümesi sıfırdan farklı değerler alıyorsa, bu değerler A nın dayanağı olarak bilinir (Ming ve Ming,1980). Yani her $A \in I^X$ fuzzy kümesi için, A nın dayanağı supp$(A) = \{x \in X : A(x) > 0\}$ ile tanımlıdır.

$\alpha \in [0,1]$ olmak üzere C_α ile, her $x \in X$ için $C_\alpha(x) = \alpha$ olan sabit fuzzy kümesini göstereceğiz.

Eğer $[0,1]$ kümesi yerine bir L tam latisi düşünülürse, X üzerindeki bir A latis fuzzy ($L-$fuzzy) küme

$$A : X \to L$$

biçiminde tanımlıdır. Burada L tam latisi, A nın değer kümesidir. L^X,

X ten L ye tanımlı tüm fonksiyonlardan oluşur ve L-fuzzy uzay olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.2 (Palaniappan, 2005) Bir emlakçı müşterilerine sunmak için evleri sınıflandırmak istiyor. Bu evlerin bir konfor göstergesi evlerin yatak odası sayısı olarak verilsin. x bir evin yatak odası sayısını temsil etmek üzere $X = \{x : x = 1, 2, ..., 10\}$ olsun. Bu durumda "4 kişilik aile için konforlu evler" fuzzy kümesi

$$A = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$$

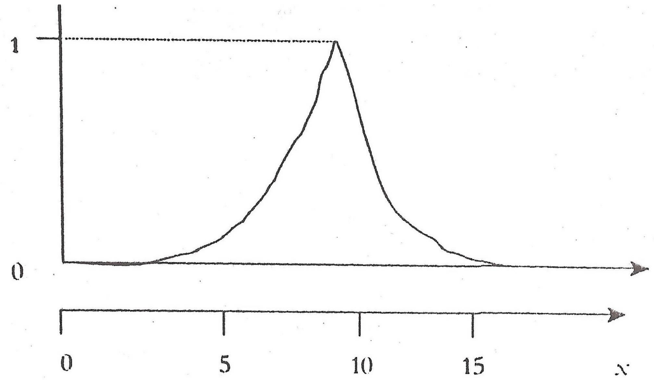
gibi tanımlanabilir. Bu kümedeki sıralı ikililerin ilk bileşeni oda sayısını ve ikinci bileşeni ise o evin konfor derecesini gösterir.

Örnek 1.1.3 (Palaniappan, 2005) A, 10 dan oldukça büyük reel sayılar kümesi ise bu kümeyi $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ ile gösterebiliriz. Burada μ_A,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 10 \\ (1 + (x - 10)^2)^{-1} & , x > 10 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanabilir.

Örnek 1.1.4 (Palaniappan, 2005) A, 10 a yakın reel sayılar kümesi ise bu kümeyi $A = \{(x, \mu_A(x)) : \mu_A(x) = (1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, x \in X\}$ ile gösterebiliriz.



Şekil 1.1.1 10 a yakın reel sayılar

Fuzzy kümeler

$$\begin{aligned} A &= \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + ... + \mu_A(x_n)/x_n \\ &= \sum_{i=1} \mu_A(x_i)/x_i \end{aligned}$$

veya

$$\int_X \mu_A(x)/x$$

biçimindede sunulabilir.

Örnek 1.1.5 (Palaniappan, 2005) A, 10 a yakın tam sayılar kümesi ise bu kümeyi $A = 0.1/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 1/10 + 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13$

biçiminde gösterebiliriz.

Örnek 1.1.6 (Palaniappan, 2005) A, 10 a yakın reel sayılar kümesi ise bu kümeyi

$$A = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + (x - 10)^2}/x$$

biçiminde de gösterebiliriz.

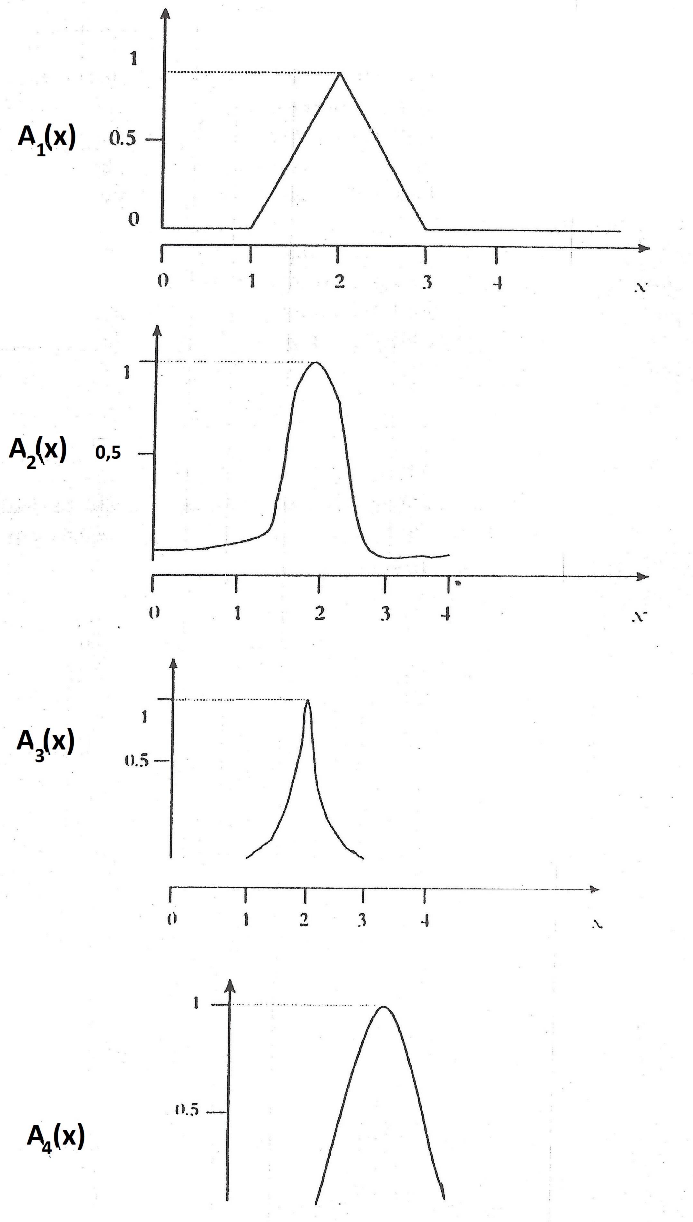
Fuzzy kümeler bize belirsiz kavramları doğal dilde sunmamıza olanak sağlar. Bu sunum sadece kavramlara değil kullanıldığı yerdeki koşullara bağlıdır. Örneğin "yüksek sıcaklık" kavramının uygulanması, hava için başka, bir nükleer reaktör için başka fuzzy kümeler ile sunulmalıdır. Hatta benzer koşullar için bile aynı kavramları gösteren fuzzy kümeler çok çeşitli olabilir.

Örneğin üyelik fonksiyonları aşağıda gösterilen dört fuzzy kümeyi düşünelim. Her fuzzy küme 2 ye yakın olan reel sayılar kümesidir. Onların farklılıklarına rağmen bu fuzzy kümeler aşağıdaki özellikler anlamında benzerdir. $i = 1, 2, 3, 4$ için

(i) $A_i(2) = 1$ ve $x \neq 2$ için $A_i(x) < 1$

(ii) A_i, $x = 2$ ye göre simetriktir, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $A_i(2 + x) = A_i(2 - x)$ dir.

(iii) $A_i(x)$, $|2 - x|$ artan farkına göre 1 den 0 a monoton azalandır



Şekildeki dört üyelik fonksiyonu da $[1, 3]$ d¬ş¬ndaki say¬lardaki değerleri anlam¬nda benzerdir. Çünkü onlar¬n üyelik dereceleri 0 a eşittir. Bu benzerlik kavram¬n kendisini ifade etmez. Buradaki fonksiyonlar grafiklerinin farkl¬ şekilleri ile ifade edilebilirler. Özel bir şeklin uygun olup olmad¬ğ¬ sadece özel bir uygulaman¬n koşullar¬ yard¬m¬yla belirlenebilir.

Aşağ¬dakiler üyelik fonksiyonlar¬n¬ tan¬mlayan genel formüllerdir. Burada r üyelik değeri 1 olmas¬ istenen reel say¬lar¬ gösterir (şekildeki her fonksiyon için

$r = 2$ dir). P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ise her x için $|r - x|$ artan farkıyla fonksiyondaki azalma oranını gösteren parametredir.

$$A_1(x) = \begin{cases} p_1(x - r) + 1 & , x \in [r - 1/p_1, r] \\ p_1(r - x) + 1 & , x \in [r, r + 1/p_1] \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$A_2(x) = \frac{1}{1 + p_2(x - r)^2}$$

$$A_3(x) = e^{-|p_3(x - r)|}$$

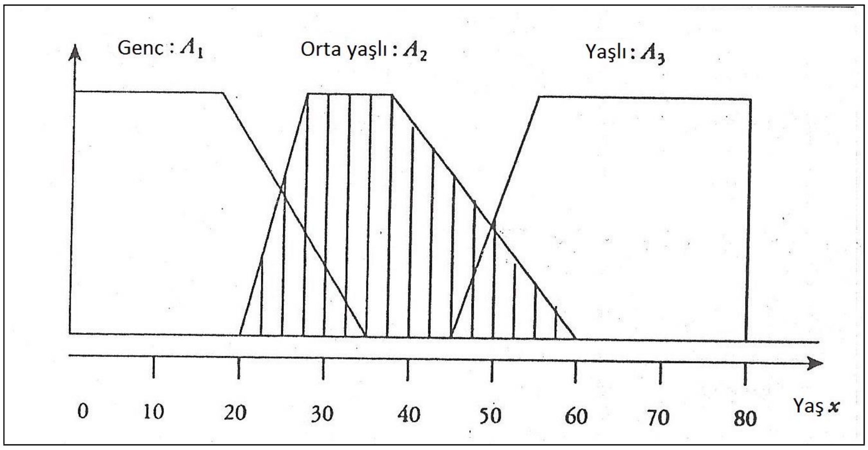
$$A_4(x) = \begin{cases} 1 + \cos(p_4\pi(x - r))/2 & , x \in [r - 1/p_4, r + 1/p_4] \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Örnek 1.1.7 (Palaniappan, 2005) Genç, orta yaşlı, yaşlı kavramlarını sunan sırasıyla A_1, A_2 ve A_3 fuzzy kümelerini düşünelim. Şekil 1.1.3 de verilen A_1, A_2 ve A_3 yamuk üyelik fonksiyonları $[0, 80]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 20 \\ (35 - x)/15 & , 20 < x < 35 \\ 0 & , x \geq 35 \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 20 \text{ veya } x \geq 60 \\ (x - 20)/15 & , 20 < x < 35 \\ (60 - x)/15 & , 45 < x < 60 \\ 1 & , 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$A_3(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 45 \\ (x - 45)/15 & , 45 < x < 60 \\ 1 & , x \geq 60 \end{cases}$$



Şekil 1.1.3 Genç, OrtaYaşlı, Yaşlı kavramlarını sunan üyelik fonksiyonları

A_2 fonksiyonun ayrık yaklaşımı D_2 sayısal olarak tablo 1 de aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$D_2 : \{0, 2, ..., 80\} \to [0, 1]$$

x	$D_2(x)$
x∉{22,24,...,58}	0,00
x∈{22,58}	0,13
x∈{24,56}	0,27
x∈{26,54}	0,40
x∈{28,52}	0,53
x∈{30,50}	0,67
x∈{32,48}	0,80
x∈{34,46}	0,93
x∈{36,38,...,44}	1,00

Tablo 1.1.1

A_2 fonksiyonun tablo 1.1.1 de açıkça verilen olası bir ayrık yaklaşımı olan D_2 şekil 1.1.3 te de gösterilmektedir. Böyle yaklaşımlar önemlidir çünkü bu yaklaşımlar fuzzy kümelerin bilgisayar kullanımında belirleyicidir.

A_2 üyelik fonksiyonun ayrık yaklaşımı olan $D_2 : \{0, 2, ..., 80\} \to [0, 1]$ tablo 1.1.1 de aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

Fuzzy kümelerdeki en önemli kavramlardan biride α-seviye ve onun bir çeşidi olan güçlü α-seviyedir. X üzerinde tanımlı bir A fuzzy kümesi ve herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ sayısı için α-seviye A_α ve güçlü α-seviye A^*_α lar crips kümelerdir ve bunlar

$A_\alpha = \{x : A(x) \geq \alpha\}$

$A^*_\alpha = \{x : A(x) > \alpha\}$

biçiminde tanımlıdırlar. Bu kümeler üyelik dereceleri α özel değerinden büyük ve eşit olan (sadece büyük olan) X evrensel kümesinin tüm elemanlarını içerir.

Aşağıdakiler şekil 1.1.3 te verilen A_1, A_2 ve A_3 fuzzy kümelerinin tüm α-seviye ve güçlü α-seviye kümelerinin tam bir karakterizasyonudur.

$A_{1_0} = A_2(0) = A_3(0) = [0,80] = X$

A_{1_α}=[0,35-15α]

$A_{2_\alpha} = [15\alpha + 20, 60 - 15\alpha]$

$A_{3_\alpha} = [15\alpha + 45, 80]$, $\alpha \in (0,1]$

$A^*_{1_\alpha} = (0, 35 - 15\alpha)$

$A^*_{2_\alpha} = (15\alpha + 20, 60 - 15\alpha)$

$A^*_{3_\alpha} = (15\alpha + 45, 80)$, $\alpha \in [0,1]$

$A^*_{1_1} = A^*_{2_1} = A^*_{3_1} = \emptyset$ boş kümedir.

Verilen bir A fuzzy kümesinin farklı α-seviyelerini gösteren tüm $\alpha \in [0,1]$ seviyelerinin kümesi A nın bir seviye kümesi olarak adlandırılır ve

$\Lambda(A) = \{\alpha$:bazı $x \in X$ ler için $A(x) = \alpha\}$

ile gösterilir. Bu durumda

$\Lambda(A_1) = \Lambda(A_2) = \Lambda(A_3) = [0,1]$

ve

$\Lambda(D_2) = \{0.00, 0.13, 0.27, 0.40, 0.53, 0.67, 0.80, 0.93, 1.00\}$

olarak bulunur.

1.2 Fuzzy Kümeler Için Teorik Işlemler

Üyelik fonksiyonu bir fuzzy kümenin önemli bir parçasıdır. Bu yüzden fuzzy küme üzerindeki işlemler üyelik fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Aşağıda Zadeh tarafından 1965 te ileri sürülen kavramları sunacağız. Bu tanımlar klasik küme teorisini genişletilmesi için tek mümkün yol değildir. Bu yüzden Zadeh ve diğer yazarlar teorik işlemler için alternatif veya ek tanımlar ortaya attılar.

Tanım 1.2.1.(Chang, 1968) X de tanımlı herhangi A ve B fuzzy kümeleri için aşağıdakiler vardır.

$A \leq B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $A(x) \leq B(x)$

$A = B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $A(x) = B(x)$

Tanım 1.2.2. (Zadeh, 1965) X de tanımlı herhangi A ve B fuzzy kümeleri verilsin.

(i) A nın tümleyeni $A^C = 1 - A$ ile gösterilir ve her $x \in X$ için $A^C(x) = 1 - A(x)$ biçiminde tanımlanır.

(ii). A ve B fuzzy kümelerinin birleşimi $A \vee B$ ile gösterilir ve her $x \in X$ için $(A \vee B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}$ biçiminde tanımlanır.

(iii) A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi $A \wedge B$ ile gösterilir ve her $x \in X$ için $(A \wedge B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$ biçiminde tanımlanır.

Bir $x \in X$ noktası için $(A \wedge B)(x) \neq \emptyset$ oluyor ise A ve B fuzzy kümeleri x de kesişiyor denir.

Daha genel olarak, fuzzy kümelerin bir $\gamma = \{A_i : i \in I\}$ ailesi için, $B = \vee A_i$ birleşim kümesi ile $D = \wedge \mu_i$ kesişim kümesi her $x \in X$ için sırasıyla, $B(x) = sup\{A_i(x)\}$, $D(x) = inf\{A_i(x)\}$ şeklinde tanımlanır (Chang, 1968).

Örnek 1.2.3 (Palaniappan, 2005) Örnek 1.1.2 deki $A = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$ "4 kişilik aile için uygun tipteki evlerin" fuzzy kümesi ve $B = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0, 8), (7, 1), (8, 1)\}$ "büyük tipteki evlerin" fuzzy kümesi verilsin.

Bu durumda $C = A \wedge B$ kümesi $C = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0, 3)\}$ ve $D = A \vee B$ olmak üzere $D = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1)\}$ biçimindedir.

Ayrıca B nin tümleyen B^C "büyük tipte olmayan evlerin" fuzzy kümesi olarak yorumlanabilir ve

$B^C = \{(1, 1), (2, 1), (3, 0.8), (4, 0.6), (5, 0.4), (6, 0, 2), (7, 0), (8, 0), (9, 1), (10, 1)\}$

biçiminde olur.

Örnek 1.2.4 (Palaniappan, 2005) Kabul edelimki A, "10 dan oldukça büyük reel sayılar" kümesi ile B "11 e yakın reel sayılar" kümesi aşağıdaki üyelik fonksiyonları ile tanımlansın.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & ,x \le 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1} & ,x > 10 \end{cases}$$

ve

$$\mu_B(x) = (1 + (x - 11)^4)^{-1}$$

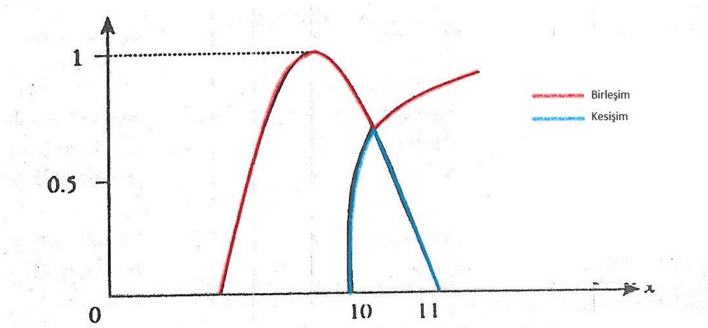
Bu durumda

$$\mu_{A\wedge B}(x) = \begin{cases} 0 & ,x \le 10 \\ \min\{(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}\} & ,x > 10 \end{cases}$$

10 dan oldukça büyük ve 11 e yakın reel sayıların kümesinin üyelik fonksiyonudur. Birleşim kümesi ise $x \in X$ için

$$\mu_{A\vee B}(x) = \max\{(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}\}$$

biçiminde tanımlanır.



Şekil 1.2.1 Birleşim ve Kesişim fuzzy kümeleri

Tanım 1.2.5. $f : X \to Y$ bir fonksiyon, $A \in I^X$ ve $B \in I^Y$ olsun. Bu durumda $f(A)$ Y de bir fuzzy kümedir ve her $y \in Y$ için

$$(f(A))(y) = \begin{cases} \sup\{A(x) : x \in f^{-1}(y)\} & ,\ f^{-1}(y) \ne \emptyset \\ 0 & ,\ f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır.

Ayrıca $f^{-1}(B)$ X de bir fuzzy kümedir ve her $x \in X$ için $(f^{-1}(B))(x) = B(f(x))$ biçiminde tanımlıdır.

Önerme 1.2.6. $f : X \to Y$ bir fonksiyon, $A \in I^X$ ve $B \in I^Y$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(i) Y deki her B fuzzy kümesi için $f^{-1}(B^C) = (f^{-1}(B))^C$

(ii) Y deki her B fuzzy kümesi için $f(f^{-1}(B)) \leq B$ dir.

(iii) X deki her A fuzzy kümesi için $A \leq f^{-1}(f(A))$ dır.

Önerme 1.2.7 $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\{A_j\}$ Y deki fuzzy kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

1. $f^{-1}(\vee A_j) = \vee f^{-1}(A_j)$
2. $f^{-1}(\wedge A_j) = \wedge f^{-1}(A_j)$

1.3 Fuzzy Topolojik Uzaylar

Tanım 1.3.1 (Chang, 1968) X içindeki fuzzy kümelerin bir ailesi τ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise, τ ya X üzerinde bir fuzzy topoloji, (X, τ) ikilisine de fuzzy topolojik uzay (kısaca f t u) denir.

T1. $0, 1 \in \tau$

T2. A, $B \in \tau$ ise, bu halde $A \wedge B \in \tau$

T3. Her $i \in I$ için $A_i \in \tau$ ise, bu halde $\vee_{i \in I} A_i \in \tau$

τ nun elemanları fuzzy açık kümeler olarak adlandırılır. Bir K fuzzy kümesi için $K^C \in \tau$ ise K fuzzy kümesine fuzzy kapalı küme denir. Bir fuzzy topolojik uzaydaki bütün fuzzy kapalı kümelerin kolleksiyonu τ^k ile gösterilir. Ayrıca aşağıdaki koşulların sağlandığı açıktır.

K1. $0, 1 \in \tau^k$

K2. K,$M \in \tau^k$ ise $K \vee M \in \tau^k$

K3. $\{K_j : j \in J\} \in \tau^k$ ise $\wedge\{K_j : j \in J\} \in \tau^k$

Örnek 1.3.2 $X = \{a, b\}$ ve X üzerindeki bir A fuzzy kümesi $A(a) = 0.5$, $A(b) = 0.4$ biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda $\tau = \{0, A, 1\}$ bir fuzzy topolojidir ve (X, τ) bir fuzzy topolojik uzaydır. Burada her $a \in X$ için $0(a) =$

0 ve $1(a)$ = 1 dir.

Tanım 1.3.3 (Azad, 1981) X deki bir A fuzzy kümesinin $\overline{A}$ $(Cl(A))$ kapanışı ve A° $(int(A))$ içi sırasıyla $\overline{A} = \inf\{K \mid A \leq K, K^C \in \tau\}$,
$A^\circ = \sup\{O \mid O \leq A, O \in \tau\}$ biçiminde tanımlanır.

Önerme 1.3.4 (Azad, 1981) (X, τ) fuzzy topolojik uzay ve $B \in I^X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

(i) $(int(B))^C = Cl(B^C)$

(ii) $(Cl(B))^C = int(B^C)$

Tanım 1.3.5 τ_1 ve τ_2 X üzerinde iki fuzzy topoloji olsun. Eğer altküme olma bağıntısına göre $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise τ_2, τ_1 den daha incedir veya τ_1, τ_2 den daha kalındır denir.

Örnek 1.3.6 (Palaniappan, 2005) I da A, B ve C fuzzy kümeleri

$$A(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -4x + 2 & , \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{4x - 1}{3} & , \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda $\tau = \{0, A, B, A \vee B, 1\}$, I üzerinde bir fuzzy topolojidir. Ayrıca açıktır ki $Cl(A) = B^C$, $Cl(B) = A^C$, $Cl(A \vee B) = 1$, $int(A^C) = B$, $int(B^C) = A$ ve $int((A \vee B)^C) = 0$ dır.

Tanım 1.3.7 (X,τ) bir f t u ve $\beta \subseteq \tau$ olsun. Her $A \in \tau$ açığı, bir $\{A_j\}_{j \in J} \subseteq \beta$ için $A = \bigvee_{j \in I} A_j$ biçiminde yazılabiliyorsa β ya τ için bir taban denir. Ayrıca bir $\rho \subseteq \tau$ kümesinin elemanlarının sonlu infimumlarının kümesi τ için bir taban ise ρ ya τ nun bir alttabanı denir.

Tanım 1.3.8 A bir fuzzy küme ve $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ fuzzy kümelerin bir ailesi olsun. Eğer $\bigvee_{\alpha \in J} A_\alpha \supseteq A$ ise $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ ailesine A nın bir örtüsü denir. Ayrıca en az bir $J_0 \subseteq J$ için $\vee\{A_\alpha : \alpha \in J_0\} \supseteq A$ oluyorsa $\{A_\alpha : \alpha \in J_0\}$ ailesine $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ ailesinin bir alt örtüsü denir.

1.4 Fuzzy Nokta Kavramı ve Komşuluklar Sistemi

Tanım 1.4.1 (Ming ve Ming, 1980) $x \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. X içindeki x_α fuzzy noktası,

$$x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & , x = y \\ 0 & , x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanan X içindeki fuzzy kümesidir. x_α fuzzy noktasının sıfırdan farklı değer aldığı tek x noktasına x_α nın dayanağı (support) ve α yada x_α nın değeri (value) denir. Özel olarak $x_\alpha(y) = \begin{cases} 1 & , x = y \\ 0 & , x \neq y \end{cases}$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanan fuzzy kümeye crips nokta adı verilir. X üzerindeki bütün fuzzy noktaların kümesi $P_t(I^X)$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.2 (Ming ve Ming, 1980) x_α bir fuzzy nokta ve A bir fuzzy küme olmak üzere $\alpha \leq A(x)$ ise $x_\alpha \in A$ dır.

Özel olarak $x_\alpha \in y_\beta \Leftrightarrow y = x$ ve $\alpha \leq \beta$ dir.

Açıkça her A fuzzy kümesi A daki fuzzy noktaların birleşimi olarak yazılabilir. Yani $x \in X$ için $A(x) \neq 0$ ise

$A(x) = \sup\{\alpha : x_\alpha$ bir fuzzy nokta ve $0 < \alpha \leq A(x)\}$

dir.

Önerme 1.4.3 A ve B X de iki fuzzy küme olsun. Bu durumda X deki her x_α fuzzy noktası için $x_\alpha \in A \Leftrightarrow x_\alpha \in B$ oluyorsa $A = B$ dir.

Önerme 1.4.4 $\{A_j : j \in J\}$ X deki fuzzy kümelerin bir ailesi, x_α ve y_β X de iki fuzzy nokta ve $f : X \to Y$ ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur;

(i) $x_\alpha \in \vee\{A_j : j \in J\}$ dır ancak ve ancak bir $j \in J$ için $x_\alpha \in A_j$ dır.

(ii) $x_\alpha \in \wedge\{A_j : j \in J\}$ ise her $j \in J$ için $x_\alpha \in A_j$ dır.

(iii) $x_\alpha \in y_\beta$ ve her $j \in J$ için $y_\beta \in A_j$ ise $x_\alpha \in \wedge\{A_j : j \in J\}$ dir.

(iv) $f(x_\alpha) = f(x)_\alpha$

(v) $f((x_\alpha)^C) = (f(x)_\alpha)^C$

(vi) A, X de bir fuzzy küme olmak üzere $x_\alpha \in A$ ise $f(x_\alpha) \in f(A)$ dır.

(vii) B Y de bir fuzzy küme olmak üzere $x_\alpha \in f^{-1}(B)$ ise $(f(x))_\alpha \in B$ dır.

(viii) $y_\beta \in f(A)$ ise bir $x \in X$ için $f(x) = y$ ve $x_\alpha \in A$ dır.

(ix) $y_\beta \in B$ ve $y \in f(X)$ ise her $x \in f^{-1}(y)$ için $x_\beta \in f^{-1}(B)$ dır.

Tanım 1.4.5 (X, τ) da bir A fuzzy kümesi ve bir x_α fuzzy noktası verilsin. Bu durumda bir $B \in \tau$ için $x_\alpha \in B \leq A$ ise A fuzzy kümesi x_α fuzzy noktasının bir komşuluğudur denir. Eğer A fuzzy kümesi açık ise açık komşuluk olarak adlandırılır. x_α fuzzy noktasının tüm komşuluklarından oluşan aileye x_α nın komşuluklar sistemi denir ve $N(x_\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.6 (Ming ve Ming, 1980) Bir x_α fuzzy noktası ve bir A fuzzy kümesi verilsin. Eğer $\alpha > A^C(x)$ veya $\alpha + A(x) > 1$ ise x_α ile A çakışıkmıştır denir ve $x_\alpha q A$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.7 (Ming ve Ming, 1980) A ve B fuzzy kümeleri verilsin. Eğer bir $x \in X$ için $A(x) > B^C(x)$ veya $A(x) + B(x) > 1$ oluyorsa A ile B çakışıkmıştır denir ve AqB ile gösterilir. Eğer $x \in X$ noktasında A ve B çakışıkmış ise bu kümeler x de çakışıkmıştır denir. Eğer çakışıkmış değilseler $A \not{q} B$ yazacağız.

Önerme 1.4.8 $f : X \to Y$ bir fonksiyon, x_α X de bir fuzzy nokta, A, X de ve B, Y de fuzzy kümeler olsunlar. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(i) $f(x_\alpha)qB$ ise $x_\alpha q f^{-1}(B)$ dir.

(ii) $x_\alpha q A$ ise $f(x_\alpha)qf(A)$ dır.

(iii) $f(x_\alpha) \in B$ ise $x_\alpha \in f^{-1}(B)$ dir.

(iv) $x_\alpha \in A$ ise $f(x_\alpha) \in f(A)$ dır.

Tanım 1.4.9 (Ming ve Ming, 1980) (X, τ) da bir A fuzzy kümesi ve bir x_α fuzzy noktası verilsin. Bu durumda bir $B \in \tau$ için $x_\alpha q B \leq A$ oluyorsa A fuzzy kümesine x_α fuzzy noktasının bir q-komşuluğudur denir. x_α nın tüm q-komşuluklarından oluşan aileye x_α nın q-komşuluklar sistemi adı verilir ve genellikle $N_q(x_\alpha)$ ile gösterilir.

Örnek 1.4.10 Bir fuzzy noktanın bir q-komşuluğu genellikle o noktayı içermez. $X = \{a, b\}$ ve X üzerindeki bir A fuzzy kümesi $A(a) = 0.5$, $A(b) = 0.4$ biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda $\tau = \{0, A, 1\}$ bir fuzzy topolojidir. $a_{0.7}$ fuzzy noktasını ele alalım. Bu durumda $B(a) = 0.6$, $B(b) = 0.5$ biçiminde tanımlı olan B fuzzy kümesi için $B \in N_q(a_{0.7})$ ancak $a_{0.7} \notin B$ dir.

Önerme1.4.11 (Ming ve Ming, 1980) A ve B iki fuzzy küme olsun. $A \leq B$ olması için gerek ve yeterli koşul A ile B^C kümelerinin çakışığımsı olmamasıdır. Özellikle, $x_\alpha \in A$ olması için gerek ve yeterli koşulu $x_\alpha \not{q} A^C$ olmasıdır .

Kanıt.

$$\begin{aligned} A \leq B \quad &\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } A(x) \leq B(x) \\ &\Leftrightarrow 1 + A(x) \leq 1 + B(x) \\ &\Leftrightarrow A(x) + 1 - B(x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow A(x) + B^C(x) \leq 1 \end{aligned}$$

ayrıca

$$\begin{aligned} x_\alpha \in A \quad &\Leftrightarrow x \in X \text{ için } \alpha \leq A(x) \\ &\Leftrightarrow 1 + \alpha \leq 1 + A(x) \\ &\Leftrightarrow \alpha + 1 - A(x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x_\alpha + A^C(x) \leq 1 \end{aligned}$$

Teorem 1.4.12 (Ming ve Ming, 1980) (X, τ) fuzzy topolojik uzay, x_α bir fuzzy nokta ve $B \in I^X$ olsun. $x_\alpha \in Cl(B)$ olması için gerek ve yeterli koşul x_α nın her q-komşuluğunun B ile çakışığımsı olmasıdır .

Teorem 1.4.13 (Ming ve Ming, 1980) (X, τ) fuzzy topolojik uzay, x_α bir fuzzy nokta ve $B \in I^X$ olsun. $x_\alpha \in int(B)$ olması için gerek ve yeterli koşul x_α nın en az bir komşuluğunun B içinde kalmasıdır.

Önerme 1.4.14 N, (X, τ) daki bir x_α fuzzy noktasının q-komşuluklarının (komşuluklarının) bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(i) $U \in N$ ise x_α, U ile çakışığımsıdır. (U ya aittir)

(ii) $U, V \in N$ ise $U \wedge V \in N$ dir.

(iii) $U \in N$ ve $U < V$ ise $V \in N$ dir.

(iv) $U \in N$ ise $V \leq U$ olacak şekilde öyle bir $V \in N$ vardır ki $y_\beta q V$

$(y_\beta \in V)$ ise $U \in N_q(y_\beta)$ $(U \in N(y_\beta))$ dir.

Tersine, X de ki her x_α fuzzy noktası için N yukarıdaki 1-3 koşullarını sağlıyorsa, $x_\alpha q U$ $(x_\alpha \in V)$ olduğunda $U \in N$ biçimindeki tüm U kümelerinin ailesi δ, X üzerinde bir fuzzy topolojidir. Ayrıca N, 4 koşulu sağlıyorsa N bu δ topolojisine göre x_α fuzzy noktasının q-komşuluklar (komşuluklar) sistemidir.

Kanıt. (i) $U \in N$ ise $x_\alpha q A \leq U$ olacak biçimde bir $A \in \tau$ vardır. $x_\alpha q A$ olduğundan $\alpha + A(x) > 1$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır ve her $x \in X$ için $A(x) \leq U(x)$ olduğundan $\alpha + U(x) > 1$ olur bu ise $x_\alpha q U$ olduğunu verir.

(ii) $U, V \in N$ ise $x_\alpha q A \leq U$ ve $x_\alpha q B \leq V$ olcak biçimde $A, B \in \tau$ vardır. $x_\alpha q A$ ise $\alpha + A(x) > 1$ ve $x_\alpha q B$ ise $\alpha + B(x) > 1$ bulunur $\min\{A(x), B(x)\} = C(x)$ dersek $\alpha + C(x) > 1$ olur ve her $x \in X$ için $C \leq U \wedge V$ bulunur ki bu ise $U \wedge V \in N$ olduğunu verir.

(iii) $U \in N$ ise $x_\alpha q A \leq U$ olacak biçimde bir $A \in \tau$ vardır. Burada $U < V$ ise $x_\alpha q A \leq U < V$ olur ki bu ise $V \in N$ olduğunu verir.

(iv) $U \in N$ ise $x_\alpha q A \leq U$ olacak biçimde bir $A \in \tau$ vardır. Burada özel olarak $V := A$ olarak tanımlayabiliriz. Bu durumda $y_\beta q A$ olan her y_β için $A \leq U$ olduğundan 3 gereği U, y_β nın da bir açık q-komşuluğu olur.

Önerme 1.4.15 $\{A_j\}$ X deki fuzzy kümelerin bir ailesi ve x_α bir fuzzy nokta olsun. Bu durumda bazı $A_j \in \tau$ lar için $x_\alpha q A_j$ ise x_α fuzzy noktası $\vee A_j$ ile çakışığımsıdır.

Kanıt. $x_\alpha q A_j \Rightarrow x \in X$ için $\alpha + A_j(x) \geq 1$ tir. $\vee A_j = sup\{A_j(x)\}$ olduğundan $\alpha + sup\{A_j(x)\} \geq 1$ olur ki bu x_α fuzzy noktasının $\vee A_j$ ile çakışığımsı olduğunu verir.

Önerme 1.4.16 (X, τ) daki bir $\mathbf{B}$ altailesi τ için bir tabandır ancak ve ancak (X, τ) daki her x_α fuzzy noktası ve x_α nın her U q-komşuluğu için $x_\alpha q B < U$ olacak biçimde bir $B \in \mathbf{B}$ elemanı vardır.

Kanıt. $(\Rightarrow:)$ Tanımlardan açıktır.

$(\Leftarrow:)$ Kabul edelim ki $\mathbf{B}$, τ için bir taban olmasın. Bu durumda bir $A \in \tau$ için $G = \vee\{B \in \mathbf{B} : B < A\} \neq A$ dir. Bu yüzden en az bir $x \in X$ için

$G(x) < A(x)$ dir. $\alpha = 1 - G(x)$ alırsak $A(x) + \alpha > G(x) + \alpha = 1$ yani $A(x) + \alpha > 1$ dir. Buradan $x_\alpha q A$ olduğunu buluruz. Fakat A nın kapsadığı her $B \in \mathbf{B}$ elemanı G tarafından da kapsanır. Buradan $B(x) + \alpha \leq G(x) + \alpha = 1$ olur ki buda $x_\alpha \not q B$ olduğunu verir. Bu ise kabulümüzle çelişir.

Tanım 1.4.17 $x_{1-\alpha}$ fuzzy noktasına x_α fuzzy noktasının dual noktası denir. Dayanağı x olan x_1 crips noktası için dual nokta x_0 dır.

Teorem 1.4.18 (X, τ) bir f.t.u, A bir fuzzy küme ve x_α fuzzy nokta olsun. Bu durumda $x_{1-\alpha}$ dual komşuluğu A ile çakışığımsı ise $x_\alpha \in \overline{A}$ dır $x_{1-\alpha} \notin \overline{A^c}$ ise $x_\alpha \in A^\circ$ dir.

2 ROUGH KÜME TEORI

Bu bölümde belirsizlik için yeni bir matematiksel malzeme olan rough küme teorisi tanıtılacaktır. Rough küme teorisi bir evrenin altkümelerinin, evrenin bir parçalanışının denklik sınıfları yardımıyla ifade edilmesi ihtiyacından ortaya çıkmıştır. Rough küme teorisi, klasik küme teorisinin bir genişlemesidir. Bu teoride bir evrensel kümenin bir altkümesi, alt ve üst yaklaşım olarak adlandırılan sıralı ikili kümeler ile tanımlanır. Rough küme teorisi Pawlak (1982) tarafından ortaya atılmıştır ve bu teoride temel araç bir denklik bağıntısıdır. Alt ve üst yaklaşımlar denklik sınıfları ile inşa edilir. Araştırmacılar bu teoriye büyük bir ilgi göstermiş ve özellikle cebirsel yapılar tanımlanarak rough küme teorisi geliştirilmiştir. Bu bölüm konu ile ilgili yapılan çalışmalardan bir derlemedir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Pawlak, 1982) U objelerin bir kümesi ve X de U nun bir altkümesi olsun. X kümesini U üzerinde tanımlanan bir R denklik bağıntısına göre karakterize edelim. R_x bir x elemanının denklik sınıfını göstermek üzere alt ve üst yaklaşımlar aşağıdaki gibi verilir.

$\underline{R}(X) = \{x \in U : R_x \subseteq X\}$

$\overline{R}(X) = \{x \in U : R_x \cap X \neq \emptyset\}$

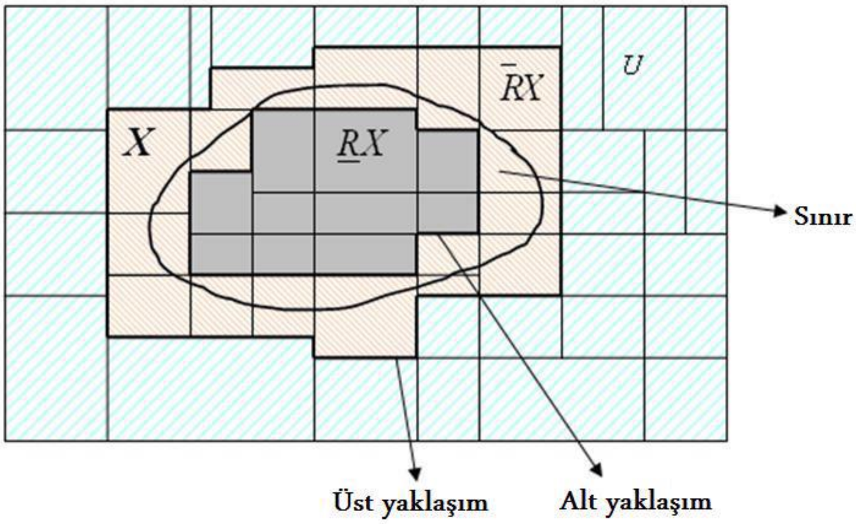
Sınır, negatif ve pozitif bölgeler ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$BN_R(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X)$

$POS_R(X) = \underline{R}(X)$

$NEG_R(X) = U - \overline{R}(X)$

Buna göre bir kümenin alt yaklaşımı, tamamen küme tarafından kapsanan denklik sınıflarından, bir kümenin üst yaklaşımı ise kümeyle arakesitleri boştan farklı olan denklik sınıflarının birleşiminden ve kümenin sınır bölgesi de üst ve alt yaklaşımların arasındaki farktan oluşmaktadır. Bunlar Şekil 2.1.1 de açık bir şekilde görülmektedir.



Şekil 2.1.1

Bu bilgiler doğrultusunda klasik küme, fuzzy küme ve rough küme tanımlarını karşılaştırırsak, klasik küme bir gösterim ve sezgisel veya aksiyomlarla tanımlanır. Fuzzy kümeler, ileri düzeyde matematiksel yapılar, sayılar ve fonksiyonlar içeren üyelik fonksiyonlarıyla tanımlanır. Rough kümeler ise yaklaşımlarla tanımlanır. Görüldüğü gibi rough küme teorisi fuzzy küme teorisinde olduğu gibi klasik küme teorisinin bir alternatifi değil aksine bir parçasıdır.

Örnek 2.1.2 $U = \{a, b, c, d, e\}$ ve U üzerinde $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$ denklik bağıntısı verilsin. Buna göre R nin denklik sınıfları aşağıdaki gibidir.

$R_a = R_b = R_c = \{a, b, c\}$

$R_d = \{d\}$

$R_e = \{e\}$

Şimdi $X = \{b, c, d\} \subseteq U$ kümesini ele alalım. X kümesinin R denklik bağıntısına göre üst yaklaşımı, alt yaklaşımı ve sınır bölgesi aşağıdaki gibidir.

$\overline{R}(X) = \{a, b, c, d\}$

$\underline{R}(X) = \{d\}$

$BN_R(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X) = \{b, c, d\}$

Örnek 2.1.3 (Aktaş ve Çağman,2005) $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ objelerin bir kümesi, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ değişkenlerin kümesi ve $V_{a_1} = \{1, 2, 3\}, V_{a_2} = \{1, 2\}, V_{a_3} = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri de her bir değişkenin aldığı değerlerin kümesini göstersin. Yukarıda verilen 10 obje için elde edilen üç sonucu bir matris formunda aşağıdaki gibi verelim. Ayrıca bu sistem için f_a fonksiyonu tablodaki gibi verilir.

U	a_1	a_2	a_3
x_1	2	1	3
x_2	3	2	1
x_3	2	1	3
x_4	2	2	3
x_5	1	1	4
x_6	1	1	2
x_7	3	2	1
x_8	1	1	4
x_9	2	1	3
x_{10}	3	2	1

Tablo 2.1.1

Tablo 2.1.1 e göre $f_{a_1}(x) = V_1,\ f_{a_2}(x) = V_2$ ve $f_{a_3}(x) = V_3$ olarak elde edilir. R_{x_i}, x_i elemanının denklik sınıfını göstermek üzere $R_{x_i} = \{x_j : x_j, x_i$ ile aynı ölçüme sahip, $1 \leq i, j \leq 10\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre

$R_{x_1} = R_{x_3} = R_{x_9} = \{x_1, x_3, x_9\}$

$R_{x_2} = R_{x_7} = R_{x_{10}} = \{x_2, x_7, x_{10}\}$

$R_{x_4} = \{x_4\}$

$R_{x_5} = R_{x_8} = \{x_5, x_8\}$

$R_{x_6} = \{x_6\}$

şeklinde hesaplanır. Bu denklik sınıflarından yararlanarak U nun $X = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9\}$ altkümesi için alt yaklaşımı, üst yaklaşımı ve sınırını bulalım.

$\overline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$

$\underline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\}$

$BN_R(X) = \{x_5, x_8\}$

Önerme 2.1.4 (Aktaş ve Çağman,2005) Bir kümenin yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X)$

(ii) $\underline{R}(\emptyset) = \overline{R}(\emptyset) = \emptyset$

(iii) $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$

(iv) $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$

(v) $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y)$

(vi) $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$

(vii) $X \subseteq Y \Rightarrow \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y), \overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y)$

(viii) $\underline{R}(-X) = -\overline{R}(X)$

(ix) $\overline{R}(-X) = -\underline{R}(X)$

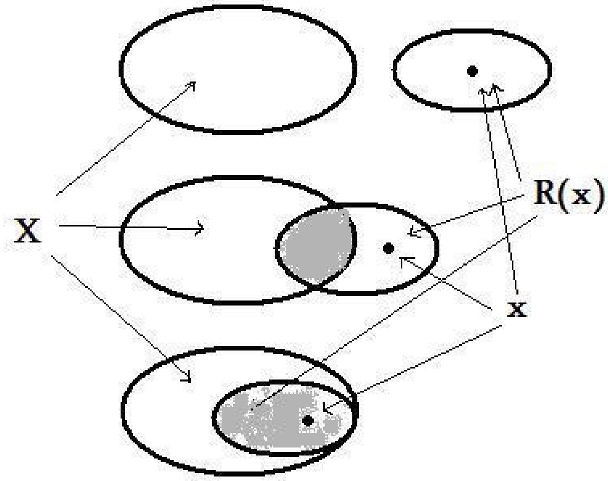
(x) $\underline{R}(\underline{R}(X)) = \overline{R}(\underline{R}(X)) = \underline{R}(X)$

(xi). $\overline{R}(\overline{R}(X)) = \underline{R}(\overline{R}(X)) = \overline{R}(X)$

Rough kümeler yaklaşımlar yerine rough üyelik fonksiyonu alınarak da tanımlanabilir. $|X|$, X in eleman sayısını göstermek üzere rough üyelik fonksiyonu

$$\mu_X^R(x) = \frac{|R_x \cap X|}{|R_x|}$$

şeklinde tanımlıdır. Rough üyelik fonksiyonu x in X e ait olmasının şartlı ihtimalini ve R tarafından x hakkında verilen bilgi göz önünde tutularak x in X'e ait olma derecesini açıklar. Bu Şekil 2.1.2 de açık bir biçimde gösterilmiştir.



Şekil 2.1.2

Burada

$X \cap R_x = \emptyset$ olması halinde $\mu_X^R(x) = 0$

$X \cap R_x \neq \emptyset$ olması halinde $\mu_X^R(x) \neq 0$

$R_x \subseteq X$ olması halinde $\mu_X^R(x) = 1$

olur. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu, yaklaşımları ve bir kümenin sınır bölgesini tanımlamak için

$\underline{R}(X) = \{x \in U : \mu_X^R(x) = 1\}$

$\overline{R}(X) = \{x \in U : \mu_X^R(x) > 0\}$

$BN_R(X) = \{x \in U : 0 < \mu_X^R(x) < 1\}$

şeklinde kullanılır. Örnek 2.1.3 nın verileri kullanılarak X in her bir elemanının üyelik değerleri hesaplanabilir.

$\mu_X^R(x_1) = \mu_X^R(x_3) = \mu_X^R(x_9) = 1$

$\mu_X^R(x_2) = \mu_X^R(x_7) = \mu_X^R(x_{10}) = 0$

$\mu_X^R(x_4) = 1$

$\mu_X^R(x_5) = \mu_X^R(x_8) = \frac{1}{2}$

$\mu_X^R(x_6) = 0$

Buna göre üyelik fonksiyonu yardımıyla da

$\overline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$

$\underline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\}$

$BN_R(X) = \{x_5, x_8\}$

olduğu görülür.

Önerme 2.1.5 (Aktaş ve Çağman,2005) Üyelik fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar

$\mu_X^R(x) = 1 \;,\; x \in \underline{R}(X)$

$\mu_X^R(x) = 0 \;,\; x \in U - \overline{R}(X)$

$0 < \mu_X^R(x) < 1 \;,\; x \in BN_R(X)$

$\mu_{U-X}^R(x) = 1 - \mu_X^R(x)$

$\mu_{X\cup Y}^R(x) \geq \max\{\mu_X^R(x), \mu_Y^R(x)\}, x \in U$

$\mu_{X\cap Y}^R(x) \leq \min\{\mu_X^R(x), \mu_Y^R(x)\}, x \in U$

Yukarıdaki özelliklerden rough üyelik ile fuzzy üyeliğin birbirinden farklı oldukları görülür. Rough kümelerde, fuzzy kümelerde olduğu gibi birleşim ve kesişim kümelerinin üyelikleri hesaplanamaz. Görünürde rough üyelik fuzzy üyeliğin daha genel bir halidir. Fuzzy üyelik fonksiyonunun aksine, rough üyelik fonksiyonunda bir ihtimal vardır.

2.2 Topolojik Uzaylarda Rough Küme Teorisi

Daha öncede belirttiğimiz gibi rough küme teorisi bir evrenin altkümelerinin evrenin bir parçalanışının denklik sınıfları yardımıyla ifade edilmesi ihtiyacından çıkmıştır. Parçalanış, yaklaşım uzayı olarak adlandırılan bir $K = (U, R)$ topolojik uzayını karakterize eder. Burada U evren olarak adlandırılan bir küme ve R bir denklik bağıntısıdır. ((Lin, 1992), (Pawlak, 1991)). Rough küme teorisinde referans uzay, topolojisi R nin denklik sınıfları ile doğrulan bu yaklaşım uzayıdır. Buradaki topoloji clopen topoloji diye bilinen özel bir sınıfa aittir. Bu topolojik uzayda her açık küme aynı zamanda kapalıdır. Clopen topoloji dijital geometride quasi ayrık topoloji olarakta adladırılır. Lin (1992) bu uzayı Pawlak uzayı olarak adlandırmıştır. Clopen topoloji geçişli yaklaşımların bir türüdür. Ancak yaklaşımlar genelde geçişli olmadığı için bu çok kısıtlayıcıdır. Örneğin "Tokat, Sivas a yakın, Sivas, Kayseri ye yakındır. Bununla birlikte Tokat, Kayseri ye yakın olarak düşünülemez. Lin böyle durumları incelemek için komşuluklar sistemini tanımladı ((Lin, 1988), (Lin, 1990), (Lin, 1998)).

Bu kesimde rough küme özellikleri topolojik kavramlarla ifade edilecektir. X bir altküme olsun. $\overline{X}, X^{\circ}$ ve X^{b} sırasıyla kapanış, iç ve sınır noktalarını gösterir. $X^{b} = \emptyset$ ise X exacttır. Aksi durumda X rough dır. Açıkca X exact ancak ve ancak $\overline{X} = X^{\circ}$dir. Pawlak uzayında $X \subseteq U$ altkümesi rough veya exacttır. Genel topolojik uzaylarda $X \subseteq U$ ise X aşağıdaki tanımlanabilme tiplerine sahiptir.

(i) X exact yani $\overline{X} = X = X^{\circ}$ ise X tamamen tanımlanabilirdir.

(ii) $X = X^{\circ}, X \neq \overline{X}$ ise X içsel tanımlanabilirdir.

(iii) $X \neq X^{\circ}$, $X = \overline{X}$ ise X dışsal tanımlanabilirdir.

(iv) $X \neq X^{\circ}, X \neq \overline{X}$ ise X tanımlamazdır.

Önerme 2.2.1 (Lashin ve ark., 2005) A, (U, τ) da exact küme ve $\tau \subset \tau'$ olsun. Bu durumda A τ' ye göre exact kümedir.

Kanıt. $BND_{\tau}A \supset BND_{\tau'}A$ ve $BND_{\tau}A = \emptyset$ olsun. $BND_{\tau'}A = \emptyset$ olduğunda A τ' de exacttır. Başka bir deyişle A, τ da exact olduğundan A, $\tau -$ clopen ve sonuç olarak $\tau' -$ clopen. Buradan A τ' exacttır.

τ' exact olupta τ exact olmayan kümeye kolayca örnek verilebilir. Gösterilebilir ki $Cl_{\tau'}A = Cl_{\tau}A \Leftrightarrow int_{\tau'}A^{C} = int_{\tau}A^{C}$. Sonraki önerme $\tau \subset \tau'$ iken τ' exact olan bir kümenin τ exact olma koşulunu verir.

Önerme 2.2.2 (Lashin ve ark., 2005) (U, τ) verilsin ve $\tau \subset \tau'$ olsun. τ' deki her exact küme τ da exacttır $\Leftrightarrow \forall G \in \tau'$ için $Cl_{\tau'}G = Cl_{\tau}G$

Kanıt. A τ' da exact olduğundan $Cl_{\tau'}A = A$ ve $Cl_{\tau}A = A$ buradan $Cl_{\tau'}A = Cl_{\tau}A$ çıkar. Tersine eğer $Cl_{\tau'}A = Cl_{\tau}A$ ve A τ' exact olsun. A τ exact olur.

Orjinal rough üyelik fonksiyonu denklik sınıfları kullanılarak tanımlanıyordu. Burada bu topolojik uzaya genişletilecektir. Sonlu U kümesinde τ

topolojisi verilsin. β tabanına göre rough üyelik fonksiyonu

$$\mu_X^\tau(x) = \frac{|\{\cap B_x\} \cap X|}{|\{\cap B_x\}|}, \quad B_x \in \beta,\ x \in U$$

olarak tanımlanır. Burada B_x, β nın x i içeren herhangi bir elemanıdır. Farklı tabanlarda aynı sayı elde edilebilir. Tabanda x bulunduran tüm elemanların kesişimi τ da x i bulunduran tüm elemanların kesişimini verir. Eğer topoloji Clopen topoloji ise x noktası tabanın bir tek elemanına aittir. Bununla beraber yukarıdaki üyelik fonksiyonu eğer τ, ayrık topoloji ise klasik küme teoriyi eğer τ, Clopen topoloji (Quasi ayrık) ise rough küme teoriyi verir.

Aşağıdaki örnek üstteki tanımı açıklamaktadır.

Örnek 2.2.3 (Lashin ve ark., 2005) $U = \{0,1,2,3,4,5\}$, $\beta = \{\{2\}, \{3\}, \{0, 1, 2\}, \{2,3,4\}, \{3,5\}\}$, $X = \{2,4,5\}$ olsun. Bu durumda X in β ya göre üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu_X^\tau(0) = \frac{|\{0,1,2\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{0,1,2\}|} = \frac{1}{3}$$

$$\mu_X^\tau(1) = \frac{|\{0,1,2\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{0,1,2\}|} = \frac{1}{3}$$

$$\mu_X^\tau(2) = \frac{|\{2\} \cap \{0,1,2\} \cap \{2,3,4\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{2\} \cap \{0,1,2\} \cap \{2,3,4\}|} = 1$$

$$\mu_X^\tau(3) = \frac{|\{3\} \cap \{3,5\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{3\} \cap \{3,5\}|} = 0$$

$$\mu_X^\tau(4) = \frac{|\{2,3,4\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{2,3,4\}|} = \frac{2}{3}$$

$$\mu_X^\tau(5) = \frac{|\{3,5\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{3,5\}|} = \frac{1}{2}$$

Eğer evren sonsuz ise bu üyelik fonksiyonu her bir nokta için yanlızca sonlu tane minimal komşuluğun olması anlamında yerel sonlu komşuluklar sistemine sahip uzaylar için kullanılabilir. Rough üyelik fonksiyonu topolojik uzaylarda fuzzy teoriyi ifade etmemize izin verir. $X \subseteq U$ verilsin. Topolojik uzayda rough üyelik fonksiyonunu kullanarak bir fuzzy kümeyi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$\tilde{X} = \{(x, \mu_X^{\tau}(x)) : \forall x \in U\}$

Bu durumda son örnekten, $X = \{2, 4, 5\}$ için

$\tilde{X} = \left\{ \left(0, \frac{1}{3}\right), \left(1, \frac{1}{3}\right), (2, 1), (3, 0), \left(4, \frac{2}{3}\right), \left(5, \frac{1}{2}\right) \right\}$

olur.

2.3 İkili Bağıntı Topolojisinde Rough Küme Teorisi

Daha önce belirttiğimiz gibi Lin genel durumları ele almak için komşuluklar sistemi biçimleştirilmesini inceledi. Biz şimdi R ikili bağıntısından doğrulan topolojiyi düşüneceğiz. U sonlu evren ve R, U üzerinde ikili bağıntı olsun. Bir $X \in U$ için sağ komşuluk

$$xR = \{y : xRy\}$$

biçiminde tanımlanır. x in sağ komşuluğu xR dir fakat xR nin xR deki herhangi bir elemanın sağ komşuluğu olması gerekmez. Aslında xR yi sağ komşuluk olarak kabul eden tüm elemanların kümesi, xR nin merkezi olarak adlandırılır. Bütün merkezlerin kolleksiyonu U nun bir parçalanışıdır. Detaylar için (Lin, 1998) e bakılabilir.

Burada sağ komşuluklar sistemi düşünülmeyecek sağ komşuluklar yardımı ile doğrulan topoloji ele alınacaktır. Bu düşünceyle xR topolojik anlamda her noktasının komşuluğu olan bir açık kümedir. Topolojiyi oluşturmak için $S = \{xR : x \in U\}$ sağ komşuluklar ailesini alttaban olarak düşünürüz. Bu topoloji τ olsun. S ailesi τ topolojisinin alttabanı olarak $S_R = \{xR : x \in U\}$ ile gösterilecek ve $S_x = \{G \in S_R : x \in G\}$ yazılacaktır.

Bir alttabanın elemanlarının bütün sonlu kesişimleri bir taban formunda olduğunda topolojik rough üyelik fonksiyonları kavramı alttaban yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mu_X^{\tau}(x) = \frac{|\{\cap S_x\} \cap X|}{|\{\cap S_x\}|} \quad x \in S_x \ , \ S_x \in S$$

Bu rough üyeliği rough küme teorisinden yada Lin in sağ komşuluklarının rough üyelik fonksiyonundan oldukça farklıdır. Lin in durumunda $\cap S_x$ yerine tek olan xR kullanılmaktadır. Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi bir $y \in U$ birden fazla S_x e ait olabilir. Ayrıca S_x lerden biri ve xR aynı kümelerdir. Bununla beraber S_x, τ topolojisinde x in bir açık komşuluğu iken xR bir sağ komşuluktur ve tektir. Yani onlar farklıdırlar.

Örnek 2.3.1 (Lashin ve ark., 2005) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$0_R = 1_R = \{0, 1, 2\}$ $2_R = 3_R = \{2, 3\}$ $4_R = \{3, 4\}$ $5_R = \{5\}$ olsun. $S := \{\{0, 1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5\}\} \Rightarrow \beta = \{\{0, 1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{2\}, \{3\}\}$ ise $\tau = \{U, \emptyset, \{0, 1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$ olur.

$X = \{0, 1, 2, 3\}$ olsun. Bu durumda

$$\mu_X^{\tau}(0) = \frac{|\{0, 1, 2\} \cap \{0, 1, 2, 3\}|}{|\{0, 1, 2\}|} = 1 \qquad \mu_X^{\tau}(1) = \frac{|\{0, 1, 2\} \cap \{0, 1, 2, 3\}|}{|\{0, 1, 2\}|} = 1$$

$$\mu_X^{\tau}(2) = \frac{|\{2\} \cap \{0, 1, 2, 3\}|}{|\{2\}|} = 1 \qquad \mu_X^{\tau}(3) = \frac{|\{3\} \cap \{0, 1, 2, 3\}|}{|\{3\}|} = 1$$

$$\mu_X^{\tau}(4) = \frac{|\{3, 4\} \cap \{0, 1, 2, 3\}|}{|\{3, 4\}|} = \frac{1}{2} \qquad \mu_X^{\tau}(5) = \frac{|\{5\} \cap \{0, 1, 2, 3\}|}{|\{5\}|} = 0$$

dır. Buradan $X = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1/2), (5, 0)\}$ olur.

Rough üyelik fonksiyonundan;

$\underline{R}(X) = X^{\circ} = \{0, 1, 2, 3\}, \quad \overline{R}(X) = \overline{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$NEG_R(X) = \{5\} \quad BN_R(X) = \{4\}$

elde ederiz. $\tau -$ kapanıs ve $\tau -$ iç tanımlarından üyelik fonksiyonu kullanmadan X in içini ve kapanışını aşağıdaki gibi bulabiliriz. Kapalı kümelerin F ailesi

$F = \{\emptyset, U, \{3, 4, 5\}, \{0, 1, 4, 5\}, \{0, 1, 2, 5\}, \{0, 1, 2, 3, 4, \}, \{0, 1, 3, 4, 5\}, \{0, 1, 2, 4, 5\}, \{4, 5\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{0, 1\}\}$ dır. Bu yüzden

$X^{\circ} = \{0, 1, 2\} \cup \{2, 3\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$

$\overline{X} = U \cap \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

olur.

3 SOFT KÜME TEORI

3.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde soft küme teorisi; bugüne kadar yapılan çalışmalardan derlenen bilgiler ile tanıtılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla soft küme kavramı ve soft kümeler üzerinde işlemler örnekler yardımıyla anlatılmıştır.

Bölüm boyunca U ile evrensel küme, E ile parametre kümesi ve $P(U)$ ile U nun kuvvet kümesi gösterilecektir. $A \subseteq E$ olsun.

Tanım 3.1.1 (Molodtsov, 1999) Aşağıdaki dönüşümde tanımlanan F fonksiyonu ile (F, A) çiftine U üzerinde bir soft küme denir.

$$F : A \rightarrow P(U)$$

Başka bir deyişle U evreninin altkümelerinin parametreye göre oluşturulan bir ailesine U üzerinde bir soft küme denir. $e \in A$ için $F(e)$, (F, A) kümesinin e-yaklaşık elemanlarının bir kümesi olarak düşünülebilir. Bu kavramı açıklamak için Molodtsov aşağıdaki üç örneği verdi.

Örnek 3.1.2 Zadehin fuzzy kümesi soft kümenin bir özel durumu olarak düşünülebilir. A bir fuzzy küme ve μ_A onun üyelik fonksiyonu yani μ_A, U nun $[0, 1]$ içine bir dönüşümü olarak verilsin. μ_A fonksiyonu için

$F_\alpha = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0, 1]$

α-seviye kümelerinin ailesini düşünelim. Eğer F ailesini bilirsek, $\mu_A(x)$ fonksiyonunu

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1],\, x \in F_\alpha)} \{\alpha : x \in F_\alpha\}$$

olarak tanımlayabiliriz.

Bu şekilde her A fuzzy kümesi $(F, [0, 1])$ gibi bir soft küme olarak düşünülebilir.

Örnek 3.1.3 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $x \in X$ noktası için açık komşulukların ailesi $\tau(x)$, $(\tau(x), \tau)$ soft kümesi olarak düşünülebilir.

Maji ve ark. (2003) Molodtsov un (1999)birinci örneğini aşağıdaki gibi açıkladılar.

Örnek 3.1.4 (Maji ve ark., 2003) Bay X in satın alacağını düşünerek "evlerin çekiciliği" ni tanımlayan bir (F, E) soft kümesi oluşturalım.

U düşünülen evlerin bir kümesi ve E bir parametre kümesi olsun. Her parametre bir kelime veya bir cümledir.

$E = \{$pahalı , güzel, ağaç , ucuz, yeşil çevreli , modern , iyi durumda, kötü durumda $\}$

Bu durumda bir soft kümeyi tanımlamak pahalı evleri, güzel evleri ... işaret etmek anlamındadır.

Kabul edelim ki U evreninde $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ gibi 6 ev olsun. Parametre kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ olarak verilsin.

e_1 parametresi "pahalı"

e_2 parametresi "güzel"

e_3 parametresi "ağaç"

e_4 parametresi "ucuz"

e_5 parametresi "yeşil çevreli"

e_6 parametresi "modern"

e_7 parametresi "Iyi durumda"

e_8 parametresi "kötü durumda"

olarak tanımlansın. $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset E$ alalım.

$F : A \to P(U)$ fonksiyonu $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$,$F(e_4) = \{h_1\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ şeklinde tanımlansın. (F, A) soft kümesi, U kümesinin altkümelerinin $\{F(e_i), i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ parametrelendirilmiş bir ailesidir ve bir objenin yaklaşık tanımlarının bir kolleksiyonunu verir. Örneğin $F(e_1)$, fonksiyonel değeri $\{h_2, h_4\}$ kümesi olan "pahalı evler" anlamındadır.

Böylece (F, A) soft kümesini yaklaşımların bir kolleksiyonu olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$(F, A) = \{$(pahalı evler, $\{h_2, h_4\}$) , (güzel evler, $\{h_1, h_3\}$) , (ahşap evler, $\{h_3, h_4, h_5\}$), (ucuz evler, $\{h_1, h_3, h_5\}$) , (yeşilçevreli evler, $\{h_1\}$)$\}$

Burada herbir yaklaşım iki parçadan oluşur.

(i) Bir istenen p

(ii) Bir yaklaşık değer kümesi v (veya basitçe değer kümesi v)

Örneğin "pahalı evler = $\{h_2, h_4\}$" yaklaşımı için

(i) istenen "pahalı evler"

(ii) yaklaşık değer kümesi "$\{h_2, h_4\}$" tür.

Böylece bir (F, A) soft kümesi aşağıdaki yaklaşımların bir kolleksiyonu olarak gösterilebilir.

$(F, A) = \{p_1 = v_1, p_2 = v_2, p_3 = v_3, ..., p_n = v_n\}$

Bilgisayar uygulamaları için bu (F, A) soft kümesi aşağıdaki tablodaki gibi sunulabilir

U	"pahalı"	"güzel"	"ağaç"	"ucuz"	"Yeşil çevreli"
h_1	0	1	0	1	1
h_2	1	0	0	0	0
h_3	0	1	1	1	0
h_4	1	0	1	0	0
h_5	0	0	1	1	0
h_6	0	0	0	0	0

Tablo 3.1.1

Örnek 3.1.5 (Pei ve Miao, 2005) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $x \in X$ noktasının bütün komşulukları $\tau(x)$ ile gösterilirse, her $x \in X$ için $F(x) = \{V \in \tau : x \in V\}$ olmak üzere (F, X) τ üzerinde bir soft kümedir.

Tanım 3.1.6 Bir (F, E) soft kümesinin tüm değer kümelerinin sınıfı "değer-sınıfı" olarak adlandırılır ve $C_{(F,E)}$ ile gösterilir. Örnek 3.1.4 de $C_{(F,E)} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dır. Açıktır ki $C_{(F,E)} \subseteq P(U)$ dur.

Fuzzy küme ile soft küme arasındaki ilişkiyi daha iyi anlamak için aşağıdaki örneğe bakalım.

Örnek 3.1.7 (Aktaş ve Çağman, 2007) Varsayalım $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evlerin 6 elemanlı bir evreni olsun ve parametre olarak "evlerin kalitesi" dil bilimsel değişken verilsin. Bu değişken için

$$T(\text{kalite}) = \{\text{en iyi, iyi, vasat, kötü}\}$$

terimler kümesi tanımlanabilir. Bu terimlerden herbiri kendi fuzzy kümesi ile birleştirilebilir. Örneğin terimlerden ikisi için

$F_{iyi} = \{(h_1, 0.1), (h_2, 0.7), (h_5, 0.9), (h_6, 1.0)\}$

$F_{kötü} = \{(h_1, 0.9), (h_2, 0.3), (h_3, 1.0), (h_4, 1.0), (h_5, 0.2)\}$

gibi fuzzy kümeleri tanımlanabilir. $F_{kötü}$ fuzzy kümesini düşünelim. Bu kümeye bağlı olarak bir soft küme oluşturalım. $F_{kötü}$ fuzzy kümesinin $\alpha - seviye$ kümeleri aşağıdaki gibidir.

$F_{kötü}(0.2) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$

$F_{kötü}(0.3) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$

$F_{kötü}(0.9) = \{h_1, h_3, h_4\}$

$F_{kötü}(1.0) = \{h_3, h_4\}$

$A = \{0.2, 0.3, 0.4, 1.0\} \subseteq [0, 1]$ kümesi parametre kümesi gibi düşünülürse $F_{kötü} : A \to P(U)$ dönüşümü $\alpha \in A$ için yaklaşık değer kümesi $F_{kötü}(\alpha)$ yı verir. Bu şekilde

$$\begin{aligned}(F_{kötü}, [0.1]) = \; & \{((0.2), \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), ((0.3), \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), \\ & ((0.9), \{h_1, h_3, h_4\}), ((1.0), \{h_3, h_4\})\}\end{aligned}$$

soft kümesini yazabiliriz.

Örnek 3.1.8 $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve $A = \{a, b, c\}$ olsun. A nın karakteristik fonksiyonu μ_A;

$$\mu_A : X \to \{0, 1\}, \; \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Buna bağlı olarak

$\mu_A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 0), (e, 0)\}$

fuzzy kümesi yazılabilir. Bu kümenin $\alpha - seviye$ kümeleri $\mu_A(1) = \{a, b, c\}$ ve $\mu_A(0) = X$ biçimindedir. Parametre kümesi $\{0, 1\}$ alınarak bu kümeye karşı gelen soft küme $(\mu_A, [0, 1]) = (\{1, \{a, b, c\}), (0, X)$ olarak bulunur.

Önerme 3.1.9 (Aktaş ve Çağman, 2007) Her Rough küme bir soft küme gibi düşünülebilir.

Kanıt. U evreninde bir X kümesi ve U üzerinde ki bir R denklik bağıntısıyla X in $R(X)$ rough kümesini ele alalım. "$R_x \subseteq X$" için $p_1(x)$ ve "$R_x \cap X \neq \emptyset$" için $p_2(x)$ yazalım. Bu durumda $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ koşulları bir parametre kümesinin elemanları olarak düşünülebilir. Şöyle ki $E = \{p_1(x), p_2(x)\}$ alırsak;

$F : E \to P(U)$; $F(p_i(x)) = \{x \in U : p_i(x)$ doğru$\}$ $i \in \{1, 2\}$

fonksiyonunu yazabiliriz. Böylece X in her $R(X)$ rough kümesi $(F, E) = \{(p_1(x), \underline{R}(X)), \left(p_2(x), \overline{R}(X)\right)\}$ formunda bir soft küme gibi düşünülebilir.

Örnek 3.1.10 $U = \{a, b, c, d, e\}$ ve U üzerinde $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$ denklik bağıntısı verilsin. Buna göre R nin denklik sınıfları aşağıdaki gibidir.

$R_a = R_b = R_c = \{a, b, c\}$

$R_d = \{d\}$

$R_e = \{e\}$

Şimdi $X = \{b, c, d\} \subseteq U$ kümesini ele alalım. X kümesinin R denklik bağıntısına göre rough kümesi $\overline{R}(X) = \{a, b, c, d\}$ ve $\underline{R}(X) = \{d\}$ olmak üzere $R(X) = (\{a, b, c, d\}, \{d\})$ dir. Şimdi bulduğumuz rough kümeye bağlı olarak bir soft küme oluşturalım. "$R_x \subseteq X$" için $p_1(x)$ ve "$R_x \cap X \neq \emptyset$" için $p_2(x)$ yazalım. $E = \{p_1(x), p_2(x)\}$ olarak düşünülürse

$F : E \to P(U)$, $F(p_i(x)) = \{x \in U : p_i(x)$ doğru, $i = 1, 2\}$

fonksiyonu ile $F(p_1(x)) = \{d\}$, $F(p_2(x)) = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere $(F, E) = \{(p_1(x), \{a, b, c, d\}), (p_2(x), \{d\})\}$ rough kümesine bağlı soft küme olarak bulunur.

3.2 Soft Kümeler Üzerinde Işlemler

Tanım 3.2.1 (Maji ve ark., 2003) (F, A) ve (G, B) U ortak evreninde iki soft küme olsun.

(i) $A \subseteq B$ ve

(ii) $\forall e \in A$, $F(e) = G(e)$

koşulları sağlanırsa (F, A) ya (G, B) nin bir soft altkümesidir denir. Bu durum $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2 (Maji ve ark., 2003) Ortak U evreninde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri verilsin. Eğer $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ ve $(G, B) \tilde{\subset} (F, A)$ ise bu soft kümelere soft eşittir denir.

Örnek 3.2.3 $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ olsun. Açıkça $A \subset B$ dir.

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ ortak evreni üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$

$G(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $G(e_2) = \{h_1, h_2\}$, $G(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $G(e_5) = \{h_1\}$

Bu durumda $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ dir.

Tanım 3.2.4 (Pei ve Miao, 2005) (F, A) ve (G, B) U ortak evreninde iki soft küme olsun.

(i) $A \subset B$

(ii) $\forall e \in A$, $F(e) \subseteq G(e)$

koşulları sağlanırsa (F, A) ya (G, B) nin bir soft altkümesidir denir. Bu durum $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.5 (Maji ve ark., 2003) $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ parametre kümesi olsun. E nin "not kümesi" $\rceil E$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\forall i \in I$ için" $\amalg e_i = e_i\ degil$" olmak üzere $\rceil E = \{\amalg e_1, \amalg e_2, ..., \amalg e_n\}$ dır.(Burada $\rceil$ ve $\amalg$ farklı operatörlerdir)

Aşağıdaki sonuç açıktır.

Önerme 3.2.6 (Maji ve ark., 2003)

(i) $\rceil(\rceil A) = A$

(ii) $\rceil(A \cup B) = (\rceil A \cup \rceil B)$

(iii) $\rceil(A \cap B) = (\rceil A \cap \rceil B)$ dir.

Örnek 3.2.7 (Maji ve ark., 2003) Örneğin $E = \{$pahalı, güzel, ağaç, ucuz, yeşil çevreli$\}$ ise $\rceil E = \{$pahalı değil, güzel değil, ağaç değil, ucuz değil, yeşil çevreli değil$\}$ dir.

Tanım 3.2.8 (Maji ve ark., 2003) Bir (F,A) soft kümesinin tümleyeni $(F,A)^C$ ile gösterilir ve $(F,A)^C = \left(F^C, \rceil A\right)$ olarak tanımlanır. Burada $F^C : \rceil A \to P(U)$ $\forall\alpha \in \rceil A$ için $F^C(\alpha) = U - F(\rceil\alpha)$ olarak tanımlanır.

F^C, F nin soft tümleyen fonksiyonu olarak adlandırılır. Açıkça $\left(F^C\right)^C$, F ile aynıdır ve $((F,A)^C)^C = (F,A)$ dır.

Örnek 3.2.9 Örnek 3.1.4 ü düşünelim. $(F,A) = \{$(pahalı evler, $\{h_2, h_4\}$), (güzel evler, $\{h_1, h_3\}$),(ahşap evler, $\{h_3, h_4, h_5\}$) ,(ucuz evler, $\{h_1, h_3, h_5\}$), (yeşilçevreli evler, $\{h_1\}$)$\}$ idi.

$(F,A)^C = \{$(pahalı olmayan evler, $\{h_1, h_2, h_5, h_6\}$), (güzel olmayan evler, $\{h_2, h_4, h_5, h_6\}$), (ahşap olmayan evler, $\{h_1, h_2, h_6\}$), (ucuz olmayan evler, $\{h_2, h_4, h_6\}$), (yeşil çevreli olmayan evler, $\{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$)$\}$

Tanım 3.2.10 (Maji ve ark., 2003) Her $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = \emptyset$ ise (F,A) soft kümesine U üzerinde null soft küme denir ve Φ ile gösterilir.

Örnek 3.2.11 Kabul edelim ki U ağaç evlerin kümesi ve A parametre kümesi olsun. U evreninde 5 ev verilsin.

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve $A = \{$tuğla, kerpiç, çelik, taş$\}$ olsun. (F,A) soft kümesi "evlerin inşa ediliş tarzını" tasvir eder ve şöyle tanımlanır.

F(tuğla) tuğla ile inşa edilen evler anlamındadır.

F(kerpiç) kerpiç ile inşa edilen evler anlamındadır.

F(çelik) çelikten inşa edilen evler anlamındadır.

F(taş) taş ile inşa edilen evler anlamındadır.

(F,A) soft kümesinin yaklaşımlarının kolleksiyonu aşağıdaki gibidir.

$(F,A) = \{$tugla evler$=\emptyset$, kerpiç evler$=\emptyset$, çelik evler$=\emptyset$, taş evler$=\emptyset\}$ burada (F,A) null soft kümedir.

Tanım 3.2.12 (Maji ve ark., 2003) Her $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise (F,A) soft kümesine U üzerinde absolute soft küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. Açıkça $\tilde{A}^C = \Phi$ ve $\Phi^C = \tilde{A}$ dir.

Örnek 3.2.13 (Maji ve ark., 2003) Kabul edelim ki U ağaç evlerin kümesi,

A parametre kümesi olsun ve U evreninde 5 ev verilsin.

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve $A = \{$tuğla olmayan, kerpiç olmayan, çelik olmayan, taş olmayan$\}$ olsun. (G, B) soft kümesi " evlerin inşa ediliş tarzını " tasvir eder ve şöyle tanımlanır.

G (tuğla olmayan) tuğla ile inşa edilmemiş evler anlamında

G (kerpiç olmayan) kerpiç ile inşa edilmemiş evler anlamında

G (çelik olmayan) çelikten inşa edilmemiş evler anlamında

G (taş olmayan) taş ile inşa edilmemiş evler anlamında

olmak üzere;

$(G, B) = \{$tugla olmayan evler $= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$, kerpiç olmayan evler $= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$, çelik olmayan evler $= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$, taş olmayan evler $= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}\}$

dir. Bu (G, B) soft kümesi bir mutlak soft kümedir.

Tanım 3.2.14 (Maji ve ark., 2003) (F, A) ve (G, B) ortak U evreni üzerinde iki soft küme olsun. $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , e \in A - B \\ G(e) & , e \in B - A \\ F(e) \cup G(e) & , e \in A \cap B \end{cases}$$

olmak üzere (H, C) soft kümesine (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin birleşimi denir ve $(H, C) = (F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.15 Kabul edelim ki "evlerin değerini" tanımlayan soft küme (F, A) ve "evlerin çekiciliğini" tanımlayan soft küme (G, B) olsun. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$, $A = \{$çok değerli, değerli, ucuz$\}$ ve $B = \{$güzel, yeşil çevreli, ucuz$\}$ olsun. F (çok değerli) $= \{h_1, h_4, h_7, h_8\}$, F(değerli) $= \{h_1, h_2, h_5\}$, F (ucuz) $= \{h_6, h_{10}\}$, G (güzel) $= \{h_1, h_3, h_7\}$, G (yeşil çevreli) $= \{h_5, h_6, h_8\}$, G (ucuz) $= \{h_9, h_{10}\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ dır. Buradan

H (çok değerli) $= \{h_1, h_4, h_7, h_8\}$

H (değerli) $= \{h_1, h_2, h_5\}$

H (ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$

H (güzel) = $\{h_1, h_3, h_7\}$

H (yeşil çevreli) = $\{h_5, h_6, h_8\}$

dır.

Tanım 3.2.16 (Maji ve ark., 2003) (F, A) ve (G, B) ortak U evreninde iki soft küme olsun. $C = A \cap B$ ve her $e \in C$ için $H(e) = F(e)$ veya $G(e)$ (Her ikiside aynı küme olduğunda) (H, C) kümesine (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin kesişimi denir ve $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki örnekten (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin kesişimi $C = A \cap B = \{$ucuz$\}$ ve H (ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$ olmak üzere (H, C) kümesidir.

Pei ve Miao (2005) de de belirtildiği gibi (F, A) ve (G, B) iki farklı soft küme ise ortak bir $e \in A \cap B$ parametresi için U nun aynı altkümesinin alınması gerekmez. Örneğin bir muğlak kavram "güzel ev" için her bir kişi kendi düşüncesine sahiptir ve yaklaşık değer kümesi farklı kişiler tarafından oldukça farklı tanımlanabilir. Aslında bu durum (Maji ve ark., 2003) de yapılan üstteki soft birleşim tanımında dikkate alınmış. Bu durumda soft kesişim tanımı kısmi bir operatör olarak görünmektedir. İlk olarak Pei ve Miao bu durumdan kurtulmak için kesişim tanımını aşağıdaki gibi verdirler

Tanım 3.2.17 (Pei ve Miao, 2005) (F, A) ve (G, B) ortak U evreninde iki soft küme olsun. $C = A \cap B$ ve her $e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ (H, C) kümesine (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin kesişimi denir ve $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Maji ve arkadaşları soft kümeler üzerindeki operatörlerle ilgili olarak aşağıdaki üç önermeyi verdiler.

Önerme 3.2.18 (F, A) ve (G, B) ortak U evreninde iki soft küme olsun. Bu durumda Aşağıdakiler doğrudur.

(i) $(F, A) \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$

(ii) $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$

(iii) $(F, A) \tilde{\cup} \Phi = (F, A)$

(iv) $(F,A) \tilde{\cap} \Phi = \Phi$

(v) $(F,A) \tilde{\cup} \tilde{A} = (F,A)$

(vi) $(F,A) \tilde{\cap} \tilde{A} = (F,A)$

Önerme 3.2.19 (F,A) ve (G,B) ortak U evreninde iki soft küme olsun. Bu durumda Aşağıdakiler doğrudur.

(i) $\left((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\right)^C = (F,A)^C \tilde{\cup} (G,B)^C$

(ii) $\left((F,A) \tilde{\cap} (G,B)\right)^C = (F,A)^C \tilde{\cap} (G,B)^C$

Önerme 3.2.20 (F,A) , (G,B) ve (H,C) U evreni üzerinde üç soft küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(i) $(F,A) \tilde{\cup} \left((G,B) \tilde{\cup} (H,C)\right) = \left((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\right) \tilde{\cup} (H,C)$

(ii) $(F,A) \tilde{\cap} \left((G,B) \tilde{\cap} (H,C)\right) = \left((F,A) \tilde{\cap} (G,B)\right) \tilde{\cap} (H,C)$

(iii) $(F,A) \tilde{\cup} \left((G,B) \tilde{\cap} (H,C)\right) = \left((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\right) \tilde{\cap} \left((F,A) \tilde{\cup} (H,C)\right)$

(vi) $(F,A) \tilde{\cap} \left((G,B) \tilde{\cup} (H,C)\right) = \left((F,A) \tilde{\cap} (G,B)\right) \tilde{\cup} \left((F,A) \tilde{\cap} (H,C)\right)$

Ancak daha sonra ilk olarak Yang (2008) Önerme 3.2.18 un (iii). şıkkının doğru olamayacağını gösterdi. Daha sonra Ali ve arkadaşları (2009) Önerme 3.2.18 te (iv)(v) ve (vi) ve Önerme 3.2.19 nin şıklarının yanlış olduklarını birer örnekle gösterdiler.

2009 yılında Ali ve arkadaşları soft kümeler üzerinde Maji ve arkadaşları (2003) tarafından tanımlanan kavramlarla ilgili olarak ortaya çıkan problemlerden kurtulmak için daha tutarlı yeni tanımlar verdiler.

Tanım 3.2.21 (Ali ve ark., 2009) (F,A) ve (G,B) ortak U evreninde soft kümeler olsunlar

(i) (F,A) ve (G,B) nin genişletilebilir kesişimi $C = A \cup B$ ve her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , e \in A \setminus B \\ G(e) & , e \in B \setminus A \\ F(e) \cap G(e) & , e \in A \cap B \end{cases}$$

olmak üzere (H,C) soft kümesidir ve $(H,C) = (F,A) \sqcap_g (G,B)$ ile gösterilir.

(ii) $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin kısıtlanmış kesişimi (veya bi kesişimi (Feng ve ark. 2008)) $C = A \cap B$ ve her $c \in C$ için $H(c) = F(c) \cap G(c)$ olmak üzere (H, C) soft kümesidir ve $(F, A) \Cap (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

(iii) $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin kısıtlanmış farkı $C = A \cap B$ ve her $c \in C$ için $H(c) = F(c) - G(c)$ olmak üzere (H, C) soft kümesidir ve $(F, A) -_{\Re} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

(iv) $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin kısıtlanmış birleşimi $C = A \cap B$ ve her $c \in C$ için $H(c) = F(c) \cup G(c)$ olmak üzere (H, C) soft kümesidir ve $(F, A) \cup_{\Re} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.22 (Ali ve ark., 2009) U bir başlangıç evreni, E de parametrelerin bir evreni olsun. $A \subseteq E$ olsun.

(i) Her $e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ ise (F, A) soft kümesine bağıl null soft küme (A parametresine göre) denir ve Φ_A ile gösterilir.

(ii) Her $e \in A$ için $G(e) = U$ ise (G, A) soft kümesine bağıl tüm soft küme (A parametresine göre) denir ve U_A ile gösterilir.

(iii) Parametrelerin E evrenine göre U_E bağıl tüm saft kümesine U üzerinde absolute soft küme denir

Tanım 3.2.23 (Ali ve ark., 2009) (F, A) soft kümesinin bağıl tümleyeni $(F, A)^r$ ile gösterilir ve $(F, A)^r = (F^r, A)$ ile tanımlıdır. Burada $F^r : A \to P(U)$, her $\alpha \in A$ için $F^r(\alpha) = U - F(e)$ olarak tanımlanır.

Açık olarak $(F, A)^r = U_E -_{\Re} (F, A)$ ve $((F, A)^r)^r = (F, A)$ dır. Ali ve arkadaşları bu tanımlarla ilgili olarak aşağıdaki iki teoremi kanıtladılar.

Teorem 3.2.24 (F, A) ve (G, B) aynı U evreni üzerinde ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda

(i) $((F, A) \cup_{\Re} (G, B))^r = (F, A)^r \Cap (G, B)^r$

(ii) $((F, A) \Cap (G, B))^r = (F, A)^r \cup_{\Re} (G, B)^r$

Teorem 3.2.25 (F, A) ve (G, B) aynı U evreni üzerinde iki soft küme olsun. Aşağıdakiler doğrudur

(i) $((F, A) \vee (G, B))^c = (F, A)^c \sqcap_{g} (G, B)^c$

(ii) $((F,A) \sqcap (G,B))^c = (F,A)^c \,\tilde{\cup}\, (G,B)^c$

Aşağıda soft kümeler üzerinde AND ve OR operatörlerini vereceğiz.

Tanım 3.2.26 (Molodtsov, 1999) (F,A) ve (G,B) iki soft küme olsun. "(F,A) ve (G,B)" $(F,A) \wedge (G,B)$ ile gösterilir ve her $(\alpha,\beta) \in A \times B$ için $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ olmak üzere $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ biçiminde tanımlanır.

Örnek 3.2.27 (F,A) soft kümesinin "evlerin değerini" ve (G,B) soft kümesinin "evlerin çekiciliğini" tanımladığını düşünelim. Kabul edelim ki

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$, $A = \{$çok değerli, değerli, ucuz$\}$ ve $B = \{$ güzel, yeşil çevreli, ucuz $\}$ olsun.

F(çok değerli) = $\{h_2, h_4, h_7, h_8\}$

F(değerli) = $\{h_1, h_3, h_5\}$

F(ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$ ve

G(güzel) = $\{h_2, h_3, h_7\}$

G(yeşil çevreli) = $\{h_5, h_6, h_8\}$

G(ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$ olsun.

Bu durumda $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ dir. Burada

H(çok değerli, güzel) = $\{h_2, h_7\}$

H(çok değerli, yeşil çevreli) = $\{h_8\}$

H(çok değerli, ucuz) = ?

H(değerli, güzel) = $\{h_3\}$

H(değerli, yeşil çevreli) = $\{h_5\}$

H(değerli, ucuz) = ?

H(ucuz, güzel) = ?

H(ucuz, yeşil çevreli) = $\{h_6\}$

H(ucuz, ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$

dır.

Tanım 3.2.28 (Molodtsov, 1999)(F,A) ve (G,B) iki soft küme olsun " (F,A) veya (G,B)" $(F,A) \vee (G,B)$ biçiminde gösterilir ve her

$(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $O(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ olmak üzere $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ biçiminde tanımlanır.

Örnek 3.2.29 Yukarıda verdiğimiz örnekte (F, A) ve (G, B) soft kümeleri için $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ dir.

O(çok değerli, güzel) = $\{h_2, h_3, h_4, h_7, h_8\}$

O(çok değerli, yeşil çevreli) = $\{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}$

O(çok değerli, ucuz) = $\{h_2, h_4, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$

O(değerli, güzel) = $\{h_1, h_2, h_3, h_5, h_7\}$

O(değerli, yeşil çevreli) = $\{h_1, h_3, h_5, h_6, h_8\}$

O(değerli, ucuz) = $\{h_1, h_3, h_5, h_6, h_9, h_{10}\}$

O(ucuz, güzel) = $\{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\}$

O(ucuz, yeşil çevreli) = $\{h_5, h_6, h_8, h_9, h_{10}\}$

O(ucuz, ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$

dır.

Aşağıdaki önerme $\vee$ ve $\wedge$ nın De Morgan kurallarını sağladığını göstermektedir.

Önerme 3.2.30 (F, A) ve (G, B) iki soft küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(i) $((F, A) \vee (G, B))^C = (F, A)^C \wedge (G, B)^C$

(ii) $((F, A) \wedge (G, B))^C = (F, A)^C \vee (G, B)^C$

Kanıt. Kabul edelim ki $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ olsun. Bu yüzden $((F, A) \vee (G, B))^C = (O, A \times B)^C = \left(O^C, \rceil A \times \rceil B\right)$ dir. Şimdi

$$\begin{aligned}
(F, A)^C \wedge (G, B)^C &= \left(F^C, \rceil A\right) \wedge \left(G^C, \rceil B\right) \\
&= (J, \rceil A \times \rceil B) \qquad J(x, y) = F^C(x) \cap G^C(y) \\
&= (J, \rceil(A \times B))
\end{aligned}$$

Şimdi $(\rceil\alpha, \rceil\beta) \in \rceil(A \times B)$ olduğunu ele alalım. Bu yüzden

$$
\begin{aligned}
O^C(\neg\alpha,\neg\beta) &= U - O(\alpha,\beta)\\
&= U - [F(\alpha) \cup G(\beta)]\\
&= [U - F(\alpha)] \cap [U - G(\beta)]\\
&= F^C(\neg\alpha) \cap G^C(\neg\beta)\\
&= J(\neg\alpha,\neg\beta)
\end{aligned}
$$

dolayısyla O^C ve J aynıdır. Buradan Kanıt biter.

(ii) Kabul edelim ki $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ olsun. Bu yüzden $((F,A) \wedge (G,B))^C = (H, A \times B)^C = \left(H^C, \neg(A \times B)\right)$ dir. Şimdi

$$
\begin{aligned}
(F,A)^C \vee (G,B)^C &= \left(F^C, \neg A\right) \vee \left(G^C, \neg B\right)\\
&= (K, \neg A \times \neg B) \qquad K(x,y) = F^C(x) \cup G^C(y)\\
&= (K, \neg(A \times B))
\end{aligned}
$$

Şimdi $(\neg\alpha,\neg\beta) \in \neg(A \times B)$ olduğunu ele alalım. Bu yüzden

$$
\begin{aligned}
H^C(\neg\alpha,\neg\beta) &= U - H(\alpha,\beta)\\
&= U - [F(\alpha) \cap G(\beta)]\\
&= [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\beta)]\\
&= F^C(\neg\alpha) \cup G^C(\neg\beta)\\
&= K(\neg\alpha,\neg\beta)
\end{aligned}
$$

dolayısyla O^C ve J aynıdır. Buradan Kanıt biter.

Aşağıdaki önerme ise $\vee$ ve $\wedge$ nın birleşimli olduğunu göstermektedir.

Önerme 3.2.31 (F,A) , (G,B) ve (H,C) U evreni üzerinde üç soft küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(i) $(F,A) \vee ((G,B) \vee (H,C)) = ((F,A) \vee (G,B)) \vee (H,C)$

(ii) $(F,A) \wedge ((G,B) \wedge (H,C)) = ((F,A) \wedge (G,B)) \wedge (H,C)$

Maji ve arkadasları $\vee$ ve $\wedge$ nın dağılmalı olduğunu söylediler Ancak daha sonra Ali ve arkadaşları bunun doğru olmadığını belirttiler.

4 SOFT TOPOLOJI

4.1 Temel Tanımlar

Bu bölümde soft topolojiyi tanıtacağız. Aynı X parametre kümesi ile ortak U evreni üzerindeki soft kümeleri düşünelim. Bu soft kümelerin kümesi $S_X(U)$ ile gösterilir. Molodtsov un düşüncesine bağlı olarak Maji ve arkadaşları soft kümeler için kesişimi birleşim ve tümleyen kavramlarını tanımladılar.

Biz bu bölümde $A \subseteq X$ olmak üzere $F : X \to P(U)$, $e \notin A$ iken $F(e) = \emptyset$ aksi halde $F(e) \neq \emptyset$ biçiminde tanımlı (F, A) soft kümelerini ele alacağız. Bu soft kümeler ailesini $SS_X(U)$ ile gösterelim. $SS_X(U)$ kümesinin topolojik yapısını daha inceleyebilmek için Maji ve arkadaşlarının vermiş oldukları kesişim, birleşim ve tümleyen tanımları üzerinde amaca uygun değişikler yapacağız.

Tanım 4.1.1 (F, A) ve (G, B) ortak U evreni üzerinde iki soft küme olsun. Her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ biçiminde tanımlanan $H : X \to P(U)$ fonksiyonu ile (H, X) soft kümesine (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin standart soft birleşimi denir ve $(H, X) = (F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.2 (F, A) ve (G, B) ortak U evreni üzerinde iki soft küme olsun. Her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ biçiminde tanımlanan $H : X \to P(U)$ fonksiyonu ile (H, X) soft kümesine (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin standart soft kesişimi denir ve $(H, X) = (F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.3 X parametre kümesi ve U başlangıç evreni olsun. $A \subset X$ ve $(F, A) \in SS_X(U)$ olmak üzere (F, A) soft kümesinin standart soft tümleyeni $Co(F, A)$ ile gösterilir ve tümleyen $Co(F, A) = (F_A^{co}, X)$ ile tanımlanır. Burada $F_A^{co} : X \to P(U)$, her $e \in X$ için $F_A^{co}(e) = U - F(e)$ biçiminde tanımlıdır.

Açıktır ki $Co(Co(F, A)) = (F, A)$ dır.

Örnek 4.1.4 $X = \{e_1, e_2, e_3\}$ parametre kümesi ve $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ bir evren olsun. $(F, A) = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_4\}), (e_1, \{h_1, h_3, h_5\})\}$ soft kümesi verilsin. Bu durumda $Co(F, A) = \{(e_1, \{h_3, h_5\}), (e_1, \{h_2, h_4\}), (e_3, U)\}$ olur.

Önerme 4.1.5 (F,A) ve (G,B) X parametre kümesi ile aynı U evreni üzerinde iki soft küme ise aşağıdakiler doğrudur

(i) $Co\left((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\right) = Co(F,A)\tilde{\cap}Co(G,B)$

(ii) $Co\left((F,A)\tilde{\cap}(G,B)\right) = Co(F,A)\tilde{\cup}Co(G,B)$

Kanıt. (i) $Co((F,A)\tilde{\cup}(G,B)) = Co(H,X)$ olsun. Burada her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ dir. Ayrıca $Co(H,X) = (H_X^{co}, X)$ ve her $e \in X$ için $H_X^{co}(e) = U - H(e) = U - (F(e) \cup G(e))$ dir.

Tersine $Co(F,A)\tilde{\cap}Co(G,B) = (F_A^{co}, X)\tilde{\cap}(G_B^{co}, X) = (K,X)$ olsun. Burada her $e \in X$ için $K(e) = F_A^{co}(e) \cap G_B^{co}(e) = (U - F(e)) \cap (U - G(e)) = U - (F(e) \cup G(e))$ olur ki bu K ile H_X^{co} in aynı fonksiyon olduğunu gösterir. Dolayısıyla Kanıt biter.

(ii) $Co((F,A)\tilde{\cap}(G,B)) = Co(H,X)$ olsun. Burada her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ dir. Ayrıca $Co(H,X) = (H_X^{co}, X)$ ve her $e \in X$ için $H_X^{co}(e) = U - H(e) = U - (F(e) \cap G(e))$ dir.

Tersine $Co(F,A)\tilde{\cup}Co(G,B) = (F_A^{co}, X)\tilde{\cup}(G_B^{co}, X) = (K,X)$ olsun. Burada her $e \in X$ için $K(e) = F_A^{co}(e) \cup G_B^{co}(e) = (U - F(e)) \cup (U - G(e)) = U - (F(e) \cap G(e))$ olur ki bu K ile H_X^{co} in aynı fonksiyon olduğunu gösterir. Dolayısıyla Kanıt biter.

Tanım 4.1.6 $(F_i, A_i)_{i \in I}$ X parametre kümesi ile U evreni üzerinde soft kümelerin bir ailesi olsun.

(i) Her $e \in X$ için $H(e) = \bigcup_{i \in I} F_i(e)$ biçiminde tanımlanan $H : X \to P(U)$ fonksiyonu ile (H,X) soft kümesine $(F_i, A_i)_{i \in I}$ soft kümeler ailesinin standart soft birleşimi denir ve $(H,X) = \tilde{\bigcup}_{i \in I}(F_i, A_i)$ biçiminde gösterilir.

(ii) Her $e \in X$ için $H(e) = \bigcap_{i \in I} F_i(e)$ biçiminde tanımlanan $H : X \to P(U)$ fonksiyonu ile (H,X) soft kümesine $(F_i, A_i)_{i \in I}$ soft kümeler ailesinin standart soft kesişimi denir ve $(H,X) = \tilde{\bigcap}_{i \in I}(F_i, A_i)$ biçiminde gösterilir.

Aşağıdaki önerme De-morgan kuralları olarak bilinir.

Önerme 4.1.7 $(F_i, A_i)_{i \in I}$ X parametre kümesi ile U evreni üzerinde soft kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur

(i) $Co\left(\widetilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)\right) = \widetilde{\bigcap}_{i\in I} Co(F_i,A_i)$

(ii) $Co\left(\widetilde{\bigcap}_{i\in I}(F_i,A_i)\right) = \widetilde{\bigcup}_{i\in I} Co(F_i,A_i)$.

Kanıt. (i) $Co(\widetilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)) = Co(H,X)$ olsun. Burada her $e \in X$ için $H(e) = \bigcup_{i\in I} F_i(e)$ dır. Ayrıca $Co(\widetilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)) = Co(H,X) = (H_X^{co},X)$ ve her $e \in X$ için $H_X^{co}(e) = U - H(e) = U - \bigcup_{i\in I} F_i(e) = \bigcap_{i\in I}(U - F_i(e))$ dır.

Tersine $\widetilde{\bigcap}_{i\in I} Co(F_i,A_i) = \widetilde{\bigcap}_{i\in I}(F_i^{co},X) = (K,X)$ olsun. Burada her $e \in X$ için $K(e) = \bigcap_{i\in I} F_i^{co}(e) = \bigcap_{i\in I}(U - F_i(e))$ olur ki K ile H_X^{co} in aynı fonksiyon olduğunu gösterir. Dolayısıyla Kanıt biter.

(ii) $Co(\widetilde{\bigcap}_{i\in I}(F_i,A_i)) = Co(H,X)$ olsun. Burada her $e \in X$ için $H(e) = \bigcap_{i\in I} F_i(e)$ dır. Ayrıca $Co(\widetilde{\bigcap}_{i\in I}(F_i,A_i)) = Co(H,X) = (H_X^{co},X)$ ve her $e \in X$ için $H_X^{co}(e) = U - H(e) = U - \bigcap_{i\in I} F_i(e) = \bigcup_{i\in I}(U - F_i(e))$ dır.

Tersine $\widetilde{\bigcup}_{i\in I} Co(F_i,A_i) = \widetilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i^{co},X) = (K,X)$ olsun. Yani K her $e \in X$ için $K(e) = \bigcup_{i\in I} F_i^{co}(e) = \bigcup_{i\in I}(U - F_i(e))$ olur ki K ile H_X^{co} in aynı fonksiyon olduğunu gösterir. Dolayısıyla Kanıt biter.

Tanım 4.1.8 (Süper soft küme)(Total soft set, Pei ve Miao 2005) X parametrelerin bir kümesi ve U bir evren olsun. Her $e \in X$ için $F(e) = U$ ise U üzerindeki (F,X) soft kümesine süper soft küme denir ve $\widetilde{X}$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.9 (Boş soft küme)(null soft set, Pei ve Miao 2005) X parametrelerin bir kümesi ve U bir evren olsun. Her $e \in X$ için $F(e) = \emptyset$ ise U üzerindeki (F,X) soft kümesine boş soft küme denir ve $\widetilde{\Phi}$ ile gösterilir.

Önerme 4.1.10 (F,A) ve (G,B) X parametre kümesi ile ortak U evreni üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur

(i) $Co(\widetilde{\Phi}) = \widetilde{X}$ ve $Co(\widetilde{X}) = \widetilde{\Phi}$

(ii) $(F,A)\widetilde{\cap}\,\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}$.

(iii) $(F,A)\widetilde{\cap}\,\widetilde{X} = (F,A)$.

(iv) $(F,A)\widetilde{\cup}\,\widetilde{\Phi} = (F,A)$.

(v) $(F,A)\widetilde{\cup}\,\widetilde{X} = \widetilde{X}$

(vi) $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)$, ise $(F,A)\widetilde{\cap}(G,B) = (F,A)$.

(vii) $(F,A)\widetilde{\subseteq}(G,B)$, ise $(F,A)\widetilde{\cup}(G,B) = (G,B)$

Kanıt. (i) $Co(\tilde{\Phi}) = (H, X)$ olsun. Bu durumda $e \in X$ için $H(e) = U - \emptyset = U$ olur ki $(H, X) = \tilde{X}$ elde edilir. Öte yandan $Co(\tilde{X}) = (H, X)$ olsun. Bu durumda $e \in X$ için $H(e) = U - U = \emptyset$ olur ki $(H, X) = \tilde{\Phi}$ elde edilir.

(ii) $(F, A)\tilde{\cap}\tilde{\Phi} = (H, X)$ olsun. Bu durumda her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cap \emptyset = \emptyset$ olur ki $(H, X) = \tilde{\Phi}$ elde edilir.

(iii) $(F, A)\tilde{\cap}\tilde{X} = (H, X)$ olsun. Bu durumda her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cap U = F(e)$ olur ki $(H, X) = (F, A)$ elde edilir.

(iv) $(F, A)\tilde{\cup}\tilde{\Phi} = (F, A)$ olsun. Bu durumda her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cup \emptyset = F(e)$ olur ki $(H, X) = (F, A)$ elde edilir.

(v) $(F, A)\tilde{\cup}\tilde{X} = (H, X)$ olsun. Bu durumda her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cup U = U$ olur ki $(H, X) = \tilde{X}$ elde edilir.

(vi) $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ ise $A \subseteq B$ ve her $e \in X$ için $F(e) \subseteq G(e)$ dir. $(F, A)\tilde{\cap}(G, B) = (H, X)$ olsun. Bu durumda her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cap G(e) = F(e)$ olur ki buradan $(H, X) = (F, A)$ elde edilir.

(vii) $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ ise $A \subseteq B$ ve her $e \in X$ için $F(e) \subseteq G(e)$ dir. $(F, A)\tilde{\cup}(G, B) = (H, X)$ olsun. Bu durumda her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cup G(e) = G(e)$ olur ki buradan $(H, X) = (G, B)$ elde edilir.

Önerme 4.1.11 (F, A), (G, B), (H, C) ve (S, T) X parametre kümesi ile ortak U evreni üzerinde soft kümeler olsunlar. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

(i) $(F, A)\tilde{\cap}(G, B) = \tilde{\Phi}$ ise $(F, A)\tilde{\subseteq}Co(G, B)$ dir.

(ii) $(F, A)\tilde{\cup}Co(F, A) = \tilde{X}$

(iii) $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ ve $(G, B)\tilde{\subseteq}(H, C)$ ise $(F, A)\tilde{\subseteq}(H, C)$ dir.

(iv) $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ ve $(H, C)\tilde{\subseteq}(S, T)$ ise $(F, A)\tilde{\cap}(H, C)\tilde{\subseteq}(G, B)\tilde{\cap}(S, T)$ dir.

(v) $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ ise $Co(G, B)\tilde{\subseteq}Co(F, A)$ dır.

Kanıt. (i) $(F, A)\tilde{\cap}(G, B) = \tilde{\Phi}$ olsun. Bu durumda her $e \in X$ için $F(e) \cap G(e) = \emptyset$ dir. Yani $F(e) \subseteq U - G(e) = G_B^{co}(e)$ dir. Buradan $Co(G, B) = (G_B^{co}, X)$ ve $A \subseteq X$ olduğundan $(F, A)\tilde{\subseteq}Co(G, B)$ elde edilir.

(ii) $(F,A)\tilde{\cup}Co(F,A) = (H,X)$ olsun. $Co(F,A) = (F_A^{co},X)$ olduğundan her $e \in X$ için $H(e) = F(e) \cup F_A^{co}(e) = F(e) \cup (U - F(e)) = U$ olur. Dolayısıyla $(H,X) = \tilde{X}$ olur.

(iii) $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ise $A \subseteq B$ ve her $e \in X$ için $F(e) \subseteq G(e)$ dir. $(G,B)\tilde{\subseteq}(H,C)$ ise $B \subseteq C$ ve her $e \in X$ için $G(e) \subseteq H(e)$ dir. Dolayısıyla buradan $A \subseteq C$ ve her $e \in X$ için $F(e) \subseteq H(e)$ bulunur ki bu $(F,A)\tilde{\subseteq}(H,C)$ olduğunu verir.

(iv) $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ise $A \subseteq B$ ve her $e \in X$ için $F(e) \subseteq G(e)$ dir. $(H,C)\tilde{\subseteq}(S,T)$ ise $C \subseteq T$ ve her $e \in X$ için $H(e) \subseteq S(e)$ dir. Buradan her $e \in X$ için $F(e) \cap H(e) \subseteq G(e) \cap S(e)$ olur ki bu $(F,A)\tilde{\cap}(H,C)\tilde{\subseteq}(G,B)\tilde{\cap}(S,T)$ olduğunu verir.

(v) $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ise $A \subseteq B$ ve her $e \in X$ için $F(e) \subseteq G(e)$ dir. Buradan $U - G(e) \subseteq U - F(e)$ olur ki bu $G_B^{co}(e) = F_A^{co}(e)$ olduğunu verir. Ayrıca $Co(G,B) = (G_B^{co},X)$ ve $Co(F,A) = (F_A^{co},X)$ olduğundan $Co(G,B)\tilde{\subseteq}Co(F,A)$ olduğu elde edilir.

Sonuç 4.1.12 $SS_X(U)$ üzerinde tanımlı " $\tilde{\subseteq}$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 4.1.13 $A = \{e\} \subseteq X$ ve $F \in P(U)^X$ ve her $e' \in X - \{e\}$ için $F(e') = \emptyset$ ise (F,A) soft kümesine X de bir soft nokta denir ve e_F ile gösterilir.

Tanım 4.1.14 e_F ve (G,B) ortak U evreni üzerinde iki soft küme olsun. Eğer $e \in B$ ve $F(e) \subseteq G(e)$ ise e_F soft noktası (G,B) soft kümesinin bir elemanıdır denir ve $e_F\tilde{\in}(G,B)$ yazılır.

Örnek 4.1.15 $X = \{e_1,e_2,e_3\}$ parametre kümesi ve $U = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ bir evren ve $B = \{e_2,e_3\} \subset U$ olsun. $e_F = (e_2,\{h_2,h_3\})$ ve $(G,B) = \{(e_2,\{h_2,h_3,h_5\}),(e_3,\{h_1,h_5\})\}$ verilsin. Bu durumda $e_F\tilde{\in}(G,B)$ dir.

Önerme 4.1.16 X parametrelerin bir kümesi ve U başlangıç evreni , $e_F \in \tilde{X}$ ve $(G,B)\tilde{\subseteq}\tilde{X}$ olsun. Eğer $e_F\tilde{\in}(G,B)$ ise $e_F\tilde{\notin}Co(G,B)$ dir.

Kanıt. $e_F\tilde{\in}(G,B)$ ise $e \in B$ ve $F(e) \subseteq G(e)$ dir. Buradan $F(e) \nsubseteq U - G(e) = G_B^{co}(e)$ olur. Bu ise $e_F\tilde{\notin}(G_B^{co},B) = Co(G,B)$ olduğunu verir.

Sonuç 4.1.17 Yukarıdaki önermenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.1.18 $X = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi ve $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ bir evren olsun. $e_{2_F} = (e_2, \{h_1, h_2, h_3\}) \in \tilde{X}$ ve $(G, B) = ((e_1, \{h_1, h_4\}), (e_2, \{h_1, h_3\})) \subseteq \tilde{X}$ verilsin. Bu durumda $e_{2_F} \notin (G, B)$ ve $e_{2_F} \notin Co(G, B) = ((e_1, \{h_2, h_3\}), (e_2, \{h_2, h_4\}), (e_3, U))$ dır.

Tanım 4.1.19 X parametrelerin bir kümesi ve U başlangıç evreni olsun. $F \in P(U)^X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere $(F, A) \in SS_X(U)$ soft kümelerinin τ ile gösterilen bir ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa τ ya X üzerinde bir soft topoloji denir.

T1. $\emptyset, \tilde{X} \in \tau$.

T2. (F, A), $(G, B) \in \tau$ iken $(F, A) \cap (G, B) \in \tau$.

T3. $\forall i \in I$ için $(F, A_i) \in \tau$ iken $\bigcup_{i \in I} (F, A_i) \in \tau$.

Bu durumda $(\tilde{X}, \tau)$ ikilisine U evreni üzerinde bir soft topolojik uzay adı verilir. τ nun her elemanı soft açık küme olarak adlandırılır. Standart soft tümleyeni soft açık olan kümeye soft kapalı küme denir.

Teorem 4.1.20 $(\tilde{X}, \tau)$ soft topolojik uzay ve z soft kapalı kümelerin kolleksiyonu olsun. Bu durumda

F1. $\emptyset, \tilde{X} \in$ z,

F2. z nin elemanlarının herhangi sonlu standart soft birleşimi z de dir,

F3. z nin elemanlarının herhangi standart soft kesişimi z de dir.

Örnek 4.1.21 $X = \{$Çok pahalı, pahalı, ucuz, güzel, yeşil çevreli, ahşap, modern, iyi durumda, kötü durumda$\}$. (F, A), (G, B) soft kümeleri sırasıyla "evlerin fiyatı" ve "evlerin çekiciliğini" tanımlasın. Kabul edelim ki $U = \{h_1, h_2, ..., h_{10}\}$, $A = \{$Çok pahalı, pahalı, ucuz$\}$ ve $B = \{$güzel, yeşil çevreli, ucuz$\}$ olsun. F(Çok pahalı) = $\{h_2, h_4, h_7, h_8\}$, F(pahalı) = $\{h_1, h_3, h_5\}$, F(ucuz) = $\{h_6, h_9\}$, G(yeşil çevreli) = $\{h_5, h_6, h_8\}$, G(güzel) = $\{h_2, h_3, h_7\}$, ve G(ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$,. $C = \{$ucuz$\}$, H(ucuz) = $\{h_6, h_9\}$, ve $D = \{$çok pahalı, pahalı, ucuz, güzel, yeşil çevreli$\}$ geri kalan parametreler için G fonksiyonun görüntüsü ? dir. Bu durumda T(ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$, T(cok pahalı)

$= \{h_2, h_4, h_7, h_8\}$, T(pahalı) $= \{h_1, h_3, h_5\}$, T(yeşil çevreli) $= \{h_5, h_6, h_8\}$, ve T(güzel) $= \{h_2, h_3, h_7\}$ geri kalan parametreler için T fonksiyonun görüntüsü Φ dir. Dolayısıyla $\tau = \{\Phi, \tilde{U}, (F,A), (G,B), (H,C), (T,D)\}$ ailesi U üzerinde bir soft topolojidir, çünkü $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$ ve $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (T,D)$ dir.

Örnek 4.1.22 Ayrık olmayan soft topoloji Φ ve $\tilde{U}$ den olusur. Ayrık topoloji ise U üzerindeki tüm soft kümeleri içerir.

Aşağıdaki örneklerle klasik topolojik uzayı soft topolojik uzay olarak gösterebiliriz fakat her soft topolojik uzay klasik topolojik uzay değildir.

Örnek 4.1.23 (X, τ) topolojik uzay olsun. Her $A \subseteq X$ için,

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

karakteristik fonksiyonu yukardaki biçimde tanımlarız. $\chi_\tau = \{\chi_A : A \in \tau, \chi_A : X \rightarrow [0,1]\}$ X üzerinde fuzzy topolojidir. Bu yüzden bir klasik topolojik uzayı bir fuzzy topolojik uzay gibi düşünebiliriz.

Örnek 4.1.24 Varsayalım ki $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evlerin 6 elemanlı bir evreni olsun ve parametre olarak "evlerin kalitesi " dil bilimsel değişken verilsin. Bu değişken için

$T\,(kalite) = \{eniyi, iyi, vasat, kötü\}$

terimler kümesi tanımlanabilir. Bu terimlerden herbiri kendi fuzzy kümesi ile birleştirilebilir. Örneğin terimlerden ikisi için

$F_{iyi} = \{(h_1, 0,2), (h_2, 0,7), (h_5, 0,9), (h_6, 1,0)\}$

$F_{kötü} = \{(h_1, 0,9), (h_2, 0,3), (h_3, 1,0), (h_4, 1,0), (h_5, 0,2)\}$

gibi fuzzy kümeleri tanımlanabilir. $F_{kötü}$ fuzzy kümesini düşünelim. Bu kümeye bağlı olarak bir soft küme oluşturalım. $F_{kötü}$ fuzzy kümesinin $\alpha - seviye$ kümeleri aşağıdaki gibidir.

$F_{kötü}\,(0,2) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$, $F_{kötü}\,(0,3) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, $F_{kötü}\,(0,9) = \{h_1, h_3, h_4\}$, $F_{kötü}\,(1,0) = \{h_3, h_4\}$

$F_{iyi}\,(0,2) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, $F_{iyi}(0.7) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_6\}$, $F_{iyi}(0.9)$

$= \{h_1, h_4, h_6\}$, $F_{iyi}(1.0) = \{h_4, h_6\}$.

$A = \{0,2\ , 0,3\ , 0,4\ , 1,0\} \subset [0,1]$ kümesi parametre kümesi gibi düşünülürse $F_{kötü} : A \to P(U)$ dönüşümü $\alpha \in A$ için yaklaşık değer kümesi $F_{kötü}(\alpha)$ yı verir. Bu şekilde

$$(F_{kötü}, [0,1]) = \{((0,2), \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), ((0,3), \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), ((0,9), \{h_1, h_3, h_4\}), ((1,0), \{h_3, h_4\})\}$$

soft kümesini yazabiliriz.

Benzer olarak, $F_{iyi} : X \to P(U)$ için, Buradan $(F_{iyi}, [0,1]) = \{(0.2, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}), (0.7, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_6\}), (0.9, \{h_1, h_4, h_6\}), (1.0, \{h_4, h_6\})\}$ soft kümesini yazabiliriz.

Örnek 4.1.25 Yukarıdaki örneğe göre, $\tau = \{0, 1, F_{kötü}, F_{en\ iyi}, F_{en\ iyi} \wedge F_{kötü}, F_{en\ iyi} \vee F_{kötü}\}$ fuzzy topolojisini tanımlayabiliriz. Dahası buna eşdeğer $\tau = \{\tilde{\Phi}, \tilde{X}, (F_{kötü}, I), (F_{en\ iyi}, I), (F_{kötü}, I) \tilde{\cap} (F_{en\ iyi}, I), (F_{en\ iyi}, I) \tilde{\cup} (F_{kötü}, I)\}$ soft topolojisini tanımlanabilir. Burada $\tilde{\Phi} = 0$, $\tilde{X} = 1$ ve $(F_{kötü}, I) \tilde{\cap} (F_{en\ iyi}, I) = (F_{kötü} \wedge F_{en\ iyi}, I)$, $(F_{kötü}, I) \tilde{\cup} (F_{en\ iyi}, I) = (F_{kötü} \vee F_{en\ iyi}, I)$ dir.

Tanım 4.1.26 τ ve τ^* X üzerinde iki soft topoloji ve $\tau \subseteq \tau^*$ ise τ soft topolojisi τ^* topolojisinden daha kabadır denir.

Tanım 4.1.27 $(\tilde{X}, \tau)$ bir soft topolojik uzay, $e_F \in \tilde{X}$ ve (G,B) X te bir soft küme olsun. Eğer $e_F \in (H,U) \subseteq (G,B)$ olacak biçimde bir (H,U) soft açık kümesi varsa, (G,B) soft kümesine e_F soft noktasının bir soft komşuluğu denir.

$e_F \in \tilde{X}$ soft noktasının τ topolojisine göre bütün soft komşuluklarından oluşan aile $N_\tau(e_F)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.28 $(\tilde{X}, \tau)$ U evreni üzerinde bir soft topolojik uzay, (F,A) ve (G,B) X te soft kümeler olsunlar. Eğer $(F,A) \subseteq (H,U) \subseteq (G,B)$ olacak şekilde bir $(H,U) \in \tau$ varsa, (G,B) soft kümesine bu uzayda (F,A) nin bir soft komşuluğu denir.

Teorem 4.1.29 $(\tilde{X}, \tau)$ bir soft topolojik uzay ve $e_F \in \tilde{X}$ olsun. Bu durumda $N_\tau(e_F)$ komşuluklar ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $(G,B) \in N_\tau(e_F)$ ise $e_F \in (G,B)$ dir.

(ii) $(G,B) \in N_\tau(e_F)$ ve $(G,B) \subseteq (M,C)$ ise $(M,C) \in N_\tau(e_F)$dir.

(iii) $(G,B),(M,C) \in N_\tau(e_F)$ ise $(G,B) \cap (M,C) \in N_\tau(e_F)$dir.

(iv) $(G,B) \in N_\tau(e_F)$ ise, öyle bir $(M,C) \in N_\tau(e_F)$ vardır ki, her $e'_H \in (M,C)$ için $(G,B) \in N_\tau(e'_H)$ dır.

Kanıt. (i) $(G,B) \in N_\tau(e_F)$ ise bir $(H,V) \in \tau$ için $e_F \in (H,V) \subseteq (G,B)$ dır. Buradan $e_F \in (G,B)$ elde edilir.

(ii) $(G,B) \in N_\tau(e_F)$ ve $(G,B) \subseteq (M,C)$ olsun. Bu durumda $(G,B) \in N_\tau(e_F)$ olduğundan bir $(H,V) \in \tau$ için $e_F \in (H,V) \subseteq (G,B)$ dır. Buradan $(G,B) \subseteq (M,C)$ olduğundan $e_F \in (H,V) \subseteq (M,C)$ olur ki bu $(M,C) \in N_\tau(e_F)$ olduğunu verir.

(iii) $(G,B),(M,C) \in N_\tau(e_F)$ olsun. Bu durumda $e_F \in (H,V) \subseteq (G,B)$ ve $e_F \in (S,T) \subseteq (M,C)$ olacak biçimde $(H,V),(S,T) \in \tau$ vardır. Teorem 4.1.11 (iv) den $e_F \in (H,V) \cap (S,T) \subseteq (G,B) \cap (M,C)$ olur. τ topoloji olduğundan $(H,V) \cap (S,T) \in \tau$ ve dolayısıyla $(G,B) \cap (M,C) \in N_\tau(e_F)$ bulunur.

(iv) $(G,B) \in N_\tau(e_F)$ ise bir $(S,T) \in \tau$ için $e_F \in (S,T) \subseteq (G,B)$ dir. $(M,C) :=(S,T)$ alınırsa her $e'_H \in (M,C)$ için $e'_H \in (M,C) \subseteq (M,C) \subseteq (G,B)$ olduğundan $(G,B) \in N_\tau(e'_H)$ olur.

Tanım 4.1.30 $(\tilde{X},\tau)$ U evreni üzerinde bir soft topolojik uzay, ve (G,B) X te bir soft küme olsun.

(i) (G,B) nin $(\tilde{X},\tau)$ daki soft kapanışı $\overline{(G,B)} = \cap\{(S,K) : (G,B) \subseteq (S,K)$ ve (S,K) soft kapalı$\}$ dır.

(ii) (G,B) nin $(\tilde{X},\tau)$ daki soft içi $(G,B)^\circ = \cup\{(S,T) : (S,T) \subseteq (G,B)$ ve (S,T) soft açık$\}$ dır.

Soft kapalı kümelerin F2 özelliğinden, $\overline{(G,B)}$ soft kapalıdır ve (G,B) yi içeren en küçük soft kapalı kümedir. Yani $\overline{(G,B)}$ (G,B) yi içeren tüm soft kapalı kümeler tarafından kapsanır. Benzer şekilde soft açık kümelerin T3 özelliğinden, $(G,B)^\circ$ soft açıktır ve (G,B) tarafından kapsanan en büyük soft açık kümedir.

Sonuç 4.1.31 $(\tilde{X},\tau)$ U evreni üzerinde bir soft topolojik uzay, (F,A) ve (G,B) X te soft kümeler olsunlar. Bu durumda

(i) (F,A) soft kapalıdır ancak ve ancak $(F,A) = \overline{(F,A)}$ dir.

(ii) (G,B) soft açıktır ancak ve ancak $(G,B) = (G,B)^{\circ}$ dir.

Teorem 4.1.32 Bir (G,B) soft kümesi soft açıktır ancak ve ancak (G,B) tarafından kapsanan her (F,A) soft kümesi için (G,B) (F,A) nın bir soft komşuluğudur.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Açık

$(\Leftarrow)$ $(G,B) \subseteq (G,B)$ olduğundan bir (H,V) soft açık kümesi vardır ki $(G,B) \subseteq (H,V) \subseteq (G,B)$ dir. Buradan $(H,V) = (G,B)$ ve dolayısıyla (G,B) soft açıktır.

Önerme 4.1.33 (X,τ) U evreni üzerinde bir soft topolojik uzay, (F,A) ve (G,B) X te soft kümeler olsunlar. Bu durumda

(i) $(F,A) \subseteq (G,B)$ ise $\overline{(F,A)} \subseteq \overline{(G,B)}$ dir.

(ii) $(F,A) \subseteq (G,B)$ ise $(F,A)^{\circ} \subseteq (G,B)^{\circ}$dir.

Kanıt. Açıktır.

Teorem 4.1.34 (X,τ) U evreni üzerinde bir soft topolojik uzay, (F,A) ve (G,B) X te soft kümeler olsunlar. Bu durumda

(i) $Co(\overline{(G,B)}) = (Co(G,B))^{\circ}$.

(ii) $Co((G,B)^{\circ}) = \overline{(Co(G,B))}$.

Kanıt. (i) Önerme 4.1.7 den

$$\begin{aligned}
Co(\overline{(G,B)}) &= \cup\{(S,K) : (G,B) \subseteq (S,K) \text{ ve } (S,K) \text{ soft kapalı}\} \\
&= \cap\{Co(S,K) : (G,B) \subseteq (S,K) \text{ ve } (S,K) \text{ soft kapalı}\} \\
&= \cap\{Co(S,K) : Co(S,K) \subseteq Co(G,B) \text{ ve } Co(S,K) \text{ soft açık}\} \\
&= (Co(G,B))^{\circ}
\end{aligned}$$

dir.

Diğer seçenek benzer şekilde Kanıtlanabilir.

4.2 Soft Küme Dizileri

Tanım 4.2.1 $\{(F_n,A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ soft kümelerin bir dizisi olsun.

(i) Her $n \geq m$ tamsayısı için $(F_n,A_n) \subseteq (F,A)$ olacak şekilde bir m tamsayısı varsa $\{(F_n, A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi sonunda (F, A) da kapsanır denir.

(ii) Her m tamsayısı için $(F_n, A_n) \tilde{\subseteq} (F, A)$ olacak şekilde bir $n \geq m$ tamsayısı varsa $\{(F_n, A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi sık sık (F, A) da kapsanıyor denir.

(iii) (X, τ) bir soft topolojik uzay, $\{(F_n, A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ bu uzayda bir dizi ve $(F, A) \tilde{\subseteq} \tilde{X}$. Eğer (F, A) nın her bir komşuluğu için $\{(F_n, A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi sonunda bu komşulukta kapsanıyorsa $\{(F_n, A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi (F, A) soft kümesine yakınsaktır denir.

Tanım 4.2.2 $\{(G_i, B_i) : i = 1, 2, ...\}$ ve $\{(F_n, A_n) : n = 1, 2, ...\}$ soft kümelerin iki dizisi olsun. $(G_i, B_i) = (F_{f(i)}, A_{f(i)})$ olacak biçimde öyle bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu vardır ki her m tamsayısı $i \geq n_0$ iken $f(i) \geq m$ olacak şekilde en az bir n_0 tam sayısı varsa $\{(G_i, B_i) : i = 1, 2, ...\}$ dizisine $\{(F_n, A_n) : n = 1, 2, ...\}$ dizisinin bir alt dizisidir denir.

Tanım 4.2.3 (X, τ) bir soft topolojik uzay ve (F, A) bir soft küme olsun. (F, A) nın her soft komşuluğunda sık sık kapsanan soft kümelerin bir dizisi varsa (F, A) ya bu dizinin yığılma soft kümesidir denir.

Teorem 4.2.4 Bir soft topolojik uzayda her kümenin komşuluklar ailesi sayılabilir olsun. Bu durumda;

(i) Bir (F, A) soft kümesi açıktır ancak ve ancak soft kümelerin her $\{(F_n, A_n) : n = 1, 2, ...\}$ dizisi (F, A) nın içinde kalan bir (G, B) soft kümesine yakınsak ise $\{(F_n, A_n) : n = 1, 2, ...\}$ dizisi sonunda (F, A) da kapsanır.

(ii) Eğer (F, A) soft kümelerin bir $\{(F_n, A_n) : n = 1, 2, ...\}$ dizisinin bir yığılma soft kümesi ise, bu durumda öyle bir alt dizi vardır ki bu dizi (F, A) soft kümesine yakınsaktır.

Kanıt. (i) $(\Rightarrow)$ (F, A) açık ve (G, B) nin bir komşuluğu olsun. Bu yüzden $\{(F_n, A_n) : n = 1, 2, ...\}$ dizisi sonunda (F, A) içinde kalır.

$(\Leftarrow)$ Her $(G, B) \tilde{\subseteq} (F, A)$ ve (G, B) nin bir $(F_1, U_1), (F_2, U_2), ..., (F_n, U_n), ...$ komşuluklar sistemi verilsin. $(H_n, V_n) = \tilde{\bigcap}_{i=1}^{n} (F_i, U_i)$ olsun. Burada (H_1, V_1), $(H_2, V_2), ..., (H_n, V_n), ...$ (G, B) nin her komşuluğunun içinde kalan bir dizidir. Yani (H_1, V_1), $(H_2, V_2), ..., (H_n, V_n), ...$ (G, B) ye yakınsaktır. Bu yüzden, her

m tamsayısı için öyle bir $n \geq m$ vardır ki, $(H_n, V_n) \subset (F, A)$ dır. (H_n, V_n) (G, B) nin komşuluğudur. Bu yüzden (F, A) soft açıktır.

(ii) $(K_1, R_1), (K_2, R_2), ..., (K_n, R_n), ...$ (F, A) nın bir komşuluklar sistemi olsun. $(L_n, S_n) = \bigcap_{i=1}^{n} (K_i, R_i)$ olsun. Burada $(L_1, S_1), (L_2, S_2), ..., (L_n, S_n), ...$ her n için $(L_{n+1}, S_{n+1}) \subseteq (L_n, S_n)$ olacak biçimde bir dizidir. Her negatif olmayan i tam sayısı için bir $f(i)$ yi, $f(i) \geq i$ ve $(F_{f(i)}, A_{f(i)}) \subseteq (L_i, S_i)$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $\{(F_{A_{f(i)}}, A_{f(i)}) : i = 1, 2, ...\}$ dizisi $\{(F_n, A_n) : n = 1, 2, ...\}$ dizisinin bir alt dizisidir ve açıkça bu alt dizi (F, A) ya yakınsaktır.

4.3 Soft Sürekli Fonksiyonlar

Bu bölümde fonksiyonların sürekliliği fikrini fonksiyonların soft sürekliliği fikrine genişleteceğiz. Başlangıç olarak soft kümelerin dönüşümler altındaki özelliklerini inceleyeceğiz .

Tanım 4.3.1 X ve Y iki parametre kümesi ve U evreni verilsin. f X den Y ye bir fonksiyon olsun. (G, B) Y de bir soft küme ise (G, B) soft kümesinin ters resmi $f^{-1}(G, B) = (f^{-1}(G), f^{-1}(B))$ biçiminde yazılır. Burada $f^{-1}(G)$ her $x \in f^{-1}(B)$ için, $(f^{-1}(G))(x) = G(f(x))$ biçiminde tanımlanır.

Tersine, (F, A) X te bir soft küme ise (F, A) nın görüntüsü $f(F, A) = (f(F), f(A))$ biçiminde yazılır. Burada $f(F)$ her $y \in f(A)$, $(f(F))(y) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} F(x)$ biçiminde tanımlanır.

Teorem 4.3.2 X, Y ve Z parametre kümeleri ve U evreni verilsin. $f : X \to Y$ fonksiyonu için, aşağıdakiler doğrudur.

(i) Y deki her (G, B) soft kümesi için, $f^{-1}(Co(G, B)) = Co(f^{-1}(G, B))$ dır.

(ii) X deki her (F, A) soft kümesi için, $f(Co(F, A)) \supseteq Co(f(F, A))$ dır.

(iii) (G, B) ve (H, C) Y de soft kümeler ve $(G, B) \subseteq (H, C)$ ise $f^{-1}((G, B)) \subseteq f^{-1}((H, C))$dir.

(iv) (F, A) ve (G, B) X de soft kümeler ve $(F, A) \subseteq (G, B)$ ise $f((F, A)) \subseteq f((G, B))$ dır.

(v) Y deki her (G,B) soft kümesi için $f(f^{-1}((G,B)))\subseteq(G,B)$dir.

(vi) X deki her (F,A) soft kümesi için $(F,A)\subseteq f^{-1}(f(F,A))$ dır.

(vii) g Y den Z ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda; Z deki her (H,C) soft kümesi için $(g\circ f)^{-1}(H,C) = f^{-1}(g^{-1}(H,C))$dir.

Kanıt. (i) $f^{-1}(Co(G,B)) = f^{-1}(G^{co}_B,Y)) = (f^{-1}(G^{co}_B), f^{-1}(Y))$ dir. Öte yandan; $Co(f^{-1}(G,B)) = Co(f^{-1}(G), f^{-1}(B)) = (f^{-1}(G)^{co}_{f^{-1}(B)}, X)$ bulunur. $f^{-1}(Y) = X$ olduğundan $f^{-1}(G^{co}_B) = f^{-1}(G)^{co}_{f^{-1}(B)}$ olduğunu göstermek Kanıt için yeterlidir.

Her $x\in X$ için $\left(f^{-1}(G)^{co}_{f^{-1}(B)}\right)(x) = \begin{cases} U - f^{-1}(G)(x) & x\in f^{-1}(B) \\ U & x\notin f^{-1}(B) \end{cases} =$

$\begin{cases} U - G(f(x)) & x\in f^{-1}(B) \\ U & x\notin f^{-1}(B) \end{cases} = \begin{cases} U - G(f(x)) & f(x)\in B \\ U & f(x)\notin B \end{cases}$ dur.

Öte yandan;

Her $x\in X$ için $(f^{-1}(G^{co}_B))(x) = G^{co}_B(f(x)) = \begin{cases} U - (G(f(x)) & f(x)\in B \\ U & f(x)\notin B \end{cases}$

olur ki bu $f^{-1}(G^{co}_B)$ ile $f^{-1}(G)^{co}_{f^{-1}(B)}$ nin eşit olduğunu verir. Dolayısıyla $f^{-1}(Co(G,B)) = Co(f^{-1}(G,B))$ dır.

(ii) $f(Co(F,A)) = f(F^{co}_A, X) = (f(F^{co}_A), f(X))$. Diğer taraftan, $Co(f(F,A))$ $= Co(f(F), f(A)) = (f(F)^{co}_{f(A)}, Y)$. Buradan $f(X)\subseteq Y$ ve her $y\in Y - F(X)$ için $f(F^{co}_A)(y) = \emptyset$ olduğundan her $y\in Y$ için $f(F^{co}_A)(y)\leq f(F)^{co}_{f(A)}(y)$ olduğunu gösterirsek Kanıt biter.

Her $y\in Y$ için$(f(F^{co}_A))(y) = \bigcup_{x\in f^{-1}(y)} F^{co}_A(x) = \bigcup_{x\in f^{-1}(y)} (U - F(x)) = U - \bigcap_{x\in f^{-1}(y)} F(x)$

Öte yandan;

Her $y\in Y$ için $(f(F))^{co}_{f(A)}(y) = U - (f(F))(y) = U - \bigcup_{x\in f^{-1}(y)} F(x) = \bigcap_{x\in f^{-1}(y)} (U - F(x))$ dur. Sonuç olarak $f(F^{co}_A)(y)\leq f(F)^{co}_{f(A)}(y)$ olur ve Kanıt biter.

(iii) $f^{-1}((G,B)) = (f^{-1}(G), f^{-1}(B))$ dir. Burada her $x \in f^{-1}(B)$ için

$$(f^{-1}(G))(x) = G(f(x)) = \begin{cases} G(f(x)) & , x \in f^{-1}(B) \\ \emptyset & , x \notin f^{-1}(B) \end{cases} \text{ dır.}$$

Öte yandan;

$f^{-1}((H,C)) = (f^{-1}(H), f^{-1}(C))$ dir. Buradan her $x \in f^{-1}(C)$ için

$$(f^{-1}(H))(x) = H(f(x)) = \begin{cases} H(f(x)) & , x \in f^{-1}(C) \\ \emptyset & , x \notin f^{-1}(C) \end{cases}$$

olur. $(G,B) \tilde{\subseteq} (H,C)$ olduğundan $B \subseteq C$ ve her $y \in Y$ için $G(y) \subseteq H(y)$ dir. Buradan $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(C)$ olduğundan $f^{-1}((G,B)) \tilde{\subseteq} f^{-1}((H,C))$ elde edilir.

(iv) $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ olsun. Bu durumda $A \subseteq B$ ve her $e \in X$ için $F(e) \subseteq G(e)$ dir. Burada $f((F,A)) = (f(F), f(A))$ ve $f((G,B)) = (f(G), f(B))$ ve her $y \in f(A)$ için $f(F)(y) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} F(x)$ ve her $y \in f(B)$ için $f(G)(y) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} G(x)$ dur. Buradan $f(A) \subseteq f(B)$ ve her $y \in Y$ için $\bigcup_{x \in f^{-1}(y)} F(x) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} G(x)$ olduğundan $f((F,A)) \tilde{\subseteq} f((G,B))$ dir.

(v) (G,B) Y de bir soft küme olsun. Burada $f(f^{-1}(G,B)) = f(f^{-1}(G), f^{-1}(B)) = (f(f^{-1}(G)), f(f^{-1}(B)))$ ve her $y \in Y$ için $(f(f^{-1}(G)))(y) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} (f^{-1}(G))(x) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} G(f(x)) = G(y)$ ve $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ olduğundan istenen elde edilir.

(vi) (F,A) X de bir soft küme olsun. Burada $f^{-1}(f(F,A)) = f^{-1}(f(F), f(A))$ $= (f^{-1}(f(F)), f^{-1}(f(A)))$ ve her $x \in X$ için $(f^{-1}(f(F)))(x) = (f(F))(f(x)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(f(x))} F(x) \supseteq F(x)$ ve $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ olduğundan istenen kapsam elde edilir.

(vii) (H,C) Z de bir soft küme olsun. Burada $(g \circ f)^{-1}(H,C) = ((g \circ f)^{-1}(H), (g \circ f)^{-1}(C))$ ve $f^{-1}(g^{-1}(H,C)) = f^{-1}(g^{-1}(H), g^{-1}(C)) = (f^{-1}(g^{-1}(H)), f^{-1}(g^{-1}(C)))$ dır.

Her $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$ için $((g \circ f)^{-1}(H))(x) = H((gof)(x))$ olur.

Öte yandan Her $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$ için $(f^{-1}(g^{-1}(H)))(x) = (g^{-1}(H)(f(x)) = H(g(f(x)))$ dır. Buradan $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ ve $H((gof)(x)) =$

$H(g(f(x)))$ olduğundan Kanıt biter.

Tanım 4.3.3 $(\tilde{X}, \tau)$ and $(\tilde{Y}, \tau^*)$ U evreni üzerinde soft topolojik uzaylar, $f : (\tilde{X}, \tau) \to (\tilde{Y}, \tau^*)$ bir fonksiyon ve $e_F \in \tilde{X}$ olsun. Bu durumda;

(i) Eğer her $(G, B) \in N_{\tau^*}(f(e_F))$ için, $f((M, C)) \subseteq (G, B)$ olacak biçimde en az bir $(M, C) \in N_\tau(e_F)$ mevcut ise bu f fonksiyonuna, e_F soft noktasında soft süreklidir denir.

(ii) Eğer f fonksiyonu her $e_F \in \tilde{X}$ soft noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna $\tilde{X}$ üzerinde soft süreklidir veya kısaca soft süreklidir denir.

Teorem 4.3.4 $(\tilde{X}, \tau)$ and $(\tilde{Y}, \tau^*)$ U evreni üzerinde iki soft topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $e_F \in \tilde{X}$ ise aşağıdakiler denktir.

(i) f e_F de süreklidir.

(ii) Her $(G, B) \in N_{\tau^*}(f(e_F))$ için bir $(M, C) \in N_\tau(e_F)$ vardır öyleki $(M, C) \subseteq f^{-1}((G, B))$ dir.

(iii) Her $(G, B) \in N_{\tau^*}(f(e_F))$ için $f^{-1}((G, B)) \in N_\tau(e_F)$ dir.

Kanıt. Kanıt açıktır.

Teorem 4.3.5 $(\tilde{X}, \tau)$ and $(\tilde{Y}, \tau^*)$ U evreni üzerinde iki soft topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ise aşağıdakiler denktir.

(i) f X de soft süreklidir.

(ii) Her $(H, V) \in \tau^*$ için $f^{-1}((H, V)) \in \tau$ dur.

(iii) Y deki her (F, K) kapalı soft kümesi için $f^{-1}((F, K))$ X de soft kapalı kümedir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $(H, V) \in \tau^*$ ve $e_F \in f^{-1}((H, V))$ olsun. Biz $f^{-1}((H, V)) \in N_\tau(e_F)$ olduğunu göstereceğiz. $f(e_F) \in (H, V)$ ve $(H, V) \in \tau^*$ olduğundan $(H, V) \in U_{\tau^*}(f(e_F))$ dir. Buradan f, $e_F \in \tilde{X}$ de sürekli olduğundan $(M, C) \in U_\tau(e_F)$ vardır öyleki $f((M, C)) \subseteq (H, V)$ dir. Böylece $e_F \in (M, C) \subseteq f^{-1}((H, V))$ ve dolayısıyla $f^{-1}((H, V)) \in N_\tau(e_F)$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) (F, K) Y de soft kapalı küme olsun. Dolayısıyla $Co(F, K) \in \tau^*$ ve (ii) den $f^{-1}(Co(F, K)) \in \tau$ dur. Buradan $f^{-1}(Co(F, K)) = Co(f^{-1}((F, K)))$ olduğundan $f^{-1}((F, K))$ X de soft kapalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) (ii) $\Rightarrow$ (iii) Kanıtına benzer şekilde yapılır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $e_F \in \tilde{X}$ ve $(G,B) \in N_{\tau^*}(f(e_F))$ olsun. Bu durumda bir $(H,V) \in \tau^*$ soft açık kümesi vardır öyleki $f(e_F) \in (H,V) \subset (G,B)$ dir. (ii) den $f^{-1}((H,V)) \in \tau$ ve $e_F \in f^{-1}((H,V)) \subset f^{-1}((G,B))$ dir. Bu ise $f^{-1}((G,B)) \in N_\tau(e_F)$ olduğunu verir. Dolayısıyla her $e_F \in \tilde{X}$ soft noktasında f soft süreklidir.

Teorem 4.3.6 $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ U evreni üzerinde soft topolojik uzaylar olsunlar. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için, aşağıdaki durumları düşünebiliriz:

(i) f soft süreklidir;

(ii) $\tilde{X}$ deki her (F,A) soft kümesi için $f((F,A))$ soft kümesinin her komşuluğunun ters resmi (F,A) soft kümesinin bir soft komşuluğudur,

(iii) $\tilde{X}$ deki her (F,A) soft kümesi için ve $f((F,A))$ nın her (H,C) komşuluğu için , (F,A) nın öyle bir (G,B) komşuluğu vardır öyleki $f((G,B)) \subset (H,C)$dir,

(iv) X deki bir (F,A) soft kümesine yakınsayan soft kümelerin her $\{(F_n,A_n) : n = 1,2,...\}$ dizisi için, $\{f((F_n,A_n)) : n = 1,2,...\}$ dizisi de $f((F,A))$ ya yakınsaktır.

Kanıtı (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) sırasıyla yapacağız. Ayrıca, $\tilde{X}$ deki her soft kümenin komşuluklar sistemi sayılabilir ise (iv) (i) yı gerektirir ve bu yüzden tüm durumlar denktir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) f sürekli olsun. Eğer (H,C) $f((F,A))$ nın bir soft komşuluğu ise (H,C) $f((F,A))$ nın bir (G,B) açık komşuluğunu içerir. Buradan $f((F,A)) \subset (G,B) \subset (H,C)$ olduğundan, $f^{-1}(f((F,A))) \subset f^{-1}((G,B)) \subset f^{-1}((H,C))$ dır. $(F,A) \subset f^{-1}(f((F,A)))$ ve $f^{-1}((G,B))$ soft açık olduğundan $f^{-1}(H,C)$ (F,A) nın bir soft komşuluğu olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Kanıt için bir önceki teoremi kullanacağız. (G,B), Y de soft açık küme olsun. Bu durumda $f^{-1}((G,B))$ X de soft kümedir. (F,A) $f^{-1}((G,B))$ nin her hangi bir altkümesi olsun. Dolayısıyla (G,B), $f((F,A))$ nın açık komşuluğu olur ve (ii) den $f^{-1}((G,B))$ (F,A) nın komşuluğu olur. Bu ise $f^{-1}((G,B))$ nin bir açık soft küme olduğunu verir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) (F,A), X herhangi bir soft küme olsun ve (H,C), $f((F,A))$ nın herhangi bir soft komşuluğu olsun. (ii) den, $f^{-1}((H,C))$, (F,A) nın bir soft komşuluğudur. Bu durumda X de bir (H,V) soft açık kümesi için vardır ki $(F,A) \subseteq (H,V) \subseteq f^{-1}(H,C)$ dır. Böylece, (F,A) nın bir soft açık komşuluğu olan (H,V) ye sahibiz ve $f((F,A)) \subseteq f((H,V)) \subseteq (H,C)$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) (H,C) $f((F,A))$ nın bir soft komşuluğu olsun. Burada (F,A) nın bir (G,B) soft komşuluğu vardır ki $f(G,B) \subseteq (H,C)$ dir. Böylece $f^{-1}(f((G,B)))$ $\subseteq f^{-1}((H,C))$ dir. Dahası, $(G,B) \subseteq f^{-1}(f((G,B)))$ olduğu için, $f^{-1}((H,C))$ (F,A) nın soft komşuluğudur.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) (H,C) $f((F,A))$ nın bir soft komşuluğu ise, (F,A) nın bir (G,B) soft komşuluğu vardır ki $f((G,B)) \subseteq (H,C)$ dir. Burada $\{(F_n,A_n) : n = 1,2,...\}$ (G,B) içinde kaldığından dolayı, $n \geq m$ için $f((F_n,A_n)) \subseteq f((G,B)) \subseteq (H,C)$ dır. Dolayısıyla $(F_n,A_n) \subseteq (G,B)$ dır. Bu yüzden, $\{f((F_n,A_n)) : n = 1,2,...\}$ $f((F,A))$ ya yakınsaktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Varsayalım X deki her soft kümenin komşuluklar sistemi sayılabilir olsun. (G,B) Y deki herhangi bir soft açık küme olsun. Bu durumda $f^{-1}((G,B))$ X de bir soft açık kümedir. (F,A) $f^{-1}((G,B))$ nin herhangi bir soft altkümesi olsun, ve $(F_1,U_1),(F_2,U_2),...,(F_n,U_n),...$ soft kümeleri (F,A) nın komşuluklar sistemi olsun. Burada $(H_n,V_n) = \cap_{i=1}^{n}(F_i,U_i)$ biçiminde alalım. Dolayısıyla $(H_1,V_1),(H_2,V_2),...,(H_n,V_n),...$ dizisi (F,A) nın her soft komşuluğunun içinde kalır, (H_1,V_1), $(H_2,V_2),...,(H_n,V_n),...$dizisi (F,A) ya yakınsar. Bu yüzden, bir m sayısı vardır öyleki $n \geq m$ için , $(H_n,V_n) \subset f^{-1}((G,B))$ dir. Çünkü her n için, (H_n,V_n) (F,A) nın bir soft komşuluğudur, $f^{-1}((G,B))$ (F,A) nın bir soft komşuluğu olmasından. Bu gösterir ki $f^{-1}((G,B))$ soft açıktır.

4.4 Kompakt Soft Topolojik Uzaylar

Bu kesimde Kompaktlık kavramı soft topolojik uzaylar için tartışılacak ve bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.4.1 Soft kümelerin $(F,A) \overset{s}{\subseteq} \cup\{(F_{A_i},A_i) : (F_{A_i},A_i) \in \tau, i \in I\}$

olacak şekilde bir ª ailesine (F, A) soft kümesinin bir örtüsü denir. Burada ª nin elemanlarının her biri soft açık küme ise ª ye soft açık örtü, ª nin örtü olan bir altailesine ª nin bir altörtüsü adı verilir.

Tanım 4.4.2 Soft kümelerin bir ª ailesinin sonlu sayıda elemanından oluşan her altailesinin standart soft kesişimi boş soft küme değilse bu ª ailesine sonlu standart soft kesişim özelliğine sahiptir denir.

Tanım 4.4.3 Bir $(\tilde{X}, \tau)$ soft topolojik uzayında $\tilde{X}$ in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu $(\tilde{X}, \tau)$ topolojik uzayına kompakttır denir

Teorem 4.4.4 Bir soft topolojik uzay kompakttır ancak ve ancak soft kapalı kümelerin sonlu standart soft kesişim özelliğine sahip her ailesinin standart soft kesişimi boş soft kümeden farklıdır.

Kanıt.. Eğer ª bir $\tilde{X}$ soft topolojik uzayında soft kümelerin bir ailesi ve ª, $\tilde{X}$ in bir örtüsüdür ancak ve ancak aşağıdaki koşullardan biri sağlanır:

(i) $\bigcup_{i \in I} \{(F_i, A_i) : (F_i, A_i) \in$ ª$\} = \tilde{X}$,

(ii) $Co(\tilde{\bigcup}_{i \in I} \{(F_i, A_i) : (F_i, A_i) \in$ ª$\}) = Co(\tilde{X}) = \tilde{\emptyset}$,

(iii) $\tilde{\bigcap}_{i \in I} \{Co(F_i, A_i) : (F_i, A_i) \in$ ª$\} = \tilde{\emptyset}$.

Bu yüzden $\tilde{X}$ soft uzayı kompakttır ancak ve ancak $\tilde{X}$ deki soft açık kümelerin $\tilde{X}$ i örten sonlu altailesi olmayan her ailesi X i örtemez ve bu doğrudur ancak ve ancak soft kapalı kümelerin sonlu standart soft kesişim özelliğine sahip her ailesinin standart soft kesişimi boş soft küme değildir.

Teorem 4.4.5 f, $\tilde{X}$ kompakt soft topolojik uzayından $\tilde{Y}$ soft topolojik uzayına örten bir soft sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $\tilde{Y}$ kompakttır.

Kanıt. ª $= \{(G_{B_i}, B_i) : i \in I\}$, Y deki soft açık kümelerden oluşan Y nin bir örtüsü olsun. Bu durumda f soft sürekli olduğundan her $(G_i, B_i) \in$ ª için $f^{-1}((G_i, B_i))$ açık soft kümeleri X in bir sonlu bir alt örtüye sahip bir açık örtüsüdür. Bu alt örtü ª$_0 = \{f^{-1}((G_i, B_i)) : i \in I_0 \subseteq I\}$ olsun. f örten olduğundan $Y = f(X) = f(\tilde{\bigcup}_{i \in I_0} f^{-1}((G_i, B_i))) \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcup}_{i \in I_0} (G_i, B_i)$ elde edilir ki bu Y nin soft kompakt olduğunu verir.

KAYNAKLAR

[1] Aktaş, H. ve Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups, Inform. Sci., 177(13), 2726-2735.

[2] Aktaş, H. ve Çağman, N. (2005). Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler, Çankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Journal of Arts and Sciences, Sayı: 3

[3] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. ve Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory, Comput. Math. Appl. 57, 1547-1553.

[4] Atasanov, K. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems. 20, 87-96.

[5] Azad, K. K. (1981). On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity, J. Math. Anal. Appl., 82, 14-32.

[6] Chang, C.L. (1968). Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 245, 182-190.

[7] Feng, F., Jun, Y.B., Zhao, X.Z. (2008). Soft semirings, Comput. Math. Appl., 56, 2621-2628.

[8] Gau, W.L. ve Buehrer, D. J. (1993). Vague sets, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol.23, 610-614.

[9] Lashin, E. F., Kozae, A. M., Abo Khadra, A. A. ve Medhat, T. (2005). Rough set for topological spaces, Int. J. of Approximate Reasoning, 40, 35-43.

[10] Lin, T.Y. (1988). Neighborhood systems and relational database, in Proceedings of 1988 ACM Sixteen Annual Computer Science Conference., February 23-25, 725.

[11] Lin, T.Y., Huang, K.J., Liu, Q., ve Chen, W. (1990). Rough Sets, Neighborhood systems and approximation. in: Proceedings of the Fifth International Symposium an Methodolagies af Intelligent Systems. Selected Papers, Knoxville, Tennessee, October 25-27, 130-141.

[12] Lin, T.Y. (1992). Topological and fuzzy rough sets. In: R. Slowinski, Editor, Decision Support by Experience Application of the Rough Sets Theory,

Kluwer Academic Publishers, 287-304.

[13] Lin, T.Y. (1998). Granular computing on binary relations I: Data mining and neighborhood systems, in Rough Sets In Knowledge Discovery, Physica-Verlag, 121-140.

[14] Maji, P.K., Biswas, R. ve Roy, A.R. (2003). Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45, 555-562.

[15] Ming, P. P. ve Ming, L. Y. (1980). Fuzzy topology I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-smith convergence, J. Math. Anal. Appl., 76, 571-599.

[16] Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results, Computers Mathematics with Applications. 37, 19-31.

[17] Palaniappan, N. (2005). Fuzzy Topology, Alpha Science International Ltd. Harrow, U.K.

[18] Pawlak, Z. (1982). Rough sets, Int. J. of Information and Computer Sciences, 11, 5, 341-356.

[19] Pawlak, Z. (1991). Rough Sets, Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic, Boston.

[20] Pei, D. ve Miao, D. (2005). “From soft sets to information systems” in Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing, 2, 617–621.

[21] Yang, C.F. (2008). A note on soft set theory, Comput. Math. Appl. 56, 1899-1900.

[22] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Sivas'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladı. 2006 yılında, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2007 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı.